



全国中学生物理竞赛分类试题解析丛书

全国中学生物理竞赛

1~20届 试题解析

ISBN 7-302-11207-X



9 787302 112075 >

定价：19.80 元





全国中学生物理竞赛分类试题解析丛书

全国中学生物理竞赛委员会常委会 编写

全国中学生物理竞赛 1~20届试题解析

电学分册

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

全国中学生物理竞赛分类试题解析丛书汇集了第1~20届全国中学生物理竞赛理论试题、实验试题及参考解答,并对大部分试题进行了分析评述。丛书按学科内容体系编辑成力学、电学、热学、光学与近代物理及实验等四个分册出版。本套丛书是由全国中学生物理竞赛委员会常委会编写的,该常委会集中了北京大学、清华大学、北京师范大学、复旦大学、首都师范大学等学校的著名教授专家,书中所收入的试题是由他们精心编写和挑选的,具有很高的权威性和指导性。

本书是这套丛书的电学分册,针对1984—2004年电学部分的理论试题按照相关的知识点分类,并将内容接近的试题由易到难地安排顺序。全书对大部分试题进行了具体的剖析。这些试题有相当难度,对训练学生的综合思维能力、提高解题技巧大有裨益。本书可供全国高中学生、中学物理教师及师范院校物理系师生教学参考。

版权所有,翻印必究。举报电话:010-62782989 13501256678 13801310933

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

本书防伪标签采用特殊防伪技术,用户可通过在图案表面涂抹清水,图案消失,水干后图案复现;或将表面膜揭下,放在白纸上用彩笔涂抹,图案在白纸上再现的方法识别真伪。

图书在版编目(CIP)数据

全国中学生物理竞赛1~20届试题解析.电学分册/全国中学生物理竞赛委员会常委会编写.—北京:清华大学出版社,2005.10

(全国中学生物理竞赛分类试题解析丛书)

ISBN 7-302-11207-X

I. 全… II. 全… III. ①物理课—中学—解题 ②电学—中学—解题 IV. G634.75

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第063324号

出版者:清华大学出版社 地 址:北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn 邮 编:100084
社总机:010-62770175 客户服务:010-62776969

责任编辑:孙中悦

封面设计:傅瑞学

版式设计:刘祎森

印装者:清华大学印刷厂

发 行 者:新华书店总店北京发行所

开 本:185×230 印张:14.25 字数:290千字

版 次:2005年10月第1版 2005年10月第1次印刷

书 号:ISBN 7-302-11207-X/O·472

印 数:1~5000

定 价:19.80元

前言

从1984年开始到2004年底,全国中学生物理竞赛已举行了21届,共计有300万高中学生参加,在社会上具有良好的声誉。全国中学生物理竞赛活动是经国家教育部批准,由中国科协主管、并由中国物理学会主办的。物理竞赛活动自举办以来始终遵循着这样的宗旨,即激发优秀学生学习物理学的兴趣和积极性,开发他们潜在的智力,提高他们的能力和创造精神,促进他们科学素质的提高。二十多年来,物理竞赛活动健康发展,同时对中学物理教学的改进和教学质量的提高也起到了一定的作用。

物理竞赛题无疑会对参赛学生的学习和努力方向起着引导作用,其中很多质量较高的试题,对于提高学生学习物理的兴趣,鼓励学生在学好课内知识的基础上深入学习、独立思考,促使学生扩大视野和改进学习方法,启迪和开发智力,尤其是在锻炼他们灵活地、创造性地进行科学思维和培养解决问题的能力等方面发挥了较好的作用。为了适应广大中学师生的需要,我们编辑了本套丛书,汇集了第1~20届全国中学生物理竞赛试题(理论题和实验题)及参考解答,并由命题组部分教师对大部分题目进行了剖析。丛书按学科内容体系编辑成力学,电学,热学、光学与近代物理及实验等四册出版。同时将《全国中学生物理竞赛内容提要》一并收入。对于如何利用本书我们提出以下几点建议:

1. 要以正确的教育思想指导使用。教育必须贯彻因材施教的原则,要按教育和教学的规律办事。要从学生的实际出发,以扎扎实实打好知识、能力、非智力因素等各方面的基础为前提,启发引导,充分调动学生的主观能动作用,使学生得以充分发挥潜力,达到与其智力发展水平相适应的高水平。必须重视能力和非智力因素的培养与

提高,以达到全面提高学生科学素质的要求。

2. 物理竞赛是学有余力并对物理有兴趣的高中学生参加的一项课外活动,竞赛题是为这些学生设计的,因此不能要求多数学生都来做这些题目。

3. 由于在竞赛中要求将学习特别优秀的学生选拔出来,部分题目无论是理论题或实验题难度较大,对能力的要求较高,即使是班上的优秀学生也不一定都能做出来,有时需要用很多的时间才能解出一个题目,这是正常的情况。正是在这种尝试、失败、再尝试的反复思考、探索过程中,学生才能发现自己对物理概念、物理原理的理解和灵活运用以及实践能力等方面存在的问题,才能在分析问题和解决问题的能力上获得突破和提高。久思不得其解,一旦迎刃而解,就会有豁然顿悟之感,这种不懈追求真知的精神更将永久受用。因此,千万不要盲目追求做题的数量。应该让学生在完成课内学习任务后自由选择做题,我们特别强调:在解题过程中,学生应独立思考,独立完成;必要时教师可以从旁指点引导,切忌越俎代庖,以“教”代“学”,更不要揠苗助长。不要把本应发挥学生主观能动性的课外学习活动又变为学生被动接受知识的过程。

4. 在个人认真钻研的基础上,同学间进行相互讨论或争辩对提高水平十分有益,应予提倡。同学们处在平等的地位上,讨论时没有顾虑,发表意见能比较充分,要想说服对方就必须把问题真正搞清楚。别人的质疑和诘难可以揭露出自己在理解中存在的片面问题,以使自己更为深入、更加全面地思考。在讨论或争辩过程中双方都将受益,而且这也有助于培养自己与他人互相尊重、平等相处的作风和习惯。

5. 竞赛活动为参赛学生提供了有利于课外学习的环境和条件,这种学习包括认真读书、观察和研究现象、进行实验、讨论和辩论以及参加某些实践活动等,要特别强调的是,做习题或研究习题只是其中一个学习环节,千万不要误认为学物理就是做习题。否则不仅学不好物理,而且对提高自己的科学素养也很有害。

我们衷心希望物理竞赛活动能帮助学生生动活泼地进行学习,能促进他们主动获取新知识并能评价新知识,能将他们培养成为具有较强的科学思维能力、实践能力,能独立思考,具有创造精神的科学技术后备人才。

全国中学生物理竞赛委员会名誉主任:

沈克琦

全国中学生物理竞赛委员会主任:

卢树桐

目录

- ◆ 一、静电学
- ◆ 二、电路
- ◆ 三、运动电荷及载流导体所受的磁场力
- ◆ 四、电磁感应
- ◆ 附录 全国中学生物理竞赛内容提要

资源知识
PDG

一、静电学

1. 把本题中所有正确说法前的字母填写在题后括号内.

有三个点电荷甲、乙、丙,甲带电荷 $+Q$,乙带电荷 $-q$,且 $Q>q$.每一个电荷受其他两个电荷的电场作用力的合力都是零.则 ()

- (A) 丙的位置一定在甲和乙的连线的延长线上,且距乙较近;
- (B) 丙一定是正电荷;
- (C) 丙所带的电荷量一定大于 q ;
- (D) 丙所带的电荷量一定小于 Q ;
- (E) 若将甲、丙固定,且限定乙只能在与甲连线方向上运动,则乙是处于不稳定平衡状态;
- (F) 若将甲、乙固定,且限定丙只能在与甲连线方向上运动,则丙是处于不稳定平衡状态.

解析

A, B, C, E, F.

1) 若要电荷丙所受甲和乙的电场作用力合力为零,其位置必须在甲和乙的合场强为零的一点.在题给条件下,这一点是在甲和乙的连线的延长线上,且距乙较近.故说法 A 正确.这时,三个电荷的相对位置如图 1-1 所示.

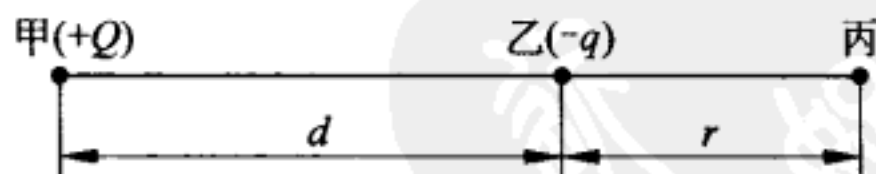


图 1-1

2) 由于电荷乙所受电荷甲的电场力为引力,向左,所以必须丙为正电荷,使乙受到丙的向右的引力,才能使电荷乙所受甲、丙的电场作用力合力为零,也才能使甲所受乙、丙的电场力合力为零(乙对甲的力为引力向右,丙对甲的力为斥力向左).故说法 B 正确.

3) 设丙所带电荷为 $+q'$,根据图中所设的距离,若甲所受合力为零,有

$$\frac{Qq}{d^2} = \frac{Qq'}{(r+d)^2} \quad (1)$$

若乙所受合力为零,有

$$\frac{qQ}{d^2} = \frac{qq'}{r^2} \quad (2)$$

由以上两式可得

$$q' = q \left(\frac{r+d}{r} \right)^2$$

故 $q' > q$, 说法 C 正确.

4) 由(2)式可得

$$q' = \left(\frac{r}{d} \right)^2 Q$$

又由丙所受合力为零, 可得

$$\frac{Q}{(r+d)^2} = \frac{q}{r^2}$$

从而

$$\frac{d}{r} = \sqrt{\frac{Q}{q}} - 1 \quad (3)$$

因为 $\sqrt{\frac{Q}{q}} (>1)$ 可以大于 2, 也可以介于 1 与 2 之间, 所以 d 可以大于 r , 也可以小于 r , 即 q' 不一定小于 Q , 说法 D 不正确.

5) 若将甲、丙固定, 令乙向甲移近一些, 则甲对乙的引力加大, 丙对乙的引力减小, 乙将继续向甲移近不会恢复到原平衡位置. 令乙向丙移近一些, 乙也会继续远离平衡位置. 这表明电荷乙是处于不稳定平衡状态, 说法 E 正确.

6) 若将甲、乙固定, 令丙向乙移近一些, 则乙对丙的引力加大, 虽然甲对丙的斥力也加大了, 但由于距离的相对变化量较小, 斥力的增量小于引力的增量, 丙将继续向乙移近, 离开平衡位置. 同样可说明若令丙远离乙一些, 丙也将继续远离, 不能恢复到原平衡位置. 故说法 F 正确.

此题要求作出全面的严密分析, 考查逻辑分析能力. 在分析中必须注意各说法中的“一定”两字. 在肯定说法 A、B 正确以后, 还要进一步列出(1)、(2)、(3)等式以便判断说法 C、D、E、F 是否正确. 解这种题型的题时, 采用盲目猜测的办法是要吃亏的.

2. 两个带正电的点电荷, 带电荷量都是 Q , 固定放置在图 1-2 中 x 轴上 A、B 两点处, A、B 距原点的距离都是 r . 若在原点处放置另一点电荷 P , 其带电荷量大小是 q , 质量为 m .



图 1-2

1) 当限制点电荷 P 只能在哪些方向上运动时, 它在 O 处才是稳定的?

2) 讨论在这些方向上受扰动后, 它的运动情况.

解析

1) 先讨论点电荷 P 带正电荷的情形. 设限制它在 S 轴上运动, 当受扰动发生微小位移 s (图 1-3 中 OP 段) 后, 它所受的电力如图 1-3 中 F_1 和 F_2 所示. 因此 P 在 S 轴上所受合力为

$$F_s = \frac{qQ}{AP^2} \cos\alpha - \frac{qQ}{BP^2} \cos\beta$$

由余弦定理可知

$$\overline{AP}^2 = r^2 + s^2 + 2rs \cos\theta$$

$$\overline{BP}^2 = r^2 + s^2 - 2rs \cos\theta$$

$$\cos\alpha = \frac{s + r \cos\theta}{(r^2 + s^2 + 2rs \cos\theta)^{1/2}}$$

$$\cos\beta = \frac{r \cos\theta - s}{(r^2 + s^2 - 2rs \cos\theta)^{1/2}}$$

代入上式, 得

$$F_s = \frac{qQ(s + r \cos\theta)}{(r^2 + s^2 + 2rs \cos\theta)^{3/2}} - \frac{qQ(r \cos\theta - s)}{(r^2 + s^2 - 2rs \cos\theta)^{3/2}}$$

因为 s 很小, 略去括号内的 s^2 项, 得

$$F_s = \frac{qQ}{r^3} \left[\frac{s + r \cos\theta}{\left(1 + \frac{2s}{r} \cos\theta\right)^{3/2}} - \frac{r \cos\theta - s}{\left(1 - \frac{2s}{r} \cos\theta\right)^{3/2}} \right]$$

展开后取近似可得

$$F_s = \frac{qQ}{r^3} \left[(s + r \cos\theta) \left(1 - \frac{3s}{r} \cos\theta\right) - (r \cos\theta - s) \left(1 + \frac{3s}{r} \cos\theta\right) \right]$$

$$F_s = \frac{2qQ}{r^3} s (1 - 3 \cos^2\theta)$$

由此可见, $\cos^2\theta > \frac{1}{3}$ 时 (图 1-4 中打斜线的锥体区域内), $F_s < 0$, 即合力的方向指向

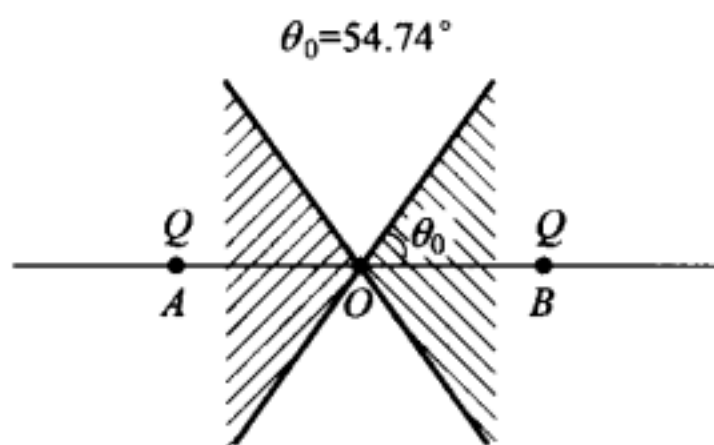


图 1-4

原点, 与位移方向相反, 所以在原点处是稳定的. 当 $\cos^2\theta < \frac{1}{3}$ 时 (图 1-4 中未打斜线区域), $F_s > 0$, 合力方向背离原点, 与位移方向相同, 所以是不稳定的.

同理可知, 当 P 是带负电荷时, 结论与上述正好相反.

2) 由以上可知, 在稳定的范围内, 当 P 带正电

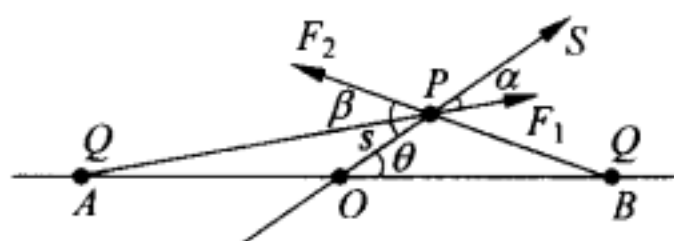


图 1-3

荷时

$$F_s = -\frac{2qQ}{r^3}(3\cos^2\theta - 1)s$$

其中 $(3\cos^2\theta - 1) > 0$, 可见力与位移成正比而方向相反, 所以电荷 P 将做简谐振动. 由牛顿定律可得加速度

$$a = -\frac{2qQ(3\cos^2\theta - 1)}{mr^3}s = -\omega^2 s$$

式中

$$\omega^2 = \frac{2qQ(3\cos^2\theta - 1)}{mr^3}$$

由此可得振动周期

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{mr^3}{2qQ(3\cos^2\theta - 1)}}$$

当 P 带负电荷时, 同理可得

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mr^3}{2qQ(1 - 3\cos^2\theta)}}$$

在二维的情况下, 讨论微扰引起的稳定和不稳定的状态是有一定难度的. 解答提供的方法具有示范作用.

3. 电荷 q 均匀分布在半球面 ACB 上, 球面的半径为 R , CD 为通过半球顶点 C 与球心 O 的轴线, 如图 1-5. P 、 Q 为 CD 轴线上在 O 点两侧、离 O 点距离相等的两点. 已知 P 点的电势为 U_P , 试求 Q 点的电势 U_Q .

解析

设想另有一个均匀带电的右半球面, 带电荷量也是 q , 与题中所给的左半球组成一个完整的均匀带电球面, 由对称性可知, 右半球在 P 点的电势 U'_P 等于左半球在 Q 点的电势, 即

$$U'_P = U_Q \quad (1)$$

所以

$$U_P + U_Q = U_P + U'_P \quad (2)$$

等式左面是位于两点的电势的叠加, 没有直接的物理意义, 但其数值等于 $U_P + U'_P$, 而 $U_P + U'_P$ 正是两个半球同时存在时 P 点的电势. 因为均匀带电球壳内部各处电势都相等, 其值等于 $k\frac{2q}{R}$, k 为静电力常量, 所以得

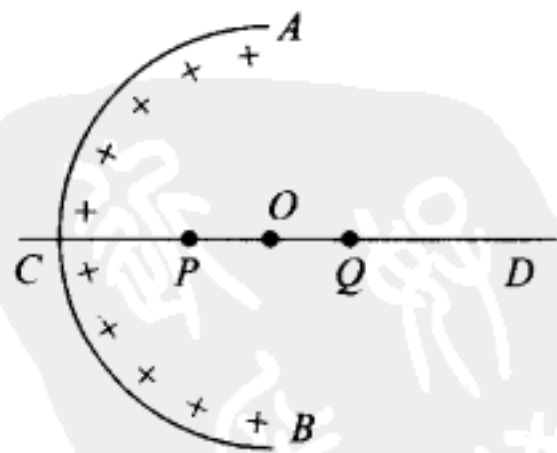


图 1-5

$$U_P + U'_P = k \frac{2q}{R} \quad (3)$$

由(2)、(3)两式得

$$U_Q = k \frac{2q}{R} - U_P$$

这是一道巧妙利用对称性的题目.除对称性之外,还要知道均匀带电球面内部的电场和电势,这个性质是与孤立带电金属球一样的,因此,球面内部的电势到处相同,并等于球心上的电势.

4. 如图 1-6 所示,在 Ox 轴的坐标原点 O 处,有一固定的电荷量为 $Q(Q>0)$ 的点电荷,在 $x=-l$ 处,有一固定的、电荷量为 $-2Q$ 的点电荷,今有一正试验电荷 q 放在 x 轴上 $x>0$ 的位置,并设斥力为正,引力为负.

1) 当 q 的位置限制在 Ox 轴上变化时,求 q 的受力平衡位置,并讨论平衡的稳定性.

2) 试定性地画出试验电荷 q 所受的合力 F 与 q 在 Ox 轴上的位置 x 的关系图线.

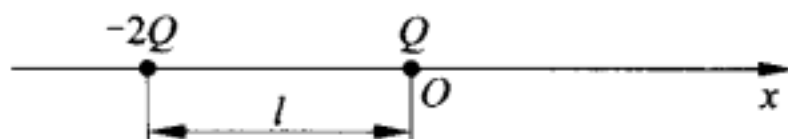


图 1-6

解析

1) 根据库仑定律和题中对斥力和引力正负的规定, q 所受的合力为

$$F = kQq \left[\frac{1}{x^2} - \frac{2}{(x+l)^2} \right] \quad (1)$$

令 $F=0$, 即 $\frac{1}{x^2} = \frac{2}{(x+l)^2}$, 可解得平衡位置 p 点的坐标

$$x_p = l(1 + \sqrt{2}) \quad (2)$$

为了讨论在上述平衡位置处的平衡稳定性,可令 q 从 x_p 处发生一微小位移 Δx , Δx 可正可负. 将 $x_p + \Delta x$ 代替 x 代入(1)式中,经运算可得

$$F = kQq \frac{-\Delta x(2\sqrt{2}l + \Delta x)}{(x_p + \Delta x)^2(x_p + \Delta x + l)^2} \quad (3)$$

(3)式中分母总是正的, F 的正负决定于分子.当 $\Delta x > 0$ 时, $F < 0$. 即当 q 离开平衡位置向右偏离时,将受到引力,方向向左;当 $\Delta x < 0$ 时,因 Δx 是微小的位移,(3)式分子的括号内是正的,所以 $F > 0$,即当 q 离开平衡位置向左偏离时,将受到斥力,方向向右.由此可见平衡是稳定的.

2) 上面(3)式不仅对 Δx 很小时成立.当 $\Delta x > 0$ 时总有 $F < 0$. 另外,由(1)式可知,当 $x \rightarrow \infty$, $F \rightarrow 0$. 由此可知,在 x_p 的右方, $F < 0$,最后变为趋于 0,可见有一个负的极小值存在.

当 $\Delta x < 0$ 时, 因为 $|\Delta x| < x_p = l(1 + \sqrt{2})$, 所以 $|\Delta x| < 2\sqrt{2}l$, 因此(3)式中分子的括弧内仍是正的. 故 $F > 0$. 另外, 由(1)式可知, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $F \rightarrow \infty$, 由此可知, 在 x_p 左方, $F > 0$ 且趋于 ∞ .

通过以上分析, 可定性画出 $F-x$ 图线如图 1-7 所示.

本题要求学生讨论平衡的稳定性并定性地画出合力随位置变化的曲线, 这两点都是考查的重点, 也是难点. 能够做到这两点的学生必须平时在课外学习中有较强的自学能力, 头脑灵活, 思维清晰. 本题作为决赛试题, 难度是比较大的. 竞赛结果, 有相当多的学生不知如何讨论平衡的稳定性. 曲线的渐近线大都不明确, 因而曲线发展趋势画得不好.

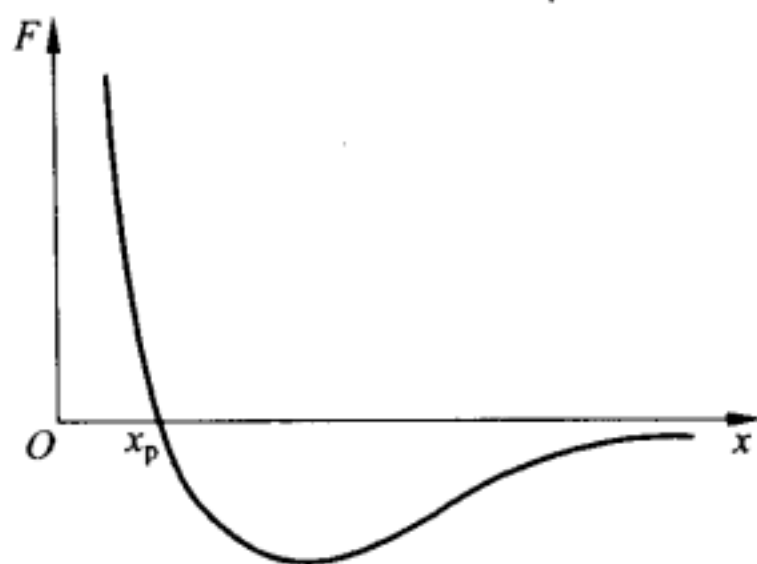


图 1-7

5. 两个点电荷位于 x 轴上, 在它们形成的电场中, 若取无限远处的电势为零, 则在正 x 轴上各点的电势如图 1-8 中曲线所示, 当 $x \rightarrow 0$ 时, 电势 $U \rightarrow \infty$; 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 电势 $U \rightarrow 0$; 电势为零的点的坐标为 x_0 , 电势为极小值 $-U_0$ 的点的坐标为 αx_0 ($\alpha > 2$). 试根据图线提供的信息, 确定这两个点电荷所带电荷的符号、电量的大小以及它们在 x 轴上的位置.

解析

在点电荷形成的电场中, 一点的电势与离开该点电荷的距离成反比. 因为取无限远处为电势的零点, 故正电荷在空间各点的电势为正, 负电荷在空间各点的电势为负. 现已知 $x = x_0$ 处的电势为零, 故可知这两个点电荷必定是一正一负. 根据所提供的电势的曲线, 当考察点离坐标原点很近时, 电势为正, 且随 x 的减小而很快趋向无限大, 故正的点电荷必定位于原点 O 处, 以 Q_1 表示该电荷的电荷量. 当 x 从 0 增大时, 电势没有出现负无限大, 即没有经过负的点电荷, 这表明负的点电荷必定在原点的左侧. 设它到原点的距离为

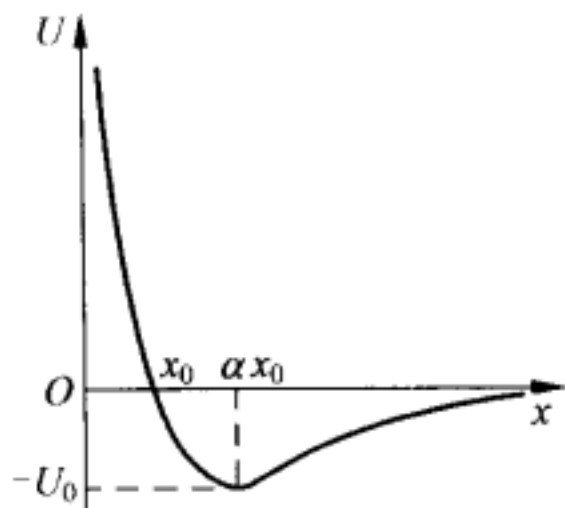


图 1-8

a , 当 x 很大时, 电势一直为负, 且趋向于零, 这表明负的点电荷的电荷量的数值 Q_2 应大于 Q_1 . 即产生题目所给的电势的两个点电荷, 一个是位于原点的正电荷, 电荷量为 Q_1 ; 另一个是位于负 x 轴上离原点距离 a 处的负电荷, 电荷量的大小为 Q_2 , 且 $Q_2 > Q_1$. 按题目所给的条件有

$$k \frac{Q_1}{x_0} - k \frac{Q_2}{x_0 + a} = 0 \quad (1)$$

$$k \frac{Q_1}{\alpha x_0} - k \frac{Q_2}{\alpha x_0 + a} = -U_0 \quad (2)$$

因 $x = \alpha x_0$ 时, 电势为极小值, 故任一电荷量为 q 的正检测电荷位于 $x = \alpha x_0$ 处的电势能也为极小值, 这表明该点是检测电荷的平衡位置, 位于该点的检测电荷受到的电场力等于零, 因而有

$$k \frac{Q_1}{(\alpha x_0)^2} - k \frac{Q_2}{(\alpha x_0 + a)^2} = 0 \quad (3)$$

由(1)、(2)和(3)式可解得

$$a = \alpha(\alpha - 2)x_0 \quad (4)$$

$$Q_1 = \frac{\alpha x_0}{\alpha - 2} \frac{U_0}{k} \quad (5)$$

$$Q_2 = \frac{\alpha(\alpha - 1)^2}{\alpha - 2} \frac{U_0 x_0}{k} \quad (6)$$

式中 k 为静电力常量.

在列出(1)、(2)式前, 对二点电荷的位置及电荷量的正、负与数值的分析和判断很重要, 也是必需的解析步骤, 它是列出(1)、(2)式的基础. 根据题意, (1)、(2)式很容易列出, (3)式的列出却需要利用在 $x = \alpha x_0$ 处是检测电荷的平衡位置的条件, 故所受到电场力等于零.

6. 如图 1-9 所示, a 为一固定放置的半径为 R 的均匀带电球体, O 为其球心. 已知取无限远处的电势为零时, 球表面处的电势为 $U = 1000\text{V}$. 在离球心 O 很远的 O' 点附近有一质子 p , 它以 $E_k = 2000\text{eV}$ 的动能沿与 $O'O$ 平行的方向射向 a . 以 l 表示 p 与 $O'O$ 线之间的垂直距离, 要使质子 p 能够与带电球体 a 的表面相碰, 试求 l 的最大值. 把质子换成电子, 再求 l 的最大值.

解析

令 m 表示质子的质量, v_0 和 v 分别表示质子的初速度和到达 a 球球面处的速度, e 表示元电荷, 由能量守恒可知

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + eU \quad (1)$$

因为 a 不动, 可取其球心 O 为原点, 由于质子所受的 a 球对它的静电库仑力总是通过 a 球的球心, 所以此力对原点的力矩始终为零, 质子对 O 点的角动量守恒. 所求 l 的最大值对应于质子到达 a 球表面处时其速度方向刚好与该处球面相切(图 1-10). 以 l_{\max} 表示 l 的最大值, 由角动量守恒有

$$mv_0 l_{\max} = mvR \quad (2)$$

由(1)、(2)式可得



图 1-9

$$l_{\max} = \sqrt{1 - \frac{eU}{mv_0^2/2}} R \quad (3)$$

代入数据,可得

$$l_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{2} R \quad (4)$$

若把质子换成电子,则如图 1-11 所示,此时(1)式中 e 改为 $-e$. 同理可求得

$$l_{\max} = \frac{\sqrt{6}}{2} R \quad (5)$$

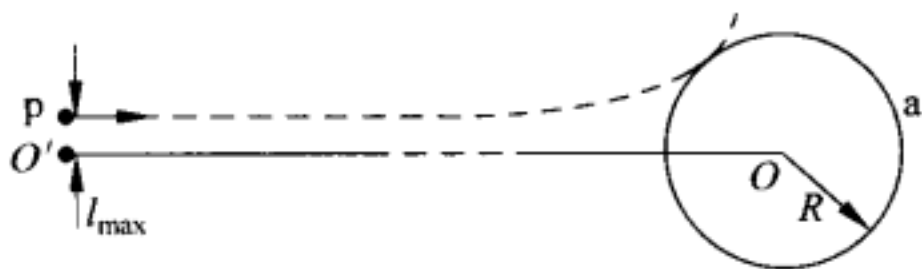


图 1-10

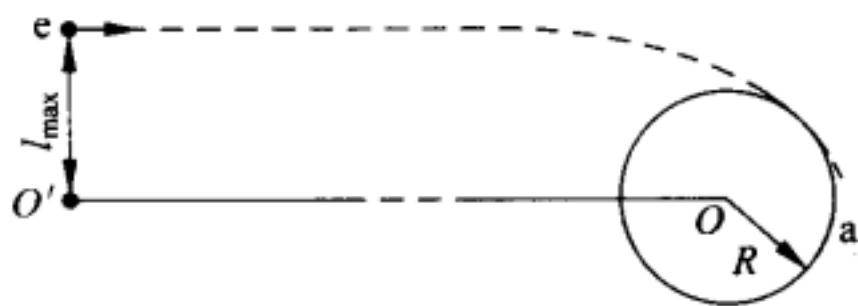


图 1-11

本题关键是将题意的“质子 p 与带电球体 a 的表面相碰”,理解为“质子与球面相切”,将质子与带电球视为一系统,就可以用能量守恒与角动量守恒两个规律求解.

7. 真空中,有 5 个电荷量均为 q 的均匀带电薄球壳,它们的半径分别为 R 、 $R/2$ 、 $R/4$ 、 $R/8$ 、 $R/16$,彼此内切于 P 点(如图 1-12 所示). 球心分别为 O_1 、 O_2 、 O_3 、 O_4 、 O_5 . 求 O_5 与 O_1 间的电势差.

