

全国中学生物理竞赛委员会常委会 编写

全国中学生物理竞赛

1~20届 试题解析



力学分册



清华大学出版社



全国中学生物理竞赛分类试题解析丛书

全国中学生物理竞赛委员会常委会 编写

全国中学生物理竞赛 1~20届试题解析

力学分册

清华大学出版社

北京

内 容 简 介

全国中学生物理竞赛分类试题解析丛书汇集了第1~20届全国中学生物理竞赛理论试题、实验试题及参考解答,并对大部分试题进行了分析评述。丛书按学科内容体系编辑成力学、电学、热学、光学与近代物理及实验等四个分册出版。本套丛书是由全国中学生物理竞赛委员会常委会编写的,该常委会集中了北京大学、清华大学、北京师范大学、复旦大学、首都师范大学等学校的著名教授专家,书中所收入的试题是由他们精心编写和挑选的,具有很高的权威性和指导性。

本书是这套丛书的力学分册,针对1984—2004年力学部分的理论试题按照相关的知识点分类,并对试题进行了具体的剖析。这些试题有相当难度,对训练学生的综合思维能力和提高解题技巧大有裨益。本书可供全国高中学生、中学物理教师及师范院校物理系师生教学参考。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

全国中学生物理竞赛1~20届试题解析.力学分册/全国中学生物理竞赛委员会常委会编写.——北京:清华大学出版社,2005.9

(全国中学生物理竞赛分类试题解析丛书)

ISBN 978-7-302-10716-3

I. 全… II. 全… III. ①物理课—中学—解题 ②力学—中学—解题 IV. G634.75

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第023761号

责任编辑:孙中悦

封面设计:傅瑞学

版式设计:刘祯森

责任印制:何 芊

出版发行:清华大学出版社

地 址:北京清华大学学研大厦A座

<http://www.tup.com.cn>

邮 编:100084

社 总 机:010-62770175

邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:清华大学印刷厂

经 销:全国新华书店

开 本:185×230 印 张:19.5 字 数:391千字

版 次:2005年9月第1版 印 次:2011年1月第3次印刷

印 数:8001~10000

定 价:26.00元

产品编号:016303-01

前言

从1984年开始到2004年底,全国中学生物理竞赛已举行了21届,共计有300万高中学生参加,在社会上具有良好的声誉。全国中学生物理竞赛活动是经国家教育部批准,由中国科协主管,并由中国物理学会主办的。物理竞赛活动自举办以来始终遵循着这样的宗旨,即激发优秀学生学习物理学的兴趣和积极性,开发他们潜在的智力,提高他们的能力和创造精神,促进他们科学素质的提高。20多年来,物理竞赛活动健康发展,同时对中学物理教学的改进和教学质量的提高也起到了一定的作用。

物理竞赛题无疑会对参赛学生的学习和努力方向起着引导作用,其中很多质量较高的试题,对于提高学生学习物理的兴趣,鼓励学生在学好课内知识的基础上深入学习、独立思考,促使学生扩大视野和改进学习方法,启迪和开发智力,尤其是在锻炼他们灵活地、创造性地进行科学思维和培养解决问题的能力等方面发挥了较好的作用。为了适应广大中学师生的需要,我们编辑了本书,汇集了第1~20届全国中学生物理竞赛试题(理论题和实验题)及参考解答,由命题组部分教师对大部分题目进行了剖析,并按学科内容体系编辑成力学,电学,热学、光学和近代物理及实验等四册出版。同时将《全国中学生物理竞赛内容提要》一并收入。对于如何利用本书我们提出以下几点建议:

1. 要以正确的教育思想指导使用。教育必须贯彻因材施教的原则,要按教育和教学的规律办事。要从学生的实际出发,以扎扎实实打好知识、能力、非智力因素等各方面的基础为前提,启发引导,充分调动学生的主观能动作用,使学生得以充分发挥潜力,达到与其智力发展水平相适应的高水平。必须重视能力和非智力因素的培养与

提高,以达到全面提高学生科学素质的要求。

2. 物理竞赛是学有余力并对物理有兴趣的高中学生参加的一项课外活动,竞赛题是为这些学生设计的,因此不能要求多数学生都来做这些题目。

3. 由于在竞赛中要求将学习特别优秀的学生选拔出来,部分题目无论是理论题或实验题难度较大,对能力的要求较高,即使是班上的优秀学生也不一定都能做出来,有时需要用很多的时间才能解出一个题目,这是正常的情况。正是在这种尝试、失败、再尝试的反复思考、探索过程中,学生才能发现自己对物理概念、物理原理的理解和灵活运用以及实践能力等方面存在的问题,才能在分析问题和解决问题的能力上获得突破和提高。久思不得其解,一旦迎刃而解,就会有豁然顿悟之感,这种不懈追求真知的精神更将永久受用。因此,千万不要盲目追求做题的数量。应该让学生在完成课内学习任务后自由选择做题,我们特别强调:在解题过程中,学生应独立思考,独立完成;必要时教师可以从旁指点引导,切忌越俎代庖,以“教”代“学”,更不要揠苗助长。不要把本应发挥学生主观能动性的课外学习活动又变为学生被动接受知识的过程。

4. 在个人认真钻研的基础上,同学间进行相互讨论或争辩对提高水平十分有益,应予提倡。同学们处在平等的地位上,讨论时没有顾虑,发表意见能比较充分,要想说服对方就必须把问题真正搞清楚。别人的质疑和诘难可以揭露出自己在理解中存在的片面问题,以使自己更为深入、更加全面地思考。在讨论或争辩过程中双方都将受益,而且这也有助于培养自己与他人互相尊重、平等相处的作风和习惯。

5. 竞赛活动为参赛学生提供了有利于课外学习的环境和条件,这种学习包括认真读书、观察和研究现象、进行实验、讨论和辩论以及参加某些实践活动等。要特别强调的是,做习题或研究习题只是其中一个学习环节,千万不要误认为学物理就是做习题。否则不仅学不好物理,而且对提高自己的科学素养也很有害。

我们衷心希望物理竞赛活动能帮助学生生动活泼地进行学习,能促进他们主动获取新知识并能评价新知识,能将他们培养成为具有较强的科学思维能力、实践能力,能独立思考,具有创造精神的科学技术后备人才。

全国中学生物理竞赛委员会名誉主任: 沈克琦

全国中学生物理竞赛委员会主任: 孙树桐

目 录

- ◆ 1 一、运动学
- ◆ 31 二、牛顿定律
- ◆ 65 三、静力学
- ◆ 133 四、动量 能量
- ◆ 225 五、万有引力 卫星和天体运动
- ◆ 251 六、振动和波
- ◆ 293 附录 全国中学生物理竞赛内容提要

一、运动学

1. 顶杆 AB 可在竖直滑槽 K 内滑动, 其下端由凸轮 M 推动, 凸轮绕 O 轴以匀角速 ω 转动, 见图 1-1, 在图示的瞬时, $OA=r$, 凸轮轮缘与 A 接触处法线 n 与 OA 之间的夹角为 α , 试求此瞬时顶杆 AB 的速度.

解析

解法 I 取动坐标系固连在凸轮上, 定坐标系固连在滑槽 K 上, 动点 A (也就是顶杆 AB) 相对定坐标系的运动是竖直的直线运动, 动点 A 相对动坐标系的轨迹就是凸轮的轮廓线. 因此, 动点 A 对定坐标系的速度 v_A 、动点对动坐标系的速度 v_r 和动坐标系上与动点 A 重合点相对于定坐标系的速度 v_e . 三者, 根据相对运动的速度关系应组成三角形, 见图 1-2, 因此有

$$v_A = v_e \tan \alpha = r \omega \tan \alpha$$

解法 II t 时刻顶杆与凸轮的接触点为 A, 经 Δt 时间, 即 $t + \Delta t$ 时刻, 接触点为凸轮上的 A' 点 (在 t 时刻凸轮上的接触点因轮在 Δt 时间内转过 $\Delta \theta$ 角而到达 A_1 处), 如图 1-3 所示, 则

$$\Delta r = r(t + \Delta t) - r(t) = r \Delta \theta \cdot \tan \alpha$$

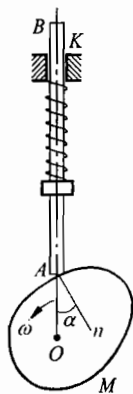


图 1-1

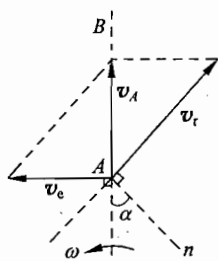


图 1-2

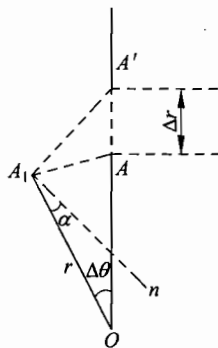


图 1-3

因此有

$$v_A = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = r \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \tan \alpha = r \omega \tan \alpha$$

本题提供了两种不同的解法. 解法 I 的依据是经典的速度变换公式, 亦称伽利略速度变换. 解法 II 的依据是速度的定义.

若物体 A 相对参考系 C 的速度为 v_{AC} , 相对参考系 B 的速度为 v_{AB} , 而参考系 B 相对参考系 C 的速度为 v_{BC} , 则有

$$v_{AC} = v_{AB} + v_{BC}$$

这便是经典的速度变换公式, 它给出了同一物体相对两个具有相对运动的参考系的速度之间的关系. 写出这一公式时, 已经假定了参考系 C 是静止的, 是定参考系或静参考系; 参考系 B 是运动的, 是动参考系. 通常称物体相对定参考系的速度为绝对速度, 相对动参考系的速度为相对速度, 而动参考系相对定参考系的速度称为牵连速度. 上式表明, 物体的绝对速度等于相对速度与牵连速度的矢量和. 强调矢量和是非常重要的, 因为一般情况下, 绝对速度的大小并不等于相对速度的大小和牵连速度的大小之和.

在写出上式时是有前提的, 例如, 认为在不同参考系中测量同一物体发生某位移时所经历的时间是相同的. 这在经典力学中是理所当然的(也与我们日常观测的现象一致). 其实这只是物体在低速运动时的一种近似. 严格地说并不相同, 物体运动的速度越大, 这种不同就越显著, 当物体运动的速度接近光在真空中的速度时, 这种不同就特别显著. 这时经典的速度变换公式必须用相对论变换公式代替.

解法 II 是在地面参考系中从速度的定义来考虑问题. 在 t 时刻, 杆与凸轮的接触点为 A, 这一点既在杆上, 即杆的下端 A, 也在凸轮上; 在 $t + \Delta t$ 时刻, 凸轮上的原来与杆 A 端的接触点因轮在 Δt 时间内转过 $\Delta \theta$ 角而到达图 1-3 中的 A_1 处, 而杆的下端则沿竖直方向移到图 1-3 中的 A' 处, 杆的下端在 Δt 时间内的位移的大小等于 A 与 A' 之间的距离, 亦即 $t + \Delta t$ 时刻 O 点到 A' 的距离 $r(t + \Delta t)$ 与 t 时刻 O 点到 A 的距离 $r(t)$ 之差, 即

$$\Delta r = r(t + \Delta t) - r(t)$$

杆 AB 的速度大小为

$$v_A = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

因 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\Delta \theta$ 也趋向于零, $\angle A_1 A A' \approx \frac{\pi}{2}$; 因 n 与 $A_1 A'$ 垂直, $\angle O A_1 A \approx \frac{\pi}{2}$, 故有 $\angle A A_1 A' = \alpha$. 于是便有 $\Delta r = r \omega \Delta t \cdot \tan \alpha$ 这一结论.

本题给出的两种解法中, 画图的作用极为重要, 不画图, 不会画图或者不愿画图, 就很难找出相应的几何关系, 当然也就很难求得问题的解.

2. 一木板竖直地立在车上,车在雨中匀速行进一段给定的路程.木板板面与车前进方向垂直,其厚度可忽略.设空间单位体积中的雨点数目处处相等,雨点匀速竖直下落,下列诸因素中与落在木板面上雨点的数量有关的因素是().

- (A) 雨点下落的速度 (B) 单位体积中的雨点数
(C) 车行进的速度 (D) 木板的面积

解析

B、D

很容易判断 B、D 是正确的. A、C 为什么是错的呢? 以下落的雨点为参照系,则雨是不动的,而板沿与水平成某一仰角的方向运动扫过不动的雨点,单位时间内碰到板上的雨点数应与板相对于雨点的沿水平方向的分速度有关,而与竖直分速度无关,而此竖直分量的大小等于雨点相对地面速度的大小.由此可知选项 A 是错的.下面说明选项 C 也是错误的,令 S 代表板面积, v 代表木板速度, l 代表全程,则单位时间内扫过的雨点数为 Svn , n 为单位体积中的雨点数. 全程扫过的雨点数为 $Svn \cdot \frac{l}{v} = Snl$, 即与 v 无关,速度越快,全程用的时间越短.所以选项 C 也是错误的.也可以以板为参照系来分析,这时板不动而雨点沿斜方向打在板面上.单位时间内打在板上的雨点数决定于雨点相对于板沿水平方向的分速度,故其值仍为 Svn , 全程雨点数仍为 $Svn \cdot \frac{l}{v} = Snl$. 结论同上.

3. 放映电影时,看到影片中的一辆马车从静止起动,逐渐加快,在某一时刻车轮开始倒转.已知电影放映机的速率是每秒 30 幅画面,车轮的半径是 0.6m,有 12 根辐条.则马车的瞬时速度刚超过 _____ m/s 时,车轮开始倒转.

解析

1. 5π .

先举一个想像的例子说明为什么车轮本来是正转的但看起来却像是倒转的现象. 设一个转轮只有一根辐条(见图 1-4), 轮顺时针转,在闪光照射下,辐条起始位置在 0 处,计为第 0 次闪光,若轮转速较慢,第 1 次闪光时辐条随轮转到图 1-4 中位置 1 处,第 2 次闪光时转到位置 2 处,……这样看起来车轮是顺时针转. 但若转速适当地快,第 1 次闪光时辐条已转到超过 180° 而到 $1'$ 处,第 2 次闪光时位于 $2'$ 处,……这样你就会误认为车轮是沿逆时针转的. 不难看出,发生这种现象的条件是和闪光的闪频与转速(转频)两者的关系有关的. 下面回到原题. 12 根辐条,相邻两条之间的夹角为 $\frac{\pi}{6}$, 设 0 次闪光时各辐条位置

如图 1-5 中 1 至 12 所示,若第 1 次闪光时辐条 1 和辐条 12 的位置刚超过 $\frac{\pi}{12}$ (图中 $C1'$ 和 $C12'$ 虚线),则看起来就像是辐条 1 转到位置 $12'$ 处,而辐条 2 转到位置 $1'$ 处,此时可认为是逆时针转. 因此看起来开始发生逆时针转时应有下列关系式

$$\frac{1}{30}v > \frac{\pi}{12}R$$

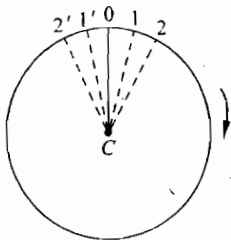


图 1-4

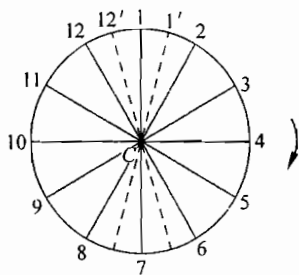


图 1-5

式中 30 是闪光每秒的频闪次数, v 为此时轮子边缘的线速度,也就等于此时马车前进的速度, R 是车轮的半径. 代入数值,大于号改为等号可得

$$v = 1.5\pi \text{ m/s}$$

看电影时观察车轮的转动,或在日光灯下观看转动的电扇等,都可能看到类似的一些似乎有点“怪”的现象. 这类现象都是在一定频率的闪烁光照射下(如电影机的换片频率,日光灯的交流电频率),看一个以某一频率转动的物体. 当这两个频率满足某些关系时,就会看到某些不同的似乎是“很怪”的图像. 题中所说的只是一种图像. 分析这类问题的思路都是类似的. 学生可从分析两个频率的关系着手,仔细研究这类现象,就不觉得奇怪了.

4. 在地球赤道上的 A 处静止放置一个小物体. 现在设想地球对小物体的万有引力突然消失,则在数小时内,小物体相对于 A 点处的地面来说,将().

- (A) 水平向东飞去
- (B) 原地不动,物体对地面的压力消失
- (C) 向上并渐偏向西方飞去
- (D) 向上并渐偏向东方飞去
- (E) 一直垂直向上飞去

解析

C.

从地球外面的惯性参照系来看,物体沿切线方向向东匀速直线飞去(见图 1-6).

A 为开始飞出点, B, C, D, \dots 为经过 2h, 4h, 6h, \dots 后的 A 点位置. b, c, d, \dots 为经过 2h, 4h, 6h, \dots 后物体在空间的位置. Bb, Cc, Dd, \dots 为地面观察者观看物体的视线.

在地面上 A 点的观察者看来, 这些视线相对于他的方向和距离如图 1-7 所示. 将 A, b, c, d, \dots 用光滑的曲线连接起来就是从地球上观察到的物体的运动轨迹 $Abcd\dots$ 即 2h 后物体到 b 点处, 4h 后物体到 c 点处, 6h 后物体到 d 点处 \dots 所以从地球上观察, 小物体相对于 A 点处的地面来说从原地向上升起并渐偏向西方飞去.

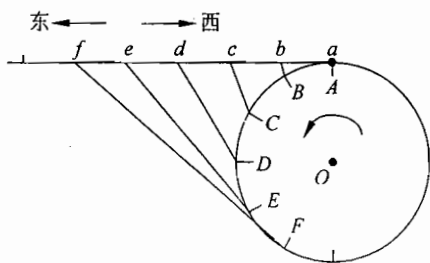


图 1-6

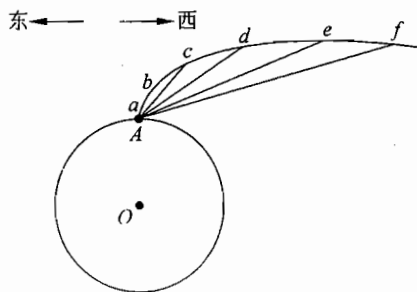


图 1-7

5. 下雨时, 雨点竖直下落到地面, 其速度为 10m/s . 若在地面上放一横截面积为 80cm^2 、高为 10cm 的圆柱形量筒, 则经 30min , 筒内接得雨水水面高度为 1cm . 现因风的影响, 雨水下落时偏斜 30° , 若用同样的量筒接得雨水量与无风时相同, 则所需时间为 _____ min.

解析

30.

落入量筒中的雨水, 与雨水下落时沿竖直方向的速度有关, 现由于风的影响, 虽然雨水下落时偏斜 30° , 但竖直方向的速度没变, 所以所需时间仍为 30min .

6. 如图 1-8 所示, 杆 OA 长为 R , 可绕过 O 点的水平轴在竖直平面内转动, 其端点 A 系着一跨过定滑轮 B, C 的不可伸长的轻绳, 绳的另一端系一物块 M . 滑轮的半径可忽略, B 在 O 的正上方, OB 之间的距离为 h . 某一时刻, 当绳的 BA 段与 OB 之间的夹角为 α 时, 杆的角速度为 ω , 求此时物块 M 的速率 v_M .

解析

杆的端点 A 点绕 O 点做圆周运动, 其速度 v_A 的方向与杆 OA 垂直, 在所考查时其大小为

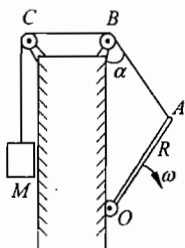


图 1-8

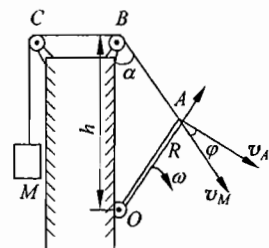


图 1-9

$$v_A = \omega R \quad (1)$$

对速度 v_A 作如图 1-9 所示的正交分解,沿绳 BA 的分量就是物块 M 的速率 v_M , 则

$$v_M = v_A \cos \varphi \quad (2)$$

由正弦定理知

$$\frac{\sin \angle OAB}{h} = \frac{\sin \alpha}{R} \quad (3)$$

由图看出:

$$\angle OAB = \frac{\pi}{2} + \varphi \quad (4)$$

由以上各式得

$$v_M = \omega h \sin \alpha \quad (5)$$

有的学生对(2)式不理解,认为物块 M 与绳的一端相连,因此物块 M 的速度 v_M 就是绳子的速度,而绳的另一端与杆的 A 端相连,因此,绳的速度就是杆 A 端的速度 v_A . 其实,根据速度的定义,物块 M 的速度与物块 M 位置的变化相联系,而物块 M 位置的变化则决定于 BA 之间距离的变化(因为绳是不可伸长的). 如果保持 BA 段的绳长不变,让绳的一端 A 绕 B 点作圆周运动,则绳 A 端位置的变化并不会改变物块 M 的位置. 这表明只有绳 A 端的速度沿着绳的分量才等于物块 M 的速度,绳 A 端的速度沿垂直绳方向的分量与物块 M 的速度无关.

7. 有一只狐狸以不变速度 v_1 沿着直线 AB 逃跑,一猎犬以不变的速度 v_2 紧追,其运动方向始终对准狐狸. 某时刻狐狸在 F 处,猎犬在 D 处, $FD \perp AB$, 且 $FD=L$ (见图 1-10), 试求此时猎犬的加速度大小.

解析

猎犬做匀速率曲线运动,其加速度的大小与方向在不断改变. 从所讨论的时刻开始考

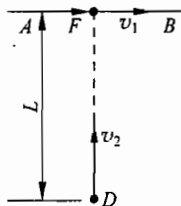


图 1-10

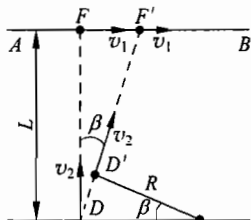


图 1-11

考虑一段很短的时间 Δt , 在这段时间内猎犬运动的轨迹可近似看作是一段圆弧, 设其半径为 R , 则加速度是

$$a = v_2^2/R \quad (1)$$

其方向与速度的方向垂直. 如图 1-11 所示, 设经过 Δt 时间狐狸与猎犬分别到达 F' 与 D' , 猎犬的速度方向转过的角度为

$$\beta = v_2 \Delta t / R \quad (2)$$

而狐狸跑过的距离是

$$v_1 \Delta t \approx \beta L \quad (3)$$

(Δt 越小, 此式越精确) 因而

$$v_2 \Delta t / R = v_1 \Delta t / L$$

$$R = L v_2 / v_1$$

$$a = v_2^2 / R = v_1 v_2 / L \quad (4)$$

此题要求学生能就一个具体问题讨论匀速曲线运动中加速度与速度方向的改变的关系, 可检查学生对速度、加速度概念的理解和应用. 学生如能采用以下解法就更好.

根据题意, 在 t 时刻, 狐狸位于 F 处, 猎犬位于 D 处, 猎犬的速度为 $v_2(t)$, 方向沿直线 DF . 在 $t + \Delta t$ 时刻, 狐狸位于 F' , 猎犬位于 D' , 其速度为 $v_2(t + \Delta t)$, 方向沿直线 $D'F'$, 如图 1-12 所示. 在 Δt 时间内猎犬速度的变化量为

$$\Delta v_2 = v_2(t + \Delta t) - v_2(t) \quad (1')$$

虽然 $v_2(t + \Delta t)$ 与 $v_2(t)$ 的大小相等, 但两者的方向不同, 故 Δv_2 不为零. 根据加速度的定义, 猎犬的加速度为

$$a_2 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_2}{\Delta t} \quad (2')$$

加速度的大小为

$$a_2 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta v_2|}{\Delta t} \quad (3')$$

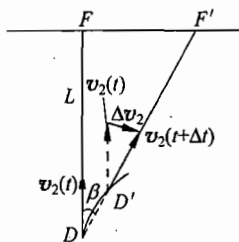


图 1-12

若以 β 表示直线 DF 与 $D'F'$ 之间的夹角, 则有

$$|\Delta v_2| = v_2 \beta \quad (4')$$

而

$$\beta = \frac{v_1 \Delta t}{L} \quad (5')$$

由(3')~(5')式得

$$a_2 = \frac{v_1 v_2}{L} \quad (6')$$

而当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\beta \rightarrow 0$, 故 Δv_2 的方向与 v_2 垂直, 即在所考查的时刻, 猎犬加速度的方向垂直于直线 DF .

有些学生虽然也曾学过速度、加速度的定义, 但由于接触到的都是大量的匀加速直线运动或匀速率圆周运动的习题, 这类题做得多了, 留在头脑中的与速度、加速度有关的公式仅是 $v = v_0 + at$, $s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$, 或 $a = \frac{v^2}{R}$. 关于速度、加速度的定义早就遗忘了, 更谈不上如何从基本定义出发去思考问题, 结果遇到本题就束手无策了.

8. 火车以速率 v_1 向前行驶. 司机忽然发现, 在前方同一轨道上距车为 s 处有另一辆火车, 它正沿相同的方向以较小的速率 v_2 作匀速运动. 于是他立即使车作匀减速运动, 加速度的大小为 a . 要使两车不致相撞, 则 a 应满足关系式_____.

解析

$$a > \frac{(v_1 - v_2)^2}{2s}.$$

以前车为参考系, 则后车速度的大小为 $v_1 - v_2$, 而相对加速度的大小与后车相对地的加速度大小相同即为 a . 按题意后车追上前车所走的相对路程为 s . 由匀变速运动的公式可知

$$(v_1 - v_2)^2 = 2as$$

要两车不相撞, 应有

$$a > \frac{(v_1 - v_2)^2}{2s}$$

9. 一火车沿直线轨道从静止出发由 A 地驶向 B 地, 并停止在 B 地. A 、 B 两地相距 s . 火车做加速运动时, 其加速度最大为 a_1 ; 做减速运动时, 其加速度的绝对值最大为 a_2 . 由此可以判断该火车由 A 到 B 所需要的最短时间为_____.

解析

$$\sqrt{\frac{2s(a_1+a_2)}{a_1a_2}}$$

由 A 地到 B 地, 要使所用的时间最短, 则应先以最大的加速度 a_1 做加速运动, 到某一时刻, 再以最大的加速度 a_2 做减速运动, 而且要使到达 B 点时刚好停下来. 因此, 在 $v-t$ 图上的图线应如图 1-13 中 OCD 折线所示, 当此折线满足以下的条件时, D 点的横坐标 T

就是所求的最短时间. 这些条件是: OC 的斜率 $\frac{v_C}{T_1} = a_1$; CD 的斜率的绝对值 $\frac{v_C}{T-T_1} = a_2$; OCD 所围的面积等于 AB 两地的距离 s , 即 $s = \frac{1}{2}Tv_C$. 由以上三

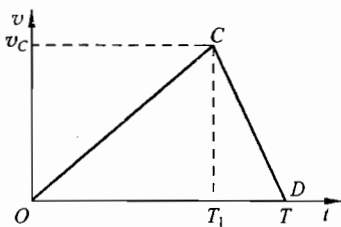


图 1-13

式, 消去 v_C 和 T_1 可得

$$T = \sqrt{\frac{2s(a_1+a_2)}{a_1a_2}}$$

本题也可不用 $v-t$ 图进行求解. 设火车先以最大的加速度 a_1 从静止开始做加速运动, 经历时间 T_1 , 再以最大的加速度 a_2 做减速运动, 经历时间 T_2 , 火车到达 B 点, 这时速度正好为 0, 故有

$$v = a_1T_1 - a_2T_2 = 0 \quad (1')$$

$$s = \frac{1}{2}a_1T_1^2 + a_1T_1T_2 - \frac{1}{2}a_2T_2^2 \quad (2')$$

$$T = T_1 + T_2 \quad (3')$$

由以上三式, 亦可求得

$$T = \sqrt{\frac{2s(a_1+a_2)}{a_1a_2}} \quad (4')$$

10. 把托在手掌中的物体沿竖直方向向上抛出, 在物体脱离手掌的瞬间, 手掌的运动方向应是_____, 手掌的加速度方向应是_____, 大小应是_____.

解析

以 v_0 , v 和 v' 分别表示手掌的速度、物体相对于地面的速度和物体相对于手掌的速度, 以 a_0 , a 和 a' 分别表示手掌的加速度、物体相对于地面的加速度和物体相对于手掌的加速度. 于是

$$v = v_0 + v', \quad a = a_0 + a'$$

在上述两式中,各量取正值时表示方向向上,取负值时表示方向向下.在物体向上抛出并脱离手掌的瞬间,应有

$$v > 0, \quad v' = 0, \quad a = -g, \quad a' > 0$$

以这些值代入前式,得出 $v_0 > 0$ 和 $a_0 < -g$,说明手掌的速度应向上,但加速度应向下,加速度的绝对值应大于 g .

11. 一质点沿 x 轴做直线运动,其速度 v 随时间 t 的变化关系如图 1-14 所示. 设 $t=0$ 时,质点位于坐标原点处. 试根据 $v-t$ 图分别在图 1-15 及图 1-16 中尽可能准确地画出:

- 1) 表示质点运动的加速度 a 随时间 t 变化关系的 $a-t$ 图.
- 2) 表示质点运动的位移 x 随时间 t 变化关系的 $x-t$ 图.

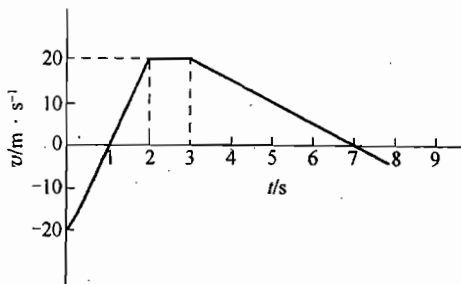


图 1-14

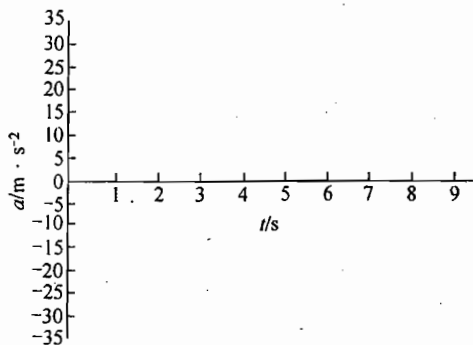


图 1-15

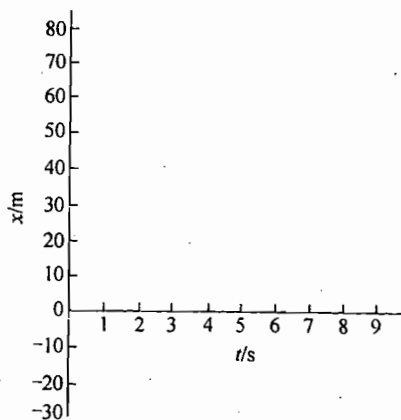


图 1-16

解析

1) 如图 1-17 所示.

2) 如图 1-18 所示.

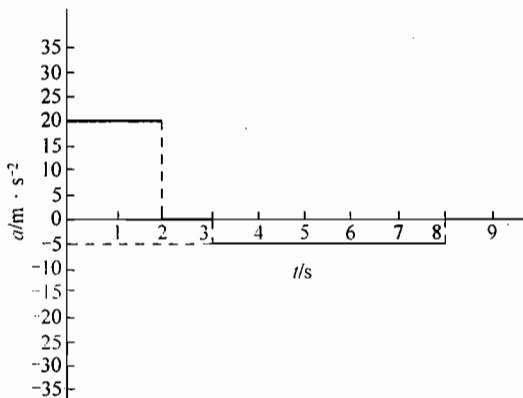


图 1-17

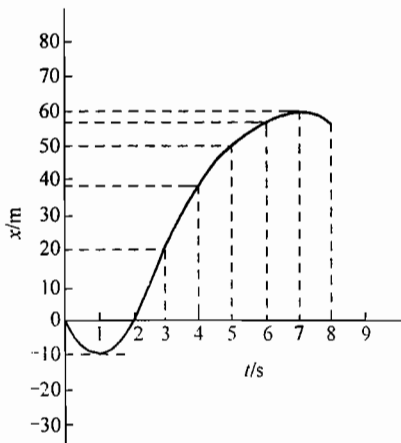


图 1-18

12. 在仰角 $\alpha = \pi/6$ 的雪坡上举行跳台滑雪比赛(见图 1-19). 运动员从坡上方 A 点开始下滑, 到起跳点 O 时借助设备和技巧, 保持在该点的速率而以与水平成 θ 角的方向起跳, 最后落在坡上 B 点, 坡上 OB 两点距离 L 为此项运动的记录. 已知 A 点高于 O 点 $h = 50\text{m}$. 忽略各种阻力、摩擦, 求最远可跳多少米, 此时起跳角为多大?

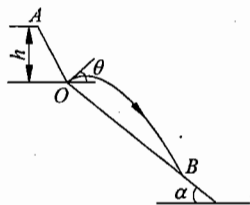


图 1-19

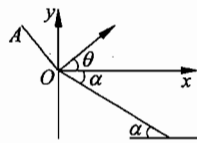


图 1-20

解析

建立坐标系如图 1-20. 在 $t=0$ 时, 运动员从 O 点以速度 v 起跳, v 的大小可由匀加速运动公式或机械能守恒定律求出

$$v = \sqrt{2gh}$$

起跳后做斜抛运动. 设 t 时刻落到坡面 B 处, 则此时坐标为

$$\begin{aligned}x &= vt \cos \theta \\y &= vt \sin \theta - gt^2/2\end{aligned}$$

它们要满足坡面方程

$$y = -x \tan \alpha$$

由以上三方程解得

$$gt[t - 2v(\tan \alpha \cos \theta + \sin \theta)/g] = 0$$

$t=0$ 不合题意, 故知落地时刻为

$$t = 2v(\tan \alpha \cos \theta + \sin \theta)/g = 2v \sin(\alpha + \theta)/(g \cos \alpha)$$

而着地点 B 的 x 坐标为

$$x = 2v^2 \cos \theta \sin(\alpha + \theta)/(g \cos \alpha)$$

坡面 OB 距离为

$$L(\theta) = x/\cos \alpha = 2v^2 \cos \theta \sin(\alpha + \theta)/(g \cos^2 \alpha)$$

为求最佳起跳角和最高记录, 需把 $L(\theta)$ 对 θ 求最大值. 由于

$$\cos \theta \sin(\alpha + \theta) = [\sin(2\theta + \alpha) + \sin \alpha]/2$$

故知, 当 $2\theta + \alpha = \pi/2$, 即

$$\theta = \theta_0 = (\pi/2 - \alpha)/2 = \pi/6$$

时, 记录最高为

$$\begin{aligned}L_{\max} = L(\theta_0) &= \frac{2v^2 \cos(\pi/6) \sin[(\pi/6) + (\pi/6)]}{g \cos^2(\pi/6)} \\&= 4h = 200\text{m}\end{aligned}$$

即最佳起跳角为 $\theta_0 = \pi/6$, 最高记录可达 200m.

13. 如图 1-21 所示, 有两条位于同一竖直平面内的水平轨道, 相距为 h . 轨道上有两个物体 A 和 B , 它们通过一根绕过定滑轮 O 的不可伸长的轻绳相连接. 物体 A 在下面的轨道上以匀速率 v 运动. 在轨道间的绳子与轨道成 30° 角的瞬间, 绳子 BO 段的中点处有一与绳相对静止的小水滴 P 与绳子分离, 设绳长 BO 远大于滑轮直径, 求:

- 1) 小水滴 P 脱离绳子时速度的大小和方向.
- 2) 小水滴 P 离开绳子落到下面轨道所需要的时间.

解析

1) 物体 B 在上轨道的运动可以看成是沿绳子的运动和垂直于绳子的运动(即绳子绕 O 点的转动)的合成.

B 沿绳子运动的分速度 $v_{B//} = v$, 因而垂直于绳子的分速度 $v_{B\perp} = v \tan \theta$ (θ 为 BO 与轨

道夹角, 这里 $\theta=30^\circ$), 如图 1-22 所示.

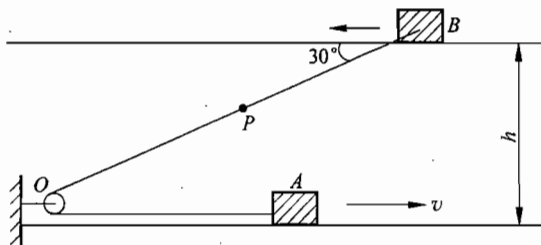


图 1-21

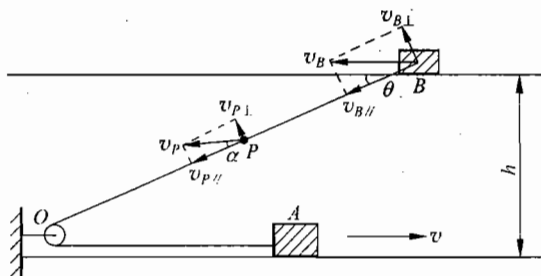


图 1-22

绳子中点小水滴 P 的速度也可分解成沿着绳子的分速度和垂直绳子的分速度, 即

$$v_{P//} = v, \quad v_{P\perp} = v \tan \alpha$$

小水滴 P 垂直绳子的分速度可看做绳子绕 O 点转动, 设该时刻绳子转动的角速度为 ω , 则有

$$\omega = v_{P\perp} / (\overline{BO}/2) = v_{B\perp} / \overline{BO} \quad (1)$$

从而有

$$v_{P\perp} = v_{B\perp} / 2 = (v \tan \theta) / 2 \quad (2)$$

于是有

$$\tan \alpha = (\tan \theta) / 2 = \sqrt{3} / 6 \quad (3)$$

则

$$\alpha = \arctan(\sqrt{3}/6) \quad (4)$$

α 角是 v_P 与 \overline{BO} 的夹角, v_P 与水平方向的夹角为 $30^\circ - \alpha$.

水滴离开绳子的速度大小为

$$\begin{aligned} v_P &= \sqrt{v_{P//}^2 + v_{P\perp}^2} = \sqrt{v^2 + [(v \tan \theta) / 2]^2} \\ &= v \sqrt{1 + [\tan^2 \theta] / 4} = v \sqrt{13/12} \end{aligned} \quad (5)$$

2) 由 $\alpha < 30^\circ$ 可知, 水滴 P 做斜向下抛运动, P 在竖直方向的分运动是初速度为 v_{Py0} 、加速度为 g 的匀加速直线运动, 则有

$$v_{Py0} = v \sin \theta - v_{P\perp} \cos \theta = v(\sin \theta - \tan \theta \cos \theta / 2) = v/4 \quad (6)$$

因而
$$\frac{1}{2}h = \frac{1}{4}vt + \frac{1}{2}gt^2 \quad (7)$$

由此方程可解出 t , 取 t 为正值解, 得

$$t = \frac{1}{4g}(\sqrt{v^2 + 16gh} - v) \quad (8)$$

有的学生认为, 当物块 A 以速度 v 沿水平轨道向右运动时, 因为绳不可伸长, 故绳的速度也是 v , 且绳上各点的速度都相同. 有的学生进一步把绳速 v 分解成水平分量和竖直分量两部分, 并认为 v 的水平分量就等于物块 B 的速度 v_B . 发生这类错误的一个原因可能是没有对问题进行具体分析, 只是死记住不可伸长的绳上各点速度相等这一仅在某些条件下才成立的结论.

为了进一步研究这一问题, 我们考查 t 和 $t + \Delta t$ 两个时刻物块 A 、 B 和绳的位移, 如图 1-23 所示. 在 Δt 时间内, 物块 A 的位移由线段 $\overline{aa'}$ 表示, 绳 OA 段上每一点的位移都相同, 且等于 $\overline{aa'}$, 位移都沿着 OA . 由此知 OA 段绳上每一点的速度都等于物块 A 的速度, 且速度的方向都沿着绳 OA . 但 OB 段绳上每一点在 Δt 时间内的位移并不沿着绳. 例如, 绳上的 Q 点的位移是 $\overline{QQ''}$, 不是 $\overline{QQ'}$. $\overline{QQ'}$ 仅是 Q 点沿着绳方向的位移. 绳上 Q 点的位移 $\overline{QQ''}$ 是 Q 点沿着绳方向的位移 $\overline{QQ'}$ 和垂直于绳方向的位移 $\overline{Q'Q''}$ 两部分的合成, 沿着绳方向的位移的大小与物块 A 的位移的大小相等, 所以 Q 点沿绳方向的分速度 $v_{Q\parallel}$ 与物块 A 的速度 v 相等; 而 Q 点的垂直于绳方向的位移则是 Q 点绕 O 点转动产生的位移, 绳上不同点到 O 点的距离不同, 因转动发生的位移也不同, 所以绳上不同点的速度在垂直于绳方向的分速度是不同的.

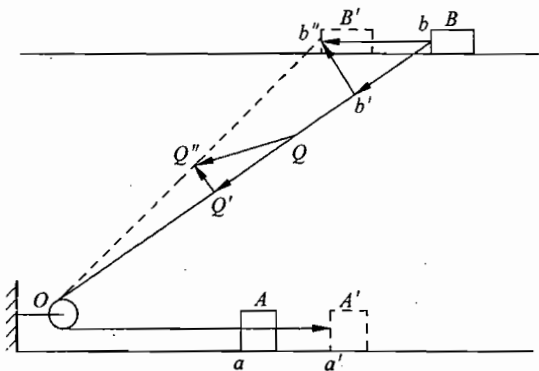


图 1-23

同样的道理, 物块 B 的位移 $\overline{bb''}$ 是由沿着绳方向的位移 $\overline{bb'}$ 和垂直于绳方向的位移 $\overline{b'b''}$ 叠加而成的, 而前一分位移 $\overline{bb'}$ 才与物块 A 的位移 $\overline{aa'}$ 的大小相等.

14. 在某自行车赛场直行跑道的一侧有一外高内低、倾角为 θ 的斜面, 直行跑道长度为 L , 斜面上端高度为 h , 如图 1-24 所示. 运动员由 A 点出发, 终点为 A' . 运动员可以选直线 AA' 行进, 或沿对称折线 AMA' 行进的路线. 若出发时自行车的速度均为 v_0 , 且在行进途中运动员蹬车时的驱动力等于所受的阻力, 又设车轮与地面间的侧向摩擦足以阻止车轮侧滑, 若要取得较好的成绩, 运动员应采用哪种路线?

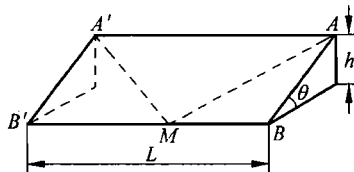


图 1-24

解析

解法 I 分析运动员沿对称折线 AMA' 的运动, 令 $\angle AMB = \omega$, 如图 1-25 所示. 由于驱动力和阻力相等, 它们相互抵消, 运动员所受的力为: 重力 $W = mg$, 斜面支持力 F_N 和

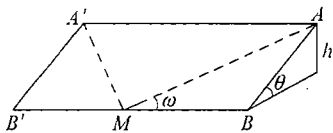


图 1-25

阻止车轮侧滑的侧向摩擦力 F_f . 重力可分解为与斜面垂直的分力 $W_{\perp} = mg \cos \theta$ 和与斜面平行的分力 $W_{\parallel} = mg \sin \theta$. W_{\perp} 与 F_N 平衡, 而 W_{\parallel} 又可分解为沿 AM 方向的分力 $F_{\parallel} = mg \sin \theta \sin \omega$ 和与 AM 方向垂直的分力 $F_{\perp} = mg \sin \theta \cos \omega$. F_{\perp} 与 F_f 平衡, 而 F_{\parallel} 使运

动员作匀加速运动, 加速度的大小为

$$a = g \sin \theta \sin \omega \tag{1}$$

运动员到达 M 点时的速度为 v' , 则有

$$v'^2 - v_0^2 = 2a \overline{AM}$$

由运动轨道的几何关系, 可知

$$\overline{AB} = h / \sin \theta = \overline{AM} \cdot \sin \omega$$

代入上式并用(1)式, 有

$$v'^2 - v_0^2 = 2(g \sin \theta \sin \omega) \cdot h / (\sin \theta \sin \omega) = 2gh$$

因此, 不论 ω 取何值, v' 的值总是

$$v' = \sqrt{v_0^2 + 2gh} \tag{2}$$

实际上, 由于驱动力和阻力平衡, (2)式也是机械能守恒的必然结果. 运动员由 A 到 M 的平均速度是

$$\bar{v} = (v_0 + v') / 2 \tag{3}$$

运动员若沿 AA' 直线行进, 则为一等速直线运动, 速度为 v_0 . 而沿斜线 AM 行进时, 其沿 AA' 方向分速度的平均值是 $\bar{v} \cos \omega$. 故运动员走 AM 线有优势的条件是

$$\bar{v} \cos \omega > v_0 \tag{4}$$

MA' 段与 AM 段对称. 运动员在 MA' 段所用时间与 AM 段相同, 故优势条件不变. 将

(3)式代入(4)式,有

$$\cos\omega > \frac{v_0}{\bar{v}} = \frac{2v_0}{v' + v_0} = \frac{2v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh} + v_0} \quad (5)$$

(5)式右方小于1,故 ω 有解,即存在一临界角 ω_0 ,

$$\cos\omega_0 = \frac{2v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh} + v_0} \quad (6)$$

当 $\omega < \omega_0$ 时,走对称折线有利.

将优势条件换算成场地条件,若要是能满足(5)式,则必须

$$\frac{L/2}{\sqrt{(L/2)^2 + h^2 \csc^2 \theta}} > \frac{2v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh} + v_0} \quad (7)$$

$$\frac{(L/2)^2}{(L/2)^2 + h^2 \csc^2 \theta} > \frac{2v_0^2}{v_0^2 + gh + v_0 \sqrt{v_0^2 + 2gh}}$$

$$\frac{(L/2)^2}{h^2 \csc^2 \theta} > \frac{2v_0^2}{v_0 \sqrt{v_0^2 + 2gh} + gh - v_0^2} \approx \frac{v_0^2}{gh} \quad (8)$$

最后得到场地判据为

$$L > (v_0/\sqrt{gh}) \cdot 2h \csc \theta \quad (9)$$

若赛道参数 L, h, θ 满足(9)式条件,则运动员采用 AMA' 折线有利,若(9)式条件不能满足,运动员应选行 AA' 直线.

解法 II 由解法一分析,有

$$a = g \sin \theta \sin \omega \quad (10)$$

运动员由 A 到达 M ,所用时间为 t' ,则

$$s = (L/2)/\cos\omega = v_0 t' + at'^2/2$$

故

$$t' = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2as}}{a} \quad (11)$$

因 $t' > 0$,故(11)式只能选“+”号,有

$$t' = \frac{v_0}{a} \left[\sqrt{1 + \frac{2as}{v_0^2}} - 1 \right] = \frac{v_0}{a} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{as}{v_0^2}\right)^2 - \left(\frac{as}{v_0^2}\right)^2} - 1 \right]$$

定义

$$\sin\alpha = \frac{as/v_0^2}{1 + as/v_0^2} \quad (12)$$

而

$$as = g \sin \theta \sin \omega \cdot s = gh$$

则有

$$\sin\alpha = \frac{as}{v_0^2 + as} = \frac{gh}{v_0^2 + gh} \quad (13)$$

$$t' = \frac{v_0}{a} \left[\left(1 + \frac{as}{v_0^2}\right) \cos\alpha - 1 \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{v_0}{a} \left[\left(1 + \frac{as}{v_0^2} \right) \left(1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) - 1 \right] \\
 &= \frac{v_0}{a} \left[\frac{as}{v_0^2} - \left(1 + \frac{as}{v_0^2} \right) \sin\alpha \cdot \tan \frac{\alpha}{2} \right] \\
 &= \frac{v_0}{a} \left[\frac{as}{v_0^2} - \frac{as}{v_0^2} \cdot \tan \frac{\alpha}{2} \right] = \frac{s}{v_0} \left[1 - \tan \frac{\alpha}{2} \right] \quad (14)
 \end{aligned}$$

如运动员由 A 沿 AA' 前进, 行至中点所用时间为

$$t = (L/2)/v_0 = (s \cdot \cos\omega)/v_0 \quad (15)$$

于是有

$$\begin{aligned}
 t - t' &= \frac{s}{v_0} \cdot \cos\omega - \frac{s}{v_0} \left[1 - \tan \frac{\alpha}{2} \right] \\
 &= \frac{s}{v_0} \left[1 - 2\sin^2 \frac{\omega}{2} - 1 + \tan \frac{\alpha}{2} \right] \\
 &= \frac{s}{v_0} \left(\tan \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\omega}{2} \right) \quad (16)
 \end{aligned}$$

若运动员行折线有利, (16) 式必须为正. 故必须有

$$2\sin^2(\omega/2) < \tan(\alpha/2)$$

ω, α 角都很小. $\sin\omega \approx \tan\omega \approx \omega$. 故有临界条件

$$\omega < \alpha^{1/2} \quad (17)$$

$$\omega \approx \frac{AB}{s} \approx \frac{h}{(L/2)\sin\theta} = \frac{2hcsc\theta}{L}$$

$$\alpha^{1/2} \approx \left(\frac{gh}{v_0^2 + gh} \right)^{1/2} = \left[\frac{(gh)/v_0^2}{1 + (gh)/v_0^2} \right]^{1/2} \approx \frac{\sqrt{gh}}{v_0}$$

代入(17)式, 有场地判据

$$L > (v_0/\sqrt{gh}) \cdot 2hcsc\theta \quad (18)$$

此题是将实际情况大大简化, 由此简化情况可以看出, 同样的初速度, 并不是走直线距离最快. 在一定的条件下, 走折线也可能更快一点. 这是因为沿折线时, 距离虽加大了, 但因利用了重力分力的作用使速度也加快了, 当初速度和场地满足一定条件时, 可使速度加快所起的作用大于距离加大所起的作用.

15. 如图 1-26, OABC 是一台球桌面. 取 OA 为 x 轴, OC 为 y 轴, P 是红球, 坐标为 (x, y) , Q 是白球, 坐标为 (x', y') (图中未画出 Q 球在台面上的位置). 已知 $OA=BC=25\text{dm}$, $AB=OC=12\text{dm}$.

1) 若 P 球的坐标为: $x=10\text{dm}$, $y=8\text{dm}$. 问 Q 球的位置在什么范围内时, 可使击出的 Q 球顺次与 AB、BC、CO 和 OA 四壁碰撞反弹, 最后击中 P 球?

2) P 球有没有一些位置是 Q 球无论在什么地方出发,按上述次序从四壁反弹后都无法击中的?如没有,加以证明;如有,找出这些位置的范围(白球 Q 同四壁的碰撞均为弹性碰撞,两球体积很小,可看作质点).

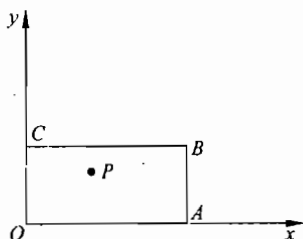


图 1-26

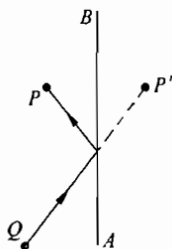


图 1-27

解析

设 AB 是球桌一壁, P 、 Q 为二球. 由于弹性碰撞的反弹服从的规律与光线的反射定律相同,若欲使 Q 球在 AB 壁上反弹后击中 P 球,只需瞄准 P 点在 AB 面中形成的镜像点 P' 击出即可(见图 1-27).

作 P 点对 OA 壁的镜像 P_1 , P_1 对 CO 壁的镜像 P_2 , P_2 对 BC 壁的镜像 P_3 和 P_3 对 AB 壁的镜像 P_4 ,则只需瞄准 P_4 点击出 Q 球, Q 球在 AB 壁上 D 点的反弹后射向 P_3 ,又在 BC 壁上 E 点反弹后射向 P_2 ,依此类推,最后再经 F 、 G 二点的反弹击中 P 点. 如图 1-28 所示.

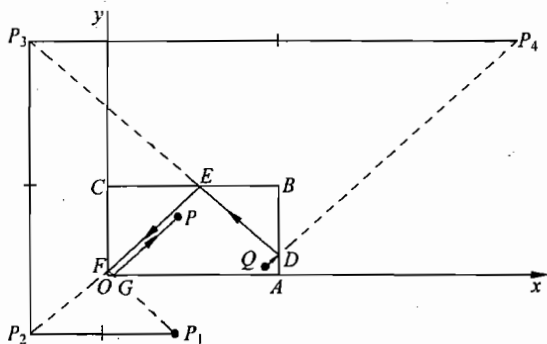


图 1-28

但是,若反弹点 E 离 B 点太近, Q 球从 E 点反弹后 EP_2 线与 CO 的交点,可能不在 CO 壁的范围内而在 CO 的延长线上,这时 Q 球就无法击中 CO 壁(而击到 OA 壁上),不符合题目要求. 所以, Q 球能够最后按题目要求击中 P 球的条件是: 反弹点 D 、 E 、 F 和 G

一定要在相应的台壁范围之内.

1) 已知 P 点的坐标为 $(10, 8)$, 由此可知, 各个镜像点的坐标分别为

$$P_1(10, -8); \quad P_2(-10, -8); \quad P_3(-10, 32); \quad P_4(60, 32).$$

解法 I 解析法

首先求出反弹点 D 、 E 、 F 和 G 的坐标, 取 X 、 Y 为坐标变量, 设 Q 点的坐标为 (x', y') . 直线 QP_4 的方程为(长度均以 dm 为单位)

$$Y - y' = \frac{32 - y'}{60 - x'}(X - x') \quad (1)$$

D 点在此直线上, $X_D = 25$, 由上式得

$$Y_D = \frac{1}{60 - x'}(800 - 32x' + 35y') \quad (2)$$

直线 DP_3 的方程为

$$Y - Y_D = -\frac{32 - y'}{60 - x'}(X - X_D) \quad (3)$$

E 点在此直线上, $Y_E = 12$, 由此式及(2)式得

$$X_E = 25 - \frac{1}{32 - y'}(-80 + 20x' - 35y') \quad (4)$$

直线 EP_2 的方程为

$$Y - Y_E = \frac{32 - y'}{60 - x'}(X - X_E)$$

F 点在此直线上, $X_F = 0$, 所以

$$Y_F = 12 - \frac{10}{60 - x'}(88 - 2x' + y') \quad (5)$$

最后, 直线 FP_1 的方程为

$$Y - Y_F = -\frac{32 - y'}{60 - x'}(X - X_F)$$

G 点在此直线上, $Y_G = 0$, 所以

$$X_G = \frac{1}{32 - y'}(-160 + 8x' - 10y') \quad (6)$$

反弹点位于相应台壁上的条件为

$$\left. \begin{aligned} 0 < Y_D < 12 \\ 0 < X_E < 25 \\ 0 < Y_F < 12 \\ 0 < X_G < 25 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

将(2)、(4)、(5)和(6)式代入(7)式, 除肯定满足无须讨论的不等式外, Q 球按题目要求击

中 P 球的条件为

$$\begin{aligned} Y_D: & 35y' < 20x' - 80 \\ X_E: & 35y' < 20x' - 80 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} Y_F: & 5y' < 4x' - 80 \\ X_G: & 5y' < 4x' - 80 \end{aligned} \quad (9)$$

上式共两个条件,作直线 $L_1: 35Y=20X-80$ 及 $L_2: 5Y=4X-80$,如图 1-29. 若 Q 球位于 L_2 下方的三角形 D_0AH_0 内,即可同时满足(8)、(9)两式的条件. 瞄准 P_1 击出,可按题目要求次序反弹后击中 P 球. 三角形 D_0AH_0 三个顶点的坐标如图 1-29 所示.

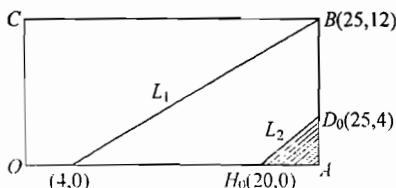


图 1-29

解法 II 几何法

若 Q 球在 BC 壁上的反弹点 E 与 B 太近,就发生反弹后不能击在 CO 壁上的问题. 延长 OP 线段交 BC 壁于 E_0 点,由图 1-30 可以看出, E_0 点是反弹点 E 离 B 点的最近点,若在 E_0 点右侧反弹, Q 球将打到 OA 壁上. 延长 P_3E_0 线段交 AB 壁于 D_0 点,则 AD_0 是 Q 球第一次在 AB 壁上反弹的允许范围. 延长 P_1D_0 线交 OA 壁于 H_0 点,则开始时 Q 球必须处于三角形 AD_0H_0 区域内击出,才能按题目要求在四壁上反弹而击中 P 球. E_0 、 D_0 和 H_0 三点的位置很容易从图 1-30 定出: $E_0(15,12)$; $D_0(25,4)$; $H_0(20,0)$. 故 Q 球必须在 AD_0H_0 三角区域内瞄准 P_1 击出,才能命中 P 球. 但不能在 AD_0 线上(因为不能在 AB 壁上反弹)和 H_0D_0 线上(因为从 E_0 反弹后将直接命中 P 球,不合题目要求).

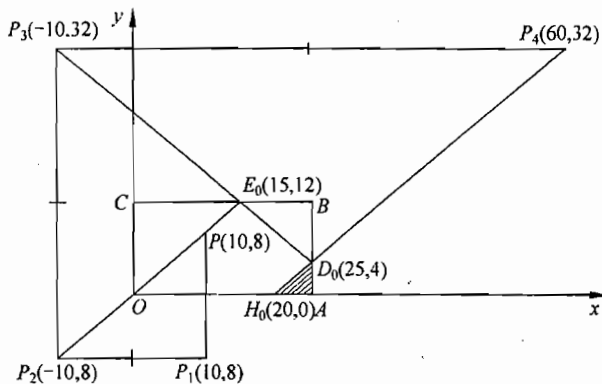


图 1-30

2) 根据弹性碰撞过程的可逆性,第二问可以化成与第一问性质相同的问题,即用 P 球去击 Q 球,要求按在 OA 壁、 CO 壁、 BC 壁和 AB 壁这样相反的顺序反弹,求 P 球有没有一个出发的区域,不论 Q 球在何处,都不能按上述次序击中 Q 球.

为此,作 $ABCO$ 对 AB 壁的镜像 $A_1B_1C_1O_1$,后者对 BC 壁的镜像 $A_2B_2C_2O_2$,以及进一步对 CO 壁的镜像 $A_3B_3C_3O_3$ 和接着对 OA 壁的镜像 $A_4B_4C_4O_4$, P 球瞄准 $A_4B_4C_4O_4$ 中任何一点,若能经反弹后击中这一点,就是 P 球可被 Q 球击中的位置,如图 1-31 所示.

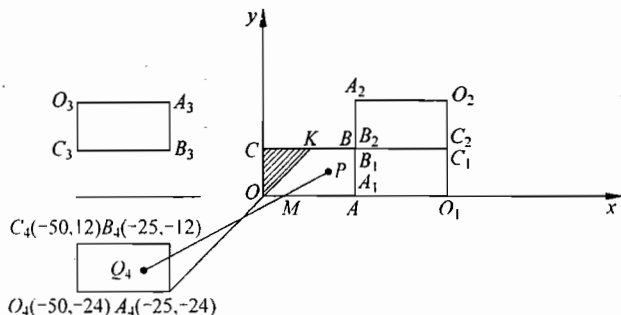


图 1-31

解法 I 几何法

由于只要 $ABCO$ 中的一点 P 通过 OA 瞄准 $A_4B_4C_4O_4$ 中任一点 Q_4 即可击中 Q 球. 由图 1-31 显然可以看出,若 P 球在三角形 OCK 之内时,就无法通过 OA 壁瞄准 $A_4B_4C_4O_4$ 中任何一点. 反过来看就是,若 P 球在三角形 OCK 之内时, Q 球无论在球台上任何地方都无法按题目要求击中 P 球. K 点的位置很容易看出,它是 BC 壁的中点,其坐标为 $(12.5, 12)$.

解法 II 解析法

在图 1-31 中,由 $ABCO$ 中的一点 $P(x, y)$ 瞄准 $A_4B_4C_4O_4$ 中的一点 $Q(x', y')$,瞄准线 PQ_4 与 OA 壁交点 M 在 OA 之外的 P 点,即为所求 Q 球无法打到的 P 球所在区域. PQ_4 直线的方程为

$$Y - y = \frac{y - y'}{x - x'}(X - x)$$

M 点在此直线上且 $Y_M = 0$ 故有

$$X_M = x - \frac{x - x'}{y - y'}y \quad (10)$$

M 点在 OA 之间的条件为 $0 < X_M < 25$, 即

$$0 < x - \frac{x - x'}{y - y'}y \quad \text{得} \quad y < \frac{y'}{x}x \quad (11)$$

x', y' 可取 $A_4B_4C_4O_4$ 中任意位置,为使上式得到满足,最有利位置为 $|x'|$ 最小、 $|y'|$ 最大

的位置, 即 $x' = -25, y' = -24$ (即 A_1 点). 这时

$$y < \frac{24}{25}x \quad (12)$$

这就是 P 可以通过 OA 壁瞄到 $A_1B_1C_1O_1$ 中的点的条件, 所以所求 P 点瞄不到 Q 点的位置在直线 $Y = \frac{24}{25}X$ 的上方, 即 OK 直线的上方, K 点为 $(12.5, 12)$, 即三角形 OCK 中.

解法Ⅲ 几何法

也可以不引入逆过程, 仍就正过程进行分析. 将图 1-30 中整个球桌四壁的镜像画出, 如图 1-32 所示. 在图 1-32 中考虑 P 球的一个特殊位置, 设 P 球在 $A_3B_3C_3O_3$ 中的镜像点在 P_3 , 击出的 Q 球由 AB 壁反弹后瞄向 P_3 的射线 DP_3 在 BC 壁上的反弹点为 E . 这样的位置反弹后不会击在 CO 壁上, 即不能满足题目要求. 于是知 Q 球无法按题目要求击中 P 球的位置在 $A_3B_3C_3O_3$ 中的像为三角形 $O_3C_3K_3$, K_3 点在线段 B_3C_3 的中点. 最后得 P 球不能被 Q 球按题目要求击中的区域为三角形 OCK . K 点在线段 BC 的中点.

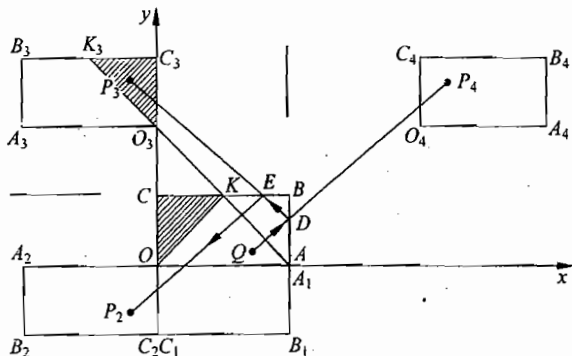


图 1-32

解法Ⅳ 解析法

考虑正过程, 参见图 1-30. 讨论 P 球取何位置, Q 球无论从何点出发均不能按题目要求击中 P 球. 这就是 D_0 向下趋近于 A 点, 三角形 AD_0H_0 不再存在的情况.

设 P 球的坐标为 (x, y) , 则其镜像点的坐标分别为

$$\begin{aligned} P_1(x, -y) & \quad P_2(-x, -y) \\ P_3(-x, y+24) & \quad P_4(x+50, y+24) \end{aligned}$$

而 E_0, D_0 点的坐标为

$$E_0(12x/y, 12) \quad D_0(25, 24 - 25y/x)$$

$Y_{D_0} = \overline{AD_0} > 0$ 为 P 点可被击中的条件, 即

$$24 - 25y/x > 0 \quad \text{亦即} \quad y < \frac{24}{25}x \quad (13)$$

由此可知, P 球不能被击中的区域在直线

$$Y = \frac{24}{25}X \quad (14)$$

的上侧, 即图 1-32 中的三角形 OCK .

16. 如图 1-33, 厚度不计的圆环套在粗细均匀, 长度为 l 的棒上端, 两者质量相等, 均为 m , 圆环与棒的最大静摩擦力等于滑动摩擦力, 大小为一常数, 等于 mg 的 k 倍 ($k > 1$). 棒能沿光滑的竖直细杆 AB (B 端固定在地面上) 上下滑动. 棒与地面碰撞时, 触地时间极短, 且无动能消耗. 设棒从其下端距地面高度为 h 处 (由静止) 自由下落, 与地面经过 n 次碰撞后, 圆环从棒上滑脱.

1) 分析说明在第二次碰地以前的过程中, 环与棒的运动情况, 并求出棒与环刚达到相对静止时, 棒下端距地面的高度 h' .

2) 求出 n, h, l, k 四量应满足的关系.

解析

1) 取竖直向下为坐标轴正向, 即位移、速度、加速度方向向下者取正值, 反之取负值.

在第一次碰地前, 环与棒以相同速度做自由落体运动, 在棒碰地前瞬间环和棒的速度

$$v_0 = \sqrt{2gh} \quad (\text{向下})$$

碰地后瞬间, 棒弹回的速度

$$v_c = -\sqrt{2gh} \quad (\text{向上})$$

环的速度仍为

$$v_r = \sqrt{2gh} \quad (\text{向下})$$

在此瞬间, 环对棒的相对速度

$$v' = v_r - v_c = 2\sqrt{2gh} \quad (\text{向下})$$

此后环相对于棒做下滑运动 (沿棒下滑), 在环未滑脱也未停止相对滑动前, 棒的加速度

$$a_c = (k+1)g \quad (\text{向下})$$

环的加速度

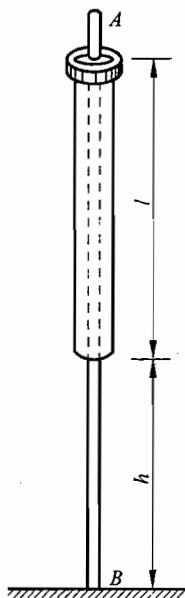


图 1-33

$$a_r = -(k-1)g \quad (\text{向上})$$

环对棒的相对加速度

$$a' = a_r - a_c = -2kg \quad (\text{向上})$$

即环在棒上(相对于棒)做匀减速下滑. 未滑脱时, 环相对于棒停止滑动前在棒上下滑的距离

$$s_1 = \frac{-v'^2}{2a'} = \frac{-(2\sqrt{2gh})^2}{2(-2kg)} = \frac{2h}{k}$$

现在求环相对于棒停止滑动时棒的位置.

先求环从开始相对于棒下滑(即第一次棒碰地的瞬间)到止于棒上所需时间 t_r , 由环相对于棒运动的初速度与加速度, 即 v' 与 a' 可求出

$$t_r = \frac{-v'}{a'} = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

再求碰地后棒弹回到最高点所需的时间 t_c . 设在此时间内环始终沿棒下滑. 由棒的弹回初速度 v_c 与加速度 a_c 可求出

$$t_c = \frac{-v_c}{a_c} = \frac{\sqrt{2gh}}{(k+1)g} = \frac{1}{k+1}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

比较可得 $t_c < t_r$.

这表明棒第一次碰地后弹回到最高点过程中, 环一直沿棒下滑(这也符合计算 t_c 时的假设), 而当棒从最高点回落了一段时间后, 环才停止沿棒下滑, 与棒以同一速度做自由落体运动. 这时棒下端距地的高度 h' 可由 t_r 直接算出. 棒下端从地面以初速 v_c 弹起, 以匀加速度 a_c 运动 t_r 时间后的向上的位移(负值)即应是 $-h'$, 故

$$\begin{aligned} -h' &= v_c t_r + \frac{1}{2} a_c t_r^2 \\ &= -\sqrt{2gh} \frac{1}{k} \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{1}{2} (k+1)g \left(\frac{1}{k} \sqrt{\frac{2h}{g}} \right)^2 \end{aligned}$$

可得

$$h' = \frac{h}{k} \frac{k-1}{k}$$

2) 继续上面的计算, 可知在棒第二次碰地以前, 当环与棒相对静止时两者的共同速度

$$\begin{aligned} v_1 &= v_c + a_c t_r \\ &= -\sqrt{2gh} + (k+1)g \left(\frac{1}{k} \sqrt{\frac{2h}{g}} \right) \\ &= \frac{1}{k} \sqrt{2gh} \quad (\text{向下}) \end{aligned}$$

此时环与棒以 v_1 在 h' 高度处共同下落(见图 1-34). 这相当于两物体从棒下端高度为 h'' 处自静止自由下落. 可求出

$$\begin{aligned} h'' &= \frac{v_1^2}{2g} + h' \\ &= \frac{h}{k^2} + \frac{h}{k^2}(k-1) = \frac{h}{k} \end{aligned}$$

以上计算表明, 经过第一次碰撞, 环相对棒滑动停止时, 以后的问题可换成环停在距棒下端 $(l-s_1)$ 处, 而棒由下端距地 $\frac{h}{k}$ 处自由下落.

因此, 在环未滑脱前, 各次碰地弹跳后, 环在棒上滑下的距离依次为:

$$s_1 = \frac{2h}{k}, \quad s_2 = \frac{2(h/k)}{k} = \frac{2h}{k^2}, \quad \dots, \quad s_{n-1} = \frac{2h}{k^{n-1}}$$

棒在前 $(n-1)$ 次碰地弹跳过程中, 环在棒上滑下总距离 s 为:

$$\begin{aligned} s &= s_1 + s_2 + \dots + s_{n-1} \\ &= \frac{2h}{k} \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \dots + \frac{1}{k^{n-1}} \right) \\ &= \frac{2h}{k} \frac{1 - \frac{1}{k^{n-1}}}{1 - \frac{1}{k}} \end{aligned}$$

若要环在 n 次碰撞后滑脱, 应有

$$s < l \leq s + \frac{2h}{k^n}$$

即

$$\frac{2h}{k} \frac{1 - \frac{1}{k^{n-1}}}{1 - \frac{1}{k}} < l \leq \frac{2h}{k} \frac{1 - \frac{1}{k^n}}{1 - \frac{1}{k}}$$

或

$$\frac{1 - \frac{1}{k^{n-1}}}{1 - \frac{1}{k}} < \frac{kl}{2h} \leq \frac{1 - \frac{1}{k^n}}{1 - \frac{1}{k}}$$

或

$$\frac{1 - \frac{1}{k}}{1 - \frac{1}{k^n}} \leq \frac{2h}{kl} < \frac{1 - \frac{1}{k}}{1 - \frac{1}{k^{n-1}}}$$

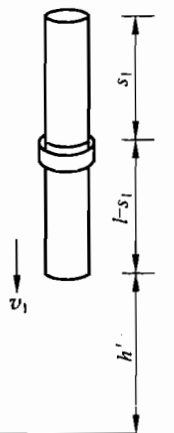


图 1-34

解此题时要先根据题意对物理过程有一概括的了解,然后想清条件,针对目标,认清要讨论的问题,对过程作出逐段分析(例如要求出环沿棒的下滑运动,就要讨论环相对于棒的运动;要解决棒弹回到最高点时环是否仍在沿棒下滑,就要求出棒弹起到最高点所需时间和环停在棒上所需时间并进行比较,等等).这是对能否细致地运用原理分析问题的考查.此题第1)问明确提出了这种细致分析的要求.第2)问则要求对 n 次弹跳作出分析.显然,如果逐次地讨论每次弹跳过程,将是困难的,这就要善于把第一次弹跳的结果转化为一个可以适用于分析 n 次弹跳的形式,把问题一起解决.这要求解题的一定技巧(当然,不是所有涉及 n 次过程的问题都一定能这样做,但在此题中恰可运用这种技巧).作出这种转化后,再正确确定 n 次弹跳滑脱(即在棒第 n 次弹起后,第 $n+1$ 次碰地前环从棒上滑脱)的条件与环在棒上运动的总距离的关系,此题就可解出.

此题有相当难度,也能由它看出解题者对概念的掌握以及灵活运用水平与技巧.

一个初看起来相当复杂的问题,经过分析,把它分解成若干小问题,每个小问题并不复杂,而且是自己熟悉的,然后把它们逐一解决,这就是一种分析问题解决问题的能力.但把复杂问题分解成比较简单的、自己熟悉的小问题,必须依赖于自己掌握的知识.没有掌握必要的知识,即使把问题分解成了若干小问题,但每个小问题仍可能是陌生的,不熟悉的,问题还是不会得到解决.实际上,没有一定的知识作为基础,就根本无法对问题进行分解.不在掌握和积累知识上下功夫就能具有非常强的分析问题和解决问题的能力,固然是一条省力的捷径,但这种捷径并不存在,这往往是某些在做学问上没有下过苦功的人的美丽梦想.

17. 如图1-35,一根长为 L 的均匀细杆可以绕通过其一端的水平轴 O 在竖直平面内转动.杆最初处在水平位置.杆上距 O 为 a 处放有一小物体(可视为质点),杆与其上小物体最初均处于静止状态.若此杆突然以匀角速 ω 绕 O 轴转动,问当 ω 取什么值时小物体与杆可能相碰?

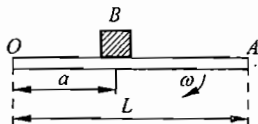


图 1-35

解析

对这一问题首先作如下分析:

1) 当细杆开始以角速度 ω 绕 O 轴转动时, B 的速度为零,杆上与 B 接触处则有线速度 ωa ,因而 B 与杆分离, B 做自由落体运动,由于 B 的速度不断增大,有可能追上细杆而与之碰撞.设碰撞时细杆与水平夹角为 θ , ω 越大, θ 亦越大.当 ω 超过某一数值时, B 就可能碰不上细杆而一直坠落;如果 ω 很大,细杆可能在转过一圈从后面追上 B 而与之碰撞.所以本题要按这两种情况进行讨论.

2) 求 B 追上细杆时 θ 与 ω 的关系

设 B 经过时间 t 后与细杆在 D 处相碰(见图 1-36), 则有

$$BD = a \tan \theta = gt^2/2 \quad (1)$$

$$\theta = \omega t \quad (2)$$

如给定 ω 的值, 由此二式可求出相应的 θ 值.

由于杆长 L 的限制, 要发生碰撞, θ 值必须满足一定条件. 由图 1-36 可知, 此条件为

$$\theta \leq \theta_m = \arccos(a/L) \quad (3)$$

根据这一条件和 ω - θ 曲线, 可以求出相应的 ω 的取值应符合的条件.

由(1),(2)两式消去 t 得

$$\omega^2 = \frac{g}{2a} \frac{\theta^2}{\tan \theta} \quad \text{或} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{2a}} \frac{\theta}{\sqrt{\tan \theta}} \quad (4)$$

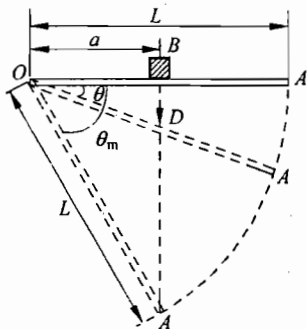


图 1-36

从此方程可以看出

(i) $\theta=0$ 时, $\omega=0$.

(ii) θ 很小时, $\tan \theta \approx \theta$, $\omega = \sqrt{\frac{g}{2a}} \sqrt{\theta}$, ω 随 θ 的增加而增加.

(iii) 当 θ 值很大时, 由于 $\tan \theta$ 增长极快, 此时 ω 即随 θ 的增加而减少, 所以 ω 有一极大值.

(iv) 当 $\theta \rightarrow \pi/2$ 时, $\tan \theta \rightarrow \infty$, $\omega \rightarrow 0$.

表 1-1 是 θ 为特殊角时 ω 的值, 由此可作出如图 1-37 所示的 ω - θ 曲线.

表 1-1

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
ω	0	$\frac{\sqrt{3}\pi}{6} \sqrt{\frac{g}{2a}} = 0.69 \sqrt{\frac{g}{2a}}$	$\frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{g}{2a}} = 0.785 \sqrt{\frac{g}{2a}}$	$\frac{\pi}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{g}{2a}} = 0.796 \sqrt{\frac{g}{2a}}$	0

从图 1-37 可以看出, ω 达到极大值(ω_m)时, θ 的值(θ_0)约在 $\pi/3$ 和 $\pi/4$ 之间, ω_m 约为 $0.8\sqrt{g/2a}$.

从图 1-37 可以看出: $\omega < \omega_m$ 时, 对每一个 ω 值有两个 θ 值与之相应, 即(4)式有两个解, θ_1 和 θ_2 , $\theta_1 < \theta_2$; $\omega = \omega_m$ 时, θ 只有一个解, 即 θ_0 ; $\omega > \omega_m$ 时, θ 没有解. 这些结果的物理意义是什么, 我们可作如下分析(参阅图 1-38).

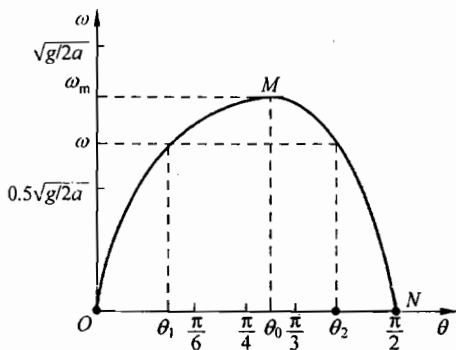


图 1-37

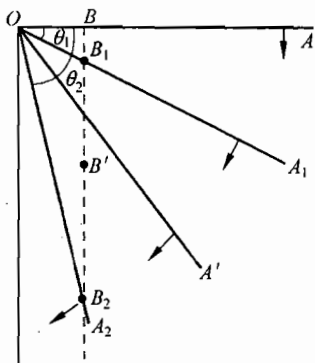


图 1-38

(i) B 做自由落体运动, 何时到达何处是完全确定的, 所以能否发生碰撞主要决定于细杆的角速度 ω 和 B 放在细杆的什么位置上.

(ii) 开始时 B 落后于细杆, 如果 ω 不是太大, B 可能赶上, 当 $\theta = \theta_1$ 时 B 与细杆相遇.

(iii) 假设 B 能无阻拦地穿过细杆, 只要细杆很长, 它一定会从后面追上 B 而与之相碰, 此时的 θ 即为 θ_2 . 实际上 B 与细杆在 $\theta = \theta_1$ 处相碰后, 它们的运动状态都发生了变化, θ_2 这个解没有实际意义, 要回答本题只要考虑 θ_1 就可以了, 但(4)式确有这个解.

(iv) 如果 ω 的值增大, B 追上 OA 所需时间就增大, 即图 1-38 中的 B_1 点下移, θ_1 增大; 细杆从后面追上 B 所需时间则减少, 即 B_2 点上移, θ_2 减小. 所以 θ_1 和 θ_2 随 ω 的增大而靠拢, 最后当 ω 等于某一值 ω_m 时, $\theta_1 = \theta_2 = \theta_0$. 这就是图 1-37 所表示的物理过程.

至于 θ_0 的值可以通过微积分求极大值的方法求出, 也可以通过下面的分析求出.

如果 B_1 能穿过细杆, 则 B_1 与细杆相遇时, 它的速度 (gt) 在垂直于细杆方向的分速度 ($v' = gt \cos \theta$) 必须大于此时接触点的切向速度 ($v_t = \omega r$), 参阅图 1-39. 当 $\theta = \theta_0$ 时 B 刚好能与细杆相遇而不穿过, 此时 v' 应等于 v_t , 即

$$gt \cos \theta_0 = \omega r = \omega a / \cos \theta_0 \quad (5)$$

因此时 B 与细杆相遇, θ_0 符合(1)式和(2)式, 故有

$$a \tan \theta_0 = gt^2 / 2 \quad (6)$$

$$\omega t = \theta_0 \quad (7)$$

将此三式相乘, 再加以简化, 得

$$\sin 2\theta_0 = \theta_0 \quad (8)$$

由(8)式可求得 θ_0 的数值(用作图法或三角函数表可求出 $\theta_0 \approx 54.3^\circ$), 相应的 ω_m 的值为 $\sqrt{\frac{g}{2a}} \frac{\theta_0}{\sqrt{\tan \theta_0}}$. 如果 ω 再增大一点, ωr 就大于 $gt \cos \theta_0$, B 就碰不上 OA .

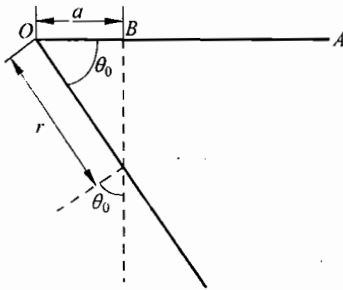


图 1-39

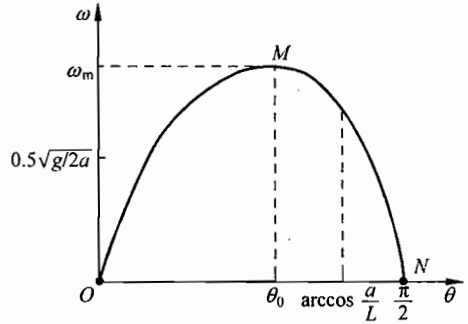


图 1-40

3) 在以上关于 $\omega-\theta$ 曲线的讨论中我们没有考虑杆的长度. 如果考虑到杆长的限制, ω 取何值时 B 方能追上细杆?

如前所述, $\theta=\theta_1$ 时, B 追上细杆, 由于杆长的限制, θ_1 必须满足下式

$$\theta_1 \leq \theta_m = \arccos(a/L)$$

下面分两种情况讨论.

(i) $\theta_m = \arccos(a/L) > \theta_0$, 即 $\cos\theta_m < \cos\theta_0$ 或 $a < L\cos\theta_0$, 参阅图 1-40.

在此情形下, 从图可知, 只要 ω 满足

$$\omega \leq \omega_m = \sqrt{\frac{g}{2a}} \frac{\theta_0}{\sqrt{\tan\theta_0}}$$

在 OM 曲线段上都可找到与之相应的 θ_1 , 其数值小于 θ_m , 所以能发生碰撞.

(ii) $\theta_m \leq \theta_0$, 即 $a \geq L\cos\theta_0$, 此时在 OM 曲线段上有一与 $\theta = \theta_m = \arccos(a/L)$ 相对应的 P 点, 见图 1-41. 与之相对应的 ω 为

$$\omega_{\theta_m} = \sqrt{\frac{g}{2a}} \frac{\theta_m}{\sqrt{\tan\theta_m}}$$

因为 $\cos\theta_m = a/L$, $\sin\theta_m = \sqrt{L^2 - a^2}/L$, 上式变为

$$\omega_{\theta_m} = \sqrt{\frac{g}{2}} \frac{1}{\sqrt{L^2 - a^2}} \arccos \frac{a}{L}$$

只要 ω 满足 $\omega \leq \omega_{\theta_m}$, 在 OP 曲线段上就能找到相应的 $\theta_A \leq \theta_m$, 表示 B 与细杆能发生碰撞.

综上所述, B 追上细杆的条件是:

(i) $a < L\cos\theta_0$ 时, $\omega < \omega_m = \sqrt{\frac{g}{2a}} \frac{\theta_0}{\sqrt{\tan\theta_0}}$.

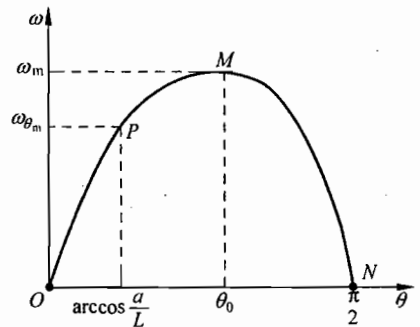


图 1-41

$$(ii) a > L \cos \theta_0 \text{ 时, } \omega \leq \sqrt{\frac{g}{2}} (L^2 - a^2)^{-\frac{1}{4}} \arccos \frac{a}{L}.$$

θ_0 为 ω - θ 曲线上 ω 达最大值时 θ 的值.

4) ω 取何值时细杆转过一圈后追上 B?

此时相应的公式为

$$a \tan \theta = \frac{1}{2} g t^2$$

$$2\pi + \theta = \omega t$$

消去 t , 得

$$\omega^2 = \frac{g}{2a} \frac{(2\pi + \theta)^2}{\tan \theta}, \quad \text{或} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{2a}} \frac{2\pi + \theta}{\sqrt{\tan \theta}}$$

在此式中, 在 θ 从 $0 \rightarrow \pi/2$ 的变化过程中 $\tan \theta$ 从 $0 \rightarrow \infty$, 而 $2\pi + \theta$ 仅从 2π 变到 2.5π . 所以, $\tan \theta$ 对 ω 值的影响远大于 $2\pi + \theta$ 的影响, ω 值随 $\tan \theta$ 的增加 (相应于 θ 的增加) 而减少. 反之给定一 ω 值, 与之相应的 θ 值随 ω 的增大而减小.

当 $\theta = \theta_m = \arccos \frac{a}{L}$ 时,

$$\omega_m = \sqrt{\frac{g}{2a}} \frac{2\pi + \theta_m}{\sqrt{\tan \theta_m}} = \sqrt{\frac{g}{2}} (L^2 - a^2)^{-\frac{1}{4}} \left(2\pi + \arccos \frac{a}{L} \right)$$

此时细杆与 B 刚好能碰上. 如果 $\omega > \omega_m$, 与之相对应 $\theta < \theta_m$, 细杆能追上 B; $\omega < \omega_m$ 时, 与之相对应 $\theta > \theta_m$, 细杆不能追上 B. 所以细杆追上 B 的条件是

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{2}} (L^2 - a^2)^{-\frac{1}{4}} \left(2\pi + \arccos \frac{a}{L} \right)$$

此题的目的主要是考查学生能否全面地分析问题. 学生最易出现的错误有两个, 一是没分析 $a < L \cos \theta_0$ 时的解; 另一个是没考虑细杆追上 B 的解.

二、牛顿定律

1. 三个质量相同的物块 A、B、C，用两个轻弹簧和一根轻线相连，挂在天花板上，处于平衡状态，如图 2-1 所示。现将 A、B 之间的轻线剪断，在刚剪断后的瞬间，三个物块的加速度分别是（加速度的方向以竖直向下为正）：

A 的加速度是_____。

B 的加速度是_____。

C 的加速度是_____。

解析

$-2g; 2g; 0.$

线未剪断时，由力的平衡可知线中张力为 $2mg$ ， m 为每个物块的质量。线刚剪断时，此张力消失；而弹簧的形变尚未来得及发生变化，而 A、B、C 各自所受的弹簧的弹力仍等于剪断前的值；A、B、C 各自所受重力不变。分别隔离 A、B、C 运用牛顿定律很容易得出以上结论。

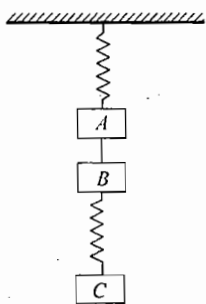


图 2-1

2. 质量为 m 的小木块，停放在水平地面上，它与地面间的静摩擦因数为 μ 。一人想用最小的作用力 F 使木块移动，则此最小作用力 F 的大小为_____。

解析

$$\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}mg.$$

设人作用于木块的力为 F ，与水平方向成 θ 角。木块受到的各作用力如图 2-2 所示，其中 F_N 为地面作用于木块的支持力， F_f 为摩擦力， mg 为重力。采用正交分解法，木块开始移动的条件是

$$F\cos\theta = F_f$$

$$F_N + F \sin \theta = mg$$

而

$$F_f = \mu F_N$$

由此得

$$F = \frac{\mu mg}{\cos \theta + \mu \sin \theta}$$

当 θ 取某一值时, 可使 F 得最小值. 因为 μ 是已知量, 我们总可以找到某一角度 φ , 使得 $\cot \varphi = \mu$, 代入上式可得

$$F = \frac{\mu mg}{\cos \theta + \cot \varphi \sin \theta} = \frac{\mu mg \sin \varphi}{\sin(\varphi + \theta)}$$

由此式可知, 当 $\sin(\varphi + \theta) = 1$ 时, 即 $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ 时, F 具有最小值, 其值为

$$F = \mu mg \sin \varphi = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} mg$$

较多学生所犯的错误的: 想到移动木块, 就想施一个水平的力. 没有想到施加竖直向上的力可以减小正压力, 因而所需施加的合力反而可能更小一些.

没有想到这方面的原因可能很多. 一种可能是学生解了很多习题, 形成了一些解题经验, 在以后的解题中往往就用自己的解题经验替代对具体问题的具体分析. 例如, 凡遇到有质量为 m 的物块位于水平面上, 则正压力就是 mg ; 凡遇到有质量为 m 的物块位于倾角为 α 的斜面上, 则正压力就是 $mg \cos \alpha$; 而对应的摩擦力就是 μmg 或 $\mu mg \cos \alpha$ 等. 在本题中, 见到物块位于水平地面上, 不假思索地就认为地面作用于物块的摩擦力是 μmg , 根本不会想到施于物块的力 F 有可能改变正压力的问题. 另一原因可能是对牛顿定律的理解欠严密和完整. 例如, 若在本题中, 已知小木块在 F 作用下做加速运动, 且 F 的大小和方向都已知, 问小木块的加速度为多少? 这是一个非常简单而又非常基本的问题. 根据牛顿第二定律, 小木块的加速度 a 是由作用于小木块的所有力的合力, 即各个力的矢量和决定的, 即

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_f + \mathbf{F}_N + mg = ma$$

这一矢量方程实际上包含下面两个方程:

$$F \cos \theta - F_f = ma \quad (1)$$

$$F_N + F \sin \theta - mg = 0 \quad (2)$$

小物块的加速度由(1)、(2)两个方程式共同决定, 这才是牛顿第二定理的完整内容. (2)式清楚地告诉我们, 在本题中, 正压力不等于 mg , 摩擦力 F_f 亦不等于 μmg . 但有的学生在快速解题中形成了一种快速解题的经验, 遇到这类问题, 就习惯地写出

$$F \cos \theta - \mu mg = ma$$

似乎从来不必考虑矢量方程的第二个分量式. 这种经验影响了对问题的具体分析.

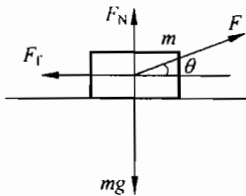


图 2-2

3. 如图 2-3 所示,两个木块 A 和 B,质量分别为 m_A 和 m_B ,紧挨着并排放在水平桌面上,A、B 间的接触面垂直于图中纸面且与水平成 θ 角.A、B 间的接触面是光滑的,但它们与水平桌面间有摩擦,静摩擦因数和动摩擦因数均为 μ . 开始时 A、B 都静止,现施一水平推力 F 于 A,要使 A、B 向右加速运动且 A、B 之间不发生相对滑动,则

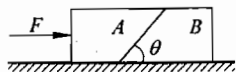


图 2-3

- 1) μ 的数值应满足什么条件?
- 2) 推力 F 的最大值不能超过多少?(只考虑平动,不考虑转动问题)

解析

1) 令 F_N 表示 A、B 之间的相互作用力(垂直于接触面,如图 2-4 所示),若 A 相对于 B 发生滑动,则 A 在竖直方向必有加速度. 现要使 A 相对于 B 不滑动,则 A 受的力 F_N 在竖直方向的分力必须小于或等于 A 的重力. 所以要使 B 向右加速运动而同时 A 相对于 B 不滑动,必须同时满足下列两式:

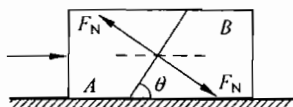


图 2-4

$$F_N \sin \theta - \mu(m_B g + F_N \cos \theta) = m_B a > 0 \quad (1)$$

$$F_N \cos \theta \leq m_A g \quad (2)$$

由(1)、(2)两式可解得

$$\mu < \frac{m_A}{m_A + m_B} \tan \theta \quad (3)$$

2) 在已满足(3)式时,又由于 A 的水平方向的加速度和 B 相同,即

$$\frac{F - \mu(m_A g - F_N \cos \theta) - F_N \sin \theta}{m_A} = \frac{F_N \sin \theta - \mu(m_B g + F_N \cos \theta)}{m_B}$$

由以上各式可解得

$$F \leq \frac{m_A}{m_B} (m_A + m_B) g (\tan \theta - \mu)$$

4. 10 个同样的扁长木块一个紧挨一个地放在水平地面上,如图 2-5 所示. 每个木块的质量 $m=0.40\text{kg}$,长 $l=0.50\text{m}$. 它们与地面间的静摩擦因数和动摩擦因数均为 $\mu_2=0.10$. 原来木块处于静止状态. 左方第一个木块的左端上方放一质量为 $m_0=1.0\text{kg}$ 的小铅块,它与木块间的静摩擦因数和动摩擦因数均为 $\mu_1=0.20$. 现突然给铅块一向右的初速

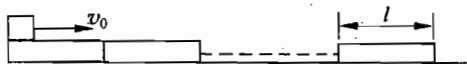


图 2-5

度 $v_0 = 4.3 \text{ m/s}$, 使其在大木块上滑行. 试确定铅块最后的位置在何处(落在地上还是停在哪块木块上). 取重力加速度 $g = 10 \text{ m/s}^2$. 设铅块的线度与 l 相比可以忽略.

解析

铅块在第 1 个木块上滑行时受到摩擦阻力为

$$F_{f1} = \mu_1 m_0 g = 2.0 \text{ N} \quad (1)$$

此力的反作用力作用在第 1 个木块上, 要使木块也运动, 此力必须大于所有木块所受最大静摩擦力之和 F_f .

$$F_f = 9\mu_2 m g + \mu_2 (m + m_0) g = 5.0 \text{ N} \quad (2)$$

由(1)、(2)可知, $F_{f1} < F_f$. 所以铅块在第 1 个木块上滑行时, 所有木块都不动.

进一步分析, 铅块运动到何处时木块开始运动. 每个木块与地面间的最大静摩擦力为

$$\mu_2 m g = 0.4 \text{ N} \quad (3)$$

铅块压在那个木块与地面间的最大静摩擦力为

$$\mu_2 (m + m_0) g = 1.4 \text{ N} \quad (4)$$

而铅块压在那个木块所受铅块对它的摩擦力的大小总是 $F_{f1} = 2.0 \text{ N}$. 由(1)、(3)、(4)可知, 只有当铅块刚滑到倒数第 2 个木块上时, 这最后两个木块才能被铅块带动. 至于铅块能否滑到该木块上去, 还要作如下分析:

设铅块能滑至倒数第 2 个木块时的速度为 v_1 , 其动能即 $m_0 v_1^2 / 2$. 如果由题设条件求出此动能为正值, 则表示铅块能滑到此木块上. 铅块从第 1 个木块开始到滑过第 8 个木块时, 克服摩擦力所做的功为

$$\mu_1 m_0 g \times 8l = 8.0 \text{ J}$$

因此

$$m_0 v_1^2 / 2 = m_0 v_0^2 / 2 - 8.0 \text{ J}$$

代入数值可得

$$v_1^2 = 2.49 \text{ m}^2 / \text{s}^2 > 0 \quad (5)$$

可见铅块能滑到倒数第 2 个木块上, 并带动最后两个木块向右运动. 以后的运动过程的起始状态如图 2-6 所示.

进一步分析铅块能否滑到最后的木块上. 如果能, 则其过程将如图 2-7 所示, 且必须有 $v_1 \geq v'$, v_1' 和 v' 分别表示铅块刚滑到最后木块上时铅块和木块的速度. 图中 s 为木块

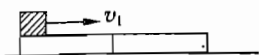


图 2-6

在此过程中运动的距离. 下面计算 v_1' 和 v' , 看是否满足上述要求. 应用牛顿定律可求得铅块和木块的加速度的大小分别为

$$a_{m_0} = \mu_1 m_0 g / m_0 = \mu_1 g = 2.0 \text{ m/s}^2 \quad (6)$$

$$a_m = [\mu_1 m_0 g - \mu_2 m g - \mu_2 (m + m_0) g] / (2m) = 0.25 \text{ m/s}^2 \quad (7)$$

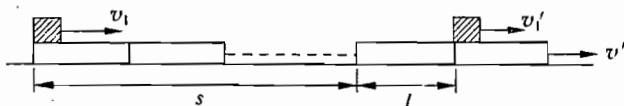


图 2-7

将此值代入运动学公式,得(式中速度以 m/s 为单位,加速度以 m/s^2 为单位,长度以 m 为单位)

$$v_1'^2 = v_1^2 - 2a_{m_0}(s+l) = 2.49 - 4(s+0.5) \quad (8)$$

$$v'^2 = 2a_m s = 0.5s \quad (9)$$

$$v'_1 = v_1 - a_{m_0} t = \sqrt{2.49} - 2t \quad (10)$$

$$v' = a_m t = 0.25t \quad (11)$$

由(8)、(9)消去 s , (10)、(11)消去 t ,可得

$$v_1'^2 = 0.49 - 8v'^2 \quad (12)$$

$$v'_1 = \sqrt{0.49 - 8v'^2} \quad (13)$$

由此可解得

$$\begin{cases} v'_1 = 0.611 \text{ m/s} \\ v' = 0.121 \text{ m/s} \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} v'_1 = -0.26 \text{ m/s} \\ v' = 0.23 \text{ m/s} \end{cases}$$

第一组解为合理值.可见 $v'_1 > v'$,即铅块能运动到最后一块木块上去.