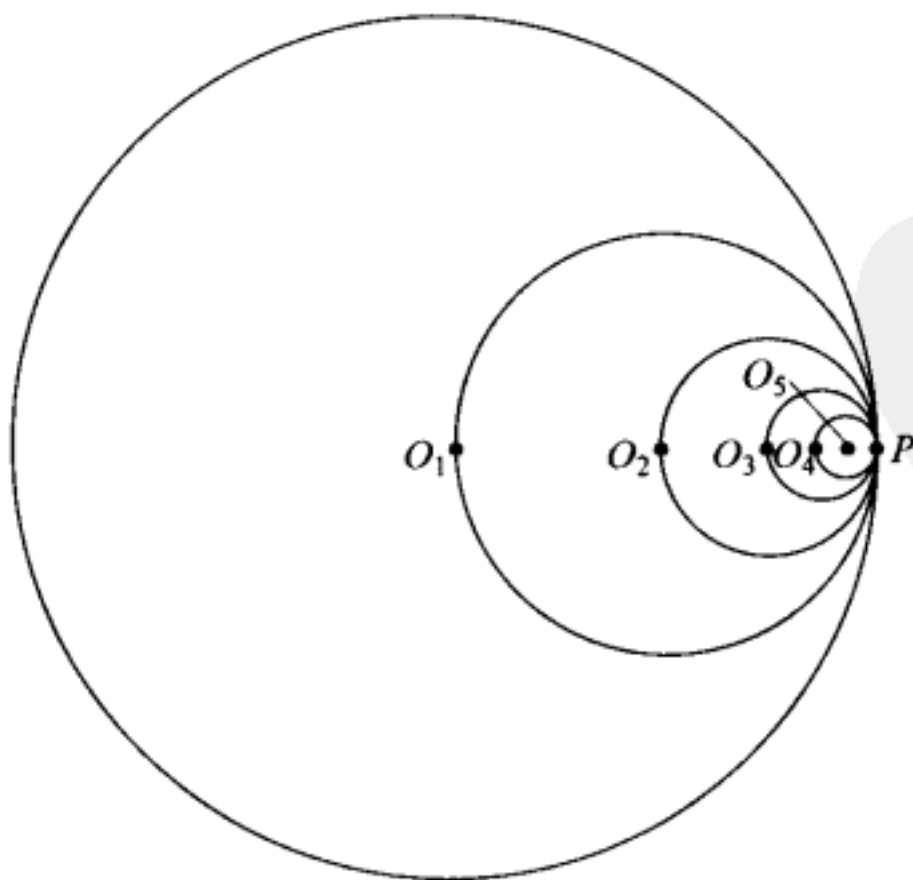


图 1-12

解析

O_5 的电势为

$$\begin{aligned} U(O_5) &= k \left(\frac{q}{R} + \frac{q}{R/2} + \frac{q}{R/4} + \frac{q}{R/8} + \frac{q}{R/16} \right) \\ &= k(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) \frac{q}{R} = 31k \frac{q}{R} \end{aligned} \quad (1)$$

O_1 的电势为

$$\begin{aligned} U(O_1) &= k \left[\frac{q}{R} + \frac{q}{\frac{R}{2}} + \frac{\frac{q}{2} + \frac{q}{4}}{\frac{R}{2} + \frac{R}{4}} + \frac{\frac{q}{2} + \frac{q}{4} + \frac{q}{8}}{\frac{R}{2} + \frac{R}{4} + \frac{R}{8}} + \frac{\frac{q}{2} + \frac{q}{4} + \frac{q}{8} + \frac{q}{16}}{\frac{R}{2} + \frac{R}{4} + \frac{R}{8} + \frac{R}{16}} \right] \\ &= k \left(3 + \frac{372}{105} \right) \frac{q}{R} = 6.54k \frac{q}{R} \end{aligned} \quad (2)$$

O_5 与 O_1 的电势差为

$$U(O_5) - U(O_1) = 31k \frac{q}{R} - 6.54k \frac{q}{R} = 24.46k \frac{q}{R} \quad (3)$$

此题用了求均匀带电球内外电势的方法,所求点,例如 O_2 点的电势,对最大和次大的两个均匀带电球而言, O_2 位于球内,不论是否偏心,均处于等势区内,均等于相应的均匀带电球面电荷对球心的电势;但 O_2 又处于其余均匀带电球外,其电势等于相应的均匀带电球面电荷集中于球心时在 O_2 产生的电势.剩下的问题就是用电势叠加的方法求总电势了.

8. 一无限长均匀带电细线弯成如图 1-13 所示的平面图形,其中 \widehat{AB} 是半径为 R 的半圆弧, AA' 平行于 BB' , 试求圆心 O 处的电场强度.

解析

设细线单位长度带正电荷 η , 在半圆弧 \widehat{AB} 上任取一小段弧 $\widehat{ab} = R\Delta\theta$, 可看作点电荷, 它在圆心 O 点处产生的电场强度的大小是

$$\Delta E = k \frac{\eta R \Delta\theta}{R^2} = k \frac{\eta \Delta\theta}{R}$$

方向如图 1-14 所示. 延长 aO 、 bO , 分别交细线的直线部分于 a' 、 b' . 把 $\overline{a'b'}$ 也看作点电荷, 带电 $\eta \overline{a'b'}$, 距圆心 O 的距离用 r 表示 ($\Delta\theta$ 越小, 以上考虑越准确). 作 $a'a''$ 垂直于 Ob' , 则 $\angle a''a'b' = \angle b'Oa = \theta + \Delta\theta \approx \theta$, 因而 $\overline{a'b'} = \overline{a'a''} \sec\theta = \overline{a'a''} r/R$. 但 $\overline{a'a''} = r\Delta\theta$, 故 $\overline{a'b'} = r^2 \Delta\theta/R$.

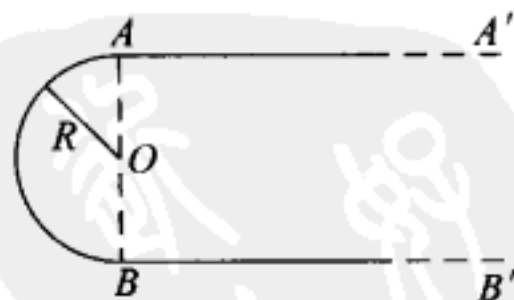


图 1-13

点电荷 $a'b'$ 在 O 点产生的电场强度的大小是

$$\Delta E' = k \frac{\eta \overline{a'b'}}{r^2} = k \frac{\eta \Delta \theta}{R} = \Delta E$$

方向与 ΔE 相反. 因此 \widehat{ab} 与 $\overline{a'b'}$ 在 O 点产生的场强之和为零, 根据同样的分析可知, \widehat{AB} 上各小段电荷与细线直线部分各小段电荷一一对应地在 O 点产生的场强相消, 故细线电荷在 O 点的电场强度为零.

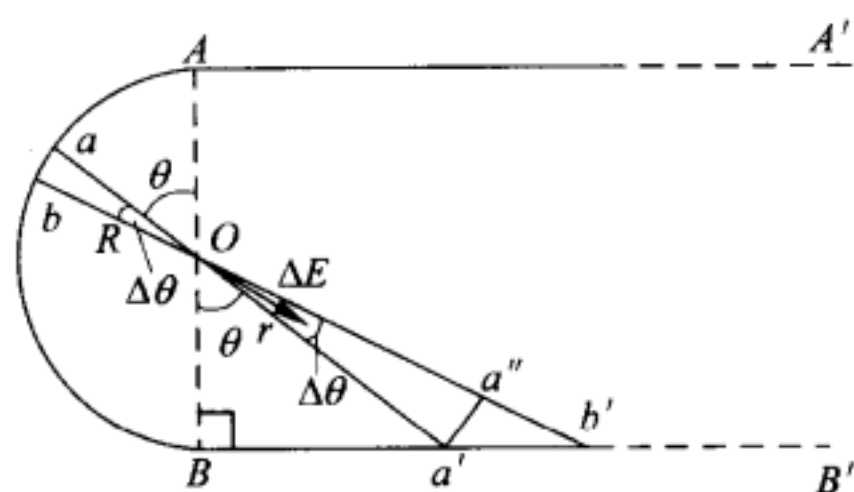


图 1-14

此题在普通物理教材中是一道常规题, 利用积分可以求出在半无限长均匀带电线顶点垂直距离上一点的场强. 作为竞赛题却可避开高等数学的方法, 利用几何分析及初等数学的方法巧妙地求解.

9. 人们普遍认为下列结论已为实验所证实:

- 1) 质子和电子的带电荷量相等、符号相反.
- 2) 中子的带电荷量为零.
- 3) 在任何变化过程中, 总电荷量是守恒的.

实际上, 由于任何实验的精确度都有一个限度, 因而只能说: “在过去所有已做过的实验所能达到的精确度范围内没有违反上述结论的现象.” 这意味着, 如果这些结论与客观实际之间存在差异的话, 这种差异一定小于过去实验所检测出来的数值, 这个数值被称为用该实验得出的这种差异的上限. 本题所述的实验就是这样的实验中的一个例子.

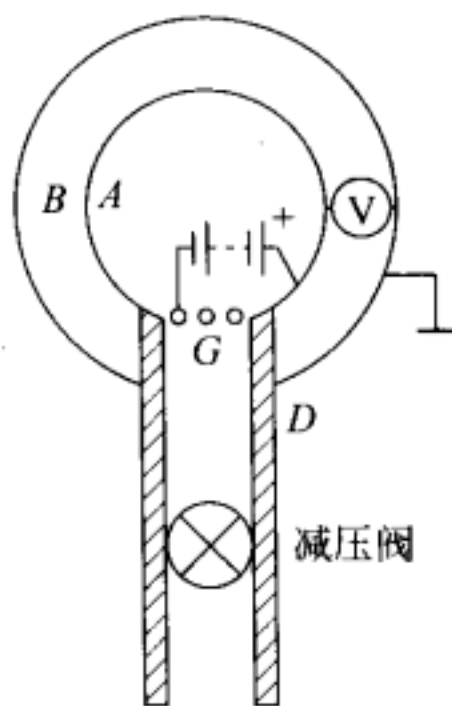


图 1-15

设电子的电荷量为 $q_e = -e$. 如果质子的电荷量不是 $+e$, 而是 $(1+y)e$, y 是一个很小的正数; 如果中子的电荷量不是零, 而是 q_n ($q_n > 0$). 人们用图 1-15 所示的实验装置可以求得在此实验中 y 和 q_n 的上限 y_m 和 q_{nm} , 即从此实验可得结论: 如果 y 和 q_n 不等于零的话, 其数值一定分别小于 y_m 和 q_{nm} .

已知中子可衰变成一个质子、一个电子和一个反中微子(反中微子是一种中性的、静止质量极小的粒子). 如果在衰变过程中总电荷量是守恒的, 则由 $q_n = ye$ 就可求得 q_{nm} ; 如果总电荷不是守恒的, q_n 和 y 之间没有上述关系, 必须分别求出 y_m 和 q_{nm} .

实验装置说明:

图 1-15 中的 A 、 B 是两个相互绝缘的同心金属球壳, 它们中间是真空, B 接地, A 壳内部充有高压气体. A 、 B 间的电容为 C , A 、 B 与一静电计①相连接. 静电计是一种灵敏度极高、内阻无限大的测量微小电势差的仪器, 可用它测量 A 、 B 间的电势差 ΔU . 已知静电计的灵敏度为 δ , 即: 当被测的电势差或其改变达到或超过 δ 时, 静电计上的指示就会有反应. D 为与 A 球壳内部相连通的带减压阀门的圆柱形绝缘管. G 为绝缘管内的金属栅网. 在 G 与 A 之间连有电池, A 与正极相连. 这部分的作用是: 由于宇宙射线的作用或其他原因, 气体中可能存在正、负离子或自由电子, 这些离子或电子在电场力的作用下将被引向球壳 A 或 G , 从而保证从栅网空隙处逸出的都是没有电离的气体分子.

实验是这样进行的: 先用导线连接 A 、 B , 然后断开; 断开后, 通过 D 放出部分气体, 同时观察静电计的指示. 如果在整个过程中静电计的指示没有变化, 请回答:

- 1) 说明此实验的原理.
- 2) 假设电荷守恒定律是严格正确的, 已知 A 内所充气体为 CO_2 , 放气前后 A 球壳内 CO_2 气体的质量差为 m (以 g 为单位), 求 y_m .
- 3) 如果总电荷不一定守恒, 请利用上述实验装置 (A 内气体的品种可以改变) 设计出可以测 y_m 和 q_{nm} 的实验.

[注] 已知碳和氧的原子序数分别为 6 和 8, 摩尔质量分别为 12g 和 16g .

解析

1) 本实验的原理, 如果 $y \neq 0$, $q \neq 0$, 则每个含有等量质子和电子的气体分子将不是中性的, 因而 A 内的气体将带有电荷, A 的内、外表面和 B 内表面都将有感应电荷. 当 A 与 B 相连接时, A 的外表面与 B 的内表面上将不带电荷, A 、 B 间电势差为零. 如果断开后令 A 内气体量减少, 则 A 内气体的电荷量将减少, 因而 A 的内表面上的电荷量将随之减少. 设减少量为 Δq , 同时 A 的外表面的电荷量将从 0 变为 Δq , B 的内表面所带电荷量也将变为 $-\Delta q$, 因而 A 、 B 间将产生一个电势差 ΔU , 其值为

$$\Delta U = \Delta q / C$$

现在没有发现静电计的指示有何变化, 表示 $\Delta U < \delta$, 即 $|\Delta q| < C\delta$. 已知 δ 及 C 的值, 由此实验结果即可算出 Δq 的上限, 因为 Δq 与 y 、 q_n 有关, 所以由 Δq 的上限即可求得 y 、 q_n 的上限.

2) 如果电荷守恒定律是严格正确的, 由题文所述得: $q_n = ye$, CO_2 分子的摩尔质量为 44g , 每个 CO_2 分子有 22 个质子, 22 个电子和 22 个中子, 因此每个 CO_2 分子带有的电荷量为 $22ye + 22q_n = 44ye$. 如果没有离子或自由电子逸出, 当 A 内气体质量减少 m (以 g 为单位) 时, A 内的电荷量减少量为

$$\Delta q = \frac{m}{44} N_A \times 44 y e = m N_A y e$$

式中 N_A 为阿伏伽德罗常数, 由于静电计指示没有变化, $\Delta q < C\delta$, 从而可得

$$y_m = \frac{C\delta}{m N_A e}$$

3) 如果电荷不一定守恒, 可用两种不同的气体 (a, b) 分别做上述实验, 从而得到下列不等式:

$$0 < \Delta q_a = \frac{m_a}{\mu_a} N_A (n_{pa} y e + n_{na} q_n) < C\delta \quad (1)$$

$$0 < \Delta q_b = \frac{m_b}{\mu_b} N_A (n_{pb} y e + n_{nb} q_n) < C\delta \quad (2)$$

式中 m 表示 A 内气体减少的质量, μ 表示气体分子的摩尔质量, n_p 表示每个分子中的质子数, n_n 表示每个分子中的中子数. 由联立的不等式 (1)、(2) 即可求得 y 和 q_n 的上限值 y_m 和 q_{nm} . 下面是一个可能的方案: 如果气体 a 是氢 (H_2), 氢分子中没有中子 ($n_{nH_2} = 0$), 则

$$0 < \Delta q_{H_2} = \frac{m_{H_2}}{\mu_{H_2}} N_A 2 y e < C\delta$$

因此可得

$$y_m = \frac{\mu_{H_2} C\delta}{2 m_{H_2} N_A e}$$

再用气体 b 做实验, 得不等式 (2), 并从而求出 q_n 的上限 q_{nm} :

$$q_n < q_{nm} = \frac{\mu_b C\delta}{m_b N_A n_{nb}}$$

为了获得较低的 q_{nm} 值, 应该用 n_{nb} 较大的气体做实验. 实际上采用哪两种气体做实验, 必须考虑许多与实验条件有关的因素, 才能作出恰当的选择.

本题通过题文所述实验装置及实验过程, 要求学生分析实验的原理, 推算实验精度的上限并设计出可测定实验精度上限的实验. 这种试题是学生从未接触过的, 试题内容也涉及近代物理、微观粒子的电学测量等许多实验方面的内容, 具有较大的难度. 有相当一部分学生由于对题意未能完全理解而回答不出所提的全部问题, 特别是第 3 问, 只有很少的学生能够回答出来.

10. 某些非电磁量的测量是可以通过一些相应的装置转化为电磁量来测量的. 一平板电容器的两个极板竖直放置在光滑的水平平台上, 极板的面积为 S , 极板间的距离为 d . 极板 1 固定不动, 与周围绝缘; 极板 2 接地, 且可在水平平台上滑动并始终与极板 1 保持平行. 极板 2 的两个侧边与劲度系数为 k 、自然长度为 L 的两个完全相同的弹簧相连, 两弹簧的另一端固定. 图 1-16 是这一装置的俯视图. 先将电容器充电至电压 U 后即与电

源断开,再在极板 2 的右侧的整个表面上施以均匀的向左的待测压强 p ,使两极板之间的距离发生微小的变化,如图 1-17 所示.测得此时电容器的电压改变量为 ΔU .设作用在电容器极板 2 上的静电作用力不致引起弹簧的可测量到的形变,试求待测压强 p .

解析

因电容器充电后与电源断开,极板上的电量保持不变,故两板之间的电压 U 应与其电容 C 成反比;而平板电容器的电容 C 又与极板间的距离 d 成反比;故平板电容器的两板之间的电压与距离 d 成正比,即

$$U = Ad \quad (1)$$

式中 A 为比例系数.

极板 2 受压强作用而向左移动,并使弹簧形变.设达到平衡时,极板 2 向左移动的距离为 Δd ,电容器的电压减小了 ΔU ,则有

$$U - \Delta U = A(d - \Delta d) \quad (2)$$

由(1)与(2)式得

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{\Delta d}{d} \quad (3)$$

极板 2 移动后,连接极板 2 的弹簧偏离其原来位置 θ 角,弹簧伸长了 ΔL ,如图 1-18 所示,弹簧的弹力在垂直于极板的方向上的分量与加在极板 2 上的压力平衡,即有

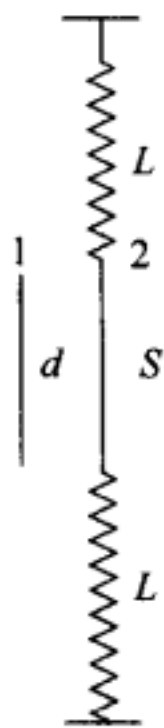


图 1-16

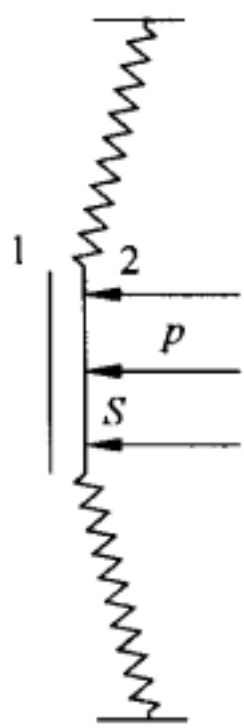


图 1-17

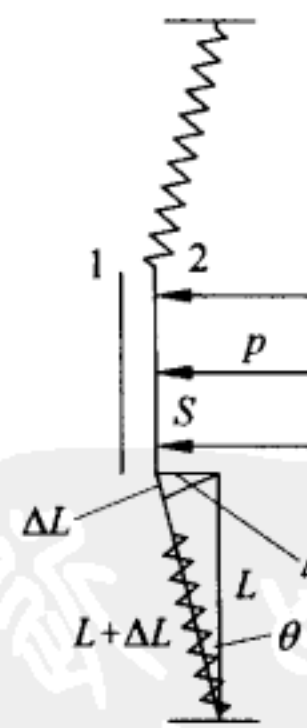


图 1-18

$$pS = 2k\Delta L \sin\theta \quad (4)$$

由几何关系知

$$\sin\theta \approx \frac{\Delta d}{L} \quad (5)$$

解(3)、(4)、(5)式并由图 1-18 知 $(L + \Delta L)^2 = L^2 + (\Delta d)^2$, 可得

$$p = \frac{kd^3}{L^2 S} \left(\frac{\Delta U}{U} \right)^3 \quad (6)$$

11. 有一半径为 R 的不导电的半球薄壳, 均匀带电, 倒扣在 xOy 面上, 如图 1-19 所示. 图中 O 为球心, $ABCD$ 为球壳边缘, AOC 为直径. 有一电荷量为 q 的点电荷位于 OC 上的 E 点, $\overline{OE} = r$. 已知将此点电荷由 E 点缓慢移至球壳顶点 T 时, 外力需做功 $W, W > 0$, 不计重力影响.

1) 试求将此点电荷由 E 点缓慢移至 A 点外力需做功的正负及大小, 并说明理由.

2) P 为球心正下方的一点, $OP = R$. 试求将此点电荷由 E 点缓慢移至 P 点外力需做功的正负及大小, 并说明理由.

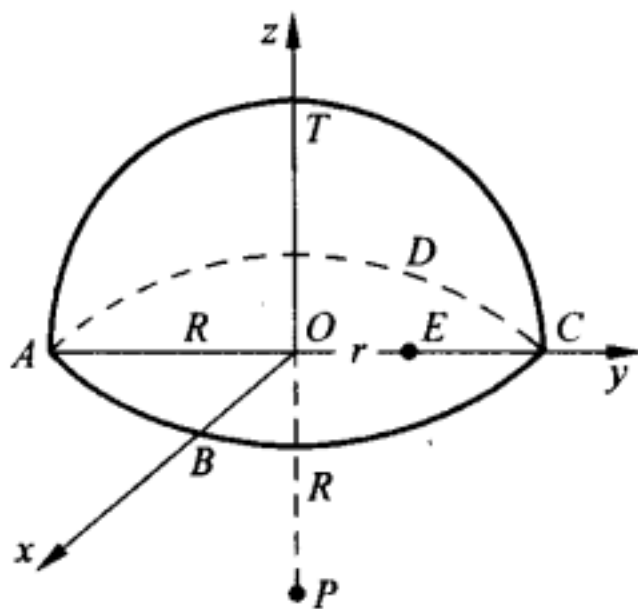


图 1-19

解析

1) **解法 I** 设想取另一完全相同的带电半球壳扣在题给的半球壳下面, 构成一个完整的均匀带电球壳, 则球壳及其内部各点电势都相等, 令 V 表示此电势. 根据对称性可知, 上、下两个半球壳分别在圆面 $ABCD$ 上各点引起的电势是相等的, 再由电势叠加原理可知, 当只有上半球壳存在时, 圆面 $ABCD$ 上各点的电势都应为完整球壳内电势的一半, 即 $V/2$, 所以将电荷由 E 点移至 A 点的过程中, 外力做功为零.

解法 II (用反证法证明圆面 $ABCD$ 上各点的场强必垂直该面) 在圆面 $ABCD$ 上任取一点为考察点, 若该点的场强不垂直该面, 则设想另一完全相同的带电半球壳扣在题给的半球壳下面, 结果两个带电半球壳在该点产生的合场强就不会为零, 这与均匀带电球壳内部场强为零的结论相矛盾. 所以均匀带电半球壳产生的电场在圆面 $ABCD$ 上各点的场强都与该圆面垂直, 该圆面为一等势面, 将电荷由 E 点移至 A 点的过程中, 外力做功为零.

2) 对完整球壳, E 点与 T 点等势, 电势差为零. 由电势叠加原理可知, 若上半球壳在 T, E 两点形成的电势差为 $(V_T - V_E)$, 则下半球壳在 T, E 两点形成的电势差必为 $-(V_T - V_E)$. 已知 $W = q(V_T - V_E)$, 所以在下半球壳产生的电场中, q 由 E 到 T 外力做功必为 $-W$. 由对称性可知, 在上半球壳产生的电场中, q 由 E 到 P 外力做的功也必为 $-W$.

此题关键是利用均匀带电球面内场强为零、电势相等的特点, 根据对称性与电势叠加原理巧妙地证明均匀带电球的大圆截面上的场强垂直截面, 而且截面上的电势就是整个均匀带电球面电势的一半. 这样, E 点至 A, P 两点间外力所做的功就不难用对应的电势能的变化来表示了.

12. 如图 1-20 所示, z 轴竖直向上, xy 平面是一绝缘的、固定的、刚性平面. 在 $A(x_0, 0, 0)$ 处放一电荷量为 $-q (q > 0)$ 的小物块, 该物块与一细线相连, 细线的另一端 B 穿过位于坐标原点 O 的光滑小孔, 可通过它牵引小物块. 现对该系统加一匀强电场, 场强方向垂直于 x 轴, 与 z 轴的夹角为 θ (如图 1-20 所示). 设小物块和绝缘平面间的摩擦因数 $\mu = \tan\theta$, 且静摩擦因数和滑动摩擦因数相同. 不计重力作用. 现通过细线来牵引小物块, 使之移动. 在牵引过程中, 我们约定: 细线的 B 端只准沿 z 轴向下缓慢移动, 不得沿 z 轴向上移动; 小物块的移动非常缓慢, 在任何时刻, 都可近似认为小物块处在力平衡状态. 若已知小物块的移动轨迹是一条二次曲线, 试求出此轨迹方程.

解析

设所加匀强电场的场强为 E , 它在 y 方向和 z 方向的分量分别为

$$E_y = -E \sin\theta, \quad E_z = E \cos\theta$$

由于物块带负电, 电场作用于物块的电力的两个分量分别为

$$F_y = -qE_y = qE \sin\theta \quad (1)$$

$$F_z = -qE_z = -qE \cos\theta \quad (2)$$

F_y 在 xy 平面内, 方向沿 y 轴正方向. F_z 垂直于 xy 平面, 被绝缘平面的支持力所平衡, 故物块对绝缘平面的正压力的大小 F_N 和 F_z 的大小相等, 即

$$F_N = qE \cos\theta$$

绝缘平面作用于物块的摩擦力

$$F_f = \mu F_N = qE \tan\theta \cos\theta = qE \sin\theta = F_y \quad (3)$$

F_f 的方向决定于物块移动的方向.

根据题意, 物块在 xy 平面内的运动可看作是一种在力平衡下的缓慢移动. 作用于物块的三个力 F_y 、 F_f 和线的拉力 F_T 都在 xy 平面内. 物块在任一位置达到平衡时的受力情况如图 1-21 所示. φ 为细线与 x 轴的夹角. 把 F_T 沿 x 和 y 方向分解得

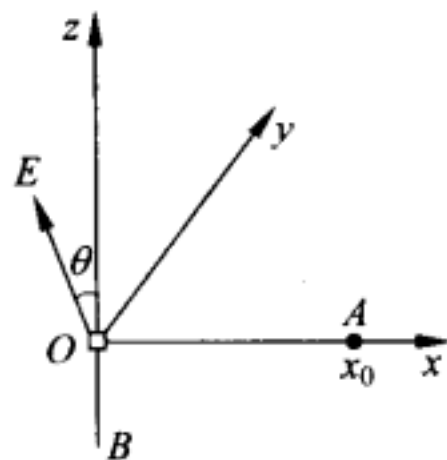


图 1-20

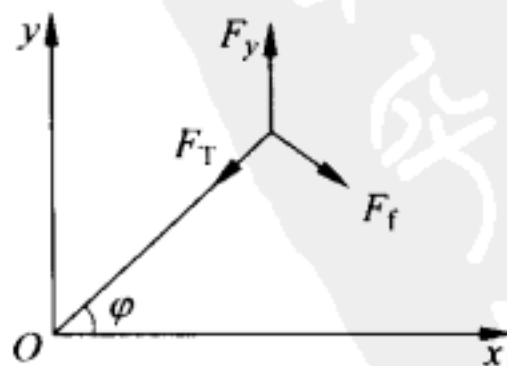


图 1-21

$$F_{Tx} = -F_T \cos \varphi, \quad F_{Ty} = -F_T \sin \varphi$$

用 F_{ix} 和 F_{iy} 表示 F_i 的两个分量, 物块平衡时, 有

$$F_y - F_T \sin \varphi + F_{iy} = 0 \quad (4)$$

$$-F_T \cos \varphi + F_{ix} = 0 \quad (5)$$

由(4)、(5)式得

$$(F_y - F_T \sin \varphi)^2 + F_T^2 \cos^2 \varphi = F_i^2$$

注意到(3)式, 得

$$F_T(F_T - 2F_y \sin \varphi) = 0$$

得 $F_T = 0$ 或 $F_T = 2F_y \sin \varphi$ (6)

因要小物块缓慢移动, 需要细线牵引, $F_T = 0$ 不符合题意, 应舍去. 因 $0 < \varphi < \pi$, $F_T = 2F_y \sin \varphi > 0$, 将 F_T 代入(4)、(5)式, 有

$$F_{iy} = F_T \sin \varphi - F_y = -F_y \cos 2\varphi$$

$$F_{ix} = F_T \cos \varphi = -F_y \sin 2\varphi$$

摩擦力方向的斜率

$$k = \frac{F_{iy}}{F_{ix}} = -\cot 2\varphi \quad (7)$$

k 是摩擦力方向与 x 轴夹角的正切, 即摩擦力方向的斜率, 因摩擦力始终沿轨道的切线方向, 故 k 也就是轨道切线的斜率. 下面, 通过对(7)式的分析来寻找轨道方程.

当 $\varphi = 0$, $k = \infty$ 即在起点 A 时, 轨道的切线与 x 轴垂直.

当 $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $k = \infty$, 一种情况是小物块运动到 y 轴上后, 沿 y 轴作直线运动到 O 点, 但这与题设轨迹移动是一条二次曲线不符, 因而它一定表示轨道在 O 点的切线与 x 轴垂直.

在二次曲线中, 曲线上两点切线相互平行的只有椭圆或圆. 又因为 A 、 O 两点的切线与它们的连线相垂直, 这连线应为曲线的轴线, 且在 Ox 轴上, 另一轴在它的垂直平分线上且与 y 轴平行. 曲线与此轴线的交点的切线的斜率为 0. 代入(7)式得 $\varphi = \frac{\pi}{4}$, 故该曲线为圆, 其方程为

$$\left(x - \frac{x_0}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{x_0^2}{4} \quad (8)$$

本题若从运动学的规律去思考就会误入迷津, 难以求解; 若能抓住“力平衡状态”的条件, 列出有关方程, 利用解析几何的知识, 通过条件的筛选, 就会找到正确解题的途径.

13. 一个由绝缘细线构成的刚性圆形轨道,其半径为 R . 此轨道水平放置,圆心在 O 点. 一个金属小珠 P 穿在此轨道上,可沿轨道无摩擦地滑动,小珠 P 带电荷 Q . 已知在轨道平面内 A 点($\overline{OA}=r < R$)放有一电荷 q . 若在 OA 连线上某一点 A' 放电荷 q' ,则给 P 一个初速度,它就沿轨道作匀速圆周运动. 求 A' 点位置及电荷 q' 之值.

解析

若要带电小珠 P 能在圆周轨道上作匀速圆周运动,必须使轨道上各点的电势相等,亦即使轨道上各点的电场强度的切线分量为零. 下面的三个解法中,解法 I 从轨道上三个特定点的电势相等出发;解法 II 利用了轨道上两个特定点的电势相等及一个特定点的切向电场为零;解法 III 则从轨道上任意点的切向电场为零出发.

现设圆心 O 为坐标原点. P 点的坐标为 (x, y) , $\overline{OA'}=r'$, 圆环轨道上的电势为 φ_0 , 于是有

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (1)$$

$$k \frac{q}{\sqrt{(x-r)^2 + y^2}} + k \frac{q'}{\sqrt{(r'-x)^2 + y^2}} = \varphi_0 \quad (2)$$

解法 I 取轨道上 B, C, D 三个特定点,根据它们的坐标,由(2)式分别得

$$B \text{ 点}(R, 0): \quad k \frac{q}{R-r} + k \frac{q'}{r'-R} = \varphi_0 \quad (3)$$

$$C \text{ 点}(-R, 0): \quad k \frac{q}{R+r} + k \frac{q'}{r'+R} = \varphi_0 \quad (4)$$

$$D \text{ 点}(0, R): \quad k \frac{q}{\sqrt{R^2 + r^2}} + k \frac{q'}{\sqrt{r'^2 + R^2}} = \varphi_0 \quad (5)$$

由此三式解出 q', r' 及 φ_0 . 由(3)、(4)式得

$$q' = (-r/R)(r'^2 - R^2)q / (R^2 - r^2) \quad (6)$$

由(3)、(5)、(6)式得

$$\frac{1}{R-r} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + r^2}} = \frac{r}{R} \frac{r'^2 - R^2}{R^2 - r^2} \left(\frac{1}{r'-R} - \frac{1}{\sqrt{r'^2 + R^2}} \right)$$

化简得

$$(R/r + 1) - \sqrt{(R/r)^2 - 1} = (r'/R + 1) - \sqrt{(r'/R)^2 - 1} \quad (7)$$

此式为 r' 的方程,显然当

$$r'/R = R/r, \quad \text{即} \quad r' = R^2/r \quad (8)$$

时成立,这就是所求 r 的一个解. 将(8)式代入(6)式,得 q' 为

$$q' = -(R/r)q \quad (9)$$

将(8)、(9)式代入(2)式中,得 φ_0 为

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= \frac{kq}{\sqrt{R^2 - 2xr + r^2}} - \frac{k(R/r)q}{\sqrt{r'^2 - 2r'x + R^2}} \\ &= \frac{kq}{\sqrt{R^2 - 2xr + r^2}} - \frac{kq}{(r/R)\sqrt{R^4/r^2 - 2R^2x/r + R^2}} = 0\end{aligned}\quad (10)$$

答: $r' = R^2/r, q' = -(R/r)q, \varphi_0 = 0$.

解法 II 由 B、C 两点电势相等, 可写出(3)、(4)二式, 由此二式可得(6)式, 即

$$q'/q = (-r/R)(r'^2 - R^2)/(R^2 - r^2) \quad (11)$$

又由 D 点上 q, q' 所产生的电场的 x 分量之和为零

$$E_{x,D} = \frac{kq}{(R^2 + r^2)} \frac{r}{\sqrt{R^2 + r^2}} + \frac{kq'}{(r'^2 + R^2)} \frac{r'}{\sqrt{r'^2 + R^2}} = 0 \quad (12)$$

$$\text{得 } q'/q = (-r/r')(r'^2 + R^2)^{3/2}/(R^2 + r^2)^{3/2} \quad (13)$$

由(11)、(13)两式消去 q' , 得 r' 的方程为

$$(r/r')(r'^2 + R^2)^{3/2}/(R^2 + r^2)^{3/2} = (r/R)(r'^2 - R^2)/(R^2 - r^2)$$

令 $b = r'/R, f = R/r, f$ 为已知量, 则上式成为 b 的方程:

$$(f/b)(b^2 + 1)^{3/2}/(f^2 + 1)^{3/2} = (b^2 - 1)/(f^2 - 1) \quad (14)$$

此式的一个解为 $b = f$, 即

$$r' = R^2/r \quad (15)$$

代入(11)式得 $q'/q = (-R/r)(b^2 - 1)/(f^2 - 1) = -R/r$

$$\text{或 } q' = -(R/r)q \quad (16)$$

将(15)、(16)式代入(2)式得

$$\varphi_0 = 0 \quad (17)$$

下面的计算与解法 I 中(10)式的计算过程和结果相同.

解法 III

1) 设 P 为在圆环上的任意点 (x, y) . 讨论 q, q' 二电荷在此点产生的电场的切向分量. 有关角度如图 1-22 所示.

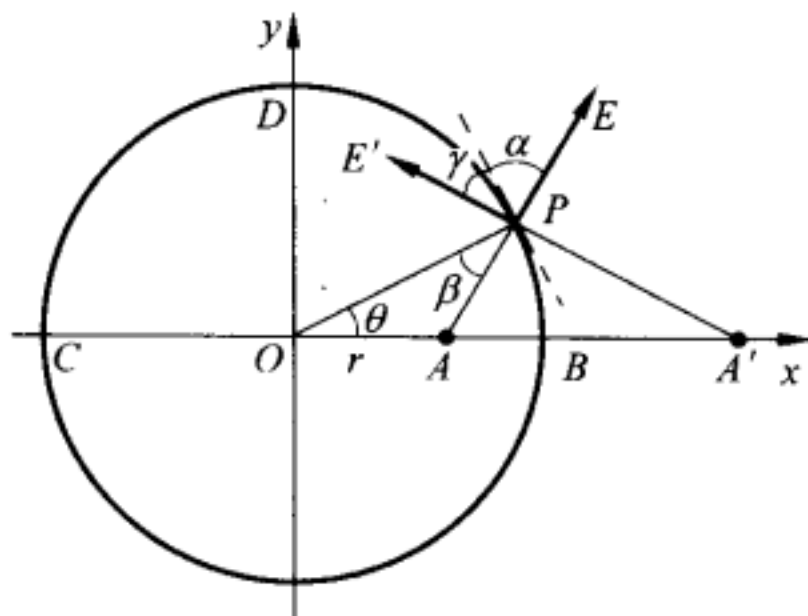


图 1-22

2) q 所产生电场的切向分量

$$E \cos \alpha = (kq / \overline{AP}^2) \cos \alpha \quad (18)$$

由几何关系及正弦定理知 $\cos \alpha = \sin \beta = (r / \overline{AP}) \sin \theta$, 于是(18)式成为

$$E \cos \alpha = (kqr / \overline{AP}^3) \sin \theta \quad (19)$$

q' 所产生电场的切向分量为

$$E' \cos \gamma = (kq' / \overline{A'P}^2) \cos \gamma \quad (20)$$

由于 $\cos \gamma = \sin(90^\circ + \gamma) = (r' / \overline{A'P}) \sin \theta$, 于是(20)式成为

$$E' \cos \gamma = (kq'r' / \overline{A'P}^3) \sin \theta \quad (21)$$

3) P 点的合电场切向分量为零, 故

$$(qr / \overline{AP}^3) \sin \theta + (q'r' / \overline{A'P}^3) \sin \theta = 0 \quad (22)$$

即

$$qr / (R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta)^{3/2} = -q'r' / (R^2 + r'^2 - 2Rr' \cos \theta)^{3/2} \quad (23)$$

亦即

$$q^{2/3} \cdot r^{2/3} / (R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta) = (q')^{2/3} (r')^{2/3} / (R^2 + r'^2 - 2Rr' \cos \theta) \quad (24)$$

此式系将(23)式两边开三次方后取平方而得. 由(23)式明显看出 q 与 q' 符号相反. 在(24)式中 $q^{2/3}$ 与 $(q')^{2/3}$ 的符号应相同. 将(24)式展开得

$$\begin{aligned} q^{2/3} r^{2/3} (R^2 + r'^2) - (q')^{2/3} (r')^{2/3} (R^2 + r^2) - \\ [q^{2/3} r^{2/3} 2Rr' - (q')^{2/3} (r')^{2/3} 2Rr] \cos \theta = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

这是 q' 与 r' 的方程, 应在 θ 取任意值时成立. 因此有

$$q^{2/3} r^{2/3} (R^2 + r'^2) - (q')^{2/3} (r')^{2/3} (R^2 + r^2) = 0 \quad (26)$$

$$q^{2/3} r^{2/3} 2Rr' - (q')^{2/3} (r')^{2/3} 2Rr = 0 \quad (27)$$

由此二式即可解出 q' 及 r' . 由(27)式得

$$q^2 r^2 (r')^3 = (q')^2 (r')^2 r^3$$

两边开方, 并注意到 q 与 q' 符号相反, 得

$$q'/q = -\sqrt{r'/r} \quad (28)$$

再由(26)式

$$r^{2/3} (R^2 + r'^2) - (q'/q)^{2/3} (r')^{2/3} (R^2 + r^2) = 0$$

利用(28)式得

$$r(R^2 + r'^2) - r'(R^2 + r^2) = 0$$

即

$$(r - r')(R^2 - rr') = 0$$

因 $(r - r') \neq 0$, 故得 $R^2 - rr' = 0$, 即

$$r' = R^2 / r \quad (29)$$

代入(28)式, 得

$$q' = -qR/r \quad (30)$$

同样亦可将(29)、(30)式代入(2)式, 得出 $\varphi_0 = 0$.

这类课题是属于静电学中的基本课题,即已知场强或电势分布求电荷分布,或者反过来已知电荷分布求场强或电势分布.此题所要解决的中心问题是给定了一个圆后,在过圆心的直线上,两个点电荷满足什么条件能在圆周上形成等势线,或者说在圆周上处处切向场强为零.从物理上讲,只要能根据点电荷的电势公式和叠加原理或者根据点电荷的场强公式和叠加原理,列出物理方程,剩下就是数学上求解了.

学生做此题时遇到的困难,首先是题目的陈述不像上面所说的那样直截了当,而是通过维持一个点电荷在圆周上做匀速运动提出来的,结果有些学生不能把这一现象与电势或场强分布联系起来,感到无从下手.另外也有一些学生能看到两者之间的联系,但他们只习惯于从向心力和向心加速度的观点看圆周运动,思路比较狭窄,结果在此题中碰到了绝缘刚性细丝对运动电荷的未知作用力(约束力),使问题复杂化而做不下去了.

14. 两个形状相同、相距很远的金属小球 A 和 B,带有等量同号电荷,它们之间的库仑作用力为 F . 现在用一带有绝缘手柄的不带电的金属小球 C 与小球 A 相触,小球 C 的大小与小球 A、B 完全相同. C 和 A 接触后再去和 B 接触,最后将 C 移去. 此时 A、B 之间的库仑作用力为_____.

解析

$$\frac{3}{8}F.$$

设金属小球 A 和 B 带有等量同号电荷 Q , 它们相距为 R , 它们之间作用力为

$$F = k \frac{Q^2}{R^2}$$

当用小球 C 与小球 A 接触后,由于两球完全相同,根据对称性, A 球上电荷 Q 将与 C 球平分,即此时两球均带电荷 $Q/2$.

当 C 与 A 接触后再与 B 球接触,则根据对称性, C 与 B 球将再次平分两球上所有电荷,故此时 C 球与 B 球上均带有 $\frac{1}{2} \left(Q + \frac{Q}{2} \right) = \frac{3}{4}Q$ 的电荷.

移去 C 后, A 与 B 之间的库仑作用力应为

$$F' = k \frac{\frac{Q}{2} \cdot \frac{3}{4}Q}{R^2} = k \frac{3}{8} \frac{Q^2}{R^2} = \frac{3}{8}F$$

15. 图 1-23 所示为一具有金属罩壳的金箔验电器. A 为金属小球, B 为金属杆, C 为金箔, D 为金属罩壳. 验电器放在绝缘板 S 上. 现将一定量的正电荷移至小球 A 上, 于是两金箔将_____. 然后用一具有绝缘柄的金属叉 K 将小球 A 与金属罩壳 D 相

连,则两金箔将_____。最后移去金属叉,再用手指触及小球 A,则两金箔将_____。

解析

张开; 闭合; 张开。

当一定量的正电荷移至小球 A 上时,电荷将分布在小球 A 和两金箔 C 上,此时两金箔因受到相斥的电力作用而张开。用金属叉 K 将 A 与 D 相连后,A、C 和 D 成为相连的导体,C 上的电荷全部移至 A、D 的外表面上,不再带电,故金箔闭合。A、C、D 成为相连的导体后,其电势相等,但与地的电势不同。移去金属叉后,并用手指触及 A,起着把 A 与地相连的作用,此时 C 将重新获得电荷,故金箔 C 再张开。

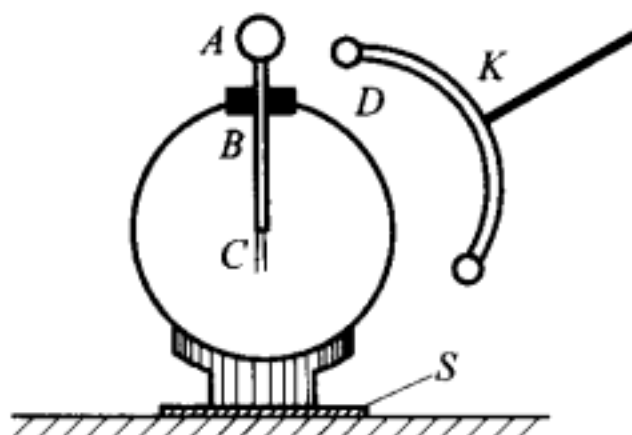


图 1-23

16. 如图 1-24 所示,在半径 r 为 0.1m 的原来不带电的金属球壳内放两个点电荷,电荷量分别是 $q_1 = -3 \times 10^{-9}\text{C}$ 和 $q_2 = 9 \times 10^{-9}\text{C}$. 它们与金属球内壁不接触. 在距球壳中心 O 点 100m 处放一个点电荷 q_3 , 它的电荷量是 $6 \times 10^{-14}\text{C}$. q_3 所受的静电力是_____ N.

解析

3.24×10^{-16} .

设 q_1 与 q_2 在金属壳内壁的感应电荷为 Q' , 则

$$Q' = -(q_1 + q_2)$$

因金属壳为中性,故壳外壁电量为

$$Q = -Q' = q_1 + q_2 = 6 \times 10^{-9}\text{C}$$

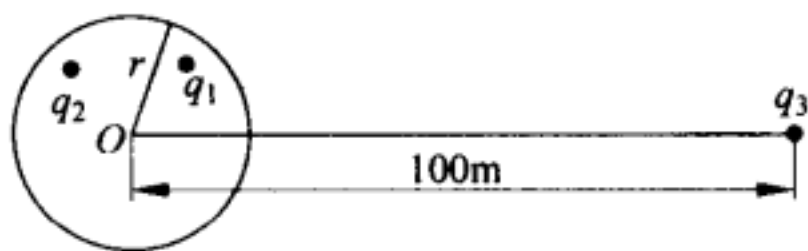


图 1-24

因 q_3 距金属壳的距离较金属壳的线度大得多,故它们之间作用力为两个点电荷间的库仑力,代入数据得

$$F = 3.24 \times 10^{-16}\text{N}$$

它们之间为斥力。

17. 试评论图 1-25 中的静电场图是否正确。

解析

这是早期物理竞赛决赛时的一道口试题,指出其谬误并不难,图 1-25 中各图的主要谬误如下:

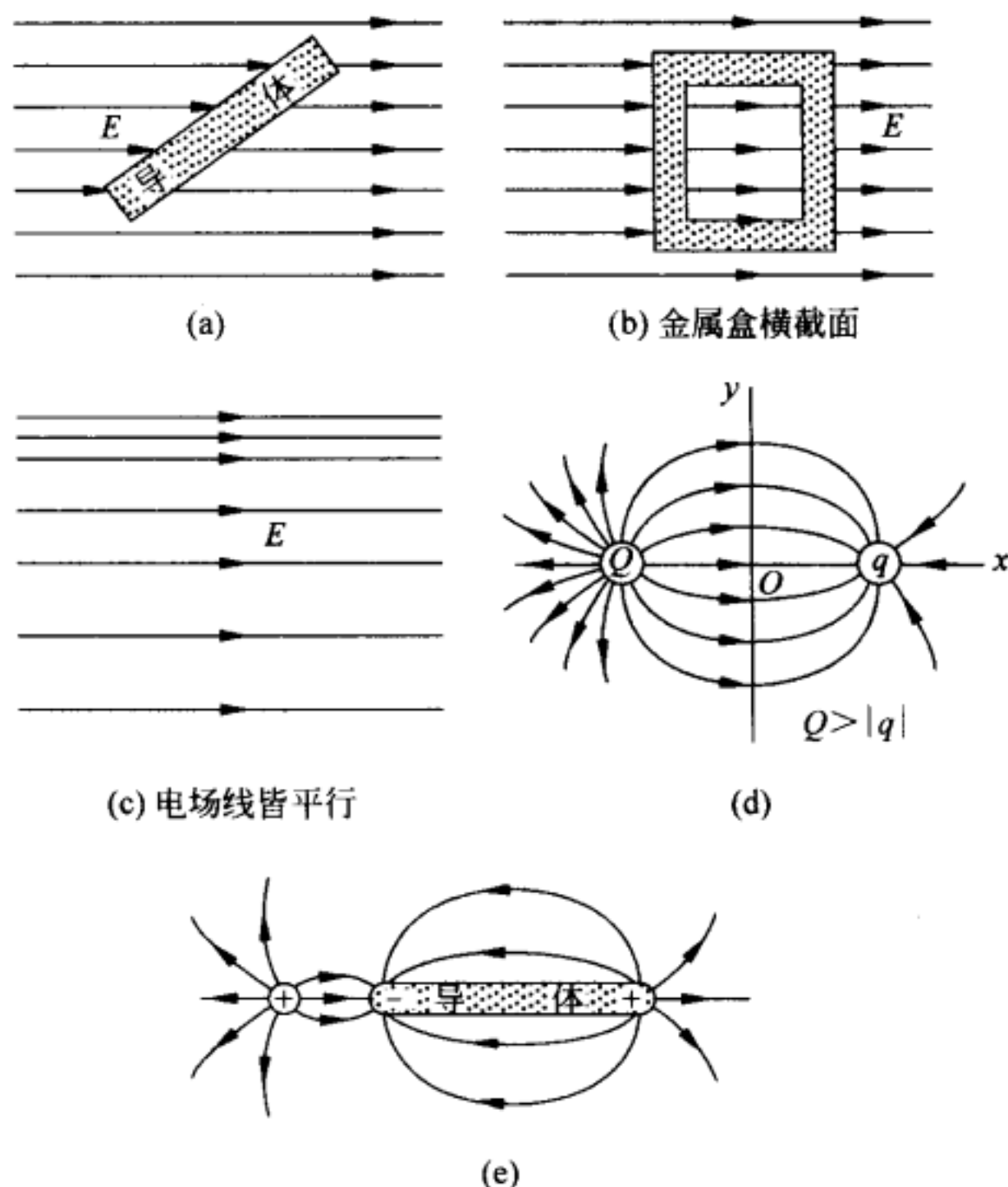


图 1-25

(a) 图：电场线应垂直导体表面。

(b) 图：金属盒内无电荷，因静电屏蔽，盒内电场应为零，不可能有电场线。

(c) 图：图中作一个二对边平行场线，另二对边垂直场线的矩形闭合回路，若一电荷沿此路径绕行一周，场力所做的功将不等于零，与静电场的性质相悖。

(d) 图：因 $Q > |q|$ 中垂面电势不等于零，因而不是等势面，场强方向不可能垂直该面。在面上各处的场强大小也不会相等。因而电场线不可能等距。

(e) 图：棒状导体是一等势体，不可能有电场线由右端发出，终止于左端。

18. 已知：使一原来不带电的导体小球与一带电荷量为 Q 的导体大球接触，分开之后，小球获得电荷量 q 。今让小球与大球反复接触，在每次分开后，都给大球补充电荷，使其电荷量恢复到原来的值 Q 。求小球可能获得的最大电荷量。

解析

解法 I 小球每一次与大球接触后，每个球所带的电荷量都会改变，但是两球所带电

荷量之比值 k 取决于两者的形状与大小,它是与原带电荷量大小无关的恒量,其数值可由第一次接触后两球的电荷量求出,即

$$k = q/(Q - q) \quad (1)$$

经过多次接触后,小球的电荷量趋近于最大值 q_m ,而大球的电荷量趋近于 Q .由于每次接触后两球电荷量比值是相同的,故有

$$q_m/Q = k = q/(Q - q) \quad (2)$$

由此可得出

$$q_m = kQ = qQ/(Q - q) \quad (3)$$

解法 II 设 q_1, q_2, \dots 和 Q_1, Q_2, \dots 分别为第 1, 2, ... 次接触后小球和大球所带的电荷量. 则有 $q_1 = q, Q_1 = Q - q, q_1/Q_1 = k = q/(Q - q), q_2/Q_2 = k = q/(Q - q), Q_2 = Q + q_1 - q_2 = Q + q - q_2$. 由此得

$$q_2 = q(1 + q/Q)$$

第 3 次接触后, $q_3/Q_3 = q/(Q - q), Q_3 = Q + q_2 - q_3, q_3 = q(1 + q/Q + q^2/Q^2)$

第 n 次接触后,两球所带电荷量之比 $q_n/Q_n = q/(Q - q), Q_n = Q + q_{n-1} - q_n$,

$$q_n = q \left(1 + \frac{q}{Q} + \frac{q^2}{Q^2} + \dots + \frac{q^{n-1}}{Q^{n-1}} \right) = q \frac{1 - (q/Q)^n}{1 - q/Q}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $q_n \rightarrow q_m$, 得出

$$q_m = qQ/(Q - q)$$

此题的物理内容即是解法 I 中的第一句话. 解法的关键也就在于是否认识了这一有关导体的静电学物理事实. 要认识这一点只需考虑到两球接触而处于静电平衡时,两球体内的场强必须处处为零,这就要求两球表面上各处静电荷的相对分布必须是确定的,与两球所带总电荷量无关. 总电荷量大时,两球表面上每一点的电荷面密度也成比例地大,因而两球上电荷量比值为—常数,由两球的形状、大小决定. 在中学物理水平上,善于抓住物理实质的学生不难作出这一结论(虽然在严格性上尚有欠缺). 学生解此题时,如果作出电荷分配的其他猜想,除非可以证明与上述结论一致,否则都是无根据的.

解法 II 的教学处理也是一种解题技巧的练习.

19. 如图 1-26 所示,在真空中有 4 个半径为 a 的不带电的相同导体球,球心分别位于边长为 r ($r \gg a$) 的正方形的四个顶点上. 首先,让球 1 带电荷 Q ($Q > 0$), 然后取—细金属丝,其一端固定于球 1 上,另一端分别依次与球 2、3、4、大地接触,每次接触时间都足以使它们达到静电平衡. 设分布在细金属丝上的电荷可忽略不计. 试求流入大地的电量的表达式.



图 1-26

解析

当球1与球2连接后,用 Q'_1 和 Q_2 分别表示球1和球2上的电量,可得 $Q_2 = Q'_1 = Q/2$. 球1与球3连接后,因球1和球3处于对称位置,其电量 Q''_1 和 Q_3 相等,故可得 $Q_3 = Q''_1 = Q/4$. 球1与球4连接后,电荷分布已呈不对称状态,设连接后球1与球4上的电量分别为 Q_1 与 Q_4 . 它们可利用等电势方法求出,即

$$U_1 = kQ_1/a + kQ_2/r + kQ_3/(\sqrt{2}r) + kQ_4/r$$

$$U_4 = kQ_1/r + kQ_2/(\sqrt{2}r) + kQ_3/r + kQ_4/a$$

以上各式中,计算各球上的电荷在另一球处引起的电势时利用了 $r \gg a$ 的条件. 由于 $U_1 = U_4$,且 $Q_1 + Q_4 = Q''_1 = Q/4$,故

$$Q_1 = Q\{1 - a(\sqrt{2} - 1)/[\sqrt{2}(r - a)]\}/8$$

$$Q_4 = Q\{1 + a(\sqrt{2} - 1)/[\sqrt{2}(r - a)]\}/8$$

利用 $r \gg a$ 的条件,上式可写成

$$Q_1 \approx Q[1 - a(\sqrt{2} - 1)/(\sqrt{2}r)]/8$$

$$Q_4 \approx Q[1 + a(\sqrt{2} - 1)/(\sqrt{2}r)]/8$$

最后将球1与球4断开并把球1接地. 设接地后球1所带电量为 q_1 ,电势为 U'_1 ,则球1的电势为

$$U'_1 = kq_1/a + kQ_2/r + kQ_3/(\sqrt{2}r) + kQ_4/r = 0$$

$$q_1 = -a(Q_2 + Q_3/\sqrt{2} + Q_4)/r$$

$$= -aQ[5/8 + 1/(4\sqrt{2}) + (\sqrt{2} - 1)a/(8\sqrt{2}r)]/r$$

$$\approx -aQ[5/8 + 1/(4\sqrt{2})]/r$$

此时球1上带负电,故流入大地之电量 $Q_{\text{入地}}$ 为

$$Q_{\text{入地}} = Q_1 + |q_1|$$

$$= Q[1 - a(\sqrt{2} - 1)/(\sqrt{2}r)]/8 + aQ[5/8 + 1/(4\sqrt{2})]/r$$

$$= Q[1 + a(5 + \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2}/2)/r]/8$$

$$= Q[1 + a(4 + 3\sqrt{2}/2)/r]/8$$

此题只需利用点电荷 q 的电势公式即可解出,注意利用对称性可减少工作量.

20. 有些仪器,如静电加速器,其高压电极外面都有一接地的金属罩,罩内充有一定压强的气体. 假定电极是一金属球,接地金属罩是一同心金属薄球壳(如图1-27),仪器工作时要求电极与金属罩之间的电势差为 U_0 . 选择适当的电极半径 R_1 和球壳半径 R_2 ,有

可能使靠近电极表面处的场强低于气体的击穿场强,从而使气体不被击穿.

1) 若 R_1 已给定,则在理想情况下, R_2 取何值,电极处的场强有最小值?

2) 在实际情况中往往适当选择 R_1/R_2 之值,使电极处的场强为上述最小值的若干倍,但仍低于击穿场强.求当电极处的场强为上述最小值的 4 倍时, R_1/R_2 应选的值.

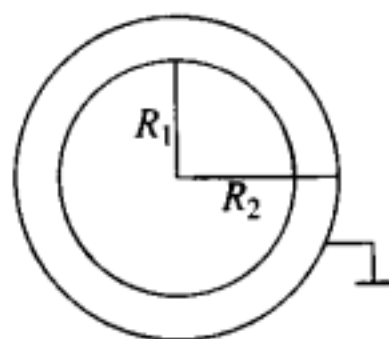


图 1-27

解析

1) 设电极所带的电量为 Q ,则球壳内壁的电量为 $-Q$.电极与球壳之间的电势差为

$$U_0 = k \frac{Q}{R_1} - k \frac{Q}{R_2} = kQ \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \quad (1)$$

式中 k 为静电力常量.靠近电极表面处的场强为

$$E = Qk/R_1^2 \quad (2)$$

由(1)、(2)两式消去 Q ,得

$$E = \frac{U_0}{R_1(1 - R_1/R_2)}$$

当 R_1 一定, $R_2 \rightarrow \infty$ 时, E 有最小值

$$E = E_{\min} = U_0/R_1$$

2) 由 $E = \frac{U_0}{R_1(1 - R_1/R_2)} = 4 \frac{U_0}{R_1}$ 可得

$$R_1/R_2 = 3/4$$

21. 图 1-28 所示为一很大的接地导体板,在与导体板相距为 d 的 A 处放一带电荷量为 $-q$ 的点电荷.

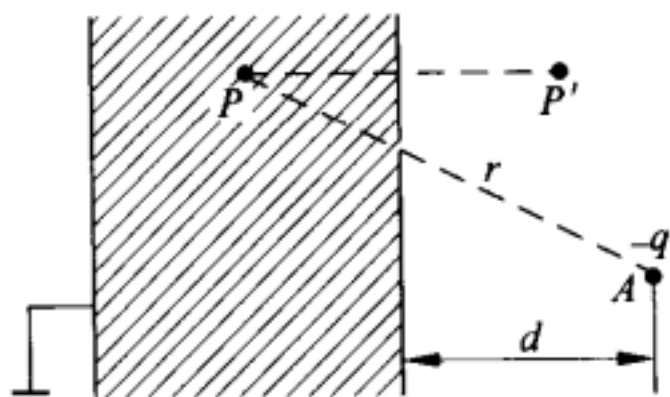


图 1-28

1) 试求板上感应电荷在导体内 P 点产生的电场强度. P 与 A 点的距离为 r .

2) 试求感应电荷在导体外 P' 点产生的电场强度. P' 与 P 对导体板右表面是对称的.

3) 在本题情形,根据场强分析证明导体表面附近的电场强度的方向与导体表面垂直.

4) 试求导体板上的感应电荷对点电荷 $-q$ 的作

用力.

5) 若在切断导体板与地的连接线后,再将 $+Q$ 电荷置于导体板上,试说明这部分电

荷在导体板上如何分布可达到静电平衡(略去边缘效应).

解析

1) 对于接地的很大的导体平板来说,导体板上的感应电荷只分布在靠近点电荷的一面,另一面无感应电荷.导体板内 P 点的电场强度是由点电荷 $-q$ 和板上感应电荷共同产生的,当达到静电平衡后,其合场强为零.所以,感应电荷在导体内部 P 点产生的电场强度与点电荷 $-q$ 产生的电场强度大小相等、方向相反,即

$$E_{iP} = kq/r^2$$

方向沿 AP 方向(如图 1-29 所示).

2) 由于 P' 点相对于面分布的感应电荷来说,是 P 点的对称点,因此感应电荷在板外 P' 点处所产生的场强大小应与它们在 P 点产生的场强大小相等,即

$$E_{iP'} = kq/r^2$$

r 为点电荷 $-q$ 到 P 点的距离. $E_{iP'}$ 的方向如图 1-29 所示,即 $E_{iP'}$ 与 E_{iP} 相对于导体板右表面应是对称的.

3) 考察导体板右表面两侧极靠近表面的两点 P_1 和 P'_1 ,如前述分析,在导体外 P'_1 点,感应电荷产生的场强大小为

$$E_{iP'_1} = kq/r_1^2$$

方向如图 1-30 所示.点电荷 $-q$ 在 P'_1 点产生的场强大小也是

$$E_{qP'_1} = kq/r_1^2$$

方向如图 1-30 所示.从图中可以看出 $E_{iP'_1}$ 与 $E_{qP'_1}$ 的合矢量 $E_{P'_1}$,即 P'_1 处的场强与导体表面垂直.

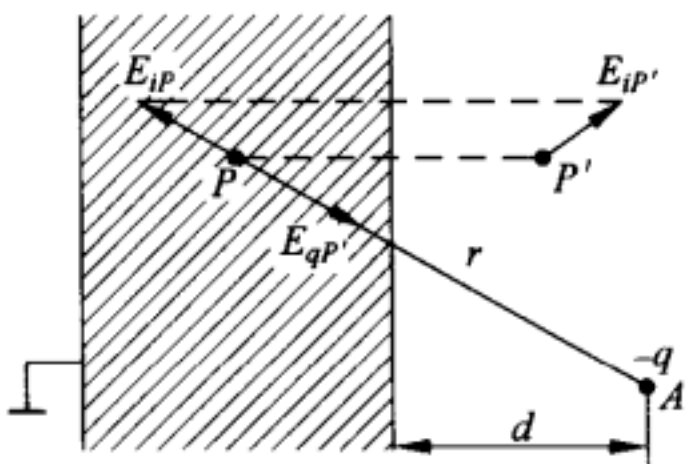


图 1-29

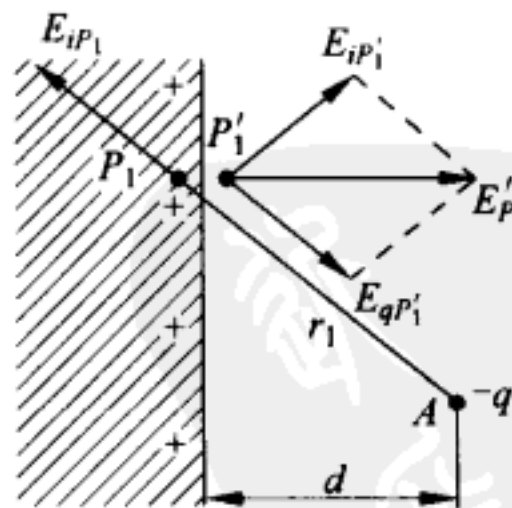


图 1-30

4) 重复 2) 的分析可知,感应电荷在 $-q$ 所在处 A 点的电场强度的大小为

$$E_{iA} = kq/(2d)^2 = kq/(4d^2)$$

方向垂直于导体板指向右方,该场作用于点电荷 $-q$ 的电场力为

$$F = -qE_{iA} = -kq^2/(4d^2)$$

负号表示力的方向垂直指向导体板。

5) 切断接地线后, 导体板上感应电荷仍保持原来的分布, 导体内仍维持各处的场强为零. 在此情况下再将 $+Q$ 电荷加在导体板上, 只要新增加的电荷在导体内部各处的场强为零, 即可保持静电平衡. 我们知道, 所加的 $+Q$ 电荷均匀地分布在导体板的两侧表面时, 上述条件即可满足, 即电荷 q 及导体板两侧的电荷可使导体内部合场强为零.