最后再来讨论铅块能否脱离最后一块木块而落在地面上.若铅块能落在地面上,则图 2-8 所示的 v_1'' 要大于 v'' .图中 v_1'' 和 v'' 分别表示铅块将要脱离木块时铅块和木块的速度.对铅块应用牛顿定律可得

$$\mu_1 m_0 g = m_0 a_{m_0}$$

由运动学公式可得

$$v_1''^2 = v_1'^2 - 2a_{m_0}(s'+l)$$

将第一组解中 v_1' 的数值以及 μ_1 、 g 、 l 的数值

代入,可得

$$v_1''^2 = -1.63 - 4s' < 0$$

由此可知不合理.故铅块不可能达到木块的左端,而只能停在(相对于木块)它上面,最后

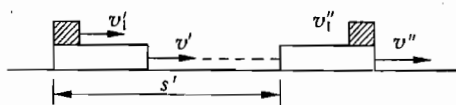


图 2-8

和木块一起相对于地面停下来.

本题是一道综合性力学题,需要把动力学、运动学、静摩擦力和滑动摩擦力等知识联合运用去解决本题.但本题没有曲折的地方,只要一步一步地分析,就能得出正确结果.

5. 一个质量 $m=20\text{kg}$ 的钢件,架在两根完全相同的、平行的长直圆柱上(如图 2-9 所示).钢件的重心与两柱等距.两柱的轴线在同一水平面内.圆柱的半径 $r=0.025\text{m}$,钢件与圆柱间的动摩擦因数 $\mu=0.20$.两圆柱各绕自己的轴线做转向相反的转动,角速度 $\omega=40\text{rad/s}$.若沿平行于柱轴的方向施力推着钢件做速度为 $v_0=0.050\text{m/s}$ 的匀速运动,推力是多大?设钢件左右受光滑导槽限制(图中未画出),不发生横向运动.

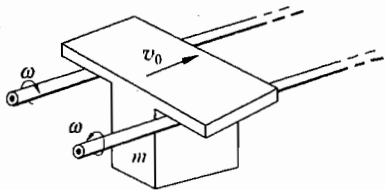


图 2-9

解析

因为钢件与圆柱之间有相对运动,所以摩擦力等于摩擦因数与正压力的乘积.因为钢件与圆柱接触处的法线是竖直的,且钢件的重心与两圆柱等距,所以每根圆柱所受正压力 $F_N = \frac{1}{2}mg$,每根圆柱给钢件的摩擦力的大小为

$$F_f = \mu F_N = \frac{1}{2}\mu mg \quad (1)$$

要使钢件沿平行于柱轴的方向做匀速运动,则推力的大小应等于摩擦力 F_f 在这个方向上的分力的两倍.作用在钢件上的摩擦力的方向与接触处钢件相对于圆柱的速度方向相反.以图 2-9 中前面那个圆柱为例,在接触处,钢件相对于圆柱一方面有向前的速度 v_0 ,取此方向为 y 轴的正方向;另一方面因为圆柱往里旋转,所以接触处钢件

相对于圆柱还有水平向外且垂直于 y 轴的速度 $r\omega$,取此方向为 x 轴的正方向.合速度的方向则如图 2-10 所示,它与 y 轴之间的夹角 θ 应满足

$$\tan\theta = \frac{v_x}{v_y} = \frac{r\omega}{v_0} \quad (2)$$

摩擦力的方向与合速度的方向相反,如图 2-10 中 F_f 箭头所示.由前面的分析可知,推力

$$F = 2F_{fy} = 2F_f \cos\theta \quad (3)$$

由(1)、(2)、(3)三式可求得

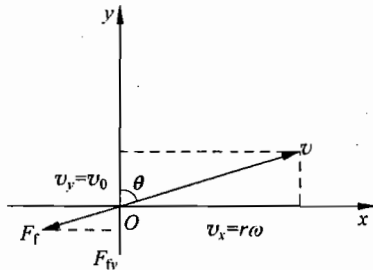


图 2-10

$$F = \frac{\mu mg}{\sqrt{1 + \left(\frac{r\omega}{v_0}\right)^2}} \quad (4)$$

代入数值,得

$$F \approx 2.0 \text{ N}$$

判定摩擦力的方向是一个很重要的问题,也是一个很有趣的问题.许多学生可能都记住了摩擦力的方向是由物体的相对运动的方向决定的,但却忽略了这一结论是在物体可视为质点这种条件下得出的.对于可视为质点的物体,物体上各部分的速度都相同,所谓物体的速度这句话的含义是确定的.对于不能视为质点的物体,物体的各部分的速度并不相同,所谓物体的速度这句话的含义就不太确定了.摩擦力的方向由物体相对运动的方向决定这一结论也就没意义了.对于不能视为质点的物体,在判定摩擦力的方向时,应分析相互接触处的相对运动或相对运动的趋势.因为摩擦力发生在接触处,其方向与接触处相对运动的方向相反.在本题中,钢件沿平行于柱轴方向运动,但钢件与圆柱的接触处除了以速度 v_0 沿柱轴方向运动外,还因圆柱的转动而具有垂直于柱轴方向的相对速度.摩擦力的方向与这两个相对速度的合速度的方向相反.

类似的现象是很多的.例如自行车的向行驶,我们就不能不加分析地认为自行车受到地面的摩擦力总是向后的.自行车的后轮是主动轮,人踏自行车时,通过齿轮、传动链条,有一力矩作用于后轮,使后轮绕其中心轴转动.如图 2-11 所示.后轮转动时,它与地面的接触处 P_1 相对地面有向后滑动的趋势,于是地面便有向前的静摩擦力 F_f 作用于自行车,使自行车向前加速.如果地面很光滑,如在冰面上,接触处将在冰面上向后打滑,自行车将无法向行驶.后轮向前运动,通过车架有力作用于前轮的轴上,使前轮与地面的接触处 P_2 有向前运动的趋势.地面作用于前轮 P_2 处的 F_f' 的方向向后,使前轮绕中心轴转动.

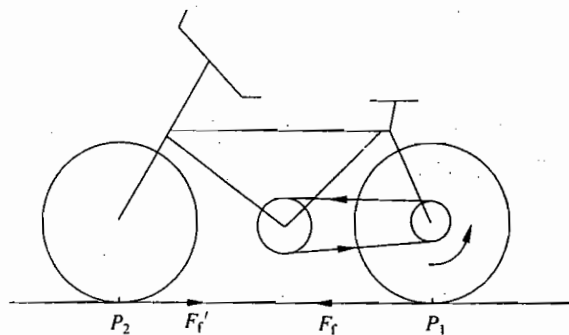


图 2-11

6. 帆船在逆风的情况下仍能只依靠风力破浪航行. 设风向从 S 向 A , 如图 2-12. 位于 A 点处的帆船要想在静水中最后驶达目标 S 点, 应如何操纵帆船? 要说明风对船帆的作用力是如何使船逆风前进达到目标的.



图 2-12

解析

为便于分析, 设船帆为一平面 M . 要使船由 A 点到达 S 点, 需先将船头偏转某一角度, 例如使船身沿 AB 方向 (AB 与 AS 的夹角小于 90°), 并使帆面 M 介于直线 AB 与 AS 之间, 如图 2-13 所示. 在这种情形下, 当风吹到船帆 M 上时, 沿帆面的摩擦力较小, 风对帆的主要作用力 F 是垂直作用于帆面上的. 这个力可分解为沿船身 AB 方向把船向前推进的分力 F_1 和使船横移的分力 F_2 . 由于船体在横向移动方向上受到水的阻力很大, 所以横向移动很小可不计. 而船沿船身方向所受水的阻力较小, 所以能在分力 F_1 的作用下沿 AB 方向前进.

当船沿 AB 方向航行一段距离到达 B 点后, 将船头掉转到与风向成某一小于 90° 角的另一个方向 BC , 同时适当改变船帆的方位, 如图 2-14 所示. 则根据与上述相同的理由, 风力将使船沿 BC 方向前进.

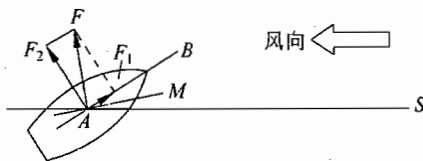


图 2-13

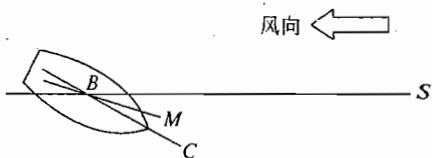


图 2-14

交替改变船头的方向和帆的方位, 可使船沿“Z”字形路线行驶, 如图 2-15 所示, 船就能沿折线 $ABCDE\dots$ 逆风达到目标 S .

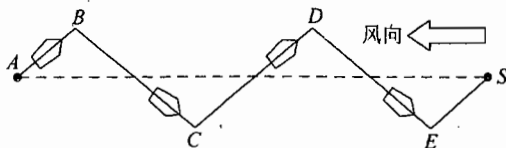


图 2-15

7. 如图 2-16 所示, 在水平桌面上放一质量为 m' , 截面为直角三角形的物体 ABC: AB 与 AC 间的夹角为 θ , B 点到桌面的高度为 h . 在斜面 AB 上的底部 A 处放一质量为 m 的小物体. 开始时两者皆静止. 现给小物体一沿斜面 AB 方向的初速度 v_0 , 如果小物体与斜面间以及 ABC 与水平桌面间的摩擦都不考虑, 则 v_0 至少要大于何值才能使小物体经 B 点滑出?

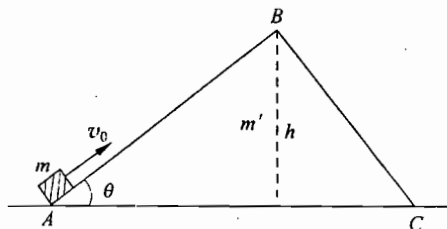


图 2-16

解析

解法 I 若 v_0 的大小刚能使 m 运动到 B 点, 即 m 运动到 B 点时相对于 m' 的速度为零, 令此时 m' 相对于地的速度(向右)为 u , 则 m 相对于地的速度也为 u (见图 2-17). 根据机械能守恒可知

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(m+m')u^2 + mgh \quad (1)$$

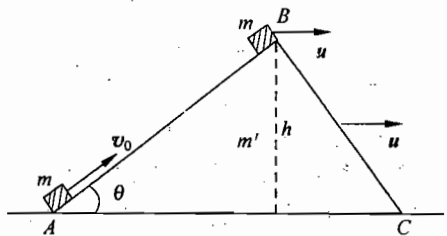


图 2-17

又因为在此过程中以 m 和 m' 为系统时, 水平方向不受外力, 所以水平方向动量守恒, 即

$$mv_0 \cos \theta = (m+m')u \quad (2)$$

由(1)、(2)两式可得

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gh(m+m')}{m' + m \sin^2 \theta}} \quad (3)$$

由此可知, v_0 至少要大于 $\sqrt{\frac{2gh(m+m')}{m' + m \sin^2 \theta}}$, m 才能经 B 点滑出.

解法 II 用牛顿定律进行求解. 先研究小物块与三角形物体的加速度. 当小物块位于斜面 AB 上的任意位置时, 它受到的作用力有竖直向下的重力 mg , 垂直于斜面 AB 的支承力 F_N , 受力情况如图 2-18 所示.

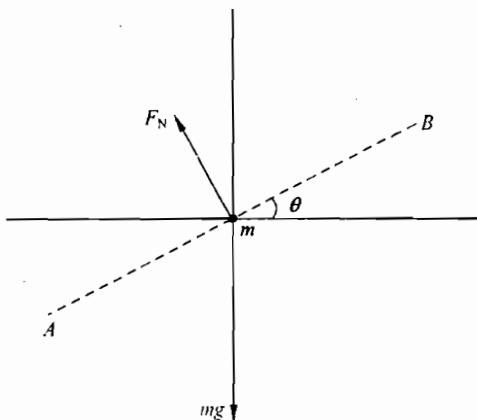


图 2-18

把 F_N 分解成沿水平方向和沿竖直方向的两个分量, 由牛顿第二定律有

$$F_N \sin\theta = ma_x \quad (4)$$

$$mg - F_N \cos\theta = ma_y \quad (5)$$

a_x 、 a_y 分别为小物体的加速度沿水平方向和沿竖直方向的分量的大小. 三角形物块因受 F_N 的反作用而在水平方向有加速度. 由牛顿第二定律有

$$F_N \sin\theta = m'a_0 \quad (6)$$

a_0 为三角形物体的加速度的大小.

为了求得 a_0 、 a_x 、 a_y 的关系, 我们把情况变换一下: 即考虑小物块是由斜面上某处自静止开始下滑, 对于这种过程, 很容易就可看出加速度之间的关系(见下文). 因为这种过程和题述过程虽然两者的位移、速度可各不相同, 但加速度(决定于力)是相同的. 所以由这种过程得出的加速度关系, 也完全适用于题述过程. 若初始时, 小物体位于 P_0 处, 经过一定时间 t , 小物体位于 P_2 处, 则可以把小物体的运动看作先跟随斜面 AB 由 P_0 移到 P_1 , 再沿斜面由 P_1 移到 P_2 , 如图 2-19 所示. $\overline{P_0P_1}$ 是斜面在 t 时间内的位移, 有

$$\overline{P_0P_1} = \frac{1}{2}a_0t^2$$

小物块在水平方向和竖直方向的位移分别为

$$x = \frac{1}{2}a_x t^2, \quad y = \frac{1}{2}a_y t^2$$

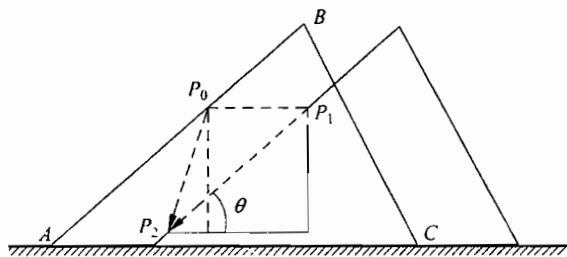


图 2-19

由图 2-19 可得

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}a_y t^2}{\frac{1}{2}a_x t^2 + \frac{1}{2}a_0 t^2}$$

由此得

$$a_y = (a_x + a_0)\tan\theta \quad (7)$$

联立(4)、(5)、(6)、(7)各式,可解得

$$a_x = \frac{m' \sin\theta \cos\theta}{m' + m \sin^2\theta} g \quad (8)$$

$$a_y = \frac{(m' + m) \sin^2\theta}{m' + m \sin^2\theta} g \quad (9)$$

$$a_0 = \frac{m \sin\theta \cos\theta}{m' + m \sin^2\theta} g \quad (10)$$

得到了这些加速度,我们再回到原题.如果小物体能从 B 点滑出,则当小物体在竖直方向上升到最高点 B 处时,它在水平方向相对三角形物体的速度尚未减到 0. 设小物体在竖直方向上升 h 高度需时间 t ,则有

$$h = v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2}a_y t^2 \quad (11)$$

$$v_0 \cos\theta - a_x t - a_0 t \geq 0 \quad (12)$$

解(11)、(12)两式并注意到(8)、(9)、(10)各式,得

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{2gh(m' + m)}{m' + m \sin^2\theta}} \quad (13)$$

可以看出,直接用牛顿定律求解此题比用能量、动量关系求解此题要复杂一些.

8. 两滑块 A_1 和 A_2 叠放在水平的桌面上,如图 2-20 所示. 已知 A_1 的质量为 m_1 , A_2 的质量为 m_2 , A_2 与桌面间的静摩擦因数为 μ_2 . 设用 μ_1 表示 A_1 与 A_2 间的静摩擦因

数, F 表示作用于滑块 A_1 上的水平拉力, 则当 μ_1 和 F 取各种不同值时, A_1 和 A_2 可能发生的运动情况有下列四种:

- (a) A_2 相对于桌面滑动, 但 A_1 与 A_2 相对静止.
- (b) A_2 相对于桌面滑动, A_1 与 A_2 间存在相对运动.
- (c) A_2 相对于桌面静止, A_1 相对桌面滑动.
- (d) 相对于桌面, A_1 和 A_2 都静止.

1) 分别写出上述每种运动情况中 μ_1 和 F 所满足的条件(不要求写出运算过程):

- (a) _____.
- (b) _____.
- (c) _____.
- (d) _____.

2) 以横坐标表示 μ_1 , 纵坐标表示 F , 试在 $F-\mu_1$ 图(图 2-21)上标出与上述每种运动情况相应的 μ_1 和 F 的取值范围.

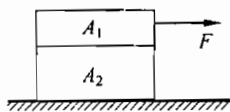


图 2-20

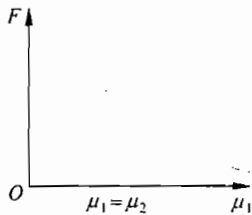


图 2-21

解析

$$1) (a) \mu_1 > \frac{m_1 + m_2}{m_1} \mu_2$$

$$\mu_2 (m_1 + m_2) g < F \leq \frac{m_1}{m_2} (\mu_1 - \mu_2) (m_1 + m_2) g$$

$$(b) \mu_1 > \frac{m_1 + m_2}{m_1} \mu_2, \quad F > \frac{m_1}{m_2} (\mu_1 - \mu_2) (m_1 + m_2) g$$

$$(c) \mu_1 \leq \frac{m_1 + m_2}{m_1} \mu_2, \quad F > \mu_1 m_1 g$$

$$(d) F \leq \mu_1 m_1 g, \quad F \leq \mu_2 (m_1 + m_2) g$$

2) 如图 2-22.

设 A_1 与 A_2 间的摩擦力为 F_{f1} , A_2 与桌面间的摩擦力为 F_{f2} , 则运动方程为:

$$F - F_{f1} = m_1 a_1 \quad (1)$$

$$F_{f1} - F_{f2} = m_2 a_2 \quad (2)$$

式中 a_1, a_2 分别表示 A_1 和 A_2 的加速度(见图 2-23).

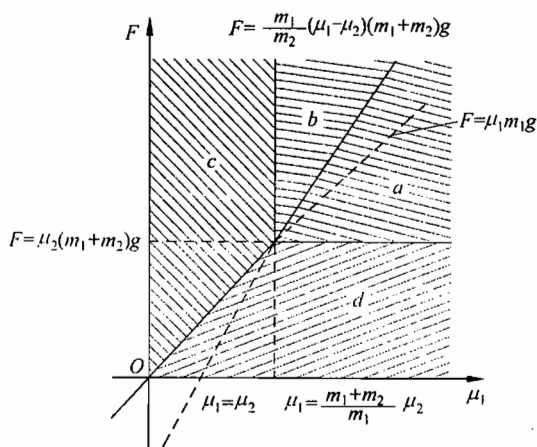


图 2-22

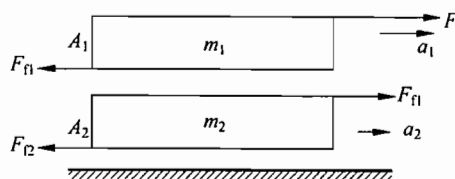


图 2-23

(a) 已知

$$a_1 = a_2 > 0 \quad (3)$$

$$F_{f1} \leq \mu_1 m_1 g \quad (4)$$

$$F_{f2} = \mu_2 (m_1 + m_2) g \quad (5)$$

由式(2)、(3)可知, $F_{f1} > F_{f2}$, 据此由式(4)、(5)得出

$$\mu_1 > \frac{m_1 + m_2}{m_1} \mu_2$$

由式(1)、(2)、(3)可知, $F > F_{f2}$, 以此代入式(5)得出

$$F > \mu_2 (m_1 + m_2) g$$

同时由式(1)、(4)可知, $F - m_1 a_1 \leq \mu_1 m_1 g$, 又由式(1)、(2)、(3)、(5)可知

$$a_1 = a_2 = \frac{F - \mu_2(m_1 + m_2)g}{m_1 + m_2}$$

于是得出

$$F \leq \frac{m_1}{m_2}(\mu_1 - \mu_2)(m_1 + m_2)g$$

所以运动情况(a)所满足的条件是

$$\mu_1 > \frac{m_1 + m_2}{m_1} \mu_2$$

$$\mu_2(m_1 + m_2)g < F \leq \frac{m_1}{m_2}(\mu_1 - \mu_2)(m_1 + m_2)g$$

(b) 已知

$$a_1 > a_2 > 0 \quad (6)$$

$$F_{f1} = \mu_1 m_1 g \quad (7)$$

$$F_{f2} = \mu_2(m_1 + m_2)g \quad (8)$$

由式(2)、(6)可知, $F_{f1} > F_{f2}$, 据此由式(7)、(8)得出

$$\mu_1 > \frac{m_1 + m_2}{m_1} \mu_2$$

由式(1)、(2)、(6)可知, $\frac{F - F_{f1}}{m_1} > \frac{F_{f1} - F_{f2}}{m_2}$, 再用式(7)、(8)代入, 消去 F_{f1} 和 F_{f2} , 化简以后得出

$$F > \frac{m_1}{m_2}(\mu_1 - \mu_2)(m_1 + m_2)g$$

所以运动情况(b)所满足的条件是

$$\mu_1 > \frac{m_1 + m_2}{m_1} \mu_2$$

$$F > \frac{m_1}{m_2}(\mu_1 - \mu_2)(m_1 + m_2)g$$

(c) 已知

$$a_1 > 0 \quad (9)$$

$$a_2 = 0 \quad (10)$$

$$F_{f1} = \mu_1 m_1 g \quad (11)$$

$$F_{f2} \leq \mu_2(m_1 + m_2)g \quad (12)$$

由式(2)、(10)可知, $F_{f1} = F_{f2}$, 所以由式(11)、(12)得出

$$\mu_1 \leq \frac{m_1 + m_2}{m_1} \mu_2$$

由式(1)、(9)可知, $F > F_{f1}$, 用式(11)代入后得出

$$F > \mu_1 m_1 g$$

所以运动情况(c)所满足的条件是

$$\mu_1 \leq \frac{m_1 + m_2}{m_1} \mu_2, \quad F > \mu_1 m_1 g$$

(d) 已知

$$a_1 = a_2 = 0 \quad (13)$$

$$F_{f1} \leq \mu_1 m_1 g \quad (14)$$

$$F_{f2} \leq \mu_2 (m_1 + m_2) g \quad (15)$$

由式(1)、(3)可知, $F = F_{f1}$, 再用式(14)代入, 得出

$$F \leq \mu_1 m_1 g$$

由式(1)、(2)、(13)可知, $F = F_{f2}$, 再用式(15)代入, 得出

$$F \leq \mu_2 (m_1 + m_2) g$$

所以运动情况(d)所满足的条件是

$$F \leq \mu_1 m_1 g, \quad F \leq \mu_2 (m_1 + m_2) g$$

先画出 $F = \mu_1 m_1 g$, $F = \frac{m_1}{m_2} (\mu_1 - \mu_2) (m_1 + m_2) g$, $F = \mu_2 (m_1 + m_2) g$ 和 $\mu_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \mu_2$

这四条线, 即可根据与上述四种运动情况相应的条件, 找出相应的 μ_1 和 F 的取值范围 (如图 2-22 所示).

此题较难, 分析时必须考虑到所有可能的情况, 以及每种情况所应满足的条件, 才能得出全面的结论. 分析的关键是要使用 $F_f > \mu mg$ 一类的不等式. 中学生往往习惯用等式 $F_{fmax} = \mu mg$ 一类的等式去做题, 用这种方法分析本题, 不易得出全面的结论.

9. 足球比赛中发角球时, 有经验的足球队员可发出所谓“香蕉球”, 即球飞到球门前方时会拐弯进入球门. 试简要说明其道理.

解析

图 2-24 为“香蕉球”的示意图, 踢角球的队员踢球时, 力的作用线不通过球的重心, 从而使球的重心向前飞进的同时, 整个球又绕重心沿图中所示的逆时针方向旋转. 球心向前飞进, 相对于球心来说相当于空气向后流动; 因为球同时有图示方向的旋转, 由于摩擦作用, 带动球表面附近的空气也随之旋转. 以上两个因素造成相对

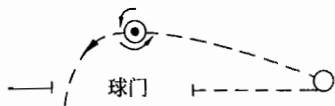


图 2-24

于球向后流动的空气的流速在球的两旁附近不同,图中上方流速慢而下方流速快,这样两边空气对球的压强也不同,图中上方压强大而下方压强小.正是这个压力差使得球心向球门方向拐弯.

10. 一半径为 $R=1.00\text{m}$ 的水平光滑圆桌面,圆心为 O ,有一竖直的立柱固定在桌面上的圆心附近,立柱与桌面的交线是一条凸的平滑的封闭曲线 C ,如图 2-25 所示.一根不可伸长的柔软的细轻绳,一端固定在封闭曲线上的某一点,另一端系一质量为 $m=7.5\times 10^{-2}\text{kg}$ 的小物块.将小物块放在桌面上并把绳拉直,再给小物块一个方向与绳垂直,大小为 $v_0=4.0\text{m/s}$ 的初速度.物块在桌面上运动时,绳将缠绕在立柱上.已知当绳的张力为 $F_T=2.0\text{N}$ 时,绳即断开,在绳断开前物块始终在桌面上运动.

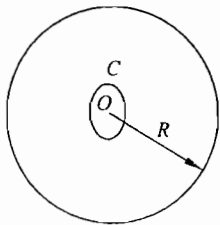


图 2-25

1) 问绳刚要断开时,绳的伸直部分的长度为多少?

2) 若绳刚要断开时,桌面圆心 O 到绳的伸直部分与封闭曲线的接触点的连线正好与绳的伸直部分垂直,问物块的落地点到桌面圆心 O 的水平距离为多少? 已知桌面高度 $h=0.80\text{m}$. 物块在桌面上运动时未与立柱相碰. 取重力加速度大小为 10m/s^2 .

解析

1) 因桌面是光滑的,轻绳是不可伸长的和柔软的,且在断开前绳都是被拉紧的,故在绳断开前,物块在沿桌面运动的过程中,其速度始终与绳垂直,绳的张力对物块不做功,物块速度的大小保持不变.设在绳刚要断开时绳的伸直部分的长度为 x ,若此时物块速度的大小为 v_x ,则有

$$v_x = v_0 \quad (1)$$

绳对物块的拉力仅改变物块速度的方向,是作用于物块的向心力,故有

$$F_T = \frac{mv_x^2}{x} = \frac{mv_0^2}{x} \quad (2)$$

由此得

$$x = \frac{mv_0^2}{F_T} \quad (3)$$

代入数据得

$$x = 0.60\text{m} \quad (4)$$

2) 设在绳刚要断开时,物块位于桌面上的 P 点, BP 是绳的伸直部分,物块速度 v_0 的方向如图 2-26 所示. 由题意可知, $OB \perp BP$. 因物块离开桌面时的速度仍为 v_0 , 物块离开桌面后便做初速度为 v_0 的平抛运动. 设平抛运动经历的时间为 t , 则有

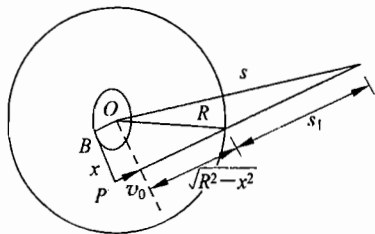


图 2-26

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \quad (5)$$

物块做平抛运动的水平射程为

$$s_1 = v_0 t \quad (6)$$

由几何关系知,物块落地点与桌面圆心 O 的水平距离 s 为

$$s = \sqrt{[s_1 + \sqrt{R^2 - x^2}]^2 + x^2} \quad (7)$$

解(5)、(6)、(7)式,得

$$s = \sqrt{\left[v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} + \sqrt{R^2 - x^2} \right]^2 + x^2} \quad (8)$$

代入数据得

$$s = 2.5\text{m} \quad (9)$$

11. 半径为 R 的水平圆台,可绕通过圆心 O 的竖直光滑细轴 CC' 转动(见图 2-27). 圆台上沿相互垂直的两个半径方向刻有槽,质量为 m_A 的物体 A 放在一个槽内, A 与槽底间的静摩擦因数为 μ_0 , 质量为 m_B 的物体 B 放在另一槽内,此槽是光滑的. A 、 B 间用一长为 l ($l < R$) 且不可伸长的轻绳绕过细轴相连. 试求当圆台做匀角速转动且 A 、 B 两物体相对圆台不动时,转动角速度 ω 和 A 到圆心的距离 x 所应满足的条件(设此时 A 与槽的侧面之间没有作用力).

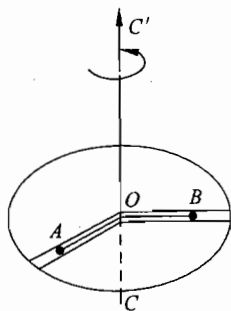


图 2-27

解析

物体相对圆台不动有三种可能:

1) A 有沿半径向外移动的趋势

这时,物体 A 所受摩擦力 F_f 的方向与张力 F_T 的方向相同

(因为 B 所在槽是光滑的,当 B 随圆台转动时,绳中总有张力存在),用 x 表示 A 到圆心 O 的距离,根据牛顿定律和摩擦力的性质可知

$$m_A \omega^2 x = F_T + F_f$$

$$m_B \omega^2 (l - x) = F_T$$

$$F_f \leq \mu_0 m_A g$$

解得

$$\omega \leq \sqrt{\frac{\mu_0 g}{\frac{m_A + m_B}{m_A} x - \frac{m_B l}{m_A}}}$$

这时, x 必须满足如下的条件:

$$x > \frac{m_B}{m_A + m_B} l$$

2) A 有沿半径指向圆心移动的趋势

这时, A 所受摩擦力 F_f 的方向与张力 F_T 的方向相反, 因而有

$$m_A \omega^2 x = F_T - F_f$$

$$m_B \omega^2 (l - x) = F_T$$

$$F_f \leq \mu_0 m_A g$$

解得

$$\omega \leq \sqrt{\frac{\mu_0 g}{\frac{m_B l}{m_A} - \frac{m_A + m_B}{m_A} x}}$$

这时 x 必须满足如下的条件:

$$x < \frac{m_B}{m_A + m_B} l$$

3) A 物体无移动的趋势

这时, $F_f = 0$, 应有

$$m_A \omega^2 x = F_T$$

$$m_B \omega^2 (l - x) = F_T$$

解得

$$x = \frac{m_B}{m_A + m_B} l$$

这时, ω 可取任意值.

本题主要考查学生全面分析问题和在有静摩擦力存在时物体平衡的受力分析能力. 学生最容易产生的问题是只考虑了静摩擦力为零的一种情况, 而忽略了另外两种情况, 或者想到了两种情况而漏掉了第三种可能性.

12. 有两个相同的摆, 把一个拴在另一个的下面, 使它们各在一个平面内做匀速圆周运动. 设两条摆线与竖直线所成的夹角都很小. 已知在运动过程中两条摆线一直保持在同一个竖直平面内, 求此平面转动的角速度, 以及两质点轨道半径之比.

解析

有两种情况, 如图 2-28 和图 2-29 所示.

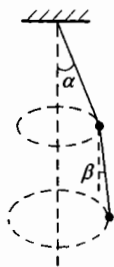


图 2-28



图 2-29

设转动的角速度为 ω , 摆长为 L , 质点的质量为 m , 上下摆线与铅垂线所成的夹角分别为 α 和 β , 上下摆线中的张力分别为 F_{T1} 和 F_{T2} , 则上下两质点的运动方程如下:

情况 I (图 2-28):

$$\text{上质点} \quad F_{T1} \cos \alpha = mg + F_{T2} \cos \beta \quad (1)$$

$$mL(\sin \alpha)\omega^2 = F_{T1} \sin \alpha - F_{T2} \sin \beta \quad (2)$$

$$\text{下质点} \quad F_{T2} \cos \beta = mg \quad (3)$$

$$mL(\sin \alpha + \sin \beta)\omega^2 = F_{T2} \sin \beta \quad (4)$$

情况 II (图 2-29):

$$\text{上质点} \quad F_{T1} \cos \alpha = mg + F_{T2} \cos \beta \quad (5)$$

$$mL(\sin \alpha)\omega^2 = F_{T1} \sin \alpha + F_{T2} \sin \beta \quad (6)$$

$$\text{下质点} \quad F_{T2} \cos \beta = mg \quad (7)$$

$$mL(\sin \beta - \sin \alpha)\omega^2 = F_{T2} \sin \beta \quad (8)$$

比较两种情况, 我们发现, 只要认为情况 I 中的 $\beta > 0$, 情况 II 中的 $\beta < 0$, 则两种情况完全可用同一方程组(1)、(2)、(3)、(4)来描述和求解. 由(3)、(4)式消去 F_{T2} 得

$$g \tan \beta - L(\sin \alpha + \sin \beta)\omega^2 = 0$$

由(1)、(2)、(3)式消去 F_{T1} 、 F_{T2} 得

$$2g \tan \alpha - L(\sin \alpha)\omega^2 - g \tan \beta = 0$$

由于 α 、 β 较小, 可取下列近似: $\cos \alpha \approx \cos \beta \approx 1$, $\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha$, $\sin \beta \approx \tan \beta \approx \beta$. 得到

$$L\omega^2 \alpha + (L\omega^2 - g)\beta = 0 \quad \text{和} \quad (L\omega^2 - 2g)\alpha + g\beta = 0 \quad (9)$$

根据题设, $\beta \neq 0$, $\alpha \neq 0$, 由(9)式可求得

$$\alpha/\beta = (g - L\omega^2)/(L\omega^2) = g/(2g - L\omega^2)$$

$$\text{即} \quad \omega^4 - (4g/L)\omega^2 + 2(g/L)^2 = 0$$

解出

$$\omega = \sqrt{(2 \pm \sqrt{2})g/L}$$

代入(9)式得

$$\omega_1 = \sqrt{(2 - \sqrt{2})g/L} \text{ 时, } \beta_1 = \sqrt{2} \alpha$$

$$\omega_2 = \sqrt{(2 + \sqrt{2})g/L} \text{ 时, } \beta_2 = -\sqrt{2} \alpha$$

前者就是情况 I 的解; 后者就是情况 II 的解.

两质点轨道半径之比分别为:

$$\text{情况 I: } \alpha/(\alpha + \beta) = 1/(1 + \sqrt{2}) \approx 0.414$$

$$\text{情况 II: } \alpha/(\beta - \alpha) = 1/(\sqrt{2} - 1) \approx 2.414$$

本题容易出错的地方是有两种不同的情况. 这一点在题目中并无暗示, 需要做题时做全面的分析和周密的思考.

13. 在 xz 竖直平面内, 支在原点 O 的一根弯杆, 其形状可以用函数 $z = x^2/k$ 来描写, k 为有长度量纲的非零正常数. 在杆上穿有一个滑块, 杆与滑块间的静摩擦因数为 μ (见图 2-30).

1) 不考虑摩擦, 求滑块的高度为 z 时, 它在沿杆方向的加速度的大小. 下列 5 种答案中有一个是正确的, 试作出判断并说明理由:

$$0; g; 2g\sqrt{z/(4z+k)}; gz\sqrt{4z^2+k^2}; gz/k.$$

2) 考虑摩擦, 但杆不动, 在什么情况下滑块可以在杆上静止 (用 z, μ, g, k 等表达)?

3) 现在设杆以角速度 ω 绕 z 轴匀速转动, 且有关系 $\omega = \sqrt{2g/k}$, 这时滑块可以在何处相对于杆静止?

4) 若 $\mu = 0.5, \omega = \sqrt{6g/k}$, 则滑块不滑动的条件又如何?

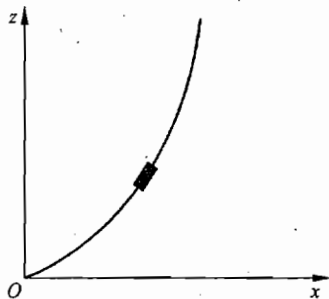


图 2-30

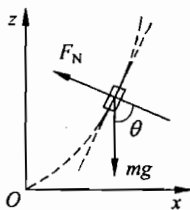


图 2-31

解析

1) 在不考虑摩擦时, 滑块在杆上运动的加速度即为重力加速度的切向分量 (见图 2-31)

$$a = g \sin \theta$$

其中 θ 为滑块所在点杆的法线与重力方向的夹角. a 一般不为零, 且一定不超过 g . 当 $z \rightarrow \infty$ 时, 杆近于竖直, a 趋近于 g , 于是可判定

$$a = 2g\sqrt{z/(4z+k)}$$

是正确答案. 由此算得

$$\sin\theta = 2\sqrt{z/(4z+k)}$$

$$\tan\theta = 2\sqrt{z/k}$$

2) 考虑摩擦而杆不动, 则滑块静止为静力平衡. 滑块受重力影响有下滑趋势, 摩擦力朝上, 支持力和摩擦力大小分别为

$$F_N = mg \cos\theta, \quad F_f = mg \sin\theta$$

平衡条件要求

$$F_f/F_N \leq \mu F_N/F_N = \mu$$

或

$$\tan\theta \leq \mu$$

设 $z=z_0$ 时, $\tan\theta=\mu$, 则滑块静止的条件为

$$z \leq z_0 = \mu^2 k/4$$

3) 当杆匀速转动时, 则在滑块相对于杆不动时, 支持力和摩擦力在竖直方向的分力之和与重力平衡, 在水平方向的分力之和使滑块产生水平的向心加速度, 由此可得(不妨设摩擦力沿杆向上)

$$F_N \sin\theta - F_f \cos\theta = m\omega^2 \sqrt{kz} = (m\omega^2 k \tan\theta)/2$$

$$F_N \cos\theta + F_f \sin\theta = mg$$

由此二式可解得

$$\frac{F_f}{F_N} = \frac{(1-A)\tan\theta}{1+A\tan^2\theta}, \quad A = \omega^2 k/2g$$

由此可知, 当 $\omega = \sqrt{2g/k}$ 时, $A=1$, 有 $F_f/F_N=0$, 即不受摩擦力, 向心加速度完全由重力和支持力的合力提供. 这个关系对任何 θ 值都能满足, 即此时滑块在任何位置都相对于杆保持静止.

4) 当 $\omega = \sqrt{6g/k}$ 时, $A=3$, 由上小题中 F_f/F_N 的表达式可见, $F_f < 0$, 即摩擦力实际是朝下的. 由于旋转太快而滑块有上移趋势. 那么滑块相对静止的条件为

$$|F_f|/F_N \leq \mu F_N/F_N = \mu$$

即

$$\left| \frac{(1-A)\tan\theta}{1+A\tan^2\theta} \right| = \frac{2\tan\theta}{1+3\tan^2\theta} \leq \mu = \frac{1}{2}$$

或

$$3\tan^2\theta - 4\tan\theta + 1 \geq 0$$

此二次函数不等式的判别式

$$\Delta = 4^2 - 4 \times 3 \times 1 = 4 > 0$$

故不等式满足的条件为

$$\tan\theta \leq 1/3 \quad \text{或} \quad \tan\theta \geq 1$$

用 $\tan\theta = 2\sqrt{z/k}$ 代入, 即得滑块相对不动应满足的条件为

$$0 \leq z \leq k/36 \quad \text{或} \quad z \geq k/4$$

此题的第1)问也可用简单的微分知识, 导出加速度 a 与 z 的关系式. 当我们对滑块受的每个力都沿杆的方向和垂直于杆的方向分解后, 由于不考虑摩擦, 则杆对滑块的作用力在沿杆方向的分力为0. 所以沿杆方向, 滑块只受到重力分力的作用, 在此方向的加速度应为

$$a = g\sin\theta$$

因为 $z = \frac{x^2}{k}$, 由图及三角关系可知

$$\tan\theta = \frac{dz}{dx} = \frac{2x}{k}$$

所以得

$$\sin\theta = \frac{2x}{\sqrt{4x^2 + k^2}}$$

因为 $z = \frac{x^2}{k}$, 将 x 代入得

$$\sin\theta = 2\sqrt{\frac{z}{4z+k}}$$

所以

$$a = g\sin\theta = 2g\sqrt{\frac{z}{4z+k}}$$

这就解出了第1)问的答案.

本题的第1)问是要求从给出的5个答案中找出一个正确答案. 若就题论题而言, 找出正确答案, 任务就完成了. 但如果对答案作一点分析或挖掘, 则可发现从找出的正确答案中可获得一个非常重要的信息: 即找出了曲线 $z = x^2/k$ 的斜率 $\tan\theta = 2\sqrt{z/k}$. 这一信息对求解本题的第1)问并无作用, 但对求解本题的其他小问却非常重要. 做物理习题的目的不仅是找出正确答案, 找出正确答案的过程和对答案的分析讨论, 有时会更加重要、更加有意义, 因为它可能是培养研究本领和获取信息能力的好机会. 近年来, 流行某些所谓“研究性试题”或“信息题”, 用来培养或考查学生的研究能力、获取信息的能力, 这些做法都是有益的, 但不宜把这种做法绝对化, 典型化. 有指令要求学生进行研究的题, 或有指令要求学生从中获取信息的题固然能培养、考查学生的研究能力或获取信息的能力, 但如果学生能对没有指令要进

行研究的题进行了研究,并取得结果;或对没有指令要从中获取信息的题中取得了重要的有用的信息,有时会更加有意义,更是独立地研究问题、解决问题的表现.

14. 1) 三个质量皆为 m 的质点 A, B, C 组成一边长为 a 的等边三角形,如图 2-32 所示. 质点之间有万有引力作用. 为使此三角形保持不变,三个质点应皆以角速度 ω 绕通过它们的质心 O 并垂直于三角形平面的轴旋转. 试求此角速度的大小(将结果用 m, a 以及引力常量 G 表示).

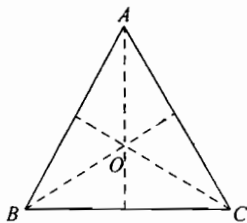


图 2-32

2) 现将上述三个质量相同的质点换成质量分别为 m_A, m_B, m_C ($m_A \neq m_B \neq m_C$) 的质点. 如仍欲保持上述等边三角形不变,此时三质点应皆以角速度 ω' 绕通过新的质心 O' 并垂直于三角形平面的轴旋转. 试求此角速度的大小.

解析

1) 质点 B 对质点 A 的万有引力为 $F_{AB} = G \frac{m^2}{a^2}$, 方向由 A 指向 B ; 质点 C 对质点 A 的万有引力为 $F_{AC} = G \frac{m^2}{a^2}$, 方向由 A 指向 C .

质点 A 受到的总作用力为

$$\begin{aligned} F_A &= F_{AB} \cos 30^\circ + F_{AC} \cos 30^\circ \\ &= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} G \frac{m^2}{a^2} = \sqrt{3} G \frac{m^2}{a^2} \end{aligned}$$

方向沿 AO . 质点 A 绕 O 旋转, 所需的向心力即由 F_A 提供

$$\sqrt{3} G \frac{m^2}{a^2} = m \omega^2 R_{AO}$$

由于三者质量相同, 它们的质心即位于 $\triangle ABC$ 的重心处, 故有

$$R_{AO} = \frac{2}{3} a \cos 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} a$$

代入上式得

$$\sqrt{3} G \frac{m^2}{a^2} = m \omega^2 \frac{a}{\sqrt{3}}$$

故

$$\omega^2 = G \frac{3m}{a^3}$$

$$\omega = \sqrt{G \frac{3m}{a^3}}$$

对其他两质点也得出相同的 ω .

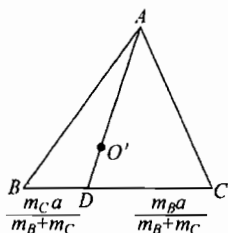


图 2-33

2) 如图 2-33, 以 D 表示 m_B 和 m_C 的质心, 则

$$\overline{BD} = \frac{m_C}{m_B + m_C} a$$

$$\overline{DC} = \frac{m_B}{m_B + m_C} a$$

故 $\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 - 2 \overline{AB} \cdot \overline{BD} \cos 60^\circ$

$$= a^2 + \left(\frac{m_C}{m_B + m_C} \right)^2 a^2 - \frac{m_C}{m_B + m_C} a^2$$

$$= \frac{m_B^2 + m_C^2 + m_B m_C}{(m_B + m_C)^2} a^2$$

又以 O' 表示三个质点 m_A, m_B, m_C 的质心, 则 O' 点在 AD 上, 且有

$$r_A = \overline{AO'} = \frac{m_B + m_C}{m_A + m_B + m_C} \times \overline{AD}$$

$$= \frac{m_B + m_C}{m_A + m_B + m_C} \times \sqrt{\frac{m_B^2 + m_C^2 + m_B m_C}{m_B + m_C}} a$$

$$= \frac{\sqrt{m_B^2 + m_C^2 + m_B m_C}}{m_A + m_B + m_C} a \quad (1)$$

同理可得,

$$r_B = \overline{BO'} = \frac{\sqrt{m_A^2 + m_C^2 + m_A m_C}}{m_A + m_B + m_C} a \quad (2)$$

另一方面, m_C 对 m_A 的作用力是 (见图 2-34)

$$F'_{AC} = k m_A m_C, \quad k = \frac{G}{a^2}$$

同理可得

$$F'_{AB} = k m_A m_B$$

由于 $F'_{AB}/F'_{AC} = m_B/m_C = \overline{DC}/\overline{BD} = \overline{AE}/\overline{AF}$, 即 F'_{AC} 和 F'_{AB} 的合力 F'_A 的作用线通过质心 O' (如图 2-34 所示), 其大小

$$F'_A = \sqrt{F'_{AB}{}^2 + F'_{AC}{}^2 + 2F'_{AB}F'_{AC} \cos 60^\circ} = k m_A \sqrt{m_B^2 + m_C^2 + m_B m_C} \quad (3)$$

同理可证, F'_B 的作用线也通过质心 O' , 且

$$F'_B = k m_B \sqrt{m_C^2 + m_A^2 + m_C m_A} \quad (4)$$

由 (1)、(2)、(3) 和 (4) 式得

$$\frac{F'_A}{m_A r_A} = \frac{F'_B}{m_B r_B} = \frac{k}{a} (m_A + m_B + m_C) = \frac{G}{a^3} (m_A + m_B + m_C) \quad (5)$$

同理可证

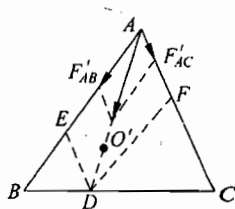


图 2-34

$$\frac{F'_B}{m_B r_B} = \frac{F'_C}{m_C r_C} = \frac{G}{a^3} (m_A + m_B + m_C) \quad (6)$$

(5)、(6)两式说明, m_A 、 m_B 、 m_C 可在三个质点的初位置所决定的平面内保持相对位置不变地绕质心 O' 做匀速圆周运动, 做圆周运动的角速度 ω' 亦可由(5)、(6)两式得出

$$\omega' = \sqrt{\frac{G}{a^3} (m_A + m_B + m_C)}$$

15. 一根不可伸长的细轻绳, 穿上一粒质量为 m 的珠子(视为质点), 绳的下端固定在 A 点, 上端系在轻质小环上, 小环可沿固定的水平细杆滑动(小球的质量及与细杆摩擦皆可忽略不计). 细杆与 A 在同一竖直平面内. 开始时, 珠子紧靠小环, 绳被拉直, 如图 2-35 所示. 已知: 绳长为 l , A 点到杆的距离为 h , 绳能承受的最大张力为 F_{T_d} , 珠子下滑过程中到达最低点前绳子被拉断. 求细绳被拉断时珠子的位置和速度的大小(珠子与绳子之间无摩擦).

[注] 质点在平面内做曲线运动时, 它在任一点的加速度沿该点轨道法线方向的分量称为法向加速度 a_n , 可以证明, $a_n = v^2/R$, v 为质点在该点时速度的大小, R 为轨道曲线在该点的“曲率半径”. 所谓平面曲线上某点的曲率半径, 就是在曲线上取包含该点在内的一段弧, 当这段弧极小时, 可以把它看作是某个“圆”的弧, 则此圆的半径就是曲线在该点的曲率半径. 如图 2-36 中曲线在 A 点的曲率半径为 R_A , 在 B 点的曲率半径为 R_B .

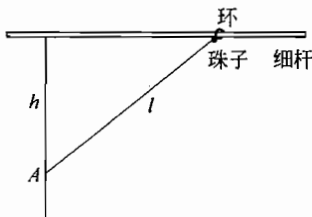


图 2-35

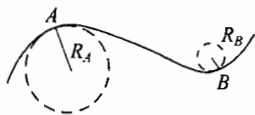


图 2-36

解析

1) 珠子运动轨迹

建立如图 2-37 所示的坐标系, 原点 O 在过 A 点的竖直线与细杆相交处, x 轴沿细杆向右, y 轴沿 OA 向下. 当珠子运动到 N 点处且绳子未断时, 小环在 B 处, BN 垂直于 x 轴, 所以珠子的坐标为

$$x = \overline{PN}, \quad y = \overline{BN}$$

知道了曲线方程,求曲线上各点的曲率半径,一般要用微积分.本题在求解过程中,通过巧妙地与熟知的平抛运动的轨迹方程的类比,解决了求曲率半径问题,这是类比思维的应用.类比思维是一种创造性思维.在类比思维活动中往往会有所发现,有所发明,能显示出创造力.在物理学的发展过程中,由类比思维所呈现出的创造性成果是很多的.要进行创造性的类比思维是有条件的,首先你必须具备理解得比较准确和深刻的知识,否则你就不可能有作为类比的已知事件.在本题中,如果学生不了解平抛运动,未准确掌握平抛运动的规律,就不可能通过与平抛运动轨迹类比而找出曲率半径.有一些人,非常希望能做出创造性的成果,但却不愿花功夫于知识、经验的积累,这种人是不能做出创新成果的,因为天下没有那么多便宜的事情.

16. 有一在竖直平面内固定不动的、半径为 R 的刚性圆环,在其最高点 A 处系一原长为 R 的弹性软绳,绳的另一端与一套在此圆环上的小圆珠相连.弹性绳的劲度系数为 k ,其质量可忽略不计.圆珠的质量为 m .圆珠与圆环之间完全光滑.圆珠在环上滑动时受到空气阻力的作用.开始时令圆珠从 A 处向右自由下滑.试分析圆珠可能的运动过程及其最后状态,并叙述通过分析后得出的结论.已知在角度 θ (以弧度为单位)的数值 $\ll 1$ 时,如果忽略 θ^2 及 θ 的更高次项, $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 可作下述近似:

$$\sin\theta \approx \theta, \quad \cos\theta \approx 1$$

解析

由于空气阻力很小,在分析圆珠的运动时,可先不考虑空气阻力,然后再讨论阻力的影响.只要圆珠处于运动状态,它一定受到空气阻力,运动状态一定要改变,最终状态必为圆珠静止于某一位置,此时它所受合力等于零.

设圆珠所在位置和圆环中心的连线与竖直方向成 θ 角,如图 2-39 所示.圆珠下滑到 $\theta=60^\circ$ 时,软绳被拉直,以后圆珠继续下滑.软绳的弹性力 (F_T) 沿切向的分力是向上的,重力 (mg) 沿切向的分力是向下的.由此可求出圆珠所受切向力为零的平衡位置 ($\theta=\theta'$) 如下:

$$k\left(2R\sin\frac{\theta'}{2} - R\right)\cos\frac{\theta'}{2} = mg\sin\theta'$$

由于 $\sin\theta' = 2\sin\frac{\theta'}{2}\cos\frac{\theta'}{2}$,代入上式,得到

$$\left[2\left(1 - \frac{mg}{kR}\right)\sin\frac{\theta'}{2} - 1\right]kR\cos\frac{\theta'}{2} = 0$$

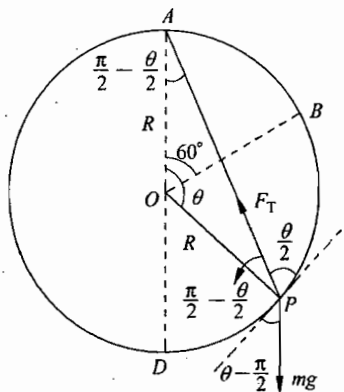


图 2-39

其解为

$$1) \cos(\theta'/2) = 0, \quad \theta' = 180^\circ \quad (1)$$

即图中的 D 点. 此解与下述的 c 值大小无关, 总是存在的.

$$2) \sin \frac{\theta'}{2} = \frac{1}{2(1-c)}, \quad c = \frac{mg}{kR} \quad (2)$$

由于 θ' 应满足 $60^\circ < \theta' < 180^\circ$ 的条件, 故此式不一定有解. 当 $c > 1/2$ 时 (即 $mg > \frac{1}{2}kR$ 时), (2) 式无解; 当 $0 \leq c \leq 1/2$ 时, (2) 式有解, 其解为

$$\theta' = 2\arcsin\left[\frac{1}{2(1-c)}\right]$$

此位置在图中的 B 、 D 之间. 由于左右对称, 在 $180^\circ < \theta' \leq 300^\circ$ 之间也有一平衡位置. 当 $c = 1/2$ 时, $\theta' = 180^\circ$.

结论:

1) $c \geq 1/2$ 时, 只有一个平衡位置, $\theta' = 180^\circ$ (D 点).

2) $0 < c < 1/2$ 时, 有三个可能的平衡位置, $\theta' = 180^\circ$, $\theta' = 2\arcsin\left[\frac{1}{2(1-c)}\right]$, 后者有两个解, 处于对称位置.

关于这几个平衡位置的平衡稳定性:

当圆珠位于平衡位置附近时, 设 $\theta = \theta' + \Delta\theta$, 切向力的合力 (下滑方向) 为

$$\begin{aligned} F_t &= mg \sin\theta - k \left(2R \sin \frac{\theta}{2} - R \right) \cos \frac{\theta}{2} \\ &= (mg - kR) \sin\theta + kR \cos(\theta/2) \\ &= kR [(c-1) \sin\theta + \cos(\theta/2)] \end{aligned}$$

由于 $\sin\theta = \sin(\theta' + \Delta\theta) = \sin\theta' \cos\Delta\theta + \cos\theta' \sin\Delta\theta$,

$$\begin{aligned} \cos(\theta/2) &= \cos(\theta'/2 + \Delta\theta/2) \\ &= \cos(\theta'/2) \cos(\Delta\theta/2) - \sin(\theta'/2) \sin(\Delta\theta/2) \end{aligned}$$

又由于 $\Delta\theta$ 很小, 采用近似 $\sin\Delta\theta = \Delta\theta$, $\cos\Delta\theta = 1$, $\sin(\Delta\theta/2) = \Delta\theta/2$, $\cos(\Delta\theta/2) = 1$, 将此代入上式, 再考虑到 θ' 满足 $(c-1)\sin\theta' + \cos(\theta'/2) = 0$, 得

$$F_t = kR \left[(c-1) \cos\theta' - \frac{1}{2} \sin \frac{\theta'}{2} \right] \Delta\theta$$

如果 $(c-1) \cos\theta' - \frac{1}{2} \sin \frac{\theta'}{2} > 0$, θ 增大时, $F_t > 0$, 为不稳定平衡; 如果 $(c-1) \cos\theta' - \frac{1}{2} \sin \frac{\theta'}{2} < 0$, θ 增大时, $F_t < 0$, 为稳定平衡. 据此讨论以上各平衡位置的稳定性.

1) $c \geq 1/2$ 时, 只有一个平衡位置 $\theta' = 180^\circ$, 从物理上考虑, 圆珠最后一定停在此处, 此处为稳定平衡位置. 从上式也可得此结论.

2) $c < 1/2$ 时,

(i) D 点: $kR\left(\frac{1}{2}-c\right) > 0$, 不稳定平衡;

(ii) $\theta' = 2\arcsin \frac{1}{2(1-c)}$ 点:

$$F_t = kR \left[(c-1)\cos\theta' - \frac{1}{2}\sin\frac{\theta'}{2} \right] \Delta\theta$$

因 $\cos\theta' = 1 - 2\sin^2\frac{\theta'}{2} = \frac{1-4c+c^2}{2(1-c)^2}$, 代入上式得

$$F_t = kR \frac{1-4(1-c)^2}{4(1-c)} \Delta\theta$$

因 $0 < c < \frac{1}{2}$, $\frac{1-4(1-c)^2}{4(1-c)} < 0$, 故为稳定平衡.

下面讨论圆珠的下滑过程.

圆珠从 A 处下滑, 设滑至 θ'' 处速度等于零. 则由机械能守恒可得

$$2mgR \sin\frac{\theta''}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta''}{2}\right) = \frac{1}{2}k\left(2R \sin\frac{\theta''}{2} - R\right)^2$$

化简, 并令 $mg/(kR) = c$, 得

$$\frac{1}{2}kR^2 \left[2(\sqrt{c}-1)\sin\frac{\theta''}{2} + 1 \right] \left[2(\sqrt{c}+1)\sin\frac{\theta''}{2} - 1 \right] = 0$$

此式的解为

$$\sin\frac{\theta''}{2} = \frac{1}{2(1-\sqrt{c})} \quad \text{或} \quad \sin\frac{\theta''}{2} = \frac{1}{2(1+\sqrt{c})}$$

由于 θ'' 必须在 60° 和 180° 之间, 上面的第二个解不符合要求, 应舍去. 对第一个解来说, 只在 $0 \leq c \leq 1/4$ 时才有解, 即只有 $0 \leq c \leq 1/4$ 时, 圆珠在第一次下滑过程中才有速度等于零的时候. 否则, 直到圆珠滑至 D 点, 速度也不等于零, 一直滑到 A 点左侧附近, 然后来回滑动. 但由于空气阻力的存在, 圆珠的机械能越来越小, 后来有可能滑至某一点时, 其速度变为零, 然后在平衡位置 $\theta' = 2\arcsin\left[\frac{1}{2(1-c)}\right]$ 附近来回滑动, 最后停在平衡位置处. 最后结论为:

圆珠的运动过程及最后状态与 $c = mg/(kR)$ 的值有关.

1) $c \geq 1/2$ 时, 圆珠只有一个平衡位置, 圆珠将在 D 点两侧滑来滑去, 由于空气阻力的存在, 机械能逐渐减小, 最后停于 D 点.

2) $1/4 < c < 1/2$ 时, 有三个平衡点:

$\theta' = 180^\circ$, $\theta' = 2\arcsin\left[\frac{1}{2(1-c)}\right]$ 的两个值, 互相对称. 圆珠从 A 滑至右侧 θ' 处是加速

过程,再减速滑至 D 点,此时速度不等于零,因而将滑过 D 点,到达比 A 点稍低的地方(由于空气阻力).如此来回滑动.由于 D 点为不稳定平衡位置,圆珠在任何情况下都不可能停在 D 点.最后将停在左侧或右侧平衡位置上,停在哪一侧视圆珠下滑速度减为零时在 哪一侧而定.

3) $c < 1/4$ 时,圆珠将滑不到 D 点,而在右侧平衡位置附近来回滑动,并停在该处.

17. 如图所示,设赛道在同一水平面上,车轮与地面间的静摩擦系数和滑动摩擦系数均为 μ ,且 μ 不随速度变化.问

1) 当赛车运动员驾车作 90° 转弯时,应选择图 2-40 中的半径为 R_0 的圆弧外车道还是半径为 R_1 的圆弧内车道?

2) 作 180° 转弯时,又应选择图 2-41 中的哪个车道?

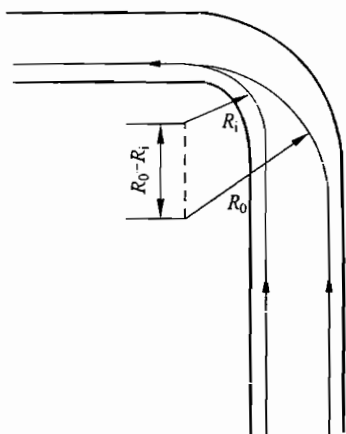


图 2-40

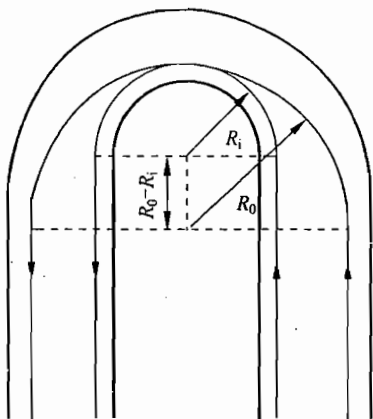


图 2-41

请作出必要的计算并据此得出结论.为简化起见,可把赛车作质点处理.且设赛车在刹车减速时四轮同时刹车,并假设赛车在加速过程和减速过程中的加速度的绝对值相等,赛车在直道上高速行驶的速度 $v_d > \sqrt{\mu g R_0}$ (空气阻力忽略不计).

解析

首先分析赛车沿圆弧轨道运动的最大速度.

赛车沿圆弧运动时所需向心力由摩擦力提供.与最大静摩擦力相应的运动速度就是允许的最大速度.如果速度再提高,所需向心力就大于地面可能提供的摩擦力,因而赛车不可能沿圆弧运动而将发生侧向滑动.沿圆弧运动的最大速度 v 与圆半径 R 、摩擦系数 μ

有下列关系

$$m \frac{v^2}{R} = \mu m g$$

即

$$v = \sqrt{\mu g R} \quad (1)$$

其次分析赛车沿直轨道加速行驶或减速行驶时的加速度、所用时间及行驶距离。

设赛车在直道上高速行驶时速度为 v_d ，在进入圆弧轨道前要将车速由 v_d 降至(1)式的 v 。刹车后，赛车在地面与车轮间的滑动摩擦力作用下减速，赛车的加速度为

$$a = -\frac{\mu m g}{m} = -\mu g \quad (2)$$

赛车自圆弧轨道终点处开始加速。据题设，其加速度为

$$a' = \mu g$$

赛车速度由 v 增至 v_d 后，即以速度 v_d 匀速行驶。

根据匀加速运动的公式，加速过程和减速过程所用时间 t_1 和行驶的距离 s 分别为

$$t_1 = \frac{v_d - v}{\mu g} = \frac{v_d}{\mu g} - \sqrt{\frac{R}{\mu g}} \quad (3)$$

$$s = \frac{v_d^2 - v^2}{2\mu g} = \frac{v_d^2}{2\mu g} - \frac{R}{2} \quad (4)$$

根据以上分析我们可以比较沿内道和外道所用时间的长短。

1) 90° 转弯(图 2-42)

内道和外道的圆弧半径分别为 R_i 和 R_o ，沿圆弧轨道的最大速度 v_i 和 v_o 分别为

$$v_i = \sqrt{\mu g R_i}$$

$$v_o = \sqrt{\mu g R_o}$$

如图所示，赛车沿外道行驶时，由 $A \rightarrow B$ 为减速过程；由 $B \rightarrow D$ 为沿半径为 R_o 的 $\frac{1}{4}$ 圆周匀速率(v_o)圆周运动；由 $D \rightarrow E$ 为加速过程；由 $E \rightarrow F$ 为匀速(v_d)运动， F 为赛车沿内道运动加速至速度为 v_d 时的位置。因而由 $A \rightarrow F$ 所需时间为

$$\begin{aligned} T_o &= 2 \left(\frac{v_d}{\mu g} - \sqrt{\frac{R_o}{\mu g}} \right) + \frac{\pi R_o}{2v_o} + \frac{EF}{v_d} \\ &= \frac{2v_d}{\mu g} - \left(2 - \frac{\pi}{2} \right) \sqrt{\frac{R_o}{\mu g}} + \frac{EF}{v_d} \quad (5) \end{aligned}$$

赛车沿外道行驶时减速过程和加速过程的距离 AB 和 DE 均为

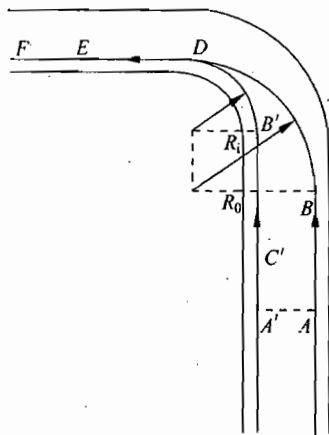


图 2-42

$$s_0 = \frac{v_d^2}{2\mu g} - \frac{R_0}{2}$$

赛车沿内道行驶时,由 $A' \rightarrow C'$ 为匀速(v_d)过程;由 $C' \rightarrow B'$ 为减速过程;由 $B' \rightarrow D$ 为沿半径为 R_i 的 $\frac{1}{4}$ 圆周匀速率(v_i)圆周运动;由 $D \rightarrow F$ 为加速过程. 因而由 $A' \rightarrow F$ 所需时间为

$$\begin{aligned} T_i &= 2\left(\frac{v_d}{\mu g} - \sqrt{\frac{R_i}{\mu g}}\right) + \frac{\pi R_i}{2v_i} + \frac{A'C'}{v_d} \\ &= \frac{2v_d}{\mu g} - \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sqrt{\frac{R_i}{\mu g}} + \frac{A'C'}{v_d} \end{aligned} \quad (6)$$

赛车沿内道行驶时减速过程和加速过程的距离 $C'B'$ 和 DF 均为

$$s_i = \frac{v_d^2}{2\mu g} - \frac{R_i}{2}$$

由几何关系及 s_0, s_i 可得

$$EF = DF - DE = s_i - s_0 = \frac{1}{2}(R_0 - R_i) \quad (7)$$

$$A'C' = AB + R_0 - C'B' - R_i = \frac{1}{2}(R_0 - R_i) \quad (8)$$

将(7)、(8)式分别代入(5)、(6)式,得

$$T_0 = \frac{2v_d}{\mu g} - \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sqrt{\frac{R_0}{\mu g}} + \frac{R_0 - R_i}{2v_d} \quad (9)$$

$$T_i = \frac{2v_d}{\mu g} - \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sqrt{\frac{R_i}{\mu g}} + \frac{R_0 - R_i}{2v_d} \quad (10)$$

两者之差

$$T_0 - T_i = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \frac{\sqrt{R_i} - \sqrt{R_0}}{\sqrt{\mu g}} < 0 \quad (11)$$

可见,沿外道所用时间较少,应选择外道行驶.

2) 180°转弯(见图 2-43)

沿外道行驶时,由 $A \rightarrow B$ 为减速,由 $B \rightarrow D$ 为匀速率($v_0 = \sqrt{\mu g R_0}$),由 $D \rightarrow F$ 为加速. 沿内道行驶,由 $A' \rightarrow C'$ 为匀速(v_d),由 $C' \rightarrow B'$ 为减速,由 $B' \rightarrow D'$ 为匀速率($v_i = \sqrt{\mu g R_i}$),由 $D' \rightarrow E'$ 为加速,由 $E' \rightarrow F'$ 为匀速(v_d). 根据前面得到的关系式可求得:

沿外道行驶所用时间为

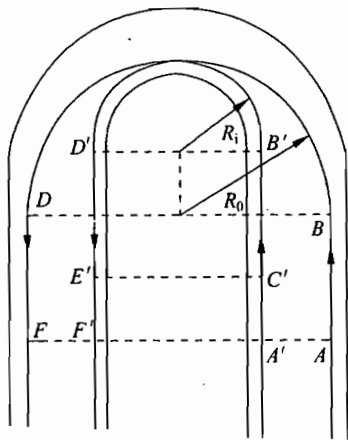


图 2-43

$$T'_0 = \frac{2v_d}{\mu g} - 2\sqrt{\frac{R_0}{\mu g}} + \pi\sqrt{\frac{R_0}{\mu g}} \quad (12)$$

$$T'_i = \frac{2v_d}{\mu g} - 2\sqrt{\frac{R_i}{\mu g}} + \pi\sqrt{\frac{R_i}{\mu g}} + \frac{2A'C'}{v_d} \quad (13)$$

而

$$\begin{aligned} A'C' &= AB + R_0 - C'B' - R_i = s_0 - s_i + R_0 - R_i \\ &= \frac{1}{2}(R_0 - R_i) \end{aligned} \quad (14)$$

故

$$T'_i = \frac{2v_d}{\mu g} - 2\sqrt{\frac{R_i}{\mu g}} + \pi\sqrt{\frac{R_i}{\mu g}} + \frac{R_0 - R_i}{v_d} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} T'_0 - T'_i &= (\pi - 2) \frac{\sqrt{R_0} - \sqrt{R_i}}{\sqrt{\mu g}} - \frac{R_0 - R_i}{v_d} \\ &= (\sqrt{R_0} - \sqrt{R_i}) \left[\frac{\pi - 2}{\sqrt{\mu g}} - \frac{\sqrt{R_0} + \sqrt{R_i}}{v_d} \right] \end{aligned} \quad (16)$$

由上式可得以下结论:

(i) 当 $v_d > \frac{\sqrt{\mu g R_0} + \sqrt{\mu g R_i}}{\pi - 2}$, 即 $v_d > \frac{v_0 + v_i}{\pi - 2}$ 时, $T'_0 > T'_i$, 应选择图 2-43 中的内道.

(ii) 当 $\sqrt{\mu g R_0} < v_d < \frac{\sqrt{\mu g R_0} + \sqrt{\mu g R_i}}{\pi - 2}$, 即 $v_0 < v_d < \frac{v_0 + v_i}{\pi - 2}$ 时, $T'_0 < T'_i$, 应选择

图 2-43 中的外道.

(iii) 当 $v_d = \frac{\sqrt{\mu g R_0} + \sqrt{\mu g R_i}}{\pi - 2}$, 即 $v_d = \frac{v_0 + v_i}{\pi - 2}$ 时, 选内、外道均一样.

三、静力学

1. 一薄壁圆柱形烧杯, 半径为 r , 质量为 m , 重心位于中心线上, 离杯底的距离为 h_0 . 现将水慢慢注入杯中, 问烧杯连同杯内的水共同重心最低时水面离杯底的距离等于多少? 为什么? (设水的密度为 ρ .)

解析

开始注水时, 共同重心在水面上, 这时如再加水, 就是在共同重心下方加质量, 所以重心将会随着水的注入而逐渐下降.

当重心下降到水面时, 重心最低, 因为此时如再加水, 就是在共同重心上方加质量, 重心就会升高.

所以, 重心最低时的高度 h 应满足

$$\pi r^2 h \rho \frac{h}{2} + m h_0 = (\pi r^2 h \rho + m) h$$

得

$$h = \frac{-m + \sqrt{m^2 + 2\pi r^2 \rho m h_0}}{\pi r^2 \rho}$$

本题对于参加决赛的学生来说, 如果课外自学过有关质心的知识, 分析起来就不会感到太困难. 但本题的主要目的是看学生能否以水面为参考点来分析共同重心位置的变化, 从而找到共同重心最低时就在水面上. 这种先定性分析、后定量计算, 以一个随注水多少而变化的水面位置为参考点来处理问题, 对于解答本题是很关键的一步.

2. 测定患者的血沉, 在医学上有助于医生对病情作出判断. 设血液是由红血球和血浆组成的悬浮液. 将此悬浮液放进竖直放置的血沉管内, 红血球就会在血浆中匀速下沉, 其下沉速率称为血沉. 某人的血沉 v 的值大约是 10mm/h , 如果把红血球近似看作是半径为 R 的小球, 且认为它在血浆中下沉时所受的粘滞阻力为 $F_1 = 6\pi\eta Rv$. 在室温下 $\eta \approx 1.8 \times 10^{-3} \text{Pa} \cdot \text{s}$. 已知血浆的密度 $\rho_0 \approx 1.0 \times 10^3 \text{kg/m}^3$, 红血

球的密度 $\rho \approx 1.3 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$. 试由以上数据估算红血球半径的大小(结果取一位有效数字).

解析

红血球在重力、浮力和粘滞阻力的作用下做匀速下落运动, 所以有

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho g = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0 g + 6\pi \eta R v \quad (1)$$

取 $g \approx 10 \text{ m/s}^2$, 解得

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{\frac{9\eta v}{2g(\rho - \rho_0)}} \\ &= \sqrt{\frac{9 \times 1.8 \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-3} / 3600}{2 \times 10 \times (1.3 - 1.0) \times 10^3}} \text{ m} \\ &= 2.73 \times 10^{-6} \text{ m} \approx 3 \times 10^{-6} \text{ m} \end{aligned} \quad (2)$$

3. 2002年3月我国北方地区遭遇了近10年来最严重的沙尘暴天气. 现把沙尘上扬后的情况简化为如下情景: v 为竖直向上的风速, 沙尘颗粒被扬起后悬浮在空中(不动). 这时风对沙尘的作用力相当于空气不动而沙尘以速度 v 竖直向下运动时所受的阻力. 此阻力可用下式表达

$$F_f = \alpha \rho A v^2$$

其中 α 为一系数, A 为沙尘颗粒的截面积, ρ 为空气密度.

1) 若沙粒的密度 $\rho_s = 2.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 沙尘颗粒为球形, 半径 $r = 2.5 \times 10^{-4} \text{ m}$, 地球表面处空气密度 $\rho_0 = 1.25 \text{ kg/m}^3$, $\alpha = 0.45$, 试估算在地面附近, 上述 v 的最小值 v_1 .

2) 假定空气密度 ρ 随高度 h 的变化关系为 $\rho = \rho_0(1 - Ch)$, 其中 ρ_0 为 $h = 0$ 处的空气密度, C 为一常量, $C = 1.18 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$, 试估算当 $v = 9.0 \text{ m/s}$ 时扬沙的最大高度.(不考虑重力加速度随高度的变化)

解析

1) 在地面附近, 沙尘扬起要能悬浮在空中, 则空气阻力至少应与重力平衡, 即

$$\alpha \rho_0 A v_1^2 = mg \quad (1)$$

式中 m 为沙尘颗粒的质量, 而

$$A = \pi r^2 \quad (2)$$

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_s \quad (3)$$

得

$$v_1 = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\rho_s g r}{\alpha \rho_0}} \quad (4)$$

代入数据得

$$v_1 = 4.0 \text{ m/s} \quad (5)$$

2) 用 ρ_h 、 h 分别表示 $v=9.0 \text{ m/s}$ 时扬沙到达的最高处的空气密度和高度, 则有

$$\rho_h = \rho_0 (1 - Ch) \quad (6)$$

此时(1)式应为

$$\alpha \rho_h A v^2 = mg \quad (7)$$

由(2)、(3)、(6)、(7)式可解得

$$h = \frac{1}{C} \left(1 - \frac{4r\rho_s g}{3\alpha v^2 \rho_0} \right) \quad (8)$$

代入数据得

$$h = 6.8 \times 10^3 \text{ m} \quad (9)$$

4. 在图 3-1 中, A 是一质量为 m_A 的木块, B 是一质量为 m_B 的小铁块, 共浮在水面上. 若将铁块取下, 直接放在水内, 则杯中水面的高度将_____.

解析

下降.

从浮力来看, 取走 B 后, A 将再上浮. 再上浮的体积等于和 B 同质量的水的体积 (大于 B 本身的体积). 这时四周的水位将下降去填充这部分体积. 另一方面, 当再把 B 放入水中时, 它只排开和 B 本身大小一样体积的水, 它造成的水位的上升小于上述水位的下降. 所以总的结果是水位下降.

本题也可从容器底部所受的压力来分析. 水和 A、B 的总质量是不变的, 因而容器底部所受的总压力是不变的. 当 B 被取下放在水中后, 它将沉到容器底. 若水位不变, 则容器底受的总压力必增大, 而这是不可能的. 所以水位必然下降.

学生容易发生的错误之一是认为水位不变, 这是由于没有搞清楚密度比水大的被载浮的物体排开水的体积, 是大于被载物体本身的体积的.

本题也可以从物体的受力平衡来分析. 当小铁块 B 位于木块 A 上并共浮在水面上时, 两物块受到的重力与浮力平衡. 设排开水的体积为 V_0 , 水的密度为 ρ_0 , 则有

$$m_{AG} + m_{BG} = V_0 \rho_0 g \quad (1')$$

当取走 B 后, 木块 A 达到一个新的平衡位置, 设此时木块 A 排开水的体积为 V_1 , 则有

$$m_{AG} = V_1 \rho_0 g \quad (2')$$

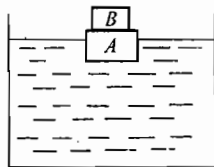


图 3-1

而小铁块直接放在水中最终将沉到杯底才能平衡. 设小铁块排开水的体积为 V_2 , 杯底对小铁块的支持力为 F_N , 则有

$$m_B g = F_N + V_2 \rho_0 g \quad (3')$$

由以上三式得

$$V_0 \rho_0 g = F_N + (V_1 + V_2) \rho_0 g$$

由于 $F_N \neq 0$, 故知

$$V_0 > V_1 + V_2 \quad (4')$$

因杯内水的总体积是一定的, 被排开的水的体积减少了, 因而杯内水面的高度将下降.

5. 在图 3-2 中, A 、 B 是两个带柄 (a 和 b) 的完全相同的长方形物体, C 是另一长方形物体, C 的质量为 m , A 、 B 与斜面间以及与 C 之间皆有摩擦, C 与 A 或 B 间的静摩擦因数均为 μ . 设它们原来都处于静止状态.

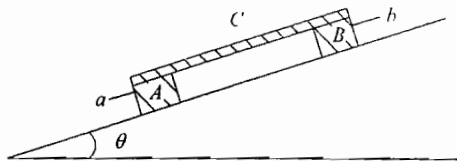


图 3-2

- 1) 若一手握住 a , 使 A 不动, 另一手握住 b , 逐渐用力将 B 沿倾角为 θ 的斜面向上拉. 当力增大到能使 B 刚刚开始向上移动时, C 动不动? 若动, 如何动?
- 2) 此时 A 与 C 之间的摩擦力为多大?
- 3) 若握住 b 使 B 不动, 握住 a 逐渐用力将 A 沿倾角为 θ 的斜面向下拉, 当 A 开始移动时, C 动不动? 若动, 如何动?

解析

- 1) C 不动.
- 2) $\frac{1}{2} \mu m g \cos \theta - m g \sin \theta$.
- 3) C 与 A 共同沿斜面向下移动.

C 原来不动, 说明 $m g \sin \theta$ 小于 A 、 B 对 C 的最大静摩擦力 $\mu m g \cos \theta$. 当 B 刚能向上移动时, 不等式 $m g \sin \theta < \mu m g \cos \theta$ 仍成立, 所以 C 不可能向下移动. 另外, C 也不可能向上移动, 因为要向上移动, 则 B 对 C 的摩擦力 (其可能的最大值为 $\frac{1}{2} \mu m g \cos \theta$) 必须大于或等于 C 所受重力沿斜面方向的分力与 A 对 C 的最大静摩擦力之和, 即

$$\frac{1}{2}\mu mg \cos\theta \geq mg \sin\theta + \frac{1}{2}\mu mg \cos\theta$$

这是不可能的. 所以结论是 C 不动.

因为 B 刚开始向上移动而 C 不动, 所以 A 对 C 的摩擦力的大小是

$$F_f = \left| \frac{1}{2}\mu mg \cos\theta - mg \sin\theta \right|$$

方向是沿斜面向上还是向下视两者大小而定, 若 $\frac{1}{2}\mu mg \cos\theta > mg \sin\theta$, 摩擦力方向是向下的; 反之, 则向上.

C 不能向上移动. 另外, 当 A 刚开始向下移动时, C 不可能不动, 因为这时 C 受到 B 对它的向上的摩擦力 (其可能的最大值为 $\frac{1}{2}\mu mg \cos\theta$), 不可能抵消重力沿斜面方向的分力与 A 对 C 的摩擦力的合力 (即 $mg \sin\theta + \frac{1}{2}\mu mg \cos\theta$). 由以上分析可得出结论: C 必向下移动.

静摩擦力的大小和方向是决定于除此力外物体所受的其他力的合力的大小和方向而取 0 到最大静摩擦力之间的某一值, 而最大静摩擦力等于静摩擦因数与正压力的乘积. 因此, 求静摩擦力的大小和方向就不像求动摩擦力那样明显简单 (当动摩擦因数可视为与速度无关时). 本题的目的就是要考查学生根据给定的条件确定静摩擦力大小和方向的能力.

6. 图 3-3 所示的杯中盛有密度均匀的混合液体, 其密度为 ρ . 经过一段时间后变为密度分别是 ρ_1 和 ρ_2 ($\rho_2 > \rho_1$) 的两层均匀液体. 设其总体积不变, 则杯内底面所受的液体的压强是否有变化? 若有变化, 如何变化? 试证明你的结论.

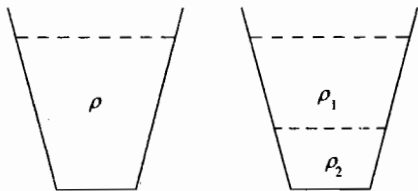


图 3-3

解析

变大. 证明如下:

设液高为 h , 大气压强为 p_0 , 液体对底面的压强为 p , 则

$$p = p_0 + \rho gh \quad (1)$$

设变化后上下层液高分别为 h_1 和 h_2 (图 3-4), 对底面的压强为 p' , 则

$$p' = p_0 + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 \quad (2)$$

由(1)、(2)两式可知

$$p' - p = \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 - \rho g h \quad (3)$$

因为总体积不变, 所以有

$$h\bar{S} = h_1\bar{S}_1 + h_2\bar{S}_2 \quad (4)$$

式中 \bar{S} , \bar{S}_1 和 \bar{S}_2 分别表示混合液体变化后的上层液体和下层液体的平均截面积. 又因为总质量不变, 所以有

$$\rho h\bar{S} = \rho_1 h_1\bar{S}_1 + \rho_2 h_2\bar{S}_2 \quad (5)$$

由(4)、(5)两式可得

$$(\rho_2 - \rho)h_2\bar{S}_2 = (\rho - \rho_1)h_1\bar{S}_1 \quad (6)$$

因为 $\rho_2 > \rho_1$, 由图中几何关系可知

$$\bar{S}_1 > \bar{S}_2$$

所以由(6)式可知

$$(\rho_2 - \rho)h_2 > (\rho - \rho_1)h_1$$

即

$$\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 > \rho(h_1 + h_2) = \rho h \quad (7)$$

由(7)和(3)式可得

$$p' > p$$

此题容易将杯底面所受的压强与杯内液体总质量相混淆而得出 $p' = p$ 的错误结论.

学生可以思考一下, 若杯的形状分别如图 3-5 中(a)、(b)、(c)所示, 则结果又将如何?

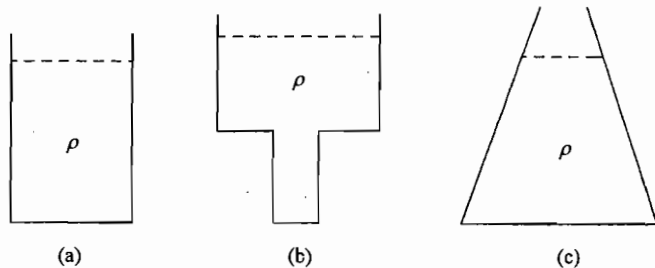


图 3-5

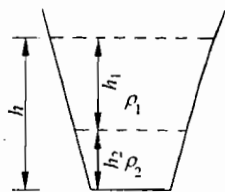


图 3-4

7. 如图 3-6 所示, 原长 $L_0 = 100\text{cm}$ 的轻质弹簧放置在一光滑的直槽内, 弹簧的一端固定在槽的 O 端, 另一端连接一小球, 这一装置可从水平位置开始绕 O 点缓缓地转到竖直位置. 设弹簧的形变总是在其弹性限度内. 试在下述 1)、2) 两种情况下, 分别求出这种装置从原来的水平位置开始缓缓地绕 O 点转到竖直位置时小球离开原水平面的高度 h_0 .

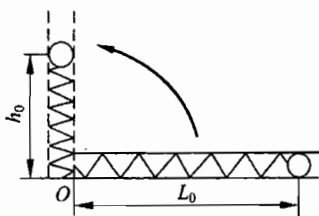


图 3-6

- 1) 在转动过程中, 发现小球距原水平面的高度变化出现极大值, 且极大值 h_m 为 40cm .
- 2) 在转动过程中, 发现小球离原水平面的高度不断增大.

解析

设小球质量为 m , 弹簧劲度系数为 k , 当槽转至倾角 θ 时, 球的高度为 h , 由胡克定律有

$$k(L_0 - h/\sin\theta) = mg \sin\theta \quad (1)$$

转到竖直时有

$$k(L_0 - h_0) = mg \quad (2)$$

解得

$$h = -(L_0 - h_0) \sin^2\theta + L_0 \sin\theta$$

改写为

$$h = -(L_0 - h_0) \left\{ \sin\theta - \frac{L_0}{2(L_0 - h_0)} \right\}^2 + \frac{L_0^2}{4(L_0 - h_0)} \quad (3)$$

1) 由(3)式可知, 当 $\sin\theta = L_0/[2(L_0 - h_0)]$ 时, h 有极大值 h_m . 由此得

$$h_m = L_0^2/[4(L_0 - h_0)], \quad h_0 = L_0 - L_0^2/4h_m$$

代入数据, 得

$$h_0 = 37.5\text{cm}$$

2) 由(3)式可知, 当 $L_0/[2(L_0 - h_0)] \geq \sin 90^\circ$ 时, 则在转动过程中, 小球离原水平面的高度就一直不断地增大. 由此得

$$L_0/[2(L_0 - h_0)] \geq 1$$

解得 $h_0 \geq L_0/2$, 代入数据, 可知

$$50\text{cm} \leq h_0 < 100\text{cm}$$

看完上面的解答, 学生能否从物理上理解为什么会出现两种可能的现象? 解完每一道物理习题后, 查一下答案是否正确当然很重要. 但即使答案做对了也应思考一下, 因为从所求得的答案中还可能得到一些其他的东西.

在本题中, 弹簧的劲度系数 k 、小球的质量 m 并未给定, 这是可能出现两种可能情况

的原因。(1)式中 k 、 m 两个量未确定,可以把(1)式改写成

$$h = \frac{kL_0^2}{4mg} - \frac{mg}{k} \left(\sin\theta - \frac{k}{mg} \frac{L_0}{2} \right)^2 \quad (1')$$

若 k 及 m 的值使

$$\sin\theta - \frac{k}{mg} \frac{L_0}{2} = 0$$

则

$$h = \frac{kL_0^2}{4mg} = h_m$$

即当

$$\frac{mg}{k} = \frac{L_0^2}{4h_m} \quad (2')$$

时, h 有极大值. h 取极大值时,槽的倾角由下式决定,即

$$\sin\theta_0 = \frac{2h_m}{L_0}$$

在有极大值的条件下,当弹簧转到竖直位置时,小球离开原水平面的高度 h_0 可由式(2)和(2')求得:

$$h_0 = L_0 - \frac{L_0^2}{4h_m}$$

若 k 及 m 的值使 θ 在小于 $\pi/2$ 的范围内都能使(1')式中的

$$\left(\sin\theta - \frac{k}{mg} \frac{L_0}{2} \right)^2 > 0$$

在本题中则有

$$\sin\theta < \frac{k}{mg} \frac{L_0}{2}$$

因 $\sin\theta$ 最大值不超过 1, 故有

$$\frac{k}{mg} \frac{L_0}{2} \geq 1$$

即

$$\frac{mg}{k} \leq \frac{L_0}{2} \quad (3')$$

当 k 及 m 的值使(3')式成立时,在转动过程中,小球离原水平面的高度不断增大.在这种条件下,弹簧转到竖直位置时,小球离原水平面的高度可从(2)式与(3')式求得

$$h_0 \geq \frac{L_0}{2}$$

8. 给你一把很轻的有刻度的直尺,一个已知重量的可悬挂的物体,怎样才能粗略地

测出一根棉线所能承受的最大拉力？要求说明理由并画出装置图。

解析

按图 3-7 所示装置,用刻度尺当杠杆, A 端悬挂重物, B 端拴棉线, 线的另一端固定或用右手拉住, 使杠杆平衡. 将支点 O 逐渐向 B 端移动, 当棉线刚好被拉断时, 从刻度尺上读出 \overline{AO} 和 \overline{OB} 的长度. 设重物的重量为 G , 则棉线能承受的最大拉力是

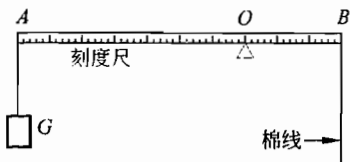


图 3-7

$$F = \frac{AO}{OB}G$$

以上这类题目的目的,是考查学生运用学过的物理知识去进行一些较简单的设计,用以解决实际问题的能力.这种训练是很重要的.

9. 在一些重型机械和起重设备上,常用双块式电磁制动器,它的简化示意图如图 3-8 所示. O_1 和 O_2 为固定铰链. 在电源接通时, A 杆被往下压, 通过铰链 C_1 、 C_2 、 C_3 使弹簧 S 被拉伸, 制动块 B_1 、 B_2 与制动轮 D 脱离接触, 机械得以正常运转. 当电源被切断后, A 杆不再有向下的压力 (A 杆及图中所有连杆及制动块所受重力皆忽略不计), 于是弹簧回缩, 使制动块产生制动效果. 此时 O_1C_1 和 O_2C_2 处于竖直位置. 已知欲使正在匀速转动的 D 轮减速从而实现制动, 至少需要 $M=1100\text{N}\cdot\text{m}$ 的制动力矩, 制动块与制动轮之间的摩擦因数 $\mu=0.40$, 弹簧不发生形变时的长度为 $L=0.300\text{m}$, 制动轮直径 $d=0.400\text{m}$, 图示尺寸 $a=0.065\text{m}$, $h_1=0.245\text{m}$, $h_2=0.340\text{m}$, 试求选用弹簧的劲度系数 k 最少要多大?

解析

在制动轮转动的情况下, 制动力矩是由制动块 B_1 、 B_2 对制动轮 D 的滑动摩擦力产生的. 设 B_1 、 B_2 对 D 的正压力分别为 F_{N1} 和 F_{N2} , 滑动摩擦力就分别为 μF_{N1} 和 μF_{N2} , 如图 3-9 所示. 所以

$$M = \mu F_{N1} d/2 + \mu F_{N2} d/2 \quad (1)$$

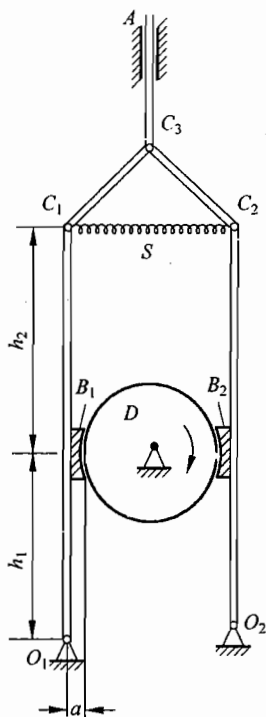


图 3-8

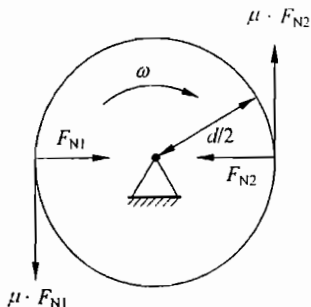


图 3-9

再对左、右两杆分别进行受力分析,并列出力矩平衡方程如下(图 3-10):

左杆

$$(h_1 + h_2)F_T = h_1 F_{N1} + \mu F_{N1} a \quad (2)$$

右杆

$$h_2 F_{N2} = (h_1 + h_2)F_T + \mu F_{N2} a \quad (3)$$

(2)、(3)两式中 F_T 为弹簧的弹力. 对弹簧来说,由胡克定律

$$F_T = k \cdot \Delta L = k(d + 2a - L) \quad (4)$$

由(1)、(2)、(3)、(4)式解得

$$k = \frac{2(h_1 + a\mu)(h_2 - a\mu)M}{(h_1 + h_2)(d + 2a - L)\mu(h_1 + h_2)d}$$

代入数据得

$$k \approx 1.49 \times 10^4 \text{ N/m}$$

本题是一个简化了的实际问题. 对实际问题的描绘,文字难免会冗长一点,而所要研究的物理问题是隐藏在其中的. 例如,在产生制动效果时,弹簧 S 是处在拉伸状态还是处在压缩状态,若判断错误,必将影响弹力的方向. 又如,制动轮与制动块之间的摩擦力是怎样产生的,方向怎样判断,试题给出的一些几何尺寸有何作用等问题,在解题前都应进行研究.

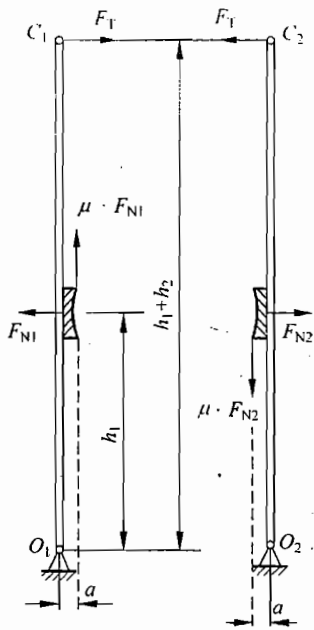


图 3-10

10. 用 20 块质量均匀分布的相同光滑积木块,在光滑水平面上一块叠一块地搭成单孔桥. 已知每一积木块的长度为 l ,横截面是边长为 $h = l/4$ 的正方形. 要求此桥具有最大跨度(即桥孔底宽). 试画出该桥的示意图,并计算跨度与桥孔高度的比值.

解析

用积木搭成图 3-11 所示的单孔桥时,跨高

$$H = 10h - h = 9h \quad (1)$$

最大跨度 L 可求得如下: 由于积木块是光滑的,最上层两块积木间应无水平方向的相互作用力,其他各积木块之间也无水平作用力. 设第 n 块积木端点与第 $n+1$ 块积木端点的距离为 Δx_n (见图 3-12), 则第 n 块以上共有 $n-1$ 块积木, 其合重力的作用线应在第 n 块积木的边缘 B 点的左方或通过 B 点, 否则上面的积木将不能维持平衡. 现要求跨度最大, 因此合重力应通过 B 点. 选择第 $n+1$ 块积木边缘 A 点为支点, 第 n 块积木的力矩平衡条件为

$$(n-1)G\Delta x_n = G(l/2 - \Delta x_n) \quad (2)$$

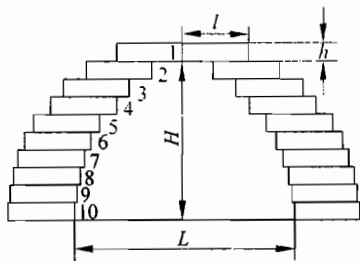


图 3-11 拱桥示意

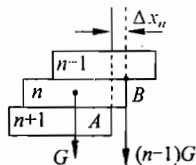


图 3-12

式中 G 为每个积木块所受重力. 由(2)式可得

$$\Delta x_n = l/2n = 2h/n$$

因此

$$\begin{aligned} L &= 2 \sum_{n=1}^9 \Delta x_n = 4h \sum_{n=1}^9 (1/n) \\ &= 4h(1 + 1/2 + \cdots + 1/9) = 11.32h \end{aligned}$$

所以

$$L : H = 11.32h : 9h = 1.258$$

这是一道静力学的题目,与平常题目不同之处在于不是一两个物体的平衡而是很多物体的平衡. 不翻倒的条件(2)式是解决本题的关键.

11. 半径为 R 、质量为 m_1 的均匀圆球与一质量为 m_2 的重物分别用细绳 AD 和 ACE 悬挂于同一点 A , 并处于平衡, 如图 3-13 所示. 已知悬点 A 到球心 O 的距离为 L , 不

考虑绳的质量和绳与球的摩擦,试求悬挂圆球的绳 AD 与竖直方向 AB 的夹角 θ .

解析

作用在球上的力有重力 m_1g 、 AD 绳的拉力 F_T 和 ACE 绳的压力 F_N . 由于不考虑绳与球的摩擦,所以 F_N 的方向沿半径指向球心. 重力也是通过球心的. 由于球平衡,所以绳 AD 的拉力也必过球心,因此可判断绳一定沿 OA 方向(如图 3-14 所示).