22. 在一个半径为 R 的导体球外, 有一个半径为 r 的细的非导体圆环, 圆环的圆心与导体球心的连线长为 a ($a > R$), 且与环面垂直, 如图 1-31 所示. 已知环上均匀带电, 总电量为 q , 试问:

1) 当导体球接地时, 球上感应电荷总电量是多少?

2) 当导体球不接地而所带总电量为零时, 它的电势如何?

3) 当导体球的电势为 V_0 时, 球上总电荷又是多少?

4) 情况 3) 与情况 1) 相比, 圆环受导体球的作用力改变量的大小和方向如何?

5) 情况 2) 与情况 1) 相比, 圆环受导体球的作用力改变量的大小和方向如何?

[注] 已知: 装置不变时, 不同的静电平衡带电状态可以叠加, 叠加后仍为静电平衡状态.

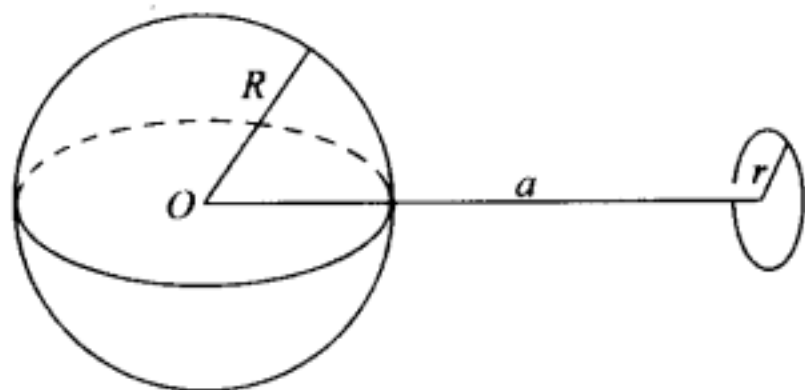


图 1-31

解析

1) 见图 1-31. 导体是一个等势体, 所以导体球接地 ($V_{球} = 0$) 时, 对于球心点有

$$V_{球心} = V_{球} = 0 \quad (1)$$

另一方面, 可以直接计算球心点的电势. 因为所有感应电荷都分布在球面上, 它们到球心的距离都是 R , 而圆环上电荷到球心的距离都是 $\sqrt{r^2 + a^2}$, 所以

$$V_{球心} = kq_{感}/R + kq/\sqrt{r^2 + a^2} \quad (2)$$

式中 k 为静电力常量, $q_{感}$ 就是要求的感应电荷总量. 由 (1)、(2) 两式即得

$$q_{感} = -Rq/\sqrt{r^2 + a^2} \quad (3)$$

2) 导体球不接地时, 其电势可通过对球心的电势计算而求得:

$$V_{球} = V_{球心} = kq_{面}/R + kq/\sqrt{r^2 + a^2} \quad (4)$$

式中 $q_{面}$ 表示分布在球面上所有电荷的代数和, 而导体球体内是不会有电荷分布的, 由于题给导体球为电中性, 即 $q_{面} = 0$, 所以由 (4) 式得

$$V_{\text{球}} = kq/\sqrt{r^2+a^2} \quad (5)$$

3) 导体球的电势为 V_0 时,再以球心点考虑:

$$V_{\text{球心}} = V_{\text{球}} = V_0 \quad (6)$$

而另一方面,球心的电势是球面上电荷和圆环上电荷分别产生的电势的叠加:

$$V_{\text{球心}} = kq_{\text{面}}/R + kq/\sqrt{r^2+a^2} \quad (7)$$

导体球的总电荷就是球面上的电荷总量,由(6)、(7)两式解得

$$q_{\text{总}} = q_{\text{面}} = RV_0/k - Rq/\sqrt{r^2+a^2} \quad (8)$$

4) 对比(8)式和(3)式可知,情况3)比情况1)只是在导体球上多了电荷 RV_0/k ,而导体球的电势相应地由零变为 V_0 ,可以设想从情况1)出发,把导体球与地断开而维持原来的 $q_{\text{总}}$ 大小及分布不变,再把电荷 RV_0/k 均匀地加到球面上,正是它使球的电势变为 V_0 ,即成为情况3)。对于球外的圆环来说,这些加上的电荷对它的作用力相当于集中在球心处的等量点电荷对它的作用力,这也就是圆环多受到的作用力。

由于圆环上的电荷均匀分布,对圆环中心到球心的连线具有轴对称性,把圆环上各线元电荷受到上述等效点电荷的作用力沿二心连线方向的分量相加,就是圆环多受到的作用力。所以,其方向是沿二心连线向外(图中向右),大小是

$$F = k \frac{(RV_0/k)q}{r^2+a^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{r^2+a^2}} = \frac{Ra q V_0}{(r^2+a^2)^{3/2}} \quad (9)$$

5) 可直接应用情况4)的结果,只是现在把(9)式中的 V_0 用情况2)中的 $V_{\text{球}}$ 值,即将(5)式代入即可。所以,情况2)比情况1)圆环多受的力方向仍为沿二心连线向外(图中向右),大小是

$$F' = k \frac{Ra q}{(r^2+a^2)^{3/2}} \cdot \frac{kq}{\sqrt{r^2+a^2}} = k \frac{Ra q^2}{(r^2+a^2)^2}$$

此题有不少同学觉得很陌生,因为中学缺少这一类的练习题目,很多人不知从何处下手。这是因为:第一,本题的关键是电势,但题目只问总电荷、作用力;第二,一个点电荷在空间一点产生电势的公式,一般在中学不讲述,但竞赛内容提要是要要求的。虽然导体球表面的感应电荷分布是不均匀的,也不知道如何分布,但因为是球体,面上的电荷距离球心都相等,因此电势叠加时,因半径 R 是常量,所以电势仅与导体球面的总电量有关,这就大大简化了问题。

分析此题时,如果抓到了电势这个关键,并且记得导体球内部和表面电势相同(这一点是中学都很强调的),再加上点电荷在空间产生电势的公式,问题就不难解决了。

为了完成4)、5)两问,需要知道本题所附的提示,即题目中的“注”。把一种电荷分布分成两种平衡的电荷分布的叠加,回答题目中4)、5)两问就不困难了。

23. 空间某一体积为 V 的区域内的平均电场强度 $\langle E \rangle$ 定义为

$$\langle E \rangle = \frac{E_1 \Delta V_1 + E_2 \Delta V_2 + E_3 \Delta V_3 + \dots}{\Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 + \dots} = \frac{\sum_i E_i \Delta V_i}{\sum_i \Delta V_i}$$

式中 ΔV_i 为体积 V 内第 i 个非常小的体积(称为体积元), E_i 为第 i 个体积元内的场强(只要体积元足够小,可以认为其中各点场强的大小和方向都相同). \sum_i 为累加号,例如

$$\sum_i \Delta V_i = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 + \dots = V$$

今有一半径为 a 原来不带电的金属球,现使它处于电量为 q 的点电荷的电场中.点电荷位于金属球外,与球心的距离为 R .试计算金属球表面的感应电荷所产生的电场在此球内的平均电场强度.

解析

根据静电平衡条件,导体内部电场强度处处为零.因此由场强叠加原理可知,可以通过求点电荷 q 的场强的办法得出感应电荷在导体球内任一点产生的场强.

设 E_s 表示金属球表面上所有感应电荷单独产生的电场的场强, E_q 表示点电荷 q 单独产生的电场的场强.根据导体的静电平衡条件可知,在金属球内部任一点 i 处,

$$E_{Si} = -E_{qi}$$

所以

$$\langle E_s \rangle = \frac{\sum_i E_{Si} \cdot \Delta V_i}{\sum_i \Delta V_i} = - \frac{\sum_i E_{qi} \cdot \Delta V_i}{\frac{4}{3} \pi a^3} = - \langle E_q \rangle \quad (1)$$

下面给出两种做法.

第一种做法:

设想将金属球取走,在原金属球位置处放一均匀分布电荷密度为 ρ 的带电球,总电荷量为

$$Q = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho \quad (2)$$

因为均匀带电球体对球外电荷的作用力,与球体的电荷全部集中在球心的点电荷对球外电荷的作用力相同,因此, Q 对点电荷 q 的作用力可由库仑定律求出.即

$$F = -k \frac{QqR}{R^2 R} \quad (3)$$

把均匀带电球分成大量体积为 ΔV_i 的体积元(图 1-32),每一体积元所带的电荷量为 $\rho \cdot \Delta V_i$,点电荷 q 对这带电体积元的作用力为 $\rho \Delta V_i \cdot E_{qi}$,点电荷 q 对带电球体的作用力为

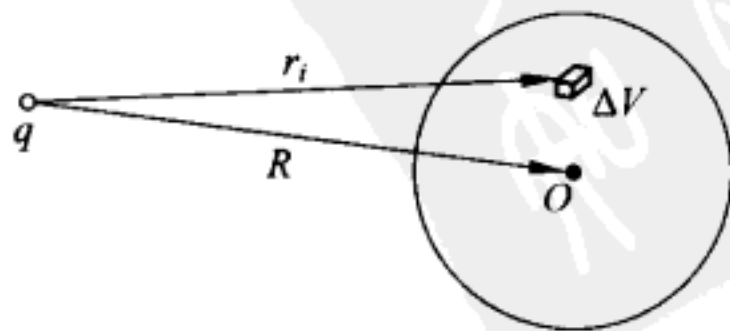


图 1-32

$$\mathbf{F}' = \sum_i \rho \Delta V_i \mathbf{E}_{qi}$$

根据牛顿第三定律

$$\mathbf{F}' = -\mathbf{F}$$

因此有

$$\sum \rho \mathbf{E}_{qi} \Delta V_i = k \frac{qQ}{R^2} \frac{\mathbf{R}}{R} = k \frac{q}{R^2} \frac{\mathbf{R}}{R} \frac{4}{3} \pi a^3 \rho$$

即

$$\langle \mathbf{E}_q \rangle = \frac{\sum_i \mathbf{E}_{qi} \Delta V_i}{\frac{4}{3} \pi a^3} = k \frac{q}{R^2} \frac{\mathbf{R}}{R}$$

由此得

$$\langle \mathbf{E}_s \rangle = -k \frac{q}{R^2} \frac{\mathbf{R}}{R} \quad (4)$$

第二种做法:

为了求得 $\langle \mathbf{E}_q \rangle$, 可设想在原导体球的位置放一均匀分布电荷密度为 ρ 的非导体球, 其总电量 $Q = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho$. 这样, 根据库仑定律, 点电荷 q 对电荷为 Q 的非导体球的作用力为

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{E}_{qi} \rho \Delta V_i = \rho \sum_i \mathbf{E}_{qi} \Delta V_i = \frac{Q \sum_i \mathbf{E}_{qi} \Delta V_i}{\frac{4}{3} \pi a^3} = Q \langle \mathbf{E}_q \rangle \quad (5)$$

因为均匀带电球对点电荷 q 的作用力等于带电球的电荷集中在球心时对点电荷 q 的作用力, 因此得

$$\mathbf{F} = k \frac{qQ}{R^2} \frac{\mathbf{R}}{R} \quad (6)$$

由(4)、(5)、(6)式可解得

$$\langle \mathbf{E}_s \rangle = -\langle \mathbf{E}_q \rangle = -\frac{\mathbf{F}}{Q} = -k \frac{q}{R^2} \frac{\mathbf{R}}{R}$$

这是一道较难的静电学题. 直接做此题需要用到积分的知识, 这超出了中学生的水平, 因此必须想其他巧妙的方法才行. 本题的关键思路是计算球中均匀带电情况下与点电荷的作用力, 即将金属球去掉, 在原处放一个均匀带电的(非金属)球体, 去计算这一带电球所受点电荷的力. 因为这个力可用牛顿第三定律由点电荷所受的力得出, 而点电荷的受力则可以避开积分而简单地算出.

24. 如图 1-33 所示,一薄壁导体球壳(以下简称为球壳)的球心在 O 点.球壳通过一细导线与端电压 $V=90\text{V}$ 的电池的正极相连,电池负极接地.在球壳外 A 点有一电量为 $q_1=10\times 10^{-9}\text{C}$ 的点电荷, B 点有一电量为 $q_2=16\times 10^{-9}\text{C}$ 的点电荷. OA 之间的距离 $d_1=20\text{cm}$, OB 之间的距离 $d_2=40\text{cm}$.现设想球壳的半径从 $a=10\text{cm}$ 开始缓慢地增大到 $a=50\text{cm}$,问:在此过程中的不同阶段,大地流向球壳的电量各是多少?已知静电力常量 $k=9\times 10^9\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}$.假设点电荷能穿过球壳壁进入导体球壳内而不与导体壁接触.

解析

分以下几个阶段讨论.

1) 由于球壳外空间点电荷 q_1, q_2 的存在,球壳外壁的电荷分布不均匀,用 σ 表示面电荷密度.设球壳半径 $a=10\text{cm}$ 时球壳外壁带的电量为 Q_1 ,因为电荷 q_1, q_2 与球壳外壁的电量 Q_1 在球壳内产生的合场强为零,球壳内为电势等于 V 的等势区.在导体表面上的面元 ΔS 所带的电量为 $\sigma\Delta S$,它在球壳的球心 O 处产生的电势为 $\Delta V_1=k\frac{\sigma\Delta S}{a}$.球壳外壁所有电荷在球心 O 产生的电势 V_1 为

$$V_1 = \sum \Delta V_1 = k \frac{\sum \Delta\sigma S}{a} = k \frac{Q_1}{a} \quad (1)$$

点电荷 q_1, q_2 在球壳的球心 O 处产生的电势分别为 $k\frac{q_1}{d_1}$ 与 $k\frac{q_2}{d_2}$,因球心 O 处的电势等于球壳的电势,按电势叠加原理,即有

$$k\frac{q_1}{d_1} + k\frac{q_2}{d_2} + k\frac{Q_1}{a} = V \quad (2)$$

代入数值后可解得球壳外壁的电量 Q_1 为

$$Q_1 = a \frac{V}{k} - a \left(\frac{q_1}{d_1} + \frac{q_2}{d_2} \right) = -8 \times 10^{-9} \text{C} \quad (3)$$

因球壳内壁无电荷,所以球壳的电量 Q_1 等于球壳外壁的电量 Q_1 ,即

$$Q_1 = Q_1 = -8 \times 10^{-9} \text{C} \quad (4)$$

2) 当球壳半径趋于 d_1 时(点电荷仍在球壳外),设球壳外壁的电量变为 Q_2 ,球壳外的电荷 q_1, q_2 与球壳外壁的电量 Q_2 在壳内产生的合场强仍为零,因球壳内仍无电荷,球壳内仍保持电势值为 V 的等势区.则有

$$k\frac{q_1}{d_1} + k\frac{q_2}{d_2} + k\frac{Q_2}{d_1} = V \quad (5)$$

解得球壳外壁的电量

$$Q_2 = d_1 \frac{V}{k} - d_1 \left(\frac{q_1}{d_1} + \frac{q_2}{d_2} \right) = -16 \times 10^{-9} \text{C}$$

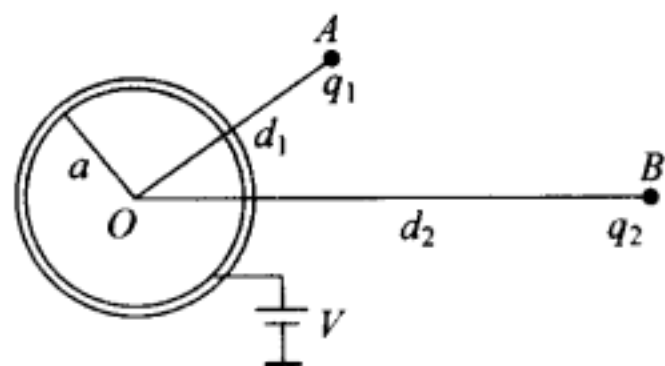


图 1-33

因为此时球壳内壁电量仍为零,所以球壳的电量就等于球壳外壁的电量,即

$$Q_{\text{II}} = Q_2 = -16 \times 10^{-9} \text{ C} \quad (6)$$

在 $a=10\text{cm}$ 到趋于 d_1 的过程中,大地流向球壳的电量为

$$\Delta Q_{\text{I}} = Q_{\text{II}} - Q_{\text{I}} = -8 \times 10^{-9} \text{ C} \quad (7)$$

3) 当点电荷 q_1 穿过球壳,刚进入球壳内(导体半径仍为 d_1),点电荷 q_1 在球壳内壁感应出电量 $-q_1$,因球壳的静电屏蔽,球壳内电荷 q_1 与球壳内壁电荷 $-q_1$ 在球壳外产生的合电场为零,表明球壳外电场仅由球壳外电荷 q_2 与球壳外壁的电荷 Q_3 所决定.由于球壳的静电屏蔽,球壳外电荷 q_2 与球壳外壁的 Q_3 在球壳内产生的合电场为零,表明对电荷 q_2 与 Q_3 产生的合电场而言,球壳内空间是电势值为 V 的等势区. q_2 与 Q_3 在球心 O 处产生的电势等于球壳的电势,即

$$k \frac{q_2}{d_2} + k \frac{Q_3}{d_1} = V \quad (8)$$

解得球壳外壁电量

$$Q_3 = d_1 \frac{V}{k} - d_1 \frac{q_2}{d_2} = -6 \times 10^{-9} \text{ C} \quad (9)$$

球壳外壁和内壁带的总电量应为

$$Q_{\text{III}} = Q_3 + (-q_1) = -16 \times 10^{-9} \text{ C} \quad (10)$$

在这过程中,大地流向球壳的电量为

$$\Delta Q_{\text{II}} = Q_{\text{III}} - Q_{\text{II}} = 0 \quad (11)$$

这个结果表明:电荷 q_1 由球壳外极近处的位置进入壳内,只是将它在球壳外壁感应的电量转至球壳内壁,整个球壳与大地没有电量交换.

4) 当球壳半径趋于 d_2 时(点电荷 q_2 仍在球壳外),令 Q_4 表示此时球壳外壁的电量,类似前面第 3) 阶段中的分析,可得

$$k \frac{q_2}{d_2} + k \frac{Q_4}{d_2} = V \quad (12)$$

由此得

$$Q_4 = d_2 \frac{V}{k} - d_2 \left(\frac{q_2}{d_2} \right) = -12 \times 10^{-9} \text{ C}$$

球壳的电量 Q_{IV} 等于球壳内外壁电量的和,即

$$Q_{\text{IV}} = Q_4 + (-q_1) = -22 \times 10^{-9} \text{ C} \quad (13)$$

大地流向球壳的电量为

$$\Delta Q_{\text{III}} = Q_{\text{IV}} - Q_{\text{III}} = -6 \times 10^{-9} \text{ C} \quad (14)$$

5) 当点电荷 q_2 穿过球壳,刚进入球壳内时(球壳半径仍为 d_2),球壳内壁的感应电荷变为 $-(q_1 + q_2)$,由于球壳的静电屏蔽,类似前面的分析可知,球壳外电场仅由球壳外壁的电量 Q_5 决定,即

$$k \frac{Q_5}{d_2} = V \quad (15)$$

可得

$$Q_5 = d_2 \frac{V}{k} = 4 \times 10^{-9} \text{C}$$

球壳的总电量是

$$Q_V = Q_5 - (q_1 + q_2) = -22 \times 10^{-9} \text{C} \quad (16)$$

在这个过程中,大地流向球壳的电量是

$$\Delta Q_N = Q_V \quad Q_N = 0 \quad (17)$$

6) 当球壳的半径由 d_2 增至 $a_1 = 50\text{cm}$ 时,令 Q_6 表示此时球壳外壁的电量,有

$$k \frac{Q_6}{a_1} = V \quad (18)$$

可得

$$Q_6 = a_1 \frac{V}{k} = 5 \times 10^{-9} \text{C}$$

球壳的总电量为

$$Q_{VI} = Q_6 - (q_1 + q_2) = -21 \times 10^{-9} \text{C} \quad (19)$$

大地流向球壳的电量为

$$\Delta Q_V = Q_{VI} - Q_V = 1 \times 10^{-9} \text{C} \quad (20)$$

本题中通过导线将导体壳、电压为 V 的电池与大地相连,使导体壳的电势值锁定为 V ,与地相接的电池和导线形成金属壳与大地进行电荷交换的通道.一个导体壳将空间分为内、外空间,设导体壳内壁为边界的壳内区域 I,导体壳外壁为边界的壳外区域 II.静电屏蔽的性质表明:区域 I 的各点的电场和电势仅由壳内电荷和壳内壁的电荷决定,壳外区域 II 中壳外电荷和壳外壁的电荷在壳内区域 I 产生的合电场为零;区域 II 的各点的电场和电势仅由壳外电荷和壳外壁的电荷决定,壳内区域 I 中壳内电荷和壳内壁的电荷在壳外区域 II 产生的合电场为零.这种分区处理和相互独立计算两个区域的电势的方法,正是求解此题的关键.中学阶段对静电屏蔽性质的了解,可能没有较深入地分析和展开,因此初接触此类题目时,会理不清其中的关系,带来解题的困难,但只要深入思考和分析,上述性质亦不难理解和运用.本题中当导体壳体半径增大时,只要没有电荷从壳外进入壳内,改变壳内的电荷量,壳内壁的电量就维持不变,总与壳内的电荷量等值异号,因此我们关心的焦点是壳外壁感应电荷的电量.在壳体半径增大过程中,壳外壁的电量会发生改变,虽然壳外壁的电荷分布并不均匀,而且由于壳外区电荷与导体壳的相对位置发生变化,壳外壁感应电荷分布亦随之变化,但是我们并不关心壳外壁感应电荷的具体分布,由

于导体壳是球面,壳外壁每一份感应电荷到球心的距离都相等,因此利用叠加原理,壳外壁全部感应电荷对球心的电势的贡献就可方便地表示出来.在导体壳体半径不断扩大过程中,原位于壳外的电荷,依次进入壳内,只要将过程仔细分作几个不同的阶段,利用区域Ⅱ中,壳外电荷与壳外壁电荷对球心的电势(其值等于球壳的电势)叠加的结果就不难求得出不同的阶段壳外壁的电荷量,从而求得壳与大地交换的电量.

25. 如图 1-34 所示,正四面体 $ABCD$ 各面均为导体,但又彼此绝缘.已知带电后 4 个面的静电势分别为 φ_1 、 φ_2 、 φ_3 和 φ_4 ,求四面体中心 O 点的电势 φ_0 .

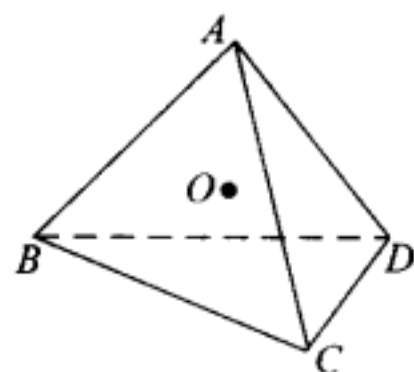


图 1-34

解析

解法 I 保持四面体不动,设想按照下述方式调换 4 个面上的电荷(由电荷分布决定的电势相应地也变换),这种方式是设想 4 个面的电荷绕中心 O 转动,由于保持了它们的相对位置不变,结果会得到正四面体的 4 个面的若干带电模式,从中可选出以下 4 种模式,见表 1-1.

表 1-1

电势 4 种转动模式	4 个面的标号			
	I	II	III	IV
1	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
2	φ_2	φ_1	φ_4	φ_3
3	φ_3	φ_4	φ_1	φ_2
4	φ_4	φ_3	φ_2	φ_1

由于转动时并未改变各面电荷之间的相对位置,所以各种模式在中心 O 点的电势 φ_0 都相同.现设想将 4 种模式叠加,则 O 点电势应为 $4\varphi_0$.另一方面,4 种模式叠加后,正四面体的每个面的电势皆为 $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4$,这时正四面体构成一封闭的等势面,它所包围的空间(其中无电荷)就为一等势体.因此 O 点电势为 $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4$,由以上得出

$$4\varphi_0 = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4$$

$$\varphi_0 = (1/4)(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4)$$

解法 II 保持正四面体不动,可以不用上述转动法,而用互换电荷的设想,也能得出许多带电模式,例如,将面 I 水平放置,我们面对面 II,设想把面 III 和 IV 上的电荷互换,则由左右对称可知,这种互换只是互换了 III、IV 面的电势,不会改变 I、II 面以及 O 点的电

势,用这种互换任意两个面的电荷的设想,也会得出许多带电模式,可从中选出4种模式,同解法 I 中的表 1-1.

下面的论证可用完全类似于解法 I 中所采用的叠加的办法,同样可得到 $\varphi_0 = (1/4)(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4)$.

这种处理方法都是用到对称性的概念.在不少情况下,用对称性方法去处理一些具有一定对称性的对象,往往可使问题简化.

26. 有 100 块平行放置的正方形大导体板,每块边长均为 L ,相邻两板彼此相对的两个表面的间距均为 $d, d \ll L$,将这些导体板从左至右顺次编号为 $1, 2, \dots, 100$.开始每板上都带有净电荷,已知第 1 块板上的净电荷为 q_1 (设 $q_1 > 0$),第 n 块板上的净电荷为 $q_n = nq_1$.今将第 1 块和第 100 块导体板接地,如图 1-35 所示.忽略边缘效应.问:

- 1) 从第 1 块和第 100 块导体板上流入大地的电荷量 Δq_1 和 Δq_{100} 各为 q_1 的多少倍?
- 2) 上述两板接地后哪块板上的电势最高? 其电势是多少?

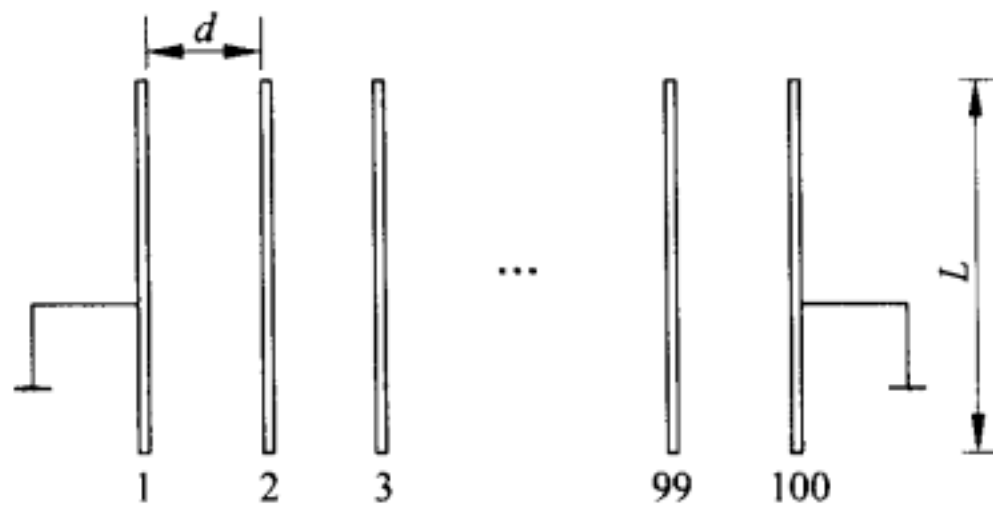


图 1-35

解析

1) 左右两端导体板接地时,各导体板上的电荷分布均将发生改变,达到静电平衡后,第 1 块板左侧面上的电荷量 $Q_{1左} = 0$,第 100 块板右侧面上的电荷量 $Q_{100右} = 0$,其余各板上的电荷分布应满足以下几点:(i)因 $d \ll L$,忽略边缘效应,导体板的电荷全部分布在板两侧表面上;(ii)相邻两板相对侧面的电荷量大小相等,符号相反,二者形成一个带电的电容器;(iii)由于电荷守恒,第 n 块板($2 \leq n \leq 99$)两侧面上电荷量的代数和 $Q_{n左} + Q_{n右} = q_n$,其中 $Q_{n左}$ 和 $Q_{n右}$ 分别为第 n 块板左侧面和右侧面所带的电荷量.

设左右两端导体板接地后,第 1 块板右侧面上的电荷量 $Q_{1右} = -Q_0$,依据上述电荷分布规律,可依次推出各导体板上的电荷量如下:

$$\left. \begin{aligned}
 Q_{1左} &= 0 & Q_{1右} &= -Q_0 \\
 Q_{2左} &= Q_0 & Q_{2右} &= -Q_0 + q_2 \\
 Q_{3左} &= Q_0 - q_2 & Q_{3右} &= -Q_0 + q_2 + q_3 \\
 &\vdots & &\vdots \\
 Q_{n左} &= Q_0 - q_2 - q_3 - \cdots - q_{n-1} & Q_{n右} &= -Q_0 + q_2 + q_3 + \cdots + q_n \\
 &\vdots & &\vdots \\
 Q_{99左} &= Q_0 - q_2 - q_3 - \cdots - q_{98} & Q_{99右} &= -Q_0 + q_2 + q_3 + \cdots + q_{99} \\
 Q_{100左} &= Q_0 - q_2 - q_3 - \cdots - q_{99} & Q_{100右} &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

相邻两板相对侧面间的电容值均相等,各为

$$C = \frac{L^2}{4\pi kd} \quad (2)$$

取地为零电势点,各板上的电势从左至右顺次记作 U_1, U_2, \dots, U_{100} , 则 $U_1 = U_{100} = 0$. 相邻两板的电势差可表示为

$$\left. \begin{aligned}
 U_2 - U_1 &= Q_{2左}/C \\
 U_3 - U_2 &= Q_{3左}/C \\
 &\vdots \\
 U_n - U_{n-1} &= Q_{n左}/C
 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(3)式中各式左右两边分别相加,得

$$U_n = \frac{1}{C}(Q_{2左} + Q_{3左} + \cdots + Q_{n左}) \quad (2 \leq n \leq 100) \quad (4)$$

将(1)式中的结果及 $q_n = nq_1$ 代入(4)式,注意到数据间的规律,可得

$$\begin{aligned}
 U_n &= \frac{1}{C} \{ (n-1)Q_0 - (n-2)q_2 - (n-3)q_3 - \cdots - [n-(n-1)]q_{n-1} \} \\
 &= \frac{1}{C} \{ (n-1)Q_0 - (n-2) \cdot 2q_1 - (n-3) \cdot 3q_1 - \cdots - [n-(n-1)] \cdot (n-1)q_1 \} \\
 &= \frac{1}{C} \{ (n-1)Q_0 - n[2+3+\cdots+(n-1)]q_1 + [2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2]q_1 \} \\
 &= \frac{1}{C} \left\{ (n-1)Q_0 - \left[\frac{n(n+1)(n-2)}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + 1 \right] q_1 \right\} \quad (5)
 \end{aligned}$$

以上最后一个等式应用了求和公式

$$1 + 2 + 3 + \cdots + l = \frac{l(l+1)}{2}$$

及

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + l^2 = \frac{1}{6}l(l+1)(2l+1)$$

由于 $U_{100}=0$, 此条件代入(5)式, 得

$$99Q_0 - \left(\frac{100 \times 101 \times 98}{2} - \frac{99 \times 100 \times 199}{6} + 1 \right) q_1 = 0 \quad (6)$$

解得 $Q_0 = 1682 \frac{1}{3} q_1$ (7)

第 1 块板流入大地的电荷量为

$$\Delta q_1 = q_1 - (Q_{1左} + Q_{1右}) = q_1 + Q_0 = 1683 \frac{1}{3} q_1 \quad (8)$$

第 100 块板流入大地的电荷量为

$$\begin{aligned} \Delta q_{100} &= q_{100} - (Q_{100左} + Q_{100右}) \\ &= q_{100} - (Q_0 - q_2 - q_3 - \cdots - q_{99}) \\ &= (2 + 3 + \cdots + 100) q_1 - 1682 \frac{1}{3} q_1 = 3366 \frac{2}{3} q_1 \end{aligned} \quad (9)$$

2) 设第 n 块板上的电势最高, 则该板两侧面上电荷量必须满足

$$Q_{n左} > 0 \quad Q_{n右} > 0 \quad (10)$$

即
$$\left. \begin{aligned} Q_0 - q_2 - q_3 - \cdots - q_{n-1} > 0 \\ -Q_0 + q_2 + q_3 + \cdots + q_n > 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

亦即
$$\left. \begin{aligned} 1682 \frac{1}{3} q_1 - \frac{(n+1)(n-2)}{2} q_1 > 0 \\ -1682 \frac{1}{3} q_1 + \frac{(n+2)(n-1)}{2} q_1 > 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

解不等式组(12), 得

$$57.5 < n < 58.5 \quad (13)$$

故 $n=58$, 即第 58 块板上电势最高. 由(5)、(2)式得

$$\begin{aligned} U_{\max} = U_{58} &= \frac{4\pi kd}{L^2} \left[57Q_0 - \left(\frac{58 \times 59 \times 56}{2} - \frac{57 \times 58 \times 115}{6} + 1 \right) q_1 \right] \\ &= 63\,441 \frac{4\pi kdq_1}{L^2} \end{aligned} \quad (14)$$

若干个导体板平行放置, 忽略边缘效应的情况下, 相邻两板相对两面的电量等值异号, 最外侧的两块板的两外侧面必等值同号. 只有这样, 才能保证各导体板内的场强为零. 按题目给定条件, 第 1 块板与最后一块板接地, 就使这两块板的外侧面电量为零. 因此写出(1)式并不困难, 剩下的问题是会用级数求和的数学工具处理问题.

27. 1) 在图 1-36 所示电路中,三个电容器的电容相同,电源的电动势 $\mathcal{E}_1 = 3.0\text{V}$, $\mathcal{E}_2 = 4.5\text{V}$. 设开关 K_1 、 K_2 接通前三个电容器都不带电,求 K_1 、 K_2 接通后三个电容器的电压 $U_{ao} = U_a - U_o$, $U_{bo} = U_b - U_o$, $U_{co} = U_c - U_o$ 各等于多少.

2) 图 1-37 所示电路中,电池的电动势为 \mathcal{E} ,两个电容器的电容皆为 C , K 为一单刀双掷开关,开始时两电容器均不带电.

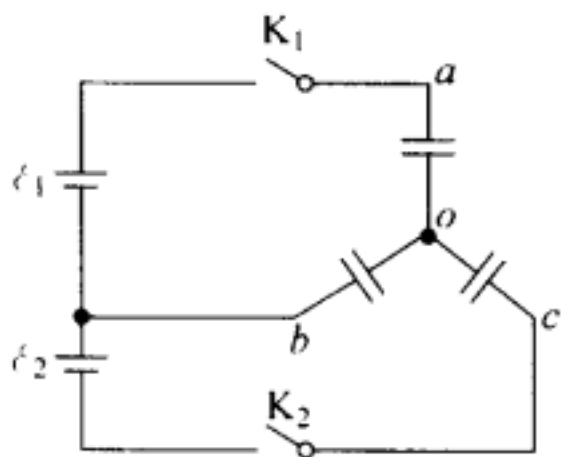


图 1-36

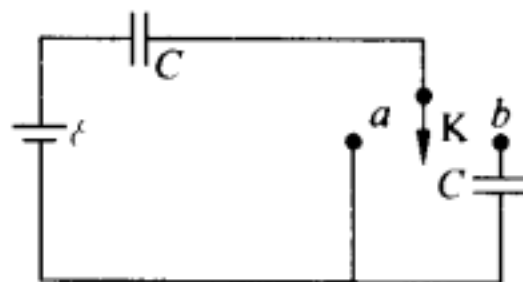


图 1-37

(i) 第一种情况,先将 K 与 a 接通,达到稳定,此过程中电池内阻消耗的电能等于_____;再将 K 与 a 断开而与 b 接通,此过程中电池供给的电能等于_____.

(ii) 第二种情况,先将 K 与 b 接通,达到稳定,此过程中电池内阻消耗的电能等于_____;再将 K 与 b 断开而与 a 接通,此过程中电池供给的电能等于_____.

解析

$$1) U_{ao} = 3.5\text{V}; U_{bo} = 0.50\text{V}; U_{co} = -4.0\text{V}.$$

设与 a 、 b 、 c 三点相连的电容器极板上的电荷量分别为 Q_1 、 Q_2 、 Q_3 ,则与它们相对的极板上的电量分别为 $-Q_1$ 、 $-Q_2$ 、 $-Q_3$. 可分别列出下列等式:

$$-Q_1 - Q_2 - Q_3 = 0$$

$$\frac{Q_1}{C} - \frac{Q_2}{C} = \mathcal{E}_1$$

$$-\frac{Q_2}{C} - \frac{Q_3}{C} = \mathcal{E}_2$$

由上面三式求解得:

$$U_{ao} = \frac{Q_1}{C} = 3.5\text{V}$$

$$U_{bo} = \frac{Q_2}{C} = 0.5\text{V}$$

$$U_{co} = \frac{Q_3}{C} = -4.0\text{V}$$

由于三个电容器组成三端网络,它们之间不是串联或并联的连接形式,因此需列出足

够的方程,联立求解,并注意相应电荷量的正负号.

$$2) (i) \frac{1}{2} \mathcal{E}^2 C, 0.$$

分析如下:

当开关 K 拨至 a 时,电容器 C 接在电动势为 \mathcal{E} 的电池上,电池中的非静电力推动电荷使极板上充上电量 Q ,因此电池所提供的总能量为 $Q\mathcal{E}=C\mathcal{E}^2$,此能量一部分消耗在电源内阻上,另一部分以电场能量的形式储存在电容器的极板间.因电容器的充电的电能为总能量的一半 $C\mathcal{E}^2/2$ ^[注],故消耗在电源内阻上的能量为 $C\mathcal{E}^2/2$.当开关 K 拨至 b 时,两个电容器串联后接在电动势为 \mathcal{E} 的电池上,因两个电容器充上的电量均为 Q ,电池所提供的总能量仍为 $Q\mathcal{E}$,与 K 拨至 a 时的情况没有任何变化,所以此过程电池所提供的总能量为零.因为新串联的电容器上两个极板上的电量为 Q 和 $-Q$ 的获得,以及两电容器上电压的重新分配仅是静电平衡的过程,不涉及电池中的非静电力的参与,所以电池中不会有电能的变化.

$$(ii) \frac{1}{4} \mathcal{E}^2 C, \frac{1}{2} \mathcal{E}^2 C.$$

分析如下:

当开关 K 拨至 b 时,电动势为 \mathcal{E} 的电池接在两个串联的电容器上,电池中的非静电力推动电荷使极板上的充上电量 Q ,因此电池所提供的总能量为 $Q\mathcal{E}$,但因 $Q=C(\mathcal{E}/2)$,故电池所提供的总能量为 $C\mathcal{E}^2/2$.此能量一部分消耗在电源内阻上,另一部分以电场能量的形式储存在电容器的极板间.因每个电容器上的电压均为 $\mathcal{E}/2$,储存在每个电容器的充电的电能为 $C(\mathcal{E}/2)^2/2=C\mathcal{E}^2/8$,两个电容器充电的能量为电源提供总能量的一半 $C\mathcal{E}^2/4$,故消耗在电源内阻上的能量为 $C\mathcal{E}^2/4$.当开关 K 拨至 a 时,极板电压为 $\mathcal{E}/2$ 的电容器接在电动势为 \mathcal{E} 的电池上,电容器要继续充电,电容器的充电的电能至 $C\mathcal{E}^2/2$,电容器由充电而增加的电能为 $C\mathcal{E}^2/4$,与此同时,消耗在电源内阻上的电能亦为 $C\mathcal{E}^2/4$,这两部分能量之和 $C\mathcal{E}^2/2$ 均由电源提供.

[注] 电容器充电的电能 $W=Q\mathcal{E}/2=C\mathcal{E}^2/2$ 的公式,在中学教材没有涉及,但竞赛提纲有此要求.普通物理教材是通过积分运算推导出来的.我们可以作如下的分析和理解:极板充电过程可以认为是将电量 q 克服电场力不断由负极移至正极,在电压 u 情况下移动电量 dq 所做的功为 udq ,因 q 和 u 都是变量,但二者是线性关系 $q=Cu$,因此在电量 q 和电压 u 分别从 0 增加至 Q 和 \mathcal{E} 时,所做的总功可用其乘积的平均值表示 $W=Q\mathcal{E}/2=C\mathcal{E}^2/2$.也可以作如下的图解,在图 1-38 中,横坐标为电量 q 纵坐标为电压 u . udq 相当于图中的细窄的长方形面积,电量 q 和电压 u 分别从 0 增加至 Q 和 \mathcal{E} 时,克服电场力所做的功使电容器充电的电能应等于图中直角三角形的面积 $W=Q\mathcal{E}/2$.

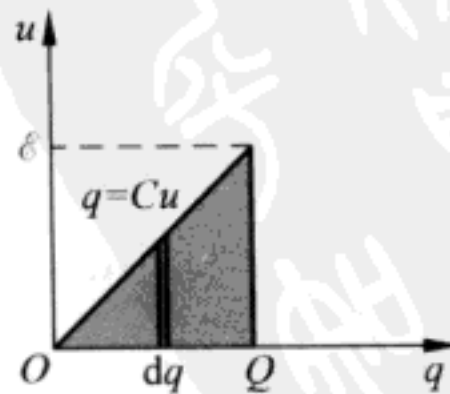


图 1-38

28. 有一空气平行板电容器,极板面积为 S ,用电池连接,极板上充有电荷 $+Q_0, -Q_0$,如图 1-39 所示.断开电源后,保持板间距离不变,在极板中部占极板间一半体积的空间填满(相对)介电常数为 ϵ 的电介质,如图 1-40 所示.

试用已知量 Q_0, S 和 ϵ 在下列横线上空白处写出待求量表示式,不要求写出演算过程.

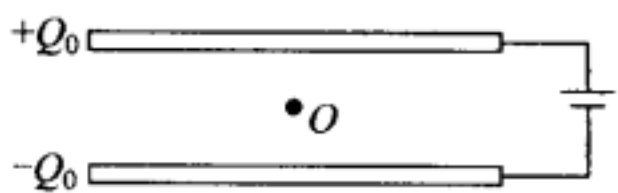


图 1-39

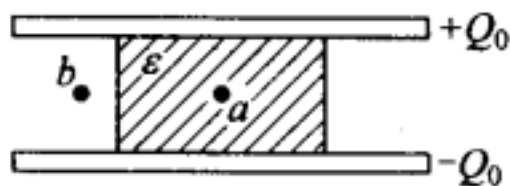


图 1-40

图 1-39 中极板间 O 点电场强度 $E_O = \underline{\hspace{2cm}}$;

图 1-40 中极板间 a 点电场强度 $E_a = \underline{\hspace{2cm}}$;

图 1-40 中极板间 b 点电场强度 $E_b = \underline{\hspace{2cm}}$;

图 1-40 中与电介质接触那部分正极板上的电荷 $Q_1 = \underline{\hspace{2cm}}$;

图 1-40 中与空气接触那部分正极板上的电荷 $Q_2 = \underline{\hspace{2cm}}$;

图 1-40 中与正极板相接触的那部分电介质界面上的极化电荷 $Q'_1 = \underline{\hspace{2cm}}$.

解析

用 d 表示极板间距, C_a 表示图 1-40 中充有介质那部分电容器的电容, C_b 表示图中未充介质那部分电容器的电容, C 表示电容器的总电容, U_0 表示图 1-39 中极板间电势差, U 表示图 1-40 中极板间电势差, 则有

$$E_O = \frac{U_0}{d} = \frac{1}{d} \left(\frac{Q_0}{C_0} \right) = \frac{1}{d} \frac{Q_0}{S/(4\pi kd)} = \frac{4\pi k Q_0}{S}$$

式中 $k = 9.00 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$.

$$E_a = E_b = \frac{U}{d} = \frac{1}{d} \left(\frac{Q}{C} \right) = \frac{1}{d} \left[\frac{Q_0}{\frac{1}{2}\epsilon C_0 + \frac{1}{2}C_0} \right]$$

$$= \frac{2}{\epsilon + 1} \frac{Q_0}{d C_0} = \frac{2}{\epsilon + 1} E_O = \frac{2}{\epsilon + 1} \frac{4\pi k Q_0}{S}$$

$$Q_1 = C_a U = \frac{\epsilon}{2} C_0 (E_a d) = \frac{\epsilon}{2} C_0 \left(\frac{2}{\epsilon + 1} \frac{Q_0}{C_0} \right) = \frac{\epsilon}{\epsilon + 1} Q_0$$

$$Q_2 = C_b U = \frac{1}{2} C_0 (E_b d) = \frac{1}{\epsilon + 1} Q_0$$

因 $E_a = E_b$, 故

$$4\pi k \frac{Q_1 + Q'_1}{S/2} = 4\pi k \frac{Q_2}{S/2}$$

解上式得

$$Q'_1 = -(Q_1 - Q_2) = -\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} Q_0$$

本题涉及电容器充有电介质的情况. 对未学过普通物理的中学生有一定的难度, $E_a = E_b$ 是重要判断的出发点. 题中 Q_1 与 Q_2 是指对应极板上的自由电荷, 由于介质的置入, 原来在极板上均匀分布的自由电荷将作重新分布, $Q_1 > Q_2$, 但 $Q_1 + Q_2 = Q_0$.

29. 有一平行板电容器, 两极板间距离为 $2d$ 、面积为 S , 中间充满厚度相同、介电常数都是 ϵ 、电阻率分别为 ρ_1 和 ρ_2 的两层漏电介质. 两极板与电压为 U_0 的直流电源相接 (如图 1-41 所示), 电源内阻可以忽略. 试求: 稳定后,

- 1) 流过两层介质的电流强度.
- 2) 两介质交界面堆积的自由电荷.
- 3) 两介质内的电场强度.

解析

解法 I 对此题可作如下的物理分析: 先忽略漏电电流, 再考虑漏电电流作出修正. 在忽略漏电电流的情况下, 由于两层介质厚度相同、介电系数相同, 在两层介质上的电势差均为 $\frac{U_0}{2}$, 这时再考虑漏电电流. 令两介质中漏电电流分别为 I_1 、 I_2 , 则开始时

$$I_1 = \frac{U_0/2}{\rho_1 d/S} = \frac{U_0 S}{2\rho_1 d}, \quad I_2 = \frac{U_0/2}{\rho_2 d/S} = \frac{U_0 S}{2\rho_2 d}$$

设 $\rho_1 < \rho_2$, 有 $I_1 > I_2$, 在两介质交界面上即开始有正电荷的堆积 (且堆积的电荷陆续增加), 而使介质层 1 上的电势差减小, 介质层 2 上的电势差增大, 从而使 I_1 减小, I_2 加大, 直到 $I_1 = I_2 = I$ 时交界面上堆积的正电荷达到一定值, 不再继续增加, 电路达到稳定. 若 $\rho_1 > \rho_2$, 可作出类似分析, 得出在两介质交界面上有负电荷堆积, 达到一定值时电路达到稳定.

1) 设稳定时电流强度为 I , 由欧姆定律可得

$$U_0 = U_1 + U_2 = IR_1 + IR_2 = I(\rho_1 + \rho_2)d/S$$

$$I = \frac{SU_0}{(\rho_1 + \rho_2)d}$$

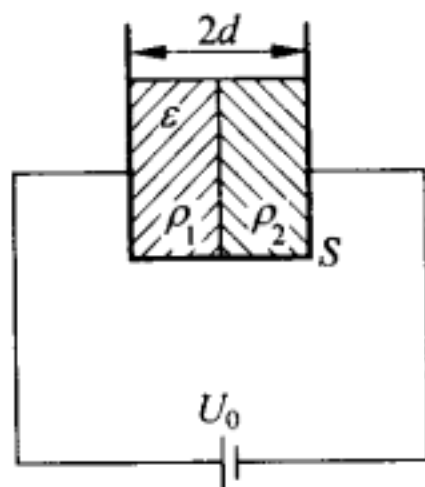


图 1-41

2) 由于两介质交界面是等势面, 整个电容器可以看作两个漏电电容器的串联, 如图 1-42 所示. 当左极板带电荷 $+Q_1$ 、右极板带电荷 $-Q_2$ 时, 由于电荷守恒, 两介质交界面处的电荷为

$$\Delta Q = Q_2 - Q_1$$

由电容器公式可得

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{\epsilon S}{4\pi k d} U_1 = \frac{\epsilon S}{4\pi k d} I R_1 = \frac{\epsilon S}{4\pi k d} \frac{U_0 S}{(\rho_1 + \rho_2) d} \frac{\rho_1 d}{S} \\ &= \frac{\epsilon S U_0 \rho_1}{4\pi k d (\rho_1 + \rho_2)} \end{aligned}$$

同理

$$Q_2 = \frac{\epsilon S U_0 \rho_2}{4\pi k d (\rho_1 + \rho_2)}$$

所以两介质交界面上堆积的电荷为

$$\Delta Q = Q_2 - Q_1 = \frac{\epsilon S U_0 (\rho_2 - \rho_1)}{4\pi k d (\rho_1 + \rho_2)}$$

当 $\rho_1 < \rho_2$ 时, $\Delta Q > 0$; 当 $\rho_1 > \rho_2$ 时, $\Delta Q < 0$.

3) 此时, 介质 1、2 中的电场强度分别为

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{U_1}{d} = \frac{I R_1}{d} = \frac{U_0 S}{d (\rho_1 + \rho_2)} \frac{\rho_1 d}{S d} = \frac{U_0 \rho_1}{d (\rho_1 + \rho_2)} \\ E_2 &= \frac{U_2}{d} = \frac{U_0 \rho_2}{d (\rho_1 + \rho_2)} \end{aligned}$$

解法 II 对于两层漏电介质来说, 由于两介质交界面是等电势面, 此题可简化为图 1-43 所示的等效电路. 其中每个等效元件的电阻和电容分别为: $R_1 = \rho_1 d/S$, $R_2 = \rho_2 d/S$, $C_1 = \epsilon S/(4\pi k d) = C_2$.

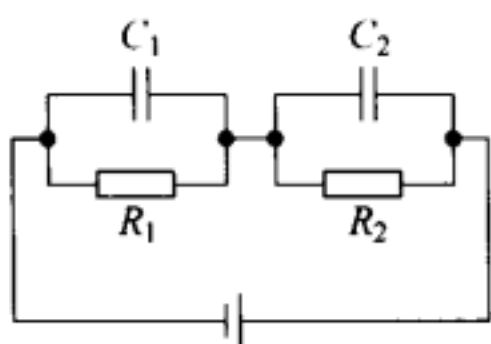


图 1-43

1) 电路稳定以后, 流过电阻 R_1 和 R_2 的电流相等, 其值

$$I = \frac{U_0}{R_1 + R_2} = \frac{U_0}{\rho_1 d/S + \rho_2 d/S} = \frac{S U_0}{(\rho_1 + \rho_2) d}$$

2) 稳定时, 电容器 C_1 、 C_2 上的电压分别与 R_1 、 R_2 两端电压 U_1 和 U_2 相等, 则

$$U_1 = I R_1 = \frac{S U_0}{(\rho_1 + \rho_2) d} \rho_1 \frac{d}{S} = \frac{\rho_1 U_0}{\rho_1 + \rho_2}$$

$$U_2 = I R_2 = \frac{S U_0}{(\rho_1 + \rho_2) d} \rho_2 \frac{d}{S} = \frac{\rho_2 U_0}{\rho_1 + \rho_2}$$

$$Q_1 = C_1 U_1 = \frac{\epsilon S}{4\pi k d} \frac{\rho_1 U_0}{\rho_1 + \rho_2} = \frac{\epsilon S U_0 \rho_1}{4\pi k d (\rho_1 + \rho_2)}$$

$$Q_2 = C_2 U_2 = \frac{\epsilon S}{4\pi k d} \frac{\rho_2 U_0}{\rho_1 + \rho_2} = \frac{\epsilon S U_0 \rho_2}{4\pi k d (\rho_1 + \rho_2)}$$

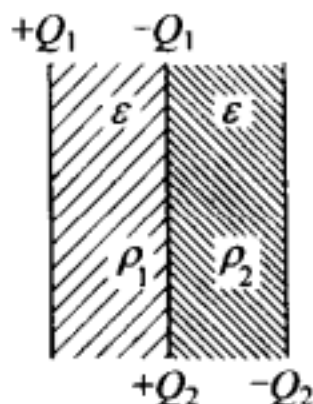


图 1-42

两层介质交界面上堆积的电荷为

$$\Delta Q = Q_2 - Q_1 = \frac{\epsilon S U_0 (\rho_2 - \rho_1)}{4\pi k d (\rho_1 + \rho_2)}$$

3) 两层介质内的电场强度分别为

$$E_1 = \frac{U_1}{d} = \frac{\rho_1 U_0}{(\rho_1 + \rho_2) d}$$

$$E_2 = \frac{U_2}{d} = \frac{\rho_2 U_0}{(\rho_1 + \rho_2) d}$$

此题要求考虑电容器中的漏电电流问题,属于中学物理知识的进一步运用.解法 I 给出了讨论此问题的物理分析,从等效的角度定性说明了两层介质交界面上有电荷堆积的原因,这是对于此题的有物理分析的解法.这需要运用先忽略漏电(漏电电流总是很小的),再考虑漏电作为修正的方法,并要能根据介质交界面上有电荷堆积时产生的对介质层上电势差的影响,说明从充电开始到电路稳定这一过程中漏电电流的大致变化.解法 II 采用等效电路的考虑,直接讨论稳定状态,这是常用的解法.(解法 I 中求堆积电量时也是用等效电路的考虑).实际过程中,电容器的漏电是不可避免的(只是严重与否的问题).因此决定串联电容中每个电容的电压,不是按电容量的分压,而是按漏电电阻的分压.讨论此类问题是有实际意义的.

此题的结果也有助于理解在直流电路中两种不同导体交界面上有静电荷堆积的现象.

30. 在静电复印机里,常用如图 1-44 的电路来调节 A、C 两板间电场强度的大小,从而用来控制复印件的颜色深浅.在操作时,首先对由金属平板 A、B 组成的平行板电容器充电.该电容器的 B 板接地, A、B 板间填充有(相对)介电常数为 ϵ 的电介质,充电后两板间的电势差为 U .而后,断开该充电电源,将连接金属平板 C 和可调电源 \mathcal{E} 的开关 K 闭合.这样, A、C 两板间的电场强度将随可调电源 \mathcal{E} 的电动势变化而得以调节.已知 C 板与 A 板很近,相互平行,且各板面积相等. A、B 板间距离为 d_1 , A、C 板间距离为 d_2 , A、C 板间空气的(相对)介电常数取为 1.试求:当电源 \mathcal{E} 的电动势为 U_0 时, A、C 两板间某点 P 处的电场强度.

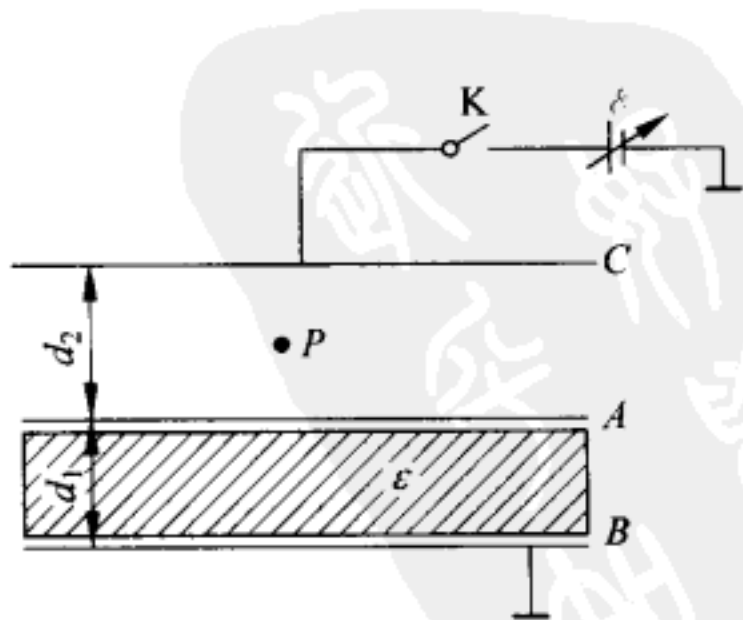


图 1-44

解析

K 闭合后的等效电路如图 1-45 所示. 设 A、B 板间的电容为 C_1 , 电势差为 U_1 . A、C 板间的电容为 C_2 , 电势差为 U_2 . 金属板的面积为 S , 则

$$C_1 = \epsilon S / 4\pi k d_1 \quad C_2 = S / 4\pi k d_2$$

而各板表面上的电荷量分别为如图所示的 $\pm Q_1$ 和 $\pm Q_2$, 于是有

$$U_1 = Q_1 / C_1 \quad U_2 = Q_2 / C_2$$

而 $U_1 + U_2 = U_0$

则得 $(Q_1 / C_1) + (Q_2 / C_2) = U_0$ (1)

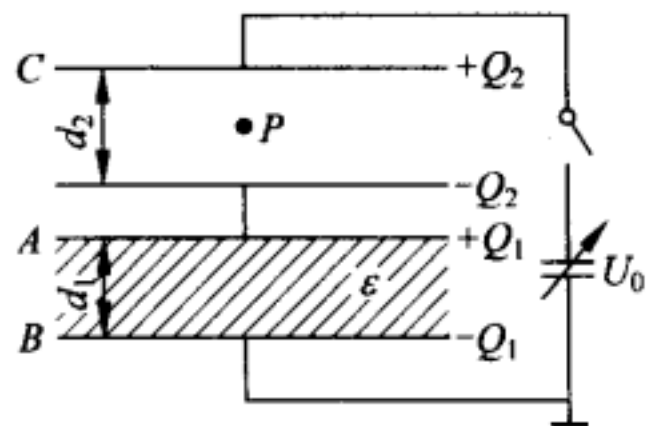


图 1-45

另外, A 板两表面上电荷量的代数和应该等于 K 闭合前该板上所带的电荷量, 设为 Q , 即

$$Q_1 + (-Q_2) = Q \quad (2)$$

而 Q 又可从 K 闭合前 C_1 的电势差求得

$$Q = C_1 U \quad (3)$$

将(3)式代入(2)式, 得

$$Q_1 - Q_2 = C_1 U \quad (4)$$

由(4)式与(1)式消去 Q_1 , 得

$$Q_2 = (U_0 - U) / [(1/C_1) + (1/C_2)] = (U_0 - U) \epsilon S / 4\pi k (d_1 + \epsilon d_2)$$

由于 A、C 两板间的电场可近似为匀强电场, 所以 P 点的电场强度 E_P 为

$$E_P = U_2 / d_2 = Q_2 / C_2 d_2 = (U_0 - U) \epsilon / (d_1 + \epsilon d_2)$$

31. 一平行板电容器, 电容 $C_0 = 300 \text{ pF}$, 极板 A_1 接在一电源的正极, A_2 接在另一电源的负极, 两电源的电动势均为 150 V , 另外一极均接地. 取一厚金属板 B , 其面积与 A_1 及 A_2 相同, 厚度为电容器两极板间距离的 $1/3$, 插入电容器两极板的正中央, 如图 1-46 所示.

1) 取一电动势为 50 V 的电源 \mathcal{E} , 负极接地, 将其正极与金属板 B 相连. 问此时由电源 \mathcal{E} 输送到金属板 B 的总电荷量是多少?

2) 在上述情况下, 左右平移金属板 B , 改变它在电容器两极板间的位置, 使 B 板上的电荷量向电源 \mathcal{E} 回输, 直到电源 \mathcal{E} 原来输给金属板 B 的电荷量全部送回电源时, 固定 B 板的位置. 然后切断所有三个电源, 并将 B 板从电容器中抽出. 求这时电容器两极板 A_1 、 A_2 之间的电压.

解析

金属板 B 插入电容器 A_1A_2 后, 与 A_1 相对的面为 B_1 , 与 A_2 相对的面为 B_2 (见图 1-46). A_1 、 B_1 与 B_2 、 A_2 分别形成两个电容器, 设它们的电容分别为 C_1 、 C_2 . 由于这两个电容器 A_1B_1 和 B_2A_2 的面积与原来的电容器 A_1A_2 相同, 而极板距离为原来的 $1/3$, 所以这两个电容器的电容量 C_1 、 C_2 均为原来电容器电容量 C_0 的 3 倍, 即

$$C_1 = C_2 = 3C_0 \quad (1)$$

1) \mathcal{E} 接入后, 电容器 A_1B_1 两极板间的电压 U_1 为

$$U_1 = 150\text{V} - 50\text{V} = 100\text{V} \quad (2)$$

因此 B_1 板上的电荷量 q_1 为负, 其数值为

$$q_1 = -C_1U_1 = -(300\text{V}) \cdot C_0 \quad (3)$$

同理, 电容器 B_2A_2 两极板间的电压 U_2 为

$$U_2 = 50\text{V} - (-150)\text{V} = 200\text{V} \quad (4)$$

B_2 板上的电荷量 q_2 为

$$q_2 = +C_2U_2 = (600\text{V}) \cdot C_0 \quad (5)$$

\mathcal{E} 接入前, B 上的电荷量为零, 电源 \mathcal{E} 输给金属板 B 的电荷量为

$$Q = q_1 + q_2 = (300\text{V}) \cdot C_0 = 9 \times 10^{-8}\text{C} \quad (6)$$

2) 改变 B 板的位置, 即改变了电容器 A_1B_1 和 B_2A_2 的电容, 从而改变了 B_1 和 B_2 两板上的电量. 当二板上电荷量之和恢复为零时, 即将电源 \mathcal{E} 输送来的电荷量全部送回. 设此时 B_1 和 B_2 板上的电荷量分别为 $-q$ 和 q , 电容器 A_1B_1 和 B_2A_2 的电容分别为 C'_1 和 C'_2 . 由于移动 B 板时电压并不改变, 有

$$q = C'_1U_1 = C'_2U_2$$

由此得

$$\frac{C'_1}{C'_2} = \frac{U_2}{U_1} \quad (7)$$

设此时 A_1 、 B_1 两板的距离为 d_1 , B_2 、 A_2 两板的距离为 d_2 , 而 A_1 、 A_2 两板的距离为 d_0 , 则

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{C'_1}{C'_2} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{200}{100} = 2 \quad (8)$$

而由题设又有

$$d_1 + d_2 = \frac{2}{3}d_0 \quad (9)$$

由(8)、(9)两式得

$$d_1 = \frac{2}{9}d_0, \quad d_2 = \frac{4}{9}d_0$$

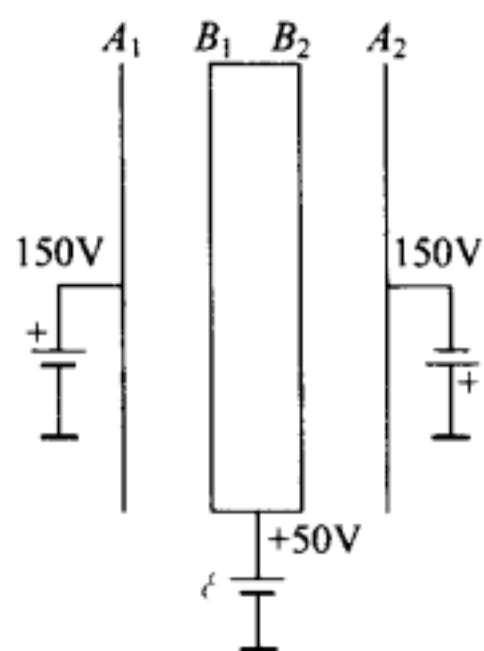


图 1-46

由此得

$$C'_1 = \frac{9}{2}C_0, \quad C'_2 = \frac{9}{4}C_0 \quad (10)$$

A_1 板上所带电荷量与 A_2 板上所带电量分别为 q 和 $-q$, 其值为

$$q = C'_1 U_1 = \frac{9}{2}C_0 \times 100\text{V} = (450\text{V}) \cdot C_0$$

切断三个电源后, A_1 、 A_2 两板上的电荷量不变, 而抽出 B 板后, 电容器 $A_1 A_2$ 上的电压为

$$U = \frac{q}{C_0} = 450\text{V}$$

本题主要考查学生的逻辑思维和推理能力. 表面看来题目所述的物理过程比较复杂, 但只要根据电容器的电容 $C=Q/U$ 及电容器充放电过程中电荷量随电压而变化的关系, 按题文所述的过程, 一步步推理, 结合平行板电容器的电容与两板间距离的关系, 要得出正确结果并不太难. 从竞赛结果看, 本题的难度属于中等水平.