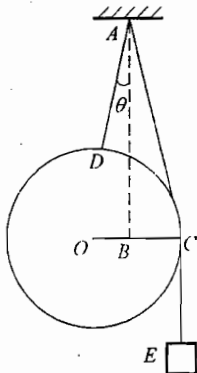


图 3-13

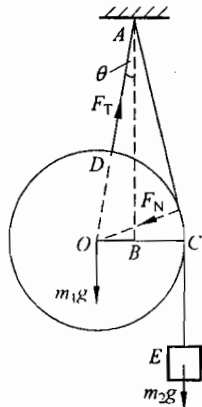


图 3-14

对球和重物组成的系统,根据平衡条件, m_1g 和 m_2g 对 A 点的力矩大小相等,即

$$m_1g \cdot \overline{OB} = m_2g \cdot \overline{BC}$$

$$\overline{OB} = L\sin\theta, \quad \overline{BC} = R - L\sin\theta$$

由图可知

代入上式,可解得

$$\sin\theta = \frac{m_2R}{L(m_1 + m_2)}$$

$$\theta = \arcsin \frac{m_2R}{L(m_1 + m_2)}$$

本题亦可以球作为考查对象. 这时,球在共点力 F_T 、 m_1g 和 F_N 共同作用下达到平衡. F_N 是绳 AC 中的拉力 F_0 和绳 CE 中的拉力 F_0 的合力. 因为绳与球的接触是光滑的,质量为 m_2 的重物处于平衡中,故有

$$F_0 = m_2g$$

作用于球的各力如图 3-15 所示. 由图可知

$$F_N = 2m_2g \sin \frac{\beta}{2}$$

$$F_T \sin\theta - F_N \cos \frac{\beta}{2} = 0$$

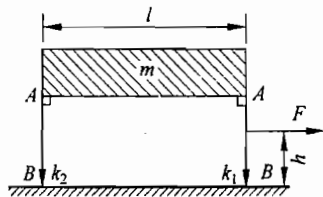


图 3-16

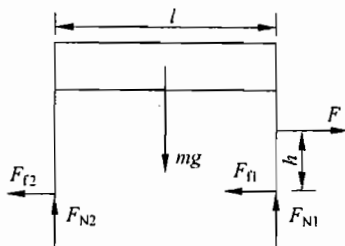


图 3-17

解析

整个装置的受力情况如图 3-17 所示,其中 F_{N1} 与 F_{N2} 分别为雪地对爬犁的支持力, F_{f1} 和 F_{f2} 分别为摩擦力. 根据平衡条件有

$$F = F_{f1} + F_{f2} \quad (1)$$

$$mg = F_{N1} + F_{N2} \quad (2)$$

$$Fh + F_{N2}l = \frac{1}{2}mgl \quad (3)$$

根据摩擦力与正压力的关系有

$$F_{f1} = k_1 F_{N1} \quad (4)$$

$$F_{f2} = k_2 F_{N2} \quad (5)$$

解以上各式得

$$F_{N2} = \frac{\frac{1}{2}l - k_1 h}{l - (k_1 - k_2)h} mg \quad (6)$$

$$F = \frac{1}{2} \frac{l(k_1 + k_2)}{l - (k_1 - k_2)h} mg \quad (7)$$

根据题意, F 与 F_{N2} 必须满足下面条件

$$\left. \begin{aligned} F > 0 \\ F_{N2} \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

由 $F > 0$ 可知, (7) 式的分母 $l - (k_1 - k_2)h > 0$, 由 $F_{N2} \geq 0$ 可知 (6) 式的分子

$$\frac{1}{2}l - k_1 h \geq 0$$

由此可得 h 满足的条件为

$$h \leq \frac{l}{2k_1} \quad (9)$$

在满足 (9) 式的条件下, 所求的 F 即 (7) 式.

试题问“要在前后两爬犁都与雪地接触的条件下,使横梁沿雪地匀速向前移动, h 应满足什么条件?”这就要求学生分析一下爬犁不与雪地接触是否可能. 显然,前爬犁不与雪地接触是不可能的,但后爬犁不与雪地接触是可能的. 正是因为存在着后爬犁不与雪地接触的可能性,试题提出的条件才有意义. 后爬犁与雪地接触,则它与雪地之间必有相互作用力,即存在支持力 F_{N2} ,但 F_{N2} 可能很小,当 $F_{N2}=0$ 时,后爬犁刚好与雪地接触而不挤压,所以后爬犁与雪地接触这一条件的数学表述便是

$$F_{N2} \geq 0$$

能否把题目要求的条件用数学式子表示出来,是一种很重要的能力. 不能把试题的条件数学化. 即使解决了受力平衡问题,仍不能确定 h 应满足的条件.

13. 底边长为 a 、高度为 b 的长方形匀质物块置于斜面上. 斜面和物块之间的静摩擦因数为 μ . 斜面的倾角为 θ . 当 θ 足够小时,物块静止于斜面上(如图 3-18),如逐渐将倾角增大,当 θ 取某个临界值 θ_0 时,物块或开始滑动,或翻倒. 试分别求出发生滑动和翻倒时的 θ_0 ,并说明在什么条件下出现滑动? 在什么条件下出现翻倒?

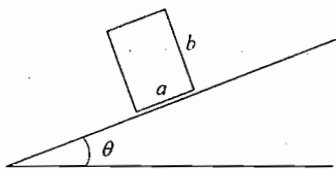


图 3-18

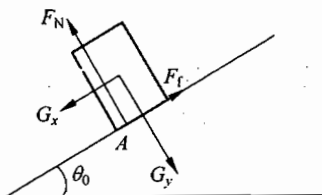


图 3-19

解析

分别求出开始出现滑动和出现翻倒时的 θ_0 .

1) 出现滑动

设重力 $G=mg$ 沿斜面与垂直于斜面的两个分力为 G_x 与 G_y ,斜面对物体的支承力为 F_N ,摩擦力为 F_f . 如 $\theta=\theta_0$ 时物体开始滑动(图 3-19),必有

$$G_x = F_f = \mu F_N, \quad G_y = F_N$$

用 $G_x = mg \sin \theta_0$, $G_y = mg \cos \theta_0$ 代入,得

$$mg \sin \theta_0 = \mu mg \cos \theta_0$$

$$\tan \theta_0 = \mu$$

2) 出现翻倒

如 $\theta = \theta_0$ 时物体将要翻倒, 则物体必是绕通过下角处的 A 轴翻转(图 3-20). 这时支承力 F_N 与摩擦力 F_f 都通过 A 轴, 不产生对 A 轴的力矩. 翻倒的临界条件是

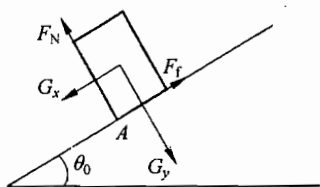


图 3-20

可得

$$\frac{b}{2}G_x = \frac{a}{2}G_y$$

$$bmg \sin\theta_0 = amg \cos\theta_0$$

$$\tan\theta_0 = \frac{a}{b}$$

因此, 得出结论:

如 $\mu < \frac{a}{b}$, 则当 θ 增大至 $\theta = \arctan\mu$ 时物块开始

滑动. 如 $\mu > \frac{a}{b}$, 则当 θ 增大至 $\theta = \arctan \frac{a}{b}$ 时物块开始翻倒. $\mu = \frac{a}{b}$ 的情况, 不要求讨论.

题目解完了, 你还存在什么疑问? 因为在得出开始滑动的条件的过程中, 并没有考虑力矩对物块的作用. 若以图 3-19 中的 A 点作为轴的位置, 摩擦力 F_f 通过 A 点, 对 A 点的力矩为零, 在垂直于斜面的方向, 物块没有加速度, 这似乎表明重力的分量 G_y 与支承力 F_N 平衡, 但重力沿斜面方向的分量 G_x 并未通过 A 点, 它对 A 点的力矩不为零, 此力矩为什么不会使物块翻倒? 在解题过程中想过这个问题没有? 是怎样解决的? 还是根本没有考虑过此问题?

大家都知道, 作用于均匀物块的重力总是通过物块的中心(重心或质心)的; 当物块放在支承物上时, 亦总认为支承力也是通过中心的. 后一结论是有条件的. 对于可视作质点的物体, 是成立的. 对不能视作质点的物体, 则要具体分析. 如图 3-21 中的均匀物块, 放在水平桌面上, 桌面作用于物块的支承力 F_N 通过物块的中心. 实际上, 桌面对物块的支承力作用于物块与桌面的接触面的各部分, 通常称为支承力的 F_N 是作用于各部分的支承力的合力. 当物块是均匀的, 接触面又是水平的平面, 则作用于各部分的支承力的合力 F_N 通过物块的中心. 若有一水平力 F 作用于物块, 尽管物块并没有绕 A 点转动而翻倒, 但物块有绕 A 点转动的趋势, 接触面上靠近 A 处的部分, 对桌面的压力变大, 靠近 B 处的部分, 对桌面的压力减小, 作用于接触面上各部分的支承力如图 3-22 所示, 它们的合力 F_N 不再通过物块的中心. 尽管 F_N 与物块的重力 mg 大小相

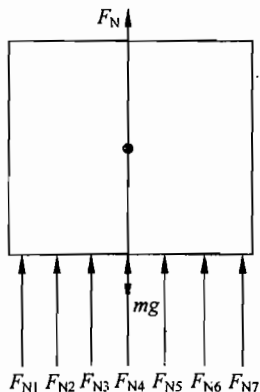


图 3-21

等方向相反,但作用点不同,对A点的力矩亦不等,正是它们的合力矩与 F 的力矩平衡,所以物块不会翻倒.若 F 的力矩增大,则 F_N 便向A点移动.当 F_N 通过A点时, F 的力矩与重力矩平衡,如果 F 的力矩再增大,物体便翻倒.至于物块是先移动还是先翻倒,还要看物块与桌面间的摩擦因数.以上的讨论将有助于对本题的理解和疑问的解答.

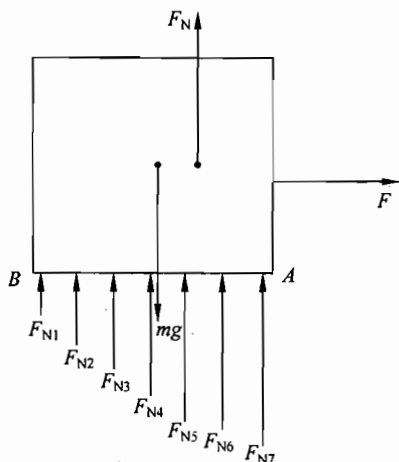


图 3-22

14. 一个质量为 m 、管口截面为 S 的薄壁长玻璃管内灌满密度为 ρ 的水银,现把它竖直倒插在水银槽中,再慢慢向上提起,直到玻璃管口刚刚与槽中的水银面接触.这时,玻璃管内水银的高度为 h .现将管的封闭端挂在天平的一个盘的挂钩上,而在天平另一个盘中放砝码,如图 3-23 所示.要使天平平衡,则所加砝码的质量等于_____.

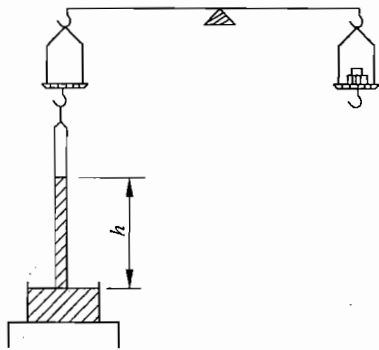


图 3-23

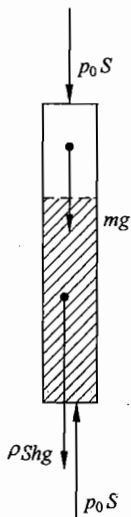


图 3-24

解析

$$m + \rho h S.$$

把玻璃管和管内的水银作为考查对象,它们受到的作用力有:玻璃管受到的重力 mg ,方向竖直向下;管内水银受到的重力 $\rho S h g$,方向竖直向下;管顶受到大气的压力 $p_0 S$,方向竖直

向下,其中 p_0 为大气压强;由于槽内水银表面受到大气压力作用,在槽内水银与管内水银接触处,槽内水银有压力 $p_0 S$ 作用于管内水银上,方向竖直向上,如图 3-24 所示.玻璃管与管内水银受到的合力为 $mg + \rho Shg$,方向竖直向下.故为使天平平衡,所加砝码的质量等于 $m + \rho Sh$.

有一个问题可思考一下.如果玻璃管的管内横截面 S 不是很大,非常小心地把玻璃管上提,直到玻璃管离开水银槽的水银表面.此时,玻璃管内的水银能否仍留在管内?若能留在管内,则砝码盘内所加砝码的质量为多少?

15. 有 6 个完全相同的刚性长条薄片 $A_i B_i$ ($i=1, 2, \dots, 6$),其两端下方各有一个小突起,薄片及突起的重量均可以不计.现将此 6 个薄片架在一只水平的碗口上,使每个薄片一端的小突起 B_i 恰在碗口上,另一端小突起 A_i 位于其下方薄片的正中.由正上方俯视如图 3-25 所示.若将一质量为 m 的质点放在薄片 $A_6 B_6$ 上一点,这一点与此薄片中心的距离等于它与小突起 A_6 的距离(如图 3-25 所示),求薄片 $A_6 B_6$ 中点所受的(由另一薄片的小突起 A_1 所施的)压力.

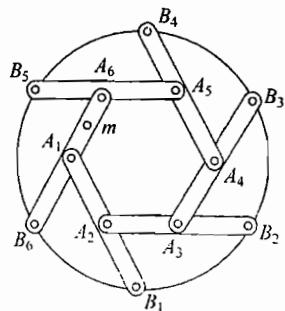


图 3-25

解析

设所求的压力 $P_1 = P$ (向下),并设任一小突起 A_i 对其下的薄片中心的压力及其反作用力的大小为 P_i .则根据以 B_i 点为支点的力矩的平衡知

$$P_{i+1} = 2P_i$$

即
$$P_2 = 2P_1 = 2P$$

$$P_3 = 2P_2 = 2^2 P$$

⋮

故
$$P_6 = 2^5 P = 32P \quad (1)$$

再考虑 $A_6 B_6$ 薄片以 B_6 点为支点的力矩平衡,由图 3-26 可得

$$P/2 + 3mg/4 - 32P = 0 \quad (2)$$

解出
$$P = mg/42 \quad (3)$$

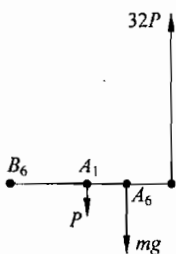


图 3-26

此题是根据力学基本定律逐一分析相接触的各个物体,求出力的递推关系而解题的一例,可以考查学生分析问题的条理性与技巧.按给出的参考解法中的次序逐一分析各个力而求解是最简捷的方法.学生常常惑于未知力太多不能有条理地逐一找出各个未知力间的关系,从而消除它们,或凭借直觉或无充分根据地写出某些未知力间的关系,这都会使解题失败.

16. 给你一把杆秤(带有秤砣),一个玻璃瓶(瓶的质量比秤砣的质量小),一些细沙,一根细绳.要求只用这些器材测出上述杆秤的秤砣的质量,试简要写出测量步骤.

解析

首先用细绳将玻璃瓶系住,挂在秤杆上零刻度处.然后向玻璃瓶内放一些细沙,增减瓶内细沙的质量,使秤杆在水平位置达到平衡.最后以此充沙的玻璃瓶当作秤砣,将原来待测的秤砣放在秤钩上,用此杆秤称出秤砣的质量即为所求.或用此杆秤称出充沙的玻璃瓶的质量,就是原来待测秤砣的质量.

此题考查思维的灵活性.容易看出,玻璃瓶、细沙、细线就意味着另一个秤砣,但如何使其质量与待测秤砣相等,就需要运用杆秤的原理了.

17. 有一水果店所用的秤是吊盘式杆秤,量程为 10kg.现有一较大的西瓜,超过此秤的量程.店员甲找到另一秤砣,与此秤砣完全相同,把它与原秤砣结在一起作为秤砣进行称量.平衡时,双砣位于 6.5kg 刻度处.他将此读数乘以 2 得 13kg,作为此西瓜的质量,卖给顾客.店员乙对这种称量结果表示怀疑.为了检验,他取另一西瓜,用单秤砣正常称量得 8kg,用店员甲的双秤砣法称量,得读数为 3kg,乘以 2 后得 6kg.这证明了店员甲的办法是不可靠的.试问,店员甲卖给顾客的那个西瓜的实际质量是多大?

解析

如图 3-27 所示.设杆秤的提纽 C(支点)与秤盘悬挂点 A 的距离为 d ,零刻度 O(定盘星)到支点的距离为 l_0 (O 点若在 C 点左边,与 A 点在提纽的同一侧,则 l_0 为负值;反之, l_0 为正值),每千克刻度长为 λ ,秤砣的质量为 m_0 .在秤盘中不放物体的情况下,为使秤平衡,秤砣应放在 O 点处,这时秤杆和秤盘对 C 点的合力矩 M (逆时针方向为正)与秤砣产生的力矩(顺时针方向为正)相等,即 $M = m_0 g l_0$.当秤盘中放有质量为 m 千克的物体时,平衡条件为

$$mgd + M = m_0 g(l_0 + \lambda m)$$

即

$$md = m_0 \lambda m, \quad d = \lambda m_0$$

这是每一杆秤都满足的关系.

用双砣称量质量为 m 的物体时,设读数为 m' ,平衡时应有

$$mgd + M = 2m_0 g(l_0 + \lambda m')$$

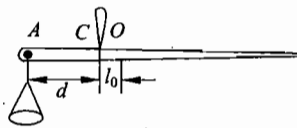


图 3-27

即

$$md = m_0 l_0 + 2dm', \quad m' = (md - m_0 l_0)/(2d)$$

得到

$$2m' = m - (m_0 l_0/d)$$

因此,用 $2m'$ 作为称量的结果时,其值与实际质量之差为

$$\Delta m = 2m' - m = -m_0 l_0/d$$

此差值与 m 无关.当 $l_0 > 0$ 时, $2m'$ 偏小, $l_0 < 0$ 时, $2m'$ 偏大.由店员乙的检验可知

$$\Delta m = -m_0 l_0/d = -2\text{kg}$$

既然 Δm 与所称物体质量无关,可知店员甲卖给顾客的那个西瓜的实际质量为

$$m = 2m' + m_0 l_0/d = 13\text{kg} + 2\text{kg} = 15\text{kg}$$

在未经店员乙验证之前,能否肯定店员甲的做法一定不对呢?让我们来分析一下.在上面的陈述中得到 $d = \lambda m_0$ 和 $2m' = m - \left(\frac{m_0 l_0}{d}\right)$,这两点结论是对任何杆秤都是成立的,不管在推导过程中秤本身的重力矩 M 和 l_0 为何值.但是,如果提纽 C (支点)正好与秤杆和秤盘的重心重合,这时定盘星也必将处于 C 点,即 $l_0 = 0$.在这种特殊情况中, $\Delta m = 0$.这时店员甲的做法就碰巧对了.因为这时秤砣对 C 点的力矩是正比于 $m_0 m \lambda$,当 m_0 用 $2m_0$ 代替时,则平衡时双砣的位置必在 $\frac{m}{2}$ 处.这时将读数乘以2,即得被称物的质量 m .

当然,一般的杆秤的定盘星都不是正好在提纽处,所以店员甲的做法是不对的.

18. 用一根细线竖直悬挂一根长为 l 的均匀细木杆,置于水桶内水平面上方,如图3-28所示.当水桶缓慢上提时,细木杆逐渐浸入水中,当木杆浸入水中超过一定深度 l' 时,木杆开始出现倾斜现象.求 l' .已知木杆的密度为 ρ ,水的密度为 ρ_0 .

解析

当木杆浸入水中后,除了受到重力 G 和绳的拉力 F' 外,还受到浮力 F 的作用.三者的方向都是沿竖直方向的.当木杆很细,且无任何扰动时,上述三力是在同一直线上的.随着木杆浸入水中的深度的增加,浮力将逐渐增大,绳的拉力将随之减小.在任一位置都满足 $G = F + F'$.直到浮力增大到等于木杆的重量时, $G = F$,此时 $F' = 0$,木杆将竖直地悬浮在水面上(一部分浸在水中).

然而实际上微小的扰动随时都会发生,所以实际上我们会观察到在木杆尚未达到悬浮状态(即浮力等于重力时)之前,就已开始发生倾斜现象,这是由于当有微小的扰动使杆发生微小的倾斜时,即由图3-29中虚线所示的位置变为实线所示

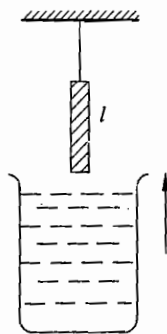


图 3-28

的位置时,对悬点 A 来说,将出现重力和浮力的力矩,而且两者的方向是相反的.设杆长为 l ,截面积为 S ,密度为 ρ ,则重力对 A 端的力矩为

$$M_G = lS\rho g(l/2)\sin\theta$$

浮力的大小等于排开水的重量,浮力的作用点在排开水的重心处,即图中 C' 处(DB 的中点).设水的密度为 ρ_0 ,杆没在水中的长度为 l' ,则浮力对 A 端的力矩为

$$M_F = l'S\rho_0 g[l - (l'/2)]\sin\theta$$

当没入较浅, $M_F < M_G$ 时,杆将重新回到平衡位置.当 $M_F > M_G$ 时,杆将继续倾斜.因此,存在一个临界值,当没入深度大于此临界值时,杆将开始发生倾斜现象.此临界值可令 $M_G = M_F$ 而解得如下:

$$lS\rho g(l/2)\sin\theta = l'S\rho_0 g[l - (l'/2)]\sin\theta$$

解此方程得

$$l' = l[1 \pm \sqrt{(\rho_0 - \rho)/\rho_0}]$$

取合理值得

$$l' = l[1 - \sqrt{(\rho_0 - \rho)/\rho_0}]$$

浮体的稳定性问题是一个重要的问题,本题的目的就是通过一个最简单的实例,让学生弄清浮体稳定性中最重要的两个因素即重力矩和浮力矩的作用,特别是如何计算浮力矩等问题.还可进一步引导学生去分析比重计的结构和船体结构的特点.

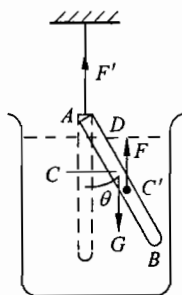


图 3-29

19. 半径为 R 的刚性球固定在水平桌面上.有一个质量为 m 的圆环状均匀弹性细绳圈,原长 $2\pi a$, $a=R/2$.绳圈的劲度系数为 k (绳伸长 s 时,绳中弹性张力为 ks).将绳圈从球的正上方轻放到球上,并用手扶着绳圈使其保持水平并最后停留在某个静力平衡位置.考虑重力,忽略摩擦.

- 1) 设平衡时绳圈长 $2\pi b$, $b=\sqrt{2}a$,求劲度系数 k (用 m 、 R 、 g 表示, g 为重力加速度).
- 2) 设 $k=m\bar{g}/2\pi^2 R$,求绳圈的最后平衡位置及长度.

解析

1) 设平衡时绳圈位于球面上相应于 θ 角的纬线上(见图 3-30).考虑绳上一小段,长为 $b\Delta\varphi$ (见俯视图 3-31),质量为 $\Delta m = \frac{m}{2\pi b} b\Delta\varphi = \frac{m\Delta\varphi}{2\pi}$,则这小段绳受力有:重力 Δmg ,方向竖直向下;张力的合力.因为张力 $F_T = k2\pi(b-a)$,所以张力的合力为 $F = 2F_T \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \approx$

$F_T \Delta\varphi = k \cdot 2\pi(b-a)\Delta\varphi$, 方向在水平面内, 指向绳圈中心; 球面的支持力 F_N , 方向沿球的半径向外.

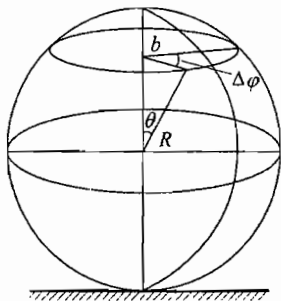


图 3-30

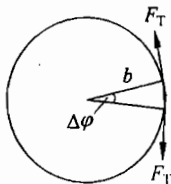


图 3-31

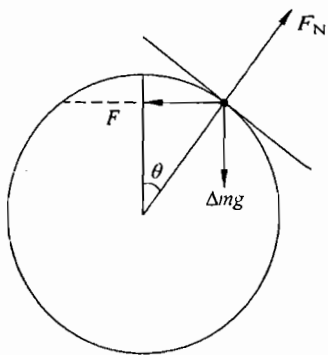


图 3-32

这三个力在一个平面内(经线所在的平面), 如图 3-32 所示. 将它们沿着经线的切向和法向分解, 则切向力决定绳圈在球面上沿切向的运动. 由几何图形可知, 沿经线切线向上的力为

$$\begin{aligned} F_1 &= F \cos\theta = 2\pi k(b-a)\Delta\varphi \cos\theta \\ &= 2\pi k \Delta\varphi \cos\theta (R \sin\theta - R \sin\theta_0) \end{aligned} \quad (1)$$

式中 $R \sin\theta = b$, $R \sin\theta_0 = a$. 沿经线切线向下的力为

$$F_2 = \Delta mg \sin\theta \quad (2)$$

当绳圈在球面上平衡时, $F_1 = F_2$, 由(1)、(2)两式可得

$$\tan\theta = c(\sin\theta - \sin\theta_0) \quad (3)$$

式中 $c = \frac{4\pi^2 k R}{mg}$, $\sin\theta = \frac{b}{R}$, $\sin\theta_0 = \frac{a}{R}$.

已知

$$a = \frac{R}{2}, \quad b = \sqrt{2}a = \frac{\sqrt{2}}{2}R$$

所以

$$\theta_0 = \frac{\pi}{6}, \quad \theta = \frac{\pi}{4}, \quad \tan\theta = 1$$

由(3)式可得

$$\begin{aligned} c &= 2(1 + \sqrt{2}) \\ k &= \frac{(1 + \sqrt{2})mg}{2\pi^2 R} \end{aligned} \quad (4)$$

2) 当 $k = \frac{mg}{2\pi^2 R}$ 时, 代入(3)式后, 因 $c = 2$, $\sin\theta_0 = \frac{1}{2}$, 可得

$$\tan\theta = 2\sin\theta - 1$$

此式可转化为

$$\sin\theta + \cos\theta = 2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$$

平方后变为

$$\sin^2 2\theta = 1 + \sin 2\theta$$

因为在 $\theta \leq \frac{\pi}{2}$ 的范围内, $\sin 2\theta \geq 0$, 所以上式无解. 这时的实际情况是: k 太小, 绳圈在重力作用下将套过球体而落在桌面上, 因此绳长为原来的长度, 即 $2\pi a$.

[注] 在有解的一般情况下, 绳圈在球面上有两个平衡位置, 但其中一个是不稳定平衡. 讨论从略.

本题虽是一道与弹力有关的静力学问题, 但因弹性绳圈的半径可变, 而且是套在球上面平衡. 这是中学生一般未见到过的题目, 往往束手无策. 解题的关键在于将绳圈分出一小段, 去研究这个小段的平衡. 若能看出此时小段两端所受的张力(弹性力)并非方向相反, 而是有一个指向绳圈中心的合力, 则问题就容易解决了.

从解题过程可以看出, 在分析过程中, 画图起了很大的作用. 能根据题意和对题的分析, 画出图 3-30、图 3-31、图 3-32, 物理问题已基本解决, 而且能画出这些图, 在很大程度上保证了数学运算的正确进行. 能否画图, 既是一种能力, 又是一种习惯. 能力的获得, 习惯的养成都应在平时, 在平时学习和解题时, 不宜贪快, 不要把求得答案作为惟一目标, 而应耐心地、仔细地把问题分析“透”. 不要错过培养能力、养成良好习惯的机会. 即使在分析比较简单的问题时, 该画图分析的也应画图. 有的学生遇到简单问题不愿画图, 遇到复杂问题又不会画图, 结果培养画图能力就落空了.

20. 如图 3-33 所示, 一根细棒, 上端 A 处用铰链与天花板相连, 下端用铰链与另一细棒相连, 两棒的长度相等. 两棒限于图示的竖直面内运动, 且不计铰链处的摩擦. 当在 C 端加一个适当的外力(在纸面内), 可使两棒平衡在图示的位置处, 即两棒间夹角为 90° , 且 C 端正处在 A 端的正下方.

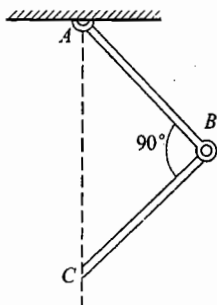


图 3-33

1) 不管两棒质量如何, 此外力只可能在哪个方向范围内? 试说明道理(不要求推算).

2) 如果 AB 棒的质量 $m_1 = 1.0\text{kg}$, BC 棒的质量 $m_2 = 2.0\text{kg}$, 求此外力的大小和方向.

解析

1) 以 C 为起点画此外力的矢量图, 则此力不可能指向竖直线以左, 因为这样对两棒整体来说, 此外力对 A 点的力矩与重力矩同向, 物体不可能平衡. 此外力也不可能指向竖直线以右且在 BC 棒以下, 因为这样对于 B 点来说, 此外力矩与下棒重力矩同向, 也不可能平衡. 只有当此外力指向竖直线以右且在 BC 棒以上(如图 3-34 所示)时, 棒才有可能平衡.

2) 设外力 F 的方向与竖直线之间的夹角为 θ , 两棒长均为 l . 根据题意, 可对 A 点列出整个物体的转动平衡条件, 即

$$(m_1 + m_2)g \cdot \frac{l}{2} \cos \frac{\pi}{4} = F \sin \theta \cdot \sqrt{2}l \quad (1)$$

对 B 点列出下棒的转动平衡条件, 即

$$F \sin \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) l = m_2 g \cdot \frac{l}{2} \cos \frac{\pi}{4} \quad (2)$$

由(1)、(2)两式可解得

$$F = \frac{1}{4} g \sqrt{2m_1^2 + 10m_2^2 + 8m_1 m_2}$$

$$\sin \theta = \frac{m_1 + m_2}{\sqrt{2m_1^2 + 10m_2^2 + 8m_1 m_2}}$$

代入数字, 可得

$$F = 19\text{N}, \quad \theta = \arcsin 0.395 = 23.3^\circ$$

本题的目的主要是考查学生是否能运用刚体转动的平衡条件求解问题.

不少考生只考虑了 A 轴(或 B 轴)的平衡条件, 因而得不到最后的答案. 也有的考生只习惯于根据已知量通过解方程求答案的确定解, 而缺乏通过定性分析确定解的可能范围这种训练.

本题在设问中要求学生通过定性分析确定外力方向的可能范围. 其实, 即使试题没有提出这一要求, 学生在解任何一道习题时, 都应尽可能先作一些定性分析. 因为这种定性分析能帮助你了解和明确题意, 是一种比较深入的审题过程; 这种定性分析能帮助你形成解题过程的总框架. 能否对习题先进行必要的定性分析, 既是一种能力, 也是一种学习习惯.

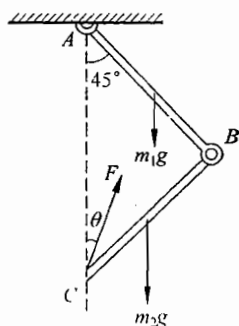


图 3-34

21. 如图 3-35 所示,用两段直径均为 $d=0.02\text{m}$ 且相互平行的小圆棒 A 和 B 水平地支起一根长为 $L=0.64\text{m}$ 、质量均匀分布的木条. 设木条与二圆棒之间的静摩擦因数 $\mu_0=0.4$, 滑动摩擦因数 $\mu=0.2$. 现使 A 棒固定不动, 并对 B 棒施以适当外力, 使木棒 B 向左缓慢移动. 试讨论分析木条的移动情况, 并把它的运动情况表示出来. 设木条与圆棒 B 之间最先开始滑动.

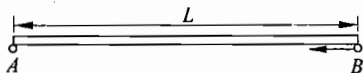


图 3-35

解析

设 F_A 、 F_B 为木条施于二棒上的正压力.

1) 当 B 棒受到外力作用而有向左移动趋势时, 木条与二棒的接触点有静摩擦力产生. 在 B 发生移动之前, 此二力可同时增大, 直到等于最大静摩擦力 $\frac{1}{2}\mu_0 mg$. 因为作用于木条的两摩擦力大小相等, 方向相反, 故木条处于静止不动的状态.

2) B 棒与木条间开始滑动后, 它们之间的摩擦力立即降至滑动摩擦力 μF_B , A 处的静摩擦力亦由最大值降到 μF_B , 随着 B 棒向左滑动, F_B 逐渐增大, μF_B 也增大, A 处的静摩擦力也增大. 但由于 F_A 逐渐减小, A 处的最大静摩擦力 $\mu_0 F_A$ 也相应地减小. 当 B 棒与木条的接触点移到距木条中心 O 为 x_1 处时, B 棒作用于木条的滑动摩擦力等于 A 棒与木条间的最大静摩擦力, 这时若 B 棒再向左移动, 木条就进入运动状态, x_1 是一个临界位置, 在此位置有

$$\mu_0 F_{A1} = \mu F_{B1} \quad (1)$$

$$F_{A1} \frac{L}{2} = F_{B1} x_1 \quad (2)$$

$$\text{由此可求得} \quad x_1 = \frac{L}{4} = 0.16\text{m} \quad (3)$$

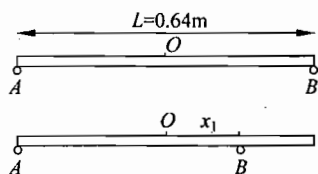


图 3-36

x_1 的位置如图 3-36 所示.

3) 当 B 棒由离木条中心的距离为 x_1 处再向左移动时, B 棒作用于木条的滑动摩擦力大于 A 棒作用于木条的最大静摩擦力, 木条开始进入运动状态. 木条在 A 棒上一旦滑动, A 处的最大静摩擦力突变为滑动摩擦力 μF_A . 为了保持缓慢移动, 作用于 B 棒的外力必须变小, B 棒与木条间的相对滑动消失, 滑动摩擦力变为静摩擦力, 结果木条随 B 棒一起向左运动. 木条的向左运动又导致 F_A 增大, F_B 减小. 当木条中心到 A 棒与木条接触点间的距离为 x'_1 时, A 棒加给木条的滑动摩擦力等于 B 棒与木条之间的最大静摩擦力, 这时若木条再向左移动, A 处的滑动摩擦力将大于 B 处的最大静摩擦力, 因而 B 处将发生滑动, 摩擦力突然减小, 因而木条将立即减速. 当它的速度减为零时, A 处的摩擦即变为静摩擦, 其大小等于 B 处的滑动摩擦力, 木条保持静止不动, 而 B 继续向左移动, 所以 x'_1 是

一个临界位置,在这位置有

$$\mu F'_{A1} = \mu_0 F'_{B1} \quad (4)$$

$$\text{又} \quad F'_{A1} x'_1 = F'_{B1} x_1 \quad (5)$$

$$\text{解得} \quad x'_1 = \frac{1}{2} x_1 = \frac{1}{8} L = 0.08\text{m} \quad (6)$$

x'_1 的位置如图 3-37 所示.

4) 此后 B 棒又继续向左滑动,而木条保持静止不动状态,出现上述的情况 2), 然后又出现上述的情况 3), 木条的运动将是静止不动与向左移动交替进行.

整个运动情况如下:

1) 木条不动, B 棒支点距 O 点由 $\frac{L}{2}$ 到 $x_1 = \frac{1}{2} \times \frac{L}{2} = \frac{L}{4} = 0.16\text{m}$.

2) 木条随 B 运动, A 棒支点距 O 点由 $\frac{L}{2}$ 到 $x'_1 = \frac{1}{2} x_1 = \frac{L}{8} = 0.08\text{m}$.

3) 木条不动, B 棒支点距 O 点由 $\frac{L}{4}$ 到 $x_2 = \frac{1}{2} x'_1 = \frac{L}{16} = 0.04\text{m}$.

4) 木条随 B 运动, A 棒支点距 O 点由 $\frac{L}{8}$ 到 $x'_2 = \frac{1}{2} x_2 = \frac{L}{32} = 0.02\text{m}$.

5) 木条不动, B 棒支点距 O 点由 $\frac{L}{16}$ 到 $x_3 = \frac{1}{2} x'_2 = \frac{L}{64} = 0.01\text{m}$.

6) 木条随 B 运动, A 棒支点距 O 点由 $\frac{L}{32}$ 到 $x'_3 = 0.01\text{m}$ 时, A 、 B 二棒已互相接触, 过程结束. 这时木条处于平衡状态, 其中心正对 A 、 B 二棒的接触点.

本题涉及的物理现象对不少学生而言可能相当熟悉. 在儿童时代, 许多人都玩过这样的“杂耍”: 把两手的食指伸直, 放在同一水平面内, 再把一根木棒搁在两食指上, 当两手向中间靠近时, 就会出现上面分析到的各种现象. 若棒是均匀的, 则当两手指接触时, 手指正好位于棒的中心处. 若棒不均匀, 亦会出现类似的现象, 不过当两手指接触时手指不在棒的中央. 利用此办法可找出不均匀棒的重心所在处. 在儿童时代, 虽然玩过这种“杂耍”, 但不一定知道其中的道理. 学了物理, 特别是对物理学习有兴趣的学生, 一定会用学过的知识去解释这种现象的.

学习物理, 不能只热衷于解习题, 应注意研究、分析生活中的物理, 发生在自己身边的物理. 这不仅能提高学习物理的兴趣, 而且能提高分析问题的能力. 由于所学到的物理规律还比较少, 生活中的物理现象不一定都能解释清楚, 这并不要紧, 可把未解决的问题暂时存放, 待学到新的物理规律后, 再把存放的问题拿出来分析研究. 脑海中经常有一些解决不了的问题会大大增强学习的动力.

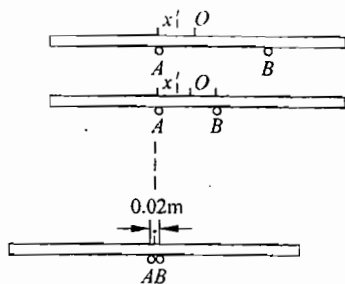


图 3-37

22. 半径为 r 、质量为 m 的三个相同的刚性球放在光滑的水平桌面上, 两两互相接触. 用一个高为 $1.5r$ 的圆柱形刚性圆筒(上下均无底)将此三球套在筒内, 圆筒的内半径取适当值, 使得各球间以及球与筒壁之间均保持接触, 但相互间无作用力. 现取一质量亦为 m 、半径为 R 的第四个球, 放在三球的上方正中. 设四个球的表面、圆筒的内壁表面均由相同物质构成, 其相互之间的静摩擦系数均为 $\mu = 3/\sqrt{15}$ (约等于 0.775), 问 R 取何值时, 用手轻轻竖直向上提起圆筒即能将四个球一起提起来?

解析

第一步: 作图. 各球受力如图 3-38 所示, 以图中箭头所示方向为正.

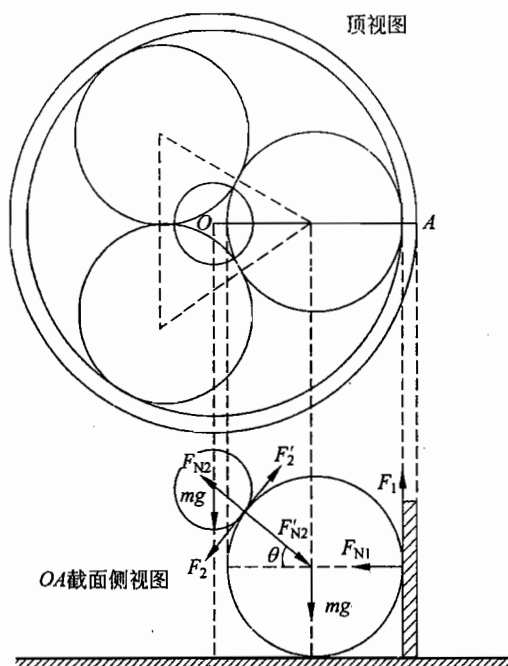


图 3-38

第二步: 设系统已脱离桌面而能保持平衡. 求出各力, 特别是摩擦力 F_1 、 F_2 应取的值. 平衡方程为

$$\text{上球} \quad 3F_{N2} \sin\theta - 3F_2 \cos\theta = mg \quad (1)$$

$$\text{下球} \quad F_1 + F_2 \cos\theta = mg + F_{N2} \sin\theta \quad (2)$$

$$F_{N1} = F_{N2} \cos\theta + F_2 \sin\theta \quad (3)$$

$$\text{整体} \quad 3F_1 = 4mg \quad (4)$$

由下球的力矩平衡可知 $F_1 = F_2$ (5)

以上5式中共有4个未知量,即 F_1 、 F_2 、 F_{N1} 和 F_{N2} . 其中(1)、(2)、(4)式不相互独立,可任选两式求解方程,由(4)、(5)两式得

$$F_1 = F_2 = 4mg/3 \quad (6)$$

(6)式代入(1)式得

$$F_{N2} = \frac{4}{3}mg \cot\theta + \frac{1}{3}mg \frac{1}{\sin\theta} \quad (7)$$

(6)、(7)式代入(3)式得

$$F_{N1} = \frac{1}{3}mg \cot\theta + \frac{4}{3}mg \frac{1}{\sin\theta} \quad (8)$$

第三步:为了实际上不产生任何相互滑动,上面的摩擦力 F_1 、 F_2 都必须小于或等于最大静摩擦力($F \leq \mu F_N$),即 μ 必须足够大,使下列二式得到满足

$$\frac{1}{\mu} \leq \frac{F_{N1}}{F_1} = \frac{1}{\sin\theta} + \frac{1}{4} \cot\theta = \frac{4 + \cos\theta}{4\sin\theta} \quad (9)$$

$$\frac{1}{\mu} \leq \frac{F_{N2}}{F_2} = \frac{1}{4\sin\theta} + \cot\theta = \frac{1 + 4\cos\theta}{4\sin\theta} \quad (10)$$

由于

$$4 + \cos\theta > 1 + 4\cos\theta$$

只要(10)式满足,(9)式必然满足.这就是说,如果发生滑动,首先在上下球之间发生.

第四步:求刚刚不发生滑动时上球的半径. μ 为给定值,由(10)式求出 θ ,再求出 R .

已知 $\mu = 3/\sqrt{15}$, (10)式成为

$$\frac{\sqrt{15}}{3} \leq \frac{1}{4\sin\theta} + \cot\theta = \frac{1 + 4\cos\theta}{4\sin\theta}$$

当 θ 增大时, $(1 + 4\cos\theta)/(4\sin\theta)$ 减小, θ 有一极大值 θ_{\max} , 当 $\theta = \theta_{\max}$ 时,得到

$$4\sqrt{15}\sin\theta_{\max} = 3(1 + 4\cos\theta_{\max})$$

等式两端平方并整理后得

$$128\cos^2\theta_{\max} + 24\cos\theta_{\max} - 77 = 0$$

解出

$$\cos\theta_{\max} = \frac{11}{16}, \quad \text{即} \quad \cos\theta \geq \frac{11}{16}$$

设 $R = br$, 则由图可知

$$\cos\theta = \frac{2}{3}\sqrt{3}r/(r+R) = \frac{2}{3}\sqrt{3}/(1+b)$$

$$b = \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{1}{\cos\theta} - 1 \leq \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{16}{11} - 1 = \frac{32\sqrt{3}}{33} - 1$$

但是 $R = br$ 又不能太小,否则上球将在三球中掉下,即必须使 $b > 2\sqrt{3}/3 - 1$. 所以, R 所取

值应为

$$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}-1\right)r < R \leq \left(\frac{32\sqrt{3}}{33}-1\right)r$$

即

$$0.1547r < R \leq 0.6796r$$

本题是一道较难的静力学题目.之所以较难,一是因为其立体结构,二是因为涉及了摩擦定律.

本题没有给出图形.图形要学生根据题目的文字叙述自己画出,往往有学生将侧视图下面二球画成相切而导致错误.此外,学生应当掌握不等式形式的摩擦定律 $F \leq \mu F_N$ 的正确运用,否则,如只会使用 $F_{\max} = \mu F_N$,则很难顺利解决本题.

此题难的原因将因人而异.试题没有给出图形,要求学生根据试题的文字叙述和自己的理解把图画出来,是一个重要原因.没有画图,不会画图或图画得不正确,就很难进行受力分析.在解题时没有画图习惯的学生应再一次吸取教训.题目问的是第四个球的半径 R 的取值范围,有的学生在作受力分析,写出各球的平衡方程时,似乎没有与待求的 R 发生联系,但如果能正确地把图画出来,就不难发现待求量 R 隐含在角度 θ 之中.

23. 一长方形均匀薄板 AB ,可绕通过其重心、垂直于长度方向的固定水平轴 O (垂直纸面)自由转动,如图 3-39 所示.在板上轴 O 左侧距 O 点为某一距离 L 处以轻绳悬挂一质量为 m 的物体.在轴 O 的右侧板上放一质量也是 m 的立方体,立方体边长及其左侧面到轴 O 的距离均为 l .已知起始时板处于水平位置,挂物与地面相接触,轻绳绷紧,整个系统处于平衡状态.现在立方体右侧面中心处施一沿水平方向向右的力 F 去拉它,若用符号 μ 表示立方体与板面间的静摩擦因数,当 F 从零开始逐渐增大至某一数值时,整个系统的平衡状态将开始被破坏.试讨论:可能出现几种平衡状态被破坏的情况?每种情况出现的条件是什么?要求在以 μ 为纵坐标、 $x\left(=\frac{2L}{l}-3\right)$ 为横坐标的

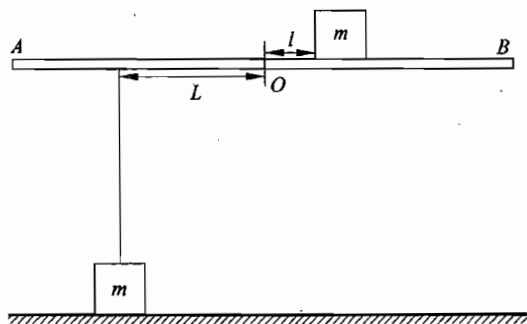


图 3-39

图中,画出可能发生这几种情况出现的区域.不要求讨论这些区域交界线上的平衡状态被破坏的情况.

解析

起始时 $F=0$, 已知系统处于静止状态, 且绳是绷紧的, 用 F' 表示绳中张力, 如图 3-40 所示. 由力矩平衡方程可知

$$F'L = mg\left(l + \frac{l}{2}\right) \quad (1)$$

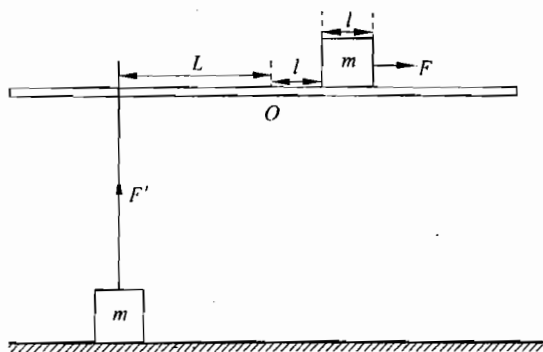


图 3-40

因为重物静止在地面上, 所以有

$$F' \leq mg \quad (2)$$

由以上两式可得

$$mgL \geq mg \frac{3}{2}l$$

即

$$x = \left(\frac{2L}{l} - 3\right) \geq 0 \quad (3)$$

这是 L 与 l 必须满足的条件.

开始破坏原来的平衡有以下几种可能:

1) 若立方体发生滑动, 则要求

$$F > \mu mg \quad (4)$$

2) 若立方体不发生滑动而绕右下棱转动, 则由转动定律可知, 此时应满足的条件为

$$F \frac{l}{2} > mg \frac{l}{2}$$

即

$$F > mg \quad (5)$$

3) 若立方体既不滑动也不转动而板发生偏转, 由于此时立方体和板之间无相对运动, 可将立方体和板作为一个整体对待, 它们所受的外力有 F 、立方体的重力和绳子的张力, 如果板将发生偏转, 则左侧的重物将离地, 绳中的张力等于 mg . 由转动定律可知, 板发生偏转应满足的条件为

$$F \frac{l}{2} + mg \frac{3}{2}l > mgL, \quad \text{即} \quad F > \left(\frac{2L}{l} - 3\right)mg = xmg \quad (6)$$

当 F 逐渐增大时究竟发生什么运动, 取决于上述(4)、(5)、(6)三个条件哪个先被满足, 实际上这取决于 μ 、 l 和 L 的值.

下面就通过比较(4)、(5)、(6)三个条件, 作出判断如下:

- 1) $\mu < 1, \mu < x$. 则首先满足的是 $F > \mu mg$, 故首先发生立方体滑动.
- 2) $\mu > 1, x > 1$. 则 $F > mg$ 首先被满足, 即首先立方体绕其右下棱转动.
- 3) $x < 1, x < \mu$. 则 $F > xmg$ 首先被满足, 即首先发生板偏转.

由上列各种情况判断, 可得图 3-41.

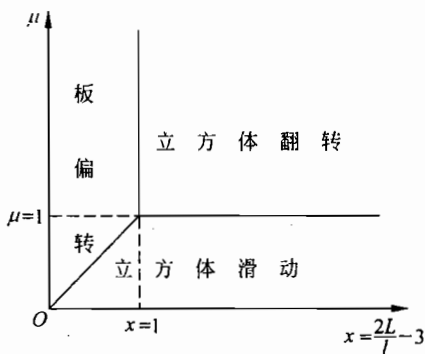


图 3-41

本题是一道静力学题目, 讨论平衡在什么条件下被破坏. 随着条件的不同, 平衡破坏的方式有木块滑动、木块转动和木板倾斜三种情况. 分析时要仔细、全面, 不要漏掉每一种可能.

24. 有一长为 l , 重为 W_0 的均匀杆 AB , A 端顶在竖直的粗糙墙壁上, 杆端与墙面间的静摩擦因数为 μ ; B 端用一强度足够而不可伸长的绳悬挂, 绳的另一端固定在墙壁 C 点, 木杆呈水平状态, 绳与杆的夹角为 θ , 如图 3-42.

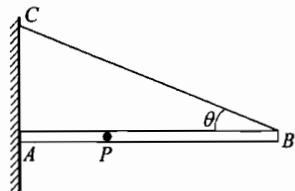


图 3-42

- 1) 求杆能保持平衡时 μ 与 θ 应满足的条件.

2) 杆保持平衡时, 杆上有一点 P 存在, 若在 A 点与 P 点间任一点悬挂一重物, 则当重物的重量 W 足够大时总可以使平衡破坏; 而在 P 点与 B 点之间任一点悬挂任意重量的重物, 都不能使平衡破坏. 求出这一 P 点与 A 点的距离.

解析

设绳的张力为 F_T , 墙对杆的摩擦力为 F (向上), 正压力为 F_N (向外), W 的悬挂点距 A 的距离为 d (如图 3-43), 则根据刚体平衡的条件可得:

$$F + F_T \sin \theta = W_0 + W \quad (1)$$

$$F_N = F_T \cos \theta \quad (2)$$

$$Fl = W_0 \frac{l}{2} + W(l-d) \quad (3)$$

$$F \leq \mu F_N \quad (4)$$

由(3)式得

$$F = \frac{1}{2} W_0 + \left(1 - \frac{d}{l}\right) W \quad (5)$$

由(1)式及(5)式得

$$F_T \sin \theta = W_0 + W - F = \frac{1}{2} W_0 + \frac{d}{l} W \quad (6)$$

由(2)、(6)式得

$$F_N = \cot \theta \left(\frac{1}{2} W_0 + \frac{d}{l} W \right) \quad (7)$$

将(5)、(7)两式代入(4)式中, 得

$$\frac{1}{2} W_0 + \left(1 - \frac{d}{l}\right) W \leq \mu \cot \theta \left(\frac{1}{2} W_0 + \frac{d}{l} W \right)$$

$$\text{即} \quad \frac{1}{2} (\mu \cot \theta - 1) W_0 \geq \left[1 - \frac{d}{l} (\mu \cot \theta + 1) \right] W \quad (8)$$

根据这一结果作如下分析:

1) 当不挂重物时, $W=0$, 这时(8)式成为

$$\frac{1}{2} (\mu \cot \theta - 1) W_0 \geq 0$$

$$\text{即} \quad \mu \geq \tan \theta \quad (9)$$

此即第 1) 问的答案.

2) 在(9)式条件下挂上重物 W , 这时(8)式左方 $(\mu \cot \theta - 1) \geq 0$, 为了对任意 W (8)式均能成立, 必须要求(8)式右方 W 的系数小于或等于零, 否则当 W 足够大时, (8)式肯定不能成立.

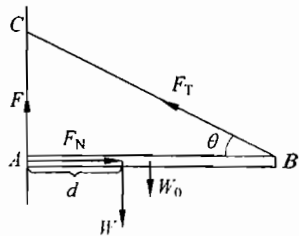


图 3-43

因此,平衡条件为

$$1 - \frac{d}{l}(1 + \mu \cot \theta) \leq 0$$

即

$$d \geq \frac{l}{1 + \mu \cot \theta}$$

第2)问中所求P点与A点的距离为

$$\overline{AP} = d_{\min} = \frac{l}{1 + \mu \cot \theta}$$

一般说来,在碰到有静摩擦存在的问题时,应当由静摩擦力的特点 $F \leq \mu F_N$, 用不等式求解. 有些学生只习惯于用等式求解, 这样, 在解此题时就会遇到困难. 在第1)问中, 有的学生用等式求得 $\mu = \tan \theta$ 后, 误认为 $\mu < \tan \theta$ 是正确答案. 在第2)问中, 若仅由等式进行分析, 则较难做出正确的答案.

25. 5个质量相等的匀质球, 其中4个半径均为 a 的球, 静止放在半径为 R 的半球形碗内, 它们的球心在同一水平面内. 另1个半径为 b 的球放在4球之上. 设接触面都是光滑的, 试求碗的半径 R 的值满足什么条件时下面的球将相互分离.

解析

设半径为 b 的球放在4个球上后, 下面4个球的位置未变. 以 m 表示每个球的质量, 下面4个球的球心形成一个位于水平面内的正方形 $ABCD$, 俯视图如图 3-44 所示. O 为正方形对角线的交点, 各球之间的相互作用力大小均为 F_1 . 根据对称性, 并注意到接触面都是光滑的, 可知每个球受到相邻两球作用力的合力都为 $\sqrt{2}F_1$, 方向沿对角线.

由几何对称性分析, 可知对角线 AC 、上面球的球心 E 和碗的球心 O' 应在同一竖直平面内, 如图 3-45 所示. 设上面球与下面每个球的相互作用力的大小均为 F_2 , 对 A 球,

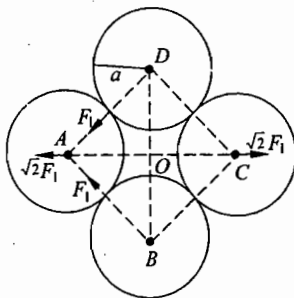


图 3-44

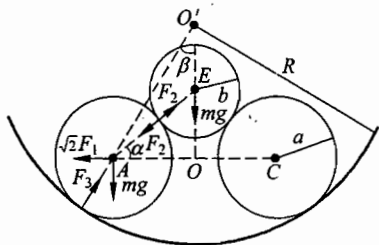


图 3-45

F_2 的方向沿球心 A 、 E 连线. 平衡时对半径为 b 的球有

$$mg = 4F_2 \sin\alpha \quad (1)$$

式中 α 是球心连线 AE 与水平线 AC 之间的夹角, 有

$$\cos\alpha = \frac{AO}{AE} = \frac{\sqrt{2}a}{a+b} \quad (2)$$

对于下面每个球, 如球 A , 受到的作用力有重力 mg , B 、 D 两球对它的作用的合力 $\sqrt{2}F_1$, 上面球的作用力 F_2 和碗面的作用力 F_3 . 由于体系对称且接触面光滑, 各力均通过球心 A , F_3 还通过 O' , 平衡时有

$$\sqrt{2}F_1 + F_2 \cos\alpha - F_3 \sin\beta = 0 \quad (3)$$

$$F_3 \cos\beta - mg - F_2 \sin\alpha = 0 \quad (4)$$

式中 β 是 F_3 方向与竖直线的夹角, 有

$$\sin\beta = \frac{AO}{AO'} = \frac{\sqrt{2}a}{R-a} \quad (5)$$

由式(1)可得

$$F_2 = \frac{mg}{4\sin\alpha} \quad (6)$$

由式(4)和(6)可得

$$F_3 = \frac{5mg}{4\cos\beta} \quad (7)$$

由式(3)、(6)和(7)可得

$$F_1 = \frac{mg}{4\sqrt{2}}(5\tan\beta - \cot\alpha) \quad (8)$$

如果 $F_1 \geq 0$, 表示下面的 4 个球相互接触, 4 个球在原来的位置; 如果 $F_1 < 0$, 则下面的 4 个球将相互分离. 当下面的 4 个球分离时, 由式(8)得

$$5\tan\beta - \cot\alpha < 0. \quad (9)$$

利用式(2)和(5), 式(9)化为

$$\frac{5\sqrt{2}a}{\sqrt{R^2 - 2Ra - a^2}} < \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{b^2 + 2ab - a^2}} \quad (10)$$

解此不等式, 可得

$$R > \sqrt{25b^2 + 50ab - 23a^2} + a \quad (11)$$

即碗的半径 R 满足上式时, 下面的球将分离.

要式(11)有解, 应有

$$25b^2 + 50ab - 23a^2 \geq 0 \quad (12)$$

即

$$b \geq \left(\frac{4}{5}\sqrt{3} - 1\right)a \quad (13)$$

由于下面各球距 O 的最小距离为 $(\sqrt{2}-1)a$, 现上面的球能放在 4 个球的上面, 表明

$$b > (\sqrt{2}-1)a \quad (14)$$

而 $\sqrt{2} > 4\sqrt{3}/5$, 所以只要第 5 个球能够放在 4 个球的上面, 式(12)一定成立.

从本题的求解过程中, 再一次看到画图的重要作用. 能根据试题的文字叙述把对问题的理解用图表示出来, 不仅是一种技巧, 而且是理解能力的反映. 能否画出图 3-45, 是能否解题的关键. 另外, “下面的球将相互分离”这一表述, 在物理上表现为什么? 不理解这一点, 即使经过受力分析, 列出了平衡方程, 也不知道该求的是什么.

26. 有一半径为 R 的圆柱 A , 静止在水平地面上, 并与竖直墙面相接触. 现有另一质量与 A 相同, 半径为 r 的较细圆柱 B . 用手扶着圆柱 A , 将 B 放在 A 的上面, 并使之与墙面相接触, 如图 3-46 所示, 然后放手.

已知圆柱 A 与地面之间的静摩擦因数为 0.20, 两圆柱之间的静摩擦因数为 0.30. 若放手后, 两圆柱体能保持图示的平衡, 问圆柱 B 与墙面间的静摩擦因数和圆柱 B 的半径 r 的值各应满足什么条件?

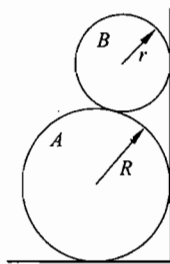


图 3-46

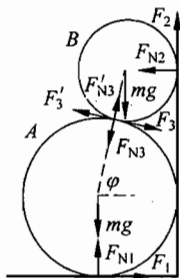


图 3-47

解析

放上圆柱 B 后, 圆柱 B 有向下运动的倾向, 对圆柱 A 和墙面有压力, 圆柱 A 倾向于向左移动, 对墙面没有压力. 平衡是靠各接触点的摩擦力维持的. 现设系统处于平衡状态, 取圆柱 A 受地面的正压力为 F_{N1} , 水平摩擦力为 F_1 ; 圆柱 B 受墙面的正压力为 F_{N2} , 竖直摩擦力为 F_2 ; 圆柱 A 受圆柱 B 的正压力为 F_{N3} , 切向摩擦力为 F_3 ; 圆柱 B 受圆柱 A 的正压力为 F'_{N3} , 切向摩擦力为 F'_3 , 如图 3-47 所示. 各力以图示方向为正方向.

已知圆柱 A 与地面的摩擦因数 $\mu_1 = 0.20$, 两圆柱间的摩擦因数 $\mu_3 = 0.30$. 设圆柱 B 与墙面的摩擦系数为 μ_2 , 过两圆柱中轴的平面与地面的交角为 φ .

设两圆柱的质量均为 m , 为了求出 F_{N1}, F_{N2}, F_{N3} 以及为保持平衡所需的 F_1, F_2, F_3 之值, 下面列出两圆柱所受力和力矩的平衡方程.

圆柱 A

$$mg - F_{N1} + F_{N3} \sin\varphi + F_3 \cos\varphi = 0 \quad (1)$$

$$F_1 - F_{N3} \cos\varphi + F_3 \sin\varphi = 0 \quad (2)$$

$$F_1 R = F_3 R \quad (3)$$

圆柱 B

$$mg - F_2 - F'_{N3} \sin\varphi - F'_3 \cos\varphi = 0 \quad (4)$$

$$F_{N2} - F'_{N3} \cos\varphi + F'_3 \sin\varphi = 0 \quad (5)$$

$$F'_3 r = F_2 r \quad (6)$$

由于 $F'_3 = F_3$, 所以得

$$F_1 = F_2 = F_3 = F'_3 = F \quad (7)$$

式中 F 代表 F_1, F_2, F_3 和 F'_3 的大小. 又因 $F'_{N3} = F_{N3}$, 于是(1)、(2)、(4)和(5)四式成为

$$mg - F_{N1} + F_{N3} \sin\varphi + F \cos\varphi = 0 \quad (8)$$

$$F - F_{N3} \cos\varphi + F \sin\varphi = 0 \quad (9)$$

$$mg - F - F_{N3} \sin\varphi - F \cos\varphi = 0 \quad (10)$$

$$F_{N2} - F_{N3} \cos\varphi + F \sin\varphi = 0 \quad (11)$$

以上四式是 F_{N1}, F_{N2}, F_{N3} 和 F 的联立方程, 解这联立方程可得

$$F_{N2} = F \quad (12)$$

$$F_{N3} = \frac{1 + \sin\varphi}{1 + \cos\varphi + \sin\varphi} mg \quad (13)$$

$$F_{N2} = F = \frac{\cos\varphi}{1 + \cos\varphi + \sin\varphi} mg \quad (14)$$

$$F_{N1} = \frac{2 + \cos\varphi + 2\sin\varphi}{1 + \cos\varphi + \sin\varphi} mg \quad (15)$$

(12)、(13)、(14)和(15)四式是平衡时所需要的力, F_{N1}, F_{N2}, F_{N3} 没有问题, 但 F_1, F_2, F_3 三个力能不能达到所需的数值 F , 即(12)、(14)式要受那里的摩擦因数的制约. 三个力中只要有一个不能达到所需的 F 值, 在那一点就要发生滑动而不能保持平衡.

首先讨论圆柱 B 与墙面的接触点. 接触点不发生滑动要求

$$\mu_2 \geq \frac{F_2}{F_{N2}}$$

由(12)式, 得

$$\frac{F_2}{F_{N2}} = 1$$

所以

$$\mu_2 \geq 1 \quad (16)$$

再讨论圆柱 A 与地面的接触点的情形. 按题设此处的摩擦因数为 $\mu_1 = 0.20$. 根据摩擦定律 $F_f \leq \mu F_N$, 若上面求得的接地点维持平衡所需的水平力 F_1 满足 $F_1 \leq \mu_1 F_{N1}$, 则圆柱在地面上不滑动; 若 $F_1 > \mu_1 F_{N1}$, 这一点将要发生滑动.

圆柱 A 在地面不发生滑动的条件是

$$\mu_1 \geq \frac{F_1}{F_{N1}} = \frac{\cos\varphi}{2 + \cos\varphi + 2\sin\varphi} \quad (17)$$

由图 3-47 可知

$$\cos\varphi = \frac{R-r}{R+r} \quad (18)$$

$$\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \frac{2\sqrt{Rr}}{R+r} \quad (19)$$

由(17)、(18)式和(19)式以及 $\mu_1 = 0.20$, 可以求得

$$r \geq \frac{1}{9}R \quad (20)$$

即只有当 $r \geq \frac{1}{9}R$ 时, 圆柱 A 在地面上才能不滑动.

最后讨论两圆柱的接触点. 接触点不发生滑动要求

$$\mu_3 \geq \frac{F_3}{F_{N3}} = \frac{\cos\varphi}{1 + \sin\varphi} \quad (21)$$

由(18)、(19)式以及 $\mu_3 = 0.30$, 可解得

$$r \geq \left(\frac{7}{13}\right)^2 R = 0.29R \quad (22)$$

显然, 在平衡时, r 的上限为 R , 总结(20)式和(22)式, 得到 r 满足的条件为

$$R \geq r \geq 0.29R \quad (23)$$

在本题中, 能否正确判定当两圆柱达到平衡时, 各接触处摩擦力的大小和方向是求解本题的极为重要的一步. 如果没有把圆柱体 B 放在圆柱体 A 的上面, 能否肯定圆柱 A 对墙面没有压力作用? 判定墙面作用于 B 的摩擦力 F_2 的方向是竖直向上的依据是什么? 这些问题在解题过程中都应思考一下.

27. 长方形风筝如图 3-48 所示, 其宽度 $a = 40\text{cm}$, 长度 $b = 50\text{cm}$, 质量 $m = 200\text{g}$ (其中包括以细绳吊挂的纸球“尾巴”的质量 $m' = 20\text{g}$, 纸球可当作质点), AO 、 BO 、 CO 为三根绑绳, $AO = BO$, C 为底边中点, 绑绳及放风筝的牵绳均不可伸缩, 质量不计. 放风筝

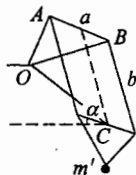


图 3-48

时,设地面风速为零,牵绳保持水平拉紧状态,且放风筝者以速度 v 持牵绳奔跑时,风筝单位面积所受的空气作用力垂直于风筝表面,量值为 $p = kv \sin \alpha$, $k = 8 \text{ N} \cdot \text{s} / \text{m}^3$, α 为风筝表面与水平面的夹角. 风筝表面为光滑平面,各处所受空气作用力近似认为相等,取 $g = 10 \text{ m/s}^2$,放飞场地为足够大的水平地面. 试求:

1) 放风筝者至少应以多大的速度持牵绳奔跑,风筝才能做水平飞行? 这时风筝面与水平面的夹角应为何值? 假设通过调整绑绳长度可使风筝面与水平面成任意角度 α .

2) 若放风筝者持牵绳奔跑的速度 $v = 3 \text{ m/s}$,调整绑绳 CO 的长度等于 b ,为了使风筝能水平稳定飞行, AO 与 BO 的长度应等于多少?

解析

1) 设人以速度 v_0 持牵绳奔跑时,风筝恰能平行于地面飞行,此时牵绳平行于地面. 设此时风筝表面与地面夹角为 α . 则风力为:

$$F = kv_0 ab \sin \alpha$$

$$F_y = kv_0 ab \sin \alpha \cos \alpha$$

风筝水平飞行的条件为(见图 3-49)

$$kv_0 ab \sin \alpha \cos \alpha = mg$$

当 $\sin \alpha \cos \alpha$ 取极大值时,可得 v_0 的极小值. 因

$$\sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha / 2$$

故 当 $\alpha = 45^\circ$ 时 $\sin \alpha \cos \alpha$ 的极大值为 $1/2$.

把 $\alpha = 45^\circ$ 代入(1)式,得 v_0 之极小值:

$$\begin{aligned} v_0 &= mg / (k ab \sin \alpha \cos \alpha) \\ &= 0.2 \times 10 / (8 \times 0.4 \times 0.5 \times 0.5) \text{ m/s} = 2.5 \text{ m/s} \end{aligned}$$

2) 重新调整绑绳长度后,放飞者使牵绳平行于地面以 $v = 3 \text{ m/s}$ 的速度奔跑,设此时风筝能保持水平飞行,则

$$kv ab \sin \alpha \cdot \cos \alpha = mg$$

代入数值得:

$$\sin \alpha \cos \alpha = mg / kv ab = 0.2 \times 10 / (8 \times 3 \times 0.4 \times 0.5) = 5/12,$$

$$\sin 2\alpha / 2 = 5/12, \sin 2\alpha = 10/12 = 0.83$$

$$2\alpha = 56.4^\circ \text{ 或 } 123.6^\circ, \alpha_1 = 28.2^\circ, \alpha_2 = 61.8^\circ$$

当 $v = 3 \text{ m/s}$ 时,风力的水平分量为:

$$F_x = F \sin \alpha = kv ab \sin^2 \alpha$$

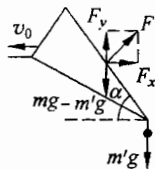


图 3-49

由力之平衡得牵绳张力为

$$F_T = kvab \sin^2 \alpha$$

分别代入 α_1, α_2 值, 得:

$$F_{T1} = 8 \times 3 \times 0.4 \times 0.5 \times \sin^2 28.2^\circ \text{N} = 1.07 \text{N}$$

$$F_{T2} = 8 \times 3 \times 0.4 \times 0.5 \times \sin^2 61.8^\circ \text{N} = 3.73 \text{N}$$

自 O 点至 AB 之中点 D , 连接一紧绳 OD 替代 AO 和 BO , 以风筝纸面中心 O' 为支点 (如图 3-50 所示), 则牵绳张力 F_T 和纸球所产生的力矩分别为:

$$M_T = F_T \Delta r, \quad M_{m'} = m'g \cdot b \cos \alpha / 2$$

由力矩的平衡 $M_T = M_{m'}$ 得:

$$\Delta r = m'g b \cos \alpha / 2 F_T$$

分别代入 $F_{T1}, \alpha_1, F_{T2}, \alpha_2$ 值, 得

$$\Delta r_1 = 0.02 \times 10 \times 50 \times \cos 28.2^\circ / (2 \times 1.07) \text{cm} = 4.1 \text{cm}$$

$$\Delta r_2 = 0.02 \times 10 \times 50 \times \cos 61.8^\circ / (2 \times 3.73) \text{cm} = 0.63 \text{cm}$$

所以

$$r_1 = \Delta r_1 + \frac{b}{2} \sin \alpha_1 = [4.1 + (50/2) \sin 28.2^\circ] \text{cm} = 15.9 \text{cm}$$

$$r_2 = \Delta r_2 + \frac{b}{2} \sin \alpha_2 = [0.63 + (50/2) \sin 61.8^\circ] \text{cm} = 22.6 \text{cm}$$

由图知:

$$\sin(\alpha - \beta) = r/b$$

分别代入 α, r 及 b 值得

$$\beta_1 = 9.66^\circ, \quad \beta_2 = 34.9^\circ$$

分别代入 β_1, β_2 值, 可得

$$x_1 = 2 \times 50 \times \sin(9.66^\circ/2) \text{cm} = 8.4 \text{cm}$$

$$x_2 = 2 \times 50 \times \sin(34.9^\circ/2) \text{cm} = 30 \text{cm}$$

由

$$AO = BO = \sqrt{x^2 + (a/2)^2}$$

分别代入 x_1, x_2 值, 可得

$$AO = \sqrt{8.4^2 + (40/2)^2} \text{cm} = 21.7 \text{cm}$$

或

$$AO = \sqrt{30^2 + (40/2)^2} \text{cm} = 36 \text{cm}$$

讨论: $AO = 36 \text{cm}$ 有利于风筝起飞。

这是一道在风力作用下力的平衡和力矩的平衡问题。做此题时首先要能经过分析看出调节绑绳的长度与力矩平衡的关系。另外, 做此题时数学处理上要小心, 因为是三维的。

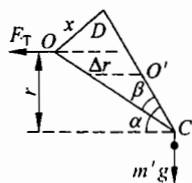


图 3-50

28. 有一木板可绕其下端的水平轴转动, 转轴位于一竖直墙面上, 如图 3-51 所示. 开始时木板与墙面的夹角为 $\theta = 15^\circ$, 在夹角中放一正圆柱形木棍, 截面半径为 r , 在木板外侧加一力 F 使其保持平衡. 在木棍端面上画一竖直向上的箭头. 已知木棍与墙面之间和木棍与木板之间的静摩擦因数分别为 $\mu_1 = 1.00$, $\mu_2 = 1/\sqrt{3} \approx 0.577$. 若极缓慢地减小所加的力 F , 使夹角慢慢张开, 木棍下落. 问当夹角张到 60° 时, 木棍端面上的箭头指向什么方向? 附三角函数表(见表 3-1)

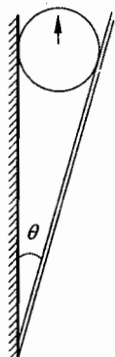


图 3-51

表 3-1

θ	7.5°	15°	30°	60°
$\sin\theta$	0.131	0.259	0.500	0.866
$\cos\theta$	0.991	0.966	0.866	0.500

解析

1) 为使木板与墙面的夹角 θ 不变, 木棍不动, 所加的外力 F 可有一定范围, 此时木棍所受木板及墙面两方的正压力及摩擦力亦不确定. 外力 F 加大到一定程度, θ 有减小倾向, 木棍有向上运动倾向; 而外力减小到一定程度则有相反倾向.

当外力 F 渐渐减小时, 木棍所受各力均在变化, 两个摩擦力变为方向向上, 大小逐渐增加. 当其中一方增加到最大摩擦力后, 再减小外力 F 时, 平衡开始破坏, 木棍将在这一方开始向下滑动, θ 角张大, 而另一方则保持无滑滚动. 问题在于确定哪一方首先开始滑动.

2) 设木棍的质量为 m , 所受墙面的正压力与摩擦力(向上)为 F'_1 、 F_1 ; 所受木板的正压力与摩擦力(向上)为 F'_2 、 F_2 , 设木板与墙面的夹角为 θ , 如图 3-52,

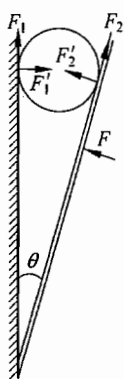


图 3-52

则木棍的平衡方程为

$$\text{竖直方向: } F_1 + F'_2 \sin\theta + F_2 \cos\theta = mg \quad (1)$$

$$\text{水平方向: } F'_1 = F'_2 \cos\theta - F_2 \sin\theta \quad (2)$$

$$\text{转动: } F_1 = F_2 \quad (3)$$

3) 现求木棍即将在墙面上滑动(左滑)的条件, 这时

$$F_1 = F_{1\max} = \mu_1 F'_1 \quad (4)$$

$$\text{而 } F_2 \leq F_{2\max} = \mu_2 F'_2 \quad (5)$$

根据(3)式, 左滑条件(4)、(5)二式可写为

$$\mu_1 F'_1 \leq \mu_2 F'_2 \quad (6)$$

我们还需要 F'_1 与 F'_2 的关系,由(2)、(3)、(4)式得

$$F'_1(1 + \mu_1 \sin\theta) = F'_2 \cos\theta \quad (7)$$

由(6)、(7)二式得

$$(1/\mu_2) \cos\theta \leq (1/\mu_1) + \sin\theta \quad (8)$$

将 $\mu_1=1, \mu_2=1/\sqrt{3}$ 代入(8)式,得

$$\sqrt{3} \cos\theta \leq 1 + \sin\theta \quad (9)$$

这就是左滑时 θ 所应满足的条件. 由此式可以看出,当 θ 小时此式无法满足,可见左滑在 θ 大于临界角 θ_0 时发生, θ_0 满足

$$\sqrt{3} \cos\theta_0 = 1 + \sin\theta_0 \quad (10)$$

(10)式即(8)式取等号的情况. 由此可知这时 F_1 与 F_2 同时处于最大摩擦力的临界状态.

当 θ 小于 θ_0 时则发生右滑,即木棍在木板上滑动而在墙面上无滑滚动. 现讨论木棍右滑的条件,那时

$$F_2 = F_{2\max} = \mu_2 F'_2 \quad (4')$$

$$F_1 \leq F_{1\max} = \mu_1 F'_1 \quad (5')$$

这时右滑条件成为

$$\mu_1 F'_1 \geq \mu_2 F'_2 \quad (6')$$

由(2)、(3)、(4')式得 F'_1 与 F'_2 的关系为

$$F'_1 = F'_2 (\cos\theta - \mu_2 \sin\theta) \quad (7')$$

由(6')、(7')式得

$$(1/\mu_2) \cos\theta \geq (1/\mu_1) + \sin\theta \quad (8')$$

此式正好与(8)式相反,即右滑在 θ 小于(10)式的 θ_0 时发生.

结论: 当 $\theta < \theta_0$ 时右滑,即在木板上滑动.

当 $\theta > \theta_0$ 时左滑,即在墙面上滑动.

4) 求临界角 θ_0 , 即解(10)式. 将(10)式两边平方并消去 $\cos\theta_0$ 得

$$2\sin^2\theta_0 + \sin\theta_0 - 1 = 0 \quad (11)$$

其解为

$$\sin\theta_0 = \begin{cases} 1/2, \theta_0 = 30^\circ \\ -1, \theta_0 = -90^\circ \end{cases} \quad (12)$$

$\theta_0 = 30^\circ$ 满足(10)式,是所求的解; 而另一解 $\theta_0 = -90^\circ$ 不满足(10)式,是增根,应舍去.

结果: 当 $\theta = 15^\circ \sim 30^\circ$ 时右滑(在木板上滑动)

当 $\theta = 30^\circ \sim 60^\circ$ 时左滑(在墙面上滑动)

5) 计算箭头转角. 设张角在 15° 、 30° 和 60° 时木棍中心的高度(从转轴算起)分别为 h_1 、 h_2 和 h_3 , 由于

$$r/h = \tan(\theta/2)$$

于是由图 3-53 可知

$$AO = A'O = h_1 = r \cot(15^\circ/2) = 7.57r$$

$$BO = B'O = h_2 = r \cot(30^\circ/2) = 3.73r$$

$$CO = C'O = h_3 = r \cot(60^\circ/2) = 1.73r$$

当木棍由 A 下落至 B 时, 顺时针转 φ_1 角,

$$\varphi_1 = (h_1 - h_2)/r = 3.84 \text{rad} = 220^\circ$$

由 B 下落至 C 时, 木棍在木板上逆时针转 φ_2 角,

$$\varphi_2 = (h_2 - h_3)r = 2.00 \text{rad} = 115^\circ$$

而在这一过程中, 木板本身顺时针转了 30° , 因此箭头的最后指向为

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 + 30^\circ = 135^\circ$$

答: 箭头最后指向为由正上方顺时针转至 135° 处.

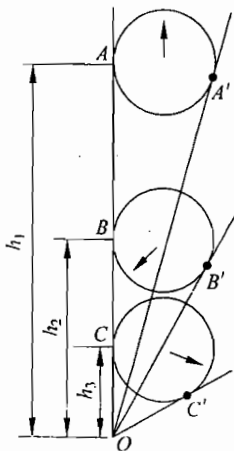


图 3-53

此题有较大的难度, 并非难在平衡时的受力分析, 而是难在缓慢下落时, 木棍究竟怎样运动, 是滑还是滚? 哪边滑? 哪边滚? 对一边来说是否总在滚? 学生要有较强的独立分析问题的能力和周密的思考, 才能从头到尾分析清楚整个过程.

当木棍处在图 3-51 所示的状态时, 木棍所受的摩擦力是不确定的. 因为作用于木棍的两个摩擦力可能都为 0; 可能不为 0, 方向向上; 亦可能不为 0, 但方向都向下. 这就是所谓“静不定”问题. 如果木棍是在向下运动的过程中停在图示的位置, 则摩擦力方向向上; 如果木棍是在向上运动的过程中停在图示的位置, 则摩擦力方向向下; 若是非常小心地、轻轻地把木棍放在图示的位置, 则摩擦力为 0. 但在本题中, 当作用于木板的力 F 减小时, 即使木棍尚未运动, 也具有向下运动的趋势, 故作用于木棍的摩擦力的方向都向上, 属于静摩擦力.

摩擦力的方向确定后, 写出木棍的平衡方程并不困难. 但木棍的平衡方程与木棍上的箭头改变方向有何联系, 则取决于学生对摩擦定律的正确理解和灵活应用. 因为木棍与墙面、木棍与木板间的静摩擦因数不同, 在 F 减小的过程中, 正压力亦在改变, 即最大静摩擦力亦在改变. 哪一接触处的静摩擦力达到最大静摩擦力, 该处便开始滑动. 若另一接触处尚不能滑动, 该处便出现滚动, 于是箭头的方向就改变.

在解题时, 对题的分析和思考虽然是定性的, 或是定性和半定量的, 但这种分析有助于形成处理该问题的粗框架. 粗框架很可能是不完整的, 不严密的, 但它对具体的解题过程具有指导作用, 能减少解题过程中的盲目性. 通过分析形成解决问题的粗框架, 是一种重要的分析问题解决问题的能力. 许多新思想或创见往往都萌芽于形成解决问题粗框架的过程中.

29. 有一半径为 R 的圆柱体水平地横架在空中. 有质量为 m_1 与 m_2 ($m_1 = 2m_2$) 的两个小木块, 用长为 $\frac{\pi}{2}R$ 的细线相连, 成为一个系统. 木块的大小可以忽略, 它与圆柱表面的静摩擦因数 $\mu < 1$. 细线无质量、柔软且不可伸长, 系统横跨在圆柱上, m_1 在右边, 细线贴在圆柱面上, 与圆柱表面无摩擦, 横截面如图 3-54 所示, 图中 θ_1 、 θ_2 分别表示两木块所在处的圆柱半径与竖直方向的夹角.

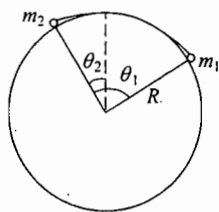


图 3-54

现在使圆柱绕轴线沿顺时针方向极缓慢地旋转, 直至某一位置时, 柱上系统将要开始滑落. 由此位置开始, 再极缓慢地沿逆时针方向转动圆柱体. 问转过多大角度后, 系统开始从左边滑落? (角度可用反三角函数表示.)

解析

解法 I 先求系统将向右滑落时的位置. 由于 $m_1 > m_2$, $\mu < 1$, 故 $m_1 g > \mu m_2 g$. 即系统在图 3-55 所示的位置时不可能平衡. 平衡且刚开始向右边下滑时的 θ_1 必然在 $0 < \theta_1 < 90^\circ$.

设图 3-56 的位置物体刚开始向右下滑, 此时系统所满足的平衡条件为

$$m_1 g \sin \theta_1 = m_2 g \sin \theta_2 + \mu(m_1 g \cos \theta_1 + m_2 g \cos \theta_2) \quad (1)$$

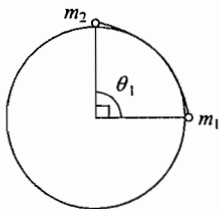


图 3-55

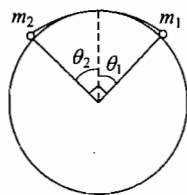


图 3-56

利用 $m_1 = 2m_2$ 和 $\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$, (1) 式可简化为

$$\tan \theta_1 = \frac{2\mu + 1}{2 - \mu}$$

即

$$\theta_{1右} = \arctan \frac{2\mu + 1}{2 - \mu} \quad (2)$$

再讨论系统向左滑的情况. 由于 $m_2 < m_1$, 有可能在 m_2 处于悬垂状态时, 系统开始下滑, 因此要分别讨论各种可能性.

1) 设系统在图 3-57 所示的位置刚开始下滑, 此时有

$$m_2 g = \mu m_1 g$$

即 $\mu = \frac{1}{2}$ 时, $\theta_2 = 90^\circ$ 即开始向左下滑.

2) 若 $m_2 g > \mu m_1 g$, 即 $\mu < \frac{1}{2}$, 则系统必然在 $\theta_2 < 90^\circ$ 时开始向左下滑, 如图 3-58 所示. 此图与图 3-56 类同, 故只要将(1)式的下标 1 与 2 对调, 即可得到这一情况下的解答.

$$\theta_{2左} = \arctan \frac{\mu m_2 + m_1}{m_2 - \mu m_1} = \arctan \frac{\mu + 2}{1 - 2\mu}$$

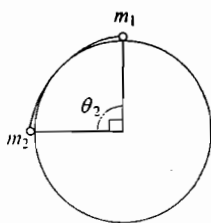


图 3-57

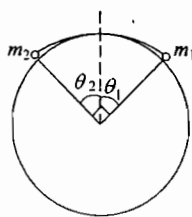


图 3-58

3) 若 $m_2 g < \mu m_1 g$, 即 $\mu > \frac{1}{2}$, 系统在图 3-57 的位置仍不会下滑. 系统刚开始下滑的位置必然是 m_1 也在左侧, 如图 3-59 所示. 由

$$m_1 g \sin \theta - \mu m_1 g \cos \theta + m_2 g = 0$$

得

$$\sin \theta - \mu \cos \theta = -\frac{1}{2}$$

或

$$\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} \sin \theta - \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \cos \theta = \frac{-1}{2\sqrt{1+\mu^2}}$$

令 $\mu = \tan \varphi$, 如图 3-60 所示, 则有

$$\cos \varphi \sin \theta - \sin \varphi \cos \theta = -\frac{1}{2\sqrt{1+\mu^2}}$$

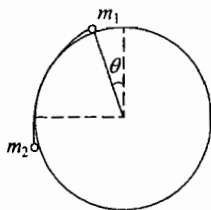


图 3-59

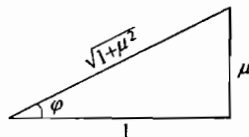


图 3-60

因而

$$\sin(\theta - \varphi) = -\frac{1}{2\sqrt{1+\mu^2}}$$

得到

$$\theta = \arctan\mu - \arcsin\frac{1}{2\sqrt{1+\mu^2}}$$

用 $\Delta\theta$ 表示圆柱体转过的角度, 则最后答案为:

$$\mu = \frac{1}{2} \text{ 时, } \Delta\theta = \arctan\frac{4}{3}.$$

$$\mu < \frac{1}{2} \text{ 时, } \Delta\theta = \arctan\frac{2\mu+1}{2-\mu} + \arctan\frac{\mu+2}{1-2\mu} - 90^\circ.$$

$$\mu > \frac{1}{2} \text{ 时, } \Delta\theta = \arctan\frac{2\mu+1}{2-\mu} + \arctan\mu - \arcsin\frac{1}{2\sqrt{1+\mu^2}}.$$

解法 II

1) 先求系统将要向右滑落时的位置.

如图 3-61 所示, 系统不向下滑的条件为

$$m_1 g \sin\theta_1 - m_2 g \sin\theta_2 \leq \mu m_1 g \cos\theta_1 + \mu m_2 g \cos\theta_2 \quad (3)$$

由于 $\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$, $\sin\theta_2 = \cos\theta_1$, $\cos\theta_2 = \sin\theta_1$, (3) 式成为

$$m_1 \sin\theta_1 - \mu m_2 \sin\theta_1 \leq \mu m_1 \cos\theta_1 + m_2 \cos\theta_1 \quad (4)$$

由 $m_1 > m_2$, $\mu < 1$ 可知, $m_1 - \mu m_2 > 0$. 则由 (4) 式可得

$$\tan\theta_1 \leq \frac{\mu + \frac{m_2}{m_1}}{1 - \mu \frac{m_2}{m_1}}$$

因此, 系统将要向右滑落的位置 $\theta_{1右}$ 为

$$\tan\theta_{1右} = \frac{\mu + \frac{m_2}{m_1}}{1 - \mu \frac{m_2}{m_1}} = \frac{\mu + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}\mu} = \frac{2\mu + 1}{2 - \mu} \quad (5)$$

由于 $\mu < 1$, 所以 $\theta_{1右} < 90^\circ$.

2) 系统向左滑落的情况.

要得到系统不向左下滑的条件, 只需将 (4) 式中所有的下标 1 与 2 互换即可, 得到

$$m_2 \sin\theta_2 - \mu m_1 \sin\theta_2 \leq \mu m_2 \cos\theta_2 + m_1 \cos\theta_2 \quad (6)$$

现在

$$m_2 - \mu m_1 = m_2 \left(1 - \mu \frac{m_1}{m_2}\right) = m_2 (1 - 2\mu) \quad (7)$$

按 μ 的大小可有三种情况:

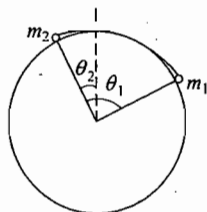


图 3-61

情况 1: $\mu < \frac{m_2}{m_1}$, 即 $\mu < \frac{1}{2}$. 这时 $m_2 - \mu m_1 > 0$, (6) 式可写成

$$\tan\theta_2 \leq \frac{\mu + \frac{m_1}{m_2}}{1 - \mu \frac{m_1}{m_2}} \quad \text{或} \quad \tan\theta_2 \leq \frac{\mu + 2}{1 - 2\mu} \quad (8)$$

由(8)式可知, 在 $\mu < \frac{1}{2}$ 时, $0 < \theta_2 < 90^\circ$, 如图 3-62 所示. 系统刚向左滑落时的位置 $\theta_{2\pi}$ 为

$$\tan\theta_{2\pi} = \frac{\mu + 2}{1 - 2\mu} \quad (9)$$

情况 2: $\mu = \frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{2}$. 这时 $m_2 - \mu m_1 = 0$, (6) 式成为

$$\mu m_2 \cos\theta_2 + m_1 \cos\theta_2 \geq 0 \quad (10)$$

由于 $\mu m_2 + m_1 = m_2 \left(\mu + \frac{m_1}{m_2} \right) = m_2 \left(\frac{1}{2} + 2 \right) > 0$, 可得 $\cos\theta_2 \geq 0$, 即 θ_2 由 0° 到 90° , 均满足系统不向左滑落的条件. 系统将要向左滑落的位置为 $\theta_2 = 90^\circ$.

情况 3: $\mu > \frac{m_2}{m_1}$, 即 $\mu > \frac{1}{2}$, 这时 $m_2 - \mu m_1 < 0$, (6) 式成为

$$\tan\theta_2 \leq \frac{\mu + \frac{m_1}{m_2}}{1 - \mu \frac{m_1}{m_2}} \quad (11)$$

上式右方为一负数, 说明 θ_2 取 0° 到 90° 之间的任意值, 系统均不会向左滑落. 在这种情况下, 必须进一步转动圆柱体, 使 m_1 移到左方, m_2 离开圆柱而自由悬垂 (如图 3-63). 这时系统不向左滑落的条件已不再是(6)式, 需要重新讨论.

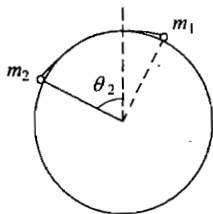


图 3-62

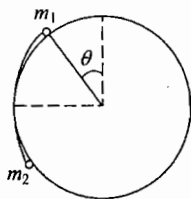


图 3-63

用 θ 表示系统的位置, 则不向左滑落的条件为

$$m_1 g \sin\theta + m_2 g \leq \mu m_1 g \cos\theta$$

即

$$\sin\theta - \mu \cos\theta \leq -\frac{m_2}{m_1} \quad (12)$$

系统开始向左下滑的位置 $\theta_{\text{左}}$ 应满足

$$\sin\theta_{\text{左}} - \mu\cos\theta_{\text{左}} = -\frac{m_2}{m_1} \quad (13)$$

解此方程求 $\theta_{\text{左}}$, 为此将(13)式改写为

$$\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}\sin\theta_{\text{左}} - \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\cos\theta_{\text{左}} = -\frac{m_2}{m_1\sqrt{1+\mu^2}}$$

取 $\mu = \tan\varphi$, 则

$$\cos\varphi\sin\theta_{\text{左}} - \sin\varphi\cos\theta_{\text{左}} = -\frac{m_2}{m_1\sqrt{1+\mu^2}}$$

因而

$$\sin(\theta - \varphi) = -\frac{m_2}{m_1\sqrt{1+\mu^2}} = -\frac{1}{2\sqrt{1+\mu^2}}$$

得到

$$\theta = \arctan\mu - \arcsin\frac{1}{2\sqrt{1+\mu^2}} \quad (14)$$

由于 $\sqrt{1+\mu^2} > 1$, (14)式肯定有解.

3) 答案: 设系统向左滑落前圆柱所转的角度为 $\Delta\theta$, 显然, $\Delta\theta$ 与 μ 有关. 最后答案与解法 I 的结果完全相同.

本题给出两种解法, 一种具体一些, 一种比较概括一些. 这是一个带有摩擦力的系统的平衡在什么情况下开始破坏的问题, 考查学生在较复杂情况下应用摩擦定律解决问题的能力.

本题要求学生能全面地分析问题. 不但从数学上去分析各种可能的情形, 还应找出每种情形所对应的实际情况. 通过对问题的分析, 把问题变成数学方程, 通过求解方程, 求出结果, 再从结果中看出物理意义, 回到具体的物理图像, 是学习和研究物理问题中不可缺少的能力. 在平时学习和解习题的过程中, 都要认真地学着从这方面去不断提高自己的能力.

30. 如图 3-64 所示, 有两根不可伸长的柔软的轻绳, 长度分别为 l_1 和 l_2 , 它们的下端在 C 点相联结并悬挂一质量为 m 的重物, 上端分别与质量可忽略的小圆环 A、B 相连, 圆环套在圆形水平横杆上. A、B 可在横杆上滑动, 它们与横杆间的静摩擦因数分别为 μ_1 和 μ_2 . 已知 l_1 和 l_2 的数值, 且 $l_1 < l_2$. 试求 μ_1 和 μ_2 在各种取值情况下, 此系统处于静力平衡时两环之间的距离 \overline{AB} .

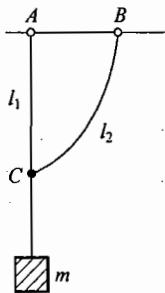


图 3-64

解析

解法 I 由于 l_1 和 l_2 为已知量, 只要求出 \overline{AB} 的值, $\triangle ABC$ 即确定 (即 A、B、C 的相对位置确定). 现对系统平衡时 AB 应取的数值分析如下:

1) 已知 $l_1 < l_2$, 则当 A、C 和重物在同一竖直线上时, 系统平衡, AC 张紧, 长为 l_2 的绳则松弛 (如图 3-65 所示). 将 B 沿杆右移直至 BC 绳拉直 (如图 3-66 所示), 系统一直保持平衡, 这与 μ_1, μ_2 的取值无关. 若使 B 继续右移一极小的距离 Δx , 则绳 BC 中将出现张力, C 点右移, AC 将倾斜, 其中张力也将改变. 如果 $\mu_1 = 0$, A 环将在 AC 绳张力作用下滑动, 所以系统将失去平衡. 若 $\mu_1 \neq 0$, 设此时 BC 中张力为 F_T , 则 B 环与杆间正压力 $F_{N2} = F_T \cos \varphi_2$, B 环所受向左的力 $F_2 = F_T \sin \varphi_2$. 如果 $F_2 > \mu_2 F_{N2}$, 则 B 环向左滑回原处, 系统失去平衡. 由此可见, 当 $\mu_1 = 0$ 或 $\mu_2 \leq \frac{F_2}{F_{N2}} = \tan \varphi_2 = \frac{\sqrt{l_2^2 - l_1^2}}{l_1} = \sqrt{\frac{l_2^2}{l_1^2} - 1}$ 时, 系统的平衡位置只能是: A、C 在竖直线上, $0 \leq \overline{AB} \leq \sqrt{l_2^2 - l_1^2}$ (结论一).

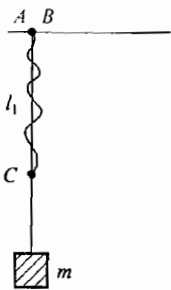


图 3-65

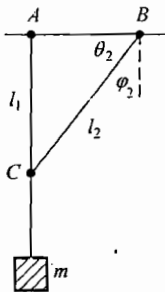


图 3-66

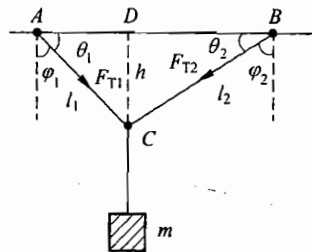


图 3-67

2) 当 $\mu_1 \neq 0, \mu_2 > \sqrt{\frac{l_2^2}{l_1^2} - 1}$ 且 $\overline{AB} > \sqrt{l_2^2 - l_1^2}$ 时, 系统将如图 3-67 所示, A 环受力: $F_{N1} = F_{T1} \cos \varphi_1$; $F_1 = F_{T1} \sin \varphi_1$, 当 $F_1 > \mu_1 F_{N1}$, 即 $\tan \varphi_1 > \mu_1$ 时 A 环将不能保持静止. 同理, $\tan \varphi_2 > \mu_2$ 时, B 环将不能保持静止. A、B 两环哪个先动, 将由 μ_1, μ_2 的数值决定. 图 3-67 中的 φ_1 与 φ_2 是互相关联的量. 由正弦定律有 $\frac{l_1}{l_2} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1}$, 当 \overline{AB} 值增大时, θ_1 和 θ_2 均减小, φ_2 和 φ_1 随之增大. 设 C 点与 \overline{AB} 的距离为 h , 由几何关系可得 $\tan \varphi_1 = \sqrt{\frac{l_1^2}{h^2} - 1}$, $\tan \varphi_2 = \sqrt{\frac{l_2^2}{h^2} - 1}$.

设 A 滑动时, $h = h_A$, 则 $\frac{l_1^2}{h_A^2} - 1 = \mu_1^2$, $h_A^2 = \frac{l_1^2}{1 + \mu_1^2}$.

设 B 滑动时, $h = h_B$, 则 $\frac{l_2^2}{h_B^2} - 1 = \mu_2^2$, $h_B^2 = \frac{l_2^2}{1 + \mu_2^2}$.

比较 h_A 和 h_B 的大小即可知 AB 增大(即 h 减小)时 A、B 两环谁先滑动.

(i) 若 $h_A > h_B$, 则 A 先滑动, 即 $\frac{1 + \mu_2^2}{1 + \mu_1^2} > \frac{l_2^2}{l_1^2}$ 的条件下, 当 $h = h_A$ 时, A 即将滑动, 此时

$$\theta_{1A} = \arcsin \frac{h_A}{l_1} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_1^2}}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{l_1^2 - h_A^2} = \frac{\mu_1 l_1}{\sqrt{1 + \mu_1^2}}$$

$$\theta_{2A} = \arcsin \frac{h_A}{l_2} = \arcsin \frac{l_1}{l_2} \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_1^2}}$$

$$\overline{BD} = \sqrt{l_2^2 - h_A^2} = \frac{\sqrt{l_2^2 + \mu_1 l_2^2 - l_1^2}}{\sqrt{1 + \mu_1^2}}$$

$$\overline{AB} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_1^2}} (\mu_1 l_1 + \sqrt{l_2^2 + \mu_1^2 l_2^2 - l_1^2})$$

由此可得结论二:

在 $\mu_1 \neq 0$, $\frac{1 + \mu_2^2}{1 + \mu_1^2} > \frac{l_2^2}{l_1^2}$ 的情况下, 若系统保持平衡, \overline{AB} 的数值一定满足下面的要求

$$\overline{AB} \leq \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_1^2}} (\mu_1 l_1 + \sqrt{l_2^2 + \mu_1^2 l_2^2 - l_1^2})$$

(注意, 此时 $\mu_2 > \sqrt{\frac{l_2^2}{l_1^2} - 1}$ 的条件自然得到满足)

(ii) 若 $h_A < h_B$, 则 B 先滑动, 即 $\frac{1 + \mu_2^2}{1 + \mu_1^2} < \frac{l_2^2}{l_1^2}$ 的条件下, 当 $h = h_B$ 时, B 即将滑动, 此时

$$\theta_{1B} = \arcsin \frac{h_B}{l_1} = \arcsin \frac{l_2}{l_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_2^2}}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{l_1^2 - h_B^2} = \frac{\sqrt{l_1^2 + \mu_2 l_1^2 - l_2^2}}{\sqrt{1 + \mu_2^2}}$$

$$\theta_{2B} = \arcsin \frac{h_B}{l_2} = \arcsin \frac{l}{\sqrt{1 + \mu_2^2}}$$

$$\overline{BD} = \sqrt{l_2^2 - h_B^2} = \frac{\mu_2 l_2}{\sqrt{1 + \mu_2^2}}$$

$$\overline{AB} = \frac{1}{\sqrt{1+\mu_2^2}}(\mu_2 l_2 + \sqrt{l_1^2 + \mu_2^2 l_1^2 - l_2^2}) = d_B$$

由此可得结论三:

当 μ_1, μ_2 满足下列二条件时, 在 $\mu_1 \neq 0, 1 + \mu_2^2 > \frac{l_2^2}{l_1^2}$ 且 $\frac{1 + \mu_2^2}{1 + \mu_1^2} < \frac{l_2^2}{l_1^2}$ 的情况下, 若系统保持平衡, \overline{AB} 的数值一定满足下面的要求

$$\overline{AB} \leq \frac{1}{\sqrt{1+\mu_2^2}}(\mu_2 l_2 + \sqrt{l_1^2 + \mu_2^2 l_1^2 - l_2^2})$$

若 $\frac{1 + \mu_2^2}{1 + \mu_1^2} = \frac{l_2^2}{l_1^2}$, 则 $h_A = h_B$, A, B 将同时开始要滑动, 此时 \overline{AB} 的数值为

$$\overline{AB} = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\sqrt{1 + \mu_1^2}} l_1 = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\sqrt{1 + \mu_2^2}} l_2$$

\overline{AB} 的数值满足的条件为

$$\overline{AB} \leq \frac{\mu_1 + \mu_2}{\sqrt{1 + \mu_1^2}} l_1$$

此结果已包括在结论二和结论三中符号“ \leq ”的等号中。

解法 II

1) 平衡条件

小环平衡条件

$$F \leq \mu F_N$$

$$\mu \geq \frac{F}{F_N} = \frac{F_T \cos \theta}{F_T \sin \theta} = \cot \theta = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

定义 $\mu = \tan \varphi$, φ 为摩擦角

则平衡条件成为

$$\theta \geq \frac{\pi}{2} - \varphi \quad (1)$$

2) 情况 1: 一绳松弛的情况

设 $l_1 < l_2$, 这时 l_1 垂直向下, $0 \leq \overline{AB} < \sqrt{l_2^2 - l_1^2}$, $\theta_1 = 90^\circ$, 不论 μ_1, μ_2 为何值, 一定平衡。

3) 情况 2: 二绳均张紧的情况(参看图 3-68), 当 $\sqrt{l_2^2 - l_1^2} \leq \overline{AB} < l_1 + l_2$ 时有

$$\left. \begin{aligned} l_1^2 &= \overline{AB}^2 + l_2^2 - 2 \overline{AB} l_2 \cos \theta_2 \\ l_2^2 &= \overline{AB}^2 + l_1^2 - 2 \overline{AB} l_1 \cos \theta_1 \\ \cos \theta_1 &= \frac{1}{2 \overline{AB} l_1} (\overline{AB}^2 + l_1^2 - l_2^2) \\ \cos \theta_2 &= \frac{1}{2 \overline{AB} l_2} (\overline{AB}^2 + l_2^2 - l_1^2) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

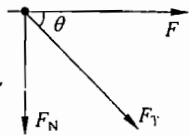


图 3-68

根据(1)式,系统平衡条件为

$$\begin{aligned} \theta_1 &\geq \frac{\pi}{2} - \varphi_1, \quad \theta_2 \geq \frac{\pi}{2} - \varphi_2 \\ \text{即} \quad \left. \begin{aligned} \cos\theta_1 &\leq \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right) = \frac{\mu_1}{\sqrt{\mu_1^2 + 1}} \\ \cos\theta_2 &\leq \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_2\right) = \frac{\mu_2}{\sqrt{\mu_2^2 + 1}} \end{aligned} \right\} \quad (3) \end{aligned}$$

$$\left[\text{注: } \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \sqrt{1 - \frac{1}{\tan^2\varphi + 1}} = \sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2 + 1}} = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + 1}} \right]$$

平衡条件成为

$$\left. \begin{aligned} \cos\theta_1 &\leq \frac{\mu_1}{\sqrt{\mu_1^2 + 1}} \\ \cos\theta_2 &\leq \frac{\mu_2}{\sqrt{\mu_2^2 + 1}} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

此二条件必须同时成立,(4)式为

$$\frac{\mu_1}{\sqrt{\mu_1^2 + 1}} \geq \cos\theta_1 = \frac{1}{2 \overline{AB} l_1} (\overline{AB}^2 + l_1^2 - l_2^2) \quad (5)$$

$$\frac{\mu_2}{\sqrt{\mu_2^2 + 1}} \geq \cos\theta_2 = \frac{1}{2 \overline{AB} l_2} (\overline{AB}^2 + l_2^2 - l_1^2) \quad (6)$$

4) 求 \overline{AB}

现求同时满足(5)、(6)二式的 \overline{AB} 之取值范围.由(5)式

$$2 \overline{AB} l_1 \frac{\mu_1}{\sqrt{\mu_1^2 + 1}} \geq \overline{AB}^2 + l_1^2 - l_2^2$$

得 \overline{AB} 的方程为

$$\overline{AB}^2 - 2 \overline{AB} \frac{\mu_1 l_1}{\sqrt{\mu_1^2 + 1}} + l_1^2 - l_2^2 \leq 0 \quad (7)$$

先讨论等号

$$\overline{AB}^2 - 2 \overline{AB} \frac{\mu_1 l_1}{\sqrt{\mu_1^2 + 1}} + l_1^2 - l_2^2 = 0 \quad (8)$$

(8)式的有解条件为

$$b^2 - 4ac = 4 \frac{l_1^2 \mu_1^2}{\mu_1^2 + 1} - 4l_1^2 + 4l_2^2 \geq 0$$

即

$$\frac{l_1^2 \mu_1^2}{\mu_1^2 + 1} - l_1^2 + l_2^2 \geq 0$$

$$l_2^2(1 + \mu_1^2) - l_1^2 \geq 0$$

$$\mu_1^2 + 1 \geq \frac{l_1^2}{l_2^2}$$

$$\mu_1^2 \geq \frac{l_1^2 - l_2^2}{l_2^2}$$

得

上式右边小于零,故 μ_1 取任何值(8)式均有解, μ_1 可取任何值.

(8)式的两个解为

$$\overline{AB} = \frac{l_1 \mu_1}{\sqrt{\mu_1^2 + 1}} \pm \sqrt{l_2^2 - \frac{l_1^2}{\mu_1^2 + 1}}$$

因此,不等式(7)的解为

$$\frac{l_1 \mu_1}{\sqrt{\mu_1^2 + 1}} - \sqrt{l_2^2 - \frac{l_1^2}{\mu_1^2 + 1}} \leq \overline{AB} \leq \frac{l_1 \mu_1}{\sqrt{\mu_1^2 + 1}} + \sqrt{l_2^2 - \frac{l_1^2}{\mu_1^2 + 1}} \quad (9)$$

同样,(6)式成为

$$\overline{AB}^2 - 2 \overline{AB} \frac{\mu_2 l_2}{\sqrt{\mu_2^2 + 1}} + l_2^2 - l_1^2 \leq 0 \quad (10)$$

先讨论等号

$$\overline{AB}^2 - 2 \overline{AB} \frac{\mu_2 l_2}{\sqrt{\mu_2^2 + 1}} + l_2^2 - l_1^2 = 0 \quad (11)$$

$$(11) \text{ 式的 } b^2 - 4ac = 4 \frac{l_2^2 \mu_2^2}{\mu_2^2 + 1} - 4l_2^2 + 4l_1^2 = 4 \left(l_1^2 - \frac{l_2^2}{\mu_2^2 + 1} \right)$$

$$(11) \text{ 式的有解条件为 } b^2 - 4ac \geq 0, l_1^2 \geq \frac{l_2^2}{\mu_2^2 + 1}$$

即

$$\mu_2^2 \geq \frac{l_2^2}{l_1^2} - 1 = \frac{l_2^2 - l_1^2}{l_1^2} \quad (12)$$

在此条件下,不等式(10)的解为

$$\frac{l_2 \mu_2}{\sqrt{\mu_2^2 + 1}} - \sqrt{l_1^2 - \frac{l_2^2}{\mu_2^2 + 1}} \leq \overline{AB} \leq \frac{l_2 \mu_2}{\sqrt{\mu_2^2 + 1}} + \sqrt{l_1^2 - \frac{l_2^2}{\mu_2^2 + 1}} \quad (13)$$

5) 结论:为使此题有解,必须

$$\left. \begin{array}{l} \mu_1 \text{ 无限制} \\ \mu_2 \geq \frac{l_2^2}{l_1^2} - 1 \end{array} \right\} \quad (14)$$

其解为 \overline{AB} 同时满足(9)、(13)二式

$$\left. \begin{aligned} \frac{l_1 \mu_1}{\sqrt{\mu_1^2 + 1}} - \sqrt{l_2^2 - \frac{l_1^2}{\mu_1^2 + 1}} &\leq \overline{AB} \leq \frac{l_1 \mu_1}{\sqrt{\mu_1^2 + 1}} + \sqrt{l_2^2 - \frac{l_1^2}{\mu_1^2 + 1}} \\ \frac{l_2 \mu_2}{\sqrt{\mu_2^2 + 1}} - \sqrt{l_1^2 - \frac{l_2^2}{\mu_2^2 + 1}} &\leq \overline{AB} \leq \frac{l_2 \mu_2}{\sqrt{\mu_2^2 + 1}} + \sqrt{l_1^2 - \frac{l_2^2}{\mu_2^2 + 1}} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

上二式左边均小于 $\sqrt{l_2^2 - l_1^2}$, 而 $\sqrt{l_2^2 - l_1^2}$ 为情况 2 中 \overline{AB} 取值的下限, 因此上二式左边的不等式自然满足, 可改写为

$$\sqrt{l_2^2 - l_1^2} \leq \overline{AB} \leq \frac{l_1 \mu_1}{\sqrt{\mu_1^2 + 1}} + \sqrt{l_2^2 - \frac{l_1^2}{\mu_1^2 + 1}} = a_1 \quad (16)$$

$$\sqrt{l_2^2 - l_1^2} \leq \overline{AB} \leq \frac{l_2 \mu_2}{\sqrt{\mu_2^2 + 1}} + \sqrt{l_1^2 - \frac{l_2^2}{\mu_2^2 + 1}} = a_2 \quad (17)$$

上二式必须同时满足, 最后结果为

$$\sqrt{l_2^2 - l_1^2} \leq \overline{AB} \leq (a_1, a_2 \text{ 中较小者}) \quad (18)$$

解法 III

1) 平衡条件

小环平衡条件

$$F \leq \mu F_N$$

从图 3-69 可知

$$\mu \geq \frac{F}{F_N} = \frac{F_T \sin \theta}{F_T \cos \theta} = \tan \theta$$

定义 $\mu = \tan \varphi$, φ 为摩擦角

则平衡条件成为

$$\theta \leq \varphi, \quad \tan \theta \leq \tan \varphi = \mu \quad (19)$$

2) 情况 1: 一绳松弛的情况

因为 $l_1 < l_2$, 这时 l_1 垂直向下, $\overline{AB}^2 < l_2^2 - l_1^2$, $\theta_1 = 0^\circ$, 不论 μ_1, μ_2 为何值, 一定平衡.

3) 情况 2: 二绳均张紧的情况(参见图 3-70)

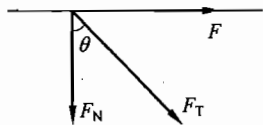


图 3-69

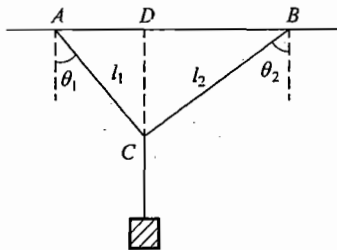


图 3-70

A 环不滑动的条件为

$$\theta_1 \leq \varphi_1$$

即

$$\tan\theta_1 \leq \tan\varphi_1 = \mu_1 \quad (20)$$

于是有

$$\cos\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{\tan^2\theta_1 + 1}} \geq \cos\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu_1^2 + 1}} \quad (21)$$

$$\sin\theta_1 = \frac{\tan\theta_1}{\sqrt{\tan^2\theta_1 + 1}} \leq \sin\varphi_1 = \frac{\mu_1}{\sqrt{\mu_1^2 + 1}} \quad (22)$$

又由图 3-70 知

$$\overline{CD} = l_1 \cos\theta_1 = l_2 \cos\theta_2$$

$$\sin\theta_2 = \sqrt{1 - \cos^2\theta_2} = \sqrt{1 - \frac{l_1^2}{l_2^2} \cos^2\theta_1}$$

所以,若要 A 端不滑动, \overline{AB} 必须满足

$$\overline{AB} = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2 \leq \frac{l_1 \mu_1}{\sqrt{\mu_1^2 + 1}} + \sqrt{l_2^2 - \frac{l_1^2}{\mu_1^2 + 1}} \quad (23)$$

根据对称性,只要将上式中的 1,2 对调,即可得出 B 端不滑动时 \overline{AB} 必须满足的条件为

$$\overline{AB} \leq \frac{l_2 \mu_2}{\sqrt{\mu_2^2 + 1}} + \sqrt{l_1^2 - \frac{l_2^2}{\mu_2^2 + 1}} \quad (24)$$

如果系统平衡,(23)、(24)二式必须同时满足.

从(23)式可以看出, μ_1 可能取任意正值和零,当 $\mu_1 = 0$ 时, \overline{AB} 只能取其最小值 $\sqrt{l_2^2 - l_1^2}$, 此时 $\theta_1 = 0$, l_2 拉直但无张力. 从(24)式可以看出, μ_2 的取值应满足

$$\mu_2^2 \geq \frac{l_2^2}{l_1^2} - 1$$

否则 \overline{AB} 无解, 当 $\mu_2^2 = \frac{l_2^2}{l_1^2} - 1$ 时, \overline{AB} 取其最小值 $\sqrt{l_2^2 - l_1^2}$.

答: 系统平衡时, \overline{AB} 的取值范围为

情况 1: l_2 松弛 $0 \leq \overline{AB} < \sqrt{l_2^2 - l_1^2}$, μ_1, μ_2 任意.

情况 2: l_2 张紧 $\sqrt{l_2^2 - l_1^2} \leq \overline{AB} \leq [(23)、(24) \text{ 二公式右方较小的}]$, μ_1 任意, $\mu_2 \geq \sqrt{\frac{l_2^2}{l_1^2} - 1}$.

本题的情景许多学生并不陌生,例如,若给定 μ_1 、 μ_2 的值,求 \overline{AB} 之间的最大距离. 这样的题,许多学生可能曾做过. 但在做这样的题时,仅限于就题给定的条件找出答案,没有去思考或研究一下若 μ_1 、 μ_2 不是题中给定的值,可能会出现什么新的情况. 所以即使见过本题的情景,也不一定会完整地求得本题的答案. 有的学生对“试求 μ_1 和 μ_2 在各种取值情况下,此系统处于静力平衡时两环之间的距离 \overline{AB} ”的含义不甚理解. 对 μ_1 和 μ_2 有哪些取值心中无数,不知如何下手. 其实, μ_1 和 μ_2 有哪些取值,是在解题过程中逐步明白、逐步发现和逐步提出来的. 对于那些在解题时,没有把解题过程当作一种探讨、一种研究,仅是满足于求出答案的学生,遇到本题的设问方式,就会感到无从下手.

31. 近来一种新型的定点起重设备“平衡吊”被广泛应用于几十到几百千克工件的频繁吊运,其结构示意图如图 3-71 所示. 平衡吊主要由传动、杆系、回转座和立柱组成. 杆系是由 ABD 、 DEF 、 BC 、 CE 四杆铰接组成的四连杆机构, $DECB$ 在任何情况下都是一个平行四边形. 杆系的 A 处是一水平的转轴,通过电机可控制转轴,使之固定在竖直槽内的不同位置,从而调节挂在铰接于 F 处吊钩上的重物的高度. 杆 ABD 可绕转轴 A 在竖直平面内无摩擦地转动. 杆系的 C 点是能在光滑的水平槽上滑动的铰链,杆 BC 和 EC 都可绕 C 点在竖直平面内转动. 绕铰链转动的摩擦均忽略不计. 下面用 l_1 表示 AD 的长度, l_2 表示 AB 的长度, l_3 表示 DF 的长度, l_4 表示 BC 的长度.

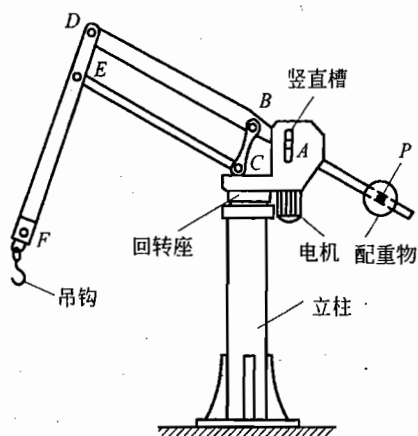


图 3-71

1) 若将各杆都视为轻质(无自重)刚体,且无图中的配重物时,试论证 l_1 、 l_2 、 l_3 、 l_4 应满足什么关系才能使平衡吊的吊钩(包括所吊的重物)位于同一水平面上的不同位置时平衡吊都能处于平衡状态.

2) 若考虑各杆的自重, 为使平衡吊的吊钩(包括所吊的重物)位于同一水平面上不同位置时平衡吊都能处于平衡状态, 必须在杆 ABD 的另一端 P 处加上配重物, P 点距 A 轴的距离为 l_p . 设配重物受到的重力大小为 G_p , 杆的 AD 段、 DF 段、 BC 段、 CE 段受到的重力的大小分别为 G_1 、 G_3 、 G_4 和 G_5 , 不计杆的 AP 段所受的重力. 问当杆长 l_1 、 l_2 、 l_3 、 l_4 和 l_p 已知, 且取 $l_1 = l_3$ 、 $l_2 = l_4$ 时配重的大小 G_p 为多少?

解析

解法 I

1) 吊钩(包括所吊重物)的重力 G (作用于吊钩 F 处)与 C 点的反力 F_C 都沿竖直方向. 设杆 AD 和 DF 与竖直方向的夹角分别为 α 与 β (图 3-72), 则整个杆系对 A 点的力矩平衡方程为

$$G(l_1 \sin \alpha + l_3 \sin \beta) = F_C(l_2 \sin \alpha + l_4 \sin \beta) \quad (1)$$

由题意, 上式对任意的 α 和 β 都成立, 故有

$$Gl_1 = F_C l_2 \quad (2)$$

$$Gl_3 = F_C l_4 \quad (3)$$

于是 l_1 必满足

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{l_3}{l_4} \quad (4)$$

2) 设杆 AD 、 DF 、 BC 、 CE 自重分别为 G_1 、 G_3 、 G_4 、 G_5 (图 3-73) 时, 若配重大小为 G_p , 整个杆系仍保持随遇平衡, 则整个杆系相对 A 点的力矩平衡方程为

$$\begin{aligned} & G(l_1 \sin \alpha + l_3 \sin \beta) + G_1 \frac{1}{2} l_1 \sin \alpha + G_3 \left(\frac{1}{2} l_3 \sin \beta + l_1 \sin \alpha \right) + \\ & G_4 \left(\frac{1}{2} l_4 \sin \beta + l_2 \sin \alpha \right) + G_5 \left(\frac{l_1 + l_2}{2} \sin \alpha + l_4 \sin \beta \right) \\ & = F_C(l_2 \sin \alpha + l_4 \sin \beta) + G_p l_p \sin \alpha \end{aligned} \quad (5)$$

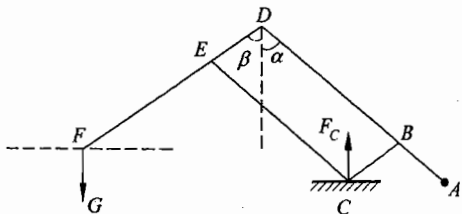


图 3-72

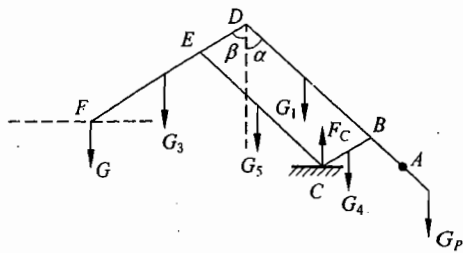


图 3-73

上式必须对任意的 α 与 β 都成立, 故有

$$Gl_1 + G_1 \frac{l_1}{2} + G_3 l_1 + G_4 l_2 + G_5 \frac{l_1 + l_2}{2} = F_C l_2 + G_P l_P \quad (6)$$

$$Gl_3 + G_3 \frac{l_3}{2} + G_4 \frac{l_4}{2} + G_5 l_4 = F_C l_4 \quad (7)$$

由(6)和(7)式中消去 F_C 得

$$\begin{aligned} & \frac{Gl_1 + G_1 \frac{l_1}{2} + G_3 l_1 + G_4 l_2 + G_5 \frac{l_1 + l_2}{2} - G_P l_P}{l_2} \\ &= \frac{Gl_3 + G_3 \frac{l_3}{2} + G_4 \frac{l_4}{2} + G_5 l_4}{l_4} \end{aligned} \quad (8)$$

利用条件 $l_1 = l_3, l_2 = l_4$, 有

$$G_1 \frac{l_1}{2} + G_3 l_1 + G_4 l_2 + G_5 \frac{l_1 + l_2}{2} - G_P l_P = G_3 \frac{l_1}{2} + G_4 \frac{l_2}{2} + G_5 l_2 \quad (9)$$

由此求得

$$G_P = \frac{1}{2l_P} [G_1 l_1 + G_3 l_1 + G_4 l_2 + G_5 (l_1 - l_2)] \quad (10)$$

解法 II

1) 设固定水平转轴 A 到吊钩所在水平面的距离为 h_1 , 到水平槽的距离为 h_2 , 杆 ABD 与水平方向的夹角为 θ , 杆 DEF 与水平方向的夹角为 φ , 如图 3-74 所示. 若以 A 点作为重力势能的零点, 则平衡吊的杆系与吊钩(包括重物)构成的系统的重力势能(以 A 点为势能零点)为

$$V = -G(l_3 \sin\varphi - l_1 \sin\theta) \quad (1)$$

其中 G 为吊钩所受重力的大小. 当吊钩 F 点在

水平直线上移动时, θ 角和 φ 都将改变, 因而势能 V 也会改变. 若 F 点移动时平衡吊都能处于平衡状态, 则系统的势能 V 应不因 θ 、 φ 的变化而变化. θ 和 φ 并不独立, 它们由下面的几何关系联系着, 即

$$l_2 \sin\theta + h_2 = l_4 \sin\varphi \quad (2)$$

由(1)、(2)两式消去 φ 得

$$V = -G \left(\frac{l_2 l_3}{l_4} - l_1 \right) \sin\theta - Gh_2 \frac{l_3}{l_4} \quad (3)$$

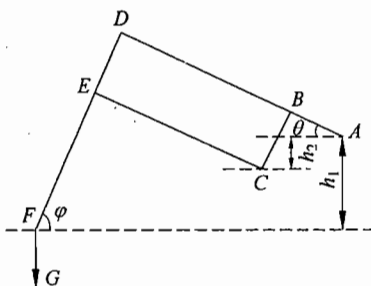


图 3-74

要求势能 V 不随 θ 变化, $\sin\theta$ 的系数应等于零. 由于 G 不等于零, 故有

$$\frac{l_2 l_3}{l_4} - l_1 = 0$$

即

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{l_3}{l_4} \quad (4)$$

这便是杆长应满足的条件.

2) 当各杆具有质量时, 若要求对任意重物 G 吊钩在任意位置 (θ, φ) 平衡吊都能处于平衡状态, 则系统的总势能 V 应不随 θ, φ 而改变. 以 A 点作为重力势能的零点, 则根据图 3-75, 各杆的势能 (包括吊钩、重物和配重) 分别为

$$V_{ABD} = \frac{1}{2} l_1 G_1 \sin\theta - l_P G_P \sin\theta$$

$$V_{CE} = - \left(h_2 - \frac{1}{2} l_5 \sin\theta \right) G_5 = \frac{1}{2} l_5 G_5 \sin\theta - G_5 h_2$$

$$\begin{aligned} V_{DEF} &= - \left(h_1 - \frac{1}{2} l_3 \sin\varphi \right) G_3 - (l_3 \sin\varphi - l_1 \sin\theta) G \\ &= \frac{1}{2} l_3 G_3 \sin\varphi - (l_3 \sin\varphi - l_1 \sin\theta) G - G_3 h_1 \end{aligned}$$

$$V_{BC} = - \left(h_2 - \frac{1}{2} l_4 \sin\varphi \right) G_4 = \frac{1}{2} l_4 G_4 \sin\varphi - G_4 h_2$$

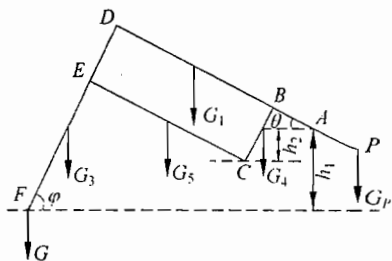


图 3-75

系统的总势能为

$$\begin{aligned} V_1 &= \left(\frac{1}{2} G_1 l_1 - G_P l_P + \frac{1}{2} G_5 l_5 + G l_1 \right) \sin\theta + \\ &\quad \left(\frac{1}{2} G_3 l_3 + \frac{1}{2} G_4 l_4 - G l_3 \right) \sin\varphi - G_5 h_2 - G_3 h_1 - G_4 h_2 \end{aligned} \quad (5)$$

因 θ 与 φ 由 (2) 式联系, 联立 (2) 式与 (5) 式, 消去 φ 得

$$\begin{aligned} V_1 &= \left[\frac{1}{2} G_1 l_1 - G_P l_P + \frac{1}{2} G_5 l_5 + \frac{1}{2} G_3 l_3 \frac{l_2}{l_4} + \frac{1}{2} G_4 l_2 + G \left(l_1 - l_3 \frac{l_2}{l_4} \right) \right] \cdot \\ &\quad \sin\theta - G l_3 \frac{h_2}{l_4} - \frac{1}{2} G_3 l_3 \frac{l_2}{l_4} - \frac{1}{2} G_4 h_2 - G_5 h_2 - G_3 h_1 - G_4 h_1 \end{aligned} \quad (6)$$

为使 V_1 与 θ 无关, 应有

$$\frac{1}{2} G_1 l_1 - G_P l_P + \frac{1}{2} G_5 l_5 + \frac{1}{2} G_3 l_3 \frac{l_2}{l_4} + G_4 l_2 + G \left(l_1 - l_3 \frac{l_2}{l_4} \right) = 0$$

由 (4) 式知

$$l_1 - l_3 \frac{l_2}{l_4} = 0$$

注意到

$$l_5 = l_1 - l_2$$

得

$$G_P = \frac{1}{2 l_P} [G_1 l_1 + G_5 (l_1 - l_2) + G_3 l_3 + G_4 l_2]$$

本题是一个简化了的实际问题,学生首先应通过对平衡吊的描绘,了解其结构与工作情况:1)当水平转轴 A 的位置固定后,吊钩到地面的距离便确定,但在吊钩到地面的距离不变的条件卜吊钩的位置仍可任意变化,其中一种变化是由整个连杆机构、竖直槽通过回转轴绕立柱轴线的转动所引起的,另一种则是绕水平轴 A 在竖直平面内的转动引起的.2)当吊钩位于同一水平面上的不同位置时,杆系的 C 点在水平槽上的位置是不同的,但 C 点到地面的距离是不变的;由于 C 点在其上滑动的水平槽是固定的,故水平转轴 A 至水平槽的距离亦是不变的.3)本题实际上只要研究当杆系位于任一确定的竖直平面内时,当水平转轴 A 的高度确定后,吊钩处在所考查的竖直平面内的确定高度的水平直线上不同位置时,平衡吊都能保持平衡的条件,这样便得到平衡吊的简化图 3-72 或图 3-73.4)确定用什么参量来表示吊钩的不同位置,是在进行定量计算时首先要研究的问题.当吊钩处在给定高度的水平直线(图 3-72 或图 3-73 中 F 所在的虚线)上的不同位置时, B 、 C 、 D 、 E 的位置都是不同的,但 C 点的高度不会变;水平转轴 A 是固定的,且 $BCDE$ 始终是一平行四边形.由此便可看出当图 3-72 中的角度 α 、 β 确定后,或图 3-75 中的角度 φ 、 θ 确定后,吊钩 F 的位置便确定,即吊钩 F 一个确定的位置,对应于 α 、 β 一组确定的值或 φ 、 θ 一组确定的值.

求解本题用到的物理原理仅是力矩平衡.但如果学生不明确以上几点,即使知道力矩平衡,也无法把它用到本题上.以上几条是通过审题、分析得出来的,是分析问题能力的具体表现.

32. 如图 3-76 所示,在倾角为 φ 的足够大粗糙斜面上,有一质点,质量为 m ,用弹性绳拴住.绳的另一端固定在斜面上 O' 点.弹性绳的形变与弹性力服从胡克定律.绳原长为 L ,劲度系数(即倔强系数)为 k .斜面与质点间的静摩擦因数为 μ .试确定质点在斜面上可静止的区域并画出此区域边界的示意图.

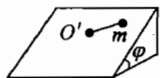


图 3-76

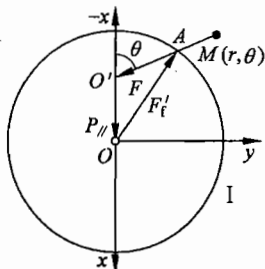


图 3-77

解析

若质点静止在斜面上任一点 M ,它在斜面上的位置可用坐标 r 、 θ 表示.如图 3-77 所示.在绳子伸长,即出现弹力时, M 质点在斜面上受三个力:弹力 $F=k(r-L)$,方向永远

指向点 O' ; 重力沿斜面的分量 $P_{//} = P \sin \varphi$, 方向永远向下, 且大小不变; 静摩擦力 $F_f \leq F_{f_{\max}} = F_f' = \mu F_N = \mu P \cos \varphi$. 这三力一定构成一个闭合三角形. 若在图 3-77 中用 \vec{AO} 、 \vec{OO} 、 \vec{OA} 分别表示 F 、 $P_{//}$ 及 F_f' , 则绳子张紧时 M 点可静止区域的边界可由动点 A 的轨迹, 即图中圆 I 来间接表示. 圆 I 即是以 O 为中心, 以 F_f' 为半径的圆. 当取 O 为直角坐标原点, x 轴沿斜面向下时, $F_{f_x}' = P_{//} + F \cos \theta$, $F_{f_y}' = F \sin \theta$, 则有圆 I 的方程为: $(F_{f_x}'^2 + F_{f_y}'^2 = F_f'^2)$, 即

$$P^2 \sin^2 \varphi + k^2 (r - L)^2 + 2k(r - L)P \sin \varphi \cos \theta = \mu^2 P^2 \cos^2 \varphi$$

由 A 点轨迹(圆 I)求 M 点可静止区域边界的依据是:

$$O'M_c = r_c$$

$$O'A = F = k(r_c - L) \quad (1)$$

因而得到

$$r_c = (O'A/k) + L \quad (2)$$

r_c 表示可静止区域边界到 O' 点距离. 由此式可得到画出可静止区域边界(以下称为“封闭曲线 II”)的作图法是: 将各力取 $1/k$ 倍, 重力力三角形后画出圆 I, 此时(2)式变为:

$$r_c = O'A + L \quad (3)$$

因而沿 $\vec{O'A}$ 延长 L 长度, 即得 M_c 点, 描点即可画此封闭曲线 II.

(1)式实际也是曲线 II 的极坐标方程. 若取 O' 为极点, x 方向为极轴, 则 $M_c(r_c, \theta)$ 的方程为

$$(r_c - L)^2 + (P^2/k^2) \sin^2 \varphi + (2/k)(r_c - L)P \sin \varphi \cos \theta - (\mu^2 P^2/k^2) \cos^2 \varphi = 0 \quad (4)$$

(3)式不过是(2)式的变形. 在 $L \neq 0$ (显然总是如此)时, 封闭曲线 II 显然不是圆, 而是复杂曲线.

当绳子松弛时, 没有弹力, M 质点静止区域由重力沿斜面分量和静摩擦力二力平衡来决定. 具体情况将在下面分析.

封闭曲线 II 的形状、II 和圆 I 及 O' 点的关系, 以及可静止区边界(考虑绳子松弛区后)的形状需要分以下三种情况讨论.

1) $\mu > \tan \varphi$: 即 $F_f' > P_{//}$, 或 $\mu P \cos \varphi > P \sin \varphi$. 这时 O' 点一定在圆 I 内, 如图 3-78 所示, 因而圆 I 也一定在封闭曲线 II 内. 以 O' 为圆心, L 为半径画圆 III, 圆 III 内即是绳子松弛区, 或称“无弹力区”. 当 $L \leq (-P_{//} + F_f')/k$ 时, 圆 III 与圆 I 相交, 如图 3-78 所示, 但圆 III 仍在封闭曲线 II 内, 仅表示可静止区中这一部分是由于二力平衡, 而其他 II 内区域是由于三力平衡. M 质点可静止区边界总是封闭曲线 II.

2) $\mu = \tan \varphi$: 即 $F_f' = P_{//}$. 这时 O' 一定在圆 I 上. 圆 I 与封闭曲线 II 在 O' 点相切. 如照上述方法作无弹

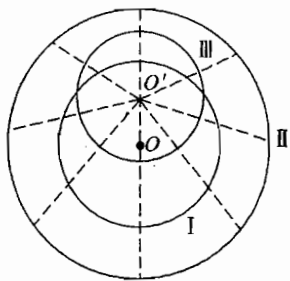


图 3-78

力区圆Ⅲ,Ⅲ一定与圆Ⅰ及封闭曲线Ⅱ相交,如图 3-79 所示.在圆Ⅲ内重力沿斜面分量与静摩擦力二力平衡(临界平衡),因而 M 点可静止区边界扩大到Ⅱ+Ⅲ,即在圆Ⅲ与封闭曲线Ⅱ交点 CC' 以上,此边界为圆Ⅲ;在 CC' 以下,为前述封闭曲线Ⅱ.

3) $\mu < \tan\varphi$: 即 $F_f' < P_{//}$. 这时弹性力必须有向上分量才能平衡,因而曲线Ⅱ和圆Ⅰ均不包围 O' 点,如图 3-80 所示.如上述作圆Ⅲ表示无弹力区,类似在 $L > (P_{//} - F_f')/k$ 时,圆Ⅲ与圆Ⅰ相交.这时圆Ⅲ内无弹力,而另外二力不能平衡,所以仅表示封闭曲线Ⅱ之外的“二力不可平衡区”,以区别Ⅱ外其余部分的“三力不可平衡区”. M 点可静止区边界仍为封闭曲线Ⅱ.

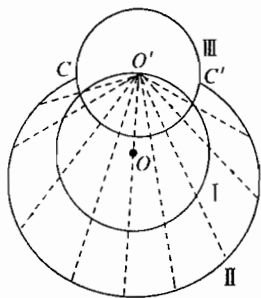


图 3-79

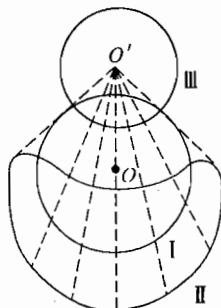


图 3-80

此题是静力学中平衡问题.若题目变为给出 m, k, μ, \dots 等具体的数值,要求学生去计算在任一给定位置处能否平衡,则很多学生都可做出来.现在是要求对多个因素的综合作用进行普遍的讨论,虽然只是要求用图来示意,其难度仍是大大增加了.有兴趣的学生可对这种普遍性讨论的思路和方法进行独立的探索,以逐步提高这方面的能力.

33. 两条质量均为 m 的相同的均匀细杆 AB, BC 在 B 端相连,杆 AB 的上端 A 与天花板上的固定点相连,杆 BC 的下端 C 与水平地面接触, A 点和 B 点的连接都是光滑的,地面是粗糙的, A 点到地面的距离为杆长的 $\sqrt{2}$ 倍,整个系统可在竖直平面内自由运动. θ_1 和 θ_2 分别为两杆与竖直线的夹角,如图 3-81 所示.

1) 试讨论在什么条件下,无论杆与地面间的动摩擦因数多么大,这两杆组成的系统都不可能达到平衡.要求用计算器通过数值算法找出处于这种情况时 θ_1 的取值范围.

2) 讨论该系统处在各种平衡位置时摩擦力 F_f 的大小(用 θ_1 和 θ_2 表示)和方向.

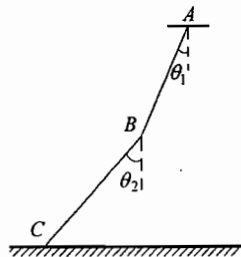


图 3-81

解析

1) 平衡方程

设杆长为 l , 取 θ_1, θ_2 在垂直线的左侧为正, 根据对称性, 只需讨论 $\theta_1 \geq 0$ 的情形. 根据已知条件有

$$l\cos\theta_1 + l\cos\theta_2 = \sqrt{2}l$$

即

$$\cos\theta_1 + \cos\theta_2 = \sqrt{2} \quad (1)$$

由此式知 θ_1, θ_2 的范围是

$$0 \leq \theta_1 \leq \arccos(\sqrt{2}-1) = 65.53^\circ$$

$$-65.53^\circ \leq \theta_2 \leq 65.53^\circ$$

两杆构成的系统在 C 端着地的条件下, $\theta_1 \geq 0$ 时, 可有三种可能的位形, 如图 3-82 所示. 图中位形 a 为 $\theta_1 \geq \theta_2 \geq 0$ 的情况, 位形 b 为 $\theta_2 \geq \theta_1$ 的情况, 位形 c 为 $\theta_2 \leq 0$ 的情况. 三种位形两杆受力的情况如图中右图所示. X, Y 是固定点作用于杆的力沿水平方向和竖直方向的分量; F_N 和 F_t 是为使系统处于这种位形的平衡状态, 外界所需加给 C 端的竖直力和水平力, 各力以图示的方向为正.

根据两杆的平衡条件, 对于三种位形, 均可列出下列平衡方程:

$$F_t = X \quad (2)$$

$$F_N + Y = mg \quad (3)$$

$$Xl\cos\theta_1 = Yl\sin\theta_1 + \frac{1}{2}mgl\sin\theta_1$$

即

$$X\cos\theta_1 = Y\sin\theta_1 + \frac{1}{2}mg\sin\theta_1 \quad (4)$$

和

$$F_t l \cos\theta_2 + F_N l \sin\theta_2 = \frac{1}{2}mgl\sin\theta_2$$

即

$$F_t \cos\theta_2 + F_N \sin\theta_2 = \frac{1}{2}mg\sin\theta_2 \quad (5)$$

解(2)、(3)、(4)、(5)式, 得

$$F_N = \left[\frac{1}{2} - \frac{\sin\theta_1 \cos\theta_2}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} \right] mg \quad (6)$$

$$F_t = \frac{\sin\theta_1 \sin\theta_2}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} mg \quad (7)$$

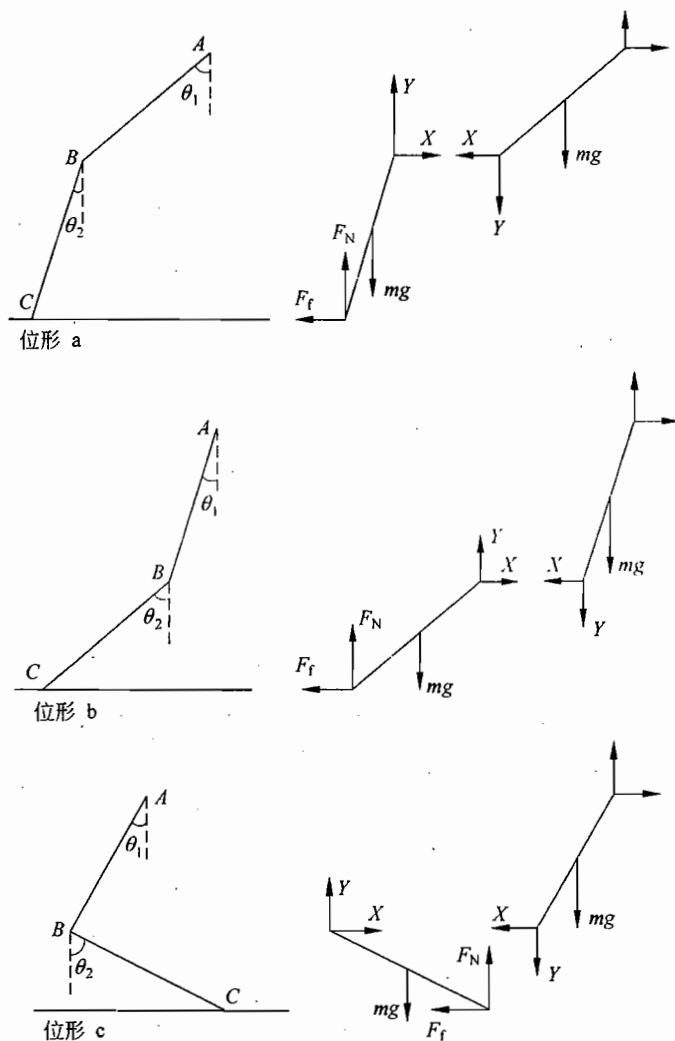


图 3-82

2) 不论摩擦因数多么大,系统都不可能平衡的条件

(6)式给出的 F_N 和(7)式给出的 F_f 是系统处于平衡状态时所需外界作用于 C 端的竖直力和水平力. 在本题所给条件下,外界作用于 C 端的力来自地面.

当 $F_N > 0$ 时, 竖直力 F_N 即可由地面的支持力提供, 而地面有向上的支持力作用于 C 端时, 由于摩擦因数可以足够大, 任何大小和方向的 F_f 均可由摩擦力提供, 从而系统可以保持平衡. 如果 $F_N < 0$, 这表明为使系统平衡, C 端所需的外力必须是向下的拉力, 而地面是无法提供拉力的, 这时摩擦力已不能产生, 从而无论动摩擦因数有多么大, 系统都不能

平衡. 当 $F_N=0$ 时, 摩擦力也无从产生, 无法满足(7)式所需的 F_f 值, 系统也不能平衡. 总之, 无论摩擦因数多么大, 系统都不能平衡的条件是

$$F_N \leq 0 \quad (8)$$

由(6)式知此条件为

$$\frac{1}{2} - \frac{\sin\theta_1 \cos\theta_2}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} \leq 0 \quad (9)$$

下面将此式改写一下. 此式可写为

$$\frac{\sin(\theta_2 - \theta_1) - 2\sin\theta_1 \cos\theta_2}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} \leq 0$$

即

$$\cos\theta_2 \cos\theta_1 \frac{\tan\theta_2 - 3\tan\theta_1}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} \leq 0$$

因为 $\cos\theta_2 \cos\theta_1 > 0$, 所以上式成为

$$\frac{\tan\theta_2 - 3\tan\theta_1}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} \leq 0 \quad (10)$$

下面分几种情况讨论.

(i) 对于位形 a, 即 $65.53^\circ \geq \theta_1 > 45^\circ, \theta_1 > \theta_2 \geq 0$ 的情况(此处及下面凡是 $\theta_1 = \theta_2 = 45^\circ$ 的情形都在最后讨论). 这时条件(10)式的分母 $\sin(\theta_2 - \theta_1) < 0$, 分子 $\tan\theta_2 - 3\tan\theta_1 < 0$, 整个分式, 即(10)式左方大于零, (10)式不能满足, 即没有平衡不能成立的情况.

(ii) 对于位形 b, 即 $\theta_2 > \theta_1 \geq 0$ 的情况. 这时(10)式分母 $\sin(\theta_2 - \theta_1) > 0$, (10)式成为

$$\tan\theta_2 - 3\tan\theta_1 \leq 0 \quad (11)$$

这时虽然 $\tan\theta_2 > \tan\theta_1$, 但当 θ_1 足够大时, $\tan\theta_2 \leq 3\tan\theta_1$ 仍可成立. 设满足 $\tan\theta_2 = 3\tan\theta_1$ 的角度为 θ_2^* 和 θ_1^* [它们还须满足(1)式], 则当 $\theta_1 > \theta_1^*$ 时条件(10)式成立. 由于位形 b 中 θ_1 的最大值为 45° , 所以当

$$45^\circ > \theta_1 \geq \theta_1^* \quad (12)$$

时(10)式成立, 不论摩擦因数多么大, 系统都不能平衡.

(iii) 对于位形 c, 即 $\theta_1 \geq 0, \theta_2 \leq 0$ 的情况. 这时(10)式的分子和分母均为负值, (10)式不能成立, 也没有平衡不能成立的情况.

总之, 无论摩擦因数多么大, 系统都不能平衡的情况发生在位形 b, 发生这种情况时 θ_1 取值范围为(12)式, 即

$$45^\circ > \theta_1 \geq \theta_1^* \quad (13)$$

3) θ_1^* 的计算

θ_1^* 满足下列二式:

$$\left. \begin{aligned} \tan\theta_2^* - 3\tan\theta_1^* &= 0 \\ \cos\theta_1^* + \cos\theta_2^* &= \sqrt{2} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

这个联立方程是有解的,但属于超越方程,无法求得解析解.只能用计算器通过数值计算,用探索逼近的方法求解.

当 $\theta_1=0$ 时, $\theta_2=65.53^\circ$, 这时 $\tan\theta_2=2.1914$ 而有 $\theta_1=0$. 上式第一式不能满足. 当 θ_1 由 0 逐渐增大时, $\tan\theta_1$ 也逐渐增大. 而 θ_2 及 $\tan\theta_2$ 逐渐减小. 由于两者的变化都是单调的,故总会有一个角度 θ_1^* , 使(14)式得到满足.

为求 θ_1^* 的值,可先设定一个 θ_1 值,求出 θ_2 , 通过比较 $\tan\theta_2$ 与 $3\tan\theta_1$ 值的大小,再调节 θ_1 的值,求出新的 θ_2 , 直到 $\tan\theta_2$ 与 $3\tan\theta_1$ 近似相等为止. 这时的 θ_1 的值就是 θ_1^* . 这种计算用计算器很容易完成. 一个具体的实例见表 3-2.

表 3-2

θ_1	$\theta_2 = \arccos(\sqrt{2} - \cos\theta_1)$	$\tan\theta_2$	$3\tan\theta_1$	$\tan\theta_2 \gtrless 3\tan\theta_1$	结果
10°	64.60°	2.1060	0.5290	>	$20^\circ < \theta_1^*$
20°	61.67°	1.8550	1.0919	>	$< 30^\circ$
30°	56.77°	1.5264	1.7321	<	
25°	59.47°	1.6956	1.3989	>	$27^\circ < \theta_1^*$
27°	58.45°	1.6287	1.5286	>	$< 28^\circ$
28°	57.91°	1.5948	1.5951	<	
27.9°	57.96°	1.5979	1.5884	>	
27.99°	57.92°	1.5950	1.5945	>	$27.995^\circ < \theta_1^*$
27.995°	57.912°	1.59486	1.59479	>	$< 28.000^\circ$

由表 3-2 可知,取 4 位有效数字时, θ_1^* 的值为

$$\theta_1^* = 28.00^\circ \quad (15)$$

4) 平衡时摩擦力的大小和方向

下面分别讨论三种位形以及几个特殊情况下摩擦力 F_f 的大小和方向.

在所有的情况下,平衡时摩擦力均由(7)式给出,即

$$F_f = \frac{\sin\theta_1 \sin\theta_2}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} mg \quad (16)$$

其方向由上式的符号决定, $F_f > 0$ 时方向向左, $F_f < 0$ 时方向向右.

(1) 位形 a

$65.53^\circ > \theta_1 > 45^\circ, \theta_1 > \theta_2$.

当 θ_1 取最大值 65.53° 时, $\theta_2 = 0$, 如图 3-83 所示. 这时

$$F_N = \frac{3}{2} mg, \quad F_f = 0$$

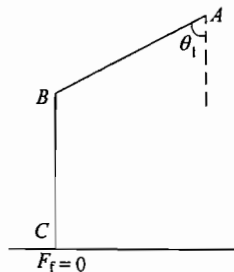


图 3-83

当C端向左移时, θ_1 减小, θ_2 增大, 如图 3-84 所示. 这时 F_f 的方向向右 ($F_f < 0$), 大小逐渐增大.

当 θ_1 减小趋于 45° 时, θ_2 增大趋于 45° , 这时由 (16) 式知, 其右边分母由负值趋于零, 从而 F_f 值趋于 $-\infty$, 即 F_f 的方向仍向右, 大小趋于无穷大. 因此时 F_N 趋于 $+\infty$ [见 (6) 式], 这样的 F_f 仍可由地面提供, 平衡态可以实现.

当 θ_1 与 θ_2 严格地等于 45° 时, 二杆成一直线, 两端受数值为 ∞ 的推力的作用. 这时若无重力存在, 二杆仍可平衡. 这是一种不稳定平衡, 只要受一点扰动, 平衡即被破坏. 在此, 重力正是这种扰动, 因此两杆成严格直线的平衡态是不可能的. 平衡破坏时 θ_1 减小, θ_2 增大, 系统进入位形 b 的无论摩擦因数多么大都不可能平衡的区域内.

(ii) 位形 b

在位形 b 中 θ_1 分两个区域. 当 $45^\circ > \theta_1 \geq \theta_1^* = 28^\circ$ 时是无论摩擦因数多么大也不能平衡的区域, 那时所需的竖直力 $F_N < 0$; 当 $\theta_1 = \theta_1^*$ 时, $F_N = 0$, $F_f = +0.7976mg = F_{f_0}$, 仍无从获得, 因而 θ_1 严格等于 θ_1^* 时是不能平衡的.

当 θ_1 由 θ_1^* 逐渐减小时, F_N 由零向正方向增大, F_f 则由 F_{f_0} 逐渐减小但仍为正值, 即 F_f 的方向向左, 如图 3-85 所示.

当 $\theta_1 = 0$ 时, $\theta_2 = 65.53^\circ$, 这时 $F_N = \frac{1}{2}mg > 0$, 但 $F_f = 0$, 情况如图 3-86 所示.

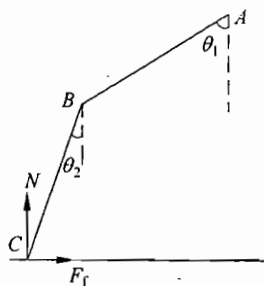


图 3-84

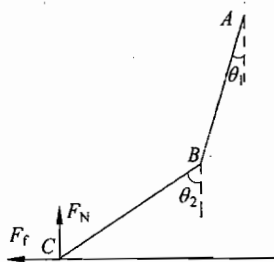


图 3-85

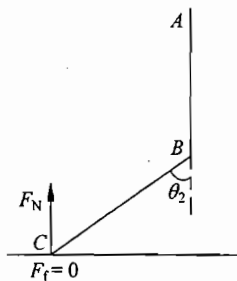


图 3-86

顺便再提一下, $45^\circ > \theta_1 \geq \theta_1^* = 28^\circ$ 时是无论如何不能平衡的情况. 在这种情况下 $F_N \leq 0$, 无法从地面取得所需的竖直力和水平力. 如果一定要使 θ_1 保持这样的角度而又使 C 端在地平线上, 就必须另外加一个向下的竖直力 ($F_N < 0$) 和一个向左的水平力 ($F_f > 0$), 如图 3-87 所示 (在 $\theta_1 = \theta_1^*$ 的情况下只需加一个 $F_f > 0$ 的水平力). C 点

越向左移(即 θ_1 越大),这两个力的数值也越大,直到极限情况, θ_1 增大到 45° , θ_2 减小到 45° , 两杆成一直线. 这时两杆的 A 端和 C 端受一个无穷大的拉力, 这是一个稳定的平衡, 与位形 a 中两杆成一直线的极限情况不同.

(iii) 位形 c

这是 $\theta_1 \geq 0, \theta_2 \leq 0$ 的情况. 我们从 θ_1 最大, $\theta_2 = 0$ 的情况, 如图 3-83 开始讨论, 这时 $F_f = 0$. 当 C 点逐渐右移时, $\theta_2 < 0$, 其绝对值逐渐增大而 θ_1 则逐渐减小. 这时 $\sin(\theta_2 - \theta_1) < 0, F_N > 0, F_f > 0$. 当 C 点逐渐右移时, F_N 由

$1.5mg$ 逐渐减小, F_f 则由零先逐渐增大, 达到一最大值 $F_{fm} = \frac{1}{2}mg$ (在 $\theta_1 = 45^\circ, \theta_2 = -45^\circ$ 处)后再逐渐减小为零(当 $\theta_1 = 0$ 时), 如图 3-88 和图 3-89 所示.

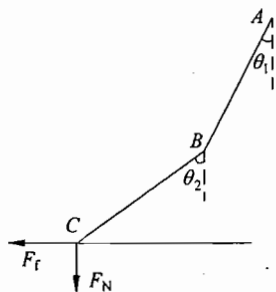


图 3-87

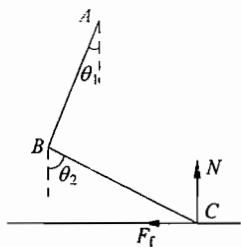


图 3-88

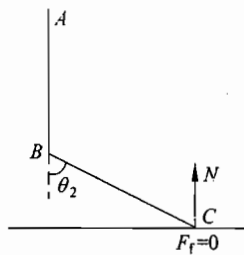


图 3-89

本题的分析在解答中已经写得很清楚了. 做这一类题的关键是思考周密. 分析时不要漏掉可能的情况, 而且要安排一个合理的分析次序.

另外, 用计算器利用数值解法去解一个方程是在竞赛中出现的一个要求. 计算器是一个强大的武器, 它可以很方便地得出很多看似很复杂的方程的数值解, 而且要精确到几位数字都可以做到, 这一点要很好地掌握起来.



四、动量 能量

1. 一个盛满水的圆柱形水桶,桶底和壁都很轻很薄,桶的半径为 R ,高为 h ,桶的上缘处在湖面下深度为 H 处,如果用轻绳将它缓慢上提,直到桶的底面刚离开水面,若不计水的阻力,求上提过程中拉力所做的功.

解析

$$\frac{1}{2}\pi R^2 \rho g h^2 (\rho \text{ 为水的密度}).$$

把全部水作为一个系统(桶本身的质量和材料体积皆可忽略),在桶水被提出湖面的过程中,虽然湖面应下降,但因湖面很大,其下降的高度完全可忽略不计.这样桶水提出湖面后,系统的最后状态相当于湖内水没发生任何变化而只是把湖面处的水的一部分(等于桶中水)搬到湖面上方,其重心离湖面为 $\frac{1}{2}h$ 高处.所以重力势能的改变也就等于拉力所做的功,应为

$$\pi R^2 h \cdot \rho g \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{2}\pi R^2 \rho g h^2$$

本题也可以这样来考虑.当水桶位于湖面下时,由于桶的质量和材料的体积均可不计,桶及其中的水受到的重力为 $\pi R^2 h \rho g$, ρ 为水的密度,受到的浮力即同体积水的重力也是 $\pi R^2 h \rho g$,故提水桶的绳的拉力为 0.在把水桶提升到桶的上缘处到达湖面的过程中,都不做功.当桶的上缘上升到湖面上距湖面 x 距离时,桶及其中的水受到的浮力为 $\pi R^2 (h-x) \rho g$,绳中的拉力 $F = \pi R^2 h \rho g - \pi R^2 (h-x) \rho g = \pi R^2 \rho g x$,可见 F 与 x 成正比,当桶底刚升到湖面时, $F_m = \pi R^2 \rho g h$.故在整个过程中拉力做的功为 $\frac{1}{2}F_m h = \frac{1}{2}\pi R^2 h^2 \rho g$.

2. 如图 4-1 所示, 物体 Q 与一质量可以忽略的弹簧相连接, 静止在光滑水平面上. 物体 P 以某一速度 v 与弹簧和物体 Q 发生正碰撞. 已知碰撞是完全弹性的, 而且两物体的质量相等. 碰撞过程中, 在下列哪种情况下弹簧刚好处于最大压缩状态?



图 4-1

- (A) 当 P 的速度恰好等于零时. (B) 当 P 与 Q 的速度相等时.
 (C) 当 Q 恰好开始运动时. (D) 当 Q 的速度等于 v 时.
 (E) 当 P 刚好把它的动能全部传递给弹簧时.

解析

B.

当 P 到达弹簧左端时, P 的速度为 v , Q 的速度为 0, 故 P 继续前进, 两者距离变小, 即压缩弹簧. 与此同时, 被压缩的弹簧右端给 Q 推力, 使 Q 开始加速运动, 左端给 P 阻力, 使 P 开始减速运动, 但开始一段时间内, P 的速度仍大于 Q 的速度, 弹簧继续被压缩, 直到 Q 的速度增加到和 P 的速度相等. 此后, 已被压缩的弹簧继续对 Q 有推力, 使 Q 继续加速; 同时对 P 有阻力, 使 P 继续减速. 这样 P 的速度将开始小于 Q 的速度, 它们之间的距离开始变大, 即弹簧开始变长. 故当 P 与 Q 速度相等时, 弹簧处于最大压缩状态.

3. 如图 4-2 所示, 一质量为 m 的物块位于一质量可忽略的直立弹簧上方 h 高度处, 该物块从静止开始落向弹簧. 设弹簧的劲度系数为 k , 则物块可能获得的最大动能为_____.

解析

$$mgh + \frac{m^2 g^2}{2k}.$$

物体自由下落至弹簧上端处时是一加速过程. 当物体落到弹簧上后, 因重力大于弹力, 所以还要继续加速, 直到弹簧被压缩到可产生的弹力与物体的重力相等时, 物体才停止加速. 此时物体达到最大速度, 即获得最大动能. 现设弹力与重力相抵消时, 弹簧被压缩了 x , 则有

$$mg = kx, \quad x = \frac{mg}{k}$$

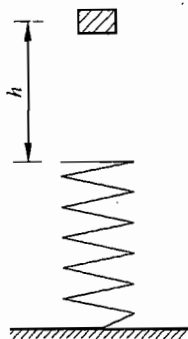


图 4-2

在整个过程中,重力势能减少了 $mgh + mgx$,而弹性势能增加了 $\frac{1}{2}kx^2$. 根据机械能守恒定律,物体所获得的最大动能为

$$\begin{aligned} E_k &= mgh + mgx - \frac{1}{2}kx^2 = mgh + mg \frac{mg}{k} - \frac{1}{2}k \frac{m^2 g^2}{k^2} \\ &= mgh + \frac{1}{2} \frac{m^2 g^2}{k} \end{aligned}$$

4. 网球拍以速率 v_1 击中以速率 v_0 飞来的网球,被击回的网球的速率最大速率为_____ (以上所有的速率都是指相对于地面).

解析

$$v_0 + 2v_1.$$

把球拍在击球过程中的速度看作是保持不变的,则当球与球拍在同一直线上运动,并且球与球拍的碰撞是完全弹性的时,被击回的球可获得最大速率. 以球拍为参照系,则球被击中前的速率为 $v_0 + v_1$,因为是弹性碰撞,所以击中后球的速率仍为 $v_0 + v_1$,但速度的方向反转,即与球拍相对于地面的速度同向. 由于球拍相对于地面的速率为 v_1 ,所以击中后球相对于地面的速率应为 $(v_0 + v_1) + v_1 = v_0 + 2v_1$.

这是一道考查学生对相对运动的理解的题目. 若不以球拍为参照系,而以地面为参照系,也能得出相同的结论.

从地面上看,可以把网球与网球拍的相互作用过程分成两个阶段,即压缩阶段和恢复阶段. 在压缩阶段中,球与球拍相互挤压,直到两者的相对速度为0,即直到球获得与球拍相同的速度,在此阶段中,设球拍作用于球的冲量为 I ,则有

$$I = mv_1 - (-mv_0) = mv_1 + mv_0$$

被击回的球有最大速率,对应于在恢复阶段球拍作用于球的冲量仍为 I . 恢复阶段开始时,球的速率为 v_1 ,结束时球的速率为 v ,则有

$$I = mv - mv_1$$

由以上两式得

$$v = 2v_1 + v_0$$

研究两物体发生相互作用时,在不少情况中,常把发生相互作用的两个物体作为研究对象,但在本题中,不宜把球与球拍一起作为研究对象. 因为球拍的质量未知,在打球过程中,握球拍的人有力作用于球拍,以保持球拍的速度不变. 但人作用于球拍的力又是未知的,把球拍引入研究对象,将引入许多未知因素,显然对问题的解决无好处.

5. 一质量为 m_0 的平顶小车, 以速度 v_0 沿水平的光滑轨道做匀速直线运动. 现将一质量为 m 的小物块无初速地放置在车顶前缘. 已知物块和车顶之间的滑动摩擦因数为 μ .

- 1) 若要求物块不会从车顶后缘掉下, 则该车顶最少要多长?
- 2) 若车顶长度符合 1) 问中的要求, 整个过程中摩擦力共做了多少功?

解析

1) 物块放到小车上以后, 由于摩擦力的作用, 当以地面为参考系时, 物块将从静止开始加速运动, 而小车将做减速运动. 若物块达到小车顶后缘时的速度恰好等于小车此时的速度, 则物块就刚好不脱落. 令 v 表示此时的速度. 在这个过程中, 若以物块和小车为系统, 因为水平方向未受外力, 所以此方向上动量守恒, 即

$$m_0 v_0 = (m + m_0) v \quad (1)$$

从能量来看, 在上述过程中, 物块动能的增量等于摩擦力对物块所做的功, 即

$$\frac{1}{2} m v^2 = \mu m g s_1 \quad (2)$$

其中 s_1 为物块移动的距离. 小车动能的增量等于摩擦力对小车所做的功, 即

$$\frac{1}{2} m_0 v^2 - \frac{1}{2} m_0 v_0^2 = -\mu m g s_2 \quad (3)$$

其中 s_2 为小车移动的距离. 用 l 表示车顶的最小长度, 则

$$l = s_2 - s_1 \quad (4)$$

由以上四式, 可解得

$$l = \frac{m_0 v_0^2}{2\mu g (m + m_0)} \quad (5)$$

即车顶的长度至少应为 $l = \frac{m_0 v_0^2}{2\mu g (m + m_0)}$.

2) 由功能关系可知, 摩擦力所做的功等于系统动能的增量, 即

$$A = \frac{1}{2} (m + m_0) v^2 - \frac{1}{2} m_0 v_0^2 \quad (6)$$

由(1)、(6)式可得

$$A = -\frac{m m_0 v_0^2}{2(m + m_0)} \quad (7)$$

本题比较简单, 但却非常基本, 题中涉及的一些基本概念往往是学生没有完全弄明白的. 例如, 作用在物体上的摩擦力可以对物体做正功, 也可以对物体做负功. 在本题中, 作用在物块上的摩擦力对物块做正功, 它使物块加速, 使物块动能增加; 作用于小车的摩擦

力则做负功,它使小车减速,使小车的动能减少.那种认为摩擦力总是阻力,摩擦力总是做负功,摩擦力做功总是消耗物体机械能的想法是不全面的.作用于物块的摩擦力与作用于小车的摩擦力是一对作用力与反作用力,它们的大小相等、方向相反,但这两个摩擦力做的总功一般并不为零,如(2)、(3)两式所示,这两个摩擦力做的总功为负,即(7)式,其数值就是在相互作用过程中两物体损失的机械能.在一般情况下,作为作用力的摩擦力和作为反作用力的摩擦力做的总功不可能大于零,但可以等于零,在这种情况下,虽然每个摩擦力都做了功,但却无机械能损失.

6. 在光滑的水平面上,放置一个质量为 m_0 , 截面是 $\frac{1}{4}$ 圆(圆的半径为 R) 的柱体 A(如图 4-3). 柱面光滑, 顶端放一质量为 m 的小滑块 B. 初始时刻 A, B 都处于静止状态, 在固定坐标系 Oxy 中的位置如图所示, 设小滑块从圆柱顶端沿圆弧滑下, 试求小滑块脱离圆弧以前在固定坐标系中的轨迹方程.

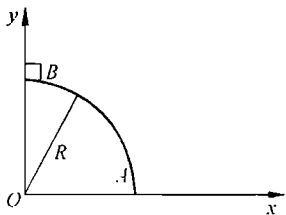


图 4-3

解析

B 滑下时, 根据水平方向动量守恒, A 必向左移动. 设下滑到某处时, B 的坐标为 (x_2, y_2) , A 的位置用圆心 C 的坐标 $(x_1, 0)$ 表示, A, B 沿水平方向的速度分别为 v_A 及 v_B (见图 4-4), 则从动量在水平方向守恒可得

$$mv_B + m_0v_A = 0$$

此时, C, B 的水平方向坐标分别为 x_1 及 x_2 , 由于两物体的水平速率之比在任何时刻都相同, 所以其水平方向的位移之比等于速率比, 从而得

$$m_0x_1 + mx_2 = 0$$

在 A 脱离 B 以前, 由图中几何关系可知

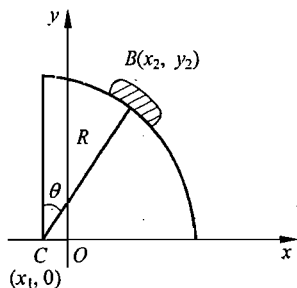


图 4-4

$$R\sin\theta = x_2 - x_1$$

$$R\cos\theta = y_2$$

消去 θ 及 x_1 , 得

$$\frac{x_2^2}{\left(\frac{m_0R}{m_0+m}\right)^2} + \frac{y_2^2}{R^2} = 1$$

因此, B 的轨迹是半长轴为 R (在 y 方向)、半短轴为 $\frac{m_0R}{m_0+m}$ (在 x 方向) 的椭圆的一部分.

解答本题的关键除了水平方向动量守恒外,必须找出柱体与滑块在同一时刻的位置坐标之间的关系,并能把学过的数学知识用于求解物理问题.

7. 跳水运动员从高于水面 $H=10\text{m}$ 的跳台自由落下. 假设运动员的质量 $m=60\text{kg}$, 其体形可等效为一长度 $L=1.0\text{m}$ 、直径 $d=0.30\text{m}$ 的圆柱体. 略去空气阻力. 运动员入水后, 水的等效阻力 F 作用于圆柱体的下端, F 的量值随入水深度 Y 变化的函数曲线如图 4-5 所示. 该曲线可近似看作椭圆的一部分, 该椭圆的长、短轴分别与坐标轴 OY 和 OF 重合. 椭圆与 Y 轴相交于 $Y=h$ 处, 与 F 轴相交于 $F=(5/2)mg$ 处. 为了确保运动员的安全, 试计算水池中水的深度 h 至少应等于多少. (水的密度取 $\rho=1.0\times 10^3\text{kg/m}^3$)

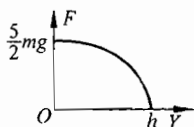


图 4-5

解析

如图 4-6 所示. 运动员的始、末速度均为零. 设全过程中重力做功为 W_G , 水的浮力做功为 W_f , 水的阻力做功为 W_F , 由功能关系得

$$W_G + W_f + W_F = 0 \quad (1)$$

设水池中水的深度为 h , 则

$$W_G = mg(H+h) \quad (2)$$

运动员从位置 B 到 C, 水的浮力随入水深度线性增加, 其做功为

$$W_{f1} = -(1/2)\rho L \pi (d/2)^2 g L = -(1/8)\pi \rho L^2 d^2 g \quad (3)$$

从位置 C 到 D, 水的浮力做功为

$$W_{f2} = -(1/4)\pi \rho L d^2 (h-L) g \quad (4)$$

水的阻力做功为图 4-5 中曲线下的面积, 即

$$W_F = -(1/4)\pi (5/2)mgh = -(5/8)\pi mgh \quad (5)$$

将(2)、(3)、(4)、(5)式代入(1)式, 得

$$mg(H+h) - \frac{\pi \rho L^2 d^2 g}{8} - \frac{\pi \rho L d^2 (h-L) g}{4} - \frac{5\pi mgh}{8} = 0$$

求解得

$$\begin{aligned} h &= \frac{mH + (1/8)\pi \rho L^2 d^2}{(5/8)\pi m + (1/4)\pi \rho L d^2 - m} \\ &= \frac{60 \times 10 + (1/8)\pi \times 10^3 \times 1^2 \times (0.30)^2}{(5/8)\pi \times 60 + (1/4)\pi \times 10^3 \times 1 \times (0.30)^2 - 60} \text{m} \\ &= 4.9\text{m} \end{aligned}$$

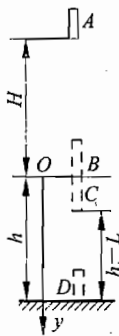


图 4-6

在本题中,作用于运动员的水的等效阻力是变力,试题给出了等效阻力 F 随入水深度 Y 变化的函数曲线的图形. 学生应明白这函数曲线与纵坐标、横坐标所围成的区域的面积便是等效阻力 F 在所考查的过程中所做的功. 用变力的函数曲线下面的面积表示变力所做的功,在计算满足胡克定律的弹性力 $F=kx$ 做功时亦遇到过,只是弹性力 F 与 x 的关系是过 $F \sim x$ 坐标原点的直线,弹性力在所考查过程中的功对应于某一三角形或梯形的面积. 学生若能准确地理解并掌握弹性力 $F=kx$ 做功的计算方法,就不难把那种计算方法用于计算本题中等效阻力的功.

8. 一条在湖面上以恒定速度行驶的船上,有一与船固连的竖直光滑墙壁. 有一个小球沿水平方向射到墙上,相对于岸,小球速度的大小为 v_1 ,方向与墙的法线成 60° 角,小球自墙反弹时的速度方向正好与小球入射到墙上时的速度方向垂直. 问船的速度应满足什么条件? 设小球与墙壁的碰撞是完全弹性的.

解析

在碰撞的瞬间,过小球与墙壁的碰撞点 O 作一相对地面静止的直角坐标系 Oxy , Ox 轴沿水平方向, Oy 轴与墙的法线重合,如图 4-7 所示. 图中 v_1 、 v_2 分别为小球与墙壁碰撞前、后的速度,它们的分量分别为

$$\left. \begin{aligned} v_{1x} &= v_1 \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{3} v_1 \\ v_{1y} &= -v_1 \cos 60^\circ = -\frac{1}{2} v_1 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} v_{2x} &= v_2 \sin 30^\circ = \frac{1}{2} v_2 \\ v_{2y} &= v_2 \cos 30^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{3} v_2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

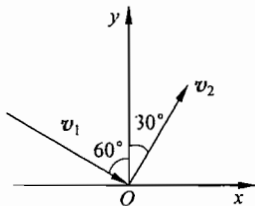


图 4-7

设船的速度为 u , 其分量分别为 u_x 和 u_y . 相对于船, 墙是静止的, 小球则以速度 v_1' 射向墙, 以速度 v_2' 反弹, v_1' 和 v_2' 分别为

$$\left. \begin{aligned} v_1' &= v_1 - u \\ v_2' &= v_2 - u \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其分量分别为

$$\left. \begin{aligned} v_{1x}' &= v_{1x} - u_x \\ v_{1y}' &= v_{1y} - u_y \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} v_{2x}' &= v_{2x} - u_x \\ v_{2y}' &= v_{2y} - u_y \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

因为墙壁是光滑的,小球与墙的碰撞是完全弹性的,故有

$$v'_{2x} = v'_{1x} \quad (6)$$

$$v'_{2y} = -v'_{1y} \quad (7)$$

解(4)、(5)、(6)和(7)式,得

$$v_{2x} = v_{1x} \quad (8)$$

$$v_{2y} = -v_{1y} + 2u_y \quad (9)$$

把(1)、(2)式代入(8)、(9)式,得

$$u_y = \frac{1}{2}v_1 \quad (10)$$

$$u_x = \text{任意值} \quad (11)$$

即船的行驶速度必须有沿 y 方向的分速度,亦即具有沿墙壁平面法线方向的分速度,其大小为 $\frac{1}{2}v_1$; 而沿 x 方向的分速度不受限制,可取包括零在内的任意值。

本题给出了小球射入到墙上时相对地面的速度 v_1 的大小和方向,又给出了碰墙后,小球相对地面的速度 v_2 的方向,但未给出 v_2 的大小. 由于墙壁是光滑的,碰撞是弹性的,故相对于船小球射到墙上时的速度 v'_1 的大小与小球自墙反弹时的速度 v'_2 的大小一定相等; 入射时速度与墙的法线方向的夹角与反弹时速度与墙的法线之间的夹角也一定相等. 显然,满足此条件的 v'_1 和 v'_2 是非常多的. 另一方面,相对地面,小球自墙反弹后的速度 v_2 与入射到墙时的速度 v_1 垂直,虽然试题并未给出 v_2 的大小,但 v_2 的大小是确定的,这一定要通过船相对地面的速度 u 的大小和方向来实现. 由于 v'_1 和 v'_2 不是惟一的,所以 u 的大小和方向也不是惟一的.

从所求得的结果看,船速 u 的 y 方向的分速度是确定的, $u_y = \frac{1}{2}v_1$, 但 u 的 x 分量 u_x 可取任意值. 这表示凡是 y 方向的分速度等于 $\frac{1}{2}v_1$ 的所有各不同大小和方向的船速都是符合题意要求的船速 u . 当 $u_x = 0$ 时,船速 u 沿 y 方向,这时小球相对船的入射速度和反弹速度如图 4-8 中的 v'_1 和 v'_2 所示,它们与墙的法线的夹角均为 θ_0 , 当 $u_x > 0$ (但小于 $\frac{\sqrt{3}}{2}v_1$) 时,小球相对船的入射速度和反弹速度如图 4-8 中的 v''_1 和 v''_2 所示,它们与墙的法线的夹角 $\theta < \theta_0$; 当 $u_x = \frac{\sqrt{3}}{2}v_1$ 时,船速如图 4-8 中的 u 所示,小球相对船的入射速度和反弹速度如图 4-8 中的 v'''_1 和 v'''_2 所示,这时,相对船小球是垂直射向墙,又沿垂直于墙的方向被反弹.

$u_x < 0$ 亦是可行的,这时相对船的入射速度和反弹速度与墙的法线的夹角 $\theta > \theta_0$.

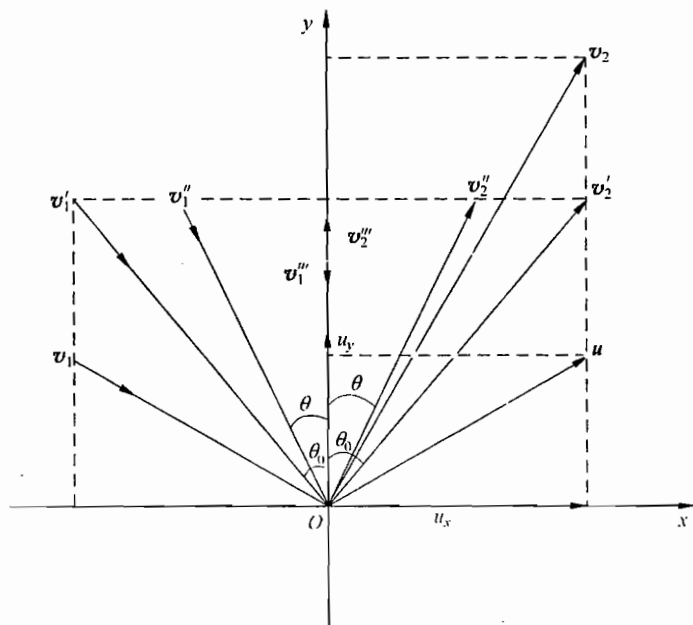


图 4-8

通常在求得习题的答案后,如能对答案进行一些分析和讨论,形成一幅具体的图像,能提高解题的乐趣,而这个过程往往带有某种研究的成分,有利于能力的培养和提高。

9. 如图 4-9 所示, A 是放置在光滑水平面上的滑块,其质量为 m_0 , 滑块的上端面是一水平台面,台面的长度和高度均为 h , 滑块的侧面有一条长度为 $1/8$ 圆周的圆弧光滑槽,槽底跟水平面相切. 另有一条高为 H 的固定光滑导轨,导轨的底端正好对准 A 的滑槽. B 是一个质量为 m 的小球, $m = 0.4m_0$, 它由导轨的顶端滑下,初速为零. 试问,欲使小球击中 A 的平台,高度比 H/h 的数值范围是多少?

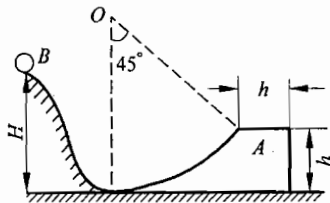


图 4-9

解析

设小球从 B 下滑到滑块 A 槽底端时的速度为 v_0 , 根据机械能守恒,有

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgH \quad (1)$$

在小球 B 刚到达滑块 A 槽顶端时,设其速度为 v , 其水平方向和竖直方向的分量分

别为 v_x 和 v_y , 滑块向右运动的速度为 u , 根据机械能守恒, 有

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + \frac{1}{2}m_0u^2 + mgh \quad (2)$$

在小球冲上滑块的过程中, 小球-滑块系统动量的水平分量守恒, 按图 4-10 所示坐标系有

$$mv_0 = mv_x + m_0u \quad (3)$$

又设球 B 在滑槽顶端相对于滑块的速度为 v' , 则

$$v_x = v'_x + u \quad (4)$$

$$v_y = v'_y \quad (5)$$

由滑槽是 $1/8$ 圆周知, 球 B 相对于 A 的速度与水平方向夹角是 45° , 所以

$$\frac{v'_y}{v'_x} = \tan 45^\circ = 1 \quad (6)$$

由(1)~(6)式解得

$$v_x^2 = \frac{2m_0gH - 2(m_0 + m)gh}{2m_0 + m} \quad (7)$$

为要击中平台, 球 B 相对于台面的射程 L' 需满足如下关系:

$$h \geq L' \geq 0 \quad (8)$$

而

$$L' = v'_x \frac{2v'_y}{g} \quad (9)$$

由(6)、(7)、(9)式解 L' , 再代入(8)式整理得

$$\left(\frac{3}{2} + \frac{5m}{4m_0}\right)h \geq H \geq \frac{m + m_0}{m_0}h \quad (10)$$

已知 $m/m_0 = 0.4$, 代入(10)式得

$$2 \geq \frac{H}{h} \geq 1.4$$

这是一道相对运动的题目. 为创造相对运动的起始条件, 设计了一些装置, 需要用能量和动量的关系来求出小球与滑块相对运动的起始条件. 若只用小球与滑块二者的绝对运动来计算, 则要复杂得多.

10. 有一个摆长为 l 的摆(摆球可视为质点, 摆线的质量不计), 在过悬挂点的竖直线上距悬挂点 O 的距离为 x 处($x < l$)的 C 点有一固定的钉子, 如图 4-11 所示. 当摆摆动时, 摆线会受到钉子的阻挡. 当 l 一定而 x 取不同值时, 阻挡后摆球的运动情况将不同. 现将摆拉到位于竖直线的左方(摆球的高度不超过 O 点), 然后放手, 令其自由摆动, 如果摆

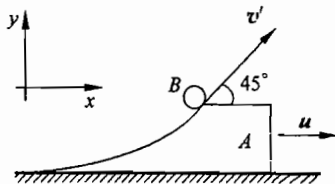


图 4-10

线被钉子阻挡后,摆球恰巧能够击中钉子,试求 x 的最小值.

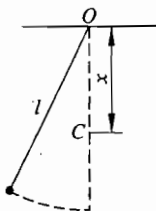


图 4-11

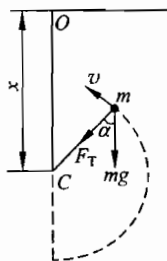


图 4-12

解析

摆线受阻后在一段时间内摆球做圆周运动.若摆球的质量为 m ,则摆球受重力 mg 和摆线拉力 F_T 的作用,设在这段时间内任一时刻的速度为 v ,如图 4-12 所示.用 α 表示此时摆线与重力方向之间的夹角,则有方程式

$$F_T + mg \cos \alpha = \frac{mv^2}{l-x} \quad (1)$$

运动过程中机械能守恒,令 θ 表示摆线在起始位置时与竖直方向的夹角,取 O 点为势能零点,则有关系

$$-mgl \cos \theta = \frac{1}{2}mv^2 - mg[x - (l-x) \cos \alpha] \quad (2)$$

摆受阻后,如果后来摆球能击中钉子,则必定在某位置时摆线开始松弛,此时 $F_T=0$,此后摆球仅在重力作用下做斜抛运动.设在该位置时摆球速度 $v=v_0$,摆线与竖直线的夹角 $\alpha=\alpha_0$,由(1)式得

$$v_0^2 = g(l-x) \cos \alpha_0 \quad (3)$$

代入(2)式,求出

$$2l \cos \theta = 3(x-l) \cos \alpha_0 + 2x \quad (4)$$

要求做斜抛运动的摆球击中 C 点,则应满足下列关系式

$$(l-x) \sin \alpha_0 = v_0 t \cos \alpha_0 \quad (5)$$

$$(l-x) \cos \alpha_0 = -v_0 t \sin \alpha_0 + \frac{1}{2}gt^2 \quad (6)$$

利用(5)式和(6)式消去 t ,得到

$$v_0^2 = \frac{g(l-x) \sin^2 \alpha_0}{2 \cos \alpha_0} \quad (7)$$

由(3)、(7)式得到

$$\cos\alpha_0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (8)$$

代入(4)式, 求出

$$\theta = \arccos \left[\frac{x(2 + \sqrt{3}) - l\sqrt{3}}{2l} \right] \quad (9)$$

θ 越大, $\cos\theta$ 越小, x 越小, θ 最大值为 $\frac{\pi}{2}$, 由此可求得 x 的最小值满足关系

$$x(2 + \sqrt{3}) = \sqrt{3}l \quad (10)$$

所以

$$x = (2\sqrt{3} - 3)l = 0.464l$$

11. 军训中, 战士从距墙 s_0 处以速度 v_0 起跳, 如图 4-13 所示, 再用脚蹬墙面一次, 身体的运动变为竖直向上的运动以继续升高. 墙面与鞋底之间的静摩擦因数为 μ . 求能使人体重心有最大总升高的起跳角 θ .

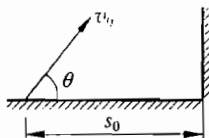


图 4-13

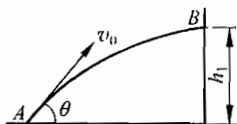


图 4-14

解析

人以 θ 角起跳, 经时间 t , 重心由 A 到 B (如图 4-14), 这时质量为 m 的人的速度的水平与竖直分量分别为

$$v_{\text{水平}} = v_0 \cos\theta, \quad v_{\text{竖直}} = v_0 \sin\theta - gt$$

重心升高

$$h_1 = s_0 \tan\theta - (g/2)(s_0/v_0 \cos\theta)^2$$

脚蹬墙面, 利用最大静摩擦力的冲量可使人的向上动量增加

$$\Delta(mv_{\text{竖直}}) = m\Delta v_{\text{竖直}} = \sum F(t)\Delta t = \sum \mu F_N(t)\Delta t = \mu \sum F_N(t)\Delta t$$

$F_N(t)$ 为人与墙面间的正压力, $F(t)$ 为由 $F_N(t)$ 产生的最大静摩擦力, 由题意知正压力冲量恰可使人的水平分动量变为零, 即

$$\sum F_N(t)\Delta t = mv_{\text{水平}}$$

故

$$\Delta v_{\text{竖直}} = \mu v_{\text{水平}}$$

人的重心在 B 点时, 蹬墙后, 其重心的竖直向上速度为

$$v_{\text{竖直}} + \Delta v_{\text{竖直}} = v_{\text{竖直}} + \mu v_{\text{水平}}$$

并以此为初速度,继续升高

$$h_2 = (v_{\text{竖直}} + \mu v_{\text{水平}})^2 / (2g)$$

人体重心总升高

$$h = h_1 + h_2 = v_0^2 (\mu \cos\theta + \sin\theta)^2 / (2g) - \mu s_0$$

上式可改写为

$$h = v_0^2 / (2g) (1 + \mu^2) [(\mu / \sqrt{1 + \mu^2}) \cos\theta + (1 / \sqrt{1 + \mu^2}) \sin\theta]^2 - \mu s_0$$

由如图 4-15 的直角三角形可得

$$\sin\delta = \mu / \sqrt{1 + \mu^2}$$

$$\cos\delta = 1 / \sqrt{1 + \mu^2}$$

代入上式,得

$$h = v_0^2 / (2g) (1 + \mu^2) \sin^2(\theta + \delta) - \mu s_0$$

当 $\theta + \delta = \pi/2$ 时, h 最大. 因此起跳角

$$\theta = (\pi/2) - \delta,$$

即

$$\theta = \arctan(1/\mu)$$

时,人体重心的总升高最大.

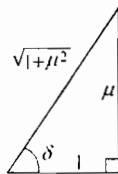


图 4-15

这是一道比较接近实际的题目的简化. 前一段过程是很简单的抛物运动,关键是第二段要求能分析清楚如何利用前进的动量对墙所施的冲量(正压力冲量),使蹬墙后水平方向的速度减为零,而同时在竖直方向得到向上的摩擦力冲量,从而除了初速度的竖直分量使他上升外,再加上这个冲量使他再升高一些.

另外,此题所得结果还可进行分析. 最后所得 θ 应满足的条件只与 μ 有关,而与 v_0 和 s_0 无关,即对每一给定的 v_0 和 s_0 值,都存在一个满足 h 为极大的 θ . 当然对于不同的 v_0 和 s_0 , h 的极大值是不同的. 由解中可看出, v_0 一定时,当 $s_0 = 0$ 时, h 的极大值最大,因为在这种情况下,可充分利用 v_0 的竖直分量. 但是实际上这是行不通的,因为要获得尽可能大 v_0 ,必须有一个“助跑”阶段,因此 s_0 不可能为零.

12. 一固定的斜面,倾角 $\theta = 45^\circ$,斜面长 $L = 2.00\text{m}$. 在斜面下端有一与斜面垂直的挡板. 一质量为 m 的质点,从斜面的最高点沿斜面下滑,初速度为零. 质点沿斜面下滑到斜面最低端与挡板发生弹性碰撞. 已知质点与斜面间的滑动摩擦因数 $\mu = 0.20$. 试求此质点从开始运动到与挡板发生第 11 次碰撞的过程中运动的总路程.

解析

如图 4-16,质点在沿斜面滑动的过程中,受到摩擦力 F_f 的大小为

$$F_f = \mu mg \cos\theta$$

若质点从斜面最高点第一次到达斜面最低端时的速度为 v_1 , 则有

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mgL \sin\theta - \mu mgL \cos\theta \quad (1)$$

质点与斜面挡板发生弹性碰撞后, 以速度 v_1 开始沿斜面上滑. 若上滑的最大路程为 L_1 , 则有

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \mu mgL_1 \cos\theta + mgL_1 \sin\theta \quad (2)$$

由(1)、(2)两式得

$$mgL \sin\theta - \mu mgL \cos\theta = \mu mgL_1 \cos\theta + mgL_1 \sin\theta$$

$$\frac{L_1}{L} = \frac{\sin\theta - \mu \cos\theta}{\sin\theta + \mu \cos\theta}$$

用 α 代表上式等号右边的数值, 并以 $\theta = 45^\circ, \mu = 0.20$ 代入, 则有

$$L_1 = \alpha L, \quad \alpha = \frac{1 - 0.20}{1 + 0.20} = \frac{2}{3} \quad (3)$$

按同样的推理可知质点在第 2 次碰撞后上滑的距离为

$$L_2 = \alpha L_1 = \alpha^2 L$$

同理可知, 在第 10 次碰撞后上滑的距离为

$$L_{10} = \alpha^{10} L$$

第 1 次碰撞前质点运动的路程为

$$s_1 = L$$

第 2 次碰撞前质点运动的总路程为

$$s_2 = L + 2L_1 = L + 2\alpha L$$

同理可知, 在第 11 次碰撞前即从开始到发生第 11 次碰撞期间, 质点运动的总路程为

$$s_{10} = L + 2\alpha L + 2\alpha^2 L + \cdots + 2\alpha^{10} L \quad (4)$$

由等比级数的知识可知

$$s_{10} = L \left(1 + 2\alpha \frac{\alpha^{10} - 1}{\alpha - 1} \right) \quad (5)$$

$$s_{10} = 9.86 \text{ m}$$

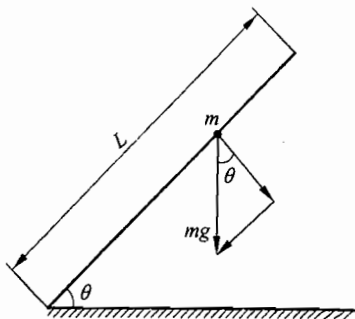


图 4-16

13. 如图 4-17 所示, 一水平放置的圆环形刚性窄槽固定在桌面上, 槽内嵌着三个大小相同的小球, 它们的质量分别是 m_1, m_2 和 $m_3, m_2 = m_3 = 2m_1$. 小球与槽的两壁刚好接触, 而它们之间的摩擦可忽略不计, 开始时, 三球处在槽中 I、II、III 的位置, 彼此间距离相

等; m_2 和 m_3 静止, m_1 以初速度 $v_0 = \pi R/2 (= \omega_0 R$, 其中 $\omega_0 = (\pi/2)\text{s}^{-1}$) 沿槽运动, R 为圆环的内半径和小球半径之和. 设各球之间的碰撞皆为弹性碰撞, 求此系统的运动周期 T .

解析

各小球在未发生碰撞时, 或静止或做匀速圆周运动; 发生碰撞时, 碰撞时间可忽略不计, 碰撞过程中动量和机械能都守恒. 对 m_1 与 m_2 第一次碰撞来说, 令 v_1 和 v_2 分别表示碰撞后的速度, 则有

$$m_1 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad (2)$$

由此可解得

$$v_1 = -\frac{1}{3} v_0 \quad (3)$$

$$v_2 = \frac{2}{3} v_0 \quad (4)$$

碰撞后 m_2 运动到位置 III 时, 与 m_3 相碰. 因为 m_2 与 m_3 质量相等, 所以碰后 m_2 停在 III 处, 而 m_3 以速率 v_2 运动. 等到 m_3 运动到位置 I 时, 正好 m_1 也返回到 I 处, 它们相碰过程中速度的变化正像上述 m_1 和 m_2 在 II 处相碰时的逆过程, 即碰后 m_3 停在 I 处, 而 m_1 又以 v_0 的速度顺时针运动. 等 m_1 再运动到位置 II 时, 和开始时相比, 正好是三球顺时针依次换了一下位置而速率和开始时相同. 这就是说, 到此时共经历了一周期的 $1/3$. 下面求周期 T .

m_1 第一次由 I 运动到 II 所需时间为

$$t_1 = \frac{2}{3} \frac{\pi R}{v_0} = \frac{4}{3} \text{s} \quad (5)$$

m_1 与 m_2 相碰后回到 I 所需时间为

$$t_2 = \frac{2}{3} \frac{\pi R}{v_1} = \frac{2}{3} \frac{\pi R}{\frac{1}{3} v_0} = 4 \text{s} \quad (6)$$

m_1 与 m_3 碰后再回到 II 所需时间为

$$t_3 = t_1 \quad (7)$$

由此可知

$$T/3 = t_1 + t_2 + t_3 \quad (8)$$

由(5)、(6)、(7)、(8)式可得

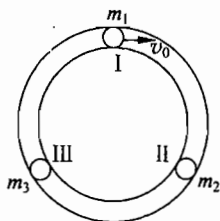


图 4-17

$$T = 20\text{s}$$

两质点的完全弹性碰撞的规律是碰前与碰后动量守恒和动能守恒. 而当二质点质量相同时, 弹性碰撞使二者的速度发生交换. 本题将三个小球安排一个互相碰撞的情况, 只要一对对碰撞分别分析正确, 就可得出正确答案. 题中所谓周期, 是指从开始时起, 直到每个球都回到开始时的状态所经历的时间.

14. 图 4-18 中 A 是一带有竖立柱的木块, 总质量为 m_0 , 位于水平地面上. B 是一质量为 m 的小球, 通过一不可伸长的轻绳挂于立柱的顶端. 现拉动小球使绳伸直并处于水平位置. 然后让小球从静止状态下摆. 如在小球与立柱发生碰撞前, 木块 A 始终未发生移动, 则木块与地面之间的静摩擦因数至少为多大? (设 A 不会发生转动)

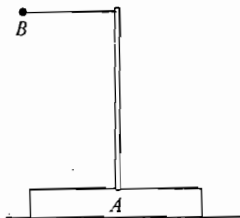


图 4-18

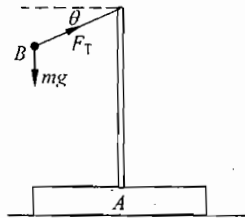


图 4-19

解析

当小球摆至与水平方向的交角为 θ 时, 小球的速度 v (图 4-19) 由下式决定

$$mgl\sin\theta = \frac{1}{2}mv^2 \quad (1)$$

设此时小球受到绳的拉力为 F_T , 由于小球做圆周运动, 故有

$$F_T - mg\sin\theta = m\frac{v^2}{l} \quad (2)$$

设地面对木块的支持力为 F_N , 作用于木块的摩擦力为 F_f , 因木块处于静止状态, 有

$$F_T\sin\theta + m_0g - F_N = 0 \quad (3)$$

$$F_T\cos\theta - F_f = 0 \quad (4)$$

设地面的静摩擦因数为 μ , 则有

$$F_f \leq \mu F_N \quad (5)$$

解以上各式, 得

$$\mu \geq \frac{3m\sin\theta\cos\theta}{3m\sin^2\theta + m_0} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{a + 2\sin^2\theta} \quad (6)$$

$$\text{式中} \quad a = \frac{2m_0}{3m} \quad (7)$$

$$\text{令} \quad F(\theta) = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{a + 2\sin^2\theta} \quad (8)$$

$F(\theta)$ 与 θ 有关, 现要求不论 θ 取何值, 木块 A 均不发生移动, 则静摩擦因数 μ 的最小值 μ_{\min} 等于 $F(\theta)$ 的最大值 $F(\theta)_{\max}$. $F(\theta)_{\max}$ 可如下求得:

$$\begin{aligned} F(\theta) &= \frac{2\sin\theta\cos\theta}{a(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + 2\sin^2\theta} \\ &= \frac{2\sin\theta\cos\theta}{a\cos^2\theta + (a+2)\sin^2\theta} = \frac{2}{\frac{a}{\tan\theta} + (a+2)\tan\theta} \\ &= \frac{2}{\left[\sqrt{\frac{a}{\tan\theta}} - \sqrt{(a+2)\tan\theta}\right]^2 + 2\sqrt{a(a+2)}} \end{aligned} \quad (9)$$

从(9)式可看出, 当 $\sqrt{\frac{a}{\tan\theta}} = \sqrt{(a+2)\tan\theta}$ 时, 即 $\tan\theta = \sqrt{\frac{a}{a+2}}$ 时, $F(\theta)$ 达极大值, 其值为

$$\begin{aligned} F(\theta)_{\max} &= \frac{1}{\sqrt{a(a+2)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2m_0}{3m} \left(\frac{2m_0}{3m} + 2\right)}} \\ &= \frac{3m}{2\sqrt{m_0^2 + 3mm_0}} \end{aligned}$$

故

$$\mu_{\min} = \frac{3m}{2\sqrt{m_0^2 + 3mm_0}} \quad (10)$$

15. 在航天飞船上, 如图 4-20 所示, 有一个长度 $l=20\text{cm}$ 的圆筒, 绕着与筒的长度方向相垂直的轴 OO' 以恒定的转速 $\omega=100\text{r/min}$ 旋转. 筒的近轴端离开轴线 OO' 的距离为 $d=10\text{cm}$, 筒内装满非常黏稠、密度为 $\rho=1.2\text{g/cm}^3$ 的液体. 有一颗质量为 $m'=1.0\text{mg}$ 、密度 $\rho'=1.5\text{g/cm}^3$ 的粒子从圆筒的正中部释放(释放时粒子相对于圆筒为静止), 试求该粒子在到达筒端的过程中克服液体的粘滞阻力所做的功. 如果这个粒子的密度是 $\rho''=1.0\text{g/cm}^3$, 其他条件均不变, 则粒子在到达筒端的过程中克服粘滞阻力所做的功又是多少?