32. 图 1-47 中 a 、 d 分别为一平行板电容器的两个极板, bc 是一块长宽都与 a 板相同的厚导体板, 平行地插在 a 、 d 之间, 导体板的厚度 $\overline{bc} = \overline{ab} = \overline{cd}$. 极板 a 、 d 与内阻可忽略的电动势为 \mathcal{E} 的蓄电池以及电阻 R 相连, 如图所示, 已知在没有导体板 bc 时电容器 a 、 d 的电容为 C . 现将导体板 bc 抽走, 设已知抽走过程中所做的功为 A , 求此过程中电阻 R 上消耗的电能.

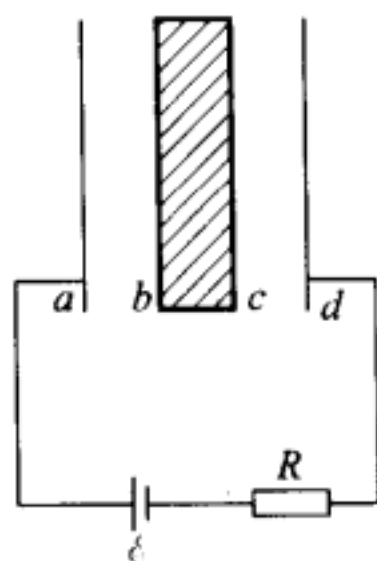


图 1-47

解析

已知没有导体板 bc 时, a 、 d 板间组成的电容器的电容为 C , 当有 bc 存在时, 电容器的电容 C' 相当于两个电容器 ab 和 cd 串联, 而每个电容器的电容和 C 相比是其 3 倍(因距离减为原来的 $1/3$), 所以得

$$1/C' = (1/3C) + (1/3C), \quad C' = (3/2)C \quad (1)$$

电容器中的电能原来为 $(1/2)C'\mathcal{E}^2 = (3/4)C\mathcal{E}^2$, 后来为 $(1/2)C\mathcal{E}^2$. 在抽走 bc 过程中电能的减少量为

$$\Delta W_1 = (3/4)C\mathcal{E}^2 - (1/2)C\mathcal{E}^2 = (1/4)C\mathcal{E}^2 \quad (2)$$

电容器极板上的电荷量原来为 $C'\mathcal{E} = (3/2)C\mathcal{E}$, 后来为 $C\mathcal{E}$, 所以电荷量的减少量为

$$(3/2)C\mathcal{E} - C\mathcal{E} = (1/2)C\mathcal{E}$$

由此可知电源充电电能为

$$\Delta W_2 = (1/2)C\mathcal{E}^2 \quad (3)$$

用 W_R 表示电阻上消耗的电能, 由能量守恒可知

$$A + \Delta W_1 = \Delta W_2 + W_R$$

所以

$$W_R = A + \Delta W_1 - \Delta W_2 \quad (4)$$

将(2)、(3)两式代入(4)式得

$$W_R = A - (1/4)C\mathcal{E}^2$$

这是一道利用能量守恒规律求解电容器充电过程中,电能变化的题目,分析时要注意各量的正负号.

33. 一个边长为 L 的方形平板电容器,板面竖直地串联在线路中. 如图 1-48 所示. 电池保证电压稳定为 U_0 . G 为一电流计. 今有一块矩形金属板,长度也为 L , 宽为 L' ($L \gg L'$), 厚为电容器板间距离 D 的 $1/p$ ($p \gg 1$). 开始时金属板竖直地放在电容器正中线上方, 下端与电容器板上端对齐, 然后自由下落. 求 t 时刻电容器板上的电量. 忽略所有边缘效应以及电磁力对金属板下落的影响.

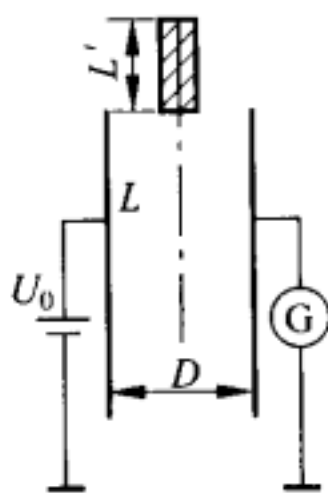


图 1-48

解析

建立坐标系如图 1-49 所示, x 轴竖直向下, 原点与电容器上端重合. 用 $x(t)$ 表示金属板下端在 t 时刻的坐标. 显然 $x(t) = gt^2/2$.

当金属板落入电容器极板间时, 电容器的电容发生变化. 设原来电容为 C_0 , 金属板落

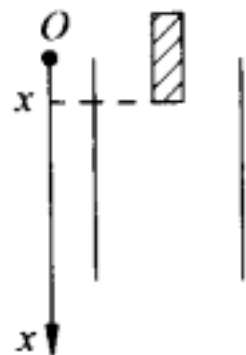


图 1-49

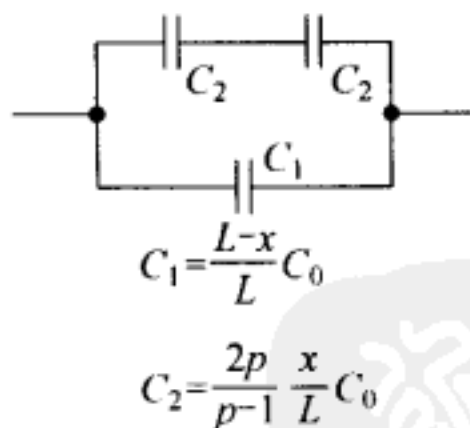


图 1-50

入部分宽度为 x , 当 $x \leq L'$ 时, 总电容相当于图 1-50 所示的电容器的连接, 故有

$$C(x) = C_0 \left(1 + \frac{1}{p-1} \frac{x}{L} \right) \quad (1)$$

当 $L' < x \leq L$ 时, 电容不发生变化

$$C(x) = C_0 \left(1 + \frac{1}{p-1} \frac{L'}{L} \right)$$

当 $L < x \leq L + L'$ 时, 在电容器内的金属板部分高为 $L + L' - x$, 故电容为

$$C(x) = C_0 \left[1 + \frac{L+L'}{(p-1)L} - \frac{1}{p-1} \frac{x}{L} \right]$$

当 $x > L+L'$ 时, 金属板全部落入电容器

$$C(x) = C_0$$

利用公式 $Q=CU_0$, 加上 x 与时间的关系, 我们得到电容器板上电荷量 Q 随时间的变化情形

$$Q(t) = \begin{cases} Q_0 [1 + gt^2/2(p-1)L], & 0 < t \leq \sqrt{2L'/g} \\ Q_0 [1 + L'/(p-1)L], & \sqrt{2L'/g} < t \leq \sqrt{2L/g} \\ Q_0 [1 + (L+L')/(p-1)L - gt^2/2(p-1)L], & \sqrt{2L/g} \leq t \leq \sqrt{2(L+L')/g} \\ Q_0, & t > \sqrt{2(L+L')/g} \end{cases} \quad (2)$$

其中 $Q_0 = C_0 U_0$, $C_0 = \epsilon L^2 / 4\pi k D$. ϵ 为极板间电介质的(相对)介电常数, k 为静电力常量.

在电容器中插入导体或电介质, 都会改变电容器的电容. 当插入导体时, 在较简单的情况下, 常相当于将单一电容器变为两个或几个电容器的连接. 这时, 只要把每个电容器的电容搞清楚, 就可算出总的等效电容, 并可进一步求电压或电荷量(如(2)式所示).

在本题中, 从金属板下端开始落入原电容器两极板之间, 到上端开始落入的过程中, 整个电容器的结构相当于图 1-50 中所示. 即金属板的左侧面与原电容器的左极板构成一个电容器 C_2 , 金属板的右侧面与原电容器的右极板也构成一个电容器 C_2 , 这两者通过金属板相串联. 再与原电容器中未插入金属板的部分的电容 C_1 相并联.

因为电容是和极板面积成正比的, 所以电容 C_1 应等于 C_0 的 $\frac{L-x}{L}$ 倍, 即 $C_1 = C_0 \frac{L-x}{L}$, 其余部分应为 $C_0 \frac{x}{L}$. 当插入金属板后, 这后一部分变为两个 C_2 的串联, 可求每个 C_2 的电容再求串联电容. 但也可这样看, 即两个 C_2 串联, 其效果相当于原电容器间的距离缩短了 $\frac{1}{p}D$, 即变为 $(1 - \frac{1}{p})D$. 由于电容是和间距成反比的, 所以两个 C_2 串联后的总电容应为 $C_0 \frac{x}{L} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p}}$. 它是与 C_1 并联的, 所以可得总的等效电容为

$$\begin{aligned} C &= C_0 \frac{L-x}{L} + C_0 \frac{x}{L} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \\ &= C_0 \left(1 + \frac{1}{p-1} \frac{x}{L} \right) \end{aligned}$$

这就是解答中的(1)式, 同理可求其他式.

34. 由许多电容量都为 C 的电容器组成一个多级网路,如图 1-51 所示.

1) 在最后一级右边的电容器上并联一个多大的电容 C' ,可使整个网路的总电容也等于 C' ?

2) 如不加 C' ,但无限增加级数,则整个网路的总电容是多少?

3) 当电路中的级数足够多时,如果在最后一级右边的电容器上并联一个任意大小的电容 C_x ,则整个网路的总电容是多少?

解析

1) 如图 1-52,在网路最后一级右边的电容器上并联一个电容 C' 时,从最后一级的 A、B 两端向右看去,总电容是

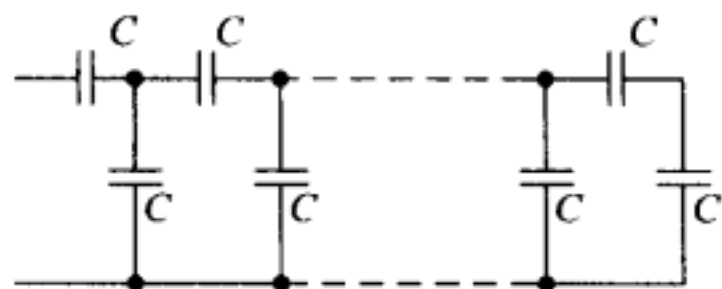


图 1-51

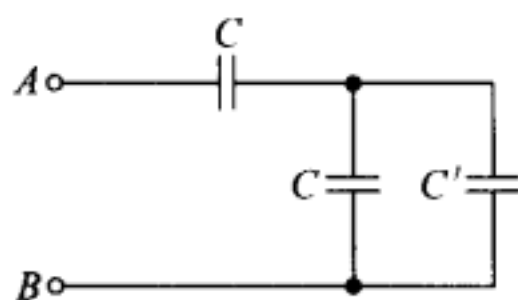


图 1-52

$$C'' = \frac{C(C+C')}{C+(C+C')} = \frac{C(C+C')}{2C+C'}$$

要使 $C''=C'$,则整个网路的电容亦可保持为 C' ,这时有

$$C' - \frac{C(C+C')}{2C+C'} = 0 \quad (1)$$

化简以后得到

$$C'^2 + CC' - C^2 = 0$$

由此可解得

$$C' = \frac{\sqrt{5}-1}{2}C \approx 0.618C \quad (2)$$

2) 由图 1-53 看出,每增加一级电路,都使全电路的电容量增加,但即使无限增加网路中的级数,也不会使总电容大于网路中被串联着的第一个电容的电容量 C .可见,这个网路的总电容有极限存在.以 C_n 表示 n 级电路的总电容,于是,极限电容的存在保证下式成立:

$$C_{n+1} = \frac{C(C+C_n)}{C+(C+C_n)} = C_n \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty) \quad (3)$$

由上式解得

$$C_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}C = 0.618C \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty)$$

3) 如果网路中的级数足够多,并在最后一级右边的电容器上并联一个任意的电容,则2)的分析仍然成立,所以得出整个网路的总电容仍然等于 $0.618C$.

35. 三个完全相同的电容器连接如图1-53.已知电容器1上带电量为 Q ,上板带正电;电容器2、3原不带电.

1) 用导线将 a 、 b 相连,求电容器2的上、下板所带电荷量及其符号.

2) 然后断开 a 、 b ,将 a 、 c 相连;再断开 a 、 c ,将 a 、 b 相连.求这时电容器2的上、下板所带电荷量及其符号.

3) 在2)的情形下,将 a 、 d 相连,再求电容器2的上、下板所带电荷量及其符号.

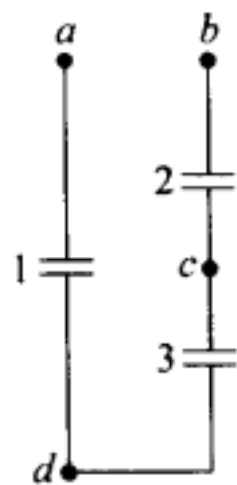


图 1-53

解析

1) a 、 b 相连后,设三个电容器上带电量分别为 q_1 、 q_2 、 q_3 ,则应有

$$q_1 + q_2 = Q$$

$$\frac{q_1}{C} = \frac{q_2}{C} + \frac{q_3}{C} \quad \text{或} \quad q_1 = q_2 + q_3$$

解得

$$q_1 = \frac{2}{3}Q, \quad q_2 = q_3 = \frac{1}{3}Q$$

电容器2上带电量 $q_2 = \frac{1}{3}Q$,上板带正电.

2) 断开 a 、 b ,把 a 、 c 相连后,电容器2上电荷量仍为 q_2 ,电容器1与3成为并联,电荷量重新分配后,它们的电荷量

$$q_1^* = q_3^* = \frac{1}{2}(q_1 + q_3) = \frac{1}{2}Q$$

再断开 a 、 c ,把 a 、 b 相连后,设三个电容器上的电荷量变为 q'_1 、 q'_2 、 q'_3 ,则有

$$q'_1 + q'_2 = q_1^* + q_2 = \frac{5}{6}Q$$

$$-q'_2 + q'_3 = q_3^* - q_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)Q = \frac{1}{6}Q$$

$$\frac{q'_1}{C} = \frac{q'_2}{C} + \frac{q'_3}{C} \quad \text{或} \quad q'_1 = q'_2 + q'_3$$

解出

$$q'_1 = \frac{11}{18}Q, \quad q'_2 = \frac{2}{9}Q, \quad q'_3 = \frac{7}{18}Q$$

电容器 2 上带电量 $q'_2 = \frac{2}{9}Q$, 上板带正电.

3) 在 2) 中带电的情况下, 把 a, b 与 d 相连后, 即成为如图 1-54 所示的电路. 这时电容器 1 短路, 电容器 2 的下板与电容器 3 的上板等电势, 另外两个板等电势. 设这时电容器 2 的下板上所带的电荷量为 q''_2 , 则电容器 3 的上板上所带的电荷量也为 q''_2 , 且

$$2q''_2 = -q'_2 + q'_3 = \frac{1}{6}Q$$

电容器 2 上带电量 $q''_2 = \frac{1}{12}Q$, 下板带正电.

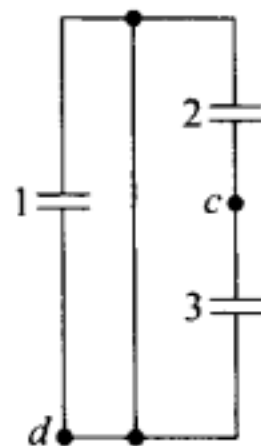


图 1-54

本题是几个电容器之间电荷量重新分配的问题, 只要掌握有关原理, 一步一步地去做, 就会得出正确结果. 但因题目中步骤较多, 容易在物理分析和计算上出错.

36. 由 n 个单元组成的电容器网络, 每一个单元由三个电容器连接而成, 其中两个电容器的电容都是 $3C$, 另一电容器的电容为 $2C$, 如图 1-55 所示. 图中 a, b 为网络的输入端, a', b' 为其输出端. 今在网络的输入端 a, b 间加一恒定的电压 U , 在其输出端 a', b' 间接入一电容为 C 的电容器.

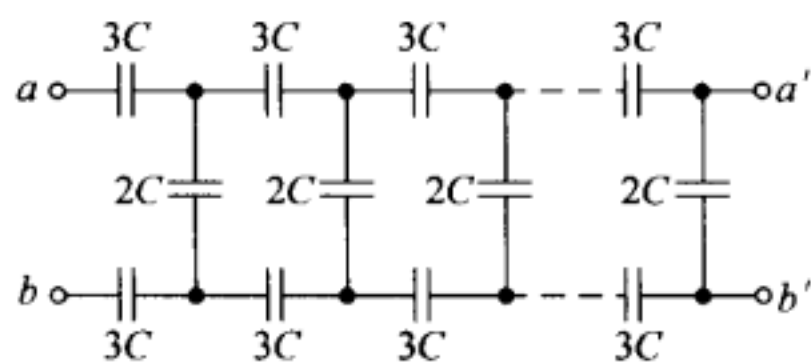


图 1-55

1) 求从第 k ($k < n$) 个单元输入端起, 后面所有电容器储存的总电能.

2) 先把第一个单元输出端与后面的网络断开, 再除去电源, 并把它的输入端短路, 求这时构成第一单元的三个电容器储存的总电能.

解析

1) 由电容器的串联公式, 不难求得整个网络的输入端 ab 间的等效电容 $C_{ab} = C$.

第 k 个单元的输入端后的网络的等效电容 $C_k = C$.

设第 k 个单元的输入端间的电压为 U_k , 它等于第 $k-1$ 个单元的输出端间的电压, 而后者等于第 $k-1$ 个单元输入端间的电压 U_{k-1} 的 $1/3$, 即 $U_k = U_{k-1}/3$.

而 U_{k-1} 为第 $k-2$ 个单元的输出电压, 它等于该单元的输入电压 U_{k-2} 的 $1/3$, 即 $U_{k-1} = U_{k-2}/3$. 由此得

$$U_k = \frac{1}{3}U_{k-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 U_{k-2} = \dots = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} U_1$$

U_1 即网络 ab 间的电压 U , 由于第 k 个单元的输入端电压为 U_k , 其输入端以后的等效电容 $C_k = C$, 则这些电容器的总电能

$$W_k = \frac{1}{2} C_k U_k^2 = \frac{1}{2} C \left(\frac{1}{3} \right)^{2(k-1)} U^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^{2k-2} C U^2$$

2) 第一个单元与后面各单元断开, 除去电源后, 其电荷分布如图 1-56(a) 所示. 当输入端短路后, 设各电容器极板上的电荷分布和两极板间的电压如图 1-56(b) 所示, 即每一电容器两极板所带电量应等值异号, 但数值未知, 根据电荷守恒定律

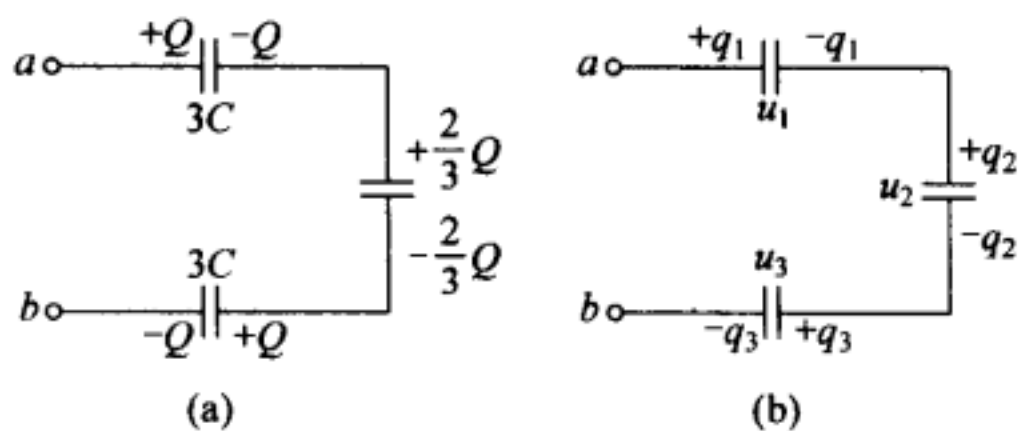


图 1-56

$$\begin{aligned} q_1 - q_3 &= Q - Q = 0 \\ -q_1 + q_2 &= -Q + \frac{2}{3}Q = -\frac{1}{3}Q \\ -q_2 + q_3 &= -\frac{2}{3}Q + Q = \frac{1}{3}Q \end{aligned}$$

由于 ab 间等势

$$u_1 + u_2 + u_3 = \frac{q_1}{3C} + \frac{q_2}{2C} + \frac{q_3}{3C} = 0$$

解以上四式得

$$q_1 = \frac{1}{7}Q, \quad q_2 = -\frac{4}{21}Q, \quad q_3 = \frac{1}{7}Q$$

这三个电容器所储存的总电能

$$W = \frac{1}{2} \frac{q_1^2}{3C} + \frac{1}{2} \frac{q_2^2}{2C} + \frac{1}{2} \frac{q_3^2}{3C} = \frac{1}{2} \frac{1}{C} \left(\frac{1}{3} \frac{Q^2}{49} + \frac{1}{2} \frac{16}{21^2} Q^2 + \frac{1}{3} \frac{Q^2}{49} \right) = \frac{1}{63} \frac{Q^2}{C}$$

37. 试求如图 1-57 所示电路中 AB 间的等效电容 C_{AB} , 已知 $C_1 = C_2 = C_3 = C_9 = 1\mu\text{F}$, $C_4 = C_5 = C_6 = C_7 = 2\mu\text{F}$, $C_8 = C_{10} = 3\mu\text{F}$.

解析

先将 C_2 等效于两个电容值相同的 C'_2 与 C''_2 串联, 如图 1-58 所示.

因为

$$C_2 = 1\mu\text{F}$$

所以

$$C'_2 = C''_2 = 2\mu\text{F}$$

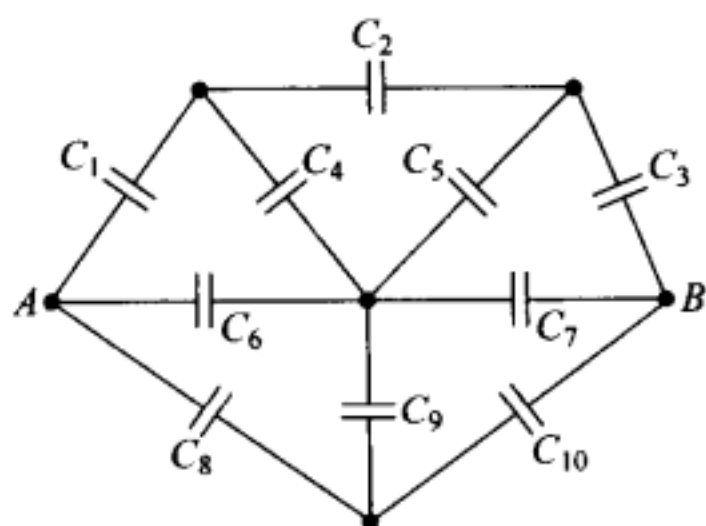


图 1-57

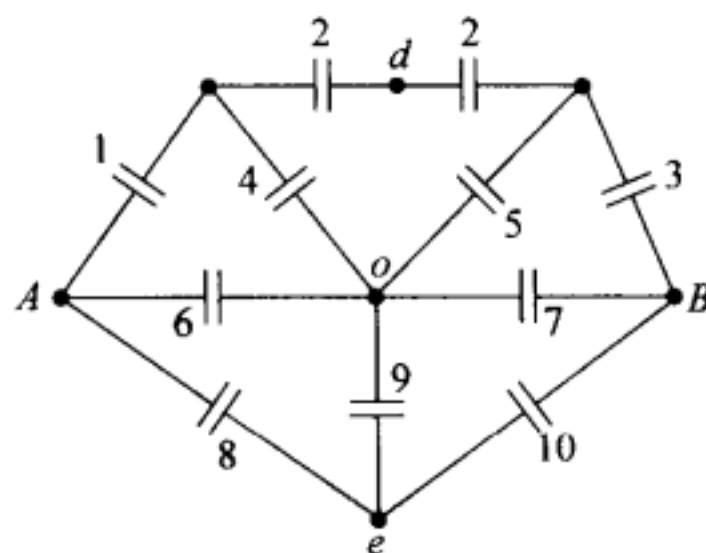


图 1-58

当 A、B 间加上电压后,利用对称性,可知 e、o、d 三点同电势,原电路可简化为图 1-59 所示的电路.这时

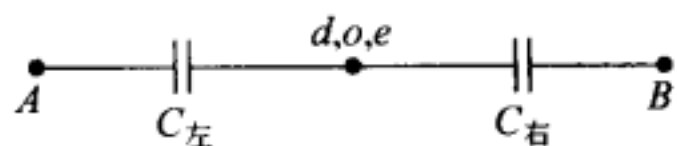


图 1-59

$$C_{左} = \frac{C_1(C'_2 + C_4)}{C_1 + C'_2 + C_4} + C_6 + C_8$$

$$= \frac{4}{5}\mu\text{F} + 2\mu\text{F} + 3\mu\text{F} = \frac{29}{5}\mu\text{F}$$

同理

$$C_{右} = C_{左}$$

所以

$$C_{AB} = \frac{C_{左} C_{右}}{C_{左} + C_{右}}$$

$$C_{AB} = 2.9\mu\text{F}$$

本题是有关电容器串、并联等效电容值的基本题,但比较灵活.难点是将电容器 C_2 等效地看作由 C'_2 和 C''_2 两个等值电容串联起来,然后利用对称性和等电势点的知识,分别求出 $C_{左}$ 和 $C_{右}$,再求出 A、B 间的等效电容.对于本题,平时学习比较死板的学生往往无从下手.

38. 如图 1-60 电路中, $C_1 = 4C_0$, $C_2 = 2C_0$, $C_3 = C_0$, 电池电动势为 \mathcal{E} , 不计内阻, C_0 和 \mathcal{E} 为已知量. 先在断开 K_4 的条件下, 接通 K_1 、 K_2 、 K_3 , 令电池给三个电容器充电; 然后断开 K_1 、 K_2 、 K_3 , 接通 K_4 , 使电容器放电, 求:

- 1) 放电过程中, 电阻 R 上共产生多少热量.
- 2) 放电过程达到放电总量一半时, R 上的电流是多大.

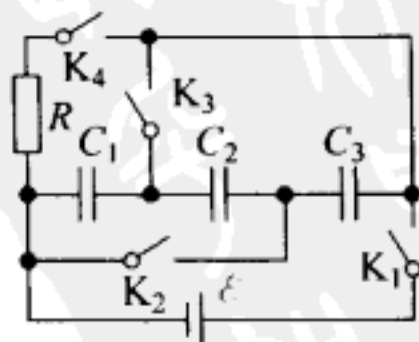


图 1-60

解析

1) 充电时, 电路及电流方向如图 1-61 所示. 充电后, 三个电容器上的电压都是 \mathcal{E} , 各电容器储能为

$$\left. \begin{aligned} W_1 &= C_1 \varepsilon^2 / 2 = 2C_0 \varepsilon^2 \\ W_2 &= C_2 \varepsilon^2 / 2 = C_0 \varepsilon^2 \\ W_3 &= C_3 \varepsilon^2 / 2 = C_0 \varepsilon^2 / 2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

三个电容器储存的能量之和为

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = 7C_0 \varepsilon^2 / 2 \quad (2)$$

三个电容器上的电荷量分别为

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= C_1 \varepsilon = 4C_0 \varepsilon \\ Q_2 &= C_2 \varepsilon = 2C_0 \varepsilon \\ Q_3 &= C_3 \varepsilon = C_0 \varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

放电时,三个电容串联放电,如图 1-62 所示. C_3 左极板的电势高于 C_2 右极板的电势,故电流的方向应如图 1-62 所标志,即 C_1 和 C_3 是放电,而 C_2 则是继续充电.

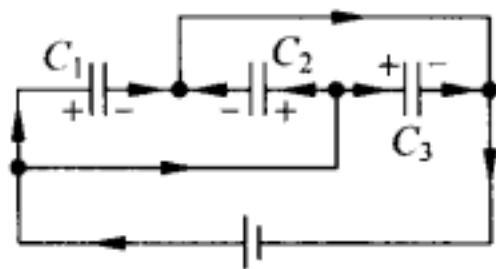


图 1-61

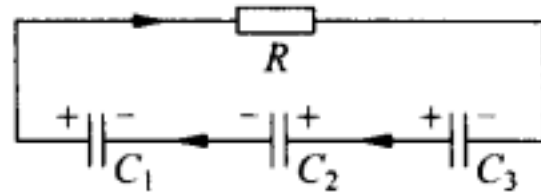


图 1-62

在整个放电过程中,流过 R 的电荷量设为 ΔQ ,则由电荷守恒可知,放电后三个电容器上的电荷量分别变为

$$\left. \begin{aligned} Q'_1 &= Q_1 - \Delta Q = 4C_0 \varepsilon - \Delta Q \\ Q'_2 &= Q_2 + \Delta Q = 2C_0 \varepsilon + \Delta Q \\ Q'_3 &= Q_3 - \Delta Q = C_0 \varepsilon - \Delta Q \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

三个电容器的电势差的大小则变为

$$U'_1 = Q'_1 / C_1, \quad U'_2 = Q'_2 / C_2, \quad U'_3 = Q'_3 / C_3 \quad (5)$$

放电终结,应有

$$U'_1 - U'_2 + U'_3 = 0 \quad (6)$$

由(4)、(5)和(6)式解得

$$\Delta Q = 4C_0 \varepsilon / 7 \quad (7)$$

将(7)式代入(4)式,有

$$\left. \begin{aligned} Q'_1 &= 24C_0\varepsilon/7 \\ Q'_2 &= 18C_0\varepsilon/7 \\ Q'_3 &= 3C_0\varepsilon/7 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

此时,各电容器的储能为

$$\left. \begin{aligned} W'_1 &= (Q'_1)^2/2C_1 = (72/49)C_0\varepsilon^2 \\ W'_2 &= (Q'_2)^2/2C_2 = (81/49)C_0\varepsilon^2 \\ W'_3 &= (Q'_3)^2/2C_3 = (9/98)C_0\varepsilon^2 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

总储能为

$$W' = W'_1 + W'_2 + W'_3 = (315/98)C_0\varepsilon^2 \quad (10)$$

比较(2)、(10)两式,可知放电后,电容器储能减少了 ΔW ,

$$\Delta W = W - W' = 2C_0\varepsilon^2/7 \quad (11)$$

由能量守恒定律可知,在放电过程中,电阻上产生的热量 H 为

$$H = \Delta W = 2C_0\varepsilon^2/7 \quad (12)$$

2) 当放电量为 $\Delta Q'' = \Delta Q/2 = 2C_0\varepsilon/7$ 时,各电容上的电量为

$$\left. \begin{aligned} Q''_1 &= Q_1 - \Delta Q'' = 26C_0\varepsilon/7 \\ Q''_2 &= Q_2 + \Delta Q'' = 16C_0\varepsilon/7 \\ Q''_3 &= Q_3 - \Delta Q'' = 5C_0\varepsilon/7 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

此时,各电容器电势差的大小为

$$U''_1 = Q''_1/C_1, \quad U''_2 = Q''_2/C_2, \quad U''_3 = Q''_3/C_3 \quad (14)$$

按照欧姆定律,此时流过电阻 R 的电流应为

$$I = (U''_1 - U''_2 + U''_3)/R \quad (15)$$

由(13)、(14)、(15)式可得

$$I = (1/2)\varepsilon/R$$

电容器串联或并联时,情况都比较简单.在混联的情况下,特别是再有一些开关来控制各支路的通断和各电容器的充放电,这时往往会使问题复杂化.但不管怎样复杂,只要真正理解了电动势和电势差的概念、电荷守恒定律、电容的概念,从这些基本概念和规律出发,总会把问题搞清楚.通过开关改变电容电路的连接方式时应注意在开关的开断时,对应的各电容的电压不能突变,因而就能比较各电容极板电势的高低,判断出充放电电流的方向.我们不能只是死记公式,到处套用.若不能从基本概念和规律出发对问题进行分析,遇到较复杂的问题时,就容易出错.