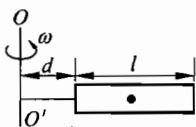


图 4-20

解析

设该粒子的体积为 ΔV , 它离开转轴的距离为 r , 如图 4-21 所示. 先设想如果占有这个体积的不是粒子, 而是和周围同样的液体, 那么当圆筒旋转时, 这一小团液体做匀速圆周运动, 它的向心加速度是由周围的液体对它的压力的合作用产生的. 由图所示, 用 $F' - F$ 表示该合力, 则

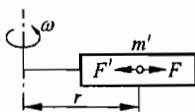


图 4-21

$$F' - F = ma = \rho \Delta V \cdot r \omega^2 \quad (1)$$

式中加速度 a 的方向指向转轴, 在图上向左.

实际上, 占有该体积的是密度为 ρ' 的粒子, 由于其大小、形状、位置等情况与上面设想的小团液体一样, 因此周围液体对它的压力不变. 但是, 它本身的质量变大了, 因此这些压力的合力小于维持它做匀速圆周运动所需的向心力, 粒子将沿筒轴向外运动. 又由于液体非常黏稠, 所以粒子所受的粘滞阻力使它的向外运动的速度非常缓慢, 在此过程中的每一时刻, 其加速度仍可近似地按匀速圆周运动处理. 用 F_f 表示粘滞阻力的大小(方向向左), 有

$$(F' - F) + F_f = m'a = \rho' \Delta V \cdot r \omega^2 \quad (2)$$

(2)式减去(1)式得

$$F_f = (\rho' - \rho) \Delta V \cdot r \omega^2 \quad (3)$$

由于 $\rho' > \rho$, 所以阻力 F_f 为正值, 表示方向向左, 而粒子将向右运动.

现在计算克服阻力 F_f 所做的功 W . 以航天飞船为参考系, 在圆筒旋转过程中, 粒子的运动轨迹如图 4-22 所示(沿转轴俯视). 当粒子离转轴的距离为 r 时, 阻力 F_f 与该处粒子轨迹的切线夹角设为 α , 则粒子运动一小段路程 Δs 时, 克服阻力的功为

$$\Delta W = F_f \cdot \Delta s \cdot \cos \alpha$$

而由于 $\Delta s \cdot \cos \alpha = \Delta r$, 所以

$$\Delta W = F_f \cdot \Delta r$$

从(3)式可见, F_f 与 r 成线性关系, 粒子在圆筒中央时:

$$F_{f1} = (\rho' - \rho) \Delta V \cdot \omega^2 (d + l/2)$$

当粒子到达圆筒右端时

$$F_{f2} = (\rho' - \rho) \Delta V \cdot \omega^2 (d + l)$$

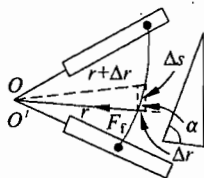


图 4-22

用作图法可知, W 等于图 4-23 中 F_f 曲线下的面积, 即

$$\begin{aligned} W &= (\rho' - \rho) \Delta V \cdot \omega^2 (d + l/2) (l/2) + \\ &\quad (1/2) (\rho' - \rho) \Delta V \omega^2 (l/2) (l/2) \\ &= (1/2) m' (1 - \rho/\rho') \omega^2 l (d + 3l/4) \end{aligned} \quad (4)$$

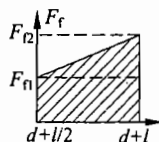


图 4-23

代入数据, 有

$$\begin{aligned} W &= (1/2) \times 10^{-6} \times (1 - 1.2/1.5) \times (628/60)^2 \times \\ &\quad 0.20 \times (0.10 + 3 \times 0.20/4) \text{ J} \\ &= 5.5 \times 10^{-7} \text{ J} \end{aligned} \quad (5)$$

当粒子密度为 ρ'' 时, 类似于前面的分析, 而现在它和粒子处设想为小团液体相比, 质量变小了, 周围液体对其压力的合力大于维持它做匀速圆周运动所需的向心力, 粒子将沿筒轴向左运动. 相应于(3)式, 现在我们得到

$$F_f = (\rho'' - \rho) \Delta V'' \cdot r \omega^2 = m'' (1 - \rho/\rho'') r \omega^2 \quad (6)$$

但因 $\rho'' < \rho$, 所以(6)式中 F_f 为负值, 它正表明阻力方向为向右.

题设 $m'' = m'$, 所以由作图法可得此时粒子由筒中央到筒左端的过程中, 克服粘滞阻力的功为

$$\begin{aligned} W' &= m' (\rho/\rho'' - 1) \omega^2 dl/2 + (1/2) m' (\rho/\rho'' - 1) \omega^2 (l/2) (l/2) \\ &= (1/2) m' (\rho/\rho'' - 1) \omega^2 l (d + l/4) \end{aligned}$$

代入数据, 得

$$W' = 3.3 \times 10^{-7} \text{ J}$$

绕竖直轴旋转的水平细管内的液体所处的状态与细管静止时液体所处的状态是不同的. 当细管静止时, 沿管轴液体的压强处处相等; 当细管旋转时, 沿管轴各点的压强是不同的. 沿着管轴各点间的压差是管底对液体的压力造成的. 当水平细管绕竖直轴以角速度 ω 旋转时, 管内的液体都具有沿管轴并指向转轴方向的加速度. 以 A 表示细管横截面的面积, 则离转轴的距离为 r 与 $r + \Delta r$ 的一小段液体的质量为 $A \Delta r \rho$, 其加速度为 $\omega^2 r$, 这段液体的加速度是因为它的两端受到它两端以外液体的压力差造成的, 如图 4-24 所示. 若离转轴的距离为 r 处液体的压强为 $p(r)$, 离转轴的距离为 $r + \Delta r$ 处液体的压强为

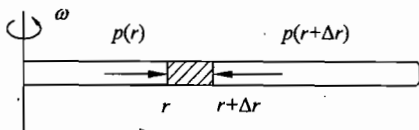


图 4-24

$p(r+\Delta r)$, 由牛顿第二定律有

$$p(r+\Delta r)A - p(r)A = A\rho\Delta r \cdot \omega^2 r$$

若以 Δp 表示 $p(r+\Delta r) - p(r)$, 则有

$$\Delta p = \rho\omega^2 r\Delta r$$

即液体内沿细管轴线相距为 Δr 的两点间的压强差与 Δr 有关, 与这两点离开转轴的距离 r 也有关.

16. 劲度系数为 k 的水平轻质弹簧, 左端固定, 右端系一质量为 m 的物体. 物体可在有摩擦的水平桌面上滑动(如图 4-25). 弹簧为原长时物体位于 O 点. 现在把物体沿弹簧长度方向向右拉到距离 O 点为 A_0 的 P 点按住, 放手后弹簧把物体拉动. 设物体在第二次经过 O 点前, 在 O 点左方停住. 计算中可以认为动摩擦因数与静摩擦因数相等.

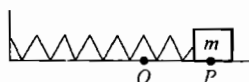


图 4-25

1) 讨论物体与桌面间的摩擦因数 μ 的大小应在什么范围内?

2) 求出物体停住点离 O 点的距离的最大值. 并回答: 这是不是物体在运动过程中所能达到的左方距离最远值? 为什么?

解析

1) 物体在弹簧力与摩擦力作用下, 在距离 O 点为 l 处停住不动的条件是:

(i) 物体速度为零; 弹性势能的减少等于物体克服滑动摩擦力所做的功.

(ii) 弹簧拉力 \leq 最大静摩擦力.

据此对物体运动做如下分析:

(i) 物体向左运动并正好停在 O 点的条件是

$$\frac{1}{2}kA_0^2 = \mu mgA_0$$

解得

$$\mu = kA_0/(2mg) \quad (1)$$

(ii) 如果 $\mu < kA_0/(2mg)$, 则物体将滑过 O 点. 设物体滑至 O 点左边 B 处(设 $OB = L_1$)时速度为零(如图 4-26 所示), 则有

$$\frac{1}{2}kA_0^2 - \frac{1}{2}kL_1^2 = \mu mg(A_0 + L_1)$$

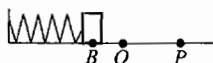


图 4-26

即

$$\frac{1}{2}k(A_0 - L_1) = \mu mg \quad (2)$$

若物体能停住, 则 $kL_1 \leq \mu mg$. 故 μ 应满足条件

$$\mu \geq kA_0/(3mg) \quad (3)$$

(iii) 如果(2)式能满足, 但 $\mu < kA_0/(3mg)$, 则物体不会停在 B 处而要向右运动. μ 值越小则往右滑动的距离越远. 设物体正好停在 O 处, 则有

$$\frac{1}{2}kL_1^2 = \mu mgL_1 \quad (4)$$

由(2)、(4)两式可求得

$$\mu = kA_0/(4mg)$$

要求物体停在 O 点左方, 则相应地要求

$$\mu > kA_0/(4mg) \quad (5)$$

综合以上分析结果, 物体停在 O 点左方而不第二次经过 O 点时, μ 的数值范围为

$$kA_0/(4mg) < \mu < kA_0/(2mg) \quad (6)$$

2) 当 μ 在 $kA_0/(3mg) \leq \mu < kA_0/(2mg)$ 范围内时, 物体向左滑动直至停住而不返回. 由(2)式可求出最远停住点(设为 B_1 点)到 O 点的距离为

$$L = A_0 - \frac{2\mu mg}{k} = A_0 - \frac{2mg/k}{kA_0/(3mg)} = \frac{A_0}{3} \quad (7)$$

当 $\frac{kA_0}{4mg} < \mu < \frac{kA_0}{3mg}$ 时, 物体在 B_1 点 ($OB_1 = A_0/3$) 的速度大于零, 因此物体将继续向左运动, 但它不可能停在 B_1 点的左方. 因为与 B_1 点相应的 $\mu = kA_0/(3mg)$, $L_1 = A_0/3$, 如果停留在 B_1 点左方, 则物体在 B_1 点所受的弹簧拉力大于 $kA_0/3$, 而摩擦力 μmg 小于 $kA_0/3$, 弹簧拉力大于摩擦力, 所以物体不可能停住而一定返回, 最后停留在 O 和 B_1 之间.

所以无论 μ 值如何, 物体停住点与 O 点的最大距离为 $A_0/3$. 但这不是物体在运动过程中所能达到的左方距离最远值.

此题要求对于静摩擦力有准确理解, 对于功能关系能熟练运用, 这样才能掌握分析此题的关键, 即停住不动的条件(i)与(ii). 在此基础上所作的分析中还需看到在不同的 μ 值范围内物体运动的各种可能情况, 并根据这些可能运动的临界情况确定 μ 值的大小范围. 本题的第2)问又发展一步, 还要求找出物体能停在 O 点左方最远的距离, 这又要作出临界情况的判断. 此题对于分析能力的要求是较高的, 考虑不周或判断不准确都将导致解题的失误, 特别是容易忽略物体运动过了 B_1 点又回到 B_1 点以内停住的可能性.

17. 如图4-27所示. 四个质量均为 m 的质点, 用同样长度且不可伸长的轻绳连结成菱形 $ABCD$, 静止放在水平光滑的桌面上. 若突然给质点 A 一个历时极短沿 CA 方向的冲击, 当冲击结束时, 质点 A 的速度为 v , 其他质点也获得一定的速度, $\angle BAD = 2\alpha$ ($\alpha < \pi/4$). 求此质点系统受冲击后所具有的总动量和总能量.

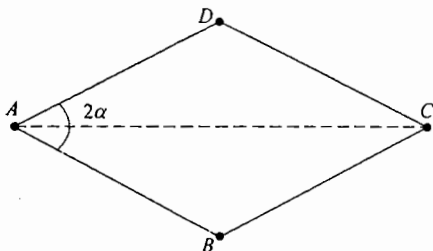


图 4-27

解析

由对称性可知, C点的速度也必沿 CA 方向, 设其大小为 v_C . D 的速度可以分解为平行于 v 的分速度和垂直于 v 的分速度, 其大小分别设为 v_{D1} 和 v_{D2} . 同样, B 的速度也类似地分解为平行和垂直于 v 的两个分速度, 其大小设为 v_{B1} 和 v_{B2} , 如图 4-28 所示.

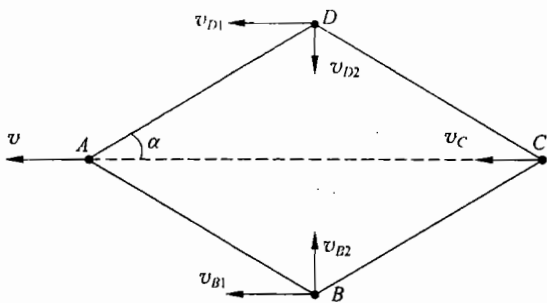


图 4-28

根据对称性, 必有

$$v_{B1} = v_{D1} \quad (1)$$

$$v_{B2} = v_{D2} \quad (2)$$

由于绳子不可伸长, A 沿 DA 的分速度和 D 沿 DA 的分速度一定相等, C 沿 CD 的分速度和 D 沿 CD 的分速度也相等, 即

$$v \cos \alpha = v_{D1} \cos \alpha + v_{D2} \sin \alpha \quad (3)$$

$$v_C \cos \alpha = v_{D1} \cos \alpha - v_{D2} \sin \alpha \quad (4)$$

另一方面, 设绳子 AD 给质点 D 的冲量的大小为 I_1 , 绳子 DC 给质点 C 的冲量大小为 I_2 . 注意到绳子 DC 给质点 D 的冲量的大小同样也是 I_2 (各冲量的方向均沿绳子方向). 由对称性还可以判定, 绳子 AB 给质点 B 的冲量的大小也是 I_1 , 绳子 BC 给质点 B 和 C 的冲量的大小都是 I_2 . 根据动量定理, 可分别列出关于质点 D 平行和垂直于 v 的方向以及质

点 C 平行于 v 方向的关系式如下:

$$mv_{D1} = I_1 \cos\alpha - I_2 \cos\alpha \quad (5)$$

$$mv_{D2} = I_1 \sin\alpha + I_2 \sin\alpha \quad (6)$$

$$mv_C = 2I_2 \cos\alpha \quad (7)$$

由(3)~(7)式可解出本题所需的 v_{D1} 、 v_{D2} 和 v_C

$$v_{D1} = v/(1 + 2\sin^2\alpha) \quad (8)$$

$$v_{D2} = v\sin 2\alpha/(1 + 2\sin^2\alpha) \quad (9)$$

$$v_C = v\cos 2\alpha/(1 + 2\sin^2\alpha) \quad (10)$$

据此结果和(1)、(2)式,此系统的总动量为

$$p = mv + 2mv_{D1} + mv_C = 4mv/(1 + 2\sin^2\alpha) \quad (11)$$

方向沿 CA 方向.

此系统的总动能为

$$\begin{aligned} E &= E_A + E_B + E_D + E_C \\ &= (1/2)m(v^2 + 2v_{D1}^2 + 2v_{D2}^2 + v_C^2) \\ &= 2mv^2/(1 + 2\sin^2\alpha) \end{aligned} \quad (12)$$

本题是一种打击问题,在非常短的时间 Δt 内,质点 A 受到一个很大的打击力,虽然力的作用时间 Δt 很小,但因打击力比较大,故力的冲量 I 仍可以是很大的,本题所讨论的问题则是且仅是打击力作用刚结束时刻各质点的运动状态.这时每个质点都具有一定的速度,但尚未来得及发生位移,菱形 ABCD 的形状尚未变化.有的学生不了解这一点,误认为既然每个质点有了速度,质点必有位移,菱形 ABCD 必将变形,持这种看法的一个原因可能是没有正确掌握瞬时速度的概念.所谓每个质点尚未来得及发生位移是指每个质点的位移 Δs 非常小,小到可以忽略,故菱形 ABCD 尚未变形.但因为发生这可以忽略的位移所经历的时间 Δt 亦非常小,两个非常小量的比值 $\Delta s/\Delta t$ 的极限,即速度 v 并不很小,这便是质点被打击后具有速度而尚无位移的含义.

因为绳没有质量,质点 A 受到沿 CA 方向的冲击的同时,要受到绳 DA、BA 的冲量,绳 AD 和 AB 又同时有冲量作用于质点 B 和 D;在质点 B、D 受到冲击的同时,又分别受到绳 CB 和 CD 的冲量作用,同时,绳 DC、BC 又有冲量作用于质点 C;所以经历时间 Δt ,不但质点 A 获得了速度,质点 B、C、D 都获得了速度.四个质点分别获得速度都发生在 A 受到冲击的 Δt 时间内,而不是在质点 A 发生位移之后.当然,在质点 A 发生位移之后,每个质点的速度又会变化,但这已非本题所要考虑的问题了.

四个质点是用轻绳连结成菱形,不是用轻杆连结成菱形.因为绳是柔软的,所以绳作用于质点的冲量只能沿着绳,不会有垂直于绳方向的冲量.轻杆则不同,杆是可以有垂直于杆的方向的力作用于被杆连结的物体上的.

试题给出“不可伸长的”绳这一条件亦非常重要,尽管由绳连结的两个质点的速度不同,但两个质点沿着绳的分速度一定相等.

本题的文字叙述相当简洁,但学生在解题时必须抓住文中的一些“关键词”,而且要善于把这些“关键词”在物理上的表现弄明白,这样才能求出问题的解答.

18. 质量分别为 m_1 、 m_2 和 m_3 的三个质点 A、B、C 位于光滑的水平桌面上,用已拉直的不可伸长的柔软的轻绳 AB 和 BC 连结,角 ABC 为 $\pi - \alpha$, α 为一锐角,如图 4-29 所示. 今有一冲量为 J 的冲击力沿 BC 方向作用于质点 C, 求质点 A 开始运动时的速度.

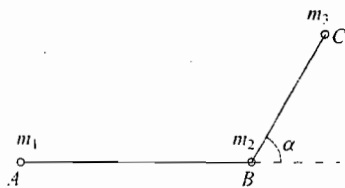


图 4-29

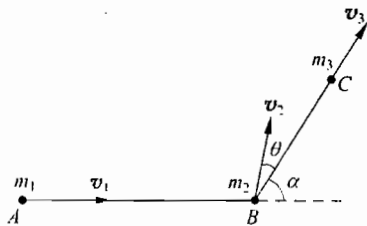


图 4-30

解析

设受冲击后 A、B、C 三质点开始运动时的速度分别为 v_1 、 v_2 和 v_3 , 由于三质点除质点 C 受冲击力外, 所受的只有绳的张力, 所以知 v_3 必沿 BC 方向, v_1 必沿 AB 方向 (如图 4-30 所示). 在受冲击力之后, 三质点的动量和等于所受的冲量 J .

$$J = m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3$$

将此式沿 BC 方向和与 BC 垂直的方向分解, 得

$$J = m_1 v_1 \cos \alpha + m_2 v_2 \cos \theta + m_3 v_3 \quad (1)$$

$$0 = -m_1 v_1 \sin \alpha + m_2 v_2 \sin \theta \quad (2)$$

式中 θ 为 v_2 与 BC 方向所夹之角. 由于绳不可伸长, 又有

$$v_2 \cos \theta = v_3 \quad (3)$$

$$v_2 \cos(\theta + \alpha) = v_1 \quad (4)$$

以上四式中, v_1 、 v_2 、 v_3 和 θ 是未知量, 可解得

$$v_1 = \frac{J m \cos \alpha}{m_2 (m_1 + m_2 + m_3) + m_1 m_3 \sin^2 \alpha} \quad (5)$$

其方向沿 AB 方向.

多数参赛学生解不出本题的原因首先在于未能判断出质点 A 的初速必沿 AB 方向, 质点 C 的初速必沿 BC 方向; 其次在于不知道三个质点的动量的矢量和应沿 BC 方向, 从而将每个质点的动量按 BC 和垂直于 BC 方向作正交分解; 第三是对“不可伸长的柔软的轻绳”的含义不理解, 列不出(3)、(4)两式. 本题是本届预赛题中难度最大的.

19. 如图 4-31 所示, 一质量为 m_0 、长为 L 带薄挡板 P 的木板, 静止在水平的地面上, 设木板与地面间的静摩擦因数与滑动摩擦因数相等, 皆为 μ . 质量为 m 的人从木板的一端由静止开始相对于地面匀加速地向前走向另一端, 到达另一端时便骤然抓住挡板 P 而停在木板上. 已知人与木板间的静摩擦因数足够大, 人在木板上不滑动. 问: 在什么条件下, 最后可使木板向前方移动的距离达到最大? 其值等于多少?



图 4-31

解析

在人从木板的一端向另一端运动的过程中, 先讨论木板发生向后运动的情形. 以 t 表示人开始运动到刚抵达另一端尚未停下这段过程中所用的时间, 以 x_1 表示木板

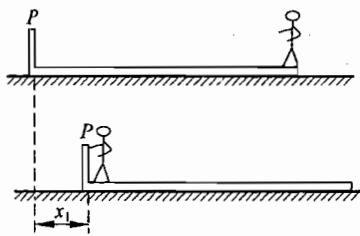


图 4-32

向后移动的距离, 如图 4-32 所示. 以 F_f 表示人与木板间的静摩擦力, 以 F 表示地面作用于木板的摩擦力, 以 a_1 和 a_2 分别表示人和木板的加速度, 则有

$$F_f = ma_1 \quad (1)$$

$$L - x_1 = \frac{1}{2}a_1t^2 \quad (2)$$

$$F_f - F = m_0a_2 \quad (3)$$

$$x_1 = \frac{1}{2}a_2t^2 \quad (4)$$

解以上四式, 得

$$t = \sqrt{\frac{2Lm_0m}{m_0F_f + m(F_f - F)}} \quad (5)$$

对人和木板组成的系统, 人在木板另一端骤然停下后, 两者的总动量等于从开始到此时地面的摩擦力 F 的冲量, 忽略人骤然停下那段极短的时间, 则有

$$Ft = (m_0 + m)v \quad (6)$$

v 为人在木板另一端刚停下时两者一起运动的速度. 设人在木板另一端停下后两者一起向前移动的距离为 x_2 , 与地面的滑动摩擦因数为 μ , 则有

$$\frac{1}{2}(m_0 + m)v^2 = \mu(m_0 + m)gx_2 \quad (7)$$

木板向前移动的净距离为

$$X = x_2 - x_1 \quad (8)$$

由以上各式得

$$X = \frac{1}{\mu g} \left(\frac{F}{m_0 + m} \right)^2 \left[\frac{Lm_0 m}{(m_0 + m)(F_f - F) + m_0 F} \right] - (F_f - F) \left[\frac{Lm}{m_0 F_f + m(F_f - F)} \right]$$

由此式可知,欲使木板向前移动的距离 X 为最大,应有

$$F_f = F \quad (9)$$

即

$$F_f = F_{\max} = \mu(m_0 + m)g \quad (10)$$

即木板向前移动的距离为最大的条件是:人作用于木板的静摩擦力等于地面作用于木板的滑动摩擦力.

移动的最大距离

$$X_{\max} = \frac{m}{m_0 + m} L \quad (11)$$

由上可见,在设木板发生向后运动,即 $F_f \geq F$ 的情况下, $F_f = F$ 时, X 有极大值,也就是说,在时间 $0 \sim t$ 内,木板刚刚不动的条件下 X 有极大值.

再来讨论木板不动,即 $F_f < F$ 的情况.这时,因为 $F_f < F$,所以人积累的动能和碰后的总动能都将变小,从而前进的距离 x 也变小,即小于上述的 X_{\max} .

在求解本题时,由于所取的体系不同,或选取的过程不同,分析的步骤、列出的方程都可不同,但都是正确的,都能得到同样的结果.例如,上面给出的分析和解答先是分别以人和木板作为研究对象(作为考查的体系),考查的过程则是从人开始在木板上走直到刚抵达木板的另一端但尚未在木板上停下,从而得到方程(1)~(4)式.再以人和木板一起作为体系,考查的过程则是从人开始在木板上走到人走到木板的另一端并骤然停在木板上、与木板一起以共同的速度开始运动止,其中包括骤然抓住挡板这一时间极短的过程,再根据质点组的动量定理,便可得到(6)式.如果在得到(1)~(4)式后,仍分别以人和木板为体系,则在人刚抵达木板的另一端但尚未在木板上停下时,人和木板的速度分别为

$$v_1 = a_1 t$$

$$v_2 = a_2 t$$

这时,人与木板的动量分别为 mv_1 和 $m_0 v_2$.然后才把人与木板作为体系,考查人骤然抓住挡板 P 而停在木板这一时间极短的“碰撞”过程.则因地面作用于木板的摩擦力 F 在“碰

撞”的极短时间内的冲量可忽略不计,故系统的动量守恒.注意到“碰撞”前木板速度的方向及“碰”后人与木板以同一速度 v 运动,就有

$$mv_1 - m_0v_2 = (m_0 + m)v$$

由 $v_1 = a_1t, v_2 = a_2t$ 及(1)、(2)、(3)、(4)各式,最后同样可得到(6)式.

有的学生可能自学了质心运动定理,他不理解(6)式是质点组的动量定理在本题条件下的具体表现,见到(6)式便想到它给出的 v 是“碰撞”前质心的速度,不是“碰撞”后木板的速度.其实,(6)式的确可用于表示碰撞前系统质心的动量,但所谓系统的质心的动量,实际上就是组成系统的人和木板的动量的矢量和,但在“碰撞”以前,人与木板的速度不同,都不等于质心的速度.这些学生也没有理解(6)式同样代表“碰撞”后系统质心的动量,因为“碰撞”没有改变系统质心的动量.但在“碰撞”中,人与挡板 P 发生强烈的相互作用,使人与木板的速度由不等变为相等,都等于质心的速度.人与木板的速度都与质心速度相等,是“碰撞”造成的结果,是考虑了“碰撞”才得出的结论.

在求解本题时,体系的选择、过程的划分极为重要,必须很明确.否则,即使答案做对了,也不一定理解其中的道理.

20. 如图 4-33 所示, C 为一放在固定的粗糙水平桌面上的双斜面,其质量 $m_C = 6.5\text{kg}$,顶端有一定滑轮,滑轮的质量及轴处的摩擦皆可不计. A 和 B 是两个滑块,质量分别为 $m_A = 3.0\text{kg}, m_B = 0.50\text{kg}$,由跨过定滑轮的不可伸长的轻绳相连.开始时,设法抓住 A, B 和 C ,使它们都处在静止状态,且滑轮两边的轻绳恰好伸直.今用一大小等于 26.5N 的水平推力 F 作用于 C ,并同时释放 A, B 和 C .若 C 沿桌面向左滑行,其加速度 $a = 3.0\text{m/s}^2$, B 相对于桌面无水平方向的位移(绳子一直是绷紧的).试求 C 与桌面间的摩擦因数 μ . (图中 $\alpha = 37^\circ, \beta = 53^\circ$, 已知 $\sin 37^\circ = 0.6$, 重力加速度 $g = 10\text{m/s}^2$.)

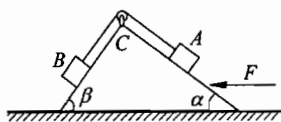


图 4-33

解析

设 a_A, a_B 与 a'_A, a'_B 分别为 A, B 相对桌面的加速度的大小和相对 C 的加速度的大小, 设水平向右为 x 轴的正方向, 竖直向上为 y 轴的正方向. 因为 B 开始时相对桌面静止, 以后相对桌面无水平方向的位移, 可知 a_B 沿水平方向的分量为零. 即

$$a_{Bx} = a'_{Bx} - a = 0$$

由此得

$$a'_{Bx} = a = 3\text{m/s}^2$$

因为绳不可伸长, 又是绷紧的, 故有

$$a'_A = a'_B$$

它们的方向分别沿所在的斜面,如图 4-34 所示. 各分量的大小

$$\begin{aligned} a'_{Br} &= a'_B \cos 53^\circ \\ a'_{By} &= a'_B \sin 53^\circ \\ a'_{Ar} &= a'_A \cos 37^\circ \\ a'_{Ay} &= -a'_A \sin 37^\circ \end{aligned}$$

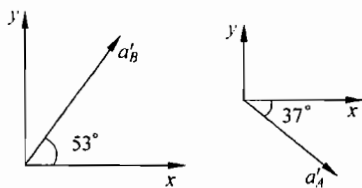


图 4-34

由此得

$$\begin{aligned} a'_B &= a'_A = 5\text{m/s}^2, \quad a'_{By} = 4\text{m/s}^2 \\ a'_{Ar} &= 4\text{m/s}^2, \quad a'_{Ay} = -3\text{m/s}^2 \end{aligned}$$

相对地面的各加速度的分量的大小为

$$\begin{aligned} a_{Ar} &= a'_{Ar} - a = 1\text{m/s}^2 \\ a_{Ay} &= a'_{Ay} = -3\text{m/s}^2 \\ a_{By} &= a'_{By} = 4\text{m/s}^2 \end{aligned}$$

对于由 A、B 和 C 组成的系统,在水平方向受到的外力是桌面对 C 的摩擦力 F_f ,方向向右;推力 F ,方向向左. 根据动量定理

$$(F_f - F)\Delta t = m_A \Delta v_{Ar} + m_B \Delta v_{Br} - m_C \Delta v$$

或

$$F_f - F = m_A \frac{\Delta v_{Ar}}{\Delta t} + m_B \frac{\Delta v_{Br}}{\Delta t} - m_C \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

即

$$F_f - F = m_A a_{Ar} + m_B a_{Br} - m_C a$$

将有关数值代入得

$$F_f = 10\text{N}$$

系统在竖直方向受到的外力是: 桌面作用于 C 的弹力 F_N ,方向竖直向上;各物体的重力,方向竖直向下. 因此有

$$[F_N - (m_A + m_B + m_C)g]\Delta t = m_C \Delta v_{Cy} + m_A \Delta v_{Ay} + m_B \Delta v_{By}$$

即

$$F_N = (m_A + m_B + m_C)g + m_A a_{Ay} + m_B a_{By}$$

代入有关数值,得

$$F_N = 93\text{N}$$

故摩擦因数

$$\mu = \frac{F_f}{F_N} = \frac{10}{93} \approx 0.11$$

由于双斜面 C 具有加速度,物块 A 和 B 相对桌面的加速度并不沿各自所在的斜面,尽管连结这两物块的绳是不可伸长的,两物块相对桌面的加速度的大小亦不相等,故问题

显得比较复杂,但如果以 C 为参考系,则物块 A 和 B 都沿各自所在的斜面运动,两者加速度的大小也相等.但 C 有加速度,不是惯性参考系,相对参考系 C ,牛顿定律不成立.这些情况,在解题时是应有所顾及的.

根据题给出的条件及相对不同参考系的加速度的叠加公式,物块 A 和 B 相对 C 的加速度的大小和方向都可求出,物块相对桌面的加速度的大小和方向也都可以求得.这样本题就转化为已知物体的加速度求作用于物体的力这一典型问题.虽然试题要求的仅是 C 与桌面间的摩擦因数,即作用于 C 的摩擦力和支承力的比值,但桌面对 C 的作用力与两物块与 C 之间的相互作用力是关联的,物块与斜面之间的作用力除了斜面对物块的支承力外,还有沿着斜面方向的摩擦力(题未言明斜面是光滑的,但摩擦力确实存在).通过对每个物体的受力分析,利用牛顿定律,是可以找出作用于每个物体的力的,只是运算复杂一些.

但是,若把两个物块 A 和 B 以及双斜面 C 作为一个体系,则物块与斜面之间的相互作用力包括摩擦力都是内力,只有作用于 A 、 B 、 C 的重力,桌面对 C 的支承力,桌面对 C 的摩擦力才是外力.每个物体在做加速运动,动量都在增加,但三个物体动量的增加量的总和(矢量和)仅取决于外力的冲量.正是基于这样的认识,才能得出

$$(F_f - F)\Delta t = m_A \Delta v_{Ax} + m_B \Delta v_{Bx} - m_C \Delta v$$

$$[F_N - (m_A + m_B + m_C)g]\Delta t = m_A \Delta v_{Ay} + m_B \Delta v_{By} + m_C \Delta v_{Cy}$$

这两个质点组的动量定理的分量形式.再利用速度的增加量与加速度的关系,桌面对 C 的支承力 F_N 和摩擦力 F_f 便立即求得.这是一种相当巧妙的思考方法.

能否想到把质点组的动量定理用于求解本题,不仅与学生是否知道质点组的动量定理有关,更可能与学生是否知道质点组动量定理的推导过程有关.因为知道推导过程,能引起联想,诱发你产生把质点组动量定理用于本题的想法.否则,即使质点组的动量定理就在你身边,也不一定想到要去利用它,因为本题连“动量”两字也未出现.

21. 有 5 个质量相同、其大小可不计的小木块 1、2、3、4、5 等距离地依次放在倾角 $\theta=30^\circ$ 的斜面上(如图 4-35).斜面在木块 2 以上的部分是光滑的,以下部分是粗糙的,5 个木块与斜面粗糙部分之间的静摩擦因数和动摩擦因数都是 μ .开始时用手扶着木块 1,其余各木块都静止在斜面上.现在放手,使木块 1 自然下滑并与木块 2 发生碰撞,接着陆续发生其他碰撞.假设各木块间的碰撞都是完全非弹性的.求 μ 取何值时木块 4 能被撞而 5 不能被撞?

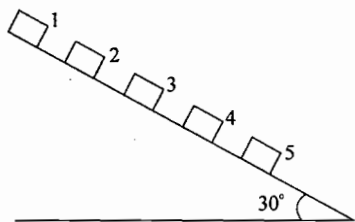


图 4-35

解析

此题从动能的角度来讨论比较简洁. 什么时候由于完全非弹性碰撞而结成一体的木块的动能变成零, 木块即停止在斜面上.

先求出质量为 m_0 、速率为 v 的质点与质量为 m 的静止质点做完全非弹性碰撞而结成一体后剩余的动能. 设 v' 为结成一体后的速率, 根据动量守恒定律

$$m_0 v = (m_0 + m) v' \quad (1)$$

碰撞后体系剩余的动能为

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} (m_0 + m) v'^2 = \frac{1}{2} (m_0 + m) \left(\frac{m_0 v}{m_0 + m} \right)^2 \\ &= \frac{m_0}{m_0 + m} \left(\frac{1}{2} m_0 v^2 \right) \end{aligned} \quad (2)$$

令 E_{k0} 表示原来的动能, 则上式可写成

$$E_k = m_0 E_{k0} / (m_0 + m) \quad (3)$$

现在讨论本题中木块碰撞后结合体的动能. 在木块下滑时, 势能的减少使其动能增加, 而摩擦损耗又使动能减少. 设各木块相距为 d (木块的大小不计), 则木块 1 与 2 相碰之前, 其动能为

$$E_{k0} = mgd \sin \theta = A$$

两者刚碰上结成一体后, 动能为

$$E_{k1} = m E_{k0} / (m + m) = A/2 \quad (4)$$

1、2 结合体与木块 3 相碰之前, 动能为

$$E'_{k1} = E_{k1} + 2mgd \sin \theta - 2\mu mgd \cos \theta = E_{k1} + 2(A - B)$$

其中 $B = \mu mgd \cos \theta$. 相碰之后动能为

$$E_{k2} = \frac{2m}{2m + m} E'_{k1} = \frac{2}{3} \left[\frac{1}{2} A + 2(A - B) \right] \quad (5)$$

依次可得 1、2、3 结合体与木块 4 相碰之前动能为

$$E'_{k2} = E_{k2} + 3(A - B)$$

若此结合体与木块 4 能相碰 (即木块 4 能被撞), 必须符合条件:

$$E'_{k2} = \frac{2}{3} \left[\frac{1}{2} A + 2(A - B) \right] + 3(A - B) > 0 \quad (6)$$

在这种情况下, 两者刚相碰之后的 1、2、3、4 结合体的动能为

$$\begin{aligned} E_{k3} &= \frac{3m}{3m + m} E'_{k2} \\ &= \frac{3}{4} \left\{ \frac{2}{3} \left[\frac{1}{2} A + 2(A - B) \right] + 3(A - B) \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

若要这结合体不能与木块 5 相碰(即木块 5 不能被撞),必须符合条件:

$$E'_{k3} = E_{k3} + 4(A - B) \leq 0 \quad (8)$$

由条件(6)与(8)式可得

$$14A/3 - 13B/3 > 0, \quad \text{即} \quad B/A < 14/13 \quad (9)$$

$$30A/4 - 29B/4 \leq 0, \quad \text{即} \quad B/A \geq 30/29 \quad (10)$$

(9)、(10)式可合写成

$$30/29 \leq B/A < 14/13$$

但

$$\frac{B}{A} = \frac{\mu mgd \cos\theta}{mgd \sin\theta} = \frac{\mu}{\tan\theta} = \sqrt{3}\mu$$

故 μ 必须满足的条件为

$$\frac{30}{29\sqrt{3}} \leq \mu < \frac{14}{13\sqrt{3}}$$

或

$$0.597 \leq \mu < 0.622$$

此题有一定复杂程度,但原理上无很大困难,问题在于能够选用便于计算的方法(即使是使用运动学公式,也是直接讨论速度平方比讨论速度便于计算些,从能量角度讨论自然要更简洁些);能够确定条件(6)与(8)式.学生有时想不到此题需要两个条件来确定 μ 值的范围.此题解法需要的技巧较高.

22. 从离地面的高度为 h 的固定点 A , 将甲球以速度 v_0 抛出, 抛射角为 α , $0 < \alpha < \pi/2$, 若在 A 点前方适当的地方放一质量非常大的平板 OG , 让甲球与平板作完全弹性碰撞, 并使碰撞点与 A 点等高, 如图 4-36 所示, 则当平板倾角 θ 为恰当值时 ($0 < \theta < \pi/2$), 甲球恰好能回到 A 点. 另有一小球乙, 在甲球自 A 点抛出的同时, 从 A 点自由落下, 与地面作完全弹性碰撞. 试讨论 v_0 、 α 、 θ 应满足怎样的一些条件, 才能使乙球与地面碰撞一次后与甲球同时回到 A 点.

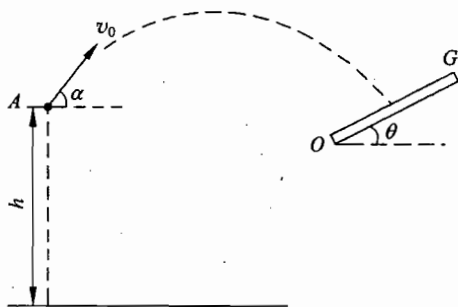


图 4-36

解析

甲球从 A 点抛出时的抛射角为 α , 速度为 v_0 , 因为碰撞点与 A 点等高, 球与板的碰撞是弹性的, 板的质量又很大, 根据机械能守恒定律可知, 球与板碰撞前的速度与碰撞后的速度都等于 v_0 , 设碰撞后甲球从板弹回时的抛射角为 α' , 如图 4-37 所示.

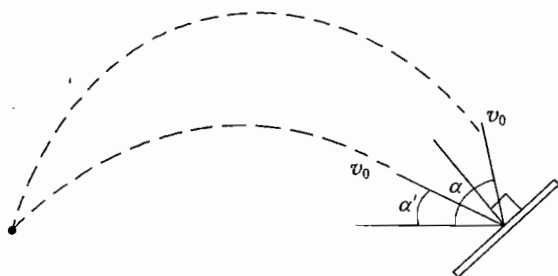


图 4-37

A 点与碰撞点之间的距离即为射程 L , 若甲球又回到 A 点, 则有

$$L = v_0^2 \sin 2\alpha / g = v_0^2 \sin 2\alpha' / g \quad (1)$$

即

$$\sin 2\alpha' = \sin 2\alpha$$

由此得

$$\alpha' = \alpha \quad (2)$$

或

$$\alpha' = (\pi/2) - \alpha \quad (3)$$

$\alpha' = \alpha$, 表示甲球射到平板时速度的方向与它从平板反弹出时速度的方向相反, 故甲球必沿板的法线方向射向平板, 反弹后, 甲球沿原来的路径返回 A 点, 因此有 $\alpha + \theta = \pi/2$.

$$\theta = (\pi/2) - \alpha \quad (4)$$

$\alpha' = (\pi/2) - \alpha$, 表示甲球沿与平板的法线成某一角度的方向射向平板, 沿位于法线另一侧与法线成相同角度的方向弹出, 然后甲球沿另一条路径回到 A 点, 由图 13-13 中的几何关系可知

$$\alpha' + (\alpha - \alpha')/2 + \theta = \pi/2 \quad (5)$$

由(3)、(5)两式, 得

$$\theta = \pi/4 \quad (6)$$

下面分别讨论以上两种情况下, 甲球乙球同时回到 A 点应满足的条件.

1) $\alpha' = \alpha, \theta = (\pi/2) - \alpha$, 即 A 球沿原路径回到 A 点的情形.

设甲球从 A 点抛出、与 OG 板碰撞, 到沿原路径回到 A 点共经历的时间为 t_1 , 则有

$$t_1 = 2v_0 \sin \alpha / g + 2v_0 \sin \alpha' / g = 4v_0 \sin \alpha / g \quad (7)$$

设乙球从 A 点自由落下, 与地面发生一次碰撞、再回到 A 点共经历的时间为 t_2 , 则有

$$t_2 = 2\sqrt{2h/g} \quad (8)$$

两球在 A 点相遇,要求 $t_1 = t_2$, 则 $4v_0 \sin\alpha/g = 2\sqrt{2h/g}$

$$\text{即} \quad \sin\alpha = (1/v_0)\sqrt{gh/2} \quad (9)$$

$$\text{或} \quad \alpha = \arcsin[(1/v_0)\sqrt{gh/2}] \quad (10)$$

因 $\sin\alpha < 1$, 由(9)式得

$$v_0 > \sqrt{gh/2} \quad (11)$$

当 v_0 满足(11)式, 甲球的抛射角 α 满足(10)式, 平板的倾角 θ 满足(4)式, 甲球才能沿原路返回 A 点并与乙球相遇.

2) $\alpha' = (\pi/2) - \alpha, \theta = \pi/4$, 即甲球与 OG 板碰撞后, 沿另一条路径回到 A 点的情形. 设甲球自 A 点抛出, 经与平板碰撞又回到 A 点经历的总时间为 t'_1 , 则有

$$t'_1 = 2v_0 \sin\alpha/g + 2v_0 \sin\alpha'/g = 2v_0(\sin\alpha + \cos\alpha)/g \quad (12)$$

设乙球自 A 点下落后又回到 A 点经历的总时间为 t'_2 则有

$$t'_2 = 2\sqrt{2h/g} \quad (13)$$

两球在 A 点相遇, 要求 $t'_1 = t'_2$.

$$2v_0(\sin\alpha + \cos\alpha)/g = 2\sqrt{2h/g}$$

$$\text{或} \quad \sin(\alpha + \pi/4) = (1/v_0)\sqrt{gh} \quad (14)$$

$$\alpha = \arcsin[(1/v_0)\sqrt{gh}] - \pi/4 \quad (15)$$

因 $1 < \alpha < \pi/2$, 故有

$$1 \geq \sin(\alpha + \pi/4) > \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2 \quad (16)$$

结合(14)式, 得

$$\sqrt{2gh} > v_0 \geq \sqrt{gh} \quad (17)$$

当 v_0 满足(17)式, 甲球的抛射角 α 满足(15)式, 平板的倾角 θ 满足(6)式, 甲球将沿另一条路径回到 A 点, 同时与乙球相遇.

综合以上讨论, 结论为:

当 $v_0 > \sqrt{gh/2}$, 且当 $\alpha = \arcsin[(1/v_0)\sqrt{gh/2}], \theta = (\pi/2) - \alpha$, 甲球沿原路径返回 A 点的同时, 乙球也回到 A 点.

当 $\sqrt{2gh} > v_0 > \sqrt{gh}$, 且 $\alpha = \arcsin[(1/v_0)\sqrt{gh}] - \pi/4, \theta = \pi/4$, 甲球还可沿另一路径回到 A 点, 这时乙球也正好回到 A 点.

23. 如图 4-38 所示, 长为 L 的光滑平台固定在地面上, 平台中央放有小物体 A 和 B, 两者彼此接触. 物体 A 的上表面是半径 $R (R \ll L)$ 的半圆形光滑轨道, 轨道顶端距台面高度为 h 处, 有一小物体 C, A、B、C 的质量均为 m . 现物体 C 从静止状态沿轨道下滑. 已知在运动过程中, A、C 始终保持接触, 试求:

1) 物体 A 和 B 刚分离时, 物体 B 的速度.

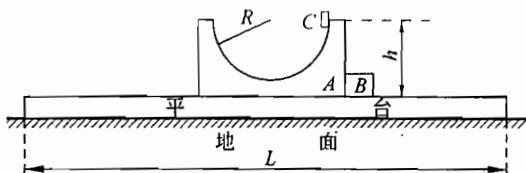


图 4-38

2) 物体 A 和 B 分离后, 物体 C 所能达到距台面的最大高度.

3) 判断物体 A 从平台的左边还是右边落地, 并粗略估算物体 A 从与 B 分离后到离开台面所经历的时间.

解析

由题意 $R \ll L$, 所以下面的解答中, 都是设物体尚未离开平台.

1) 在物体 C 下滑的过程中, C 对 A 的作用力沿水平方向的分力是向右的, 推动 A 和 B 一起向右加速运动. 当 C 到达轨道的最低位置时, C 对 A 的作用力的水平分力为零, 这时 A、B 向右运动的速度达到最大. 继续下去, C 对 A 的作用力的水平分力将开始向左, A 将开始做减速运动, 从而和 B 分离. 由此可知, 当 C 滑到轨道最低位置时, A、B 开始分离. 这时 A、B 向右运动, 由动量守恒可知 C 是向左运动的. 设用 v_A 、 v_B 、 v_C 分别表示三者此时速度的大小, 根据动量守恒和能量守恒可知

$$mv_A + mv_B - mv_C = 0$$

$$mgR = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}mv_C^2$$

且有

$$v_A = v_B$$

由以上各式联立, 可解得

$$v_B = \frac{1}{3}\sqrt{3gR}$$

方向向右.

2) A、B 分离后, B 的动量为 mv_B , 方向向右. 当 C 达到最高点时, A、C 两物体无相对运动, 具有同样大小的速度 v , 方向向左. 根据动量守恒可知

$$mv_B - 2mv = 0$$

即

$$v = \frac{1}{2}v_B \quad (1)$$

用 l 表示 C 距台面的最大高度, 根据能量守恒可知

$$mgh = mgl + \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}2mv^2 \quad (2)$$

由(1)、(2)两式可解得

$$l = h - \frac{R}{4}$$

3) 在2)中已分析过,A、C两物体的总动量的方向是向左的,所以A从平台的左边落地,由于 $R \ll L$,因此,在讨论A、C在平台上滑动的距离和时间时,可粗略地把它们看成一个物体,具有向左的速度 $v = \frac{1}{2}v_B$,而且原来处于平台的中央,即距左端 $\frac{L}{2}$ 处,所以经历的时间 t 为

$$t = \frac{L/2}{v_B/2} = \sqrt{\frac{3}{gR}}L$$

本题是联合运用动量守恒定律和能量守恒定律的问题.由于题中涉及一个变力(A与C的相互作用力),所以中学生无法在全部时间内解决此题.解此题的技巧就在于选择几个特定时刻(开始,C在最下及C将脱离),找到一些关系.

24. 在一光滑水平的长直轨道上,等距离地放着足够多的、完全相同的、质量为 m 的长方形木块,依次编号为木块1,木块2,……,如图4-39所示.

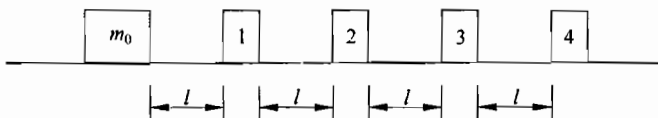


图 4-39

在木块1之前放一质量为 $m_0 = 4m$ 的大木块,大木块与木块1间的距离与相邻各木块间的距离相同,均为 l .现在,在所有木块都静止的情况下,以一沿轨道方向的恒力一直作用在大木块上,使其先与木块1发生碰撞,设碰后与木块1结为一体再与木块2发生碰撞,碰后又结为一体,再与木块3发生碰撞,碰后又结为一体,如此继续下去.现问大木块(以及与之结为一体的各小木块)与第几个小木块碰撞之前的一瞬间,会达到它在整个过程中最大速度?此速度等于多少?

解析

用 v_k 表示木块 k 刚要受碰时大木块(以及与之已成为一体的各小木块)的速度, u_k 表示木块 k 刚受碰后大木块(以及与之成为一体的各小木块)的速度, l 表示木块间的距离, F 表示恒力,则根据功能原理和动量守恒定律有:

木块 1 受碰前后

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(4m)v_1^2 = Fl \\ 4mv_1 = (4+1)mu_1 \end{cases}$$

木块 2 受碰前后

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(4+1)mv_2^2 = \frac{1}{2}(4+1)mu_1^2 + Fl \\ (4+1)mv_2 = (4+2)mu_2 \end{cases}$$

木块 3 受碰前后

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(4+2)mv_3^2 = \frac{1}{2}(4+2)mu_2^2 + Fl \\ (4+2)mv_3 = (4+3)mu_3 \end{cases}$$

⋮

木块 k 受碰前后

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(4+k-1)mv_k^2 = \frac{1}{2}(4+k-1)mu_{k-1}^2 + Fl \\ (4+k-1)mv_k = (4+k)mu_k \end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned} v_k^2 &= \frac{1}{4+k-1} \frac{2Fl}{m} + u_{k-1}^2 \\ &= \frac{1}{4+k-1} \frac{2Fl}{m} + \frac{(4+k-2)^2}{(4+k-1)^2} v_{k-1}^2 \\ &= \frac{1}{4+k-1} \frac{2Fl}{m} + \frac{(4+k-2)^2}{(4+k-1)^2} \times \\ &\quad \left[\frac{1}{4+k-2} \frac{2Fl}{m} + \frac{(4+k-3)^2}{(4+k-2)^2} v_{k-2}^2 \right] \\ &= \dots \\ &= \frac{2Fl}{m} \frac{(4+k-1) + (4+k-2) + \dots + (4+1)}{(4+k-1)^2} + \frac{4^2}{(4+k-1)^2} v_1^2 \\ &= \frac{2Fl}{m} \frac{(4+k-1) + (4+k-2) + \dots + (4+1) + 4}{(4+k-1)^2} \\ &= \frac{Fl}{m} \frac{k(k+7)}{(k+3)^2} \end{aligned}$$

$$\left(\text{因 } 4v_1^2 = \frac{2Fl}{m} \right)$$

欲求 v_k 最大值,可配方如下:

$$\begin{aligned} v_k^2 &= \frac{Fl}{m} \left[\frac{(k+3)^2 + (k+3) - 12}{(k+3)^2} \right] \\ &= \frac{Fl}{m} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{6}{k+3} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^2 \right] \\ &= \frac{Fl}{m} \left[\frac{49}{48} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{6}{k+3} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

可以看出,当 $\frac{1}{4} - \frac{6}{k+3} = 0$ 时, v_k 最大,由此得 $k=21$. v_k 的最大值

$$v_{21} = \sqrt{\frac{Fl}{m} \frac{49}{48}}$$

本题所涉及的物理规律是中学生很熟悉的,但数学处理比较复杂.从最初几次碰撞的物理量之间的关系到归纳出普遍的第 k 次碰撞前后物理量之间的关系,是本题所要考查的重点内容之一,这是分析问题和推理能力的重要表现;其后的数学处理也有相当的难度.对参加决赛的学生来说,从相当复杂的数学关系解出最后结果,能充分反映出学生思维的系统性和灵活性.

有一种看法认为,学习物理,主要是把物理概念弄清楚,不应把精力花在数学上,并由此推出,各种物理试题不应要求学生在数学上花力气.像本题,涉及的物理规律学生都很熟悉,但数学处理却比较复杂,故平时不宜要求学生去做,更不宜作为考试的试题.这种看法是片面的.在学习物理时,首先应重视对物理概念、物理规律的理解和应用,如果对基本的物理概念、物理规律尚未理解,便纠缠在数学上,在数学上花过多的时间,这确实是不好的.但有首先,必有其次,即使数学属于其次,也不是说数学不重要,而要真的学好物理,数学工具是非常重要的,不但要掌握数学,而且也要善于把数学工具用于物理.从物理学的发展历史看,物理与数学是分不开的.牛顿在发展力学的过程中,深感当时已有的数学知识已无法满足力学的需要而创造了微积分,而微积分的发展又极大地推动了力学以及物理学其他部门的发展;其他诸如数学的“场论”与电磁场理论,偏微分方程、矩阵代数与量子力学等都有着紧密的联系;群论是数学的一个分支,但在物理学研究的各个层次,包括基本粒子、原子核、原子、分子、固体和天体物理,都有着广泛的应用,并且越来越成为一切物理工作者理论的和实验的通用语言.在某种情况下,如果找不到一种适应近代物理所需要的近代数学,近代物理就很难发展.

要真的学好物理,就不应害怕数学,不要故意回避数学.每个学生应根据自己的情况,从实际出发正确处理学习物理和使用数学的关系.

25. 如图 4-40 所示,在水平桌面上放有长木板 C , C 上右端是固定挡板 P , 在 C 上左端和中点分别放有小物块 A 和 B , A 、 B 的尺寸以及 P 的厚度皆可忽略不计, A 、 B 之间和 B 、 P 之间的距离皆为 L . 设木板 C 与桌面之间无摩擦, A 、 C 之间和 B 、 C 之间的静摩擦因数及动摩擦因数均为 μ ; A 、 B 、 C (连同挡板 P) 的质量相同. 开始时, B 和 C 静止, A 以某一初速度向右运动. 试问下列情况是否能发生:

- 1) 物块 A 与 B 发生碰撞.
- 2) 物块 A 与 B 发生碰撞 (设为弹性碰撞) 后, 物块 B 与挡板 P 发生碰撞.
- 3) 物块 B 与挡板 P 发生碰撞 (设为弹性碰撞) 后, 物块 B 与 A 在木板 C 上再发生碰撞.
- 4) 物块 A 从木板 C 上掉下来.
- 5) 物块 B 从木板 C 上掉下来.

(要求定量求出能发生这些情况时物块 A 的初速度 v_0 应满足的条件, 或定量说明不能发生的理由)

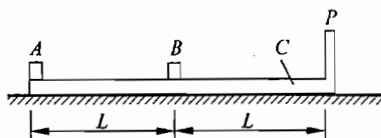


图 4-40

解析

1) 以 m 表示 A 、 B 和 C 的质量, 当物块 A 以初始速度 v_0 向右运动时, A 受到木板 C 施加的大小为 μmg 的滑动摩擦力而减速, 木板 C 则受到 A 施加的大小为 μmg 的滑动摩擦力和物块 B 施加的大小为 F_f 的摩擦力而做加速运动, B 则因受 C 施加的摩擦力 F_f 作用而加速. 设 A 、 B 、 C 三者的加速度分别为 a_A 、 a_B 和 a_C , 则由牛顿第二定律, 有

$$\mu mg = ma_A$$

$$\mu mg - F_f = ma_C$$

$$F_f = ma_B$$

事实上在此题中 $a_B = a_C$, 即 B 、 C 之间无相对运动, 这是因为当 $a_B = a_C$ 时, 由上式可得

$$F_f = \frac{1}{2} \mu mg \quad (1)$$

它小于最大静摩擦力 μmg . 可见静摩擦力使 B 、 C 之间不发生相对运动. 若物块 A 刚好与物块 B 不发生碰撞, 则物块 A 运动到物块 B 所在处时, A 与 B 的速度大小相等. 因为 B 与木板 C 的速度相等, 所以此时三者的速度均相同, 设为 v_1 , 由动量守恒定律得

$$mv_0 = 3mv_1 \quad (2)$$

在此过程中,设木板 C 运动的路程为 s_1 ,则物块 A 运动的路程为 $s_1 + L$,如图 4-41 所示.由动能定理有

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\mu mg(s_1 + L) \quad (3)$$

$$\frac{1}{2}(2m)v_1^2 = \mu mgs_1 \quad (4)$$

或者说,在此过程中整个系统动能的改变等于系统内部相互间的滑动摩擦力做功的代数和[(3)式与(4)式等号两边相加],即

$$\frac{1}{2}(3m)v_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\mu mgL \quad (5)$$

式中 L 就是 A 相对 C 运动的路程.解(2)、(5)式,得

$$v_1 = \sqrt{3\mu gL} \quad (6)$$

即物块 A 的初速度 $v_0 = \sqrt{3\mu gL}$ 时, A 刚好不与 B 发生碰撞,若 $v_0 > \sqrt{3\mu gL}$,则 A 将与 B 发生碰撞,故 A 与 B 发生碰撞的条件是

$$v_0 > \sqrt{3\mu gL} \quad (7)$$

2) 当物块 A 的初速度 v_0 满足(7)式时, A 与 B 将发生碰撞,设碰撞前的瞬间, A、B、C 三者的速度分别为 v_A 、 v_B 和 v_C ,则有

$$v_A > v_B \quad v_B = v_C \quad (8)$$

在 A、B 发生碰撞的极短时间内,木板 C 对它们的摩擦力的冲量非常小,可忽略不计.故在碰撞过程中, A 与 B 构成的系统的动量守恒,而木板 C 的速度保持不变.因为 A、B 间的碰撞是弹性的,系统的机械能守恒,又因为质量相等,由动量守恒和机械能守恒可以证明(证明从略),碰撞前后 A、B 交换速度.若碰撞刚结束时, A、B、C 三者的速度分别为 v'_A 、 v'_B 和 v'_C ,则有

$$v'_A = v_B \quad v'_B = v_A \quad v'_C = v_C \quad (9)$$

由(8)、(9)式可知, A 与 C 速度相等,保持相对静止,而 B 相对于 A、C 向右运动,以后发生的过程相当于第 1) 问中所进行的延续,由物块 B 替换 A 继续向右运动.

若物块 B 刚好与挡板 P 不发生碰撞,则物块 B 以速度 v'_B 从 C 板的中点运动到挡板 P 所在处时, B 与 C 的速度相等.因 A 与 C 的速度大小是相等的,故 A、B、C 三者的速度相等,设此时三者的速度为 v_2 . 根据动量守恒定律有

$$mv_0 = 3mv_2 \quad (10)$$

A 以初速度 v_0 开始运动,接着与 B 发生完全弹性碰撞,碰撞后 A 相对 C 静止, B 到达 P 所在处这一整个过程中,先是 A 相对 C 运动的路程为 L ,接着是 B 相对 C 运动的路

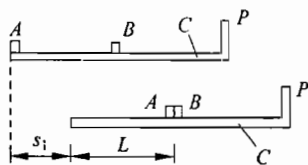


图 4-41

程为 L , 整个系统动能的改变, 类似于上面第 1) 问解答中 (5) 式的说法, 等于系统内部相互间的滑动摩擦力做功的代数和, 即

$$\frac{1}{2}(3m)v_2^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\mu mg \cdot 2L \quad (11)$$

解 (10)、(11) 两式得

$$v_0 = \sqrt{6\mu gL} \quad (12)$$

即物块 A 的初速度 $v_0 = \sqrt{6\mu gL}$ 时, A 与 B 碰撞, 但 B 与 P 刚好不发生碰撞. 若 $v_0 > \sqrt{6\mu gL}$, 就能使 B 与 P 发生碰撞, 故 A 与 B 碰撞后, 物块 B 与挡板 P 发生碰撞的条件是

$$v_0 > \sqrt{6\mu gL} \quad (13)$$

3) 若物块 A 的初速度 v_0 满足条件 (13) 式, 则在 A、B 发生碰撞后, B 将与挡板 P 发生碰撞, 设在碰撞瞬间, A、B、C 三者的速度分别为 v_A'' 、 v_B'' 和 v_C'' , 则有

$$v_B'' > v_A'' = v_C'' \quad (14)$$

B 与 P 碰撞后的瞬间, A、B、C 三者的速度分别为 v_A''' 、 v_B''' 和 v_C''' , 则仍类似于第 2) 问解答中 (9) 式的道理, 有

$$v_B''' = v_C''' \quad v_C''' = v_B''' \quad v_A''' = v_A'' \quad (15)$$

由 (14)、(15) 式可知, B 与 P 刚碰撞后, 物块 A 与 B 的速度相等, 都小于木板 C 的速度, 即

$$v_C''' > v_A''' = v_B''' \quad (16)$$

在以后的运动过程中, 木板 C 以较大的加速度向右做减速运动, 而物块 A 和 B 以相同的较小的加速度向右做加速运动, 加速度的大小分别为

$$a_C = 2\mu g \quad a_A = a_B = \mu g \quad (17)$$

加速过程将持续到或者 A 和 B 与 C 的速度相同, 三者以相同速度 $\frac{1}{3}v_0$ 向右做匀速运动, 或者木块 A 从木板 C 上掉了下来. 因此物块 B 与 A 在木板 C 上不可能再发生碰撞.

4) 若 A 刚刚没从木板 C 上掉下来, 即 A 到达 C 的左端时的速度变为与 C 相同, 这时三者的速度皆相同, 以 v_3 表示, 由动量守恒有

$$3mv_3 = mv_0 \quad (18)$$

从 A 以初速度 v_0 在木板 C 的左端开始运动, 经过 B 与 P 相碰, 直到 A 刚没从木板 C 的左端掉下来, 这一整个过程中, 系统内部先是 A 相对 C 的路程为 L ; 接着 B 相对 C 运动的路程也是 L ; B 与 P 碰后直到 A 刚没从木板 C 上掉下来, A 与 B 相对 C 运动的路程也皆为 L . 整个系统动能的改变应等于内部相互间的滑动摩擦力做功的代数和, 即

$$\frac{1}{2}(3m)v_3^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\mu mg \cdot 4L \quad (19)$$

由(18)、(19)两式,得

$$v_0 = \sqrt{12\mu gL} \quad (20)$$

即当物块 A 的初速度 $v_0 = \sqrt{12\mu gL}$ 时, A 刚好不会从木板 C 上掉下. 若 $v_0 > \sqrt{12\mu gL}$, 则 A 将从木板 C 上掉下, 故 A 从 C 上掉下的条件是

$$v_0 > \sqrt{12\mu gL} \quad (21)$$

5) 若物块 A 的初速度 v_0 满足条件(21)式, 则 A 将从木板 C 上掉下来, 设 A 刚要从木板 C 上掉下来时, A、B、C 三者的速度分别为 v_A''' 、 v_B''' 和 v_C''' , 则有

$$v_A''' = v_B''' < v_C''' \quad (22)$$

这时(18)式应改写成

$$mv_0 = 2mv_A''' + mv_C''' \quad (23)$$

(19)式应改写成

$$\frac{1}{2}(2m)v_B'''^2 + \frac{1}{2}mv_C'''^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\mu mg \cdot 4L \quad (24)$$

当物块 A 从木板 C 上掉下来后, 若物块 B 刚好不会从木板 C 上掉下, 即当 C 的左端赶上 B 时, B 与 C 的速度相等. 设此速度为 v_1 , 则对 B、C 这一系统来说, 由动量守恒定律, 有

$$mv_B''' + mv_C''' = 2mv_1 \quad (25)$$

在此过程中, 对这一系统来说, 滑动摩擦力做功的代数和为 $-\mu mgL$, 由动能定理可得

$$\frac{1}{2}(2m)v_1^2 - \left(\frac{1}{2}mv_B'''^2 + \frac{1}{2}mv_C'''^2 \right) = -\mu mgL \quad (26)$$

由(23)、(24)、(25)、(26)式可得

$$v_0 = \sqrt{16\mu gL} \quad (27)$$

即当 $v_0 = \sqrt{16\mu gL}$ 时, 物块 B 刚好不能从木板 C 上掉下. 若 $v_0 > \sqrt{16\mu gL}$, 则 B 将从木板 C 上掉下, 故物块 B 从木板 C 上掉下来的条件是

$$v_0 > \sqrt{16\mu gL} \quad (28)$$

本题涉及若干个问题, 每个问题都要求学生通过独立分析才能找出结果, 故在考查学生分析问题、解决问题的能力上有一定的要求. 但试题的设问方式已经大大降低了试题对能力考查的要求. 作为预赛题, 这种设问方式是恰当的. 若改变一下设问方式, 如试题最后部分改成: 开始时 B 和 C 静止, A 以某一初速度向右运动, 问以后可能发生哪些不同的运动情况, 并找出发生不同运动情况的相应条件. 这样的设问, 使题中需要分析、解决的问题让学生自己去发现, 自己去提出. 学生通过对试题的全面考查和猜测, 提出的需要解决的问题可能很多, 很零乱, 每个问题并不完全独立, 这就要求通过归纳, 综合成若干最本质的问题. 在把问题解决后, 还有一个怎样把求得的结果通过文字表述出来, 使最后的行

文更加科学、清晰的问题. 所有这些, 显然比试题给出了若干问题, 让学生依次去解决有更高的要求. 因为发现问题、提出问题、分析问题和解决问题能力的考查是蕴藏在整个试题之中的. 而解这样的题, 在某种意义上就是一种研究性的工作, 写出的解答实际上是一篇小论文, 一个科学报告. 而且每个学生写出的结果也不会完全相同, 能更好地反映学生的特长和差异.

26. 质量为 m_0 的运动员手持一质量为 m 的物块, 以速率 v_0 沿与水平面成 α 角的方向向前跳跃(图 4-42). 为了能跳得更远一点, 运动员可在跳远全过程中的某一位置处, 沿某一方向把物块抛出. 物块抛出时相对运动员的速度的大小 u 是给定的, 物块抛出后, 物块和运动员都在同一竖直平面内运动.

1) 若运动员在跳远的全过程中的某时刻 t_0 把物块沿与 x 轴负方向成 θ 角的方向抛出, 求运动员从起跳到落地所经历的时间.

2) 在跳远的全过程中, 运动员在何处把物块沿与 x 轴负方向成 θ 角的方向抛出, 能使自己跳得更远? 若 v_0 和 u 一定, 在什么条件下可跳得最远? 并求出运动员跳的最大距离.

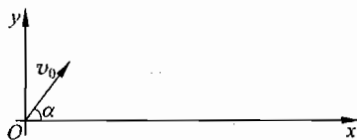


图 4-42

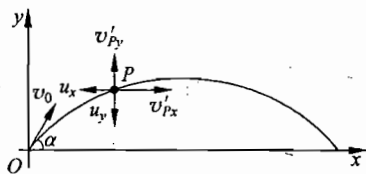


图 4-43

解析

1) 规定运动员起跳的时刻为 $t=0$, 设运动员在 P 点(图 4-43)抛出物块. 以 t_0 表示运动员到达 P 点的时刻, 则运动员在 P 点的坐标 x_P 、 y_P 和抛出前的速度 v 的分量 v_{Px} 、 v_{Py} 分别为

$$v_{Px} = v_0 \cos \alpha \quad (1)$$

$$v_{Py} = v_0 \sin \alpha - gt_0 \quad (2)$$

$$x_P = v_0 t_0 \cos \alpha \quad (3)$$

$$y_P = v_0 t_0 \sin \alpha - \frac{1}{2} g t_0^2 \quad (4)$$

设在刚抛出物块后的瞬间, 运动员的速度 v' 的分量大小分别为 v'_{Px} 、 v'_{Py} , 物块相对运动员的速度 u 的分量大小分别为 u_x 、 u_y , 方向分别沿 $-x$ 、 $-y$ 方向. 由动量守恒定律可知

$$m_0 v'_{Px} + m(v'_{Px} - u_x) = (m_0 + m)v_{Px} \quad (5)$$

$$m_0 v'_{Py} + m(v'_{Py} - u_y) = (m_0 + m)v_{Py} \quad (6)$$

因 u 的方向与 x 轴负方向的夹角为 θ , 故有

$$u_x = u \cos \theta \quad (7)$$

$$u_y = u \sin \theta \quad (8)$$

解(1)、(2)、(5)、(6)式和(7)、(8)式, 得

$$v'_{Px} = v_0 \cos \alpha + \frac{mu \cos \theta}{m_0 + m} \quad (9)$$

$$v'_{Py} = v_0 \sin \alpha - gt_0 + \frac{mu \sin \theta}{m_0 + m} \quad (10)$$

抛出物块后, 运动员从 P 点开始沿新的抛物线运动, 其初速度为 v'_{Px} 、 v'_{Py} . 在 t 时刻 ($t > t_0$) 运动员的速度和位置为

$$v'_x = v'_{Px} \quad (11)$$

$$v'_y = v'_{Py} - g(t - t_0) \quad (12)$$

$$x = x_P + v'_{Px}(t - t_0) = \left(v_0 \cos \alpha + \frac{mu_x}{m_0 + m} \right) t - \frac{mu_x}{m_0 + m} t_0 \quad (13)$$

$$y = y_P + v'_{Py}(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 \quad (14)$$

由(3)、(4)、(9)、(10)、(13)、(14)各式, 可得

$$x = \left(v_0 \cos \alpha + \frac{mu \cos \theta}{m_0 + m} \right) t - \frac{mu \cos \theta}{m_0 + m} t_0 \quad (15)$$

$$y = 2 \left(v_0 \sin \alpha + \frac{mu \sin \theta}{m_0 + m} \right) t - gt^2 - \frac{2mu \sin \theta}{m_0 + m} t_0 \quad (16)$$

运动员落地时

$$y = 0$$

由(16)式得

$$gt^2 - 2 \left(v_0 \sin \alpha + \frac{mu \sin \theta}{m_0 + m} \right) t + \frac{2mu \sin \theta}{m_0 + m} t_0 = 0 \quad (17)$$

方程的根为

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha + \frac{mu \sin \theta}{m_0 + m} \pm \sqrt{\left(v_0 \sin \alpha + \frac{mu \sin \theta}{m_0 + m} \right)^2 - 2g \frac{mu \sin \theta}{m_0 + m} t_0}}{g} \quad (18)$$

(18)式给出的两个根中, 只有当“ \pm ”号取“ $+$ ”才符合题意, 因为从(12)式和(10)式, 可求出运动员到最高点的时间为

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha + \frac{mu \sin \theta}{m_0 + m}}{g}$$

而从起跳到落地所经历的时间应比上面给出的时间大,故从起跳到落地所经历的时间为

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha + \frac{mu \sin \theta}{m_0 + m} + \sqrt{\left(v_0 \sin \alpha + \frac{mu \sin \theta}{m_0 + m}\right)^2 - 2g \frac{mu \sin \theta}{m_0 + m} t_0}}{g} \quad (19)$$

2) 由(15)式可以看出, t 越大, t_0 越小, 跳的距离 x 越大. 由(19)式可以看出, 当

$$t_0 = 0$$

时, t 的值最大, 由(3)式和(4)式可知, 抛出物块处的坐标为

$$x_P = 0, \quad y_P = 0 \quad (20)$$

即应在原点亦即在刚起跳时把物块抛出, 运动员可跳得远一点. 由(19)式可以得到运动员自起跳至落地所经历的时间为

$$T = 2 \frac{v_0 \sin \alpha}{g} + 2 \frac{m}{m_0 + m} \frac{u \sin \theta}{g}$$

把 $t_0 = 0$ 和 $t = T$ 代入(15)式, 可求得跳远的距离, 为

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} + \frac{2mv_0 u}{(m_0 + m)g} \sin(\theta + \alpha) + \frac{m^2 u^2}{(m_0 + m)^2 g} \sin 2\theta \quad (21)$$

可见, 若

$$\sin 2\alpha = 1, \quad \sin(\theta + \alpha) = 1, \quad \sin 2\theta = 1$$

即

$$\alpha = \frac{\pi}{4}, \quad \theta = \frac{\pi}{4} \quad (22)$$

时, x 有最大值, 即沿与 x 轴成 45° 方向跳起, 且跳起后立即沿与 $-x$ 轴成 45° 方向抛出物块, 则 x 有最大值, 此最大值为

$$x_m = \frac{v_0^2}{g} + \frac{2mv_0 u}{(m_0 + m)g} + \frac{m^2 u^2}{(m_0 + m)^2 g} \quad (23)$$

本题不难, 也不陌生, 但在解题过程中可以学到正确处理数学与物理关系的本领. 例如, 解一元二次方程(17)式, 可得到其解(18)式, 解中的“ \pm ”号取正还是取负, 数学上都是允许的. 但由(12)式和(10)式可求出运动员到达最高点的时间, 而从起跳到落地经历的时间应比运动员到达最高点的时间长, 于是从物理上可以判定(18)式中的“ \pm ”号只能取“ $+$ ”. 又如, 题的第2)问“运动员在何处把物块沿与 x 轴负方向成 θ 角方向抛出, 能使自己跳得更远?”题问的是何处, 但从(3)、(4)两式就把何处转化成 t_0 等于何值, 即在何时把物块抛出. 又从(15)式可知当 $t_0 = 0$ 时, x 有较大值, 故应在起跳处就把物块抛出, 运动员可跳得远一点.

如果学生不善于从物理到数学, 又从数学到物理的转化, 就很难解出第2)问.

27. 如图 4-44 所示, 质量为 m 的物体可沿竖直轨道 A、B 上下运动, 物体正下方置一轻弹簧. 物体与轨道间的最大静摩擦力与滑动摩擦力都是 $F_f = mg/2$. 现在, 物体在距弹簧为 d 的高处由静止开始下落. 设弹簧不致被完全压扁, 试求:

- 1) 物体下落达到的最低位置与弹簧劲度系数 k 的关系.
- 2) 物体由最低位置第 1 次弹回的高度与 k 的关系.

解析

1) 设物体下落达到最低位置时, 弹簧被压缩了 s , 令此最低位置用弹簧的被压缩量 s 表示. 由功能原理

$$ks^2/2 - mg(d+s) = -mg(d+s)/2 \quad (1)$$

$$\text{得} \quad s = (mg + \sqrt{m^2g^2 + 4kdmg}) / (2k) \quad (2)$$

此即物体下落的最低位置与弹簧劲度系数 k 的关系.

2) 物体下落到最低位置时速度为零, 这时物体能否被反弹同弹簧弹性力的大小有关. 若

$$ks > mg + mg/2$$

则物体将被反弹, 即物体被反弹的条件为

$$s > 3mg / (2k) \quad (3)$$

下面分三种情况讨论.

(i) 若 $s \leq 3mg / (2k)$, 物体不反弹, 由(2)式有

$$(mg + \sqrt{m^2g^2 + 4kdmg}) / (2k) \leq 3mg / (2k)$$

$$\text{得} \quad k \leq 3mg / (4d)$$

因而 $k \leq 3mg / (4d)$ 时, 反弹高度为零. 这是第一种情况.

若 $k > 3mg / (4d)$, 物体反弹. 这时还有以下两种可能情况.

(ii) 在反弹过程中物体不脱离弹簧. 设物体向上运动到速度为零时, 弹簧的压缩量为 s' , 则

$$s \geq s' \geq 0 \quad (4)$$

这时, 由功能原理

$$ks'^2/2 - mgs' - (ks^2/2 - mgs) = -mg(s - s')/2$$

$$\text{得} \quad s' = (5mg - \sqrt{m^2g^2 + 4kdmg}) / (2k) \quad (5)$$

由此得到反弹高度

$$h_1 = s - s' = (\sqrt{m^2g^2 + 4kdmg} - 2mg) / k$$

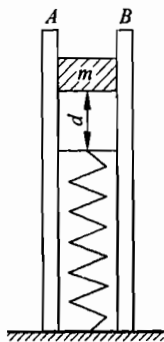


图 4-44

在(5)式中代入 $s' \geq 0$ 可得

$$5mg \geq \sqrt{m^2 g^2 + 4kdmg}$$

即

$$k \leq 6mg/d$$

因此,在 $3mg/4d < k \leq 6mg/d$ 时,物体的第一次由最低位置反弹的高度为 h_1 , 物体不脱离弹簧. $k = 6mg/d$ 时, $s' = 0$, 弹簧恢复原长, $h_1 = \frac{d}{2}$.

(iii) 若 $k > 6mg/d$, 在第一次反弹过程中弹簧恢复原长后(弹簧质量不计, 当它恢复原长后即停止不动), 物体继续上升, 即物体脱离弹簧继续运动. 设物体继续上升

$$s'' > 0 \quad (6)$$

后速度为零, 则由功能原理

$$mgs'' - \left(\frac{ks^2}{2} - mgs \right) = -\frac{mg(s+s'')}{2}$$

可得

$$s'' + s = ks^2 / (3mg)$$

这种情形下反弹高度即是

$$h_2 = s'' + s = (mg + \sqrt{m^2 g^2 + 4kdmg})^2 / (12mgk)$$

或由(1)式有

$$d + s = ks^2 / (mg)$$

故

$$s'' + s = (d + s) / 3$$

反弹高度 h_2 也可写成

$$h_2 = \frac{1}{3} [d + (mg + \sqrt{m^2 g^2 + 4kdmg}) / (2k)]$$

因此,在 $k > 6mg/d$ 时,物体由最低位置反弹的高度为 h_2 , 这种情形物体脱离弹簧上升一段距离, 且随着弹簧 k 的增大, h_2 减小, 其极限值为 $\frac{d}{3}$.

此题要求根据弹簧的性质(k 的大小)作较多的分析, 是一个考查分析能力的较难题. 解此题时, 首先要断定, 利用功能原理讨论物体的运动是比较简便的, 则第1)问容易解出. 对于第2)问, 则必须考虑弹簧的软硬程度(k 的大小), 由条件(3)式确定物体能否被反弹, 由条件(4)式确定反弹后物体不脱离弹簧, 由条件(6)式确定反弹后物体脱离弹簧. 明确了这些条件, 并分别讨论三种情况, 才能全面解出此题, 如果不能分清这些不同情况, 或不能在情况(ii)与情况(iii)中分别写出相应的功能原理式, 解题就会失败.

28. 长为 $2b$ 的轻绳, 两端各系一质量为 m 的小球, 中央系一质量为 m_0 的小球, 三球均静止于光滑的水平桌面上, 绳处于拉直状态. 今给小球 m_0 以一冲击, 使它获得水平速

度 v , v 的方向与绳垂直(如图 4-45 所示). 求在两端的小球发生互碰前的瞬间绳中的张力 F .

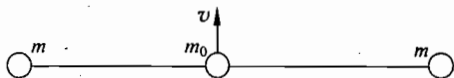


图 4-45

解析

设两小球互碰前的瞬间小球 m_0 和 m 相对于桌面的加速度的大小分别为 a_0 和 a_m , 则有

$$2F = m_0 a_0 \quad (\text{向 } -v \text{ 方向}) \quad (1)$$

$$F = m a_m \quad (\text{向 } v \text{ 方向}) \quad (2)$$

相对于小球 m_0 , 小球 m 做圆周运动, 在碰撞前瞬间, 小球 m 相对于 m_0 的向心加速度为 v_r^2/b (沿 v 方向), 其中 v_r 为碰撞前小球在与绳垂直方向的分速度. 因此有

$$a_m = v_r^2/b - a_0 \quad (3)$$

解以上三式, 得

$$F = \frac{m_0}{m_0 + 2m} m \frac{v_r^2}{b} \quad (4)$$

设 v_y 为碰撞前的瞬间小球 m_0 的速度, 由于绳子的长度保持不变, 小球 m 沿绳方向的分速度也为 v_y (图 4-46), 由机械能守恒定律和动量守恒定律, 有

$$\frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{1}{2} m_0 v_y^2 + \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2) + \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2) \quad (5)$$

$$m_0 v = (m_0 + 2m) v_y \quad (6)$$

解以上二式, 得

$$v_x^2 = \frac{m_0 v^2}{m_0 + 2m} \quad (7)$$

代入(4)式, 得

$$F = \frac{m_0^2 m v^2}{(m_0 + 2m)^2 b} \quad (8)$$

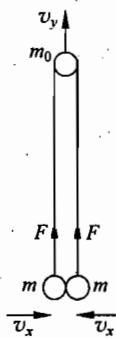


图 4-46

不少学生见到此题, 感到不知从何下手. 其一个原因可能是学生未能建立起关于三个小球运动的大致图像. 当中间的小球以速度 v 运动时, 将受到两侧的轻绳的拉力作用而作减速运动, 由对称性可知, 加速度的方向与 v 在同一直线上, 故中央小球速度的方向不会

改变. 两端小球各受到绳的拉力作用而获得沿 v 方向的加速度和垂直于 v 方向的加速度, 如图 4-47 所示. 在两端的小球发生碰撞前的瞬间, 连结两端小球的绳处于图 4-46 所示的位置, 此时两端小球的加速度与中央小球的加速方向相同, 两端小球除了具有与中央小球的速度方向相同的分速度外, 还具有垂直于中央小球速度方向的分速度, 而若以中央小球为参考系, 则两端小球绕中央小球做圆周运动. 中央小球获得速度 v 后三个小球的运动情况以及在两端小球发生碰撞前瞬间三个小球的运动状态试题并未给出, 学生必须根据试题给出的初始状态, 通过分析、想像并辅以必要的图把它们描绘出来. 没有建立三球的运动图像, 也就很难知道该用哪些原理来解决本题.

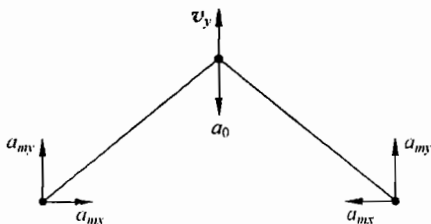


图 4-47

解此题时, 还需要考虑小球 m 对 m_0 的相对运动, 但必须用两者对桌面的速度和加速度列出动力学方程. 这要求学生明确认识牛顿定律只在惯性系中适用, 还要敢于根据 $a = \frac{v^2}{R}$ (运动学公式) 写出小球 m 对 m_0 的相对加速度, 理论深度要求较高. 学生的困难在于既要能明确分辨各小球相对于桌面的速度、加速度和小球 m 相对于 m_0 的速度、加速度, 又要能正确使用原理公式. 学生解此题出错的根源皆在于不能克服这些困难.

29. 一质量为 m 的小球与一长为 l 的细绳组成一单摆. 现将此单摆从与竖直线成 α 角的位置静止释放. 在摆动的途中, 摆绳为一小木桩所阻. 木桩与摆的悬挂点相距 r , 两者的连线与竖直线成 β 角, 如图 4-48 所示.

1) 若摆绳为小木桩所阻后, 小球在继续上升过程中摆绳发生弯曲. 试求出现此情况时 r 、 l 、 β 与 α 之间应满足的关系式.

2) 若将单摆从适当的 α 角位置处静止释放, 摆绳为小木桩所阻后小球能击中小木桩, 试求此 α 值 (将结果以 $\cos\alpha$ 的形式表示).

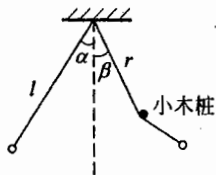


图 4-48

解析

1) 取单摆悬挂点为重力势能的零点,由单摆在摆动过程中机械能守恒可列出下式

$$-mgl\cos\alpha = -mg[r\cos\beta + (l-r)\cos\theta] + \frac{1}{2}mv^2 \quad (1)$$

v 为小球的速度.摆绳为小木桩所阻后,小球绕小木桩做圆周运动,其运动方程为

$$F - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{l-r} \quad (2)$$

F 为摆绳的张力. θ 是摆绳与竖直向下方向的夹角.由(1)式

$$mv^2 = 2mg[r\cos\beta + (l-r)\cos\theta - l\cos\alpha]$$

代入(2)式得

$$F = 3mg\cos\theta + \frac{2mg}{l-r} \cdot (r\cos\beta - l\cos\alpha)$$

当 $F=0$ 时,摆绳将发生弯曲,由此条件可得

$$\cos\theta = -\frac{2(r\cos\beta - l\cos\alpha)}{3(l-r)} \quad (3)$$

故

$$\theta = \arccos\left[-\frac{2(r\cos\beta - l\cos\alpha)}{3(l-r)}\right] \quad (4)$$

由于只当 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 时绳才会发生弯曲,故有 $-1 < \cos\theta < 0$,即

$$-1 < -\frac{2(r\cos\beta - l\cos\alpha)}{3(l-r)} < 0$$

由此得 r, l 和 β, α 间应满足的条件为

$$0 < (r\cos\beta - l\cos\alpha) < \frac{3}{2}(l-r) \quad (5)$$

2) 设 $\theta = \theta_0$ 时小球下落恰好击中小木桩(如图 4-49),则有

$$v_0 \sin\left(\theta_0 - \frac{\pi}{2}\right) \cdot t = (l-r)\sin(\pi - \theta_0) \quad (6)$$

$$v_0 \cos\left(\theta_0 - \frac{\pi}{2}\right) \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 = -(l-r)\cos(\pi - \theta_0) \quad (7)$$

式中 v_0 为小球在 θ_0 处时的速度, t 为小球自 θ_0 处出发至击中小木桩所经历的时间,由(6)式

$$t = \frac{-(l-r)\sin\theta_0}{v_0 \cos\theta_0}$$

代入(7)式得

$$v_0 \sin\theta_0 \times \left[-\frac{(l-r)\sin\theta_0}{v_0 \cos\theta_0}\right] - \frac{1}{2}g\left[-\frac{(l-r)\sin\theta_0}{v_0 \cos\theta_0}\right]^2$$

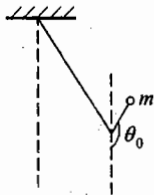


图 4-49

$$= (l-r)\cos\theta_0$$

由此解得

$$v_0^2 = -\frac{1}{2} \frac{g(l-r)\sin^2\theta_0}{\cos\theta_0}$$

此 v_0^2 须满足下式(令(2)式中的 $F=0, \theta=\theta_0$)

$$-mg\cos\theta_0 = m \frac{v_0^2}{l-r}$$

所以

$$\cos^2\theta_0 = \frac{1}{3}$$

$$\cos\theta_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \left(\text{因 } \frac{\pi}{2} < \theta_0 < \pi\right)$$

代入(3)式得

$$\cos\alpha = \frac{r}{l}\cos\beta - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{(l-r)}{l}$$

此题是一种游戏的简化示意图,看谁能使小球击中小木桩.解此题时要涉及能量守恒、圆周运动动力学方程以及抛物运动等力学知识.尽管对小球击中目标来说,题中第1)问已是一步明显的提示,但仍有一些学生弄不清绳开始发生弯曲以及击中木桩的条件,因而做不出来.也有一些学生发生各种数学处理上的错误.

30. 如图 4-50 所示,有两个质量相同的小球 1、2(视为质点),在一光滑的水平直线滑槽 AB 内运动,滑槽两端有固定的墙壁.二球相遇时发生的碰撞及小球与墙壁之间的碰撞都是完全弹性的.开始时,1、2 两球分别位于将滑槽三等分的两分点处,两者运动方向相同,但速度的大小不一定相同.

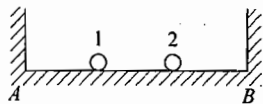


图 4-50

1) 如果两球之间的第 2 次碰撞是在滑槽中点迎面相碰,求两球初速的比值.

2) 如果两球之间的第 5 次碰撞是在滑槽中点迎面相碰,求两球初速的比值.能满足要求的解共有几种?

[提示] 可以先求出满足要求的一种解(即初速比值);再求出满足要求的所有的可能解.

解析

由于小球可视为质点且质量相同,碰撞又是完全弹性的,所以两球每次碰撞之后,相互“交换速度”.因此,可以把两个小球的运动过程等效为两个彼此互不相碰的小球各自独

立按自己的初速在两墙壁间运动. 下面所说的两小球就是指这样的两个等效的小球.

对于这种情况, 可使用如图 4-51 所示的 $t-x$ 图说明两小球各时刻的位置. A, B 为导轨的两端, 设小球 1 的初速为 v_1 , 其在导轨中的单独运动如图中的实线所示, 小球 2 的初速为 v_2 , 其单独运动如图中虚线所示 (设 $v_2 > v_1$). 实线与虚线的每个交点都代表一次碰撞.

1) 如图 4-52 所示, 设 AB 长为 l , 则到第 2 次碰撞 (为迎面相碰) 时, 小球 1、2 走过的路程分别为

$$v_1 t = \frac{2}{3}l + \frac{1}{2}l = l + \frac{1}{6}l = \frac{7}{6}l$$

$$v_2 t = \frac{1}{3}l + l + \frac{1}{2}l = l + \frac{5}{6}l = \frac{11}{6}l$$

可得 $v_1/v_2 = 7/11$.

2) 一种解可参看图 4-53 求得. 此时

$$v_1 t = \frac{1}{2}l - \frac{1}{3}l = \frac{1}{6}l$$

$$v_2 t = \frac{1}{3}l + 4l + \frac{1}{2}l = 4l + \frac{5}{6}l = \frac{29}{6}l$$

所以

$$v_1/v_2 = 1/29$$

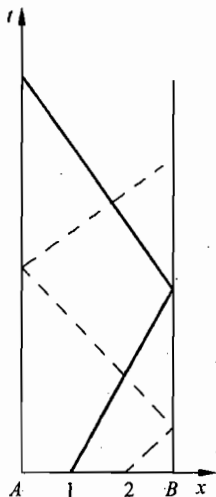


图 4-51

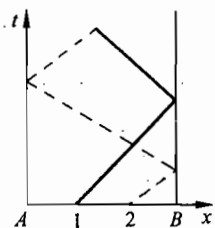


图 4-52

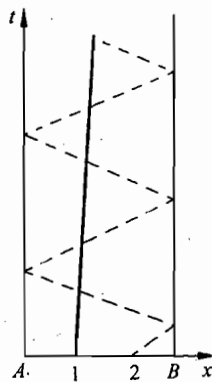


图 4-53

下面考虑满足要求的所有可能解. 设在 t 时刻两小球在滑槽中点相碰, 则小球 1、2 所经过的路程分别为

$$s_1 = nl + \frac{1}{6}l = v_1 t \quad (1)$$

$$s_2 = kl + \frac{5}{6}l = v_2 t \quad (2)$$

式中 n 与 k 可为零或任何正整数. 由(1)、(2)得到

$$v_1/v_2 = (6n+1)/(6k+5) \quad (3)$$

按本题要求, 两球在滑槽中点相碰前必须经过 4 次碰撞, 两球在中点的碰撞为迎面相碰, 则两球中必须至少有一小球路程大于 $4l$, 小于 $5l$, 因而 n, k 中必须至少有一个为 4, 另一个的取值则可为 0、1、2、3、4. 又当 n 为奇数时, 小球 1 在 t 时刻的运动方向为由 B 向 A , n 为偶数时为由 A 向 B ; 反之, k 为奇数时, 小球 2 在 t 时刻的运动方向为由 A 向 B , k 为偶数时为由 B 向 A , 若要两球在 t 时刻迎面相碰, 必须 $n+k$ 为偶数. 故 (n, k) 取值只能是 $(4, 0), (4, 2), (4, 4), (2, 4), (0, 4)$ 5 种. 代入(3)式得

$$n = 4, k = 0 \text{ 时, } v_1/v_2 = 25/5 = 5$$

$$n = 4, k = 2 \text{ 时, } v_1/v_2 = 25/17$$

$$n = 4, k = 4 \text{ 时, } v_1/v_2 = 25/29$$

$$n = 2, k = 4 \text{ 时, } v_1/v_2 = 13/29$$

$$n = 0, k = 4 \text{ 时, } v_1/v_2 = 1/29$$

共 5 种解.

此题有较大的灵活性. 用 $t-x$ 图来解此题是一种方便的方法. 解题的主要难点在于找出第 2) 问中满足要求的所有可能的解. 参考解答中给出的一种推理方法可供参考 (还可以有其他方法).

根据两球在中点相碰列出(1)、(2)式, 得到 v_1/v_2 与 n, k 关系, 然后利用是第 5 次相碰与迎面相碰的条件, 分析推理确定可能的 n 与 k 值及其组合, 得出解答.

31. 有三个质量相等的粒子, 粒子 1 与粒子 2 中间夹置一个被充分压缩了的轻质短弹簧, 并用轻质细线缚在一起 (可视为一个小物体), 静止地放置在光滑水平面上. 另一个粒子 3 沿该光滑水平面射向它们. 粒子 3 和粒子 1 相碰撞并粘连在一起运动. 后轻质细线自动崩断, 使弹簧释放, 三个粒子分成两部分: 一部分为粒子 2, 另一部分为粘在一起的粒子 1、3. 已知弹簧被充分压缩时的弹性势能是 E_p . 为了使被释放出的粒子 2 的散射角保持在 30° 之内, 求粒子 3 入射时的动能应满足什么条件?

[提示] 此处散射角是指粒子 2 射出后的运动方向与粒子 3 入射时的运动方向之间的夹角.

解析

建立如图 4-54 所示的坐标系,以粒子 3 入射速度 v_0 为 x 轴正方向. 设每个粒子的质量为 m . 当粒子 3 与 1 相碰并粘在一起,而在细线断开之前,三个粒子是一起运动的,若其共同速度为 v ,按照动量守恒定律,有

$$m v_0 = 3m v \quad (1)$$

即 v 也沿 x 方向,其大小为 $v = \frac{v_0}{3}$.