39. 在图 1-63 所示电路中,三个电容器 C_I 、 C_{II} 、 C_{III} 的电容值均等于 C ,电源的电动势为 \mathcal{E} , R_I 、 R_{II} 为电阻, K 为双掷开关.开始时,三个电容器都不带电.先接通 oa ,再接通 ob ,再接通 oa ,再接通 ob ,……,如此反复换向.设每次接通前都已达到静电平衡,试求:

- 1) 当 K 第 n 次接通 ob 并达到平衡后,每个电容器两端的电压各是多少?
- 2) 当反复换向的次数无限增多时,在所有电阻上消耗的总电能是多少?

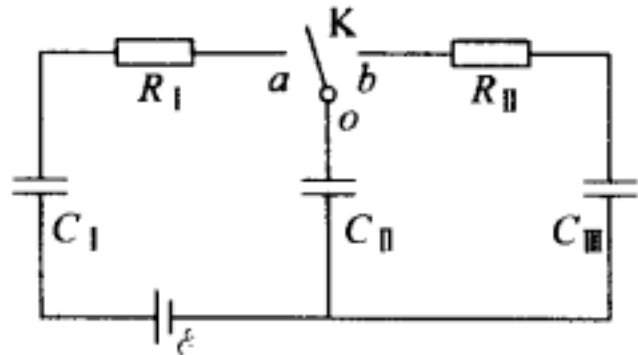


图 1-63

解析

1) 为了求每个电容器两端的电压,我们先来求每个电容器上的电荷量.原来 3 个电容器都不带电,所以当第 1 次接通 oa 后,电路为 C_I 和 C_{II} 串联,两者的电容又相等,所以等效电容应为 $C/2$,由此可知, C_I 的电荷量应为

$$Q_1 = C\mathcal{E}/2 \quad (1)$$

下面来求第 n 次接通 oa 后 C_I 上的电荷量.我们用 Q_1 、 Q_2 、……依次表示每次接通 oa 时,电池在该次中对 C_I 充电(增加)的电荷量,因充电时 C_I 和 C_{II} 串联,根据电荷守恒,每次充电时给 C_{II} 增加的电荷量也应是 Q_1 、 Q_2 、……。 oa 接通 n 次后, C_I 上的电荷量应为

$$Q_I = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n \quad (2)$$

在第 n 次接通 oa 之前,即第 $n-1$ 次接通 ob 之后, C_I 上的总电荷量为 $Q_1 + Q_2 + \dots + Q_{n-1}$,根据电荷守恒,此时 C_{II} 和 C_{III} 上的总电荷量也应为 $Q_1 + Q_2 + \dots + Q_{n-1}$,因为此时 C_{II} 和 C_{III} 并联,两者的电容又相等,所以 C_{II} 和 C_{III} 上的电荷量也相等,皆为 $(Q_1 + Q_2 + \dots + Q_{n-1})/2$,由此可知,第 n 次接通 oa 后, C_{II} 上的电荷量应为

$$Q_{II} = (Q_1 + Q_2 + \dots + Q_{n-1})/2 + Q_n \quad (3)$$

所以 C_I 和 C_{II} 上的电压应为

$$U_I = (Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n)/C \quad (4)$$

$$U_{II} = [(Q_1 + Q_2 + \dots + Q_{n-1})/2 + Q_n]/C \quad (5)$$

由电压关系知

$$U_I + U_{II} = \mathcal{E} \quad (6)$$

由(4)、(5)、(6)式可得

$$Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n + (Q_1 + Q_2 + \dots + Q_{n-1})/2 + Q_n = C\mathcal{E} \quad (7)$$

同理,对 $n+1$ 次接通 oa 后有

$$Q_1 + Q_2 + \dots + Q_{n+1} + (Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n)/2 + Q_{n+1} = C\mathcal{E} \quad (8)$$

用(8)式减去(7)式,得

$$Q_{n+1} = Q_n/4 \quad (9)$$

这就是说,后一次接通 oa 时, C_I 上充电增加的电荷量与前一次之比总是一个常数 $1/4$. 可见,每次充电, C_I 上增加的电荷量是按等比级数增长的. 上式对 $n=1, 2, \dots$ 任何正整数都成立.

我们已知第 1 次接通 oa 后, C_I 上的电荷量为(1)式,由(1)和(6)式可知,第 n 次接通 oa 后, C_I 上的总电荷量为

$$\begin{aligned} Q_I &= \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \right] C\mathcal{E} \\ &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \right] C\mathcal{E} \end{aligned}$$

由等比级数求和,可得

$$Q_I = \frac{2}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right] C\mathcal{E} \quad (10)$$

第 n 次接通 ob 后, C_I 上的电荷量不变,仍为(10)式所示, C_I 、 C_{II} 上的电荷量 Q_{II} 和 Q_{III} 相等,且皆为 Q_I 的一半,故

$$Q_{II} = Q_{III} = \frac{1}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right] C\mathcal{E} \quad (11)$$

所以三个电容器上的电压分别为

$$\begin{aligned} U_I &= \frac{Q_I}{C} = \frac{2}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right] \mathcal{E} \\ U_{II} &= U_{III} = \frac{Q_{II}}{2C} = \frac{1}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right] \mathcal{E} \end{aligned}$$

2) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, C_I 上的电荷量也就是通过电源的总电荷量,由(10)式可知为

$$Q = (2/3)C\mathcal{E}$$

所以电源提供的能量为

$$W_\varepsilon = Q\mathcal{E} = (2/3)C\mathcal{E}^2$$

各电容器储存的电能为

$$\begin{aligned} W_I &= (1/2)Q^2/C = (2/9)C\mathcal{E}^2 \\ W_{II} &= W_{III} = (1/2)(Q/2)^2/C = (1/18)C\mathcal{E}^2 \end{aligned}$$

根据能量守恒,可得电阻上消耗的电能为

$$W_R = W_\varepsilon - (W_I + W_{II} + W_{III}) = (1/3)C\mathcal{E}^2$$

40. 用 N 个相同的电池串联成的电池组对一电容器充电. 第一种充电方式是: 将此电容器与一电阻串联后, 接在 N 个串联电池的两端. 第二种充电方式是: 将此电容器与同一电阻串联后, 先用一个电池充电, 接着改为用两个串联电池继续充电, 再改为用三个串联电池继续充电……最后改为用 N 个串联电池继续充电. 这两种充电方式的电能损失是否相同? 若不同, 则哪种方式损耗的电能多?

解析

第一种方式损失的电能多.

在两种充电方式中, 电容器最终储存的电荷量 $Q = (N\mathcal{E})C$ 是相同的, 最终储存的电能 $W = \frac{1}{2}C(N\mathcal{E})^2 = \frac{1}{2}Q(N\mathcal{E})$ 也是相同的. 但电源在充电过程中所做的功并不相等. 在充电过程中电源所做的功等于电源的电压与新搬运的电荷量之积. 在第一种充电方式中, 电容器最终储存的电荷量 Q 全部由电压为 $N\mathcal{E}$ 的电源搬运, 而在第二种充电方式中, Q 中的很大一部分为电压小于 $N\mathcal{E}$ 的电源所搬运, 故前者的功大于后者. 由于损失的电能通过电阻发热等于电源所做的功与电容器储存的电能之差, 所以第一种充电方式中损失的电能大. 具体的计算如下:

充电过程中, 损失的电能为

$$\Delta W = A - W$$

A 为充电过程中电源所做的功. 在第一种充电方式中, 损失的电能

$$\Delta W_1 = A_1 - W_1 = Q(N\mathcal{E}) - \frac{1}{2}C(N\mathcal{E})^2 = \frac{1}{2}CN^2\mathcal{E}^2$$

在第二种充电方式中, 用一个电池充电时, 搬运的电荷量和电源做的功为

$$Q_1 = C\mathcal{E}, \quad A_1 = Q_1\mathcal{E} = C\mathcal{E}^2$$

用两个串联电池, 三个串联电池…… N 个串联电池继续充电过程中, 搬运的电荷量和电源做的功分别为

$$Q_2 = C(2\mathcal{E}) - C\mathcal{E} = C\mathcal{E}, \quad A_2 = Q_2(2\mathcal{E}) = 2C\mathcal{E}^2$$

$$Q_3 = C(3\mathcal{E}) - C(2\mathcal{E}) = C\mathcal{E}, \quad A_3 = Q_3(3\mathcal{E}) = 3C\mathcal{E}^2$$

⋮

$$Q_N = C(N\mathcal{E}) - C(N-1)\mathcal{E} = C\mathcal{E}$$

$$A_N = Q_N(N\mathcal{E}) = NC\mathcal{E}^2$$

电池组做的总功

$$\begin{aligned} A_{\parallel} &= A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_N = C\mathcal{E}^2(1 + 2 + 3 + \cdots + N) \\ &= \frac{1}{2}N(N+1)C\mathcal{E}^2 \end{aligned}$$

在第二种充电方式中, 损失的能量

$$\begin{aligned}\Delta W_{\parallel} &= A_{\parallel} - W_{\parallel} = A_{\parallel} - W_{\perp} \\ &= \frac{1}{2}N(N+1)C\epsilon^2 - \frac{1}{2}C(N\epsilon)^2 = \frac{1}{2}NC\epsilon^2\end{aligned}$$

可见 $\Delta W_{\perp} > \Delta W_{\parallel}$

本题是关于电容器充电的一个较好的题目. 当年由于此题新颖, 参赛学生在准备参赛时没有想到这样的题, 亦没有现成的解法. 此类题目能比较真实地考查出参赛学生的独立思考能力.

41. 滚筒式静电分选器由料斗 A、导板 B、导体滚筒 C、刮板 D、斜槽 E、F 和放电针 G 等部件组成. C 及 G 分别接于直流高压电源的正、负极, 并令 C 接地, 如图 1-64 所示. 电源电压很高, 足以使放电针 G 附近的空气发生电离而产生大量离子. 现有导电性能不同的两种物质粉粒 a、b 的混合物从料斗 A 下落, 沿导板 B 到达转动着的滚筒 C, 粉粒 a 具有良好的导电性, 粉粒 b 具有良好的绝缘性.

1) 试说明分选器的主要工作原理, 即它是如何实现对不同粉粒 a、b 进行分选的.

2) 粉粒 a、b 经分选后分别掉落在哪个料槽中?

3) 刮板 D 的作用是什么?

4) 若让放电针 G 接地而滚筒 C 不接地, 再在 C 与 G 间加上高压电, 这样连接是否允许? 为什么?

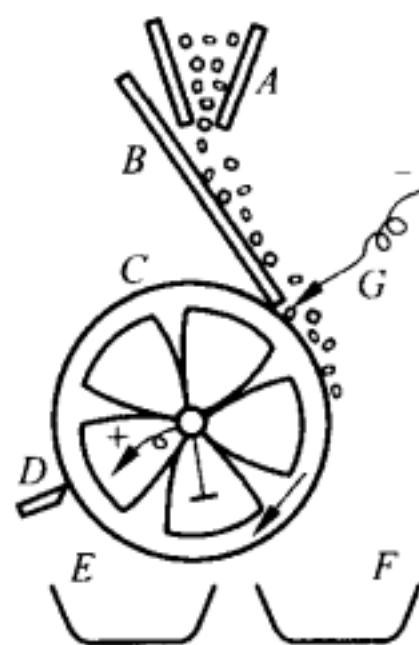


图 1-64

解析

1) 放电针附近的空气, 受高压电场作用而电离, 在电场力作用下, 大量的电子或负离子被喷附在粉粒 a、b 上, 使 a、b 带负电. 带负电的物质粉粒 a, 因其具有良好导电性, 它与带正电的滚筒 C 接触后, a 上的负电被 C 上的正电中和并带上了正电. 带了正电的粉粒 a 一方面随滚筒 C 转动, 一方面受到 C 上正电的静电斥力作用而离开滚筒, 最后落入料槽 F.

绝缘性能良好的粉粒 b, 其所带负电不容易传给滚筒 C, 在 C 的静电引力下, 使 b 附着于 C 的表面并随 C 转动, 最后, b 中粉粒较大者在重力作用下掉入料槽 E.

2) a 粉粒基本上落入料槽 F, b 粉粒中较大者落入料槽 E.

3) 粉粒 b 中较小者, 因其重量轻, 不能借助重力落入 E 槽, 它们附着于滚筒表面随 C 转至 D 处, 由刮板 D 将其刮入料槽 E.

4) 若 C 不接地而放电针 G 接地, 从工作原理上说, 这也是允许的. 但此时滚筒 C 相

对于地处于高电势,从工业实用角度上看,这是完全不允许的.因为此时在与C相连接的机器和地之间将有很高的电势差,从而给操作人员的人身安全造成高度危险.

[注] 即使电子或负离子没有附着在粉粒上,根据导体在电场中的静电感应及绝缘物质在场中的极化进行分析讨论问题,所得结论也相同.

42. 如图1-65所示,在水平光滑绝缘的桌面上,有三个带正电的质点1、2、3,位于边长为 l 的等边三角形的三个顶点处,C为三角形的中心.三个质点的质量皆为 m ,带电荷量皆为 q .质点1、3之间和2、3之间用绝缘的轻而细的刚性杆相连,在3的连接处为无摩擦的铰链.已知开始时三个质点的速度为零,在此后运动过程中,当质点3运动到C处时,其速度大小为多少?

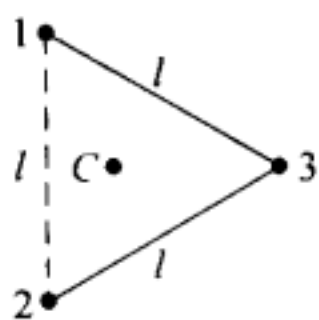


图 1-65

解析

以三个质点为系统,由对称性可知,开始时其质心应位于C处.因为质点系所受的合外力为零,由质心运动定理可知,质心总是固定不动的.质点1、2在静电力作用下,彼此间距离必增大,但不可能保持在沿起始状态时1、2连线上运动.若是那样运动,由于杆不能伸长,质点3必向左运动,三者的质心势必亦向左运动,这与“质心不动”相矛盾,故不可能.由此可知,由于杆为刚性,质点1、2在静电力作用下,要保持质心不动,质点1、2必将分别向图1-65中右上方和右下方运动,而质点3将向左运动.当3运动到C处时,1、2将运动到A、B处,A、C、B三点在一直线上,1、2的速度方向向右,3的速度方向向左(如图1-66).令 v_1 、 v_2 、 v_3 分别表示此时它们的速度大小,则由对称性可知此时三质点的总动能为

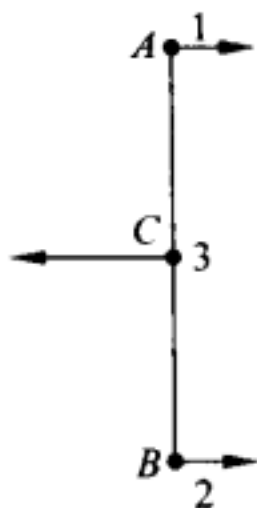


图 1-66

$$E_k = \frac{1}{2}mv_3^2 + 2\left(\frac{1}{2}mv_1^2\right) \quad (1)$$

再由对称性及动量守恒可知

$$mv_3 = 2mv_1 \quad (2)$$

系统原来的电势能为

$$E_p = 3k\frac{q^2}{l} \quad (3)$$

其中 k 为静电力常数.运动到图1-66所示的位置时的电势能为

$$E'_p = 2k\frac{q^2}{l} + k\frac{q^2}{2l} \quad (4)$$

根据能量守恒有

$$E_p = E'_p + E_k \quad (5)$$

由以上各式可解得

$$v_3 = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{kq^2}{lm}} \quad (6)$$

本题解题的关键是系统不受外力,因而质心位置不变,由此判断出图 1-66 中三个质点的位置与运动方向.一些学生抓不住这个关键,感到无从下手,也得不出(2)式.捅破这层“薄纸”,问题就迎刃而解了.



二、电路

1. 试由欧姆定律推导出两个电阻 R_1 和 R_2 串联时的等效电阻和并联时的等效电阻. 推导过程中要说明每一步的根据.

解析

1) 两电阻串联

(i) 在串联电路中, 流过串联电路各电阻的电流相等, 设为 I , 如图 2-1 所示.

(ii) 串联电路两端的总电压等于各部分电路两端电压之和. 设 R_1 、 R_2 两端的电压和总电压分别为 U_1 、 U_2 和 U (如图 2-1 所示), 则有

$$U = U_1 + U_2 \quad (1)$$

(iii) 设 R 为此串联电路的等效电阻. 根据欧姆定律, 有

$$U_1 = IR_1 \quad (2)$$

$$U_2 = IR_2 \quad (3)$$

$$U = IR \quad (4)$$

(iv) 将(2)、(3)、(4)式代入(1)式, 整理后可得

$$R = R_1 + R_2$$

2) 两电阻并联

(i) 并联电路中各支路两端电压相等, 设为 U , 如图 2-2 所示.

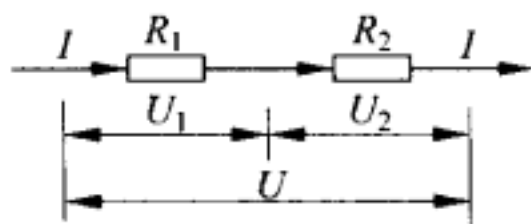


图 2-1

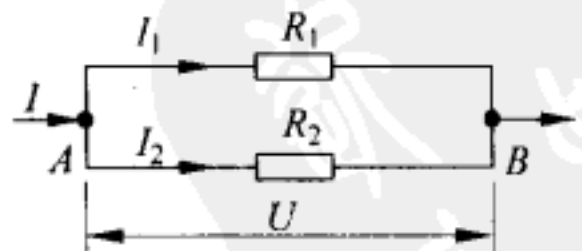


图 2-2

(ii) 并联电路中的总电流等于各支路电流之和. 设 R_1 、 R_2 中的电流和总电流分别为 I_1 、 I_2 和 I (如图 2-2 所示), 则有

$$I = I_1 + I_2 \quad (5)$$

(iii) 设 R 为此并联电路的等效电阻. 根据欧姆定律, 有

$$I_1 = U/R_1 \quad (6)$$

$$I_2 = U/R_2 \quad (7)$$

$$I = U/R \quad (8)$$

(iv) 将(6)、(7)、(8)式代入(5)式,整理后可得

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

2. 220V、40W 的白炽灯灯丝在不点亮时用电桥测出的电阻值与按公式 $R = \frac{U^2}{P} = \frac{(220\text{V})^2}{40\text{W}}$ 算出的值相比,其大小如何? 为什么?

解析

前者比后者小. 因为灯丝电阻随温度升高而增大,公式算出的是灯丝在额定电压下点亮处于高温时的电阻值.

3. 超导现象指的是_____.

解析

某些金属或材料当温度降到很低,达到某个临界温度 T_c 时(不同材料,临界温度 T_c 的数值亦不同)失去电阻的现象.

[注] 严格说,判断导体是否处于超导态,还要看是否出现完全抗磁性. 即超导体内的磁感应强度总是零(迈斯纳效应). 零电阻现象和完全抗磁性是超导体两个独立的基本性质. 详见章立源著《超导体》,科学出版社 1992 年出版“物理学基础知识丛书”之一.

4. 1) 近年来,人们制成了高转变温度的超导体材料,其中一种成分是钇、钡、____、____ 四种元素. 据报道,我国研制的这类超导材料的零电阻温度已达到 _____ K 左右. 在这类超导材料出现以前,超导材料的零电阻温度为 _____ K 左右.

2) 用多用电表中欧姆表的不同量限去测量一个晶体二极管的正向电阻. 例如,用 $\times 10$ 及 $\times 100$ 两挡(内附电池相同,忽略电池内阻)的测量结果分别为 R_{10} 及 R_{100} , 则有

(A) $R_{10} = R_{100}$;

(B) $R_{10} < R_{100}$;

(C) $R_{10} > R_{100}$;

(D) $R_{10} < R_{100}$ 或 $R_{10} > R_{100}$ 不定.

解析

1) 铜, 氧; 90; 24.

2) B. 因为 $\times 100$ 挡时的欧姆表内部电路电阻比 $\times 10$ 挡时欧姆表的内部电路电阻大, 致使前者流过表头的电流比后者小一些, 从而使指针指示的欧姆数值大一些.

5. 欲测电阻 R 的阻值, 现有几个标准电阻、一个电池和一只未经标定的电流计, 连成如图 2-3 所示的电路. 第一次与电流计并联的电阻 r 为 50.00Ω , 电流计的示度为 3.9 格; 第二次 r 改用 100.00Ω , 电流计的示度为 5.2 格; 第三次 r 改用 10.00Ω , 同时将待测电阻 R 换成一个 $20.00\text{k}\Omega$ 的标准电阻, 结果电流计的示度为 7.8 格. 已知电流计的示度与所通过的电流成正比, 求电阻 R 的阻值.

解析

本题电流计读数只有两位有效数字, 所以标准电阻的四位有效数字并无意义, 答案只有两位有效数字可靠. 又因本题已知数据不足, 故需进行近似计算.

由第三次测量结果可知, 当 R 用 $20\text{k}\Omega$ 的电阻代替, 而且 r 的电阻减小时, 流过电流计的电流明显增大, 可见 R 的阻值一定比 $20\text{k}\Omega$ 还要大. 因此电源内阻完全可以忽略不计. 用 \mathcal{E} 表示电源电动势, R_g 表示电流计的内阻, I_0 表示电流计偏转 1 格的电流, 当用欧姆定律求三次测量通过电流计的电流时, 可得以下三式:

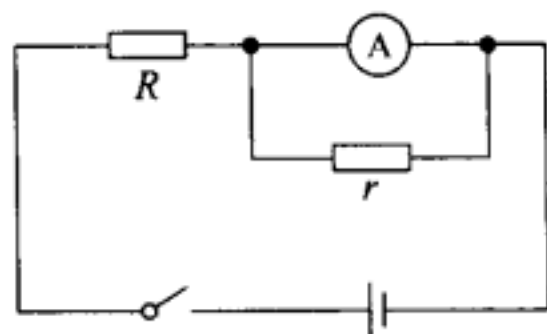


图 2-3

$$\frac{\mathcal{E}}{\frac{50R_g}{50 + R_g} + R} \cdot \frac{50R_g}{50 + R_g} \cdot \frac{1}{R_g} = 3.9I_0$$

$$\frac{\mathcal{E}}{\frac{100R_g}{100 + R_g} + R} \cdot \frac{100R_g}{100 + R_g} \cdot \frac{1}{R_g} = 5.2I_0$$

$$\frac{\mathcal{E}}{\frac{10R_g}{10 + R_g} + 20\,000} \cdot \frac{10R_g}{10 + R_g} \cdot \frac{1}{R_g} = 7.8I_0$$

同样因为 R 比 $20\,000\Omega$ 还要大, 而三次的 r 值以及电流计内阻 R_g 都远小于 $20\,000\Omega$, 所以上列三式可近似地写为

$$\frac{\mathcal{E}}{R} \cdot \frac{50}{50 + R_g} = 3.9I_0 \quad (1)$$

$$\frac{\mathcal{E}}{R} \cdot \frac{100}{100 + R_g} = 5.2I_0 \quad (2)$$

$$\frac{\mathcal{E}}{20\,000} \cdot \frac{10}{10 + R_g} = 7.8I_0 \quad (3)$$

由(1)、(2)两式可解得

$$R_g = 50\Omega \quad (4)$$

将(4)式代入(2)、(3)式中消去 \mathcal{E} 和 I_0 , 可得

$$R = 120\text{k}\Omega \quad (5)$$

此题是考查近似计算本领的题目. 通过有充分根据的推理把一个看来难以精确计算的方程中的某些量略去而得出问题的近似解, 这是实际工作常能发挥很大作用的方法. 这就要先根据问题提供的数据作出一些判断. 例如在本题中根据第三次测量的电流计的示度断定待测电阻值 R 远大于 $20\text{k}\Omega$, 从而既可忽略电源内阻也可在列出的方程左方第一个因子的分母上略去 r 与 R_g 的并联等效电阻(与 R 相比), 方便地求出问题的近似解. 如果不理解这种从物理上处理问题的方法, 在列出有关方程后就当成数学问题去求解, 常会不必要地去作繁杂的计算或是难以下手.

6. 将 200 个电阻连成如图 2-4 所示的电路, 图中各支路上的 P 点是连接两个电阻的导线上的点. 所有导线的电阻都可忽略. 现将一电动势为 \mathcal{E} , 内阻为 r_0 的电源接到任意两个 P 点处, 然后将任一没接电源的支路在 P 点处切断, 发现流过电源的电流与没切断前一样. 则这 200 个电阻 R_1, R_2, \dots, R_{100} 及 r_1, r_2, \dots, r_{100} 应有下列的普遍关系: _____ . 这时图中 AB 导线与 CD 导线之间的电压等于 _____ .

解析

$$\frac{R_1}{r_1} = \frac{R_2}{r_2} = \frac{R_3}{r_3} = \dots = \frac{R_{100}}{r_{100}}; 0.$$

假设电动势接在电阻 R_k 与 R_{k+1} 之间, 电阻 R_s 与 r_s 为断开处, 如图 2-5 所示, 它的等效电路为图 2-6, 虚线框中 $R_{//}$ 代表除 $R_k, R_{k+1}, r_k, r_{k+1}$ 四个电阻及 R_s 与 r_s 外的其他电阻串并联后的等效电阻. 这是一个惠斯通电桥电路, 由于 R_s 与 r_s 之间接通与断开, 对应于

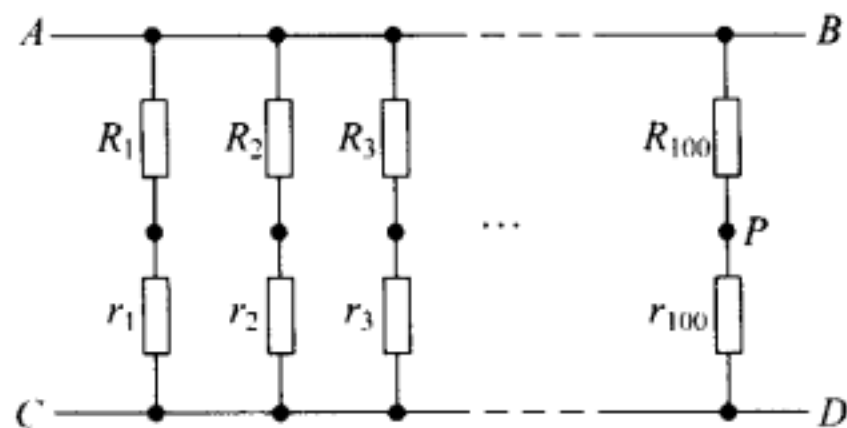


图 2-4

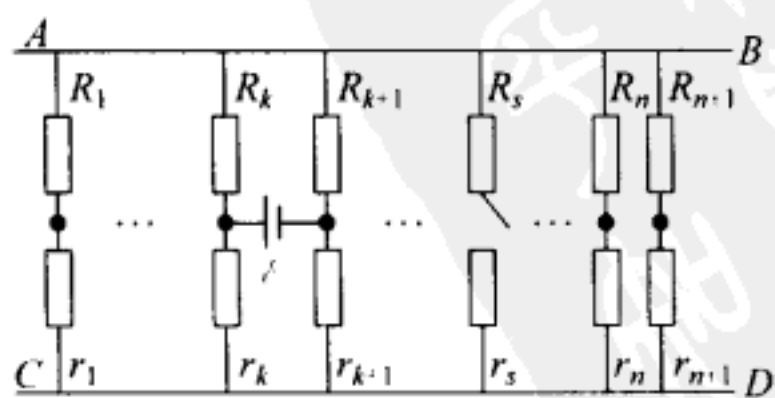


图 2-5

$R_{//}$ 与 $(R_k + r_k)$ 并联前后两种状态, 所以对应的等效电阻应不同, 但根据题设, 两种状态下流过电源的电流不变, 只有可能 A 、 B 与 C 、 D 的电势相等, 如图 2-7 所示, 即处于平衡桥情况, 四个臂阻值满足

$$\frac{R_k}{r_k} = \frac{R_{k+1}}{r_{k+1}}$$

而电阻 R_k 与 R_{k-1} , r_k 与 r_{k+1} 是任意的四个电阻, 因此应有答案所示的关系.

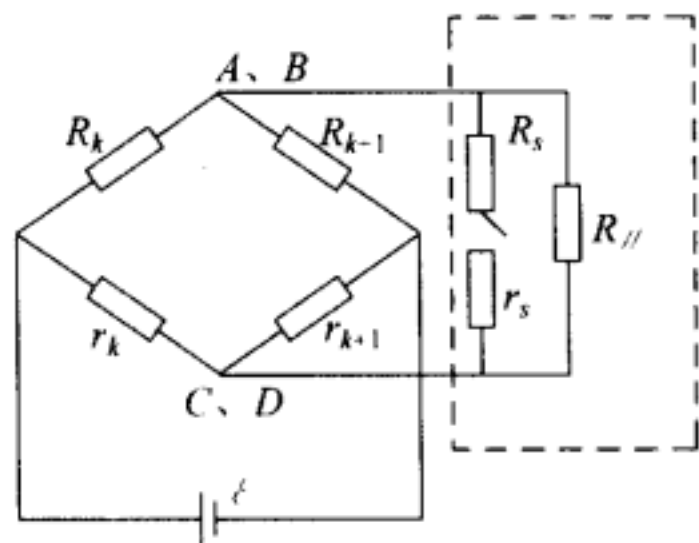


图 2-6

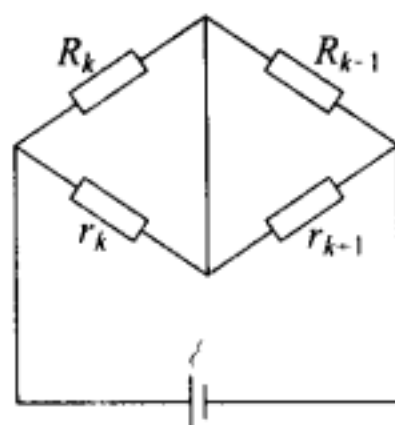


图 2-7

7. 在如图 2-8 所示的电路中, $R_1 = 40\Omega$, $R_2 = 60\Omega$, $\mathcal{E}_1 = 5\text{V}$, $\mathcal{E}_2 = 2\text{V}$. 电源内阻忽略不计. 当 K 接通后, 电源 \mathcal{E}_2 的输出功率是_____.