细线断开后弹簧释放,弹性力做功使弹性势能 E_p 转化为粒子 1、3 和粒子 2 的动能增量. 设粒子 1、3 最后的速度为 v_1 , 粒子 2 最后的速度为 v_2 . 由机械能守恒和动量守恒定律可知

$$\frac{1}{2}(2m)v_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}(3m)v^2 + E_p \quad (2)$$

$$(2m)v_1 + mv_2 = (3m)v = mv_0 \quad (3)$$

因弹簧安置的方向不同等原因,粒子 2 将可能以不同的速度向各方向飞出,设 v_2 与 v_0 的夹角为 θ . 在细线崩断过程中,粒子 1、3 和粒子 2 由于受到弹力的冲量作用,都将产生相应的动量的增量,从而有速度的增量. 设其速度增量分别为 Δv_1 和 Δv_2 , 则有

$$\begin{aligned} v_1 = v + \Delta v_1 & \quad \text{或} \quad \begin{cases} v_{1x} = v_x + \Delta v_{1x} \\ v_{1y} = v_y + \Delta v_{1y} \end{cases} \\ v_2 = v + \Delta v_2 & \quad \begin{cases} v_{2x} = v_x + \Delta v_{2x} \\ v_{2y} = v_y + \Delta v_{2y} \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

将(4)式代入(3)式,得

$$(2m)(v + \Delta v_1) + m(v + \Delta v_2) = 3mv_0$$

因而

$$\Delta v_1 = -\frac{1}{2}\Delta v_2 \quad \text{或} \quad \begin{cases} \Delta v_{1x} = -\frac{1}{2}\Delta v_{2x} \\ \Delta v_{1y} = -\frac{1}{2}\Delta v_{2y} \end{cases} \quad (5)$$

(2)式可写成如下的形式

$$\frac{1}{2}(2m)(v_{1x}^2 + v_{1y}^2) + \frac{1}{2}m(v_{2x}^2 + v_{2y}^2) = \frac{1}{2}(3m)(v_x^2 + v_y^2) + E_p$$

将(4)、(5)两式代入上式并化简,有

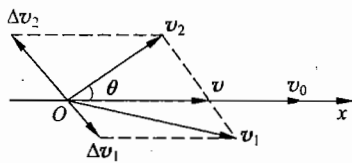


图 4-54

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(2m)[(v_x + \Delta v_{1x})^2 + (v_y + \Delta v_{1y})^2] + \frac{1}{2}m[(v_x + \Delta v_{2x})^2 + (v_y + \Delta v_{2y})^2] \\ &= \frac{1}{2}(3m)(v_x^2 + v_y^2) + \frac{3}{4}m(\Delta v_{2x}^2 + \Delta v_{2y}^2) \\ &= \frac{1}{2}(3m)(v_x^2 + v_y^2) + E_p \end{aligned}$$

得到

$$E_p = \frac{3}{4}m(\Delta v_2)^2 \quad (6)$$

(6)式表明,在 E_p 给定的条件下, Δv_2 的大小是一定的, v_2 的大小和方向与 Δv_2 的方向有关,即与弹簧安置的方向有关,如图 4-55 所示.若 v 和 Δv_2 的大小一定,即图中圆的半径和 P 点到圆心的距离一定,当 v_2 与 Δv_2 垂直时, θ 角最大,这时 v_2 的方向沿圆的切线方向,所以在弹簧各种可能的安置方向中,以图 4-55 所示的沿 Δv_2 的方向安置时,粒子 2 有最大散射角,要求粒子 2 的散射角保持在 30° 以内,必须要求

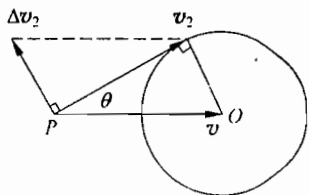


图 4-55

$$|\Delta v_2| \leq v \sin 30^\circ$$

即
$$|\Delta v_2| \leq \frac{v}{2}$$

或
$$|\Delta v_2| \leq \frac{v_0}{6} \quad (7)$$

由(7)式和(6)式,可得到

$$E_p \leq \frac{3}{4}m\left(\frac{v_0}{6}\right)^2 = \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{2}mv_0^2$$

所以要求粒子 3 入射时的动能

$$\frac{1}{2}mv_0^2 \geq 24E_p \quad (8)$$

32. 一玩具“火箭”由上下两部分和一短而硬(即劲度系数很大)的轻质弹簧构成.上部分 G_1 的质量为 m_1 ,下部分 G_2 的质量为 m_2 ,弹簧夹在 G_1 与 G_2 之间,与二者接触而不固连.让 G_1 、 G_2 压紧弹簧,并将它们锁定,此时弹簧的弹性势能为已知的定值 E_0 .通过遥控可解除锁定,让弹簧恢复至原长并释放其弹性势能,设这一释放过程的时间极短.第一种方案是让玩具位于一枯井的井口处并处于静止状态时解除锁定,从而使上部分 G_1 升空.第二种方案是让玩具在井口处从静止开始自由下落,撞击井底(井足够深)后以原速率反弹,反弹后当玩具竖直向上运动到离井口深度为某值 h 的时刻解除锁定.

1) 在第一种方案中,玩具的上部分 G_1 升空到达的最大高度(从井口算起)为多少?其能量是从何种形式的能量转化来的?

2) 在第二种方案中,玩具的上部分 G_1 升空可能达到的最大高度(亦从井口算起)为多少?并定量地讨论其能量可能是从何种形式的能量转化来的?

解析

1) 在弹簧刚伸长至原长的时刻,设 G_1 的速度的大小为 v_1 ,方向向上, G_2 的速度大小为 v_2 ,方向向下,则有

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = E_0 \quad (2)$$

解(1)、(2)两式得

$$v_1 = \sqrt{\frac{2m_2 E_0}{m_1(m_1 + m_2)}} \quad (3)$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2m_1 E_0}{m_2(m_1 + m_2)}} \quad (4)$$

设 G_1 升空到达的最高点到井口的距离为 H_1 ,则

$$H_1 = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{m_2}{m_1 g(m_1 + m_2)} E_0 \quad (5)$$

G_1 上升到最高点的重力势能

$$E_{p1} = m_1 g H_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} E_0 \quad (6)$$

它来自弹簧的弹性势能,且仅为弹性势能的一部分.

2) 在玩具自井底反弹向上运动至离井口的深度为 h 时,玩具向上的速度为

$$u = \sqrt{2gh} \quad (7)$$

设解除锁定后,弹簧刚伸长至原长时, G_1 的速度大小为 v'_1 ,方向向上, G_2 的速度大小为 v'_2 ,方向向下,则有

$$m_1 v'_1 - m_2 v'_2 = (m_1 + m_2) u \quad (8)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) u^2 + E_0 \quad (9)$$

消去(8)、(9)两式中的 v'_2 ,得 v'_1 的方程式

$$m_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) v'^2_1 - 2m_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) u v'_1 + m_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) u^2 - 2E_0 = 0$$

由此可求得弹簧刚伸长至原长时, G_1 和 G_2 的速度分别为

$$v'_1 = u + \sqrt{\frac{2E_0 m_2}{m_1(m_1 + m_2)}} \quad (10)$$

$$v'_2 = -u + \sqrt{\frac{2E_0 m_1}{m_2(m_1 + m_2)}} \quad (11)$$

设 G_1 从解除锁定处向上运动到达的最大高度为 H'_2 , 则有

$$\begin{aligned} H'_2 &= \frac{v_1'^2}{2g} = \frac{1}{2g} \left[u + \sqrt{\frac{2E_0 m_2}{m_1(m_1 + m_2)}} \right]^2 \\ &= h + \frac{m_2 E_0}{m_1 g(m_1 + m_2)} + 2\sqrt{\frac{E_0 m_2 h}{m_1 g(m_1 + m_2)}} \end{aligned}$$

从井口算起, G_1 上升的最大高度为

$$\begin{aligned} H_2 &= H'_2 - h \\ &= \frac{m_2 E_0}{m_1 g(m_1 + m_2)} + 2\sqrt{\frac{E_0 m_2 h}{m_1 g(m_1 + m_2)}} \end{aligned} \quad (12)$$

讨论:

可以看出, 在第二方案中, G_1 上升的最大高度 H_2 大于第一方案中的最大高度 H_1 , 超出的高度与解除锁定处到井口的深度 h 有关. 到达 H_2 时, 其重力势能为

$$E_{p2} = m_1 g H_2 = \frac{m_2 E_0}{m_1 + m_2} + 2\sqrt{\frac{m_1 m_2 E_0 g h}{m_1 + m_2}} \quad (13)$$

$$(i) \text{ 若 } E_{p2} < E_0 \quad (14)$$

即

$$2\sqrt{\frac{m_1 m_2 E_0 g h}{m_1 + m_2}} < \frac{m_1 E_0}{m_1 + m_2}$$

这要求

$$h < \frac{E_0 m_1}{4m_2 g(m_1 + m_2)} \quad (15)$$

这时, G_1 升至最高处的重力势能来自压紧的弹簧的弹性势能, 但仅是弹性势能的一部分. 在此条件下, G_1 上升的最大高度为

$$H_2 < \frac{E_0}{m_1 g}$$

$$(ii) \text{ 若 } E_{p2} = E_0 \quad (16)$$

即

$$2\sqrt{\frac{m_1 m_2 E_0 g h}{m_1 + m_2}} = \frac{m_1 E_0}{m_1 + m_2}$$

这要求

$$h = \frac{E_0 m_1}{4m_2 g(m_1 + m_2)} \quad (17)$$

此时 G_1 升至最高处的重力势能来自压紧的弹簧的弹性势能,且等于全部弹性势能.在此条件下, G_1 上升的高度为

$$H_2 = \frac{E_0}{m_1 g}$$

(iii) 若

$$E_{p2} > E_0 \quad (18)$$

即

$$2\sqrt{\frac{m_1 m_2 E_0 g h}{m_1 + m_2}} > \frac{m_1 E_0}{m_1 + m_2}$$

这要求

$$h > \frac{E_0 m_1}{4m_2 g(m_1 + m_2)} \quad (19)$$

此时 G_1 升至最高处的重力势能大于压紧的弹簧的弹性势能,超出部分的能量只能来自 G_2 的机械能.在此条件下, G_1 上升的最大高度为

$$H_2 > \frac{E_0}{m_1 g}$$

33. 如图 4-56 所示,在倾角为 θ 的固定斜面顶端有一轻质定滑轮,一轻绳跨过滑轮,其两端分别与物体 A、B 相连,物体 A 位于斜面上,连接 B 的轻绳竖直下垂,二者均处于静止状态.已知 A、B 的质量分别为 $m_A = 0.150\text{kg}$, $m_B = 0.100\text{kg}$,A 与斜面间的动摩擦因数和静摩擦因数均为 $\mu = 0.20$, $\theta = 30^\circ$.现在有一质量为 $m = 0.010\text{kg}$ 的子弹沿与斜面成 φ 角的方向射入 A,射入前的速度 $v_0 = 20.0\text{m/s}$,射入后留在 A 中,射入过程的时间极短.当 $\varphi = 45^\circ$ 时,试定量说明子弹射入后系统运动的全过程.滑轮转轴处的摩擦可忽略不计,取 $g = 10\text{m/s}^2$.如果 φ 不是 45° ,而是 45° 到 90° 之间的任意角,则射入过程结束时 A 的速度如何?

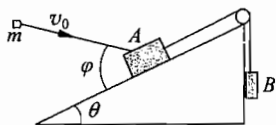


图 4-56

解析

1) 子弹射入 A 的过程

在此过程中,子弹的速度突变,它与 A 之间产生一个冲力,此冲力使子弹的动量发生改变.现分别讨论垂直于斜面和平行于斜面两个方向的情况.

垂直于斜面方向: A 保持不动,子弹的分动量由 $mv_0 \sin\varphi \rightarrow 0$.设冲力在此方向的分力大小的平均值为 F_N ,作用时间为 Δt ,考虑到重力在此方向的分力远小于冲力,则有

$$F_N \Delta t = mv_0 \sin\varphi \quad (1)$$

在此方向 A 所受的力,除子弹给它的冲力以外,还有斜面给它的正压力(设为 F'_N)和重力的分力.由于 A 保持不动,可知三力平衡.同样忽略重力的分力,则有

$$F'_N = F_N$$

平行于斜面方向:子弹的分动量也发生突变,设子弹与A之间的冲力在此方向的分力大小为 F ,则 F 的冲量为 $F\Delta t$.A在此方向还受到阻碍它沿斜面向上运动的摩擦力 F_f 和重力的分力.同样忽略重力的分力,则射入过程中的最大摩擦力为

$$F_{f\max} = \mu F'_N$$

摩擦力 F_f 的冲量为

$$F_f \Delta t \leq F_{f\max} \Delta t = \mu F'_N \Delta t = \mu m v_0 \sin \varphi \quad (2)$$

射入开始时,子弹和A组成的系统沿此方向的动量为 $m v_0 \cos \varphi$,摩擦力的冲量使系统动量减少,如果

$$\mu m v_0 \sin \varphi \geq m v_0 \cos \varphi \quad (3)$$

则摩擦力冲力将使A和子弹的动量减为零,即子弹陷入A中保持静止,A也保持不动.以上条件要求

$$\tan \varphi \geq \frac{1}{\mu} = 5 \quad \text{即} \quad \varphi \geq 78.7^\circ \quad (4)$$

现在 $\varphi = 45^\circ < 78.7^\circ$,所以射入过程结束时,系统的动量大于零,子弹和A将一起向上滑动.设其速度为 v ,则由动量定理可得

$$m v_0 \cos \varphi - (m + m_A) v = F_{f\max} \Delta t = \mu m v_0 \sin \varphi$$

解得

$$v = \frac{m v_0 (\cos \varphi - \mu \sin \varphi)}{m + m_A} \quad (5)$$

代入数据,得

$$v = 0.5\sqrt{2}\text{m/s} = 0.71\text{m/s} \quad (6)$$

2) 射入过程结束后的运动

A的运动:A以初速度 v 向上运动时,由于B的速度为零,绳子将松弛,张力为零.A和子弹在重力和摩擦力作用下做初速度为 v 的匀减速运动,在时刻 t 其加速度、速率和沿斜面上滑的距离分别为

$$a = -(g \sin \theta + \mu g \cos \theta) \quad (7)$$

$$v_A = v - (g \sin \theta + \mu g \cos \theta) t \quad (8)$$

$$s_A = vt - \frac{1}{2} (g \sin \theta + \mu g \cos \theta) t^2 \quad (9)$$

B的运动:绳子张力为零,B为自由落体,其速率及下滑的距离分别为

$$v_B = gt \quad (10)$$

$$s_B = \frac{1}{2} g t^2 \quad (11)$$

当 $s_A = s_B$ 时,绳子被拉直,此时 $t = t_1$,则有

$$vt_1 - \frac{1}{2}(\sin\theta + \mu\cos\theta)gt_1^2 = \frac{1}{2}gt_1^2 \quad (12)$$

可解得

$$t_1 = \frac{2v}{(1 + \sin\theta + \mu\cos\theta)g} \quad (13)$$

代入数据得

$$t_1 = 0.086\text{s} \quad (14)$$

设 B 下降距离为 H_1 , 则 $H_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 = 0.037\text{m}$

设此时 A 、 B 的速度分别为 v'_A 和 v'_B , 则

$$v'_A = v - g(\sin\theta + \mu\cos\theta)t_1 = \frac{1 - \sin\theta - \mu\cos\theta}{1 + \sin\theta + \mu\cos\theta}v \quad (15)$$

$$v'_B = gt_1 = \frac{2v}{1 + \sin\theta + \mu\cos\theta} \quad (16)$$

代入数据得

$$v'_A = 0.14\text{m/s} \quad v'_B = 0.86\text{m/s}$$

3) 绳中出现冲力的过程

由(15)式和(16)式可看出, $v'_B > v'_A$. 因绳子不能伸展, 绳子张力将出现冲力, 此冲力使 A 、 B 的速率变为一样, 设此共同速率为 v' . 由于绳中张力的数值处处相同, A 、 B 所受冲力的冲量大小相等, 因而有

$$m_B(v'_B - v') = (m_A + m)(v' - v'_A) \quad (17)$$

可求得

$$v' = \frac{m_B v'_B + (m_A + m)v'_A}{m_A + m_B + m} \quad (18)$$

代入数据得

$$v' = 0.41\text{m/s} \quad (19)$$

4) A 、 B 速率相等后的运动

由于绳子不能伸长, A 、 B 的速度大小, 加速度大小和运动距离都相同, 设绳子张力为 F_T , 加速度大小为 a' , 则

$$\begin{aligned} F_T - (m + m_A)g\sin\theta - \mu(m + m_A)g\cos\theta &= (m + m_A)a' \\ m_B g - F_T &= m_B a' \end{aligned}$$

解得

$$a' = \frac{m_B - (m_A + m)\sin\theta - \mu(m_A + m)\cos\theta}{m + m_A + m_B}g \quad (20)$$

代入数据得

$$a' = -0.31\text{m/s}^2 \quad (21)$$

负号表示 A、B 做匀减速运动. 设经过时间 t_2 后二者速度变为零, 则

$$t_2 = \frac{v'}{|a'|} \quad (22)$$

代入数据得

$$t_2 = 1.31\text{s}$$

设 B 下降距离为 H_2 , 则 $H_2 = v't_2 + \frac{1}{2}a't_2^2 = 0.27\text{m}$. 故 B 下降的总距离为

$$H = H_1 + H_2 = (0.037 + 0.27)\text{m} = 0.31\text{m}$$

A、B 速度为零后, 由下列数据

$$m_B g = 1.00\text{N}$$

$$(m_A + m)g \sin\theta = 0.80\text{N}$$

$$\mu(m_A + m)g \cos\theta = 0.28\text{N}$$

可以看出, A、B 都将保持不动.

$45^\circ < \varphi < 90^\circ$ 的情况:

在讨论子弹射入过程中,

$\varphi < 78.7^\circ$ 时, A 的速度即为(5)式.

$\varphi \geq 78.7^\circ$ 时, A 保持不动.

子弹打木块, 它们的动量是否守恒、在两物块发生碰撞的极短时间内作用于物块的摩擦力的冲量是否可以忽略不计都是应通过具体分析才能得出结论, 不要把解题中形成的经验替代对问题的具体分析. 在本题的子弹射入木块 A 的过程中, 子弹与木块 A 的总动量并不守恒. 当子弹未射入木块 A 时, 在垂直斜面方向木块受到斜面的作用力 F'_N 的大小等于 $m_A g \cos\theta$, 但在子弹射入木块 A 的极短时间内, F'_N 并不等于 $m_A g \cos\theta$. 若以子弹和木块 A 作为考查对象, 则在子弹射入木块 A 的极短时间内, 作用于两者构成的系统的外力在垂直于斜面方向的分力有: $mg \cos\theta$, $m_A g \cos\theta$ 和斜面对 A 的作用力 F_{N1} , 它们的合力 $F_{N1} - m_A g \cos\theta - mg \cos\theta$ 在子弹射入木块 A 的极短时间内的冲量等于 $mv_0 \sin\varphi$. 子弹射入木块经历的时间越短, $m_A g \cos\theta$ 和 $mg \cos\theta$ 的冲量越小, 以至于可以忽略不计, 合力的冲量实际上仅是斜面作用于木块的力 F_{N1} 的冲量, 而 F_{N1} 的值可以非常大. 沿着斜面方向, 当子弹未射入 A 时, 摩擦力 $F_f \leq \mu F_{N1}$ 在子弹射入 A 的过程中, 因 F_{N1} 很大, 其冲量不能忽略, 故摩擦力的冲量亦不能忽略, 所以子弹与木块 A 的动量在沿斜面方向的分量亦不守恒. 可是有的学生还是按他的经验, 认为在子弹射入木块 A 的极短时间内, 斜面作用于木块 A 的摩擦力的冲量很小, 可忽略不计, 结果当然不对了.

本题的设问方式带有某种开放性, 对习惯于跟着指令解题的学生, 会觉得有些困难.

34. 如图 4-57 所示, 将一铁饼状小物块在离地面高为 h 处沿水平方向以初速度 v_0 抛出. 已知物块碰地弹起时沿竖直方向的分速度的大小与碰前沿竖直方向的分速度的大小之比为 $e (< 1)$. 又知沿水平方向物块与地面之间的滑动摩擦因数为 $\mu (\neq 0)$; 每次碰撞过程的时间都非常短, 而且都是“饼面”着地. 求物块沿水平方向运动的最远距离.



图 4-57

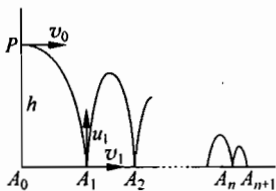


图 4-58

解析

物块抛出后做平抛运动, 与地面发生第一次碰撞后反弹, 具有竖直向上的分速度, 同时还具有水平方向的分速度, 故物块做斜抛运动. 以后每当物块与地面发生碰撞后, 都做斜抛运动. 由于每次与地面碰撞后, 竖直向上的分速都是碰撞前的 e 倍, $e < 1$, 同时因摩擦力作用, 在与地碰撞的过程中, 物块在水平方向的分速度也要变小, 故一次一次碰撞后物块做斜抛运动的初速度将越来越小, 它的运动情况如图 4-58 所示, 其中 A_1, A_2, \dots, A_n 代表物块第一、第二、 \dots 、第 n 次落地点的位置.

1) 物块沿竖直方向的运动

物块下落到 A_1 处与地面发生第一次碰撞前竖直方向的分速度为

$$u_0 = \sqrt{2gh} \quad (1)$$

碰后速度变为 u_1 , 根据题意有

$$u_1 = eu_0 \quad (2)$$

在 A_2, A_3, \dots, A_n 各落地点碰后竖直方向的分速度分别为

$$\begin{aligned} u_2 &= e^2 u_0 \\ u_3 &= e^3 u_0 \\ &\vdots \\ u_n &= e^n u_0 \end{aligned} \quad (3)$$

设物块的质量为 m , 与地面碰撞的时间为 Δt , 在物块与地面碰撞的过程中, 物块受到竖直向下的重力 mg 和竖直向上的地面施的力 F_N 作用, 因为试题已假定物块与地面碰撞的时间 Δt 非常短, 故在碰撞过程中重力的冲量 $mg\Delta t$ 可忽略不计. 以 $F_{N1}, F_{N2}, \dots, F_{Nn}$ 分

别表示在第一次、第二次、…、第 n 次碰撞过程中地面对物块沿竖直方向的作用力,由动量定理有

$$\begin{aligned} F_{N1} \Delta t &= mu_1 + mu_0 = mu_0(1+e) \\ F_{N2} \Delta t &= mu_2 + mu_1 = mu_0 e(1+e) \\ F_{N3} \Delta t &= mu_3 + mu_2 = mu_0 e^2(1+e) \\ &\vdots \\ F_{Nn} \Delta t &= mu_n + mu_{n-1} = mu_0 e^{n-1}(1+e) \end{aligned} \quad (4)$$

可以看出,当 $n \rightarrow \infty$ 时,地面对物块作用力的冲量将趋向于零.在有限的 n 次碰撞过程中,地面作用于物块的沿竖直方向的力的总冲量为

$$\sum_n F_{Nn} \Delta t = mu_0(1+e)(1+e+e^2+\cdots+e^{n-1}) \quad (5)$$

当 $n \rightarrow \infty$,即在无限多次碰撞过程中,地面在竖直方向作用于物块的总冲量

$$\sum_{n \rightarrow \infty} F_{Nn} \Delta t = mu_0(1+e)(1+e+e^2+\cdots+e^{n-1}) = mu_0 \frac{1+e}{1-e} \quad (6)$$

是有限的.

以上的讨论都是认为碰撞过程中重力的冲量和 F_N (地面对物块向上的作用力)的冲量相比很小,可以不考虑重力的影响,但随着物块反弹高度的逐渐减小,到后来,在碰撞过程中,物块在竖直方向的动量及动量的变化已很小,这时,地面作用于物块的沿竖直方向的力的冲量与重力的冲量已可比拟,上面的理由已不成立;但是,由于我们假定 Δt 非常非常小,在计算动量变化时两者都可以不计,这样算出的结果和 $n \rightarrow \infty$ 而得的(6)式实际是一致的.这时物块在竖直方向实际上已无运动,作用于物块的重力与地面的支持力达到平衡.

2) 物块沿水平方向的运动

物块刚抛出时沿水平方向的分速度为 v_0 ,在 A_1 与地面发生第一次碰撞,在碰撞的极短时间 Δt 内,物块受到沿水平方向的摩擦力作用,速度将变小.以 v_1, v_2, \dots, v_n 分别表示第一、第二、…、第 n 次碰撞后物块的水平分速度,由动量定理有

$$\begin{aligned} \mu F_{N1} \Delta t &= mv_0 - mv_1 \\ \mu F_{N2} \Delta t &= mv_1 - mv_2 \\ &\vdots \\ \mu F_{Nn} \Delta t &= mv_{n-1} - mv_n \end{aligned} \quad (7)$$

将以上各式相加得

$$\sum_n \mu F_{Nn} \Delta t = mv_0 - mv_n \quad (8)$$

(8)式等号左边为 n 次碰撞过程中摩擦力的总冲量.若 $n \rightarrow \infty$,注意到(6)式有

$$\sum_{n \rightarrow \infty} \mu F_{Nn} \Delta t = \mu mu_0 \frac{1+e}{1-e} \quad (9)$$

由(9)式可知,当物块开始抛出的高度 h 以及 e 和地面的摩擦因数 μ 都确定后,无限多次碰撞过程中摩擦力的总冲量是一定的,因而能使物块沿水平方向的动量的最大变化量亦是一定的. 如果摩擦力的总冲量大于物块沿水平方向的初动量,则当物块沿水平方向的速度变为零时,沿竖直方向与地面的碰撞仍在进行;反之,则当沿竖直方向的碰撞停止后,物块仍有沿水平方向的分速度. 当然,还有一种特殊情况: 竖直方向的碰撞与水平方向的运动同时停止. 不同的情况,对应的物块沿水平方向运动的最远距离将不同. 下面分几种情况进行计算.

1) 若物块刚抛出时的水平速度 v_0 比较小,且有下面的关系:

$$mv_0 < \mu mu_0 \frac{1+e}{1-e} \quad (10)$$

则物块与地面发生有限次数的碰撞后,沿水平方向的运动就消失,但竖直方向的运动依然存在,于是物块在原地继续上下跳动,直到最终停止. 在这种情况下,设经过 $n=n_0$ 次碰撞,物块的水平分速度已经非常小,再经过一次碰撞,即在第 $n=n_0+1$ 次碰撞结束时,水平方向分速度变为零,即 $v_{n_0+1}=0$,由(5)、(8)两式得

$$\mu u_0(1+e)(1+e+e^2+\cdots+e^{n_0}) = v_0$$

上式可写成

$$v_0 = \frac{\mu u_0(1+e)(1-e^{n_0+1})}{1-e}$$

或

$$e^{n_0+1} = 1 - \frac{v_0(1-e)}{\mu u_0(1+e)}$$

两边取对数得

$$n_0 + 1 = \frac{1}{\lg e} \lg \left[1 - \frac{v_0(1-e)}{\mu u_0(1+e)} \right] \quad (11)$$

令

$$B = \frac{1}{\lg e} \lg \left[1 - \frac{v_0(1-e)}{\mu u_0(1+e)} \right] \quad (12)$$

若 B 恰为整数,则表示在第 n_0+1 次碰撞中,经过整个碰撞时间 Δt ,水平速度变为零,故碰撞次数

$$n_0 + 1 = B$$

有

$$n_0 = B - 1 \quad (13)$$

若 B 不是整数,则表示在第 n_0+1 次碰撞结束前,即在小于碰撞时间内,水平速度已变为零,故碰撞次数

$$n_0 + 1 = [B] + 1$$

有

$$n_0 = [B] \quad (14)$$

[B]表示 B 的整数部分.

由于经过 $n_0 + 1$ 次碰撞,物块沿水平方向的分速度已为零,但竖直方向的分速度尚不为零,故物块将在 A_{n_0+1} 处做上下跳跃运动,直到 $n \rightarrow \infty$,即 $u_0 e^n \rightarrow 0$,最终停在 A_{n_0+1} 处.在这种情况下,物块运动的最远水平距离为 $s_1 = A_0 A_{n_0+1}$. 因

$$\begin{aligned} A_0 A_1 &= \frac{u_0}{g} v_0 \\ A_1 A_2 &= \frac{2u_1}{g} v_1 = \frac{2eu_0 v_0}{g} - \frac{2eu_0^2}{g} (1+e)\mu \\ A_2 A_3 &= \frac{2e^2 u_0 v_0}{g} - \frac{2e^2 u_0^2}{g} (1+e)\mu (1+e) \\ &\vdots \\ A_{n_0} A_{n_0+1} &= \frac{2e^{n_0} u_0 v_0}{g} - \frac{2e^{n_0} u_0^2}{g} (1+e)\mu \times (1+e+e^2+e^3+\cdots+e^{n_0-1}) \end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{u_0}{g} v_0 + \frac{2u_0 v_0}{g} (e+e^2+\cdots+e^{n_0}) - \frac{2u_0^2}{g} \times \\ &\quad (1+e)\mu [e+e^2(1+e)+e^3(1+e+e^2)+\cdots+ \\ &\quad e^{n_0}(1+e+e^2+\cdots+e^{n_0-1})] \end{aligned} \quad (15)$$

分别求级数的和

$$e+e^2+e^3+\cdots+e^{n_0} = e \frac{1-e^{n_0}}{1-e} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} &e+e^2(1+e)+e^3(1+e+e^2)+\cdots+e^{n_0}(1+e+e^2+\cdots+e^{n_0-1}) \\ &= e+e^2 \frac{1-e^2}{1-e} + e^3 \frac{1-e^3}{1-e} + \cdots + e^{n_0} \frac{1-e^{n_0}}{1-e} \\ &= \frac{1}{1-e} [e(1-e)+e^2(1-e^2)+e^3(1-e^3)+\cdots+e^{n_0}(1-e^{n_0})] \\ &= \frac{1}{1-e} \left(\frac{e-e^{n_0+1}-e^{n_0+2}-e^{2n_0+2}}{1-e^2} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

由(16)、(17)式并注意到(1)式得

$$s_1 = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \left(1 + 2e \frac{1-e^{n_0}}{1-e} \right) - \frac{4e\mu h}{(1-e)^2} (1-e^{n_0})(1-e^{n_0+1}) \quad (18)$$

式中 n_0 由(13)式或(14)式决定.

2) 若物块刚抛出时的水平速度 v_0 比较大,且有下面的关系:

$$mv_0 > \mu mu_0 \frac{1+e}{1-e} \quad (19)$$

则在物块与地面发生无限多次碰撞后,沿竖直方向的运动已经停止,但沿水平方向的运动仍然存在,在摩擦力的作用下最终停下.在这种情况下,物块与地面发生无限次碰撞后水平方向的分速度 $v_{\infty} \neq 0$,注意到(8)式和(9)式有

$$\mu m u_0 \frac{1+e}{1-e} = m v_0 - m v_{\infty} \quad (20)$$

得
$$v_{\infty} = v_0 - \mu u_0 \frac{1+e}{1-e} \quad (21)$$

碰撞停止后物块在水平方向滑行的距离

$$s' = \frac{v_{\infty}^2}{2\mu g} = \frac{1}{2\mu g} \left(v_0 - \mu u_0 \frac{1+e}{1-e} \right)^2 \quad (22)$$

在无限次碰撞过程中,物块沿水平方向滑行的距离可令(18)式中的 $n_0 \rightarrow \infty$ 求得,即

$$\begin{aligned} s'' &= v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \left(1 + \frac{2e}{1-e} \right) - \frac{4e\mu h}{(1+e)^2} \\ &= v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \frac{1+e}{1-e} - \frac{4e\mu h}{(1-e)^2} \end{aligned} \quad (23)$$

物块在水平方向运动的最远距离

$$s_2 = s' + s'' = \frac{1}{2\mu g} \left(v_0 - \mu u_0 \frac{1+e}{1-e} \right)^2 + v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \frac{1+e}{1-e} - \frac{4e\mu h}{(1-e)^2} \quad (24)$$

3) 若刚抛出时的水平方向的分速度 v_0 满足下面的关系:

$$m v_0 = \mu m u_0 \frac{1+e}{1-e}$$

则物块与地面发生无限多次碰撞后,沿竖直方向的运动停止,同时,沿水平方向的运动亦停止.在这种情况下,物块在水平方向运动的最远距离

$$s_3 = s'' = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \frac{1+e}{1-e} - \frac{4e\mu h}{(1-e)^2} \quad (25)$$

35. 有一个半径为 R 、质量为 m_0 的刚性均匀细圆环,开始时静止在水平光滑桌面上.环上有一小孔 P_0 ,桌面上另有一个质量为 m 的质点,可以自由穿过小孔.开始时质点以初速度 v 从小孔 P_0 射入,与圆环内壁发生 N 次弹性碰撞后,又从小孔 P_0 穿出(图 4-59).设圆环内壁光滑.从质点射入小孔到又从小孔穿出,圆环中心 O 到质点的连线相对于圆环刚好转过 360° .求质点穿出小孔后圆环中心相对于桌面的速度.

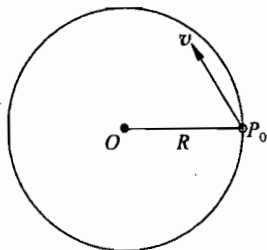


图 4-59

[提示] 在碰撞过程中圆环不发生转动.

解析

第一步：证明在碰撞过程中相对于环的反射角等于入射角。

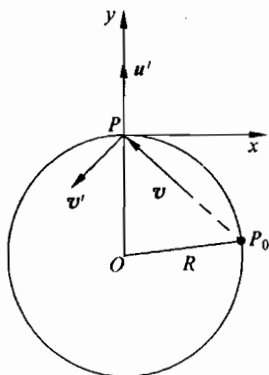


图 4-60

设 P 为碰撞点, 以 OP 为 y 轴建立一静止于桌面的参照系(图 4-60). 并设质点碰前速度为 v , 碰后速度为 v' ; 圆环碰前静止, 其 $u=0$, 碰后速度为 u' .

由于圆环内壁光滑, 以及碰撞是完全弹性的, 根据 x 、 y 两方向的动量守恒定律以及能量守恒定律, 有

$$v'_x = v_x, \quad u'_x = 0 \quad (1)$$

$$mv'_y + m_0 u'_y = mv_y \quad (2)$$

$$\frac{1}{2}m(v_x'^2 + v_y'^2) + \frac{1}{2}m_0 u_y'^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) \quad (3)$$

由(1)、(3)二式得

$$\frac{1}{2}mv_y'^2 + \frac{1}{2}m_0 u_y'^2 = \frac{1}{2}mv_y^2 \quad (4)$$

由(2)、(4)二式得

$$v'_y = \frac{m - m_0}{m + m_0} v_y \quad (5)$$

$$u'_y = \frac{2m}{m + m_0} v_y \quad (6)$$

碰前质点相对于圆环的速度为

$$\bar{v}_x = v_x, \quad \bar{v}_y = v_y \quad (7)$$

碰后为

$$\bar{v}'_x = v_x = \bar{v}_x \quad (8)$$

$$\bar{v}'_y = v'_y - u'_y = -v_y = -\bar{v}_y \quad (9)$$

从以上二式可知, 以圆环为参照系, 质点的相对速度在切线方向上不变而法线方向上变号, 因此, 相对于环的反射角等于入射角, 而相对速度的大小不变.

第二步：求质点从小孔穿出时, 入射方向所应满足的条件.

若以环为参照系, 则以 φ 角入射的质点的反射角也是 φ , 反射后再与圆环的另一处相碰时, 新的入射角也是 φ . 如此下去, 转过一圈后恰好又经过小孔 P_0 , 则可以从 P_0 穿出(图 4-61).

穿出条件是质点相对于环的轨迹应是一个环内接

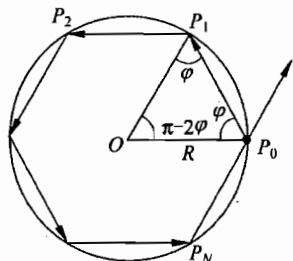


图 4-61

正 $(N+1)$ 边形, N 为碰撞的次数. φ 应满足的条件是

$$\pi - 2\varphi = \frac{2\pi}{N+1}$$

即

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{N+1} \quad (10)$$

第三步: 求质点穿出小孔后, 圆环中心相对于桌面的速度. 利用动量守恒定律讨论初状态与质点穿出小孔后的状态.

在初状态, 质点与环所成系统的总动量即为入射质点的动量 $m\mathbf{v}$; 质点穿出后, 相对于环的速度为 \mathbf{v}'_N , 其大小与 \mathbf{v} 的大小相同、方向与 OP_0 成 φ 角 (图 4-62). 设所求环中心速度为 \mathbf{U}_N , 则质点穿出后相对于桌面的速度为 $\mathbf{v}_N = \mathbf{v}'_N + \mathbf{U}_N$, 此时系统的总动量为

$$m\mathbf{v}_N + m_0\mathbf{U}_N = m(\mathbf{v}'_N + \mathbf{U}_N) + m_0\mathbf{U}_N$$

根据动量守恒定律

$$m\mathbf{v} = m(\mathbf{v}'_N + \mathbf{U}_N) + m_0\mathbf{U}_N \quad (11)$$

即

$$\mathbf{U}_N = \frac{m}{m+m_0}(\mathbf{v} - \mathbf{v}'_N) \quad (12)$$

由图 4-63 可以看出:

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}'_N \begin{cases} \text{大小: } 2v\cos\varphi \\ \text{方向: } \overrightarrow{P_0O} \text{ 方向} \end{cases}$$

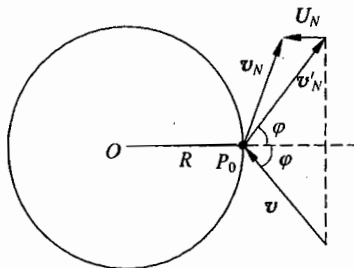


图 4-62

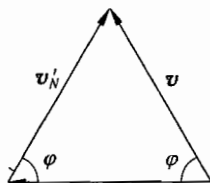


图 4-63

由(12)式及(10)式得

$$\mathbf{U}'_N \begin{cases} \text{大小: } \frac{2m}{m+m_0} v \sin \frac{\pi}{N+1} \\ \text{方向: } \overrightarrow{P_0O} \text{ 方向} \end{cases}$$

36. 如图 4-64 所示, 质量为 m 的长方形箱子, 放在光滑的水平地面上. 箱内有一质量也为 m 的小滑块, 滑块与箱底间无摩擦. 开始时箱子静止不动, 滑块以恒定的速度 v_0 从箱子的 A 壁处向 B 壁处运动, 后与 B 壁碰撞. 假定滑块与箱壁每碰撞一次, 两者相对速度的大小变为该次碰撞前相对速度的 e 倍,

$$e = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

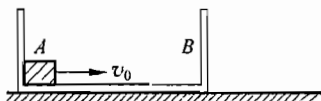


图 4-64

1) 要使滑块与箱子这一系统损耗的总动能不超过其初始动能的 40%, 滑块与箱壁最多可碰撞几次?

2) 从滑块开始运动到刚完成上述次数的碰撞期间, 箱子的平均速度是多少?

解析

因为滑块和箱子这一系统在水平方向不受外力, 所以动量守恒, 题目已给出每次碰撞前后相对速度之比, 由此可求出任一次碰撞过程中动能的损耗.

1) 设滑块与箱壁刚完成第 i 次碰撞时, 滑块相对地面的速度为 v_i , 箱子相对地面速度为 u_i , 根据动量守恒和相对速度的关系可知, 当 $i=1$ 时,

$$mv_1 + mu_1 = mv_0$$

$$v_1 - u_1 = -ev_0$$

由此得

$$v_1 = \frac{1}{2}(1-e)v_0, \quad u_1 = \frac{1}{2}(1+e)v_0$$

当 $i=2$ 时,

$$mv_2 + mu_2 = mv_0$$

$$v_2 - u_2 = -e(v_1 - u_1) = e^2v_0$$

由此得

$$v_2 = \frac{1}{2}(1+e^2)v_0, \quad u_2 = \frac{1}{2}(1-e^2)v_0$$

当 i 为任意数 n 时,

$$mv_n + mu_n = mv_0$$

$$v_n - u_n = (-e)^n v_0$$

由此得

$$v_n = \frac{1}{2}[1 + (-e)^n]v_0, \quad u_n = \frac{1}{2}[1 - (-e)^n]v_0$$

第 n 次碰撞后, 系统的动能是

$$E_{kn} = \frac{1}{2}m(v_n^2 + u_n^2) = \frac{1}{4}mv_0^2(1 + e^{2n})$$

系统损失的动能是

$$\begin{aligned}\Delta E_{kn} &= E_k - E_{kn} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{4}mv_0^2(1 + e^{2n}) \\ &= \frac{1 - e^{2n}}{2} \cdot \frac{1}{2}mv_0^2\end{aligned}$$

当 $n=1$ 时,

$$\frac{\Delta E_{k1}}{E_k} = \frac{1 - e^2}{2} = \frac{1 - \sqrt{\frac{1}{2}}}{2} = 0.146$$

当 $n=2$ 时,

$$\frac{\Delta E_{k2}}{E_k} = \frac{1 - e^4}{2} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{2} = 0.25$$

当 $n=3$ 时,

$$\frac{\Delta E_{k3}}{E_k} = \frac{1 - e^6}{2} = \frac{1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}{2} = 0.323$$

当 $n=4$ 时,

$$\frac{\Delta E_{k4}}{E_k} = \frac{1 - e^8}{2} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{2} = 0.375$$

当 $n=5$ 时,

$$\frac{\Delta E_{k5}}{E_k} = \frac{1 - e^{10}}{2} = \frac{1 - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}}}{2} = 0.412$$

因为要求动能损失不超过 40%，所以得 $n=4$ 。

2) 设 A、B 两侧壁之间的距离为 l ，则滑块从开始运动到与箱壁发生第一次碰撞时间是

$$t_0 = \frac{l}{v_0}$$

以后每两次碰撞之间的时间(在系统动能的损耗未超过其初动能的 40% 以前)依次是

$$t_1 = \frac{l}{|u_1 - v_1|} = \frac{l}{ev_0}, \quad t_2 = \frac{l}{e^2v_0}, \quad t_3 = \frac{l}{e^3v_0}$$

总时间是

$$T = t_0 + t_1 + t_2 + t_3 = \frac{l}{e^3v_0}(1 + e + e^2 + e^3)$$

在这段时间中，箱子运动的距离是

$$\begin{aligned}s &= 0 + u_1t_1 + u_2t_2 + u_3t_3 \\ &= \frac{l}{2} \left(1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} \right) = \frac{l}{2e^3}(1 + e + e^2 + e^3)\end{aligned}$$

平均速度是

$$\bar{v} = \frac{s}{T} = \frac{v_0}{2}$$

有的学生在解题时,把方程式中的正、负号弄错了,认为 $v_1 - u_1 = ev_0$. 弄错正负号的实质是对碰撞前后速度的方向未能作出正确的判断. 在写出动量守恒的方程 $mv_1 + mu_1 = mv_0$ 时,实际上假定了滑块与箱壁 B 碰撞后,滑块的速度 v_1 和箱子的速度 u_1 与碰撞前滑块的速度 v_0 同方向. $v_1 - u_1$ 是碰撞后滑块相对箱子的速度. 若以箱子为参考系,则在碰撞前,滑块以相对速度 v_0 射向 B 壁,碰撞后,滑块以相对速度 $v_1 - u_1$ 从 B 壁弹回, $v_1 - u_1$ 的大小与 ev_0 的大小相等,方向与 ev_0 的方向相反,写成等式便有

$$v_1 - u_1 = -ev_0$$

若认为 $v_1 - u_1 = ev_0$,则表示 $v_1 - u_1$ 与 ev_0 同方向,这与实际情况不符. 进一步分析,可以发现 $v_1 - u_1$ 确实是负的,而 ev_0 是正的,负数与正数当然不会相等. 当滑块以 v_0 射向 B 壁时,两者从相互接触开始,相互挤压,形变过程中出现的弹性力使滑块减速,箱子加速,直到两者速度相等时,挤压得最紧,弹性力最大. 它使箱子进一步加速,滑块进一步减速,于是箱子的速度大于滑块的速度,形变逐渐变小. 在本题中,当形变尚未完全消失时,弹性力就消失,两者便分离. 分离时,滑块、箱子的速度方向相同,但滑块的速度 v_1 小于箱子的速度 u_1 ,故 $v_1 - u_1$ 是负的.

37. 有一个质量及线度足够大的水平板,它绕垂直于水平板的竖直轴以匀角速度 ω 旋转. 在板的上方 h 处有一群相同的小球(可视为质点),它们以板的转轴为中心、 R 为半径均匀地在水平面内排成一个圆周(以单位长度内小球的个数表示其数线密度). 现让这些小球同时从静止状态开始自由落下,设每个球与平板发生碰撞的时间非常短;而且碰撞前后小球在竖直方向上速度的大小不变,仅是方向反向;而在水平方向上则会发生滑动摩擦,动摩擦因数为 μ .

1) 试求这群小球第二次和第一次与平板碰撞时小球数线密度之比值 ν_1 .

2) 如果 $R < \mu g / \omega^2$ (g 为重力加速度),且 $\nu_1 = 1/\sqrt{2}$,试求这群小球第三次和第一次与平板碰撞时的小球数线密度之比值 ν_2 .

解析

1) 设小球总数为 N ,第一次碰撞时小球数线密度为 $\lambda = N/(2\pi R)$. 在这些小球中任取一个,它与平板相碰前垂直向下的速率为 $v_0 = \sqrt{2gh}$. 设碰撞过程历时 Δt ,平均法向作用力为 \bar{F}_N . 根据题设,碰撞后小球垂直向上的速度大小仍为 v_0 ,据动量定理有 $\bar{F}_N \Delta t = 2mv_0$,式中 m 为小球质量. 小球与平板刚接触时尚无水平方向速度,而平板被碰点有切

向速度,大小为 $u_1 = \omega R$. 这样便会因相对滑动而使小球受到沿相对速度 u_1 方向的滑动摩擦力 F_f , F_f 对小球作用的结果是使得小球在 Δt 内获得水平沿 u_1 方向的速度,其大小记为 v_1 ,显然 $v_1 \leq u_1$,因为一旦 v_1 达到 u_1 值,相对运动不再存在,滑动摩擦力也随之而消失.

下面分两种情况讨论.

(i) 在 Δt 末尾时刻 v_1 仍小于 u_1 ,即小球与平板被碰点之间的相对速度未能达到零值,那么应有 $\bar{F}_f = \mu \bar{F}_N$, $\bar{F}_f \Delta t = mv_1$. 式中 \bar{F}_f 为 Δt 时间内 F_f 的平均值. 结合 $\bar{F}_N \Delta t = 2mv_0$ 及 $v_0 = \sqrt{2gh}$ 可得

$$v_1 = 2\mu v_0 = 2\mu\sqrt{2gh} \quad (1)$$

(1)式只有在 $2\mu\sqrt{2gh} < \omega R$ 时才成立.

(ii) 在 Δt 末尾或更早一些时刻 v_1 已达 u_1 值,即小球与平板被碰点已相对静止,则 $\bar{F}_f \leq \mu \bar{F}_N$, 不管 \bar{F}_f 取何值,碰撞后恒有

$$v_1 = u_1 = \omega R \quad (2)$$

既然 $\bar{F}_f \leq \mu \bar{F}_N$, \bar{F}_f 所能提供的 v_1 自然不能超过在 $\bar{F}_f = \mu \bar{F}_N$ 时所能提供的 $2\mu\sqrt{2gh}$ 值,因此(2)式只能在 $2\mu\sqrt{2gh} \geq \omega R$ 的情况下发生.

以上两种情况发生的条件中, ωR 的意义为小球与平板被碰点的相对速度的大小.

第一次碰撞后小球以 v_0 为垂直方向速度、 v_1 为水平方向速度做斜抛运动. 很容易算得水平射程为

$$L_1 = 2v_1 \sqrt{\frac{2h}{g}} = \begin{cases} 8\mu h, & \text{当 } 2\mu\sqrt{2gh} < \omega R \text{ 时} \\ 2\omega R \sqrt{2h/g}, & \text{当 } 2\mu\sqrt{2gh} \geq \omega R \text{ 时} \end{cases} \quad (3)$$

所有小球在第二次落到平板上时形成以

$$R_1 = \sqrt{R^2 + L_1^2} = \begin{cases} \sqrt{R^2 + (8\mu h)^2}, & \text{当 } 2\mu\sqrt{2gh} < \omega R \text{ 时} \\ R\sqrt{1 + 8\omega^2 h/g}, & \text{当 } 2\mu\sqrt{2gh} \geq \omega R \text{ 时} \end{cases} \quad (5)$$

为半径的圆,且小球仍是均匀分布,小球数线密度为 $\lambda_1 = N/(2\pi R_1)$. 因此本题所求的比值 ν_1 为

$$\nu_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda} = \frac{R}{R_1} = \begin{cases} 1/\sqrt{1 + \left(\frac{8\mu h}{R}\right)^2}, & \text{当 } 2\mu\sqrt{2gh} < \omega R \text{ 时} \\ 1/\sqrt{1 + \frac{8\omega^2 h}{g}}, & \text{当 } 2\mu\sqrt{2gh} \geq \omega R \text{ 时} \end{cases} \quad (7)$$

2) 如果取(7)式的结果,那么在 $\nu_1 = 1/\sqrt{2}$ 时, $h = R/(8\mu)$, 由 $2\mu\sqrt{2gh} < \omega R$, 得到 $R > \mu g/\omega^2$, 这与题设条件 $R < \mu g/\omega^2$ 是矛盾的.

如果取(8)式的结果,那么在 $v_1 = 1/\sqrt{2}$ 时, $h = g/(8\omega^2)$, 由 $2\mu\sqrt{2gh} \geq \omega R$, 得到 $R \leq \mu g/\omega^2$, 这与题设条件 $R < \mu g/\omega^2$ 相符. 因此应取 $2\mu\sqrt{2gh} > \omega R$, $h = g/(8\omega^2)$, 将 h 值代入(4)式得到

$$L_1 = 2\omega R \sqrt{2h/g} = R \quad (9)$$

由 $v_1 = R/R_1 = 1/\sqrt{2}$ 得到

$$R_1 = \sqrt{2}R \quad (10)$$

第二次碰撞过程中,每个小球在垂直方向上仍有 $\bar{F}_N \Delta t = 2mv_0$. 碰撞开始时,小球水平方向速度 v_1 以及平板被碰点的速度 u_2 如图 4-65 所示,小球对平板被碰点的相对速度 $u'_2 = v_1 - u_2$, 其大小为

$$\begin{aligned} u'_2 &= \sqrt{u_2^2 + v_1^2 - 2u_2 v_1 \cos\varphi} \\ &= \sqrt{2v_1^2 + v_1^2 - 2\sqrt{2}v_1^2 \cdot \sqrt{2}/2} = v_1 = \omega R \end{aligned} \quad (11)$$

既然相对速度大小也为 ωR , 那么在 $2\mu\sqrt{2gh} > \omega R$ 的条件下,由第1)问的讨论可知,平板为小球提供的摩擦力必朝 u'_2 的反方向,而且能使小球与平板被碰点在 Δt 结束前已处于相对静止状态. 因此第二次碰撞后小球相对地面参照系的水平方向速度即为

$$v_2 = u_2, \quad v_2 = \omega R_1 = \sqrt{2}v_1 \quad (12)$$

它的水平射程为

$$L_2 = 2v_2 \sqrt{2h/g} = 2\sqrt{2}v_1 \sqrt{2h/g} = \sqrt{2}L_1 = R_1 \quad (13)$$

于是第三次相碰时这群小球对应的圆半径按图 4-66 可求出为

$$R_2 = \sqrt{2}R_1 = 2R \quad (14)$$

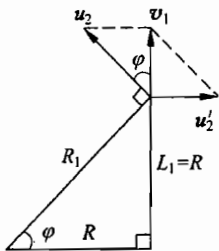


图 4-65

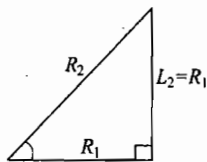


图 4-66

小球数线密度为 $\lambda_2 = N/(2\pi R_2)$, 所求比值为

$$\nu_2 = \lambda_2/\lambda = R/R_2 = 1/2 \quad (15)$$

此题在掌握物理原理与分析推理两方面都有较高要求. 对于第1)问, 得出第一种情况或第二种情况的结果还比较简单, 但作出两种情况的分析, 得出(1)式与(2)式成立的条件, 则需对滑动摩擦力的作用及在一定时间 Δt 内可能产生的效果有较深入全面的理解. 对于第2)问, 首先必须根据题设情况与第1)问的结果决定采用(7)式或(8)式并求出 R_1 , 然后作第二次碰撞过程的分析. 在这里必须运用小球所受摩擦力的方向与它对平板被碰点的相对速度方向相反的认识(否则解题无从下手, 或做错. 不论认为摩擦力与小球运动方向相反, 即认为是一 v_1 方向, 或认为摩擦力与平板被碰点速度 u_2 方向相同, 都是错的), 并根据相对速度大小也为 ωR 而利用第1)问中第二种情况的结果, 得出小球跳起的速度 v_2 等于 u_2 的结论(如果径直认为碰后跳起的速度一定就等于平板被碰点的速度是根据不足的. 这里第2)问的题设情况很重要). 这些都是解此题的要点, 要求学生审慎地作物理分析.

38. A、B 两滑块限在一光滑的水平直轨道上发生对心碰撞, 用频闪照相在 $t_0=0$, $t_1=\Delta t$, $t_2=2\Delta t$, $t_3=3\Delta t$ 各时刻闪光 4 次, 摄得如图 4-67 所示照片. 照片中形体较小的 4 个是滑块 A 的像, 形体较大的 2 个是滑块 B 的像. 已知在这 4 次闪光的瞬间, A、B 均在 0~80 刻度范围内, 试根据照片中的坐标判断出两滑块发生碰撞的位置及时刻, 并说明判断的依据.

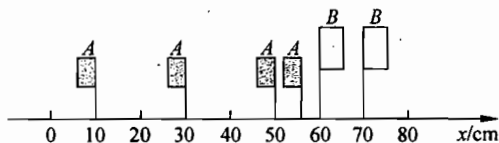


图 4-67

解析

由照片看出, 4 次闪光只拍到 2 个 B 的像, 这说明 B 的像必有重叠. 单根据重叠的情况, 对于 A、B 两物体的运动共可作出如下 3 种假设. 下面分别讨论, 并作出物理上的判断.

1) 假设碰撞前 B 向左做匀速直线运动, 碰撞后 B 弹回的 2 个像跟碰撞前的 2 个像重叠. 即各次闪光时 B 像左侧面的位置坐标的刻度依次为 $x_{B0}=70$, $x_{B1}=60$, $x_{B2}=60$, $x_{B3}=70$. 因碰撞前后 B 在 2 次闪光时间间隔内运动的路程均为 10(指横轴刻度, 下同), 故碰撞前后 B 的运动速率均为 $10/\Delta t$, 而碰撞前后 B 都是做匀速直线运动, 据此可推断出 B 与 A 碰撞位置只能在 $x=55$ 处, 碰撞时刻是 $t=1.5\Delta t$. 由于 $t=1.5\Delta t$ 时刻不闪光, 而照片上 $x=55$ 处有 A 的像, 这说明碰撞前或碰撞后 A 静止在 $x=55$ 处, 因而照片上 A 的像必将

在 $x=55$ 处发生叠影(在 t_0, t_1 或在 t_1, t_3 拍出),但实际上 A 有 4 个像,并无叠影,因此,这一假设不成立.

2) 假设碰撞前 B 静止于 $x=60$ 处,前 3 次像叠影,其坐标为 $x_{B0}=x_{B1}=x_{B2}=60$,碰撞后 B 向右运动, $x_{B3}=70$.

据此假设可推断碰撞位置在 $x=60$ 处,碰撞前有 3 次闪光, A 像右侧面坐标依次为 $x_{A0}=10, x_{A1}=30, x_{A2}=50$, A 的速率为 $20/\Delta t$,由此可推断碰撞发生在 $t=2.5\Delta t$ 时刻,碰撞后 B 的速率为 $10/\left(\frac{\Delta t}{2}\right)=20/\Delta t$, A 的速率为 $5/\left(\frac{\Delta t}{2}\right)=10/\Delta t$,方向向右.由动量守恒,设 A, B 的质量分别为 m_A, m_B ,可写出

$$m_A \times \frac{20}{\Delta t} = m_A \left(\frac{-10}{\Delta t} \right) + m_B \left(\frac{20}{\Delta t} \right)$$

解得

$$m_B = \frac{3}{2}m_A$$

再根据能量关系判断这一假设是否能成立.碰前两滑块的总动能

$$E_k = \frac{1}{2}m_A \left(\frac{20}{\Delta t} \right)^2 = 200m_A/(\Delta t)^2$$

碰后两滑块的总动能

$$\begin{aligned} E'_k &= \frac{1}{2}m_A \left(\frac{-10}{\Delta t} \right)^2 + \frac{1}{2}m_B \left(\frac{20}{\Delta t} \right)^2 = 50m_A/(\Delta t)^2 + 200m_B/(\Delta t)^2 \\ &= 350m_A/(\Delta t)^2 \end{aligned}$$

$E'_k > E_k$,即碰撞后总动能增加了,这是不可能的,因而这一假设不成立.

3) 假设碰撞前 B 向左做匀速直线运动,碰撞后 B 静止,后 3 次像叠影,即 $x_{B0}=70, x_{B1}=x_{B2}=x_{B3}=60$.据此可推断出碰撞位置在 $x=60$ 处,且碰撞是在第 2 次闪光前发生.碰撞后 A 做匀速直线运动,它的 3 个像应是碰撞后的,且应是等距离的,只能是 $x_{A1}=50, x_{A2}=30, x_{A3}=10$,其速率为 $20/\Delta t$.碰撞后 A 从 60 到 50,所用时间为 $\Delta t/2$,因而可推断:第 1 次闪光时, $x_{A0}=55$,向右运动,在 $t=0.5\Delta t$ 时刻与 B 在 $x=60$ 处相碰.由照片可以看出,碰前 B 的速率为 $10/\left(\frac{\Delta t}{2}\right)$,即 $20/\Delta t$. A 的速率为 $5/\left(\frac{\Delta t}{2}\right)$,即 $10/\Delta t$,方向向右.

由动量守恒得

$$m_A \times \frac{10}{\Delta t} + m_B \times \frac{-20}{\Delta t} = m_A \times \frac{-20}{\Delta t}$$

解得

$$m_B = \frac{3}{2}m_A$$

碰前两滑块的总动能

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}m_A\left(\frac{10}{\Delta t}\right)^2 + \frac{1}{2}m_B\left(\frac{20}{\Delta t}\right)^2 \\ &= 50m_A/(\Delta t)^2 + 200m_B/(\Delta t)^2 \\ &= 350m_A/(\Delta t)^2 \end{aligned}$$

碰后两滑块的总动能

$$E'_k = \frac{1}{2}m_A\left(\frac{20}{\Delta t}\right)^2 = 200m_A/(\Delta t)^2$$

$E'_k < E_k$ 这表明在碰撞过程中有机能损耗,这是可能的.因而这一假设是正确的.

此题要求严密的逻辑推理与物理分析,是考查分析能力的一个很好的难题.由题意,解题时作分析的根据只能是 1) 4 次拍照都拍到了 A 和 B; 2) A 和 B 做对心碰撞的时刻是在 4 次拍照的时间范围之内,且碰撞前后两物都各自做匀速直线运动(或静止); 3) 两物相碰时经历的时间很短,可不计.除此之外,两物的质量,第一次拍照时两物的位置与运动方向,以及碰撞的性质(弹性或非弹性)均要由分析作出判断.

在解题时,必须注意到 A 的像有 4 个而 B 的像只有 2 个,并由此作出判断,4 次拍照时 B 的像有重叠.但如果只猜出一种可能造成这种情况的运动过程,就作为问题的解,而不分析其可能性如何,是达不到解此题的要求的.学生解此题最常犯的一个错误就在于此.如果猜出正确的运动过程并加以分析说明其合理性,以此作为此题答案,虽然也是可取的,但不能保证答案的惟一性,尚未完全作出此题的解答.

参考解答中给出的分析推理是严密的.先根据 B 的像只有 2 个作出 3 种可能的运动情况(穷举法,因无 A、B 贴合在一起的像,可以排除完全非弹性碰撞的可能性),并分别就每一可能性作出物理(运动学、动力学)上的分析与判断,逐一排除物理上不可能的情况,最终得到的解才是惟一的.

此题中所用的原理并不深奥,但能否想到要根据这些原理去作判断就反映了对原理掌握的程度.

39. A、B、C 为三个完全相同的表面光滑的小球, B、C 两球各被一长为 $L = 2.00\text{m}$ 的不可伸长的轻线悬挂于天花板上,两球刚好接触.以接触点 O 为原点作一直角坐标系 $Oxyz$, z 轴竖直向上, Ox 轴与两球的连心线重合,如图 4-68 所示.今让 A 球射向 B、C 两球,并与两球同时发生碰撞.碰撞前, A 球速度方向沿 y 轴正方向,速度的大小 $v_{A0} = 4.00\text{m/s}$. 相碰后, A 球沿 y 轴负方向反弹,速率 $v_A = 0.40\text{m/s}$.

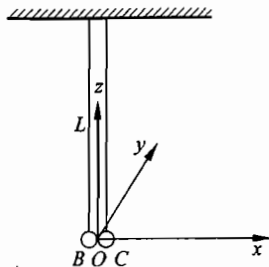


图 4-68

- 1) 求 B、C 两球被碰后偏离 O 点的最大位移量.
- 2) 讨论长时期内 B、C 两球的运动情况(忽略空气阻力,取 $g=10\text{m/s}^2$).

解析

1) A、B、C 三球在碰撞前、后瞬间的运动发生在 Oxy 平面内. 设刚碰完后, A 的速度大小为 v_A , B、C 两球的速度分别为 v_B 与 v_C , 在 x 方向和 y 方向的分速度的大小分别为 v_{Bx} 、 v_{By} 、 v_{Cx} 和 v_{Cy} , 如图 4-69 所示. 由动量守恒定律, 有

$$mv_{Cx} - mv_{Bx} = 0 \quad (1)$$

$$mv_{A0} = mv_{By} + mv_{Cy} - mv_A \quad (2)$$

由于球面是光滑的, 在碰撞过程中, A 球对 B 球的作用力沿 A、B 两球的连心线, A 球对 C 球的作用力沿 A、C 两球的连心线. 由几何关系, 得

$$\left. \begin{aligned} v_{Bx} &= v_{By} \tan \frac{\pi}{6} \\ v_{Cx} &= v_{Cy} \tan \frac{\pi}{6} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

由对称关系可知

$$v_{By} = v_{Cy} \quad (4)$$

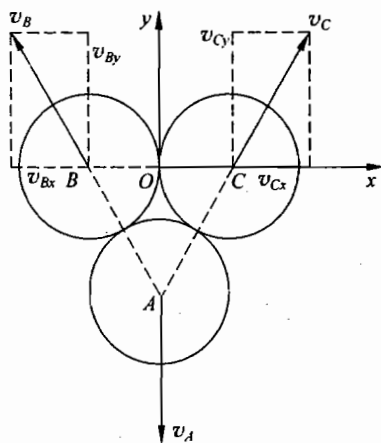


图 4-69

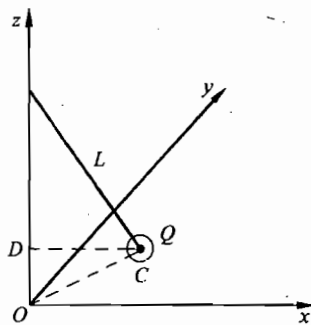


图 4-70

解(1)、(2)、(3)和(4)式, 得

$$v_{Bx} = v_{Cx} = 1.27\text{m/s}$$

$$v_{By} = v_{Cy} = 2.20\text{m/s}$$

由此得

$$v_B = v_C = 2.54\text{m/s}$$

设 C 球在 $x > 0, y > 0, z > 0$ 的空间中的最大位移为 \overline{OQ} , Q 点的 z 坐标为 z_Q , 如图 4-70 所示, 则由

$$\frac{1}{2}mv_C^2 = mgz_Q \quad (5)$$

得

$$z_Q = \frac{v_C^2}{2g}$$

代入数值, 得

$$z_Q = 0.32\text{m}$$

而 Q 点到 Qz 轴的距离为

$$\overline{QD} = \sqrt{L^2 - (L - z_Q)^2}$$

C 球的最大位移量

$$\overline{OQ} = \sqrt{z_Q^2 + \overline{QD}^2} = \sqrt{2Lz_Q} \quad (6)$$

代入数值, 得

$$\overline{OQ} = 1.13\text{m} \quad (7)$$

由对称性, 可得 B 球在 $x < 0, y > 0, z > 0$ 的空间的最大位移量 \overline{OP} 为

$$\overline{OP} = \overline{OQ} = 1.13\text{m} \quad (8)$$

2) 当 B、C 两球各达到最大位移后, 便做回到 O 点的运动, 并发生两球间的碰撞. 两球第一次返回 O 点碰撞前速度的大小和方向分别为

$$v_{Bx} = 1.27\text{m/s} \quad \text{方向沿正 } x$$

$$v_{By} = 2.20\text{m/s} \quad \text{方向沿负 } y$$

$$v_{Cx} = 1.27\text{m/s} \quad \text{方向沿负 } x$$

$$v_{Cy} = 2.20\text{m/s} \quad \text{方向沿负 } y$$

设碰撞后的速度分别为 v_{B_1} 和 v_{C_1} , 对应的分速度的大小分别为 $v_{B_1x}, v_{B_1y}, v_{C_1x}$ 和 v_{C_1y} . 由于两球在碰撞过程中的相互作用力只可能沿 x 方向, 故碰撞后, 沿 y 方向的速度大小和方向均保持不变, 即

$$v_{B_1y} = v_{By} \quad \text{方向沿负 } y \quad (9)$$

$$v_{C_1y} = v_{Cy} \quad \text{方向沿负 } y \quad (10)$$

碰撞过程中, 沿 x 方向的动量守恒

$$mv_{C_1x} - mv_{B_1x} = mv_{Bx} - mv_{Cx}$$

注意到 $v_{Bx} = v_{Cx}$, 得

$$v_{C_1x} = v_{B_1x} \quad (11)$$

即碰撞后两球在 x 方向的分速度大小相等, 方向相反, 具体数值取决于碰撞过程中是否

有机械能损失. 在 A 球与 B、C 两球同时碰撞的过程中, 碰撞前, 三者的机械能为

$$E_1 = \frac{1}{2}mv_{A0}^2 = 8\text{mm}^2/\text{s}^2$$

碰撞后三者的机械能为

$$E_2 = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}mv_C^2 = 6.59\text{mm}^2/\text{s}^2$$

$$E_2 < E_1$$

表明在碰撞过程中有机械能损失, 小球的材料不是完全弹性体, 故 B、C 两球在碰撞过程中也有机械能损失, 即

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}m(v_{B_1x}^2 + v_{B_1y}^2) + \frac{1}{2}m(v_{C_1x}^2 + v_{C_1y}^2) \\ & < \frac{1}{2}m(v_{B_x}^2 + v_{B_y}^2) + \frac{1}{2}m(v_{C_x}^2 + v_{C_y}^2) \end{aligned}$$

由(9)、(10)和(11)式, 得

$$v_{B_1x} = v_{C_1x} < v_{B_x} = v_{C_x} \quad (12)$$

或

$$v_{B_1y} = v_{C_1y} < v_{B_y} = v_{C_y}$$

当 B、C 两球第二次返回 O 点时, 两球发生第二次碰撞. 设碰撞后两球的速度分别为 v_{B_2} 和 v_{C_2} , 对应的分速度的大小分别为 v_{B_2x} 、 v_{B_2y} 、 v_{C_2x} 和 v_{C_2y} , 则有

$$v_{B_2y} = v_{C_2y} = v_{B_1y} = v_{C_1y}$$

$$v_{B_2x} = v_{C_2x} < v_{B_1x} = v_{C_1x}$$

或

$$v_{B_2} < v_{B_1}$$

$$v_{C_2} < v_{C_1}$$

由此可见, B、C 两球每经过一次碰撞, 沿 x 方向的分速度变小, 即

$$v_{B_x} = v_{C_x} > v_{B_1x} = v_{C_1x} > v_{B_2x} = v_{C_2x} > v_{B_3x} = v_{C_3x} \dots$$

而 y 方向的分速度的大小保持不变, 即

$$v_{B_y} = v_{C_y} = v_{B_1y} = v_{C_1y} = v_{B_2y} = v_{C_2y} = v_{B_3y} = v_{C_3y} \dots$$

当两球反复碰撞足够次数后, 沿 x 方向的分速度变为零, 只有 y 方向的分速度. 设足够的次数为 n , 则有

$$v_{B_nx} = v_{C_nx} = 0 \quad (13)$$

$$v_{B_ny} = v_{C_ny} = v_{B_y} = 2.20\text{m/s} \quad (14)$$

即最后, B、C 两球一起在 Oyz 平面内摆动, 经过最低点 O 的速度由(14)式给出, 最高点的 z 坐标 z_{Q_n} ,

$$\frac{1}{2}mv_{C_ny}^2 = mgz_{Q_n}$$

得

$$z_{Q_n} = \frac{v_{C_ny}^2}{2g}$$

代入数值,得

$$z_{Q_n} = 0.24\text{m} \quad (15)$$

最高点的 y 坐标由下式给出

$$y_{Q_n} = \pm\sqrt{L^2 - (L - z_{Q_n})^2} = \pm\sqrt{(2L - z_{Q_n})z_{Q_n}}$$

代入数值,得

$$y_{Q_n} = \pm 0.95\text{m} \quad (16)$$

本题初看起来比较复杂,但只要稍加分析,就不难发现在碰撞前后三个球都位于 xy 平面内,碰撞前后,三个球的速度亦在 xy 平面内, B 、 C 两球被绳悬挂于天花板上对碰撞的过程没有影响,只要画出了图 4-69,对三球碰撞过程的分析 and 解决就很容易了. 碰后, B 、 C 两球如何运动,到达何处时离 O 点有最大位移量,只要能通过适当的分析,且画出图 4-70,余下的计算也不难了. 可见,在分析物理问题时,画图是很重要的. 根据对分析过程的理解画出示意图,在画图的过程中又能修正、完善自己的理解,这是一种能力,也是一种习惯,应在平时学习中锻炼和培养.

试题对碰撞的性质即碰撞过程中有无机械能损失未作交代,但试题给出了碰撞后 A 球的速度,而 A 球的速度与碰撞的性质是有关的,在未验证所考查的碰撞是弹性碰撞时,是不能无根据地用机械能守恒定律来处理所考查的碰撞的.

40. 有一长为 l 的木块 A ,放在足够长的水平地面上. 取一无盖的长方形木盒 B 将 A 罩住. B 的左右内壁间的距离为 L ($L > l$). B 的质量与 A 相同. A 与地面间的动摩擦因数为 μ_A , B 与地面间的动摩擦因数为 μ_B ,且 $\mu_B > \mu_A$. 开始时, A 的左端与 B 的左内壁相接触(如图 4-71 所示),两者以相同的初速度 v_0 向右运动. 已知 A 与 B 左右内壁发生的碰撞都是完全弹性的,且碰撞时间都极短. A 与 B 的其他侧面之间均无接触.

1) 要使最后 A 、 B 同时停止,而且 A 与 B 间轻轻接触(即无作用力),初速 v_0 应取何值?

2) 要使 B 首先停下,而且最后全部停下时 A 与 B 轻轻接触,初速 v_0' 应取何值?

3) 有无 v_0 值使 B 停下后又由于被碰再次运动,最后 A 、 B 二者停在一起? 为什么?

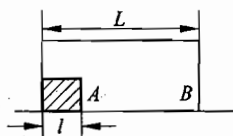


图 4-71

解析

为了便于定位,令木块的左端面为 a ,木盒的左内壁为 b . 开始运动时 $\overline{ab} = 0$,其后, \overline{ab} 开始增大. 当 $\overline{ab} = L - l$ 时,二者在右端发生碰撞. 碰后, \overline{ab} 开始减小,直到 $\overline{ab} = 0$ 时又在左端发生碰撞. 如此反复直到停止. 当二者停止时,若恰好满足 $\overline{ab} = 0$ 或 $\overline{ab} = L - l$ 时,即为二者发生轻轻接触.

1) 除相互碰撞的瞬间外,木块与木盒均做匀减速运动,其加速度分别为 $a_A =$

$-\mu_A g, a_B = -\mu_B g$, 当二者发生碰撞时, 由于是完全弹性的, 而质量又相同, 两者速度交换.

设开始运动经过时间 T 后, 第一次碰撞在右端发生, 用 s_A 和 s_B 分别表示木块和木盒在这段时间内通过的路程, 则

$$L - l = s_A - s_B = (\mu_B - \mu_A)gT^2/2 \quad (1)$$

由(1)式得到

$$T = \sqrt{\frac{2(L-l)}{(\mu_A - \mu_B)g}} \quad (2)$$

碰前木块和木盒的速度分别为

$$v'_A = v_0 - \mu_A gT, \quad v'_B = v_0 - \mu_B gT$$

由于 $\mu_B > \mu_A, v'_A > v'_B$, 二者相碰, 交换速度. 碰后速度分别为

$$v_A = v'_B = v_0 - \mu_B gT, \quad v_B = v'_A = v_0 - \mu_A gT$$

设第一次碰后又经过 T_1 时间, 二者在左端相遇, 在这段时间内木块和木盒通过的路程分别为 s_{2A} 与 s_{2B} , 则有

$$\begin{aligned} L - l = s_{2B} - s_{2A} &= [(v_0 - \mu_A gT)T_1 - \mu_A gT_1^2/2] - [(v_0 - \mu_B gT)T_1 - \mu_B gT_1^2/2] \\ &= (\mu_B - \mu_A)gTT_1 - (\mu_B - \mu_A)gT_1^2/2 \end{aligned} \quad (3)$$

由(1)、(3)两式得到

$$T_1 = T$$

在左端相碰前, 木块和木盒的速度分别为

$$v'_{2A} = (v_0 - \mu_B gT) - \mu_A gT = v_0 - (\mu_A + \mu_B)gT$$

$$v'_{2B} = (v_0 - \mu_A gT) - \mu_B gT = v'_{2A}$$

可见在左端二者相遇达到接触时其速度恰好相同, 我们称这种情形为“同速会合”. 此后, 木块与木盒又逐渐分开. 对其后的运动情况的分析与开始时相同, 只需将初速由 v_0 改为 v'_{2A} 即可. 用 Δv_0 表示 v'_{2A} 与 v_0 的速度差, 则

$$\Delta v_0 = (\mu_A + \mu_B)gT$$

由(2)式可知, T 与初速无关. 因此, 再经过 $2T$ 时间又会发生一次在左端的同速会合, 会合时的共同速度为 $v_0 - 2\Delta v_0$. 以后的情形可依此类推. 因而可得出结论: 只要 v_0 是 Δv_0 的整数倍, 则木块与木盒最后一定能达到共同速度为零的同速会合. 即

$$v_0 = k\Delta v_0 = k(\mu_A + \mu_B)\sqrt{\frac{2g(L-l)}{\mu_B - \mu_A}}$$

式中 k 为整数, 且 $k \geq 1$. 木块 A 与木盒 B 的运动过程的 $v-t$ 图线的一例如图 4-72 中图线 I 所示, 图中细线为 v_A , 粗线为 v_B .

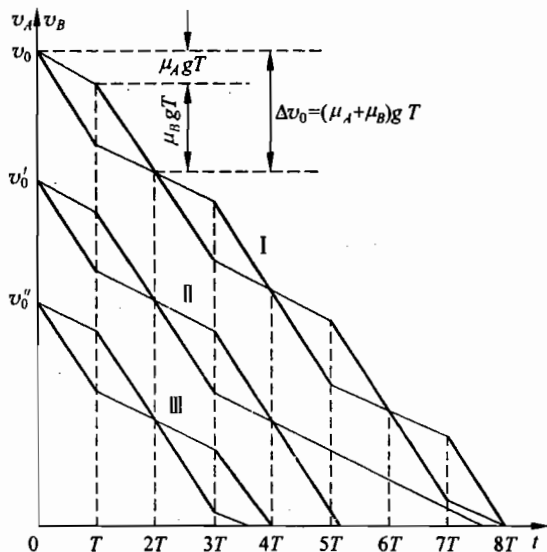


图 4-72

2) 使木盒 B 先停下来的这种情况发生在 B 慢 A 快时, 即图 4-72 中图线 II 所示的情况. 图 4-73 表示左端最后同速会合以后的情况. 由两图中的图线可以看出, 这时初速 v'_0 满足

$$v'_0 = k\Delta v_0 + v_1 \quad (0 < v_1 < \mu_B g T)$$

式中 $k \geq 0$.

这时要分析两种情况. 当 A、B 以共同速度从同速会合点出发后, 木盒 B 在通过 s_B 距离后首先停止, A 仍在运动, 第一种情况是 A 在其右端与 B 的右壁接触时恰好停止; 第二种情况是 A 与 B 在右端发生碰撞时其速度不为零, 碰撞后 A 停下来, 木盒 B 以碰前 A 的速度前进, 直到其左内壁与 A 的左端面恰好接触时停止. 这两种情况是否都是可能的? 如果可能, v'_0 应取何值?

第一种情况: 设最后一次同速会合时的共同速度为 v_1 . B 先停止, 停止点距最后的会合点的距离为 s_B , 则

$$s_B = \frac{v_1^2}{2a_B} = \frac{v_1^2}{2\mu_B g} \quad (4)$$

此时 A 仍在前进, 不久 A 也停止, 停止点到最后会合点的距

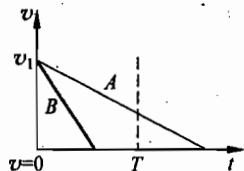


图 4-73

离为 s_A , 则

$$s_A = \frac{v_1^2}{2a_A} = \frac{v_1^2}{2\mu_A g}$$

A 停止时右端恰好与木盒右壁轻轻接触的条件是 $\overline{ab} = L - l$,

$$\text{即} \quad \frac{v_1^2}{2\mu_A g} - \frac{v_1^2}{2\mu_B g} = L - l$$

由此得

$$v_1 = \sqrt{\mu_A \mu_B} \sqrt{\frac{2g(L-l)}{\mu_B - \mu_A}} = \sqrt{\mu_A \mu_B} g T < \mu_B g T$$

这一结果符合 $0 < v_1 < \mu_B g T$, 由此可求得

$$v'_0 = k\Delta v_0 + v_1 = [k(\mu_A + \mu_B) + \sqrt{\mu_A \mu_B}] \sqrt{\frac{2g(L-l)}{\mu_B - \mu_A}}$$

式中 $k \geq 0$.

关于第二种情况是否可能出现, 这正是本题第 3) 小题所要讨论的问题.

3) 第二种情况: 当 B 通过 (4) 式所表示的距离 s_B 以后停止, A 继续前进, 达到右端碰撞之前 $v_A \neq 0$, 这时 v_A 应满足

$$v_1^2 - v_A^2 = 2\mu_A g (s_B + L - l)$$

此时 A 的动能为

$$E_A = \frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mu_A}{\mu_B} \right) m v_1^2 - \mu_A m g (L - l)$$

这些动能要恰好等于使 B 通过 $L - l$ 距离克服摩擦力所做的功

$$W_B = \mu_B m g (L - l)$$

才能使 B 恰好与 A 发生左端接触而停在一起. 如果可能, $E_A = W_B$, 则

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mu_A}{\mu_B} \right) m v_1^2 - \mu_A m g (L - l) = \mu_B m g (L - l)$$

得到

$$v_1 = \sqrt{\mu_B (\mu_A + \mu_B)} g T > \mu_B g T$$

由于 v_1 应小于 $\mu_B g T$, 所以这种情况是不可能出现的.

此题还可进一步讨论: 若要使 A 先停下, 而且最后全部停下时 A 与 B 轻轻接触, 初速 v'_0 应取何值. 解答如下.

由图 4-72 中图线 III 可看出, 使木块 A 先停下的这种情况发生在 A 慢 B 快时. 木块先停止, 木盒仍在前进, 木盒可能到恰好与木块接触时停止, 也可能与木块在左端发生碰撞, 碰后木盒停止, 木块以碰前木盒的速度继续前进, 然后停止, 这时其右端恰好与木盒右内壁轻轻接触. 由图 4-72 中的图线 III 及图 4-74 可知, 在这种情况下,

初速 v_0'' 的条件是

$$v_0'' = k\Delta v_0 + v_2, \quad \mu_{BG}T < v_2 < \Delta v_0$$

设最后一次同速会合时的共同速度为 v_2 . 同速会合后还要经过一次交换速度的右端碰撞, 碰后 A、B 的速度分别是

$$v_A = v_2 - \mu_{BG}T$$

$$v_B = v_2 - \mu_{AG}T$$

碰后, A 经过距离 s_A 后停止, 则

$$s_A = \frac{v_A^2}{2\mu_{AG}} = \frac{1}{2\mu_{AG}}(v_2 - \mu_{BG}T)^2$$

在 A 停止后, 可分为两种情况. 第一种情况是木盒前进时其左内壁恰好接触木块的左端面时停止; 第二种情况是木盒与木块发生碰撞, 碰后木盒停止, 木块前进到木盒的右内壁时, 即恰好 $\overline{ab} = L - l$ 时停止.

如果这两种情况都是可能出现的, 则初速 v_0'' 所满足的方程分别为

第一种情况:

$$(v_2 - \mu_{AG}T)^2 = 2\mu_{BG} \left[\frac{1}{2\mu_{AG}}(v_2 - \mu_{BG}T)^2 + L - l \right] \quad (5)$$

第二种情况:

$$(v_2 - \mu_{BG}T)^2 + 2\mu_{AG}(L - l) = 2\mu_{BG} \left[\frac{1}{2\mu_{AG}}(v_2 - \mu_{BG}T)^2 + L - l \right] \quad (6)$$

(5)式和(6)式化简后为

$$v_2^2 - 2(\mu_A + \mu_B)gTv_2 + (\mu_A + \mu_B)^2g^2T^2 = 0 \quad (7)$$

$$v_2^2 - 2(\mu_A + \mu_B)gTv_2 + [\mu_A^2 + (\mu_A + \mu_B)^2]g^2T^2 = 0 \quad (8)$$

(7)式和(8)式的判别式 $B^2 - 4AC$ 分别为

$$\text{第一种情况: } B^2 - 4AC = 0$$

$$\text{第二种情况: } B^2 - 4AC = -4\mu_A^2g^2T^2 < 0$$

由此可知, 第二种情况是不可能发生的. 第一种情况的解为

$$v_2 = (\mu_A + \mu_B)gT = \Delta v_0$$

这一结果表明, 此解即为二者同速会合的情况. 因此, 不可能发生 A 先停止的情况.

本题本身很简单, 只是两个质量相同物体的完全弹性碰撞问题, 其结果是二者交换速度, 这是学生很熟悉的. 但是由于把其中一个物体设计成木盒, 使二物体可以来回多次碰撞, 问题就变得复杂起来. 特别是又是已知最后结果, 由此倒过来推出开始的情况, 使此题成为一道难题, 需要进行大量的逻辑推理. 在本题的解析过程中, 图解法发挥了特别重要

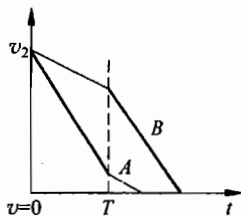


图 4-74

的作用,哪种情况可能发生,哪种情况不可能发生,在图中均可一目了然.因此,图解法是形象地帮助思维推理的一个有力武器.

41. 如图 4-75 所示,在长为 $l=1.0\text{m}$ 、质量为 $m_B=30.0\text{kg}$ 的车厢 B 内的右壁处,放一质量 $m_A=20.0\text{kg}$ 的小物块 A (可视为质点),向右的水平拉力 $F=120.0\text{N}$ 作用于车厢,使之从静止开始运动.测得车厢 B 在最初 2.0s 移动的距离 $s=5.0\text{m}$,且在这段时间内小物块未与车厢壁发生过碰撞.假定车厢与地面间的摩擦忽略不计,小物块与车厢壁之间的碰撞是弹性的.求车厢开始运动后 4.0s 时,车厢与小物块的速度.

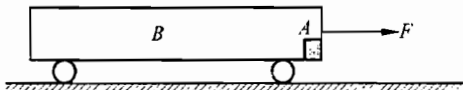


图 4-75

解析

解法 I

1) 讨论自 B 开始运动到 $T_0=2.0\text{s}$ 时间内 B 与 A 的运动.

根据题意,在 2s 内, A 未与 B 发生过碰撞,因此不论 A 与 B 之间是否有相对运动,不论 A 与 B 之间是否有摩擦, B 总是做初速为零的匀加速直线运动.设 B 的加速度为 a_{B1} ,有

$$s = \frac{1}{2} a_{B1} T_0^2$$

得

$$a_{B1} = \frac{2s}{T_0^2} = 2.5\text{m/s}^2 \quad (1)$$

如果 A 、 B 之间无摩擦,则在 B 向右移动 1m 距离的过程中, A 应保持静止状态,接着 B 的车厢左壁必与 A 发生碰撞,这不合题意.如果 A 、 B 之间无相对运动(即两者之间的摩擦力足以使 A 与 B 有一样的加速度),则 B 的加速度为

$$a_B = \frac{F}{m_A + m_B} = 2.4\text{m/s}^2.$$

这与(1)式矛盾,由此可见, A 、 B 之间既有相对运动又存在摩擦力作用.

以 F_f 表示 A 、 B 间的滑动摩擦力的大小,作用于 B 的摩擦力向左,作用于 A 的摩擦力向右,则有

$$F - F_f = m_B a_{B1} \quad (2)$$

$$F_f = m_A a_{A1} \quad (3)$$

由(1)、(2)、(3)式得

$$a_{A1} = 2.25 \text{ m/s}^2 \quad (4)$$

$$F_f = 45 \text{ N} \quad (5)$$

2) 讨论 B 的左壁与 A 发生第一次碰撞前的运动.

由于 $a_{A1} < a_{B1}$, B 向右的速度将大于 A 的速度, 故 A 与 B 的左壁间的距离将减小. 设自静止开始, 经过时间 t_1 , B 的左壁刚要与 A 发生碰撞, 这时, B 向右运动的路程与 A 向右运动的路程之差正好等于 l , 即有

$$\frac{1}{2} a_{B1} t_1^2 - \frac{1}{2} a_{A1} t_1^2 = l$$

解得

$$t_1 = \sqrt{\frac{2l}{a_{B1} - a_{A1}}} \quad (6)$$

代入数据, 得

$$t_1 = 2\sqrt{2} \text{ s} = 2.83 \text{ s}$$

A 与 B 发生第一次碰撞时, 碰前的速度分别为

$$v_{A1} = a_{A1} t_1 = a_{A1} \sqrt{\frac{2l}{a_{B1} - a_{A1}}} \quad (7)$$

$$v_{B1} = a_{B1} t_1 = a_{B1} \sqrt{\frac{2l}{a_{B1} - a_{A1}}} \quad (8)$$

3) 讨论 B 与 A 间的弹性碰撞.

以 u_{A1} 和 u_{B1} 分别表示第一次碰撞后 A 和 B 的速度, 当 u_{A1} 、 u_{B1} 为正时, 分别表示它们向右运动. 在碰撞的极短时间内, 外力 F 的冲量可忽略不计. 因此有

$$m_A v_{A1} + m_B v_{B1} = m_A u_{A1} + m_B u_{B1}$$

$$\frac{1}{2} m_A v_{A1}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B1}^2 = \frac{1}{2} m_A u_{A1}^2 + \frac{1}{2} m_B u_{B1}^2$$

解以上两式得

$$u_{A1} - u_{B1} = -(v_{A1} - v_{B1}) = \sqrt{2l(a_{B1} - a_{A1})} \quad (9)$$

(9)式表示, 在弹性碰撞中, 碰撞前后两者的相对速度的大小不变, 但方向反转.

4) 讨论从第一次碰撞到车厢与小物块速度变至相同过程中的运动.

由(9)式可以看出, 经第一次碰撞, A 和 B 都向右运动, 但 A 的速度 u_{A1} 大于 B 的速度 u_{B1} , 这时作用于 A 的摩擦力向左, 作用于 B 的摩擦力向右, 大小仍都为 F_f . 设此过程中 A 向左的加速度和 B 向右的加速度分别为 a_{A2} 和 a_{B2} , 则由牛顿第二定律有

$$F_f = m_A a_{A2}$$

$$F + F_f = m_B a_{B2}$$

解得

$$a_{A2} = \frac{F_f}{m_A} = 2.25 \text{ m/s}^2 \quad (10)$$

$$a_{B2} = \frac{F + F_f}{m_B} = 5.5 \text{ m/s}^2 \quad (11)$$

由此可知,碰撞后,A做减速运动,B做加速运动.设经过时间 t'_1 ,两者速度相等,第一次达到相对静止,则有

$$u_{A1} - a_{A2} t'_1 = u_{B1} + a_{B2} t'_1$$

由上式和(9)式解得

$$t'_1 = \frac{u_{A1} - u_{B1}}{a_{A2} + a_{B2}} = \frac{v_{B1} - v_{A1}}{a_{A2} + a_{B2}} = \frac{\sqrt{2l(a_{B1} - a_{A1})}}{a_{A2} + a_{B2}} \quad (12)$$

代入有关数据得

$$t'_1 = \frac{2\sqrt{2}}{31} \text{ s} = 0.09 \text{ s} \quad (13)$$

设在时间 t'_1 内,A与B的左壁之间的距离增大至 l_1 ,则有

$$u_{A1} t'_1 - \frac{1}{2} a_{A2} t'^2_1 = u_{B2} t'_1 + \frac{1}{2} a_{B2} t'^2_1 + l_1$$

结合(9)、(12)两式得

$$l_1 = l d^2 \quad (14)$$

式中

$$d = \sqrt{\frac{a_{B1} - a_{A1}}{a_{A2} + a_{B2}}} \quad (15)$$

代入有关数据,得

$$d = \sqrt{\frac{a_{B1} - a_{A1}}{a_{A2} + a_{B2}}} = \sqrt{\frac{(5/2) - (9/4)}{(9/4) + (11/2)}} = \sqrt{\frac{1}{31}} < 1$$

由(14)式可知 $l_1 < l$,A不会与B的右壁发生碰撞.

5) 讨论A与B的左壁的第二次碰撞.

以 v_1 表示B与A第一次相等的速度,由于B始终受 F 作用而加速,它将拖着A向右加速,其情况与第一次碰撞前相似.这时作用于A的摩擦力向右,A的加速度为 a_{A1} ,方向向右;作用于B的摩擦力向左,B的加速度为 a_{B1} ,方向也向右.但是原来A与B左端的距离为 l ,现改为 l_1 ,因 $a_{A1} < a_{B1}$,B的左壁与A之间的距离将减小.设两者间的距离从 l_1 减小至零,即减小至开始发生第二次碰撞所经历的时间为 t_2 ,以 l_1 代入(6)式,结合

(14)式,即可求得

$$t_2 = \sqrt{\frac{2l_1}{a_{B1} - a_{A1}}} = \sqrt{\frac{2l}{a_{B1} - a_{A1}}}d = t_1 d \quad (16)$$

代入有关数据,得

$$t_2 = 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{31}}\text{s} = \sqrt{\frac{8}{31}}\text{s} = 0.51\text{s}$$

第二次碰撞前瞬间 A 和 B 的速度分别为

$$v_{A2} = v_1 + a_{A1}t_2$$

$$v_{B2} = v_1 + a_{B1}t_2$$

$$v_{A2} - v_{B2} = (a_{A1} - a_{B1})t_2 = (a_{A1} - a_{B1})t_1 d = (v_{A1} - v_{B1})d \quad (17)$$

故第二次碰撞前 A、B 速度之差小于第一次碰撞前 A、B 的速度差. 设第二次碰撞完毕的瞬间 A、B 的速度分别为 u_{A2} 和 u_{B2} , 则有

$$u_{A2} - u_{B2} = -(v_{A2} - v_{B2}) = (v_{B1} - v_{A1})d \quad (18)$$

第二次碰撞后, A 以加速度 a_{A2} 做减速运动, B 以加速度 a_{B2} 做加速运动. 设经历时间 t'_2 , 两者速度相等, 即第二次相对静止, 则有

$$u_{A2} - a_{A2}t'_2 = u_{B2} + a_{B2}t'_2$$

解得

$$t'_2 = \frac{u_{A2} - u_{B2}}{a_{A2} + a_{B2}} = \frac{v_{B1} - v_{A1}}{a_{A2} + a_{B2}}d = t'_1 d = 0.016\text{s} \quad (19)$$

在 t'_2 时间内, A 与 B 的左壁的距离变为 l_2 , 有

$$u_{A2}t'_2 - \frac{1}{2}a_{A2}t'^2_2 = u_{B2}t'_2 + \frac{1}{2}a_{B2}t'^2_2 + l_2$$

结合(8)、(9)式得

$$l_2 = ld^4 \quad (20)$$

自 B 开始运动到 A 与 B 达到第二次相对静止共经历时间

$$T_2 = t_1 + t'_1 + t_2 + t'_2 = 3.43\text{s}$$

$$T_2 < 4.0\text{s}$$

6) 讨论 A 与 B 的左壁的第三次碰撞.

当 A 与 B 的左壁之间的距离为 l_2 时, A、B 相对静止, 由于 B 受外力 F 作用而继续加速, 它将拖着 A 向右加速. 这时, A 的加速度为 a_{A1} , B 的加速度为 a_{B1} , 方向都向右, 但因 $a_{B1} > a_{A1}$, A 将与 B 的左壁发生第三次碰撞. 设此过程经历的时间为 t_3 , 则以 l_2 代入(6)式结合(16)式得

$$t_3 = \sqrt{\frac{2l_2}{a_{B1} - a_{A1}}} = \sqrt{\frac{2l}{a_{B1} - a_{A1}}}d^2 = t_1 d^2 = 0.09\text{s} \quad (21)$$

设第三次碰撞前瞬间 A 和 B 的速度分别为 v_{A3} 和 v_{B3} , 碰撞后的速度分别为 u_{A3} 和 u_{B3} , 则

$$\begin{aligned} v_{A3} - v_{B3} &= (a_{A1} - a_{B1})t_3 = (v_{A1} - v_{B1})d^2 \\ u_{A3} - u_{B3} &= -(v_{A3} - v_{B3}) = (a_{B1} - a_{A1})t_3 \\ &= (a_{B1} - a_{A1})t_1 d^2 = (v_{A1} - v_{B1})d^2 \end{aligned}$$

碰撞后, A 以加速度 a_{A2} 做减速运动, B 以加速度 a_{B2} 做加速运动. 设经过时间 t'_3 两者速度相等, 即第三次相对静止, A 与 B 左壁之间的距离为 l_3 , 则有

$$\begin{aligned} t'_3 &= \frac{u_{A3} - u_{B3}}{a_{A2} + a_{B2}} = t'_1 d^2 \\ l_3 &= l d^6 \end{aligned} \quad (22)$$

自 B 开始运动至第三次 A 与 B 相对静止共经历的时间 T_3 仍小于 4s.

7) 讨论车厢左壁与小物块的第 n 次碰撞.

在第 $n-1$ 次碰撞完毕的瞬间, A 和 B 的速度分别为 $u_{A_{n-1}}$ 和 $u_{B_{n-1}}$, A 以加速度 a_{A2} 做减速运动, B 以加速度 a_{B2} 做加速运动. 经过时间 t'_{n-1} , 两者速度相等, 即第 $n-1$ 次相对静止. A 与 B 左壁之间的距离为 l_{n-1} . 根据前面的讨论有

$$\begin{aligned} t'_{n-1} &= t'_1 d^{n-2} \\ l_{n-1} &= l d^{2(n-1)} \end{aligned} \quad (23)$$

再经过时间 t_n 将发生 B 的左壁与 A 的第 n 次碰撞. 碰撞前两者的速度分别为 v_{A_n} 和 v_{B_n} . 根据前面的讨论, 有

$$\begin{aligned} t_n &= t_1 d^{n-1} \\ v_{A_n} - v_{B_n} &= (v_{A1} - v_{B1})d^{n-1} \end{aligned} \quad (24)$$

可以看出, 碰撞次数越多, 下一次碰撞前, A、B 速度之差越小. 当碰撞次数 n 非常大时, 下次碰撞前两者的速度趋于相等, 即 A 实际上将贴在 B 的左壁上不再分开.

8) 讨论第 4 秒末 B 与 A 的运动速度.

第 4 秒末 B 与 A 的速度取决于在第 4 秒末 B 与 A 经历了多少次碰撞. B 自静止开始运动到第 n 次相对静止经历的总时间为

$$\begin{aligned} T_n &= t_1 + t'_1 + t_2 + t'_2 + \cdots + t_{n-1} + t'_{n-1} + t_n + t'_n \\ &= t_1 + t'_1 + t_1 d + t'_1 d + \cdots + t_1 d^{n-2} + t'_1 d^{n-2} + t_1 d^{n-1} + t'_1 d^{n-1} \\ &= (t_1 + t'_1) + (t_1 + t'_1)d + (t_1 + t'_1)d^2 + \cdots + (t_1 + t'_1)d^{n-2} + (t_1 + t'_1)d^{n-1} \\ &= (t_1 + t'_1) \frac{1-d^n}{1-d} \end{aligned} \quad (25)$$

以 $t_1 = 2\sqrt{2}\text{s}$, $t'_1 = \frac{2\sqrt{2}}{31}\text{s}$ 代入, 注意到当 n 很大时, $d^\infty = 0$, 得

$$T_{\infty} = \frac{64\sqrt{2}}{31-\sqrt{31}}\text{s} = 3.56\text{s} \quad (26)$$

这表明早在第 4 秒之前, A 与 B 的左壁贴在一起时二者速度已相同, 不再发生碰撞, 此后二者即以相同的速度运动了. 现以 A 和 B 都静止时作为初态, 设 $T=4\text{s}$ 时刻 A 和 B 的速度为 v_0 , 对 A、B 开始运动至 $T=4\text{s}$ 的过程应用动量定理, 得

$$FT = (m_A + m_B)v_0 \quad (27)$$

或

$$v_0 = \frac{FT}{m_A + m_B}$$

代入数值, 得

$$v_0 = 9.6\text{m/s} \quad (28)$$

解法 II 如果 A 与 B 之间没有摩擦力, B 前进 1m 就会与 A 发生碰撞. 已知开始 2s 内 A 与 B 未发生碰撞, 而 B 已走了 5m, 可见二者之间有摩擦力存在, 且在此期间二者均做匀加速运动. 由 $s = \frac{1}{2}at^2$ 可求出 B 对地面的加速度 a_{B1} :

$$5\text{m} = \frac{1}{2}a_{B1}(2\text{s})^2, \quad a_{B1} = 2.5\text{m/s}^2 \quad (29)$$

设 A 与 B 底部之间的滑动摩擦力为 F_f , 则由小车的运动方程为

$$m_B a_B = F - F_f$$

代入数值得

$$F_f = 45\text{N} \quad (30)$$

又由 A 的运动方程得 A 相对地面的加速度为

$$a_{A1} = \frac{F_f}{m_A} = 2.25\text{m/s}^2 \quad (31)$$

于是, A 对 B 的相对加速度为

$$a_{AB1} = a_{A1} - a_{B1} = -0.25\text{m/s}^2 \quad (32)$$

第一次碰撞

由开始运动到 A 碰撞 B 的左壁的时间 t_1 满足 $s = \frac{1}{2}a_{AB1}t_1^2, s=1\text{m}$, 于是

$$t_1 = 2\sqrt{2}\text{s} = 2.83\text{s} \quad (33)$$

A 与 B 的左壁碰撞前瞬间, A 相对 B 的速度

$$v_{AB1} = a_{AB1}t_1 = -0.5\sqrt{2}\text{m/s} = -0.71\text{m/s} \quad (34)$$

由于做弹性碰撞的两个物体在碰撞前后其相对速度等值反向, 所以碰后 A 从 B 的左壁开

始,以相对速度

$$v'_{AB1} = -v_{AB1} = 0.5\sqrt{2}\text{m/s} = 0.71\text{m/s} \quad (35)$$

向右运动,所受摩擦力方向向左,为 $-F_f$,对地面的加速度 a_{A2} 为

$$a_{A2} = \frac{F_f}{m_A} = -2.25\text{m/s}^2 \quad (36)$$

此时 B 所受的摩擦力 F_f 方向向右,由其运动方程 $m_B a_{B2} = F + F_f$ 得 B 对地面的加速度 a_{B2} 为

$$a_{B2} = \frac{F + F_f}{m_B} = 5.5\text{m/s}^2 \quad (37)$$

由(36)、(37)二式知,碰后 A 对 B 的相对加速度为

$$a_{AB2} = a_{A2} - a_{B2} = -7.75\text{m/s}^2 \quad (38)$$

A 相对于 B 做向右的匀减速运动.设 A 由碰后开始达到相对静止的时间为 t'_1 ,相对于 B 走过的距离为 s_1 ,由(34)式得

$$t'_1 = \frac{v'_{AB1}}{|a_{AB2}|} = \left| \frac{a_{AB1}}{a_{AB2}} \right| t_1 = \frac{2}{31}\sqrt{2}\text{s} = 0.091\text{s} \quad (39)$$

$$s_1 = \frac{1}{2} |a_{AB2}| t'^2_1 = \frac{1}{31}\text{m} = 0.03\text{m} \quad (40)$$

可见 A 停止在 B 当中,不与 B 的右壁相撞.

第二次碰撞

A 在 B 内相对静止后,将相对于 B 向左滑动,所受的摩擦力改为向右,而 B 所受的摩擦力改为向左.这时 A 对 B 的相对加速度重新成为 a_{AB1} ,即(32)式. A 由相对静止到与 B 的左壁第二次碰撞所需的时间 t_2 可用 $s_1 = \frac{1}{2} a_{AB1} t_2^2$ 算出:

$$t_2 = \sqrt{\frac{2s_1}{a_{AB1}}} = \sqrt{\left| \frac{a_{AB2}}{a_{AB1}} \right|} t'_1 = \sqrt{\left| \frac{a_{AB1}}{a_{AB2}} \right|} t_1 = 0.51\text{s} \quad (41)$$

自 B 开始运动至 B 的左壁与 A 发生第二次碰撞经历的时间

$$T_2 = t_1 + t'_1 + t_2 = 3.43\text{s}$$

A 达到 B 的左壁前相对于 B 的速度的大小为

$$v_{AB2} = a_{AB1} t_2 = a_{AB1} \sqrt{\left| \frac{a_{AB1}}{a_{AB2}} \right|} t_1 = \sqrt{\left| \frac{a_{AB1}}{a_{AB2}} \right|} v_{AB1} \quad (42)$$

这也就是第二次碰撞后 A 由 B 的左壁出发的相对速度大小.第二次碰撞后, A 相对 B 向右运动,此时 A 相对于 B 的相对加速度又成为 a_{AB2} ,即(38)式. A 由碰撞到相对静止所需要的时间 t'_2 和相对于 B 走过的距离 s_2 分别为

$$\begin{aligned}
 t'_2 &= \left| \frac{v_{AB2}}{a_{AB2}} \right| = \left| \frac{a_{AB1}}{a_{AB2}} \right| t_2 = \left| \frac{a_{AB1}}{a_{AB2}} \right| \sqrt{\left| \frac{a_{AB1}}{a_{AB2}} \right|} t_1 \\
 &= \sqrt{\left| \frac{a_{AB1}}{a_{AB2}} \right|} t'_1 = 0.016\text{s} \\
 s_2 &= \frac{1}{2} |a_{AB2}| t_2'^2 = 0.001\text{m}
 \end{aligned} \tag{43}$$

以后的碰撞

根据(41)、(43)二式,如令

$$k = \sqrt{\left| \frac{a_{AB1}}{a_{AB2}} \right|} = \sqrt{\frac{1/4}{31/4}} = \sqrt{\frac{1}{31}} = 0.18 \tag{44}$$

则有

$$t_2 = kt_1 \quad t'_2 = kt'_1$$

由此可以推知,在第三次碰撞中必有

$$t_3 = kt_2 = k^2 t_1 \quad t'_3 = kt'_2 = k^2 t'_1 \tag{45}$$

在第 n 次碰撞中有

$$t_n = k^{n-1} t_1 \quad t'_n = k^{n-1} t'_1 \tag{46}$$

即每一次所需时间要比上次少很多(A 在 B 中所走的距离也小很多). 把所有的时间加到一起,得

$$\begin{aligned}
 T_\infty &= \sum_{i=1}^{\infty} (t_i + t'_i) = (t_1 + t'_1) \sum_{i=1}^{\infty} k^i \\
 &= \left(2\sqrt{2} + \frac{2\sqrt{2}}{31} \right) \frac{1}{1-k} \text{s} = 3.56\text{s}
 \end{aligned} \tag{47}$$

这就是说,在 B 开始运动后 3.56s 时, A 将紧贴 B 的左壁,并与 B 具有相同速度,二者不再发生碰撞,一直处于相对静止状态. 现取 A 和 B 都静止时作为初态,以 $T=4.0\text{s}$ 时刻的运动状态为末态,设此时 A 和 B 的速度为 v_0 ,由动量定理,有

$$FT = (m_A + m_B)v_0$$

代入数值,得

$$v_0 = \frac{FT}{m_A + m_B} = 9.6\text{m/s} \tag{48}$$

答: 自车厢开始运动到 4.0s 时车厢与物块的速度相同,均为 9.6m/s.

本题的情景并不复杂,但对能力的考查却有较高的要求,因为题中需要解决的问题应由学生自己去发现,自己提出来. 例如题中并未谈及小物块 A 与车厢 B 之间有或者无摩

擦,学生应根据试题中的一句话“测得车厢 B 在最初 2.0s 移动的距离 $s=5.0\text{m}$,且在这段时间内小物块未与车厢壁发生过碰撞”去研究、去探测小物块与车厢间是否存在摩擦,在确定存在摩擦后还要把摩擦力求出来.又如从车厢开始运动至经历 4.0s ,物块与车厢的运动发生了哪些变化,而关键是经过一系列变化之后,在 4.0s 时刻物块与车厢之间是否有相对运动.如果在 4.0s 时,小物块与车厢以同一速度运动,是一种情况;如果在这时两者速度不同,又是一种情况.究竟属于哪一种情况,要求学生自己去提出问题,自己去研究,自己求出答案.试题的设计要求学生在解题中伴随着某种探索性、研究性工作,故对能力的要求较高.

五、万有引力 卫星和天体运动

1. 1) 最近时期(注:此题是1986年1月的预赛题),天空中可观察到一颗著名的彗星,它叫什么名字?它的周期约为多少年?

2) 至少要几颗同步卫星才能“覆盖”整个地球赤道?(已知,引力常量 $G=6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$,地球半径 $R=6.4 \times 10^6 \text{ m}$)

解析

1) 哈雷彗星;76年.

2) 3颗.

图5-1中O为地心,S为同步卫星.由万有引力定律和牛顿定律可知

$$G \frac{mm_0}{r^2} = mr \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2$$

$$Gm_0 = R_0^2 g$$

$$r \cos \theta = R_0$$

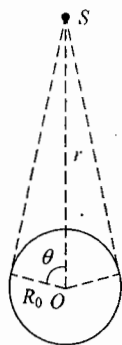


图 5-1

式中 m 为卫星质量, m_0 为地球质量, T 为地球自转周期,亦即卫星绕地心运动的周期, g 为地球表面处的重力加速度.由以上各式并代入数值可得

$$\theta = 81.3^\circ$$

故可知,3颗同步卫星即可“覆盖”整个地球赤道.

本题第2)问问的是“至少有几颗同步卫星才能‘覆盖’整个地球赤道”,而不是问“能覆盖整个地球”.因为在地球的两极附近各有一较小的覆盖不到的“盲区”.同步卫星的周期必须与地球的自转周期相同,轨道一定在地球的赤道平面内,因此,所有的同步卫星到地心的距离都是相等的.由同一同步卫星发出的与地球表面相切的射线构成一个锥体,锥体的半顶角 $\varphi=8.7^\circ$,切点所在的平面从地球表面上截下一被射线构成的锥体所覆盖的球冠,它便是该同步卫星所能覆盖的地区,如图5-2所示.盲区是分别位于地球两极附近的两个球冠,盲区的面积为地球表面积

的1%略多一点,好在盲区所在地是人口最稀少的地方.

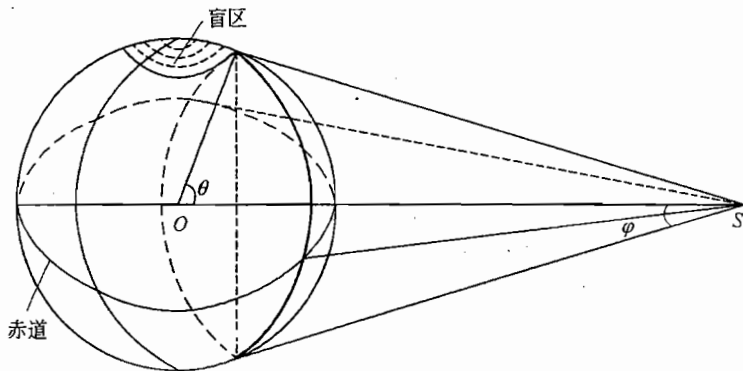


图 5-2

2. 我国在1999年11月20日用新型运载火箭成功地发射了一艘实验航天飞行器. 它被命名为_____号,它的目的是为_____作准备.

解析

神舟,载人飞行.

现代科学技术的许多新发现、新成果往往都与物理学有不同程度的联系. 在学习物理的过程中,要关心现代科学技术的各种新发现或新成果,并试图用学过的物理知识去解释它们、理解它们,从而进一步激发学习物理的激情. 对新发现、新成果的感受,学过物理的人与没有学过物理的人是不一样的.“全国中学生物理竞赛内容提要”是有这方面的考查要求的.

3. 月亮为什么永远以一面朝着地球?

解析

月亮自转的周期和它绕地球公转的周期相同.

如果月亮在绕地球公转时,它不自转,地球上的人在月亮绕地球公转一周的过程中,将分别看到月亮的各个部分. 如图5-3所示.

然而,月亮在绕地球公转的同时还有自转,而且自转周期和方向与公转相同. 这样,地球上的人只能永远看到月亮的DAB面,如图5-4所示.

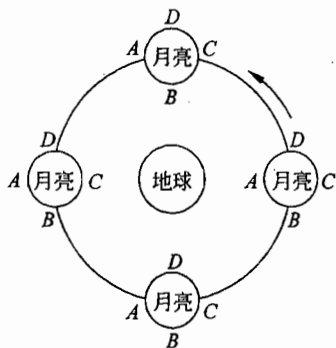


图 5-3

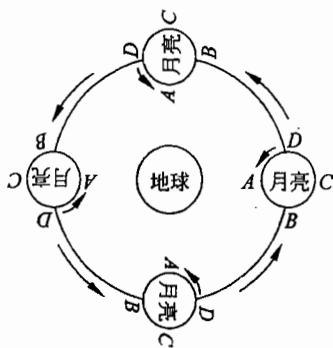


图 5-4

4. 在月球上能看到地球的地方,以月球为参照系观察时,
- 1) 地球有无绕月球的公转? 若有公转,周期大约是多少?
 - 2) 地球有无自转? 若有自转,周期大约是多少?
 - 3) 地球有无圆缺变化? 若有圆缺变化,周期大约是多少?

解析

- 1) 无. 2) 有; 24h. 3) 有; 一个月.

根据天文常识,月球在围绕地球运动时永远以它的一面对着地球.以月球为参照系,从能看到地球的月球上任一点到地球中心连线的方向是固定不变的,所以说地球没有绕月球的公转,但在这些点能观察到地球有自转,其周期约为地球自转的周期,即约为 24h.此外,在月球绕地球运动的过程中观察地球时,看到太阳照亮地球的范围不同,即看到地球有圆缺变化,变化周期约为月球绕地球运动的周期,即约为一个月.

5. 图 5-5 为地球绕日运行的示意图.地球运行轨道在 xy 平面内, C 为此椭圆的中心,太阳中心位于坐标系原点处,地球的自转轴与 z 轴的夹角为 θ , x 轴垂直地球的自转轴.图 5-6 所示为 xy 平面上地球运行的椭圆轨道,正交的虚线分别与椭圆的长轴、短轴重合.图 5-7 是地球和月球运行的示意图,地球自转的方向已在图中标出.试回答以下问题:

- 1) θ 的值等于多少?

2) 在图 5-6 上用 Ch、Q、X、D 分别标出春分(Ch)、秋分(Q)、夏至(X)、冬至(D)时地球所在的位置.

3) 根据人们对月球绕地球运动的观察结果可以判定月球绕地球运行的方向. 在图 5-7 中用箭头画出月球运行的方向, 并说明你作出此判断的理由.

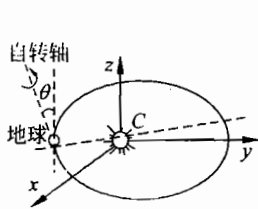


图 5-5

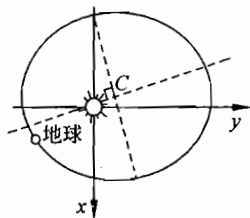


图 5-6

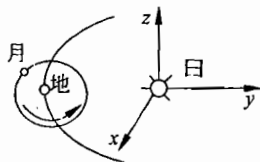


图 5-7

解析

1) $\theta = 23.5^\circ$.

2) 春分(Ch)、秋分(Q)、夏至(X)、冬至(D)时地球所在位置分别在 x 轴、 y 轴与轨道的交点处, 见图 5-8.

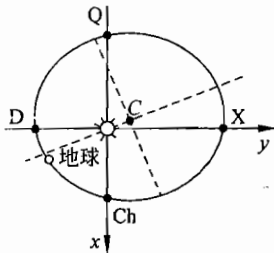


图 5-8

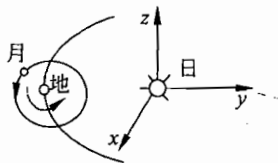


图 5-9

3) 月球绕地球运行的方向如图 5-9 所示. 理由如下:

由于地球的自转, 在地球上, 人可以观察到太阳和月亮均做反方向的视运动. 在图 5-9 中, 此视运动是顺时针方向, 其大小等于地球的自转角速度, 设为 ω . 由于地球绕日公转, 太阳相对于地球还有一个逆时针方向的视运动, 但此角速度很慢, 一年才转一周. 因此观察到的太阳的视运动角速度比 ω 稍小一点. 由于月亮绕地球运行, 月亮也还有一个视运动, 其方向与月亮运行方向相同, 其大小约为每月一周, 比地球绕日公转角速度大得多. 我们观察到每晚月亮上升时间逐日推迟达数十分钟之多, 说明月亮运行的方向是逆时针的, 所以它的视运动角速度比 ω 小很多, 因而落在太阳的后面.

本题是关于一些重要的天文知识的题目. 有相当多的考生答对了第 1) 问, 但有很多考生第 2) 问答错了. 他们误把近日点处作为冬至, 远日点处作为夏至, 因而把春分、秋分、

夏至、冬至填在图 5-6 中虚线与轨道的四个交点处. 虽然题中已知地球自转轴是与 Ox 轴垂直的, 而不是与轨道短轴垂直, 但很多考生仍未鉴别清楚在短轴的端点处太阳光不是垂直照射到地球的赤道上, 而是在 Ox 轴与轨道相交处太阳光才垂直照射到地球赤道上.

很多考生也解释不清楚第 3) 问. 在题给的图中, 已知地球自转及公转的方向, 因而进一步不难判断在地球上由于地球自转而观察到的太阳和月亮的视运动方向, 以及由于地球公转而造成的太阳视运动的较小的修正. 然后对月亮绕地球运动的两种可能方向造成的视运动的快慢进行比较并与观察到的实际对比, 就可定出月亮绕地球运动的方向. 可能很多考生平时并未考虑这个问题, 但在题中已给条件的基础上, 若对空间概念和相对运动的运用能力较强, 并知道月亮每晚上升时间逐日推迟的实际知识, 还是可能作出正确解释的.

6. 木星的公转周期约为 12 年, 设地球至太阳的距离为 1 单位 (称为 1 天文单位), 则木星至太阳的距离约为 _____ 天文单位.

解析

5.2 或 $2\sqrt[3]{18}$.

由开普勒第三定律, 有

$$\frac{R_{\text{木}}^3}{T_{\text{木}}^2} = \frac{R_{\text{地}}^3}{T_{\text{地}}^2}$$

所以

$$\begin{aligned} R_{\text{木}} &= \sqrt[3]{\frac{T_{\text{木}}^2}{T_{\text{地}}^2} R_{\text{地}}^3} = \sqrt[3]{\frac{12^2}{1^2}} \times 1^3 \text{ 天文单位} \\ &= 2\sqrt[3]{18} \text{ 天文单位} = 5.2 \text{ 天文单位} \end{aligned}$$

7. 已知太阳光从太阳射到地球需要 8min 20s, 地球公转轨道可近似看成圆轨道, 地球半径约为 $6.4 \times 10^6 \text{ m}$. 试估算太阳质量 m_0 与地球质量 m 之比 m_0/m 为多少? (取 1 位有效数字即可.)

解析

以 R 表示地球到太阳的距离, ω 表示地球公转的角速度. 由万有引力定律和牛顿运动定律可知

$$G \frac{m_0 m}{R^2} = m R \omega^2 \quad (1)$$

以 r 表示地球半径, 则地面处质量为 m' 的物体所受地球的引力为

$$G \frac{mm'}{r^2} = m'g \quad (2)$$

由以上两式可得

$$\frac{m_0}{m} = \frac{R^3 \omega^2}{r^2 g} \quad (3)$$

$$\text{而} \quad R = ct = 3 \times 10^8 \times 500 \text{m} = 1.5 \times 10^{11} \text{m} \quad (4)$$

$$\omega = 2\pi / (365 \times 24 \times 60 \times 60) \text{s}^{-1} \quad (5)$$

将(4)、(5)两式及 $r = 6.4 \times 10^6 \text{m}$ 、 $g = 9.8 \text{m/s}^2$ 代入(3)式,可得

$$\frac{m_0}{m} = 3 \times 10^5$$

此题要求能把一些知识性数据,例如真空中光速、地球公转角速度(可根据一年的天数估算)、地面重力加速度等用于有关问题中作出估算,考查活用知识的能力。

8. 考虑到地球上物体除受地球的引力外还受到太阳的引力作用,若用弹簧秤称量同一物体的重量时,白天的示数与夜晚的示数是否相同? 试说明理由(地球上各点到太阳的距离之差忽略不计)。

解析

示数不变. 若考虑太阳的引力,就必须考虑物体随地球绕太阳的运动. 若忽略地球上各点到太阳的距离的差别,这时太阳对物体的引力正等于物体的质量和它与地球一起绕太阳公转的加速度的乘积,因而不影响物体所受的其他力及由它们所决定的运动状态. 说得详细一点,以太阳为参照系,物体所受的力有弹簧拉力 F , 地球引力 F_e 和太阳引力 F_s , 其加速度为 $a_e + a_s$, a_e 为相对于地球中心的加速度, a_s 为地球中心相对于太阳的加速度. 根据牛顿定律有

$$F + F_e + F_s = m(a_e + a_s)$$

若不计地球上各点到太阳的距离的差别,用 R 表示此距离,用 m_s 与 m_e 分别表示太阳和地球的质量,则地球公转的加速度 $a_s = \frac{1}{m_e} G \frac{m_e m_s}{R^2} = G \frac{m_s}{R^2}$. 这样,被称物体的质量 m 与此加速度的乘积 ma_s 为 $G \frac{mm_s}{R^2}$, 而这正是物体所受的太阳引力 F_s , 因此上式变为 $F + F_e = ma_e$. 因为 a_e 与 F_e 都与昼夜无关,所以 F 也与昼夜无关.

有的学生认为,若考虑太阳引力的作用,用弹簧秤称量同一物体的重量时,白天的示数与夜晚的示数是不同的,并做出了如下的分析,如图 5-10 所示. 在白天,地球作用于物

体的引力 F_e 与太阳作用于物体的引力 F_s 的方向相反, 若以 F 表示弹簧秤对物体的拉力, 注意到物体是静止的, 由牛顿第二定律有

$$F + F_s - F_e = 0$$

得

$$F = F_e - F_s$$

在夜晚, 地球作用于物体的引力 F_e 与太阳作用于物体的引力 F_s 的方向相同, 若以 F' 表示弹簧秤的拉力, 注意到物体是静止的, 由牛顿第二定律有

$$F' - F_s - F_e = 0$$

得

$$F' = F_s + F_e$$

可见 $F' \neq F$, 即在白天与夜晚, 弹簧秤的示数不同. 以上的分析错在何处? 应该说, 该学生关于物体的受力分析并无错误, 但认为物体是静止的这一看法值得研究. 在地球上用弹簧秤称量物体的重量时, 物体相对地球确实是静止的, 但在考虑到太阳的引力时, 地球也受太阳引力作用做加速运动. 地球是非惯性参考系, 因而虽然物体相对地球静止, 没有加速度, 但相对地球, 牛顿第二定律不成立. 在考查太阳引力作用后, 相对地球静止的物体与地球一起绕太阳做圆周运动, 具有向心加速度. 相对太阳, 作用于物体的合力并不为零, 而等于地球绕太阳运动的加速度 a_e 与物体质量的乘积. 注意到这一点后, 不难证明 F' 与 F 是相等的.

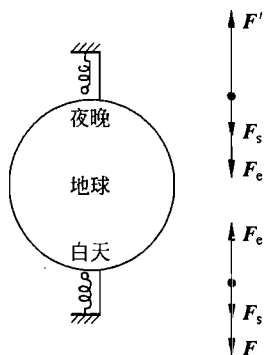


图 5-10

9. 据新华社报道, 为了在 21 世纪初叶将我国的航天员送上太空, 2002 年 3 月 25 日 22 时 15 分, 我国成功地发射了一艘无人试验飞船. 在完成预定任务后, 飞船于 4 月 1 日 16 时 51 分安全着陆, 共绕地球飞行 108 圈.

1) 飞船的名称是什么?

2) 飞船在运行期间, 按照地面指挥控制中心的指令成功地实施了数百个动作, 包括从椭圆轨道变换成圆轨道等. 假如把飞船从发射到着陆的整个过程中的运动都当作圆周运动处理, 试粗略估计飞船离地面的平均高度. 已知地球半径 $R = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$, 地球表面处的重力加速度 $g = 9.80 \text{ m/s}^2$.

解析

1) 神舟 3 号.

2) 设飞船飞行时间为 t , 绕地球飞行的圈数为 N , 周期为 T , 飞船的质量为 m , 离地面

的平均高度为 h , 地球半径为 R , 地球质量为 m_0 , 则有

$$T = \frac{t}{N} \quad (1)$$

$$G \frac{mm_0}{(R+h)^2} = m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 (R+h) \quad (2)$$

$$G \frac{m_0 m}{R^2} = mg \quad (3)$$

由(1)、(2)、(3)式解得

$$h = \left(\frac{gR^2 t^2}{4\pi^2 N^2} \right)^{1/3} - R \quad (4)$$

由题给数据可知 $t = 5.8536 \times 10^5 \text{ s}$, 代入 t 及其他有关数据得

$$h = 2.9 \times 10^5 \text{ m} \quad (5)$$

10. 对于太阳系中的行星运动, 天文观测发现了如下的事实(称为开普勒三定律):

1) 各个行星分别在大小不同的椭圆轨道上围绕太阳运动, 太阳的位置是椭圆的一个焦点.(第一定律)

2) 对于每个行星来说, 太阳至行星的连线(图 5-11 中 FP 线)在每一个单位时间内扫过的面积(称为面积速度)相等.(第二定律)

3) 行星椭圆轨道的半长轴的三次方与公转周期的平方的比值, 对于各个行星来说是相同的.(第三定律)

行星轨道如图 5-11 所示, P 为行星, F 为焦点(太阳), a 、 b 、 $2c$ 分别为半长轴、半短轴和焦距, O 为椭圆中心.

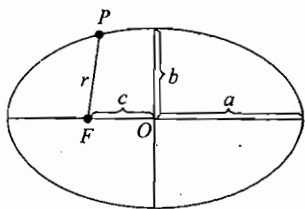


图 5-11

根据万有引力定律, 行星和太阳间的引力势能(作为已知公式)为 $V = -Gm_0 m/r$, 其中 G 为引力常量, m_0 为太阳质量, m 为行星质量, r 为太阳至行星的距离.

试根据机械能守恒定律, 开普勒第一、第二定律, 分别导出行星运动的总机械能 E , 面积速度 S , 公转周期 T 的公式(用 G, m_0, m, a, b 表示), 并证明开普勒第三定律.

解析

如图 5-12 所示, 以 v 表示行星的速度, 当行星经过近日点 A 和远日点 B 时, v 和 r 垂直, 面积速度分别为

$$S_A = \frac{1}{2} r_A v_A = \frac{1}{2} (a - c) v_A \quad (1)$$

$$S_B = \frac{1}{2} r_B v_B = \frac{1}{2} (a + c) v_B$$

根据开普勒第二定律, 应有 $S_A = S_B$, 因此得

$$v_B = v_A \frac{a - c}{a + c} \quad (2)$$

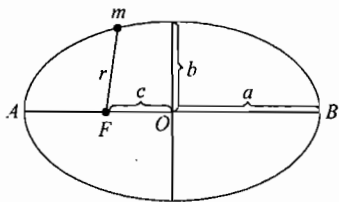


图 5-12

行星运动的总机械能 E 等于动能加势能. 经过近日点和远日点时, 分别为

$$E_A = \frac{1}{2} m v_A^2 - G \frac{m m_0}{r_A} = \frac{1}{2} m v_A^2 - G \frac{m m_0}{a - c} \quad (3)$$

$$E_B = \frac{1}{2} m v_B^2 - G \frac{m m_0}{r_B} = \frac{1}{2} m v_B^2 - G \frac{m m_0}{a + c}$$

根据机械能守恒 $E_A = E_B$, 因此得

$$\frac{1}{2} m (v_A^2 - v_B^2) = G m m_0 \left(\frac{1}{a - c} - \frac{1}{a + c} \right) \quad (4)$$

由(2)、(4)式可解出

$$v_A^2 = \frac{G m_0}{a} \cdot \frac{a + c}{a - c}, \quad v_B^2 = \frac{G m_0}{a} \cdot \frac{a - c}{a + c} \quad (5)$$

代入(3)式, 即得机械能为

$$E_A = E_B = E = -G \frac{m m_0}{2a} \quad (6)$$

由(5)式和(1)式可得面积速度为

$$S_A = S_B = S = \frac{b}{2} \sqrt{G m_0 / a} \quad (7)$$

椭圆的面积为 πab , 因此周期为

$$T = \frac{\pi ab}{S} = \frac{2\pi a \sqrt{a}}{\sqrt{G m_0}} \quad (8)$$

将(8)式两边平方, 即得开普勒第三定律:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G m_0} a^3$$

本题讨论的是太阳系中行星的运动, 但却涉及了质点在万有引力作用下运动的共同特征. 万有引力是有心力, 两质点间的万有引力的大小仅决定于两质点之间的距离, 力的方向指向作为引力源的质点. 由于作用于运动质点上的万有引力指向作为引力源的质点, 故引力对引力源的力矩为 0, 运动质点在运动过程中, 对引力源的角动量守恒, 行星绕太

阳运动的开普勒第二定律便是角动量守恒定律的具体体现.行星绕太阳运动的面积速度 S 与行星的角动量 L 之间的关系为

$$L = 2mS$$

式中 m 是行星的质量.

万有引力是保守力,在万有引力作用下的两质点间存在相互作用的势能.仅受万有引力作用的两质点的势能与动能之和保持恒定,即两质点的机械能是守恒的.故在本题中可以根据机械能守恒定律和角动量守恒定律,并利用椭圆的参量求出行星绕太阳运动的总机械能 E 即(6)式.(6)式给出的行星的总机械能是负的,这表示,虽然行星在运动过程中动能与势能可以相互转化,行星到太阳的距离亦在变化,但势能的绝对值总是大于动能,即使动能变到最小值,势能亦不可能为0.这表示行星总是处在被太阳引力束缚的状态,不会远离太阳而去,这与行星运动的轨道是椭圆相一致.

地球人造卫星是在地球引力作用下绕地心运动的,卫星与地球的总机械能也是负的,卫星的轨道是椭圆.椭圆的长半轴 a 与总机械能 E 之间的关系也可以用(6)式表示,即

$$a = -\frac{Gm_0m}{2E}$$

式中的 m_0 是地球的质量, m 为卫星的质量.可以看出,卫星椭圆轨道的半长轴 a 的大小仅取决于卫星的总机械能,能量越大,即 $|E|$ 越小,半长轴越大.卫星的面积速度也可以用(7)式来表示,因为卫星的角动量 L 可表示为

$$L = m\sqrt{\frac{Gm_0}{a}} \cdot b$$

式中 b 为椭圆轨道的半短轴. b 与卫星的角动量、能量都有关系,即

$$b = \frac{L}{\sqrt{-2mE}}$$

当卫星的能量 E 一定后,即椭圆的半长轴 a 一定后,卫星的角动量不同,半短轴亦不同.角动量越小,椭圆越偏.

11. 一人造地球卫星绕地球做椭圆运动,地心是椭圆的一个焦点,在直角坐标系中,椭圆的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a 、 b 分别是椭圆的长半轴和短半轴,为已知常数.当该人造卫星在轨道的远地点时,突然以很大的能量沿卫星运行方向从卫星上发射出一个质量为 m 的太空探测器,此探测器在地球引力作用下做双曲线运动,此双曲线的焦点位于地心,实半轴的长度正好等于原来椭圆远地点到地心的距离.试问在发射时,给探测器的能量为多大? 设地球的质量 m_E 、万有

引力常量 G 为已知, 不计地球以外星体的影响.

解析

探测器在发射前, 是人造地球卫星的一部分, 它与人造地球卫星一起沿同一椭圆轨道运动, 椭圆的长半轴为 a , 短半轴为 b , 椭圆的中心 O 到焦点 F 的距离为 c , 如图 5-13 所示. 由解析几何知

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad (1)$$

探测器发射前的能量就是它做椭圆运动的能量. 设在远地点, 探测器的速度为 v_1 , 则发射前探测器的能量为

$$E_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{Gm_E m}{a+c} \quad (2)$$

由于作用于探测器的万有引力作用线始终通过地心, 引力对地心的力矩为零, 做椭圆运动的探测器角动量守恒. 若探测器在近地点的速度为 v_2 , 则由角动量守恒, 有

$$mv_1(a+c) = mv_2(a-c) \quad (3)$$

万有引力是保守力, 探测器沿椭圆运动过程中机械能守恒. 对于远地点与近地点, 有

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{Gm_E m}{a+c} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{Gm_E m}{a-c} \quad (4)$$

解(3)式和(4)式得

$$v_1^2 = \frac{Gm_E}{a} \frac{a-c}{a+c} \quad (5)$$

把(5)式代入(2)式, 得

$$E_1 = -\frac{Gm_E m}{2a} \quad (6)$$

探测器射出后, 沿双曲线运动, 该双曲线的顶点与原来的卫星的椭圆轨道的顶点重合, 如图 5-14 所示. 探测器做双曲线运动的过程中, 角动量守恒, 机械能亦守恒. 设 v_0 为

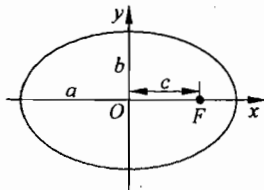


图 5-13

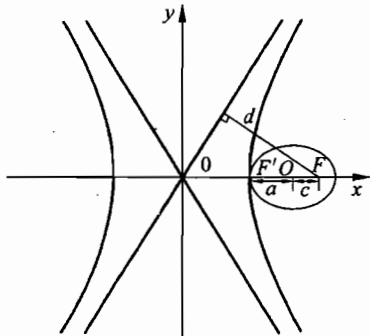


图 5-14

探测器刚弹出时的速度,也就是在双曲线顶点处的速度,该点到地心的距离为 $a+c$. 探测器的角动量为 $mv_0(a+c)$,当探测器到达无限远处时,其速度的方向沿双曲线的渐近线,以 v 表示其速度的大小, d 表示地心到渐近线的距离,其角动量为 $mv d$. 根据角动量守恒,有

$$mv_0(a+c) = mv d \quad (7)$$

探测器在双曲线的顶点的机械能应等于它到达无限远处的机械能,故有

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{Gm_E m}{a+c} = \frac{1}{2}mv^2 \quad (8)$$

由图 5-14 可知

$$d = 2(a+c)\sin\alpha \quad (9)$$

若 A 、 B 分别表示双曲线的实半轴和虚半轴, C 表示双曲线中心到地心的距离,因地心是双曲线的焦点,根据题给的条件和解析几何,有

$$A = a + c \quad (10)$$

$$C = 2(a+c) \quad (11)$$

$$B^2 = C^2 - A^2 \quad (12)$$

而

$$\sin\alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (13)$$

由以上各式,可得

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (14)$$

解(7)、(8)、(9)和(14)式,得

$$v^2 = \frac{Gm_E}{a+c} \quad (15)$$

探测器被射出后,其能量就是做双曲线运动时的能量,故射出后探测器的能量为

$$E_2 = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{Gm_E m}{2(a+c)} \quad (16)$$

发射探测器时给探测器的能量为

$$\Delta E = E_2 - E_1 \quad (17)$$

由(1)、(6)和(16)式,得

$$\Delta E = \frac{Gm_E m}{2a} \frac{2a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a + \sqrt{a^2 - b^2}} \quad (18)$$

探测器在发射前与卫星一起绕地球作椭圆运动,在被发射出后,绕地球作双曲线运动.虽然轨道的形状不同,但都是在地球的万有引力作用下的运动,在运动过程中必须服从机械能守恒定律和角动量守恒定律.沿不同形状的轨道运动是由其能量决定的.当探测

器沿椭圆轨道运动时,其总机械能是负的,见(6)式;当它沿双曲线轨道运动时,其总机械能是正的,见(8)式.为了使探测器从椭圆轨道进入双曲线轨道,就得给探测器一定的能量,即(18)式.

如何把机械能守恒定律与角动量守恒定律与本题的具体情况相结合,数学的作用不能忽视.学生必须能非常熟练地应用解析几何的知识,才能使问题得到解决.在学习物理的过程中,物理概念一定要清楚,但数学工具的应用也要非常熟练,二者不能偏废.

12. 历史上曾有人利用在地球位于其公转轨道的不同位置处从地球上测得的木星的卫星周期,首次求出了光的传播速度.现已知离木星最近的一个卫星——木卫 I 的周期 $T_0 = 42.5\text{h}$,在地球公转轨道上各处从地球上测得的木卫 I 的所有周期值中,最大的比 T_0 多 15s ,最小的比 T_0 小 15s .假定地球、木星的公转轨道是同一平面内的圆轨道,木卫 I 绕木星的运动轨道也是该平面内的圆轨道;地球的轨道半径 $R_E = 1.5 \times 10^8\text{km}$,木星的轨道半径 $R_J = 7.8 \times 10^8\text{km}$,木卫 I 的轨道半径 $R_I = 4.2 \times 10^5\text{km}$.

1) 试分析论证:测得木卫 I 周期最大值和最小值时,相对木星而言,地球位于其公转轨道的何处附近以及地球、木星和木卫 I 的运动对测量周期的影响.

2) 利用这些数据并作合理近似求出光的传播速度 c .

解析

1) 木星总是处在地球轨道之外,故可由木星向地球轨道作两条切线,当地球运行到切点附近时,从地球上测得的木卫 I 的周期取极值.在其中一个切点处,地球运行是背离木星的,测得的周期是极大值;在另一切点处,地球运动趋向木星,测得的周期是极小值.与木星和木卫 I 比较,地球的公转运动是影响测量结果的主要因素.现论述如下:

如图 5-15 所示,用 S 表示太阳, J 表示木星, E 表示地球, I 表示木卫 I, E_P 和 $E_{P'}$ 代表地球在其公转轨道 C_E 上的两个不同位置(图中的 $JE_{P'}$ 连线为由木星到地球轨道的切线, $E_{P'}$ 为切点, E_P 为相对于 $E_{P'}$ 地球在一个时段 $\Delta t = T_0$ 之前的位置).设太阳的质量为

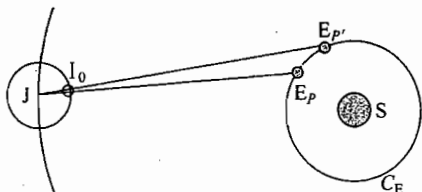


图 5-15

m_s , 地球质量为 m_E , 公转速度为 v_E , 角速度为 ω_E , 周期为 T_E ; 木星的相应各量分别 m_J , v_J , ω_J 和 T_J .

由万有引力定律及向心力公式有

$$G \frac{m_s m_E}{R_E^2} = m_E \frac{v_E^2}{R_E}, \quad G \frac{m_s m_J}{R_J^2} = m_J \frac{v_J^2}{R_J}$$

由此得

$$\begin{aligned} v_E &= \sqrt{\frac{Gm_s}{R_E}}, & v_J &= \sqrt{\frac{Gm_s}{R_J}} \\ \frac{\omega_E}{\omega_J} &= \frac{v_E R_J}{v_J R_E} = \sqrt{\left(\frac{R_J}{R_E}\right)^3} = 12 \\ \frac{T_E}{T_J} &= \frac{2\pi R_E}{v_E} \frac{v_J}{2\pi R_J} = \sqrt{\left(\frac{R_E}{R_J}\right)^3} = \frac{1}{12} \end{aligned} \quad (1)$$

对于一段时段 $\Delta t = T_0 = 42.5 \text{ h}$ 内, 木卫 I 绕其轨道一周回到“原处”, 而木星转过的圆心角为

$$\frac{42.5}{12 \times 365 \times 24} \times 360^\circ = 0.15^\circ \quad (2)$$

很小; 地球转过的圆心角为

$$\frac{42.5}{365 \times 24} \times 360^\circ = 1.75^\circ \quad (3)$$

也很小.

这些结果表明: (i) 地球、木星的运行速度量值同数量级; (ii) 经历 T_0 时段后, 地球、木星转过很小角度, 其运动方向几乎不变, 故 T_0 可视为很小的时段; (iii) R_J 比 R_E 大得比较多, 故相对于木-地连线 $JE_{P'}$ (或 JE_P), 地球沿纵向运动, 木星近似沿横向运动, 故在经历 $\Delta t = T_0$ 的小时段后, 木星运动对木-地距离改变几无贡献, 木卫 I 回到“原处”, 对木卫 I - 地球距离改变更无贡献, 地球的运动几乎是木卫 I - 地球距离改变的惟一因素, 且在切点处最大, 地球背离木星运动时距离增量为正, 趋向木星运动时距离增量为负, 距离的增量正是木卫 I 周期差时段内光经过的路程.

2) 设在时刻 t , 木卫 I 位于图中 I_0 处 (注意此时为木蚀), 则位于 E_P 处的地球观察到木卫 I 的时刻为 t_I , 要比 t 略晚一小段时间 δ , δ 等于光从 I_0 处传到 E_P 处所需的时间, 经过一个周期 T_0 后的 t' 时刻, 木卫 I 绕木星运行一周后又回到 I_0 处, 此时地球已运动到 $E_{P'}$ 处, 地球观察到木卫 I 的时刻 t'_I 比 $t' = t + T_0$ 晚一小段时间 δ' , δ' 是光由 I_0 传到 $E_{P'}$ 处所需的时间, 而 $t'_I - t_I$ 正是地球在切点附近测得的木卫 I 的周期, 于是

$$T_I = t'_I - t_I = t' - t + \delta' - \delta = T_0 + \delta' - \delta \quad (4)$$

$$T_I - T_0 = \delta' - \delta = \frac{E_P E_{P'}}{c} = \frac{2\pi R_E T_0}{T_{EC}} \quad (5)$$

由此得

$$c = 3.1 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (6)$$

对于地球在另一切点趋向木星运动的情况,类似的处理可给出完全相同的结果.

13. 宇宙飞行器和小行星都绕太阳在同一平面内做圆周运动,飞行器的质量比小行星的质量小很多,飞行器的速率为 v_0 ,小行星的轨道半径为飞行器轨道半径的 6 倍.有人企图借助飞行器与小行星的碰撞使飞行器飞出太阳系,于是便设计了如下方案:(i)当飞行器在其圆周轨道的适当位置时,突然点燃飞行器上的喷气发动机,经过极短时间后立即关闭发动机,以使飞行器获得所需的速度,沿圆周轨道的切线方向离开圆轨道.(ii)飞行器到达小行星的轨道时正好位于小行星的前缘,速度的方向和小行星在该处速度的方向相同,正好可被小行星碰撞.(iii)小行星与飞行器的碰撞是弹性正碰.不计燃烧的燃料质量.

1) 试通过计算证明按上述方案能使飞行器飞出太阳系.

2) 设在上述方案中,飞行器从发动机取得的能量为 E_1 .如果不采取上述方案而是令飞行器在圆轨道上突然点燃喷气发动机,经过极短时间后立即关闭发动机,以使飞行器获得足够的速度沿圆轨道切线方向离开圆轨道后能直接飞出太阳系.采用这种办法时,飞行器从发动机取得的能量的最小值用 E_2 表示.问 $\frac{E_1}{E_2}$ 为多少?

解析

1) 设太阳的质量为 m_s ,飞行器的质量为 m ,飞行器绕太阳做圆周运动的轨道半径为 R .根据所设计的方案,可知飞行器是从其原来的圆轨道上某处出发,沿着半个椭圆轨道到达小行星轨道上的.该椭圆既与飞行器原来的圆轨道相切,又与小行星的圆轨道相切.要使飞行器沿此椭圆轨道运动,应点燃发动机使飞行器的速度在极短时间内,由 v_0 变为某一值 u_0 .设飞行器沿椭圆轨道到达小行星轨道时的速度为 u ,因大小为 u_0 和 u 的这两个速度的方向都与椭圆的长轴垂直,由开普勒第二定律可得

$$u_0 R = 6uR \quad (1)$$

由能量关系,有

$$\frac{1}{2} m u_0^2 - G \frac{m_s m}{R} = \frac{1}{2} m u^2 - G \frac{m_s m}{6R} \quad (2)$$

由牛顿万有引力定律,有

$$G \frac{m_s m}{R^2} = m \frac{v_0^2}{R}$$

或

$$v_0 = \sqrt{\frac{G m_s}{R}} \quad (3)$$

解(1)、(2)、(3)三式得

$$u_0 = \sqrt{\frac{12}{7}} v_0 \quad (4)$$

$$u = \sqrt{\frac{1}{21}} v_0 \quad (5)$$

设小行星绕太阳运动的速度为 v' , 小行星的质量为 m' , 由牛顿万有引力定律

$$G \frac{m_s m'}{(6R)^2} = m' \frac{v'^2}{6R}$$

得

$$v' = \sqrt{\frac{Gm_s}{6R}} = \sqrt{\frac{1}{6}} v_0 \quad (6)$$

可以看出

$$v' > u \quad (7)$$

由此可见, 只要选择好飞行器在圆轨道上合适的位置离开圆轨道, 使得它到达小行星轨道处时, 小行星的前缘也正好运动到该处, 则飞行器就能被小行星撞击. 可以把小行星看作是相对静止的, 飞行器以相对速度 $v' - u$ 射向小行星, 由于小行星的质量比飞行器的质量大得多, 碰撞后, 飞行器以同样的速率 $v' - u$ 弹回, 即碰撞后, 飞行器对小行星的速度的大小为 $v' - u$, 方向与小行星的速度的方向相同, 故飞行器相对太阳的速度为

$$u_1 = v' + v' - u = 2v' - u$$

或将(5)、(6)式代入得

$$u_1 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{1}{21}} \right) v_0 \quad (8)$$

如果飞行器能从小行星的轨道上直接飞出太阳系, 它应具有的最小速度为 u_2 , 则有

$$\frac{1}{2} m u_2^2 - G \frac{m_s m}{6R} = 0$$

得

$$u_2 = \sqrt{\frac{Gm_s}{3R}} = \sqrt{\frac{1}{3}} v_0 \quad (9)$$

可以看出

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{7}} \right) v_0 > \frac{1}{\sqrt{3}} v_0 = u_2 \quad (10)$$

飞行器被小行星撞击后具有的速度足以保证它能飞出太阳系.

2) 为使飞行器能进入椭圆轨道, 发动机应使飞行器的速度由 v_0 增加到 u_0 , 飞行器从发动机取得的能量

$$E_1 = \frac{1}{2} m u_0^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m \frac{12}{7} v_0^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{5}{14} m v_0^2 \quad (11)$$

若飞行器从其圆周轨道上直接飞出太阳系, 飞行器应具有最小速度为 u_3 , 则有

$$\frac{1}{2}mu_3^2 - G\frac{m_s m}{R} = 0$$

由此得

$$u_3 = \sqrt{2G\frac{m_s}{R}} = \sqrt{2}v_0 \quad (12)$$

飞行器的速度由 v_0 增加到 u_3 , 应从发动机获取的能量为

$$E_2 = \frac{1}{2}mu_3^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (13)$$

所以

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{5}{14}mv_0^2}{\frac{1}{2}mv_0^2} = 0.71 \quad (14)$$

14. 从地球表面向火星发射火星探测器. 设地球和火星都在同一平面上绕太阳做圆周运动. 火星轨道半径 R_m 为地球轨道半径 R_0 的 1.500 倍. 简单而又比较节省能量的发射过程可分为两步进行: 第一步, 在地球表面用火箭对探测器进行加速, 使之获得足够的动能, 从而脱离地球引力作用成为一个沿地球轨道运行的人造行星. 第二步是在适当时刻点燃与探测器连在一起的火箭发动机, 在短时间内对探测器沿原方向加速, 使其速度数值增加到适当值, 从而使得探测器沿着一个与地球轨道及火星轨道分别在长轴两端相切的半个椭圆轨道正好射到火星上, 如图 5-16 所示. 问:

1) 为使探测器成为沿地球轨道运行的人造行星, 必须加速探测器, 使之在地面附近获得多大的速度(相对于地球)?

2) 当探测器脱离地球并沿地球公转轨道稳定运行后, 在某年 3 月 1 日零时测得探测器与火星之间的角距离为 60° , 如图 5-17 所示. 问应在何年何月何日点燃探测器上的火箭

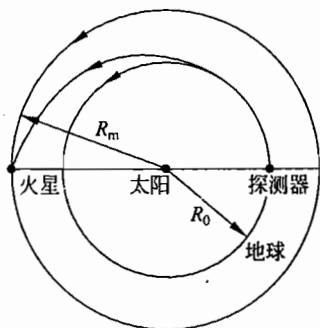


图 5-16

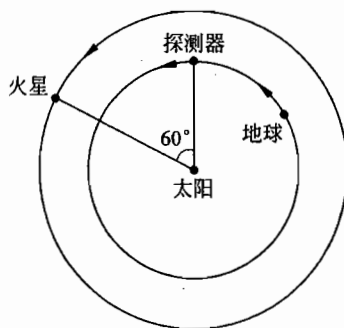


图 5-17

发动机方能使探测器恰好落在火星表面? (时间计算仅需精确到日). 已知地球半径为 $R_e = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$, 重力加速度 g 可取 9.8 m/s^2 .

解析

1) 设地球的质量为 m_e , 探测器及其附加装置的总质量为 m , 则探测器在地球表面的动能 E_k 和引力势能 E_p 分别为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2, \quad E_p = -G \frac{m_e m}{R_e}$$

当探测器脱离地球引力作用成为沿地球轨道运动的人造行星时, 可以认为探测器的引力势能 $E'_p = 0$; 相对于地球的速度为零. 因而 $E'_k = 0$, 由机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv^2 - G \frac{m_e m}{R_e} = 0$$

得

$$v = \sqrt{\frac{2Gm_e}{R_e}} = \sqrt{2gR_e}$$

代入数值得

$$v = \sqrt{2 \times 9.8 \times 6.4 \times 10^6} \text{ m/s} = 1.12 \times 10^4 \text{ m/s}$$

2) 为使探测器落到火星上, 必须选择适当时机点燃探测器上的火箭发动机, 使得探测器沿椭圆轨道到达与火星轨道的相切点时, 火星也恰好运行到这一点. 为此, 必须首先确定点燃火箭发动机时探测器与火星的相对位置. 已知探测器在地球公转轨道上运行周期 T_d 与地球公转周期相同

$$T_d = T_e = 365 \text{ d}$$

根据开普勒第三定律, 火星的公转周期为

$$T_m = 365 \sqrt{(1.5)^3} \text{ d} = 365 \times 1.84 \text{ d} = 671 \text{ d}$$

而探测器的椭圆轨道上的半长轴为

$$\frac{R_0 + 1.5R_0}{2} = 1.25R_0$$

所以探测器在椭圆轨道上的运行周期 T'_d 为

$$T'_d = 365 \times \sqrt{(1.25)^3} \text{ d} = 365 \times 1.40 \text{ d} = 510 \text{ d}$$

因此探测器从点燃火箭发动机至到达火星, 需时

$$T'_d / 2 = 255 \text{ d}$$

探测器在点燃火箭发动机前绕太阳转动的角速度为

$$\omega_d = \omega_e = 360^\circ / 365 \text{ d} = 0.986^\circ / \text{d}$$

火星绕太阳转动的角速度为

$$\omega_m = 360^\circ/671d = 0.537^\circ/d$$

由于探测器运行至火星需时 255d, 火星在此期间运行的角距离为

$$\omega_m T'_d/2 = 0.537^\circ/d \times 255d = 137^\circ$$

即探测器在椭圆轨道近日点发射时, 火星应在其远日点的切点之前 137° . 亦即点燃火箭发动机时, 探测器与火星的角距离应为 $180^\circ - 137^\circ = 43^\circ$, 如图 5-18 所示.

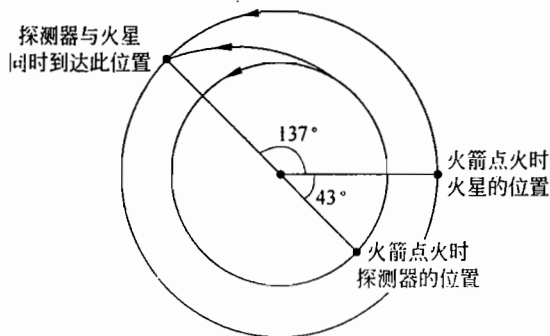


图 5-18

已知某年 3 月 1 日零时探测器与火星的角距离为 60° (火星在前, 探测器在后). 为使其角距离成为 43° , 必须等待二者在各自轨道中运行至某个合适的时日. 设二者到达合适位置, 探测器又经历的天数为 t , 则

$$60^\circ - 43^\circ = \omega_d t - \omega_m t$$

即

$$t = \frac{60^\circ - 43^\circ}{\omega_d - \omega_m} = \frac{17}{0.449} d = 37.86d \approx 38d$$

故点燃火箭发动机的时刻应为当年的 3 月 1 日之后第 38 天, 即同年的 4 月 7 日.

这是一道检查对开普勒定律的理解的题目, 开普勒定律中的三条定律都用上了. 另外一个重点就是点火时机的时间计算, 这只有对于地球、卫星和火星在各自轨道上的运动图像十分清晰, 才能得到正确的答案.

15. 经过用天文望远镜长期观测, 人们在宇宙中已经发现了许多双星系统, 通过对它们的研究, 使我们对宇宙中物质的存在形式和分布情况有了较深刻的认识. 双星系统由两个星体构成, 其中每个星体的线度都远小于两星体之间的距离. 一般双星系统距离其他星体很远, 可以当作孤立系统处理.

现根据对某一双星系统的光度学测量确定, 该双星系统中每个星体的质量都是 m , 两者相距 L . 它们正围绕两者连线的中点做圆周运动.

1) 试计算该双星系统的运动周期 $T_{\text{计算}}$.

2) 若实验上观测到的运动周期为 $T_{\text{观测}}$, 且 $T_{\text{观测}} : T_{\text{计算}} = 1 : \sqrt{N}$ ($N > 1$). 为了解释 $T_{\text{观测}}$ 与 $T_{\text{计算}}$ 的不同, 目前有一种流行的理论认为, 在宇宙中可能存在一种望远镜观测不到的暗物质. 作为一种简化模型, 我们假定在这两个星体连线为直径的球体内均匀分布着这种暗物质, 而不考虑其他暗物质的影响. 试根据这一模型和上述观测结果确定该星系间这种暗物质的密度.

解析

1) 双星均围绕它们的连线的中点做圆周运动, 设运动速率为 v , 向心加速度满足下面的方程:

$$m \frac{v^2}{L/2} = \frac{Gm^2}{L^2} \quad (1)$$

$$v = \sqrt{\frac{Gm}{2L}} \quad (2)$$

$$\text{周期} \quad T_{\text{计算}} = \frac{2\pi(L/2)}{v} = \pi L \sqrt{\frac{2L}{Gm}} \quad (3)$$

2) 根据观测结果, 星体的运动周期为

$$T_{\text{观测}} = \frac{1}{\sqrt{N}} T_{\text{计算}} < T_{\text{计算}} \quad (4)$$

这说明双星系统中受到的向心力大于本身的引力, 故它一定还受到其他指向中心的作用力. 按题意这一作用来源于均匀分布的暗物质, 均匀分布在球体内的暗物质对双星系统的作用与一质量等于球内暗物质的总质量 m' 位于中点处的质点相同. 考虑暗物质作用后双星的速度即为观察到的速度 $v_{\text{观}}$, 则有

$$m \frac{v_{\text{观}}^2}{L/2} = \frac{Gm^2}{L^2} + G \frac{mm'}{(L/2)^2} \quad (5)$$

$$v_{\text{观}} = \sqrt{\frac{G(m+4m')}{2L}} \quad (6)$$

因为在轨道一定时, 周期和速度成反比, 由(4)式得

$$\frac{1}{v_{\text{观}}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{1}{v} \quad (7)$$

把(2)、(6)式代入(7)式得

$$m' = \frac{N-1}{4} m \quad (8)$$

设所求暗物质的密度为 ρ , 则有

$$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{L}{2}\right)^3\rho = \frac{N-1}{4}m$$

$$\rho = \frac{3(N-1)m}{2\pi L^3} \quad (9)$$

故

16. 许多观察表明,自然界的周期性变化常会在地球上的动植物身上留下不同的痕迹. 鹦鹉螺是一种 4 亿多年前在地球上繁盛生长的软体动物,它的气室外壳上的波纹生长线数目随其生活的年代不同而不同. 1978 年美国科学家卡姆和普姆庇在研究了不同地质年代的鹦鹉螺壳后,发现现存的 9 个当代鹦鹉螺个体的气室外壳上的生长线都是 30 条左右,而古代 36 例鹦鹉螺化石中,地质年代愈古老,生长线的数目愈少:距今 29 百万年的新生代渐新世的标本上有 26 条;距今 100 百万年的中生代白垩纪的标本上有 22 条;距今 180 百万年的中生代侏罗纪的标本上有 18 条;距今 320 百万年的古生代石炭纪的标本上有 15 条;距今 470 百万年的古生代奥陶纪的标本上只有 9 条. 他们认为这些生长线记录着地球及其周围天体的演变历史,并根据上述数据作了一个大胆的假设:鹦鹉螺外壳上的生长线条数的变化是月球绕地球运动周期随年代变化的反映. 试问:由此假设你能得出关于月球运动的什么结论? 试通过计算说明此结论.

[注] 假设从古至今,地球质量和自转周期以及月球质量都没有发生变化. 也不考虑物理常数的变化.

解析

根据他们的大胆假设,目前鹦鹉螺生长线近似为 30 条的事实,可以认为是月球绕地球运动周期近似是 30 天的反映. 把这一看法推广到任何地质年代(推广的依据是地球、月球质量在这段时间中没有发生变化,也不考虑物理常数的变化),就可以按照动力学规律算出任何地质年代月球绕地球的运动周期.

根据月球、地球质量的巨大差别,可以把它们之间的相对运动简化为月球围绕地球的圆周运动. 根据开普勒第三定律,或万有引力定律和牛顿第二定律可知,月球运动周期 T 和地月之间的距离 L 有下列关系

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{Gm_e}L^3 = kL^3 \quad (1)$$

其中 m_e 是地球质量. 可见比例系数 k 只与地球质量和引力常数有关. 故在题中所给简化模型下,该比例常数也与年代无关,对任何地质年代都成立. 若第 i 个地质年代月球运动周期为 T_i ,该年代的月地间的距离为 L_i ,则有

1) 试计算该双星系统的运动周期 $T_{\text{计算}}$.

2) 若实验上观测到的运动周期为 $T_{\text{观测}}$, 且 $T_{\text{观测}} : T_{\text{计算}} = 1 : \sqrt{N}$ ($N > 1$). 为了解释 $T_{\text{观测}}$ 与 $T_{\text{计算}}$ 的不同, 目前有一种流行的理论认为, 在宇宙中可能存在一种望远镜观测不到的暗物质. 作为一种简化模型, 我们假定在这两个星体连线为直径的球体内均匀分布着这种暗物质, 而不考虑其他暗物质的影响. 试根据这一模型和上述观测结果确定该星系间这种暗物质的密度.

解析

1) 双星均围绕它们的连线的中点做圆周运动, 设运动速率为 v , 向心加速度满足下面的方程:

$$m \frac{v^2}{L/2} = \frac{Gm^2}{L^2} \quad (1)$$

$$v = \sqrt{\frac{Gm}{2L}} \quad (2)$$

周期
$$T_{\text{计算}} = \frac{2\pi(L/2)}{v} = \pi L \sqrt{\frac{2L}{Gm}} \quad (3)$$

2) 根据观测结果, 星体的运动周期为

$$T_{\text{观测}} = \frac{1}{\sqrt{N}} T_{\text{计算}} < T_{\text{计算}} \quad (4)$$

这说明双星系统中受到的向心力大于本身的引力, 故它一定还受到其他指向中心的作用力. 按题意这一作用来源于均匀分布的暗物质, 均匀分布在球体内的暗物质对双星系统的作用与一质量等于球内暗物质的总质量 m' 位于中点处的质点相同. 考虑暗物质作用后双星的速度即为观察到的速度 $v_{\text{观}}$, 则有

$$m \frac{v_{\text{观}}^2}{L/2} = \frac{Gm^2}{L^2} + G \frac{mm'}{(L/2)^2} \quad (5)$$

$$v_{\text{观}} = \sqrt{\frac{G(m+4m')}{2L}} \quad (6)$$

因为在轨道一定时, 周期和速度成反比, 由(4)式得

$$\frac{1}{v_{\text{观}}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{1}{v} \quad (7)$$

把(2)、(6)式代入(7)式得

$$m' = \frac{N-1}{4} m \quad (8)$$

设所求暗物质的密度为 ρ , 则有

$$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{L}{2}\right)^3\rho = \frac{N-1}{4}m$$

故

$$\rho = \frac{3(N-1)m}{2\pi L^3} \quad (9)$$

16. 许多观察表明,自然界的周期性变化常会在地球上的动植物身上留下不同的痕迹. 鹦鹉螺是一种 4 亿多年前在地球上繁盛生长的软体动物,它的气室外壳上的波纹生长线数目随其生活的年代不同而不同. 1978 年美国科学家卡姆和普姆庇在研究了不同地质年代的鹦鹉螺壳后,发现现存的 9 个当代鹦鹉螺个体的气室外壳上的生长线都是 30 条左右,而古代 36 例鹦鹉螺化石中,地质年代愈古老,生长线的数目愈少:距今 29 百万年的新生代渐新世的标本上有 26 条;距今 100 百万年的中生代白垩纪的标本上有 22 条;距今 180 百万年的中生代侏罗纪的标本上有 18 条;距今 320 百万年的古生代石炭纪的标本上有 15 条;距今 470 百万年的古生代奥陶纪的标本上只有 9 条. 他们认为这些生长线记录着地球及其周围天体的演变历史,并根据上述数据作了一个大胆的假设:鹦鹉螺外壳上的生长线条数的变化是月球绕地球运动周期随年代变化的反映. 试问:由此假设你能得出关于月球运动的什么结论? 试通过计算说明此结论.

[注] 假设从古至今,地球质量和自转周期以及月球质量都没有发生变化. 也不考虑物理常数的变化.

解析

根据他们的大胆假设,目前鹦鹉螺生长线近似为 30 条的事实,可以认为是月球绕地球运动周期近似是 30 天的反映. 把这一看法推广到任何地质年代(推广的依据是地球、月球质量在这段时间中没有发生变化,也不考虑物理常数的变化),就可以按照动力学规律算出任何地质年代月球绕地球的运动周期.

根据月球、地球质量的巨大差别,可以把它们之间的相对运动简化为月球围绕地球的圆周运动. 根据开普勒第三定律,或万有引力定律和牛顿第二定律可知,月球运动周期 T 和地月之间的距离 L 有下列关系

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{Gm_e}L^3 = kL^3 \quad (1)$$

其中 m_e 是地球质量. 可见比例系数 k 只与地球质量和引力常数有关. 故在题中所给简化模型下,该比例常数也与年代无关,对任何地质年代都成立. 若第 i 个地质年代月球运动周期为 T_i , 该年代的月地间的距离为 L_i , 则有

$$T_i^2 = kL_i^3 \quad (2)$$

设当代的月球绕地球运动的周期为 T_0 , 它们间的距离为 L_0 , 则有

$$L_i = \left(\frac{T_i}{T_0}\right)^{\frac{2}{3}} L_0 \quad (3)$$

由此可算出不同地质年代地月之间的距离, 如下表所示.

年代(10^6 年)	生长线数 T_i	月球-地球距离 L_i (以 L_0 为单位)
渐新世 29	26	0.91
白垩纪 100	22	0.81
侏罗纪 180	18	0.71
石炭纪 320	15	0.63
奥陶纪 470	9	0.45

以年代为横坐标, 月地间的距离为纵坐标, 用上面的数据作图, 结果如图 5-19 所示. 各点大体上在一条直线上. 可以看出, 随着距今年代的增加, 月球和地球之间距离按线性规律减少, 即月球几乎正以恒定的速率远离我们而去. 为了得到月球远离地球的速度, 可在拟合直线上选取相距较远的两点, 例如选 $A_1(100, 0.82)$ 和 $A_2(450, 0.44)$ 两组数据, 可算出月球远离地球的速度 v 的近似值.

$$\bar{v} = -\frac{L_2 - L_1}{t_2 - t_1} = \frac{(0.44 - 0.82)L_0}{(450 - 100) \times 10^6 \text{ a}} \quad (4)$$

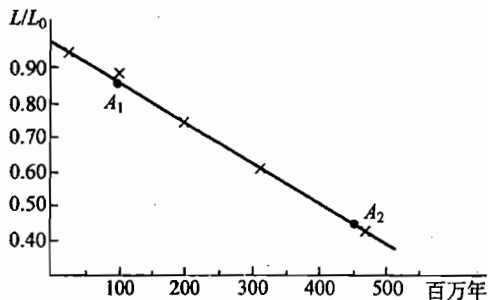


图 5-19

如果取平均月-地距离为 $3.8 \times 10^5 \text{ km}$ (只要知道地球半径即可估算出此值, 因为地月距离就是它的 60 倍. 这正是牛顿当年讨论万有引力时所用的). 这时, 由(4)式可得平均速度的值为

$$\bar{v} = -\frac{0.38}{350} \times 3.84 \times 10^2 = -0.42 \text{ m/a} \quad (5)$$

其中,负号表示距离越来越远,即月球正以每年 0.42m 的速度远离我们而去.

本题的设问是一种研究性的设问,开放性的设问,即没有指明要考生去计算什么,去求什么量,而是要求考生根据这些现象和假设,去探索能得到一些什么结论.这比指明“求月球远离地球运动时的速度”在能力要求上明显不同,有更高的能力要求.考后证实,有不少考生,做此题时感到无从下手,有的考生后来找命题人说:“这道题要求不明确,如果明确指出求月球与地球之间距离的变化,或问月球远离地球运动的速度,我肯定能答出.现在问得不明不白,我不知道你要我求什么”;“我们平时做题,老师总是叮嘱我们,一定要弄清题中已知量是什么,待求量是什么,然后动手做题.现在题目本身的要求就不明确,这不公平”.

从某种意义上来说,做习题的过程都可以而且应该抱着一种探索的态度,用研究问题的方法进行,这有利于培养自己的独立思考和研究能力.相反,如果死抱着广为流传的形式主义很重的、死板的所谓“解题学”、“解题步骤”之类的条条,以它为指导进行学习,从长远作用看,恐怕弊远大于利.

17. 假设银河系的物质在宇宙中呈球对称分布,其球心称为银心.距离银心相等处的银河系质量分布相同.又假定距银心距离为 r 处的物质受到银河系的万有引力和将以 r 为半径的球面内所有银河系物质集中于银心时所产生的万有引力相同.

已知地球到太阳中心的距离为 R_0 ,太阳到银心的距离 $a=1.75 \times 10^9 R_0$,太阳绕银心做匀速率圆周运动,周期 $T=2.4 \times 10^8 \text{a}$.太阳质量为 m_s ,银河系中发亮的物质仅分布在 $r \leq 1.5a$ 的范围内.目前可能测得绕银心运动的物体距银心的距离不大于 $6a$,且在 $a \leq r \leq 6a$ 范围内,物体绕银心运动的速率是一恒量.按上述条件解答:

- 1) 论证银河系物质能否均匀分布.
- 2) 计算银河系中发光物质质量最多有多少.
- 3) 计算整个银河系物质质量至少有多少,其中不发光物质(即暗物质)质量至少有多少.

上述计算结果均用太阳质量 m_s 表示.

解析

1) 假定银河系物质集中分布在 $r \leq 1.5a$ 的球面内,并设其质量为 $m_{1.5a}$,则在 $1.5a \leq r \leq 6a$ 范围内,质量为 m 的物体在银河系物质作用下做圆周运动时,有

$$G \frac{m_{1.5a}m}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

得

$$v = \sqrt{\frac{Gm_{1.5a}}{r}} \propto \sqrt{\frac{1}{r}}$$

即物体绕银心运动的速率 v 与 $\sqrt{\frac{1}{r}}$ 成正比, 与观察的结果不一致.

2) 假定银河系物质均匀分布在 $r \leq 6a$ 的球面内, 可设银河系物质的密度为 ρ , 则质量为 m 的物体在 $r \leq 6a$ 的范围内绕银心做圆周运动时有

$$G \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho m}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}\pi \rho G r^2} \propto r$$

即绕银心运动的速率 v 与离银心的距离 r 成正比, 与观察的结果也不一致.

由以上分析可知, 银河系物质在 $r \leq 6a$ 整个区域中, 不是均匀分布的. 发亮的物质仅分布在 $r \leq 1.5a$ 的球体内, 在 $1.5a \leq r \leq 6a$ 的范围内的物质全部是不发亮的物质, 即所谓“暗物质”. 当然并不排斥在 $r \leq 1.5a$ 的球体内也存在暗物质.

3) 根据太阳绕银心运动的周期 T 和太阳到银心的距离 $r_s = a$, 可求出半径为 a 的球面内的银河系物质的质量 m_a . 以 m_s 表示太阳的质量, v_s 表示太阳绕银心运动的速度, 则有

$$G \frac{m_a m_s}{a^2} = m_s \frac{v_s^2}{a} \quad (1)$$

而

$$v_s = \frac{2\pi a}{T} \quad (2)$$

由此得

$$m_a = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2} \quad (3)$$

当质量为 m 的物体绕银心做半径为 r 的圆周运动时, 有

$$G \frac{m_a m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \quad (4)$$

若 $a \leq r \leq 6a$, 根据观察结果

$$v = v_s \quad (5)$$

由(2)、(3)、(4)、(5)式得

$$m_r = m_a \frac{r}{a} \quad (6)$$

设地球绕太阳运动的周期为 T_0 , $T_0 = 1a$. 则有

$$m_s = \frac{4\pi^2 R_0^3}{GT_0^2} \quad (7)$$

由(3)、(7)两式得

$$m_a = m_s \left(\frac{a}{R_0} \right) \left(\frac{T_0}{T} \right)^2$$

代入有关数据得

$$m_a = (1.75 \times 10^9)^3 \left(\frac{1}{2.4 \times 10^8} \right)^2 m_s = 9.3 \times 10^{10} m_s \quad (8)$$

由(6)、(8)两式,可知银河系中能发亮的物质质量的上限

$$m_{1.5a} = \frac{m_a}{a} \times 1.5a = 1.4 \times 10^{11} m_s \quad (9)$$

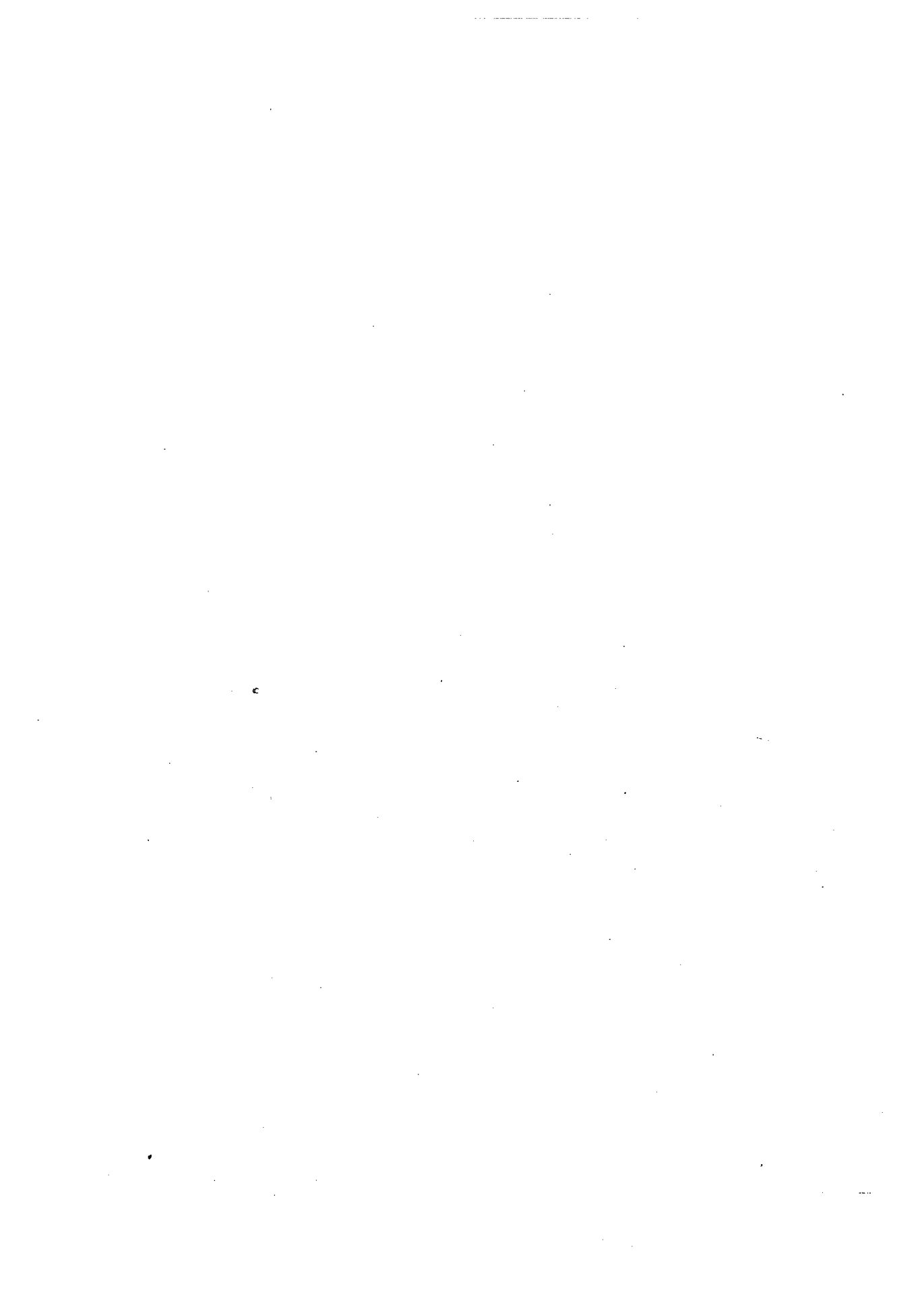
银河系物质质量的下限

$$m_{6a} = \frac{m_a}{a} \times 6a = 5.6 \times 10^{11} m_s \quad (10)$$

其中不发亮物质质量的下限

$$m_{\text{暗}} = m_{6a} - m_{1.5a} = 4.2 \times 10^{11} m_s \quad (11)$$

本题第一段提出的假设并不难接受或理解,第二段是作为已知的事实提供的,而本题所要求回答的问题并不是去解释或论证这些事实,而是要求在与这些事实不发生矛盾的条件下去回答问题.不少考生不知道如何下手,特别是后面几问.这里涉及的基本原理相当单纯,只是万有引力定律和匀速圆周运动时的牛顿定律.困难可能主要发生在如何利用这些事实作为条件对基本方程中的物理量做出限制和进行判断.做题之前,先分析一下这些条件将起什么作用,或许就不至于感到无从下手.



六、振动和波

1. 一物体沿 x 轴在 $x_1 = -A$ 和 $x_2 = A$ 的区间内作简谐振动. 某人对此物体作随机观察, 则该物体出现在微小间隔 $0 \leq x \leq a$ 中的概率是_____.

解析

$$\frac{a}{\pi A}$$

当物体做简谐振动且处在 $0 \leq x \leq a$ 的微小间隔中时, 对应的参考点落在参考圆上长度为 Δs 的两小段圆弧中, 这两小段圆弧在参考圆上的位置如图 6-1 所示. 由于参考点在参考圆上做匀速率运动, 它在参考圆上各点出现的机会均等, 所以随机观察到它在半径为 A 的圆周上弧长为 Δs 两小段圆弧中出现的概率是 $\frac{2\Delta s}{2\pi A}$. 由图可以看出, 因为 Δs 很小且紧靠 y 轴, 所以 $\Delta s = a$, 因此物体出现在微小间隔 $0 \leq x \leq a$ 中的概率是 $\frac{a}{\pi A}$.

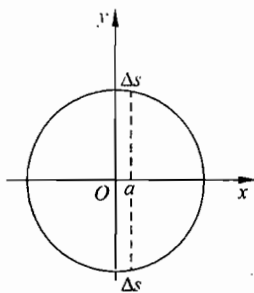


图 6-1

在微小间隔 $0 \leq x \leq a$ 中出现的概率应当是振动物体经过这一小间隔所用的时间 $2\Delta t$ (往返) 与振动周期 T 之比, 即

$$P = \frac{2\Delta t}{T} = \frac{2\Delta t}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\omega\Delta t}{\pi}$$

ω 为振动的圆频率. 因为 a 很小, 且在 $x=0$ 附近, 令 v_0 表示过 $x=0$ 时的速度 (最大), 则可认为 $\Delta t = \frac{a}{v_0}$. 又可以证明 $v_0 = \omega A$, 由此可得

$$P = \frac{\omega a}{v_0 \pi} = \frac{a}{\pi A}$$

本来 $v_0 = \omega A$ 是要由微积分证明的, 上面利用参考圆可更形象地看出这一关系.

2. 1978年在湖北省随县发掘了一座战国早期(距今大约2400多年前)曾国国君的墓葬——曾侯乙墓,出土的众多墓葬品中被称为中国古代文明辉煌的象征的是一组青铜铸造的编钟乐器(共64件).敲击每个编钟时,能发出音域宽广、频率准确的不同音调.与铸造的普通圆钟不同,圆钟的横截面呈圆形,而每个编钟的横截面均呈杏仁状.图6-2为圆钟的截面,图6-3为编钟的截面,分别敲击两个钟的A、B、C和D、E、F三个部位,则圆钟可发出_____个基频的音调,编钟可发出_____个基频的音调.

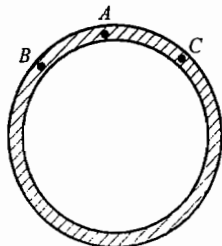


图 6-2

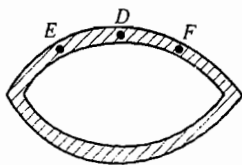


图 6-3

解析

1,2.

要对本题的答案从物理上作出解释,涉及的知识比较多,但“对称性”能帮助我们做出正确的判断.圆钟的横截面是一圆,圆周上A、B、C三点相对圆面是没有差别的,击A、击B或击C发出的声音不会有什么差别,故只可能发出1个基频的音调.编钟的横截面呈杏仁状,有两个稍尖的端点.E、F两点中一点离一个尖端较近,另一点离另一尖端较近,但两个尖端是相同的.所以,相对杏仁状截面,这两点的位置并无差别,但与D点的位置不同.故击E、F发出的声音是相同的,但与击D点发出的声音不同,所以编钟可发出2个基频的音调.

3. 如图6-4所示,质量可以忽略的弹簧上端固定,下端悬挂一质量为 m 的物体,物体沿竖直方向做振幅为 a_0 的小振幅简谐振动(图为悬挂后的平衡位置).

取平衡位置 O 处为原点,位移 x 向下为正,则在下列诸图中,

- 1) 图_____是描述物体的速度随 x 的变化关系.
- 2) 图_____是描述加速度随 x 的变化关系.
- 3) 图_____是描述弹簧的弹性势能随 x 的变化

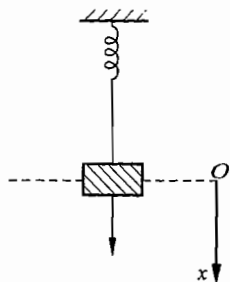


图 6-4

关系.

4) 图_____是描述总势能(重力势能与弹性势能)随 x 的变化关系(重力势能取原点处为零).

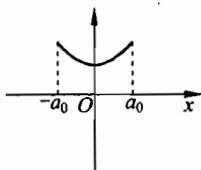


图 6-5

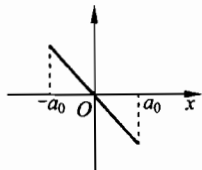


图 6-6

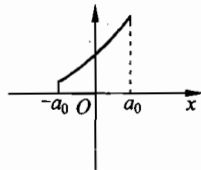


图 6-7

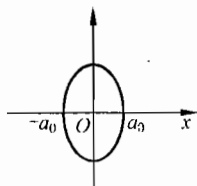


图 6-8

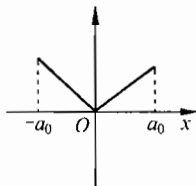


图 6-9

解析

1) 6-8 2) 6-6 3) 6-7 4) 6-5

根据简谐振动加速度与位移的关系、速度与位移的关系不难对 1)、2) 做出判断. 因为平衡时已有弹性势能, 振动时在 $x > 0$ 时弹性势能增加, $x < 0$ 时减小, 因此弹性势能随 x 的变化如图 6-7 所示. 由能量守恒可正确对第 4) 问做出判断.

以上的判断是通过对物体运动特征的定性分析, 排除不可能的图形, 找出最接近实际情况的图形而作出的. 例如, 物体在振动过程中, 当 $x = \pm a_0$ 时, 即位移为最大时, 物体的速度 $v = 0$, 而当 $x = 0$, 即经过平衡位置时, 速度的数值达到最大, 方向可以是沿 x 方向, 也可以是沿 x 的反方向. 显然题目给出的 5 个图中, 只有图 6-8 能给出以上的特性, 故可判定图 6-8 是描述物体的速度随 x 的变化关系. 至于速度与 x 的变化关系为什么可用一椭圆来表示而不是用其他形状的图线如圆等来表示, 仅有定性分析是无法作出判断的, 只是题目给出的图中, 只有椭圆最接近速度与 x 的关系.

当物体位于平衡位置时, 即 $x = 0$ 时, 加速度为零, 当离开平衡位置的位移增大时, 加速度亦增大. 图 6-6 与图 6-9 都能反映这种特性, 但图 6-9 给出的加速度的方向与位移的方向即 x 为正或为负无关, 与实际不符, 所以只有图 6-6 能描述加速度随 x 的变化关系.

当物体处在平衡位置时,即 $x=0$ 时,弹簧已处在拉长状态,具有一定的弹性势能,图 6-5 和图 6-7 都能反映这一特征.随着 x 的增大,弹簧被拉得更长,弹性势能将增加,而当 x 为负时,弹簧的拉长量减小,弹性势能变小.因为题干已说明振动的振幅比较小,当 x 为负时,弹簧不可能被压缩得很紧,故 x 为负时,弹性势能将随 $|x|$ 的增大而减小,只有图 6-7 能反映这些特性,所以图 6-7 是描述弹簧的弹性势能随 x 的变化关系.

当物体离开平衡位置的位移最大,即 $x=\pm a_0$ 时,动能等于零,振动系统的势能最大,图 6-5 与图 6-9 都能反映这一特征.但当物体位于平衡位置时, $x=0$,物体的重力势能虽为零,但弹性势能不等于零,即总势能不为零,图 6-9 不能反映这一特征,故只有图 6-5 才能描述总势能随 x 的变化关系.

以上的分析,对找出试题的正确答案已足够了,这种对问题进行定性分析或同时再辅以半定量的分析是一种非常重要的分析问题的方法,特别在遇到一些新问题、新现象时,总是首先对问题进行定性或半定量的分析,以便认识、理解新问题、新现象的最本质方面的特征.所谓新问题或新现象就是那些我们仅掌握少量有关它们的信息的问题或现象,要对它们进行严格的、定量的分析的条件尚未具备,而定性或半定量的分析能帮助我们深入问题去寻找有关的信息,为对问题进行定量的严格的分析创造条件.对问题进行定性与半定量的分析不是认识过程的最终阶段,应创造条件对问题进行定量分析,在定量分析的过程中,有可能补充、修正从定性和半定量分析中获得的某些结论.

本题涉及的问题也可以进行定量的分析和讨论.也许学生都牢记了“简谐振动”是在弹性力或具有弹性力性质的所谓准弹性力作用下产生的运动,而本题中的物体是在弹簧的弹力和重力 mg 共同作用下运动,首先要研究一下弹力与重力的合力是否具有弹性力的性质.因为重力并不具备弹性力的性质.为了解决这一问题,我们用 l_0 表示弹簧的原长,以 l 表示物体悬挂在弹簧下端并达到平衡时弹簧的长度,用 k 表示弹簧的劲度系数,如图 6-10 所示.当物体处在平衡位置即 $x=0$ 时,作用于物体的合力等于零,即有

$$mg - k(l - l_0) = 0 \quad (1')$$

当物体的位移为 x 时,作用于物体的合力为

$$F = mg - k(l + x - l_0) \quad (2')$$

由(1')、(2')两式得

$$F = -kx \quad (3')$$

(3')式表明,作用于物体的合力具有弹性力的性质,物体在合力 F 作用下的运动是简谐振动.由牛顿第二定律,物体的加速度

$$a = \frac{F}{m} = -\frac{k}{m}x \quad (4')$$

故加速度 a 随 x 的变化关系应由图 6-6 表示.

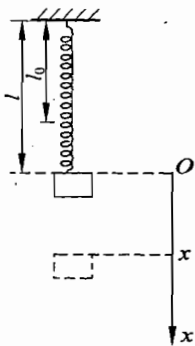


图 6-10

简谐振动的位移 x 与时间 t 的关系为

$$x = a_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (5')$$

其中 a_0 为振幅, ω 为圆频率, $\omega^2 = \frac{k}{m}$, φ 为振动的初相位. 由表示简谐振动的参考圆可以求得振动的速度 v 与时间 t 的关系为

$$v = -a_0 \omega \sin(\omega t + \varphi) \quad (6')$$

分别对(5')式、(6')式的等号两边平方,再相加可得

$$v^2 + \omega^2 x^2 = a_0^2 \omega^2$$

或有

$$\frac{v^2}{a_0^2 \omega^2} + \frac{x^2}{a_0^2} = 1 \quad (7')$$

表示速度 v 与 x 的关系为一椭圆方程.

当物体的位移为 x 时,弹簧的弹性势能

$$E_{pk} = \frac{1}{2} k (l + x - l_0)^2$$

注意到(1')式有

$$E_{pk} = \frac{1}{2} mg (l - l_0) + mgx + \frac{1}{2} kx^2 \quad (8')$$

当物体位于平衡位置,即 $x=0$ 时, $E_{pk} = \frac{1}{2} mg (l - l_0)$. 而 $E_{pk}(x) > E_{pk}(-x)$.

振动系统的总势能

$$E_p = E_{pk} - mgx = \frac{1}{2} mg (l - l_0) + \frac{1}{2} kx^2 \quad (9')$$

是对纵坐标对称的抛物线,顶点位于 $E_p = \frac{1}{2} mg (l - l_0)$ 处.

4. 一般人能听到的声音的频率大致在什么范围内? 视觉暂留约为多长时间?

解析

$$16(\text{或 } 20)\text{Hz} \sim 2 \times 10^4 \text{Hz}; \frac{1}{16}(\text{或 } 0.1)\text{s}.$$

在学习物理的过程中,注意并记住一些重要物理量的数值或数值的量级是非常重要的,如真空中的光速、原子大小的数量级等. 因为一些物理量的数量级有时能帮助我们理解,以及发现问题和提出问题. 例如,我们都知道核力是短程力,短到什么程度? 相距一厘米,够不够短? 一毫米呢? ……知道并记住核力只在 $2.0 \times 10^{-15} \text{m}$ 的短程

内起作用,而质子、中子的半径约为 $0.8 \times 10^{-15} \text{ m}$ 这些数据,才有助于真实地感受核力的短程力性质.曾有人问某一位物理学家:“您认为事业成功需具备什么条件?”这位物理学家的回答是:“思考+勤奋+数量级的估计.”足见“数量级”对他取得成就所起的作用.在试题中考察学生是否知道某些重要物理量的量级是合理的、科学的,世界各国的考试题中不乏这类试题.只是在我国,统一制定的“考试规则”不允许有这类试题,所以高考就不会考这类内容,其他考试当然也就不会有这类内容了.这种“考试规则”显然是出于应试的目的.但考试规则不应成为学生的学习规则,一个有独立见解的学生,在学习过程中不应该受某些规则的限制.学生应该从自己的实际情况出发,认为哪些该学的,就大胆去学,哪些该记住的,就把它记下来,形成自己主动的、独立的学习方法和学习习惯.相反,一个学生如果在学习过程中甘心去接受各种规则的约束,就很难有创新意识,久而久之,也就不会有创新能力了.对某些学生,特别是有潜力的学生,更不应受某些考试规则的制约,否则创新精神是要落空的.

5. 在平缓的海滩上会看到,不论海中的波向什么方向传播,当到达岸边时总是大约沿着垂直于岸的方向传来.这怎样解释?

[提示] 水波在浅水中传播时,水越浅,波速越小.

解析

因为水波在浅水中传播时,水越浅,波速越小.当海中的波传播到近岸处时,同一波前上先靠近海岸部分的波速先慢下来,后靠近岸的部分后慢下来,结果使波前转向与岸边平行方向,即波沿着与岸垂直的方向传播.这与光向折射率逐渐增大的媒质中传播时,由于波速减小,折射角会逐渐减小,传播方向逐渐靠近法线相似.

6. 某地有一大型摆钟,其走时由钟摆的摆动来控制.若将钟摆看作单摆,当摆长为 l_1 时,摆钟指示经过时间为 24h 的时候,比标准钟指示快 12min.要使摆钟走时正确,其摆长应调到多大?

解析

钟摆摆动一次,指针相应地转过一定的角度,这一角度的大小是恒定的,与摆长无关.因此,在摆钟的指针指示已经过 24h 这段时间内,钟摆摆动的次数也是恒定的,设为 N .用 l 表示摆长应调到的值,用 T_1 和 T 分别表示摆长为 l_1 和 l 时钟摆的周期,则由题意可知

$$\begin{aligned} NT_1 &= 24 \times 3600s - 12 \times 60s \\ NT &= 24 \times 3600s \end{aligned} \quad (1)$$

由单摆公式可知

$$\sqrt{l_1}/\sqrt{l} = T_1/T \quad (2)$$

由(1)、(2)两式可得

$$l = 1.017l_1$$

解决这个问题的关键是要弄清钟摆摆动一次指针所转过的角度是恒定的,与摆长无关;但转过这一角度所需的时间,则与摆长有关系.

7. 将一根长为 100 多厘米的均匀弦线,沿水平的 x 轴放置,拉紧并使两端固定.现对离固定的右端 25cm 处(取该处为原点 O ,如图 6-11 所示)的弦上一点施加一个沿垂直于弦线方向(即 y 轴方向)的扰动,其位移随时间的变化规律如图 6-12 所示.该扰动将沿弦线传播而形成波(孤立的脉冲波).已知该波在弦线中的传播速度为 2.5cm/s,且波在传播和反射过程中都没有能量损失.

1) 试在图 6-11 中准确地画出自 O 点沿弦向右传播的波在 $t=2.5s$ 时的波形图.

2) 该波向右传播到固定点时将发生反射,反射波向左传播.反射点总是固定不动的.这可看成是向右传播的波和向左传播的波相叠加,使反射点的位移始终为零.由此观点出发,试在图 6-11 中准确地画出 $t=12.5s$ 时的波形图.

3) 在图 6-11 中准确地画出 $t=10.5s$ 时的波形图.

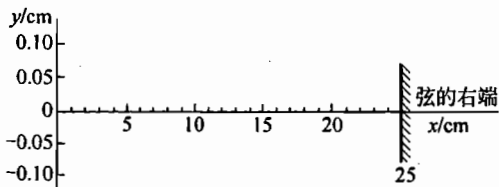


图 6-11

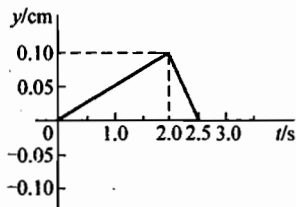


图 6-12

解析

$t=2.5s$ 、 $12.5s$ 和 $10.5s$ 时的波形图见图 6-13.

在求解本题时,首先应正确理解图 6-12 的意义.图 6-12 给出的是在 $t=0$ 到 $t=2.5s$ 这

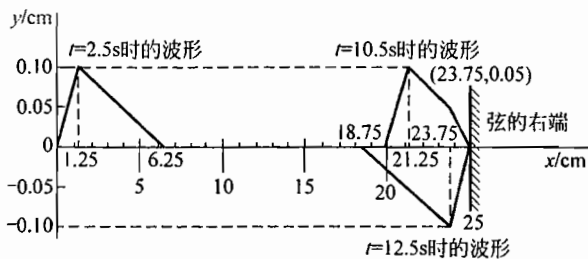


图 6-13

段时间内弦线上的位于坐标原点 O 处的质元的振动状态随时间变化的关系：在 $t=0$ 时刻，该质元位于平衡位置并开始向上运动，称此运动状态为 a ； $t=1.0\text{s}$ 时刻，该质元离开平衡位置的距离为 0.05cm ，并继续向上运动，称此运动状态为 b ；在 $t=2.0\text{s}$ 时刻，该质元离开平衡位置的距离为 0.10cm ，并开始向下运动，称此运动状态为 c ；在 $t=2.5\text{s}$ 时刻，该质元回到平衡位置，称此状态为 d 。 a 、 b 、 c 、 d 是所考查的质元在 $t=0$ 到 $t=2.5\text{s}$ 时间内所出现过的一系列振动状态中的 4 个特定的状态，如图 6-14 所示。每个振动状态都以 $v=2.5\text{cm/s}$ 的速度沿弦线向右传播，早出现的状态传播得远一点，晚出现的状态传播得近一点。

第 1) 小问要求的实际上就是在 $t=2.5\text{s}$ 时刻弦线上各质元的振动状态。在 $t=2.5\text{s}$ 时刻，状态 a 传播的时间为 2.5s ，传播的距离 $x_a=2.5 \times 2.5\text{cm}=6.25\text{cm}$ ，故在弦线上坐标为 x_a 的质元位于平衡位置并开始向上运动；状态 b 的传播时间为 $(2.5-1.0)\text{s}=1.5\text{s}$ ，传播的距离 $x_b=2.5 \times 1.5\text{cm}=3.75\text{cm}$ ，故在弦线上的坐标为 x_b 处的质元离开平衡位置的距离为 0.05cm ，并继续向上运动；状态 c 的传播时间为 $(2.5-2.0)\text{s}=0.5\text{s}$ ，传播的距离 $x_c=2.5 \times 0.5\text{cm}=1.25\text{cm}$ ，故弦线上坐标为 x_c 的质元离开其平衡位置的距离为 0.10cm ，并开始向下运动；状态 d 出现后在 $t=2.5\text{s}$ 时尚未来得及传播，传播距离为 $x_d=0$ ，故弦线上位于原点 O 的质元仍在其平衡位置。弦线上的坐标大于 x_a 的所有质元都位于各自的平衡位置上，因为在 $t=2.5\text{s}$ 时，振动尚未传到这些质元。由以上分析，便得到 $t=2.5\text{s}$ 的波形图如图 6-15 所示。

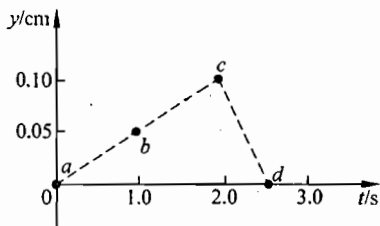


图 6-14

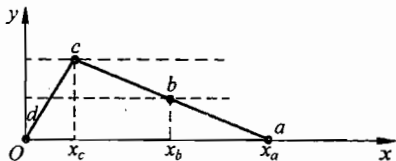


图 6-15

可以算出,状态 a 在 $t = \frac{25}{2.5} \text{s} = 10 \text{s}$ 时刻传播到固定点. 若想像固定点不存在, 假想弦线超过其真实的固定点 O' 而向右无限延长, 则在 $t > 10 \text{s}$ 的某时刻, 状态 a 将传播到弦线的假想部分的 A' 处, 脉冲波形的一部分将超过固定点, 犹如固定点不存在一样, 如图 6-16 所示. 实际上, 固定点 O' 是存在的, 状态传播到 O' 时被反射, 并以同样的速度 v 向左传播, 故实际上在所考查的时刻 (即 $t > 10 \text{s}$ 的某时刻), 状态 a 因被 O' 点反射而传播到弦线上的 A 点, A 与 A' 相对 O' 是对称的. 由于反射, 进入弦线的假想部分的脉冲波形部分都返回弦线. 因为反射点的位移始终为零, 被反射返回弦线并向左传播的那部分波形应是图 6-16 中的实线 Ae' , 不是虚线 Ae . 在 $t = 12.5 \text{s}$, 整个脉冲刚好全部进入假想弦, 实际上就是整个脉冲刚好全部被反射. 图 6-17 中用虚线表示的脉冲就是在 $t = 12.5 \text{s}$ 时刻在假想弦中的波形, 实线表示的脉冲就是此时刻被反射后的脉冲, 也就是此时刻的波形图.

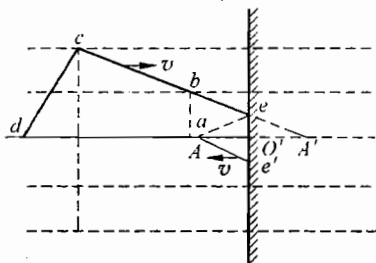


图 6-16

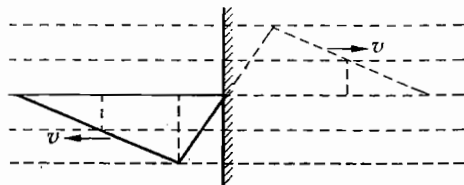


图 6-17

在 $t = 10.5 \text{s}$ 时刻, 状态 a 传播的距离为 $2.5 \times 10.5 \text{cm} = 26.25 \text{cm}$, 即状态 a 已超过固定点进入假想弦, 离开固定点的距离为 $(26.25 - 25.0) \text{cm} = 1.25 \text{cm}$, 实际上状态 a 已被固定点 O' 反射, 返回到坐标 $x_a = (25.0 - 1.25) \text{cm} = 23.75 \text{cm}$ 处, 如图 6-18 所示, 这时的波形是由入射波的波形 $ebcd$ 与反射波的波形 $O'e'a$ 叠加而成, 即图 6-18 中的粗线段 $O'bcd$.

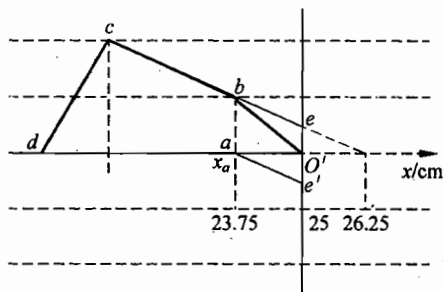


图 6-18

8. 如图 6-19 所示,在水平光滑桌面的中心有一光滑小孔 O . 一条劲度系数为 k 的轻而细的弹性绳穿过小孔 O . 绳的一端固定于 A 点(A 点位于小孔正下方),另一端系一质量为 m 的质点. 弹性绳自然长度等于 OA . 现将质点沿桌面拉至 B 处(设 $OB=l$),并将质点沿垂直于 OB 的方向以速度 v_0 沿桌面抛出. 试求:

- 1) 质点绕 O 点转过 90° 至 C 点所需的时间.
- 2) 质点到达 C 点时的速度及 C 点至 O 点的距离.

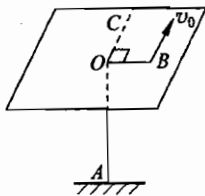


图 6-19

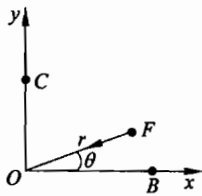


图 6-20

解析

根据胡克定律,质点在其运动轨迹上任一位置处所受弹力的大小为 $F=kr$,其中 r 为由 O 点至质点所在位置的距. 质点受力 F 的方向指向 O 点,取 OB 为 x 轴, OC 为 y 轴,由图 6-20 可得:

$$F_x = -F \cos \theta = -kr$$

$$F_y = -F \sin \theta = -ky$$

可见,质点在 x 、 y 方向都受弹性回复力作用. 由此可知,质点在 x 方向、 y 方向的分运动都是简谐振动,平衡位置均为 O 点,其周期也相同,均为

$$T = 2\pi\sqrt{m/k}$$

1) 质点绕 O 运动至 C 点,对于 x 方向的简谐振动来说,质点从最大位移位置到平衡位置,恰经历 $1/4$ 周期,所以

$$t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

2) 由题给条件可知, x 方向的简谐振动在开始($t=0$)时, $x=l$, $v_x=0$,这表明 x 方向简谐振动的振幅 $A_x=l$. 利用参考圆方法,令一假想质点以 O 为圆心,以 A_x 为半径做匀速圆周运动,其角速度为 $\omega=2\pi/T=\sqrt{k/m}$. 质点在 x 轴上的投影即是简谐振动中的位置坐标 x ,质点做圆周运动的速度在 x 轴上的投影即是简谐振动速度. 图 6-21 表示假想质点 t 时刻在参考圆上的位置及速度,可知

$$x = l \cos \omega t = l \cos \sqrt{k/m} t$$

$$v_x = -\omega l \sin \omega t = -\sqrt{k/m} l \sin \sqrt{k/m} t$$

质点运动到 C 点时 $x=0, t=T/4=\pi\sqrt{k/m}/2$, 将 t 代入上式, 有

$$v_x = -\sqrt{k/m} l$$

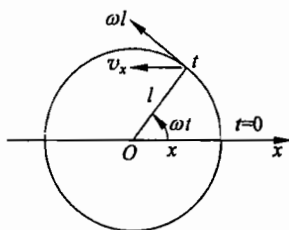


图 6-21

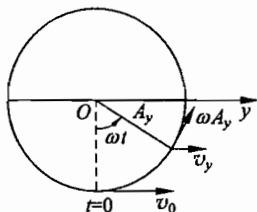


图 6-22

对于 y 方向的简谐振动, 由题给条件可知, $t=0$ 时, $y=0, v_y=v_0$. 设振幅为 A_y , 则利用图 6-22 的参考圆可给出

$$y = A_y \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \omega t\right) = A_y \sin \omega t = A_y \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

$$v_y = \omega A_y \cos \omega t = \sqrt{\frac{k}{m}} A_y \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

质点运动到 C 点时, $t=\pi\sqrt{m/k}/2$, 代入上式

$$y = A_y, \quad v_y = 0$$

从图 6-22 可知, $\omega A_y = v_0$, 得

$$A_y = v_0 / \omega = \sqrt{m/k} \cdot v_0$$

由以上可得质点到 C 点时的速度分别为

$$v_C = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v_x = \sqrt{\frac{k}{m}} l$$

其方向为沿负 x 轴方向. C 点至 O 点的距离为

$$\overline{OC} = A_y = \sqrt{\frac{m}{k}} v_0$$

本题讨论的是变力作用下质点的运动. 作用于质点的力在 x 方向和 y 方向的分力都是弹性恢复力, 故质点在 x 方向和 y 方向的分运动都是简谐振动. 一般形式为:

$$x = A_x \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$y = A_y \cos(\omega t + \varphi_2)$$

式中

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$A_x, \varphi_1; A_y, \varphi_2$ 是两个待定的常数, 分别为简谐振动的振幅和初相位, 由初始条件即 $t=0$ 时刻的运动状态决定. 题目给出了初始条件: $t=0$ 时, $x=l, v_x=0; y=0, v_y=v_0$. 但仅知道 x, y 还不够, 还应找出速度分量 v_x 和 v_y 随时间 t 的变化关系. 在由 x 求 v_x 、由 y 求 v_y 时, 我们利用了参考圆方法, 避开了高等数学. 求得速度分量的表示式分别为

$$v_x = -A_x \omega \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$v_y = -A_y \omega \sin(\omega t + \varphi_2)$$

通过题给的初始条件可求得

$$A_x = l, \quad \varphi_1 = 0$$

$$A_y = v_0/\omega, \quad \varphi_2 = \frac{3}{2}\pi$$

于是使得

$$x = l \cos \omega t$$

$$y = v_0/\omega \sin \omega t$$

值得注意的是, 参考圆并非质点运动的轨道. 参考圆的作用是帮助我们通过简谐振动的位移求得简谐振动的速度. 在本题中, 质点运动的轨迹不是圆, 而是椭圆. 由 x 和 y 的表达式消去 t , 使得轨迹方程

$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{v_0^2/\omega^2} = 1$$

椭圆的长半轴是 l , 短半轴是 v_0/ω . 在运动过程中, 质点到 O 点的距离 r 即位置矢量的大小以及位置矢量与 x 轴的夹角 θ 都随时间变化. 即有

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{l^2 + \left(\frac{v_0^2}{\omega^2} - l^2\right) \sin^2 \omega t}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{v_0/\omega}{l} \tan \omega t$$

当 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 即质点到达 C 点时

$$r = \overline{OC} = v_0/\omega$$

$$\tan \omega t = \tan \frac{\pi}{2}$$

$$t = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\omega} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}}$$

这便是试题所要求的.

9. 两质量同为 m 的薄木块, 用一条质量可以忽略, 劲度系数为 k 的弹簧相连, 置于靠墙的光滑水平地面上 (如图 6-23 所示). 若先把弹簧压缩 d_0 , 然后突然释放.

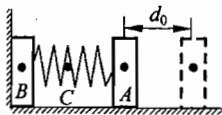


图 6-23

1) 试论述木块 B 离墙后, 两木块相对于它们的中点 C 将做什么运动?

2) 试求出反映此运动特征的主要物理量.

[提示] 相对地面做匀速直线运动的参照系, 牛顿定律和机械能守恒定律仍然成立.

解析

1) 考虑两木块与弹簧这一系统. 在弹簧由压缩状态到恢复原长的过程中, 外力做的功为零, 又无机械能损耗, 系统的机械能守恒. 设此过程木块 A 的末速度为 v_0 (图 6-24), 则有

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}kd_0^2 \quad (1)$$

即

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}d_0 \quad (2)$$

在弹簧恢复原长以后, B 对墙再也没有压力, 因而墙壁的反作用也为零, 系统在水平方向的动量守恒. 设木块 A、B 的速度分别为 v_A 和 v_B (图 6-25), 则有

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v_0 \quad (3)$$

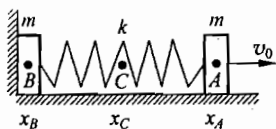


图 6-24

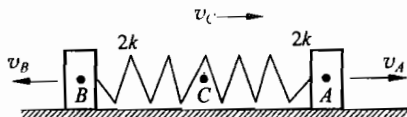


图 6-25

注意到 $m_A = m_B = m$, 且 C 的坐标 $x_C = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$ 这一关系任何时刻都是成立的, 可知

$$v_C = \frac{1}{2}(v_A + v_B)$$

于是由(3)式得

$$v_C = \frac{1}{2}v_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}d_0$$

即 C 点的速度为常量, 说明这一点的运动是匀速直线运动.

选以 C 为原点, 且相对于 C 静止的参照系 (称为 C 参照系), 牛顿定律仍然成立. 当弹簧的伸长为 d 时, A 所受的弹性力为 $F_A = -kd$, 在以 C 为原点的参照系中, A 离开其平衡位置的位移 $x'_A = \frac{1}{2}d$, 因而 $F_A = -2kx'_A$. 同理, B 所受的力为 $F_B = -2kx'_B$, x'_B 为在 C 参照系中 B 离开其平衡位置的位移. 由此可见, A、B 都是在劲度系数为 $2k$ 的弹性力作用下运动, 因而可断定 A、B 相对于 C 都是做简谐振动.

2) 在 C 参照系中, 既然相同质量 m 的 A、B 两木块都是在劲度系数为 $2k$ 的弹性力作用下做简谐振动, 故其振动频率同为:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

振幅 a 则可通过 C 参照系中机械能守恒关系求得:

在 B 离墙的最初一瞬间, 弹簧处于自由状态, 因而弹性势能为零. 此时木块 A 、 B 相对于 C 参照系的速度分别为

$$v'_A = v_0 - v_C = \frac{1}{2}v_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}d_0 \quad (\text{方向向右}) \quad (4)$$

$$v'_B = v - v_C = -\frac{1}{2}v_0 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}d_0 \quad (\text{方向向左})$$

系统相对于 C 参照系的总机械能为

$$\begin{aligned} E_C &= \frac{1}{2}mv_A'^2 + \frac{1}{2}mv_B'^2 \\ &= \frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(-\frac{v_0}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}mv_0^2 = \frac{1}{4}kd_0^2 \end{aligned}$$

此后 A 、 B 各自相对于 C 参照系沿反方向运动把弹簧拉长, 直至它们相对静止. 设此时弹簧的伸长为 l , 则由机械能守恒(对 C 参照系)可知

$$E_C = \frac{1}{2}kl^2 = \frac{1}{4}kd_0^2$$

$$l = \frac{\sqrt{2}}{2}d_0$$

振幅

$$a = \frac{l}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}d_0$$

若取 B 离墙的最初一瞬间(弹簧处于自由状态)为计时原点, 并在 C 参照系中取坐标系以 A 、 B 的平衡位置 O_A 、 O_B 分别为 A 、 B 的坐标原点, 坐标轴 x' 正向水平向右, 则 A 、 B 两振子做余弦简谐振动的初相位 φ_A 、 φ_B 可由参考圆定出(图 6-26), 分别为:

$$\varphi_A = 3\pi/2, \quad \varphi_B = \pi/2$$

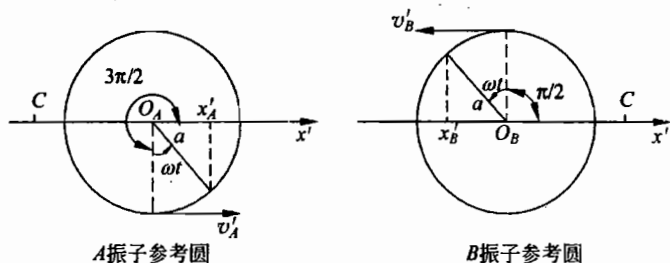


图 6-26

此题考查学生对于动量守恒定律、机械能守恒定律、简谐振动的动力学与运动学分析的掌握深度及灵活运用(特别是换用参照系)能力,是一个综合性的考查题.解题时,要能看出在 B 靠着墙而弹簧恢复原长的这段时间内,系统机械能守恒(动量不守恒,所以才能弹开),从而求出在此过程中 A 的末速度;也要能看出在弹簧恢复原长时, B 将开始离开墙,而此后系统的运动中动量与机械能都守恒,并根据动量守恒求出 C 点的速度,证明 C 点的运动为匀速直线运动.在此之后就要换用 C 参照系,分析两物体相对于 C 参照系的运动,求出两物体做简谐振动的频率及开始时系统的总机械能,从而根据机械能守恒求出两物体的振幅,并分别根据两物体的平衡位置与初速度求出两物体振动的初相位.在解此题时,任何概念模糊及思路不清晰的地方都会有所反映,导致错误.

10. 有人提出了一种不用火箭发射人造地球卫星的设想.其设想如下:沿地球的一条弦挖一通道,如图 6-27 所示.在通道的两个出口处 A 和 B ,分别将质量为 m_0 的物体和质量为 m 的待发射卫星同时自由释放.只要 m_0 比 m 足够大,碰撞后,质量为 m 的物体,即待发射的卫星就会从通道口 B 冲出通道;设待发卫星上有一种装置,在待发卫星刚离开出口 B 时,立即把待发卫星的速度方向变为沿该处地球切线的方向,但不改变速度的大小.这样待发卫星便有可能绕地心运动,成为一个人造卫星.若人造卫星正好沿地球表面绕地心做圆周运动,则地心到该通道的距离为多少?已知 $m_0 = 20m$,地球半径 $R_0 = 6400\text{km}$.假定地球是质量均匀分布的球体,通道是光滑的,两物体间的碰撞是弹性的.

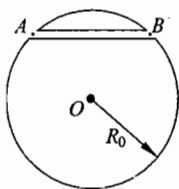


图 6-27

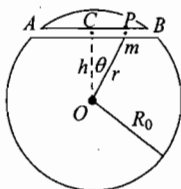


图 6-28

解析

位于通道内、质量为 m 的物体距地心 O 为 r 的 P 点(图 6-28)时,它受到地球的引力可以表示为

$$F = \frac{Gm'_E m}{r^2} \quad (1)$$

式中 m'_E 是以地心 O 为球心、以 r 为半径的球体所对应的那部分地球的质量,若以 ρ 表示

地球的密度,此质量可以表示为

$$m'_E = \frac{4}{3}\rho\pi r^3 \quad (2)$$

于是,质量为 m 的物体所受地球的引力可以改写为

$$F = \frac{4}{3}\pi G\rho mr \quad (3)$$

作用于质量为 m 的物体的引力在通道方向的分力的大小为

$$F' = F\sin\theta \quad (4)$$

$$\sin\theta = \frac{x}{r} \quad (5)$$

θ 为 r 与通道的中垂线 OC 间的夹角, x 为物体位置到通道中点 C 的距离,力 F' 的方向指向通道的中点 C . 在地面上物体的重力可以表示为

$$mg = \frac{Gm_E m}{R_0^2} \quad (6)$$

式中 m_E 是地球的质量. 由上式可以得到

$$g = \frac{4}{3}\pi G\rho R_0 \quad (7)$$

由以上各式可以求得

$$F' = \frac{mg}{R_0}x \quad (8)$$

可见, F' 与弹簧的弹力有同样的性质,相应的“劲度系数”为

$$k = \frac{mg}{R_0} \quad (9)$$

物体将以 C 为平衡位置做简谐振动,振动周期 $T = 2\pi\sqrt{R_0/g}$. 取 $x=0$ 处为“弹力势能”的零点,设位于通道出口处的质量为 m 的静止物体到达 $x=0$ 处的速度为 v_0 ,则根据能量守恒,有

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}k(R_0^2 - h^2) \quad (10)$$

式中 h 表示地心到通道的距离,解以上有关各式,得

$$v_0^2 = \frac{R_0^2 - h^2}{R_0}g \quad (11)$$

可见,到达通道中点 C 的速度与物体的质量无关.

设想让质量为 m_0 的物体静止于出口 A 处,质量为 m 的物体静止于出口 B 处,现将它们同时释放,因为它们的振动周期相同,故它们将同时到达通道中点 C 处,并发生弹性碰撞. 碰撞前,两物体速度的大小都是 v_0 ,方向相反,刚碰撞后,质量为 m_0 的物体的速度

为 v' , 质量为 m 的物体的速度为 v , 若规定速度方向由 A 向 B 为正, 则有

$$m_0 v_0 - m v_0 = m_0 v' + m v \quad (12)$$

$$\frac{1}{2} m_0 v_0^2 + \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m_0 v'^2 + \frac{1}{2} m v^2 \quad (13)$$

解(12)式和(13)式, 得

$$v = \frac{3m_0 - m}{m_0 + m} v_0 \quad (14)$$

质量为 m 的物体是待发射的卫星, 令它回到通道出口 B 处时的速度为 u , 则有

$$\frac{1}{2} k(R_0^2 - h^2) + \frac{1}{2} m u^2 = \frac{1}{2} m v^2 \quad (15)$$

由(14)、(15)、(16)式和(9)式解得

$$u^2 = \frac{8m_0(m_0 - m)}{(m_0 + m)^2} \frac{R_0^2 - h^2}{R_0} g \quad (16)$$

u 的方向沿着通道. 根据题意, 卫星上的装置可使 u 的方向改变成沿地球 B 处的切线方向, 如果 u 的大小恰能使小卫星绕地球做圆周运动, 则有

$$G \frac{m_E m}{R_0^2} = m \frac{u^2}{R_0} \quad (17)$$

由(16)、(17)式并注意到(6)式, 可以得到

$$h = \frac{R_0}{2} \sqrt{\frac{7m_0^2 - 10m_0 m - m^2}{2m_0(m_0 - m)}} \quad (18)$$

已知 $m_0 = 20m$, 则得

$$h = 0.925R_0 = 5920\text{km} \quad (19)$$

11. 三根长度均为 $l=2.00\text{m}$ 、质量均匀的直杆, 构成一正三角形框架 ABC . C 点悬挂在一光滑水平转轴上, 整个框架可绕转轴转动. 杆 AB 是一导轨, 一电动玩具松鼠可在导轨上运动, 如图 6-29 所示. 现观察到松鼠正在导轨上运动, 而框架却静止不动, 试论证松鼠的运动是一种什么样的运动.

解析

先以刚性框架为研究对象. 当框架处于静止状态时, 作用于框架的各个力对转轴 C 的力矩之和在任何时刻都应等于零, 设在某一时刻, 松鼠离杆 AB 的中点 O 的距离为 x , 如图 6-30 所示, 松鼠在竖直方向对导轨的作用力等于松鼠受到的重力 mg , m 为松鼠的质量. 此重力对转轴 C 的力矩的大小为 mgx , 方向沿顺时针方向. 为使框架平衡, 松鼠必须另对

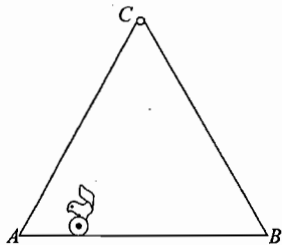


图 6-29

杆 AB 施一水平方向的力 F , 且 F 对转轴 C 的力矩应与竖直方向的重力产生的力矩大小相等, 方向相反. 即当表示松鼠位置的坐标 x 为正时, F 沿 x 的正方向, 当 x 为负时, F 沿 x 的负方向, 如图所示, 并满足平衡条件

$$mgx = Fl \sin 60^\circ = \sqrt{3}Fl/2 \quad (1)$$

式中 l 为杆的长度, 所以

$$F = 2mgx/(\sqrt{3}l) \quad (2)$$

即松鼠在水平方向上作用于杆 AB 的力要因松鼠所在的位置不同而进行调整, 保证(2)式得到满足.

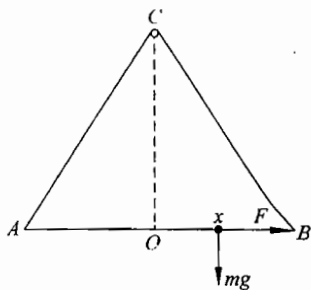


图 6-30

再以松鼠为研究对象. 松鼠在运动过程中, 沿竖直方向受到的合力为零, 在水平方向受到杆 AB 的作用力为 F' , 根据牛顿第三定律, 此力即 F 的反作用力, 即 $F' = -2mgx/(\sqrt{3}l)$, 可见, 松鼠在水平方向受到的作用力 F' 作用下的运动应是以 O 点为平衡位置的简谐振动, 其振动的周期为

$$T = 2\pi\sqrt{m/k} = 2\pi\sqrt{\sqrt{3}l/(2g)} = 2.64\text{s}$$

当松鼠运动到杆 AB 的两端时, 它应反向运动, 按简谐振动规律, 速度必须为零, 所以松鼠作简谐振动的振幅应小于或等于 $l/2 = 1.00\text{m}$. (振幅等于 1.00m 与把松鼠视作质点相对应)

由以上论证可知: 松鼠在导轨 AB 上的运动是以 AB 的中点 O 为平衡位置, 振幅不大于 1m , 周期为 2.64s 的简谐振动.

此题很有意思, 它不是常规的练习题, 但是同样能检查出参赛同学的水平和解题能力.

松鼠不能离开导轨, 它作用在导轨上的力只有两个: 一个是垂直向下的正压力, 大小和方向都不能由松鼠随意决定; 另一个是松鼠在导轨上作横向加速运动时加给导轨的反作用力, 这个力可以由松鼠改变自己的加速度来控制. 要这两个力的合力时刻等于零是不可能的, 只能让这个合力作用线时时刻刻通过悬挂点, 这样三角形架所受的力矩时时刻刻都为零, 也就不会左右摆动了.

12. 如图 6-31, 质量 $m_0 = 0.4\text{kg}$ 的靶盒位于光滑水平的导轨上, 连结靶盒的弹簧的一端与墙壁固定, 弹簧的劲度系数 $k = 200\text{N/m}$, 当弹簧处于自然长度时, 靶盒位于 O 点. P 处有一固定的发射器, 它可根据需要瞄准靶盒, 每次发射出一颗水平速度 $v_0 = 50\text{m/s}$ 、质量 $m = 0.10\text{kg}$ 的球形子弹. 当子弹打入靶盒后, 便留在盒内 (假定子弹与盒发生完全非弹性碰撞). 开始时靶盒静止. 今约定, 每当靶盒停在或到达 O 点时, 都有一颗子弹进入靶盒内.

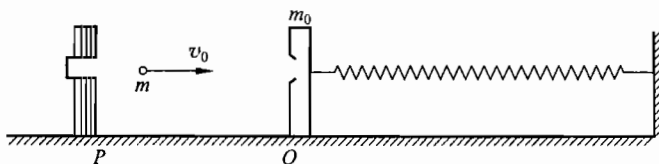


图 6-31

1) 若相继有 6 颗子弹进入了靶盒,问每一颗子弹进入靶盒后,靶盒离开 O 点的最大距离各为多少? 它从离开 O 点到回到 O 点经历的时间各为多少?

2) 若 P 点到 O 点的距离为 $s=0.25\text{m}$,问至少应发射几颗子弹后停止射击,方能使靶盒来回运动而又不会碰到发射器.

解析

1) 在第一颗子弹打入靶盒的极短时间内,系统的动量守恒. 设打入后靶盒获得的速度为 v_1 ,则有

$$mv_0 = (m_0 + m)v_1 \quad (1)$$

$$v_1 = \frac{m}{m_0 + m}v_0$$

由于靶盒在滑动过程中机械能守恒,所以靶盒回到 O 点时,速度的大小仍为 v_1 ,但方向相反. 当第二颗子弹射入靶盒后,设靶盒的速度为 v_2 ,则有

$$mv_0 - (m_0 + m)v_1 = (m_0 + 2m)v_2$$

得
$$v_2 = 0 \quad (2)$$

当第三颗子弹射入靶盒后,设靶盒的速度为 v_3 ,则有

$$mv_0 = (m_0 + 3m)v_3 \quad (3)$$

得
$$v_3 = \frac{m}{m_0 + 3m}v_0$$

靶盒回到 O 点时的速度仍为 v_3 ,但方向相反. 当第四颗子弹射入靶盒后,设靶盒的速度为 v_4 ,则有

$$mv_0 - (m_0 + 3m)v_3 = (m_0 + 4m)v_4$$

得
$$v_4 = 0 \quad (4)$$

由上可知,凡第奇数颗子弹射入靶盒后,靶盒都会开始运动,但由于盒内子弹数增多,起动时的速度和振动的振幅都将减小,周期则增大;凡第偶数颗子弹射入靶盒后,它将立即停在 O 点.

当第一颗子弹射入靶盒后,靶盒及其中的子弹的动能为

$$E_{k1} = \frac{1}{2}(m_0 + m)v_1^2 \quad (5)$$

若靶盒离开 O 点最远距离为 x_1 , 则弹簧的势能为

$$E_{p1} = \frac{1}{2} k x_1^2 \quad (6)$$

由 $E_{k1} = E_{p1}$, 得

$$x_1 = v_1 \sqrt{\frac{m_0 + m}{k}} = \frac{m v_0}{\sqrt{k(m_0 + m)}} = 0.50 \text{m} \quad (7)$$

第二颗子弹射入后, 靶盒停在 O 点, 故 $x_2 = 0$. 依此类推, 得

$$x_3 = v_3 \sqrt{\frac{m_0 + 3m}{k}} = \frac{m v_0}{\sqrt{k(m_0 + 3m)}} = 0.42 \text{m} \quad (8)$$

$$x_4 = 0$$

$$x_5 = v_5 \sqrt{\frac{m_0 + 5m}{k}} = \frac{m v_0}{\sqrt{k(m_0 + 5m)}} = 0.37 \text{m} \quad (9)$$

$$x_6 = 0$$

用 Δt_i 表示第 i 颗子弹射入靶盒后, 靶盒离开 O 点到又回到 O 点所经历的时间, T_i 表示对应的振动周期, 则有

$$\Delta t_1 = \frac{1}{2} T_1 = \frac{1}{2} 2\pi \sqrt{\frac{m_0 + m}{k}} = 5\pi \times 10^{-2} \text{s} \quad (10)$$

$$\Delta t_2 = 0$$

$$\Delta t_3 = \frac{1}{2} T_3 = \frac{1}{2} 2\pi \sqrt{\frac{m_0 + 3m}{k}} = 6\pi \times 10^{-2} \text{s} \quad (11)$$

$$\Delta t_4 = 0$$

$$\Delta t_5 = \frac{1}{2} T_5 = \frac{1}{2} 2\pi \sqrt{\frac{m_0 + 5m}{k}} = 6.7\pi \times 10^{-2} \text{s} \quad (12)$$

$$\Delta t_6 = 0$$

2) 要使靶盒在停止射击后维持来回运动, 则发射的子弹数 n 必须为奇数, 即

$$n = 2l + 1 \quad (13)$$

其中 l 为正整数. 这时, 靶盒做简谐振动, 其振幅即为靶盒离开 O 点的最远距离, 应有

$$s \geq x_n = \frac{m v_0}{\sqrt{k(m_0 + nm)}} \quad (14)$$

由(13)、(14)式可得

$$l \geq \frac{m v_0^2}{2k s^2} - \frac{m_0 + m}{2m} = 7.5$$

所以

$$l = 8, \quad n = 17$$

13. 一弹簧振子, 两端为质量都是 $m = 0.1 \text{kg}$ 、大小不计的物体 A 、 B , 中间是一自然长度为 l_0 、劲度系数为 k_0 、质量可以忽略的理想弹簧, 现此振子自某一高度、 A 端在下, 竖

直地自由下落至一水平桌面. 开始下落时, A 距桌面的高度为 $H=2\text{m}$, 开始时弹簧无伸长或压缩. A 与桌面发生弹性碰撞后跃离桌面, 当 A 第二次接触桌面时, 发现弹簧的压缩达到最大. 求:

- 1) 弹簧劲度系数 k_0 之值.
- 2) A 第二次与桌面接触时的速度.

解析

1) 取 x 坐标轴沿竖直方向. 原点在桌面, 方向向上. 振子竖直下落, 弹簧无压缩或伸长, 故 A、B 均为自由落体. 当 A 到达桌面时, A、B 的速度相同. 均为

$$v_A = v_B = -\sqrt{2gh} = -v_0 \quad (1)$$

令 A 与桌面碰撞之时刻为 $t=0$. 即 $t=0$ 时, A 与桌面发生弹性碰撞而反向. 此时有

$$v_A = v_0, \quad v_B = -v_0 \quad (2)$$

$$x_A = 0, \quad x_B = l_0$$

暂不考虑重力之影响, 则由图 6-32 可知, A、B 相向运动, 压缩弹簧, 而产生简谐运动. $t=0$ 时, 弹簧无形变, 由(2)式的初始条件, 可以写出 A 作简谐振动的运动方程

$$\begin{cases} x_A(t) = x_0 \sin 2\pi ft \\ v_A(t) = v_0 \cos 2\pi ft \end{cases} \quad (3)$$

(3)式中, 已知 $v_0 = \sqrt{2gh}$, x_0 、 f 待定. 由图 6-32 可知, 在振动运动中, A、B 相向运动, 中点 M 不动. 故振动可视为 M 固定的两个振子. 振子 MA(或 MB)的等效劲度系数为 k , $k=2k_0$, 故有

$$f = (\sqrt{k/m})/(2\pi) = (\sqrt{2k_0/m})/(2\pi) \quad (4)$$

振子 A 的最大振动动能为 $(1/2)mv_0^2$, 最大振动势能为 $(1/2)(2k_0)x_0^2$, 有

$$\begin{aligned} (1/2)mv_0^2 &= (1/2)(2k_0)x_0^2 \\ x_0 &= v_0 \sqrt{m/(2k_0)} \end{aligned} \quad (5)$$

现在考虑重力的效应, 重力的存在使得 A、B 在振动的同时, 还在作自由落体运动. 在时间 $0 \rightarrow t$ 期间, 重力使 A 产生的位移为 $-gt^2/2$

故在 $t > 0$ 时, A 的坐标(图 6-33)应为

$$x(t) = x_0 \sin 2\pi ft - gt^2/2 \quad (6)$$

弹簧最大压缩时为 t_1 , 此时应有

$$2\pi ft_1 = \pi/2 \quad (7)$$

t_1 时,

$$x_A(t_1) = x_0$$

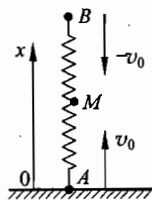


图 6-32

$$v_A(t_1) = 0$$

此时, A 与桌面发生第二次碰撞, 即应有

$$x(t_1) = x_0 \cdot \sin 2\pi f t_1 - g t_1^2 / 2 = 0 \quad (9)$$

由(8)、(9)二式可得

$$x_0 = (1/2)g / (4f)^2$$

代入 x_0 、 f 之值, 有

$$\sqrt{m / (2k_0)} \sqrt{2gh} = (1/2)g \left\{ 1 / \left[(2/\pi) \sqrt{2k_0/m} \right] \right\}^2$$

$$k_0 = (\pi^4 / 256)(mg/h)$$

代入各量的数值, 有 $k_0 = 0.19 \text{ N/m}$.

2) 当 A 与桌面第二次撞击时, 其振动速度为零. 故其速度就是 t_1 时的自由落体速度

$$v(t_1) = g t_1 = 8.0 \text{ m/s}$$

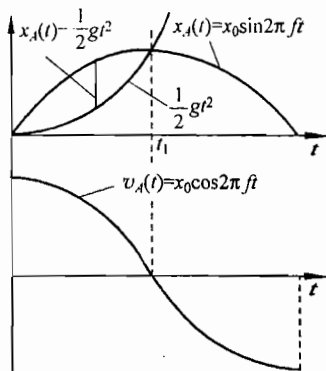


图 6-33

14. 在光滑平面上自由放置一轻弹簧, 其左端固定, 右端系着物块 P. 另一物块 Q 在 P 的右边与它紧靠, Q 的质量是 P 的 2.5 倍. P 与 Q 的右边有一壁与弹簧垂直, 物块与此壁相距 $L = (14\pi/13) \text{ cm}$. 今使 P、Q 从原来位置向左移一段距离, 并令其处于静止状态后予以释放. 已知 P 在第一次通过平衡位置后完成一次完全振动时, 与 Q 恰好发生第一次碰撞. 假设所有碰撞均为完全弹性碰撞, 且两物块的大小均可忽略不计. 试求:

1) 开始时弹簧的压缩量 L_0 为多少?

2) 在 P、Q 第一次分离与第一次碰撞的时间内, P 至两物块第一次分离点的最远距离是多少?

3) 在 P、Q 第一次碰撞与第二次碰撞的时间内, P 至两物块第一次分离点的最远距离是多少?

4) 图 6-34 给出了一条余弦曲线. 试以物块第一次相碰时刻为计时起点, 在图中画出 P 和 Q 的位移-时间图线, 并标出 P、Q 第二次相碰的时刻.

解析

1) 计算 P、Q 的左移距离 L_0 .

如图 6-35 所示, 物块释放后在弹簧作用下滑动至平衡位置 O 处分离, 其后物块 P 做简谐振动, 物块 Q 做匀速运动. 分离时两者具有相同速度 v_0 , 即

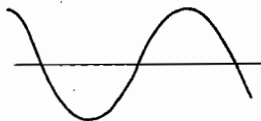


图 6-34

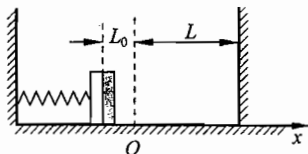


图 6-35

$$(m_P + m_Q)v_0^2/2 = kL_0^2/2 \quad (1)$$

已知 $m_Q = 2.5m_P = 2.5m$, 于是

$$v_0 = \sqrt{2k/(7m)}L_0 \quad (2)$$

依题意, 物块 P 做一次全振动后将在 O 处与物块 Q 碰撞, 应有

$$t_P = T = 2\pi\sqrt{m/k} \quad (3)$$

$$t_Q = 2L/v_0 = (2L/L_0)\sqrt{7m/(2k)} \quad (4)$$

由 $t_P = t_Q$ 可得初始 P 、 Q 的左移距离为

$$L_0 = \sqrt{7/2}L/\pi = (14\sqrt{7/2}/13)\text{cm} \approx 2.01\text{cm} \quad (5)$$

2) 计算在题给第一段时间间隔内 P 至分离点 O 的最远距离。

物块 P 与 Q 分离后做第一次简谐振动的振幅, 就是在物块分离后至第一次相碰这段时间内物块 P 至分离点的最远距离, 记为 A_1 。由机械能守恒, 有

$$(1/2)mv_0^2 = (1/2)kA_1^2 \quad (6)$$

由(2)、(5)式可得 $v_0 = 14\sqrt{k/m}/13$, 所以

$$A_1 = \sqrt{m/k}v_0 = \sqrt{2/7}L_0 \approx 1.08\text{cm} \quad (7)$$

3) 计算在题给第二段时间间隔内, P 至分离点 O 的最远距离。设 v_P 与 v_Q 分别为 P 与 Q 第一次相碰后瞬间的速度, 则根据动量守恒与动能守恒, 有

$$m_P v_0 - m_Q v_0 = m_P v_P + m_Q v_Q \quad (8)$$

$$(1/2)m_P v_0^2 + (1/2)m_Q v_0^2 = (1/2)m_P v_P^2 + (1/2)m_Q v_Q^2 \quad (9)$$

解之可得

$$\begin{aligned} v_P &= (m_P - 3m_Q)v_0/(m_P + m_Q) = -13v_0/7 \\ &= -2\sqrt{k/m}\text{cm}(\text{方向向左}) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} v_Q &= (3m_P - m_Q)v_0/(m_P + m_Q) = v_0/7 \\ &= (2\sqrt{k/m}/13)\text{cm}(\text{方向向右}) \end{aligned} \quad (11)$$

此后, 物块 P 做第二次简谐振动。设其振幅为 A_2 。由于 $m_Q > m_P$, 所以第一次碰撞后 Q 的速度大小必小于 v_0 (这点从(11)式可直接看出)。已知当 Q 的速度为 v_0 时, 它往返一

次的时间恰好等于 P 的周期, 现在 Q 的速度小于 v_0 , 因此它不可能在 P 第一次碰后的 $1/2$ 周期内与 P 再相碰. 因此 A_2 即为在两物块的第一次与第二次相碰之间的时间内, P 至两物块第一次分离点的最远距离. 由能量守恒知:

$$m_P v_P^2 / 2 = k A_2^2 / 2$$

故

$$A_2 = \sqrt{m/k} v_P = 2\text{cm}$$

4) 图解法确定两物块第二次相碰的时刻 t' .

以两物块第一次相碰的时刻作为计时起点, 位移以向右为正. 由 $t=0$ 时 $x_P=0$ 可知, 物块 P 的振动方程为

$$x_P = 2\cos(\sqrt{k/m}t \pm \pi/2)$$

由(10)式知物块 P 在 $t=0$ 时刻以最大负向速度通过平衡位置, 由简谐振动的参考圆知上式中的初位相应取 $(+\pi/2)$, 因此

$$x_P = 2\cos(\sqrt{k/m}t + \pi/2)$$

根据此方程在题给余弦图上画出时间轴和时间起点 O , 通过 O 点的纵轴(方向向上)就是位移 x 的轴线. 由 $A_2=2\text{cm}$ 可给 x 轴定标. t 轴则以振动周期 T 为时间单位.

物块 Q 达到右壁之前的运动方程为

$$x_Q = v_Q t = 2\text{cm}\sqrt{k/m}t/13$$

当 $t=T=2\pi\sqrt{m/k}$ 时,

$$x_Q = 4\pi/13\text{cm} \approx 1\text{cm} < L$$

故 Q 达到右壁之前的位移-时间曲线是一条通过原点和 $(T, 1\text{cm})$ 的直线, 将此直线画在图上, 两条位移-时间图线的交点的横坐标 t' 即是两物块第二次相碰的时刻(图 6-36).

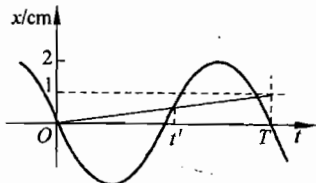


图 6-36

简谐运动是中学阶段惟一能处理的变力下的运动. 本题以物块 P 的简谐运动的计算为主, 加上物块 Q 使问题复杂化. 只要牢固地掌握简谐运动的概念和规律, 这道题虽然复杂, 也不难逐步解出.

15. 广而深的静水池中竖立一固定细杆, 其露出水面部分套着一个长度为 L 、密度为 ρ 、截面均匀的匀质细管. 细管可沿杆无摩擦地、竖直上下滑动, 因套在杆上, 不会倾倒. 现在用手持管, 使管的下端刚刚与水面接触. 放手后管竖直下沉. 设水的密度为 $\rho_{\text{水}}$, 不计水的阻力和表面张力.

- 1) 当管的密度 ρ 等于某一值 ρ_0 时, 管能下沉到刚好全部没入水中, 求 ρ_0 .
- 2) 在 $\rho=\rho_0$ 的情形下, 管下沉所经历的时间等于什么?

3) 设管的密度 $\rho = \frac{2}{3}\rho_*$, 求管下沉到最后位置所需的时间.

解析

1) 若 $\rho \geq \rho_*$, 管将下沉到池底, 因此只有 $\rho < \rho_*$ 时, 才可能符合题给的情况. 管下沉时, 其重力势能减小. 同时, 在管全部沉没以前, 管所排开的水可认为静止地移到池面, 这部分水的重力势能增加. 管下沉的开始阶段, 其动能增加, 以后动能减小, 在下沉停止时动能又为零.

按题意, 若 $\rho = \rho_0$, 则当管下沉到其下端的深度为 L (管刚好全部没入水中) 时即停止下沉. 令管的截面积为 S , 则管的重力势能减小

$$\Delta E_{\text{管}} = \rho_0 SLg \cdot L$$

这时管所排开的水的势能增加等于所排开水柱的质量乘以其重心上升的高度, 所以管所排开的水的重力势能增加

$$\Delta E_{\text{水}} = \rho_* SLg \cdot \frac{1}{2}L$$

不计水的阻力时, 可以认为下沉过程中管与水的总机械能守恒. 因始末动能均为零, 应有

$$\Delta E_{\text{管}} = \Delta E_{\text{水}}$$

即

$$\rho_0 SL^2 g = \frac{1}{2} \rho_* SL^2 g$$

所以

$$\rho_0 = \frac{1}{2} \rho_*$$

2) 考虑管下沉的运动. 当管下端的深度为 x ($x \leq L$) 时, 管受重力 ρSLg , 浮力 $\rho_* Sxg$, 管所受向下的合力 (不计表面张力作用)

$$F = Sg(\rho L - \rho_* x) \quad (1)$$

若 $x = x_0$ 时管所受力为零, 则由上式可得

$$x_0 = \frac{\rho}{\rho_*} L \quad (2)$$

管入水后的向下加速度可求得为

$$a = \frac{F}{\rho SL} = g \left(1 - \frac{\rho_*}{\rho} \frac{x}{L} \right) = -\frac{g}{x_0} (x - x_0) \quad (3)$$

将 $\rho = \rho_0 = \frac{1}{2} \rho_*$ 代入 (2) 式得

$$x_0 = \frac{1}{2} L$$

$$a = -\frac{2g}{L}\left(x - \frac{L}{2}\right) \quad (4)$$

可见管下端入水后应做竖直方向上的简谐振动,管的平衡位置在 $x = x_0 = \frac{L}{2}$ 处. 振动过程中 x 在 $x=0$ 与 $x=L$ 之间变动,故振幅为 $\frac{L}{2}$.

由(4)式可求出简谐振动的周期

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}$$

管下端由 $x=0$ 到 $x=L$ (全部没入水中)所需的时间 t 为半个周期,

$$t = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{L}{2g}}$$

3) 这时 $\rho > \frac{1}{2}\rho_*$, 管在全部没入水中后还将继续下沉. 但管全部入水后的下沉过程中,浮力不再改变,其运动的加速度与全部没入水中前不同,应把管的下沉过程分为两个阶段考虑.

(i) 管从开始下沉到刚好全部沉入水中($x \leq L$)

这一阶段中,在 $\rho = \rho_*$ 的情形下,第2)问解法中的(1)、(2)、(3)各式均适用. 因此这一阶段中管按简谐振动规律运动,其平衡位置在

$$x = x_0 = \frac{\rho}{\rho_*}L = \frac{2}{3}L$$

简谐振动的周期为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{x_0}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

由静止开始时,管离平衡位置的距离为 $x_0 = \frac{2}{3}L$,故简谐振动的振幅为

$$A = x_0 = \frac{2}{3}L$$

利用参考圆可以求出这一阶段的下沉运动所需的时间. 当管刚好全部没入水中时 $x=L$, 已越过平衡位置. 在参考圆图中,设质点沿半径为 $A = \frac{2}{3}L$ 的圆周以角速度 $\omega = \frac{2\pi}{T}$ 运动,质点在 x 轴上的投影即代表管下端的运动. 由图 6-37 可得,在管下端由 $x=0$ 下沉到 $x=L$ 时,质点运动所转过的角度为 $\frac{2\pi}{3}$,所以管下沉的第一阶段所需的时间

$$t_1 = \frac{2\pi/3}{2\pi} T = \frac{T}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

当 $x=L$ 时, 管仍在向下运动, 其速度 v 可根据能量考虑求出. 采用第 1) 问中的解法, 但因为这时管有动能, 故有

$$\rho SL^2 g - \frac{1}{2} \rho_* SgL^2 = \frac{1}{2} \rho SLv^2$$

$$\text{得出 } v^2 = \left(2 - \frac{\rho_*}{\rho}\right) gL$$

$$\text{所以 } v = \sqrt{\frac{gL}{2}}$$

(ii) 管继续下沉到最低位置

运动的这一阶段中, 浮力等于 $\rho_* SLg$ 不变, 向下加速度为负值常量

$$a = \frac{(\rho - \rho_*) SLg}{\rho SL} = -\frac{g}{2}$$

管向下以初速 v 做匀减速运动, 它下沉到最低位置所需的时间 t_2 可由

$$v = -at_2 = \frac{1}{2}gt_2$$

求得

$$t_2 = \frac{2v}{g} = \sqrt{\frac{2L}{g}}$$

(iii) 因此, 管下沉到最低位置共需时间

$$t = t_1 + t_2 = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \pi + \sqrt{2}\right] \sqrt{\frac{L}{g}}$$

此题是一道浮力、简谐运动和匀减速运动的综合题. 解题时首先要经过分析看出并证明细管在完全没入水中之前是在做简谐运动. 第 2) 问较第 1) 问更难些, 需要清楚地掌握用参考圆表示简谐振动的方法; 第 3) 问应知道在细管全部没入水中后, 运动情况改变, 应当分两段计算. 能够全面完成本题的学生不多.

16. 一大容器中装有互不相溶的两种液体, 它们的密度分别为 ρ_1 和 ρ_2 ($\rho_1 < \rho_2$). 现让一长为 L 、密度为 $\frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)$ 的均匀木棍, 竖直地放在上面的液体内, 其下端离两液体分界面的距离为 $\frac{3}{4}L$, 由静止开始下落. 试计算木棍到达最低处所需的时间. 假定由于木棍运动而产生的液体阻力可以忽略不计, 且两液体都足够深, 保证木棍始终都在液体内部运

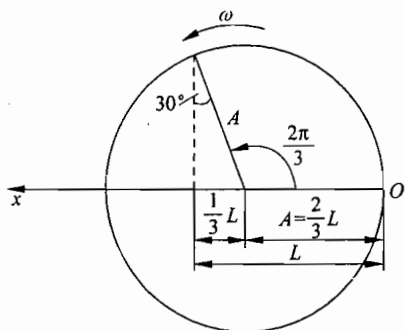


图 6-37

动,既未露出液面,也未与容器底相碰.

解析

1) 用 S 表示木棍的横截面积,从静止开始到其下端到达两液体交界面为止,在这个过程中,木棍受向下的重力 $\frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)LSg$ 和向上的浮力 ρ_1LSg . 由牛顿第二定律可知,其下落的加速度

$$a_1 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2}g \quad (1)$$

用 t_1 表示所需的时间,则

$$\frac{3}{4}L = \frac{1}{2}a_1t_1^2 \quad (2)$$

由此解得

$$t_1 = \sqrt{\frac{3L(\rho_1 + \rho_2)}{2(\rho_2 - \rho_1)g}} \quad (3)$$

2) 木棍下端开始进入下面液体后,用 L' 表示木棍在上面液体中的长度,这时木棍所受重力不变,仍为 $\frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)LSg$,但浮力变为 $\rho_1L'Sg + \rho_2(L - L')Sg$. 当 $L = L'$ 时,浮力小于重力;当 $L' = 0$ 时,浮力大于重力,可见有一个合力为零的平衡位置. 用 L'_0 表示在此平衡位置时,木棍在上面液体中的长度,则此时有

$$\frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)LSg = \rho_1L'_0Sg + \rho_2(L - L'_0)Sg \quad (4)$$

由此可得 $L'_0 = \frac{L}{2}$ (5)

即木棍的中点处于两液体交界处时,木棍处于平衡状态. 取一坐标系,其原点位于交界面上,竖直方向为 z 轴,向上为正,则当木棍中点的坐标 $z = 0$ 时,木棍所受合力为零. 当中点坐标为 z 时,所受合力为

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)LSg + \left[\rho_1\left(\frac{1}{2}L + z\right)Sg + \rho_2\left(\frac{1}{2}L - z\right)Sg \right] \\ & = -(\rho_2 - \rho_1)Sgz = -kz \end{aligned}$$

式中

$$k = (\rho_2 - \rho_1)Sg \quad (6)$$

这时木棍的运动方程为

$$-kz = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)LSa_z$$

a_z 为沿 z 方向加速度

$$a_z = -2 \frac{(\rho_2 - \rho_1)gz}{(\rho_1 + \rho_2)L} = -\omega^2 z$$

$$\omega^2 = 2 \frac{(\rho_2 - \rho_1)g}{(\rho_1 + \rho_2)L} \quad (7)$$

由此可知为简谐振动. 其周期

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{(\rho_1 + \rho_2)L}{2(\rho_2 - \rho_1)g}} \quad (8)$$

为了求同时在两种液体中运动的时间, 先求振动的振幅 A . 木棍下端刚进入下面液体时, 其速度

$$v = a_1 t_1 \quad (9)$$

由机械能守恒可知

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (\rho_1 + \rho_2) SL \right] v^2 + \frac{1}{2} k z^2 = \frac{1}{2} k A^2 \quad (10)$$

式中 $z = \frac{1}{2}L$ 为此时木棍中心距坐标原点的距离, 由(1)、(3)、(9)式可求得 v , 再将 v 和(6)式中的 k 代入(10)式得

$$A = L \quad (11)$$

由此可知, 从木棍下端开始进入下面液体到棍中心到达坐标原点所走的距离是振幅的一半, 从参考圆(见图 6-38)上可知, 对应的 θ 为 30° , 对应的时间为 $T/12$. 因此木棍从下端开始进入下面液体到上端进入下面液体所用的时间, 即棍中心从 $z = \frac{L}{2}$ 到 $z = -\frac{L}{2}$ 所用的时间为

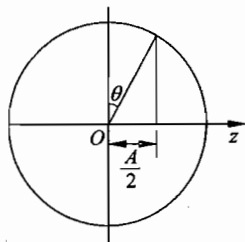


图 6-38

$$t_2 = 2 \frac{T}{12} = \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{(\rho_1 + \rho_2)L}{2(\rho_2 - \rho_1)g}} \quad (12)$$

3) 从木棍全部浸入下面液体开始, 受力情况的分析和 1) 中类似, 只是浮力大于重力, 所以做匀减速运动, 加速度的数值与 a_1 一样, 其过程和 1) 中情况相反的对称, 所用时间

$$t_3 = t_1 \quad (13)$$

4) 总时间为

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = \frac{6\sqrt{6} + \sqrt{2}\pi}{6} \sqrt{\frac{(\rho_1 + \rho_2)L}{(\rho_2 - \rho_1)g}} \quad (14)$$

17. 如图 6-39 所示, 在水平光滑的桌面上有一木板 A , 一端用弹簧与墙壁相连. 桌面上有一固定挡块 B , 当 A 与 B 接触时, 弹簧恰好为其原长. 现将 A 从与 B 接触的位置向右拉一段距离 l_0 (弹簧在其弹性限度内), 用手握住. 然后, 在 A 上面放一个小木块 C (可

视作质点), 见图 6-40. 已知 A 的长度为 $L = 0.7000\text{m}$, A 的质量 $m_0 = 10.00\text{kg}$, $l_0 = 1.000\text{m}$, C 的质量 $m = 0.01000\text{kg}$, C 与 A 间的滑动摩擦因数 $\mu = 0.4000$, 静摩擦因数 $\mu_0 = 0.4010$, 弹簧的劲度系数为 $k = 45.00\text{N/m}$. 问: 将 C 放在 A 上什么地方(用距 A 左端的距离 D 表示)时, 握住 A 的手放开后, C 能始终留在 A 上?

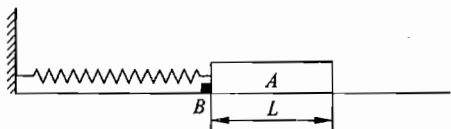


图 6-39

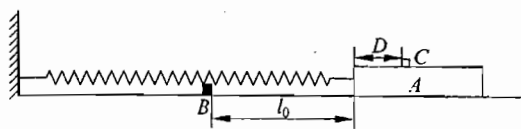


图 6-40

A 与 B 的碰撞为完全非弹性的. 重力加速度 $g = 9.800\text{m/s}^2$, 忽略 C 对 A 运动的影响, 忽略弹簧质量, 忽略空气阻力. (解答时可以使用计算器)

解析

1) A 的运动

根据题设, 不考虑 C 对 A 运动的影响, 故 A 的运动是 $1/4$ 周期内的简谐运动. 周期 T 为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_0}{k}} = 2.962\text{s}, \quad \frac{T}{4} = 0.7405\text{s} \quad (1)$$

其位移 l 随时间的变化为

$$l(t) = l_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad 0 \leq t \leq \frac{T}{4} \quad (2)$$

2) C 的运动

A 刚被释放时, 其加速度的方向向左, 其大小为

$$a = \frac{kl_0}{m_0} = 4.5\text{m/s}^2$$

若 C 能随 A 一起运动, 则 C 应受到向左的力, 且其大小应为

$$F_0 = ma = m \frac{kl_0}{m_0} = 0.0450\text{N}$$

此力只能由 A、C 间的摩擦力提供, 但该摩擦力的最大值为

$$\mu_0 mg = 0.401 \times 0.0100 \times 9.80\text{N} = 0.0393\text{N}$$

显然, $\mu_0 mg < F_0$, 因此 C 不能随 A 一起运动, 相对于 A 它将向右滑动. 相对于桌面它将在滑动摩擦力的作用下向左做匀加速运动. 设 $y(t)$ 为 t 时刻 C 离其初始位置(对桌面)的距离, 则有

$$y(t) = \frac{1}{2}\mu gt^2 \quad (3)$$

3) C 不被甩下的条件

若 C 在 A 上滑到 A 的右端以前能停止相对滑动, 即二者达到(对桌面)相同的速度,

则 C 就不会被甩下. 否则就会被甩下.

下面先研究 C 和 A 达到相同速度时的时间及两者的距离. 设 t_1 为 A 的速度 $v_A(t)$ 与 C 的速度(对桌面) $v_C(t)$ 相同的时刻, 则

$$y(t_1) = \frac{1}{2}\mu g t_1^2 \quad (4)$$

$$v_C(t_1) = \mu g t_1 \quad (5)$$

$$l(t_1) = l_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m_0}} t_1\right) \quad (6)$$

$$v_A(t_1) = l_0 \sqrt{\frac{k}{m_0}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m_0}} t_1\right) \quad (7)$$

因 t_1 满足

$$v_A(t_1) = v_C(t_1) \quad (8)$$

即得

$$\mu g t_1 = l_0 \sqrt{\frac{k}{m_0}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m_0}} t_1\right) \quad (9)$$

或

$$\frac{m_0}{kl_0} \mu g \sqrt{\frac{k}{m_0}} t_1 = \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m_0}} t_1\right) \quad (10)$$

上式可改写为

$$A\varphi_1 = \sin\varphi_1 \quad (11)$$

其中

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{k}{m_0}} t_1, \quad A = \frac{m_0}{kl_0} \mu g = 0.8711$$

由(11)式可以利用计算器用数值解法解出 φ_1 的值:

φ	$\sin\varphi$	$A\varphi$	
0.7	0.6442	> 0.6098	
0.8	0.7174	> 0.6969	
0.9	0.7833	< 0.7840	由此可见 $0.8 < \varphi_1 < 0.9$
0.89	0.7770	> 0.7753	
0.90	0.7833	< 0.7840	由此可见 $0.89 < \varphi_1 < 0.90$
0.897	0.7815	> 0.7814	
0.898	0.7821	< 0.7822	由此可见 $0.897 < \varphi_1 < 0.898$
0.8973	0.78165	> 0.78164	
0.8974	0.78171	< 0.78173	由此可见 $0.8973 < \varphi_1 < 0.8974$

最后得 3 位有效数字的 φ_1 为

$$\varphi_1 = 0.897 \quad (12)$$

代入 $\varphi_1 = \sqrt{\frac{k}{m_0}} t_1$, 可得

$$t_1 = \sqrt{\frac{m_0}{k}} \varphi_1 = 0.423\text{s} \quad (13)$$

与(1)式比较可知

$$t_1 < \frac{1}{4}T \quad (14)$$

这表明: 在 $\frac{1}{4}T$ 内, C 和 A 存在有共同速度的解. 将(13)式代入(4)式和(6)式, 可求得从

$t=0$ 到 t_1 时间内 C 和 A 移动的距离

$$y_1 = \frac{1}{2}\mu g t_1^2$$

$$l_0 - l(t_1) = l_0 - l_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m_0}} t_1\right)$$

此两式之差即为 C 在 A 上相对 A 滑行的距离

$$d = l_0 - l_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m_0}} t_1\right) - \frac{1}{2}\mu g t_1^2 \quad (15)$$

$$d = 0.0256\text{m}$$

只要开始时 C 离 A 右端的距离 $\geq d$, C 就不会从后面甩下, 由此可知

$$D \leq L - d = 0.674\text{m} \quad (16)$$

4) C 没有前冲下去的条件

C 在 A 上向右滑行 0.0256m 后, C 相对于 A 静止, 此后 C 就和 A 以相同的速度向左运动, 直到 A 与 B 相碰, 这时 $t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m_0}{k}}$, 代入(7)式可求得此时的共同速度

$$v_C(T/4) = \sqrt{\frac{k}{m_0}} l_0 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m_0}} \cdot \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m_0}{k}}\right) = \sqrt{\frac{k}{m_0}} l_0 \quad (17)$$

碰后 A 停止, C 以 $v_C(T/4)$ 为初速向前滑行, 靠摩擦减速, 到停止前滑行的距离为

$$s = \frac{[v_C(T/4)]^2}{2\mu g} \quad (18)$$

由(17)、(18)式得

$$s = \frac{kl_0^2}{2\mu gm_0} \quad (19)$$

$$s = 0.574\text{m}$$

只要 C 相对于 A 静止时距 A 左端的距离大于 s , 碰后 C 就不会向前冲下. 由此可知 C 不冲下的条件为

$$D \geq s - d = 0.548\text{m} \quad (20)$$

结论: 要使 C 始终留在 A 上, 开始时 C 离 A 的左端的距离必须符合下式要求

$$0.548\text{m} \leq D \leq 0.674\text{m}$$

18. 在两条柔软的弹性轻绳中间连接着一个小球, 而这两条绳的另一端分别固定于同一竖直线上的 O 、 O' 点, 如图 6-41 所示. 已知上、下绳的劲度系数分别为 $k_1 = 8.0\text{N/m}$ 和 $k_2 = 12.0\text{N/m}$. 小球静止不动时位于图上 C 点处, 这时上、下绳相对于各自的自然长度分别伸长了 $l_1 = 0.080\text{m}$ 和 $l_2 = 0.030\text{m}$. 现在将小球沿竖直方向下拉到与平衡位置 C 的距离为 $l_3 = 0.080\text{m}$ 处, 然后轻轻释放. 求小球从释放开始到第一次回到该释放点所需要的时间. (计算时可取 $g = 10.0\text{m/s}^2$)

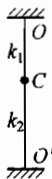


图 6-41

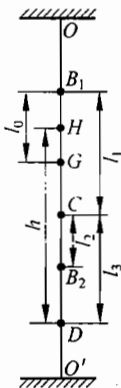


图 6-42

解析

1) 首先, 可以从该系统静止状态求出小球质量. 设小球质量为 m , 根据在静止状态小球受力平衡条件

$$mg + k_2 l_2 = k_1 l_1 \quad (1)$$

可得

$$m = (k_1 l_1 - k_2 l_2) / g = 0.028\text{kg} \quad (2)$$

2) 求小球被拉下而释放后上升的高度. 如图 6-42 所示, 设上绳处于自然长度时其下端点位置为 B_1 , 下绳处于自然长度时其上端位置为 B_2 , 小球下拉后被释放点为 D , 被释放后上升到达最高点为 H , 设 $\overline{HD} = h$. H 点的位置可由机械能守恒定律来求得, 但必须注意到, 对于 H 点位于 B_2 之下、位于 $B_1 B_2$ 之间和位于 B_1 之上这三种情况, 机械能守恒的方程式是不同的.

首先, H 点不可能位于 B_2 之下, 因为这时下绳处于松弛状态, 上绳的拉力则大于小球的重力, 小球由 D 到 H 始终是加速运动, H 不可能是小球释放后上升到达的最高点, 对于另两种情形, 如 H 点位于 $B_1 B_2$ 之间, 以 D 为重力势能的零点, 有:

$$k_1(l_1 + l_3)^2/2 = mgh + k_1(l_1 + l_3 - h)^2/2 + k_2(h - l_3 + l_2)^2/2 \quad (3)$$

若 H 点位于 B_1 之上, 则上绳为松弛, 相应的方程是

$$k_1(l_1 + l_3)^2/2 = mgh + k_2(h - l_3 + l_2)^2/2 \quad (4)$$

对于(3)式情形, 利用(1)式条件, 经整理可得:

$$(k_1 + k_2)h^2 - 2(k_1 + k_2)l_3h + k_2(l_3 - l_2)^2 = 0$$

于是

$$h = l_3 \pm \sqrt{l_3^2 - (l_3 - l_2)^2 k_2 / (k_1 + k_2)} \\ = (0.080 \pm 0.070)\text{m}$$

如在其中取负号解: $h = 0.010\text{m}$, 这表示 H 点在 B_2 之下, 即小球上升到最高点时下绳仍然松弛, 但(3)式中却计入了 $k(l_3 - l_2 - h)^2/2$ 的弹性势能, 所以这是一个不符合原假设的错误解, 应予舍去. 于是(取正号解):

$$h = 0.150\text{m}$$

由于力学运动规律是确定和惟一的, 所以可不再考虑 H 位于 B_1 之上, 即(4)式所描述的情形. 事实上, 解(4)式得到的是 h 为负值或 $h < 0.16\text{m}$ (即不在 B_1 之上) 这样两个均不合理的解, 这也说明了 H 点不可能位于 B_1 之上. 如果先考虑了(4)式情形, 得到了否定的结果, 这就必须再列出(3)式并从中求出正确的解答.

3) 计算小球由 D 到 H 所需的时间. 这要分两段考虑.

(i) 由 D 到 B_2 这一段, 小球在上绳的弹力和重力作用下作简谐运动, 其角频率为

$$\omega_1 = \sqrt{k_1/m} = 20\sqrt{35}/7\text{s}^{-1}$$

设与此运动相应(也就是下绳对小球无作用力情形)的平衡点为 G , 并设 $\overline{B_1G} = l_0$, 则

$$l_0 = mg/k_1 = 0.035\text{m}$$

此简谐振动的振幅为

$$A = \overline{GD} = l_1 + l_3 - l_0 = 0.125\text{m}$$

若从 D 处开始计时, 此简谐振动的方程式为

$$x = A\cos\omega_1 t$$

而 B_2 点和 D 点在平衡点的同侧, 小球到达 B_2 点时离平衡点的距离是 $\overline{GB_2} = l_1 + l_2 - l_0$, 所以从 D 到 B_2 所需时间为:

$$t_1 = \frac{1}{\omega_1} \arccos\left(\frac{\overline{GB_2}}{A}\right) = \frac{1}{\omega_1} \arccos\left(\frac{l_1 + l_2 - l_0}{l_1 + l_3 - l_0}\right) \\ = \frac{\sqrt{35}}{100} \arccos\left(\frac{3}{5}\right)\text{s} = 0.055\text{s}$$

(ii) 由 B_2 到 H 这一段, 小球是在上、下两绳的弹力以及重力作用下做简谐运动, 角

频率是

$$\omega_2 = \sqrt{(k_1 + k_2)/m} = (50\sqrt{14}/7)\text{s}^{-1}$$

这是另一种模式的简谐运动,其平衡位置就是 C 点,而振幅为

$$A' = \overline{HC} = h - l_3 = 0.070\text{m}$$

由 B_2 到 H 又可分为两部分,其中由 B_2 到 C 所需时间为

$$\begin{aligned} t_2 &= (1/\omega_2) \arcsin(B_2C/A') = (1/\omega_2) \arcsin[l_2/(h - l_3)] \\ &= (\sqrt{14}/100) \arcsin(3/7)\text{s} = 0.017\text{s} \end{aligned}$$

而由 C 到 H 是此简谐振动的 $1/4$ 周期过程,所需时间为

$$t_3 = (1/4)(2\pi/\omega_2) = \pi(\sqrt{14}/200)\text{s} = 0.059\text{s}$$

总计由 D 到 H 所需时间是

$$t_{DH} = t_1 + t_2 + t_3 = 0.13\text{s}$$

4) 小球从 H 到 D 所需的时间必然等于由 D 到 H 所需的时间,因为从 H 到 B_2 的运动和上述从 B_2 到 H 运动属于同一简谐振动模式,所需时间相等. 而由 B_2 到 D 的运动又和从 D 到 B_2 的运动同属另一种简谐振动模式,所需时间也相等. 于是从 D 到 H 再回到 D 的总时间为 $t = 2t_{DH} = 0.26\text{s}$.

此题是关于简谐运动的题目,由于设置了一些条件而使题目复杂化. 首先使运动竖直进行,因而必须考虑重力的影响;其次用两条弹性绳而不是弹簧给小球施力. 弹簧可以拉伸和压缩,而弹性绳则只能拉伸,不能压缩. 这就使得对于小球的运动必须分成几个部分,根据其受力情况的不同,分别进行计算. 只要考虑周密,分段正确,就不难得到正确的结果.

19. 图 6-43 中 A 是某种材料制成的小球, B 为某种材料制成的均匀刚性薄球壳. 假设 A 与 B 的碰撞是完全弹性的, B 与桌面的碰撞是完全非弹性的. 已知球壳 B 的质量为 m , 内半径为 a , 放置在水平的、无弹性的桌面上. 小球 A 的质量亦为 m , 通过一自然长度为 a 的柔软的弹性轻绳悬挂在球壳内壁的最高处, 如图所示. 弹性轻绳被拉长时相当于劲度系数为 k 的弹簧, 且 $ka = 9mg/2$. 起初将小球 A 拉到球壳内的最低点处, 然后轻轻释放. 试详细地、定量地讨论小球以后的运动.

解析

1) 小球在球壳最低点时弹性绳具有的弹性势能为

$$E_p = ka^2/2 = 9mga/4$$

释放小球后,在弹性力作用下,小球克服重力向上运动,到达球壳中心时,弹性势能转化成重力势能 mga 和动能. 小球到达球壳中

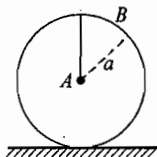


图 6-43

心后的运动是上抛运动,设小球到达球壳内部最高点时的速度为 v_0 ,则有

$$mv_0^2/2 = ka^2/2 - 2mga = 9mga/4 - 2mga$$

由此得

$$v_0 = \sqrt{ga/2}$$

2) 小球到达球壳内部最高点后与球壳发生完全弹性碰撞,碰撞后,小球的速度为零,球壳的速度为 v_0 ,方向向上.

3) 碰撞后,小球 A 自由下落,球壳 B 做上抛运动.取 y 轴竖直向上为正,原点在桌面上(如图 6-44), g 为重力加速度的绝对值,则在时刻 t ,A 和 B 的速度和位置分别为

$$v_A = -gt$$

$$y_A = 2a - gt^2/2$$

$$v_B = v_0 - gt$$

$$y_B = 2a + v_0 t - gt^2/2$$

B 上升到最高点又回到桌面经历的时间为

$$t_1 = 2v_0/g$$

在这段时间内,A 下降的距离

$$y_A = 2a - g(2v_0/g)^2/2 = a$$

即当 B 落到桌面时,A 刚好到达 B 的中心,绳刚拉直.这时 A 的速度

$$v_A = -g2v_0/g = -2v_0$$

负号表示方向向下.

4) 小球 A 开始以大小为 $2v_0$ 的速度从球壳中心 O 向下运动,在运动过程中,A 除受到重力作用外,还受到绳的弹力作用.若以球壳中心为原点、竖直向下作为 x 轴的正方向(如图 6-45),则当 A 的坐标为 x 时,作用于 A 的合力

$$F = mg - kx = -k(x - mg/k)$$

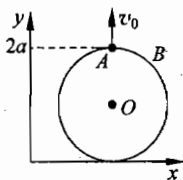


图 6-44

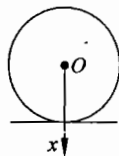


图 6-45

A 的平衡位置 x_0 可由 $F=0$ 求得,为

$$x_0 = mg/k = 2a/9$$

即平衡位置在球壳中心以下 $2a/9$ 处.作用于 A 的合力为

$$F = -k(x - x_0)$$

从上式可看出, F 与 A 离开其平衡位置 x_0 的位移 $(x-x_0)$ 成正比, 方向指向平衡位置. 故小球 A 在 F 作用下的运动是简谐振动. 振动的圆频率

$$\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{9g/2a}$$

振动周期

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{2a/g}/3$$

设 A 向下运动可能到达的最低点到球壳中心 O 的距离为 x_1 , 则由于机械能守恒, 有

$$m(2v_0)^2/2 + mga = kx_1^2/2 + mg(a-x_1)$$

注意到 $ka=9mg/2$, $v_0^2=ga/2$, 得

$$9x_1^2 - 4ax_1 - 4a^2 = 0$$

解此方程, 舍去不合理的根, 得

$$x_1 = 2a(1 + \sqrt{10})/9$$

由于 $x_1 < a$, 故小球 A 在向下运动的过程中不可能与球壳 B 发生碰撞. 小球振动的振幅

$$X = x_1 - x_0 = 2(1 + \sqrt{10})a/9 - 2a/9 = 2\sqrt{10}a/9$$

在时刻 t , A 离开其平衡位置 x_0 的位移 $x-x_0$ 可表示为

$$x - x_0 = X\cos(\omega t + \alpha)$$

若取 A 处在 $x-x_0=X$ 时作为时间的起点, 即 $t=0$ 时, $x=x_0+X$, A 的速度为零, 可得 $\alpha=0$. 故 A 的振动可表示为

$$x = x_0 + X\cos\omega t$$

小球在球壳中心以下的运动是简谐振动.

5) 小球自最低点 $x=x_0+X$ 处向上运动, 直到 $x=0$, 属于简谐振动的一部分. 设这一段运动经历的时间为 t_2 , 则

$$0 = x_0 + X\cos\omega t_2$$

$$\cos\omega t_2 = -x_0/X = -1/\sqrt{10}$$

$$t_2 = \frac{\pi}{\omega} - \frac{\arccos(1/\sqrt{10})}{\omega} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2a}{g}} [\pi - \arccos(1/\sqrt{10})]$$

到达 O 点时的速度, 可由能量关系求得, 其方向向上, 大小为 $2v_0$.

6) A 自 O 点向上的运动是以 $2v_0$ 为初速度的上抛运动

$$y_A = a + 2v_0t - gt^2/2$$

$$v_A = 2v_0 - gt$$

设 A 上升到最高点的时间为 t_3 , 则

$$t_3 = 2v_0/g = 2\sqrt{ga/2}/g = \sqrt{2a/g}$$

上升的最大高度

$$y_{Am} = a + 2v_0 \frac{2v_0}{g} - \frac{1}{2}g \frac{4v_0^2}{g^2} = a + \frac{1}{2} \frac{4v_0^2}{g} = a + \frac{2}{g} \frac{1}{2}ga = 2a$$

即小球刚好能上升到球壳内部的最高点,这时 A 的速度

$$v_A = 2v_0 - g2v_0/g = 0$$

故在 A 向上运动的过程中,虽能到达球壳内部的最高处,但不发生碰撞,球壳始终静止.

以后小球又自由落下,到达球壳中心 O 时,速度为 $2v_0$,此后开始做简谐振动.

7) 小球的运动具有周期性,在 O 点以上属竖直上抛运动,在 O 点以下属简谐振动.往返一次经历的时间为

$$\tau = 2t_2 + 2t_3 = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2a}{g}}[\pi - \arccos(1/\sqrt{10})] + 2\sqrt{\frac{2a}{g}}$$

对具体事物进行具体分析,弄清研究对象所处的状况和经历的过程,是对学生能力要求的一个重要方面.在上述这一题中,应当说其中每一步都是一个比较简单的过程,但能否独立地系统地分析清楚全过程,并抓住其中一些转折点的状态和条件,则是对学生能力高低的考验.有些学生只能弄清其中一两步,而不能全面地系统地分析到底.有些考生甚至对分析一个较复杂的过程缺乏信心,望而生畏,这是他们平时缺乏独立分析问题的训练造成的.还有一些学生,他们只习惯于做一些要求计算出某一两个量的结果的题目,而缺乏对某一问题主动地全面地进行开放性分析讨论的能力和素质.

20. 图 6-46 是放置在水平面上的两根完全相同的轻质弹簧与质量为 m 的物体组成的振子,每根弹簧的劲度系数均为 k ,弹簧的一端固定在墙上,另一端与物体相连接,物体与水平面间的静摩擦因数和滑动摩擦因数均为 μ .当两弹簧恰为原长时,物体位于 O 点.现将物体向右拉离 O 点至 x_0 处(不超过弹性限度),然后将物体由静止释放.设弹簧被压缩及拉长时其整体并不弯曲,一直保持在一直线上.现规定物体从最右端运动到最左端(或从最左端运动到最右端)为一个振动过程.求:

- 1) 从释放到物体停止运动,物体共进行了多少个振动过程?
- 2) 从释放到物体停止运动,物体共用了多少时间?
- 3) 物体最后停在什么位置?
- 4) 整个过程中物体克服摩擦力做了多少功?

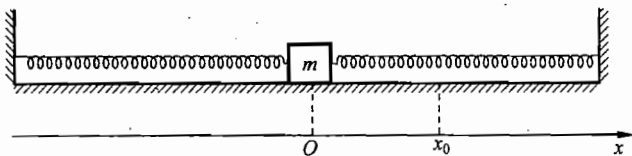


图 6-46

解析

以弹簧为原长时物体(视作质点)的位置 O 为坐标原点, 物体运动轨迹为 x 轴, 并规定向右为正, 如图 6-47 所示.

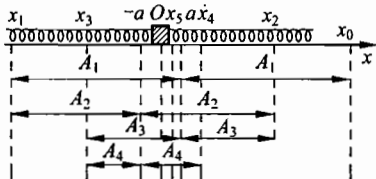


图 6-47

物体在水平面上做直线运动, 它受到弹力与摩擦力的作用, 取力的正方向与 x 的正方向一致, 则物体运动时所受的合力为

$$F = F_{\text{弹}} + F_{\text{摩}} = -2kx \pm \mu mg \quad (1)$$

物体向左运动时, 第二项取正号, 向右运动时取负号.

当物体向左(右)运动时, 在 $x=a$ ($x=-a$) 处所受合外力为零, 即

$$-2k(\pm a) \pm \mu mg = 0$$

由此得

$$2ka = \mu mg$$

即

$$a = \frac{\mu mg}{2k} \quad (2)$$

当 x 处于 $\pm a$ 之间的区域时, 即当

$$-a < x < +a \quad (3)$$

时, 物体所受弹力的大小小于最大静摩擦力(亦为 μmg , 与滑动摩擦力相同), 在此区域物体一旦速度为零, 便永久地停止在那里, 因为引起运动趋势的弹力将被静摩擦力抵消掉.

现在, 物体由 x_0 处静止释放向左运动, 物体所受的合外力为

$$F = -2kx + \mu mg = -2k(x-a) \quad (4)$$

由此式可知, 物体在做简谐振动, 其平衡点为 $(x-a)=0$, 即 $x=+a$ 处, 其振幅为

$$A_1 = x_0 - a \quad (5)$$

周期为

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2k}} \quad (6)$$

物体一直运动到最左端, 即第一个振动过程的最末一点 x_1 , 这时其速度变为零. x_1 点在 $x=+a$ 点左方, 与 $x=+a$ 点的距离为振幅 A_1 , 则

$$x_1 = a - A_1 \quad (7)$$

物体由 x_1 点向右运动时即不再是上述的简谐振动,因为这时摩擦力反向,物体所受合力变为

$$F' = -2kx - \mu mg = -2k(x+a) \quad (8)$$

与上同理,这个新的简谐振动的平衡点在 $(x+a)=0$ 处,即 $x=-a$ 处,振幅为

$$A_2 = A_1 - 2a = x_0 - 3a \quad (9)$$

周期为

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}} = T_1 \quad (10)$$

直到运动到右端第二个振动过程的最末点 x_2 .

$$x_2 = A_2 - a = x_0 - 4a \quad (11)$$

第三个振动过程又是另一振幅的同频简谐振动,以后依此类推,由图 6-47 可以看出,有

$$\begin{aligned} A_1 &= x_0 - a \\ A_2 &= A_1 - 2a = x_0 - 3a \\ A_3 &= A_2 - 2a = x_0 - 5a \\ &\vdots \\ A_n &= x_0 - (2n-1)a \end{aligned} \quad (12)$$

而

$$\begin{aligned} x_1 &= -(A_1 - a) = -(x_0 - 2a) \\ x_2 &= +(A_2 - a) = +(x_0 - 4a) \\ x_3 &= -(A_3 - a) = -(x_0 - 6a) \\ &\vdots \\ x_n &= (-1)^n(x_0 - 2na) \end{aligned} \quad (13)$$

下面回答本题的 4 个问题:

若 $x_0 < a$, 则物体将于 x_0 处静止不动.

若 $x_0 > a$, 则物体将做前面分析的振动.

1) 物体停止运动的条件是当其位置 x 满足(3)式时其速度为零,即某一个振动过程的末一点 x_N 落入 $-a$ 与 $+a$ 之间,而前一振动过程的末端 x_{N-1} 尚在此区间之外.

这样的 N 应满足

$$A_{N-1} > 2a, \quad A_N < 2a \quad (14)$$

由(12)式知,上式即

$$x_0 - [2(N-1) - 1]a > 2a$$

$$x_0 - (2N-1)a < 2a$$

亦即

$$x_0 + a > 2Na$$

$$x_0 - a < 2Na$$

由此得

$$\frac{x_0 - a}{2a} < N < \frac{x_0 + a}{2a} = \frac{x_0 - a}{2a} + 1 \quad (15)$$

即物体完成的振动过程数 N 为大于 $(x_0 - a)/2a$ 的最小整数. 亦可写为

$$N = \text{Int} \frac{x_0 + a}{2a} \quad (16)$$

式中 $\text{Int}C$ 即为 C 的整数部分.

2) 由(6)式及(10)式可知, 物体每次振动过程均为周期相同的简谐振动的一部分, 其周期为

$$T_1 = T_2 = T_3 = \dots = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}} \quad (17)$$

而每个振动过程均历时半个周期, 因此物体在停止运动前共用时间为

$$t_{\text{总}} = N \cdot \frac{1}{2}T = N\pi\sqrt{\frac{m}{2k}} \quad (18)$$

N 为满足(15)式的整数.

3) 物体停止的位置即为第 N 个振动过程的最末点 x_N .

x_N 可用 x_n 的通式即(13)式计算得出, 由此得

$$x_N = (-1)^N(x_0 - 2Na) \quad (19)$$

4) 物体克服摩擦力所做的功可有两种计算方法.

第一种: 摩擦力所做的功等于物体开始时的能量与停止时能量之差. 而这两个时刻物体只有弹性势能, 于是

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}2kx_0^2 - \frac{1}{2}2kx_N^2 = k[x_0^2 - (x_0 - 2Na)^2] \\ &= 4kNa(x_0 - Na) \end{aligned} \quad (20)$$

第二种: 直接用摩擦力来乘以物体走过的总路程

$$\begin{aligned} W &= \mu mg(2A_1 + 2A_2 + \dots + 2A_N) \\ &= 2\mu mg\{(x_0 - a) + (x_0 - 3a) + \dots + [x_0 - (2N-1)a]\} \\ &= 4ka\{Nx_0 - [1 + 3 + \dots + (2N-1)]a\} \end{aligned}$$

$$=4kNa(x_0 - Na) \quad (21)$$

与(20)式一致,式中用了等差级数求和公式.

这是一个在弹力和摩擦力联合作用下的简谐振动问题.本题中的摩擦力所起的作用与竖直的简谐运动中重力所起的作用有相同的地方也有不同的地方.相同之点是在质点运动时两个力都是恒力,其作用是使振动的平衡位置发生改变;其不同点有二,第一,重力的方向始终不变而摩擦力的方向永远与质点运动方向相反,其二是在弹力小于摩擦力的区域中,若质点一旦静止下来便不会重新运动了.

由于上述特点,解题时必须把整个过程分成许多段,分别列方程求解,因为每一段的运动方程是不相同的.

解此题时,画一个清楚的图很重要.对于每一段,标明振动的平衡点、振动的起点和受力情况.并且标明弹力小于摩擦力的区域,质点一旦在这个区域内停止,整个运动过程就结束了.

附录 全国中学生物理竞赛内容提要

(2005年1月修订, 2006年实行)

编者按:按照中国物理学会全国中学生物理竞赛委员会第九次全体会议的提议,由中国物理学会全国中学生物理竞赛委员会常务委员会根据《全国中学生物理竞赛章程》中关于命题原则的规定,结合我国目前中学生的实际情况,制订了《全国中学生物理竞赛内容提要》,作为今后物理竞赛预赛、复赛和决赛命题的依据.它包括理论基础、实验、其他方面等部分.其中理论基础的绝大部分内容和国家教委制订的《全日制中学物理教学大纲》中的附录,即1983年教育部颁布的《高中物理教学纲要(草案)》的内容相同.主要差别有两点:一是少数地方做了几点增补;二是去掉了教学纲要中的说明部分.此外,在编排的次序上做了一些变动,内容表述上做了一些简化.1991年2月20日经全国中学生物理竞赛委员会常务委员会扩大会议讨论通过并开始试行.1991年9月11日在南宁由全国中学生物理竞赛委员会第十次全体会议正式通过,开始实施.

经2000年,第十九次竞委会原则同意对《全国中学生物理竞赛内容提要》作适当的调整和补充.考虑到适当控制预赛试题难度的精神,提要中新补充的内容将用“※”符号标出,作为复赛题和决赛题增补的内容,预赛试题仍沿用原规定的内容提要,不增加修改补充后的内容.新规定的《全国中学生物理竞赛内容提要》将从2002年起实行,2001年举行的第十八届物理竞赛预、复、决赛仍采用未修改、补充的《全国中学生物理竞赛内容提要》.

2005年1月,常委会对《全国中学生物理竞赛内容提要》作了少量修改和补充,修改后的《全国中学生物理竞赛内容提要》将从2006年开始实行.

一、理论基础

力 学

1. 运动学

参照系 质点运动的位移和路程、速度、加速度 相对速度
矢量和标量 矢量的合成和分解 ※矢量的标积和矢积
匀速及匀变速直线运动及其图像 运动的合成 抛体运动 圆周运动
刚体的平动和绕定轴的转动

2. 牛顿运动定律 力学中常见的几种力

牛顿第一、二、三运动定律 惯性参照系的概念
摩擦力
弹性力 胡克定律
万有引力定律 均匀球壳对壳内和壳外质点的引力公式(不要求导出) 开普勒定律
行星和人造卫星运动
※惯性力的概念

3. 物体的平衡

共点力作用下物体的平衡
力矩 刚体的平衡条件 重心
物体平衡的种类

4. 动量

冲量 动量 质点与质点组的动量定理 动量守恒定律 ※质心 ※质心运动定理
反冲运动及火箭

5. ※角动量

※冲量矩 ※角动量 ※质点和质点组的角动量定理(不引入转动惯量)
※角动量守恒定律

6. 机械能

功和功率
动能和动能定理

重力势能 引力势能 质点及均匀球壳壳内和壳外的引力势能公式(不要求导出)
弹簧的弹性势能
功能原理 机械能守恒定律
碰撞 恢复系数

7. 流体静力学

静止流体中的压强
浮力

8. 振动

简谐振动 $[x=A\cos(\omega t+\alpha)]$ 振幅 频率和周期 相位
振动的图像
参考圆 振动的速度 $v=-A\omega\sin(\omega t+\alpha)$
由动力学方程确定简谐振动的频率 简谐振动的能量
同方向同频率简谐振动的合成
阻尼振动 受迫振动和共振(定性了解)

9. 波和声

横波和纵波 波长、频率和波速的关系 波的图像
平面简谐波的表示式 $y=A\cos\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)$
波的干涉和衍射(定性) ※驻波
声波 声音的响度、音调和音品 声音的共鸣 乐音和噪声 ※多普勒效应

热 学

1. 分子动理论

原子和分子的量级
分子的热运动 布朗运动 温度的微观意义
分子力
分子的动能和分子间的势能 物体的内能

2. 热力学第一定律

热力学第一定律

3. ※热力学第二定律

※热力学第二定律 ※可逆过程与不可逆过程

4. 气体的性质

热力学温标

理想气体状态方程 普适气体恒量

理想气体状态方程的微观解释(定性)

理想气体的内能

理想气体的等容、等压、等温和绝热过程(不要求用微积分运算)

5. 液体的性质

液体分子运动的特点

表面张力系数

浸润现象和毛细现象(定性)

6. 固体的性质

晶体和非晶体 空间点阵

固体分子运动的特点

7. 物态变化

溶解和凝固 熔点 熔解热

蒸发和凝结 饱和气压 沸腾和沸点 汽化热 临界温度

固体的升华

空气的湿度和湿度计 露点

8. 热传递的方式

传导、对流和辐射

9. 热膨胀

热膨胀和膨胀系数

电 学

1. 静电场

库仑定律 电荷守恒定律

电场强度 电场线 点电荷的场强 场强叠加原理 均匀带电球壳壳内的场强和壳外的场强公式(不要求导出) 匀强电场

电场中的导体 静电屏蔽

电势和电势差 等势面 点电荷电场的电势公式(不要求导出) 电势叠加原理 均匀带电球壳壳内和壳外的电势公式(不要求导出)

电容 电容器的连接 平行板电容器的电容公式(不要求导出)

电容器充电后的电能

电介质的极化 介电常数

2. 稳恒电流

欧姆定律 电阻率和温度的关系

电功和电功率

电阻的串、并联

电动势 闭合电路的欧姆定律

一段含源电路的欧姆定律 ※基尔霍夫定律

电流表 电压表 欧姆表

惠斯通电桥 补偿电路

3. 物质的导电性

金属中的电流 欧姆定律的微观解释

液体中的电流 法拉第电解定律

气体中的电流 被激放电和自激放电(定性)

真空中的电流 示波器

半导体的导电特性 P型半导体和N型半导体

晶体二极管的单向导电性 三极管的放大作用(不要求机理)

超导现象

4. 磁场

电流的磁场 磁感应强度 磁感线 匀强磁场 长直导线中的电流的磁场

安培力 洛伦兹力 电子荷质比的测定 质谱仪 回旋加速器

5. 电磁感应

法拉第电磁感应定律

楞次定律 ※感应电场(涡旋电场)

自感系数

互感和变压器

6. 交流电

交流发电机原理 交流电的最大值和有效值

纯电阻、纯电感、纯电容电路

整流、滤波和稳压

三相交流电及其连接法 感应电动机原理

7. 电磁振荡和电磁波

电磁振荡 振荡电路及振荡频率

电磁场和电磁波 电磁波的波速 赫兹实验

电磁波的发射和调制 电磁波的接收、调谐、检波

光 学

1. 几何光学

光的直进、反射、折射 全反射

光的色散 折射率与光速的关系

平面镜成像 球面镜成像公式及作图法

薄透镜成像公式及作图法

眼睛 放大镜 显微镜 望远镜

2. 波动光学

光程

光的干涉和衍射 双缝干涉 单缝衍射

光谱和光谱分析 电磁波谱

近代物理

1. 光的本性

光电效应 爱因斯坦方程

光的波粒二象性 光子的能量与动量

2. 原子结构

卢瑟福实验 原子的核式结构

玻尔模型 用玻尔模型解释氢光谱 玻尔模型的局限性

原子的受激辐射 激光

3. 原子核

原子核的量级

天然放射现象 放射线的探测

质子的发现 中子的发现 原子核的组成

核反应方程

质能方程 裂变和聚变

“基本”粒子 ※夸克模型

4. ※不确定关系 ※实物粒子的波粒二象性

5. ※狭义相对论

爱因斯坦假设 时间和长度的相对论效应

相对论动量与能量 $p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$, $E = mc^2$

6. ※太阳系 银河系 宇宙和黑洞的初步知识

数学基础

1. 中学阶段全部初等数学(包括解析几何)
2. 矢量的合成和分解 极限、无限大和无限小的初步概念
3. 不要求用微积分进行推导或运算

二、实 验

全国中学生物理竞赛常委会组织编写的《全国中学生物理竞赛实验指导书》中的34个实验是全国中学生物理竞赛复赛实验考试内容的范围. 这34个实验的名称是:

实验一 实验误差

实验二 气轨上研究瞬时速度

- 实验三 杨氏模量
- 实验四 用单摆测重力加速度
- 实验五 气轨上研究碰撞过程中动量和能量变化
- 实验六 测量声速
- 实验七 弦线上的驻波实验
- 实验八 冰的熔化热
- 实验九 线膨胀率
- 实验十 液体比热容
- 实验十一 数字万用电表的使用
- 实验十二 制流和分压电路
- 实验十三 测定直流电源的参数并研究其输出特性
- 实验十四 磁电式直流电表的改装
- 实验十五 用量程为 200mV 的数字电压表组成多量程的电压表和电流表
- 实验十六 测量非线性元件的伏安特性
- 实验十七 平衡电桥测电阻
- 实验十八 示波器的使用
- 实验十九 观测电容特性
- 实验二十 检测黑盒子中的电学元件(电阻,电容,电池,二极管)
- 实验二十一 测量温度传感器的温度特性
- 实验二十二 测量热敏电阻的温度特性
- 实验二十三 用霍尔效应测量磁场
- 实验二十四 测量光敏电阻的光电特性(有、无光照时的伏安特性;光电特性)
- 实验二十五 研究光电池的光电特性
- 实验二十六 测量发光二极管的光电特性(用 $eU_{\text{阈}} = hc/\lambda$ 估算发光波长)
- 实验二十七 研究亥姆霍兹线圈轴线磁场的分布
- 实验二十八 测定玻璃的折射率
- 实验二十九 测量薄透镜的焦距
- 实验三十 望远镜和显微镜
- 实验三十一 光的干涉现象
- 实验三十二 光的夫琅禾费衍射
- 实验三十三 分光计的使用与极限法测折射率
- 实验三十四 光谱的观测

各省(自治区、直辖市)竞赛委员会根据本省的实际情况下从《全国中学生物理竞赛实验指导书》的 34 个实验中确定并公布不少于 20 个实验作为本省(自治区、直辖市)物理竞赛

复赛实验考试的内容范围,复赛实验的试题从公布的实验中选定,具体做法见《关于全国中学生物理竞赛实验考试、命题的若干规定》。

全国中学生物理竞赛决赛实验以本《内容提要》中的“理论基础”和《全国中学生物理竞赛实验指导书》作为命题的基础。

三、其他方面

物理竞赛的内容有一部分有较大的开阔性,主要包括以下三方面:

1. 物理知识在各方面的应用;对自然界、生产和日常生活中一些物理现象的解释。
2. 近代物理的一些重大成果和现代的一些重大信息。
3. 一些有重要贡献的物理学家的姓名和他们的主要贡献。

附:关于全国中学生物理竞赛实验考试、命题的若干规定

(2005年)

为了使更多的地区、更多的优秀学生的物理实验水平和素养有较大的提高,让更多的优秀学生有机会参加实验培训,为了使复赛实验考试更加公正、公平,增加透明度,特制定以下规定。各省(自治区、直辖市)竞赛委员会必须严格按照本规定组织本省有关复赛实验的活动。

一、全国中学生物理竞赛委员会常务委员会(以下简称常委会)组织编写的《全国中学生物理竞赛实验指导书》(以下简称《实验指导书》)中的34个实验是全国中学生物理竞赛复赛实验考试的内容范围。各省(自治区、直辖市)竞赛委员会要会同本省有关专家和高等学校结合本省实际情况,从这34个实验中确定全部或部分实验,作为本省(自治区、直辖市)复赛实验考试的范围。确定的实验数不得少于20个,其中必须包括实验一“实验误差”、实验十一“数字万用电表的使用”、实验十二“制流和分压电路”、实验十八“示波器的使用”这四个基本实验。有的实验中含有“设计实验”,这部分实验要求属于决赛的实验考试要求,复赛实验考试不涉及这部分实验。本省确定的复赛实验考试内容范围必须向本省准备参加物理竞赛的全体考生公布,公布的时间不得晚于复赛考试前6个月。各省的复赛实验试题必须从本省公布的实验中选定。

二、各省(自治区、直辖市)的竞赛委员会要在省(自治区、直辖市)物理学会的领导下与本省(自治区、直辖市)有关高校协商设立物理竞赛实验培训点和组织本省(自治区、直辖市)的实验培训工作。培训点可设在省(自治区、直辖市)、市两级的高等学校。培训点要根据《实验指导书》的要求对学生进行培训,着眼于提高学生的实验水平和实

验素养.

三、各省(自治区、直辖市)要建立本省(自治区、直辖市)物理竞赛复赛实验命题小组.命题小组由2~4位物理实验业务水平较高、教学经验比较丰富、作风正派的高等学校教师组成.命题小组的成员在当年不得参加复赛前的任何物理竞赛实验的辅导和培训工作,并且他们的身份是保密的.省(自治区、直辖市)竞赛委员会要与命题小组一起研究确定本省(自治区、直辖市)复赛实验考场所在的高校.确定为实验考场的高校,应具有能解决本省(自治区、直辖市)公布的所有实验所需的器材和实验室条件.为了有利于考试的公平性,被指定为实验考场的高校在复赛实验考试前最好不安排与物理竞赛有关的实验培训任务.如果省(自治区、直辖市)竞赛委员会因这种或那种原因难以做到上述要求,而对考场所在的高校,在复赛实验考试前也安排了物理竞赛实验培训任务,则应做出相应的细致规定,防止因考场和培训设在同一所高校而可能带来的某些不良影响,以确保实验考试的公正与公平.请各省(自治区、直辖市)竞赛委员会结合本省(自治区、直辖市)的实际情况自己决定.各省(自治区、直辖市)公布的复赛实验考试内容的范围、确定为复赛实验考场的高校,都要报全国中学生物理竞赛办公室备案.

四、复赛实验命题小组的主要任务:

1. 从本省(自治区、直辖市)公布的“复赛实验考试内容范围”中选定两个实验作为本省(自治区、直辖市)复赛实验考题的内容.各省(自治区、直辖市)都必须公布的四个基本实验不单独作为实验考试题目,这四个基本实验内容的考查将体现在其他有关实验之中.

2. 根据选定作为试题内容的两个实验和《实验指导书》对这两个实验的要求,编制本省(自治区、直辖市)复赛实验考试的试卷,试卷一般应包括以下内容:

(1) 实验名称.作为考题的实验名称可以与《实验指导书》中的该实验名称相同,亦可在行文上做些修改,使之符合试题的语气.

(2) 实验要求和实验内容.

(3) 实验所用的器材名称和必要的仪器描述.

复赛实验考试的要求,实验原理、实验内容,所用的器材都不得超出《实验指导书》中关于该实验的规定.

3. 制定复赛实验考试评分标准.

复赛实验根据考生的书面答卷进行评分,要求考生写在卷面的内容应在“实验要求”和“考试内容”中向考生交代清楚.

4. 准备实验器材、保证器材的完好性能.

5. 组织阅卷、评分、查分工作.

全国中学生物理竞赛委员会常务委员会

2005年12月22日

指定参考书

1. 全国中学生物理竞赛办公室. 全国中学生物理竞赛参考资料. 北京: 北京教育出版社, 1985—2002; 全国中学生物理竞赛专辑. 北京: 北京教育出版社, 2003—2007.
2. 沈克琦. 高中物理学 1. 北京: 北京出版社, 1997; 高中物理学 2. 北京: 北京出版社, 1998; 高中物理学 3. 北京: 北京出版社, 1998; 高中物理学 4. 北京: 北京出版社, 1999.
3. 全国中学生物理竞赛常务委员会. 全国中学生物理竞赛实验指导书. 北京: 北京大学出版社, 2005.

参考资料

全国中学生物理竞赛常务委员会. 全国中学生物理竞赛 1~20 届试题解析: 力学分册. 北京: 清华大学出版社, 2005; 全国中学生物理竞赛 1~20 届试题解析: 电学分册. 北京: 清华大学出版社, 2005; 全国中学生物理竞赛 1~20 届试题解析: 热学、光学与近代物理分册. 北京: 清华大学出版社, 2006; 全国中学生物理竞赛 1~20 届试题解析: 实验分册. 北京: 清华大学出版社, 2008.

全国中学生物理竞赛

1~20届 试题解析

ISBN 978-7-302-10716-3



9 787302 107163 >

定价：26.00元