解析

K 未接通前, 电压 $U_{ab} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \mathcal{E}_1 = 2\text{V}$, 而 U_{ad} 等于 2V , 所以 K 接通后, \mathcal{E}_2 没有电流通过, 即输出功率为零.

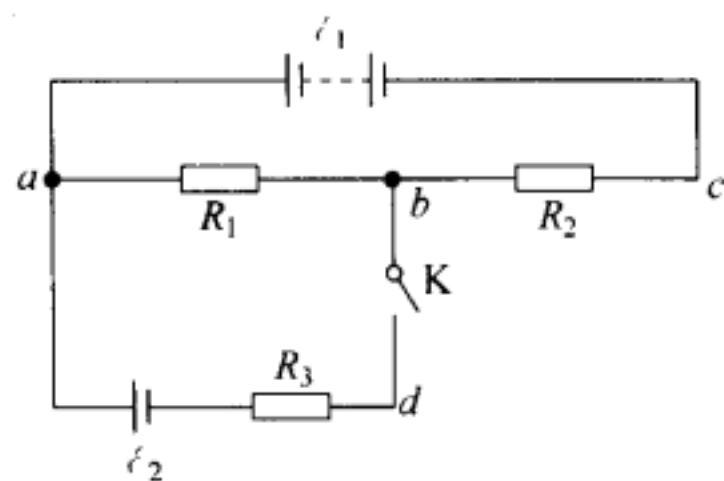


图 2-8

8. 如图 2-9 所示, $R_1 = R_3 = R_5 = \dots = R_{99} = 5\Omega$, $R_2 = R_4 = R_6 = \dots = R_{98} = 10\Omega$, $R_{100} = 5\Omega$, $\mathcal{E} = 10\text{V}$. 则电阻 R_2 上的电功率应等于_____.

解析

2.5W.

该电路网络可看作由足够多的电阻组成. 因此, 从电源 \mathcal{E} 右端与从 ab 右端看的等效电阻可视为相同, 设其值为 R . 应有

$$R_1 + \frac{R_2 R}{R_2 + R} = R$$

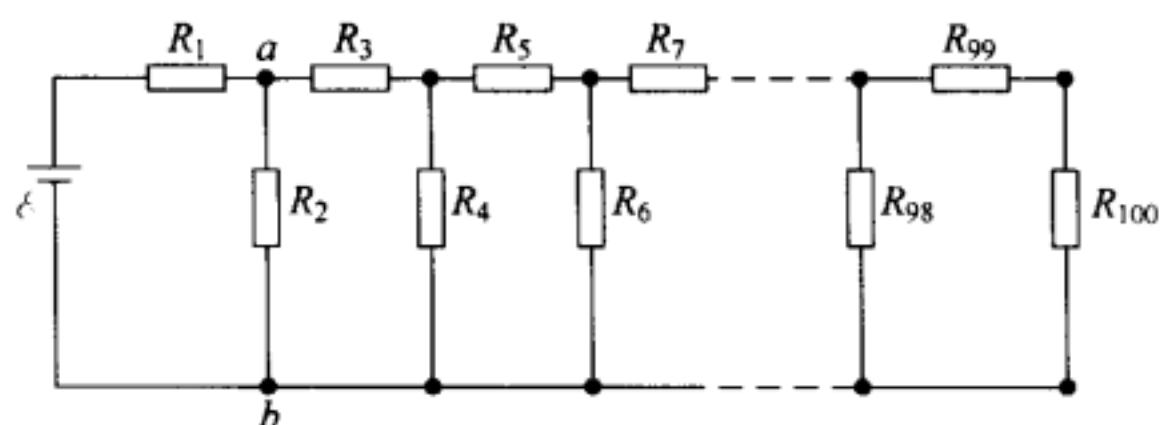


图 2-9

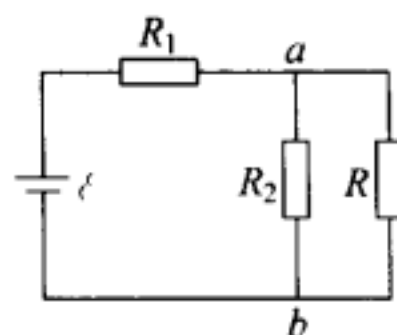


图 2-10

代入数据得方程(R 以 Ω 为单位)

舍去 $R < 0$ 的根

$$R^2 - 5R - 50 = 0$$

求得

$$R = \frac{5 + 15}{2} \Omega = 10 \Omega$$

其等效电路如图 2-10 所示. R_2 与 R 并联后, 其等效电阻用 $R_{//}$ 表示, 即

$$R_{//} = \frac{R_2 R}{R + R_2} = 5 \Omega$$

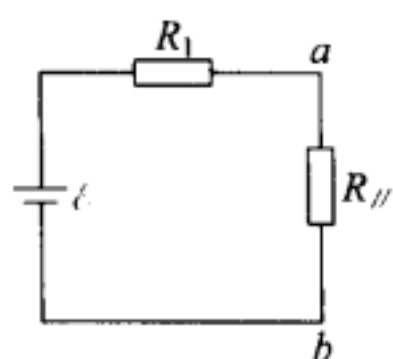


图 2-11

等效电路如图 2-11 所示. 并知

$$R_1 + R_{//} = R = 10 \Omega$$

根据串联电阻分压关系, 有

$$U_{ab} = \frac{R_{//}}{R} \varepsilon$$

代入数据得

$$U_{ab} = 5V$$

电阻 R_2 的电功率为

$$P = U_{ab}^2 / R_2 = 2.5W$$

9. 画一个楼梯照明电路图. 要求让使用者不论在楼上或楼下都可以开灯或关灯.

解析

连线如图 2-12 所示.

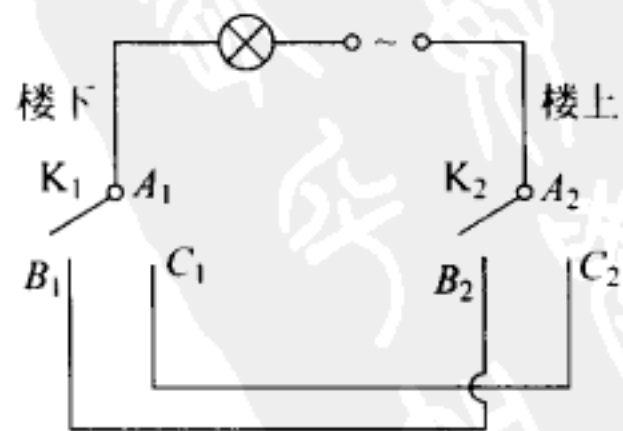


图 2-12

10. 画出日光灯的电路图,并回答问题:如果起动器丢失,而手头只有一段两端裸露的、有绝缘外皮的导线,用什么办法能将日光灯点亮?试就你所用的办法说明道理.

解析

日光灯的电路如图 2-13 所示,如果起动器 S 丢失,可以脚站在绝缘板(例如干燥的桌凳)上,先用导线代替起动器 S 将电路接通片刻,这相当于起动器内氖气导电使电路接通.然后迅速移去导线,这相当于起动器中接触片分离的过程,从而在镇流器 L 两端产生高压使日光灯管 T 内水银蒸气产生电离而导电,点亮日光灯.但要注意安全.

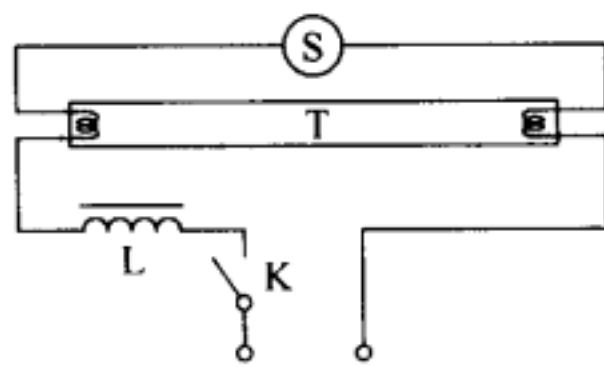


图 2-13

此题检查学生对日光灯电路及工作原理,特别是起动器的作用的理解,可用来考查学生联系实际与动手的能力.由于手持导线代替起动器,导线接触火线,因此应注意手持绝缘外皮对地绝缘(注意其他站在地上的人不要用手接触操作者),不然导致人体对地有 220V 的电压而触电.这点务必注意.此种方法不宜对未成年的学生推广和介绍.

11. 220V、100W 的白炽灯泡 A 和 220V、60W 的白炽灯泡 B 的伏安特性如图 2-14 所示.

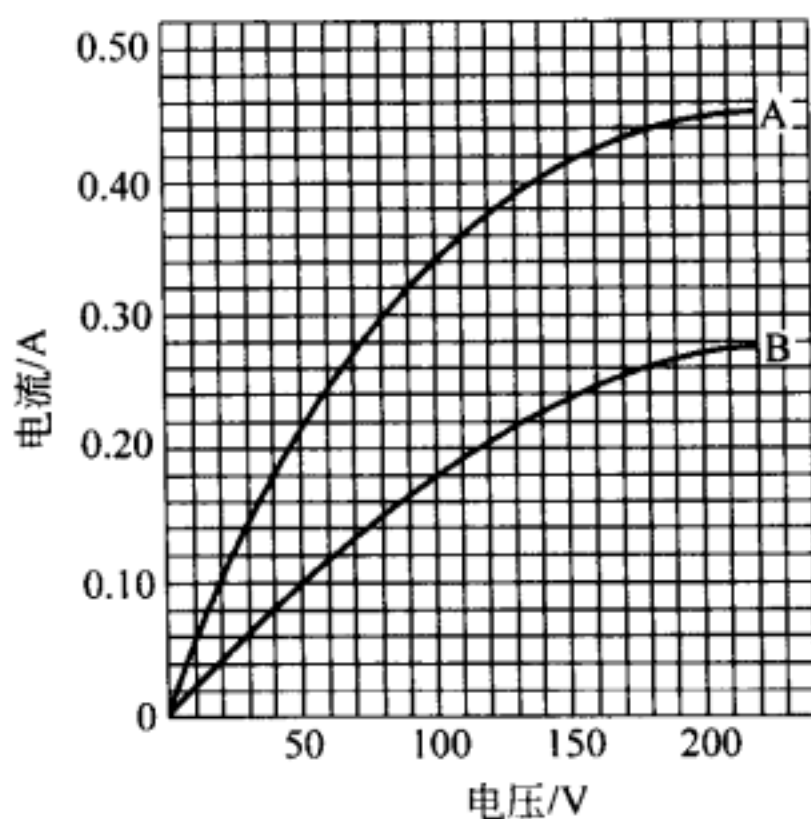


图 2-14

- 1) 若将两灯泡并联接在 110V 的电源上时,两灯泡实际消耗的电功率分别为 $P_A =$ _____, $P_B =$ _____.
- 2) 若将两灯泡串联接在 220V 的电源上时,两灯泡实际消耗的电功率分别为 $P_A =$ _____, $P_B =$ _____.

解析

1) 40W, 22W;

在图 2-14 中的图线 A 和 B 上找到 $V_A = V_B = 110\text{V}$ 时, 电流 $I_A = 0.36\text{A}$, $I_B = 0.20\text{A}$. 因此, 求得 $P_A = I_A V_A = 40\text{W}$, $P_B = I_B V_B = 22\text{W}$.

2) 15W, 40W.

因两灯泡串联, 电流 $I_A = I_B$, 在图 2-14 中选择适当高度作横轴的平行线, 当 $I_A = I_B = 0.25\text{A}$ 时, 截得 A 线上电压 $V_A = 59\text{V}$, B 线上 $V_B = 161\text{V}$, $V_A + V_B = 220\text{V}$, 从而求得 $P_A = I_A V_A = 15\text{W}$, $P_B = I_B V_B = 40\text{W}$.

12. 如图 2-15 所示, 要想在 A、B、C 三个地方的每一处都能控制同一盏灯的亮、灭, 所用材料除导线外, 还有单刀双掷开关(见图 2-16)两个和双刀双掷开关(见图 2-17)一个, 试画出电路图.

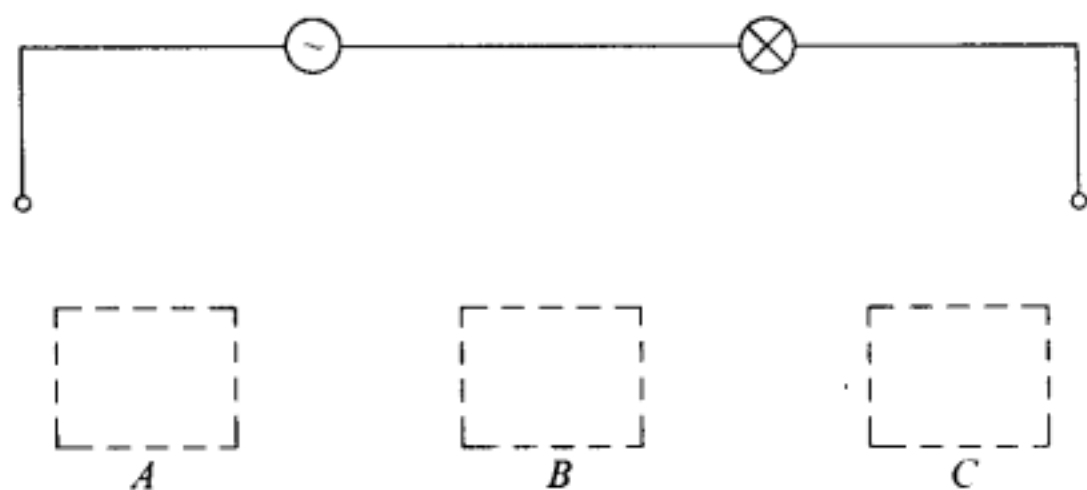


图 2-15

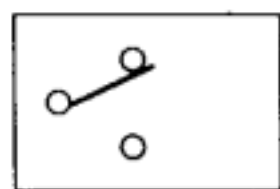


图 2-16

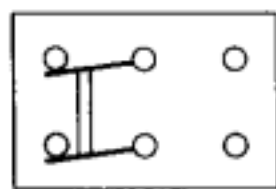


图 2-17

解析

如图 2-18.

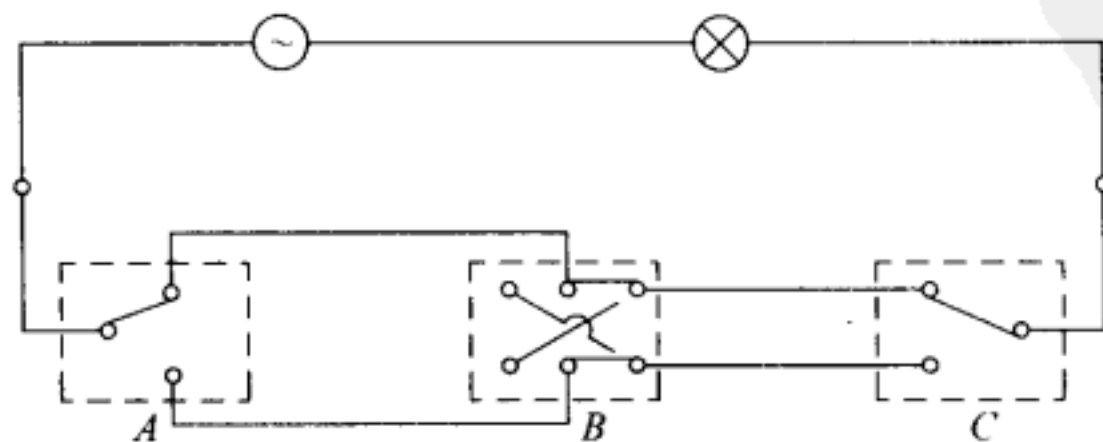


图 2-18

13. 如图 2-19 所示,在正方形导线回路所围的区域 $A_1A_2A_3A_4$ 内分布有方向垂直于回路平面向里的匀强磁场,磁感应强度 B 随时间以恒定的变化率增大,回路中的感应电流为 $I=1.0\text{mA}$. 已知 A_1A_2 、 A_3A_4 两边的电阻皆为零; A_4A_1 边的电阻 $R_1=3.0\text{k}\Omega$, A_2A_3 边的电阻 $R_2=7.0\text{k}\Omega$.

1) 试求 A_1A_2 两点间的电压 U_{12} , A_2A_3 两点间的电压 U_{23} , A_3A_4 两点间的电压 U_{34} , A_4A_1 两点间的电压 U_{41} .

2) 若一内阻可视为无限大的电压表 V 位于正方形导线回路所在的平面内,其正负端与连线位置分别如图 2-20、图 2-21 和图 2-22 所示,求三种情况下电压表的读数 V_1 、 V_2 、 V_3 .

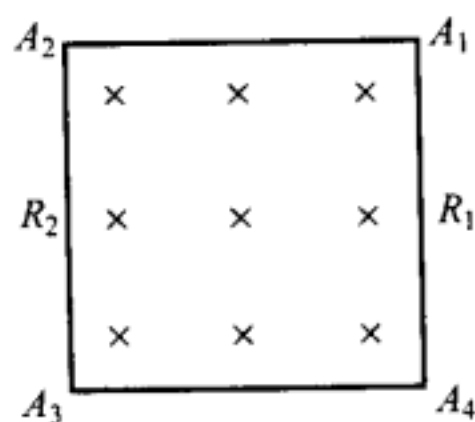


图 2-19

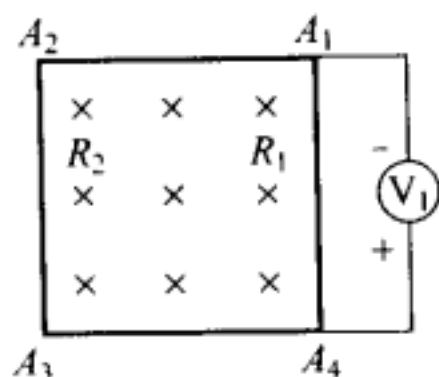


图 2-20

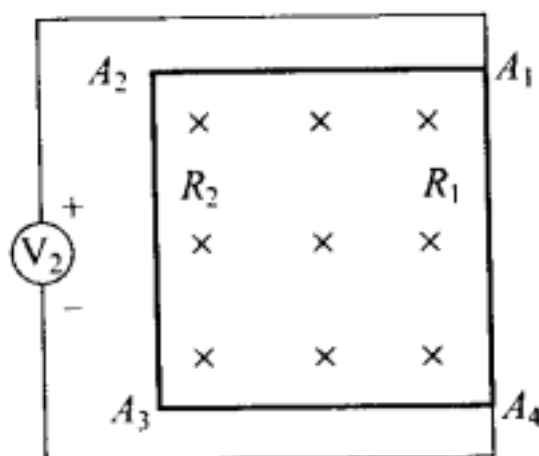


图 2-21

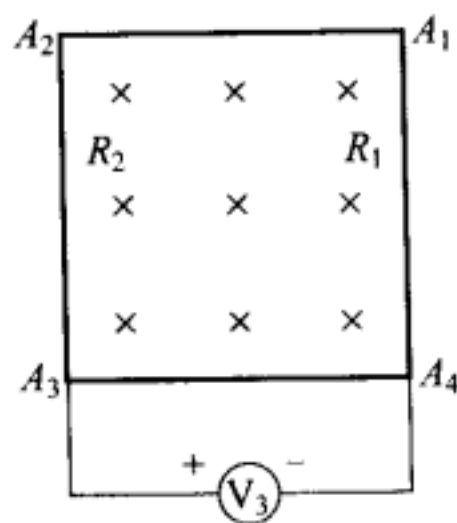


图 2-22

解析

1) 设回路中的总感应电动势为 \mathcal{E} , 根据楞次定律可知, 电路中的电流沿逆时针方向, 按欧姆定律有

$$\mathcal{E} = I(R_1 + R_2) = 10\text{V} \quad (1)$$

由对称性可知, 正方形回路每条边上的感应电动势相等, 设为 \mathcal{E}_1 (见图 2-23), 则

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}/4 = 2.5\text{V} \quad (2)$$

根据含源电路欧姆定律, 并代入数值得

$$U_{12} = -\mathcal{E}_1 = -2.5\text{V} \quad (3)$$

$$U_{23} = IR_2 - \mathcal{E}_1 = 4.5\text{V} \quad (4)$$

$$U_{34} = -\mathcal{E}_1 = -2.5\text{V} \quad (5)$$

$$U_{41} = IR_1 - \mathcal{E}_1 = 0.5\text{V} \quad (6)$$

2) 对图 2-24 中的 $A_1V_1A_4A_1$ 回路, 因磁通量变化率为零, 回路中的总电动势为零, 这表明连接 A_4 、 A_1 两端的电压表支路亦为含源电路, 图 2-20 的等效电路如图 2-24 所示. 电压表的读数等于由正端(+)到负端(-)流过电压表的电流 I_V 乘以电压表的内阻 R_V , 因 R_V 阻值为无限大, I_V 趋近于零(但 $I_V R_V$ 为有限值), 故得

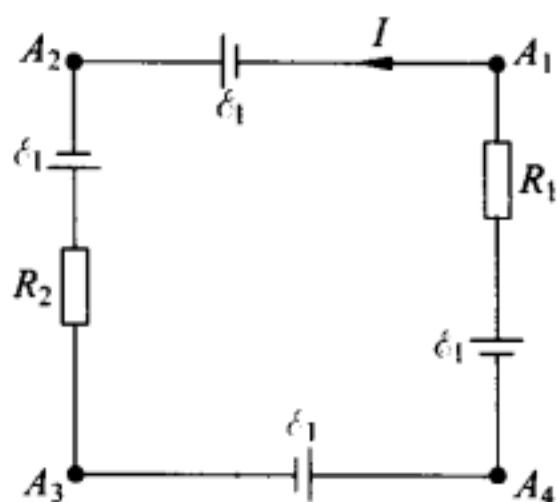


图 2-23

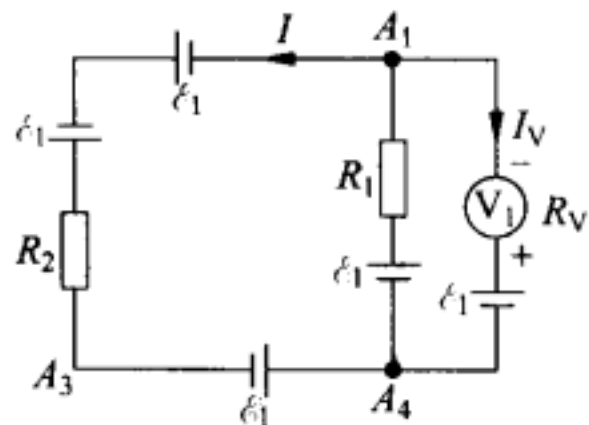


图 2-24

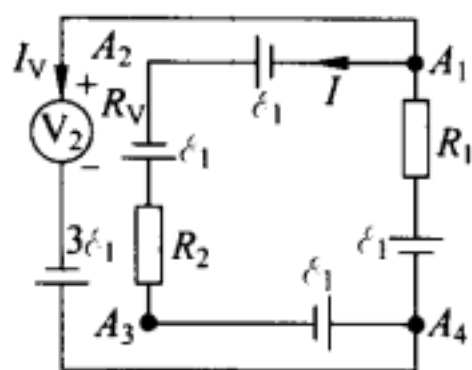


图 2-25

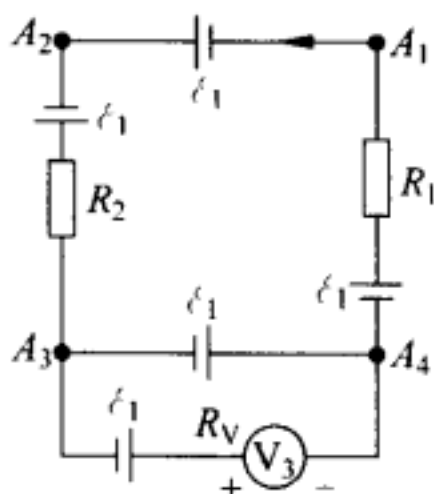


图 2-26

$$IR_1 + I_V R_V = IR_1 - V_1 = 0$$

解得

$$V_1 = IR_1 = 3.0\text{V} \quad (7)$$

同理,图 2-21 的等效电路如图 2-25 所示,回路 $A_1 V_2 A_4 A_1$ 的总电动势为 \mathcal{E} ,故有

$$IR_1 + I_V R_V = IR_1 + V_2 = \mathcal{E} \quad (8)$$

解得

$$V_2 = \mathcal{E} - IR_1 \quad (9)$$

代入数据得

$$V_2 = 7.0\text{V} \quad (10)$$

图 2-22 的等效电路如图 2-26 所示,回路 $A_1 V_3 A_4 A_1$ 的总电动势为零,而 $A_3 A_4$ 边中的电阻又为零,故有

$$V_3 = I_V R_V = 0 \quad (11)$$

14. 磁流体发电机的示意图如图 2-27 所示.横截面为矩形的管道,长为 l ,宽为 a ,高为 b ,上下两个侧面是绝缘体,相距为 a 的两个侧面是电阻可忽略的导体,此两导体侧面与一负载电阻 R_L 相连.整个管道放在一匀强磁场中,磁感应强度的大小为 B ,方向垂直于上下侧面向上.现有电离气体(正、负带电粒子)持续稳定地流经管道,为了使问题简化,设

横截面上各点流速相同. 已知流速与电离气体所受的摩擦阻力成正比, 且无论有无磁场存在, 都维持管道两端电离气体的压强差为 p . 设无磁场存在时电离气体的流速为 v_0 , 求有磁场存在时磁流体发电机的电动势的大小 \mathcal{E} . 已知电离气体的平均电阻率为 ρ .

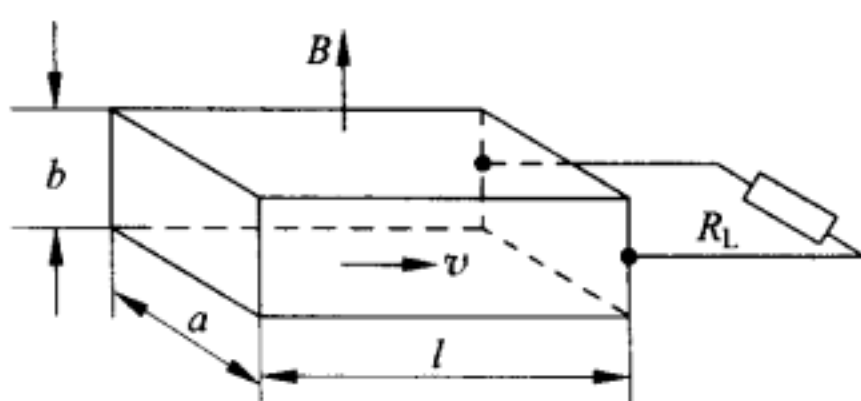


图 2-27

解析

当有磁场存在时, 设电离气体(相当于导体)的流速为 v , 因其切割磁感线, 将产生横向的感应电动势, 其大小为

$$\mathcal{E} = vaB$$

因为电离气体是匀速流动, 当无磁场时, 管道两端电离气体的压力差与摩擦力平衡. 当有磁场时, 由于感应电流的存在, 电离气体还将受到安培力作用, 这时压力差与安培力以及这时的摩擦力平衡. 已知摩擦力与流速成正比, 因而可通过这两次平衡求得流速 v 的值, 与上式结合即可求得 \mathcal{E} . 由欧姆定律可知, 感应电流

$$I = \mathcal{E}/R$$

R 是整个电路的电阻, 有

$$R = \rho a/lb + R_L$$

管道内电离气体所受的安培力

$$F = IBa$$

其方向可由 \mathcal{E} 及 I 的方向判断出是和流速方向相反的, 即图 2-27 中向左的方向.

当无磁场时, 用 F_f 表示摩擦力, 由力的平衡可知

$$pab = F_f$$

当有磁场时, 用 F'_f 表示摩擦力, 由力的平衡可知

$$pab = F + F'_f$$

已知流速与摩擦力成正比, 所以有

$$v_0/v = F_f/F'_f$$

由以上诸式可解得

$$\mathcal{E} = Bv_0a/[1 + B^2v_0a/pb(\rho a/lb + R_L)]$$

15. 如图 2-28 所示, 一很长的薄导体平板沿 x 轴放置, 板面位于水平位置, 板的宽度为 L , 电阻可忽略不计, $aebcfd$ 是圆弧形均匀导线, 其电阻为 $3R$, 圆弧所在的平面与 x 轴垂直. 圆弧的两端 a 和 d 与导体板的两个侧面相接触, 并可在其上滑动. 圆弧 $\widehat{ae} = \widehat{eb} = \widehat{cf} = \widehat{fd} = (1/8)$ 圆周长, 圆弧 $\widehat{bc} = (1/4)$ 圆周长. 一内阻 $R_g = nR$ 的体积很小的电压表位于

圆弧的圆心 O 处, 电压表的两端分别用电阻可以忽略的直导线与 b 和 c 点相连. 整个装置处在磁感应强度为 B 、方向竖直向上的匀强磁场中. 当导体板不动而圆弧导线与电压表一起以恒定速度 v 沿 x 轴方向平移运动时, 求:

- 1) 电压表的读数.
- 2) e 点与 f 点的电势差 $U_e - U_f$.

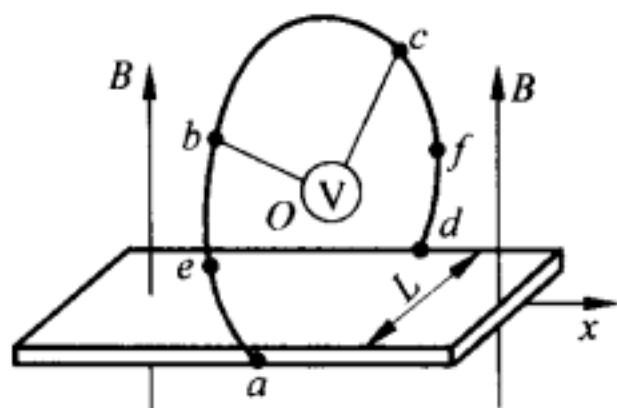


图 2-28

解析

1) 当圆弧形导线和电压表的连线在磁场中运动时, 各段导线都切割磁感线, 都有感应电动势. 由图 2-29 可以看出, 弧 \widehat{bc} 段的感应电动势的大小 $\mathcal{E}_1 = BLv$. 弧 \widehat{ae} 段的感应电动势的大小 $\mathcal{E}_2 = BLv(\sqrt{2}-1)/2$. 弧 \widehat{eb} 、 \widehat{cf} 、 \widehat{fd} 各段的感应电动势的大小都等于 \mathcal{E}_2 . 连接电压表的每根导线中的感应电动势的大小都为 $\mathcal{E}_3 = BLv/2$.

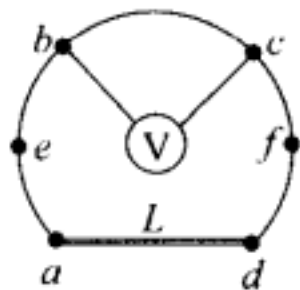


图 2-29

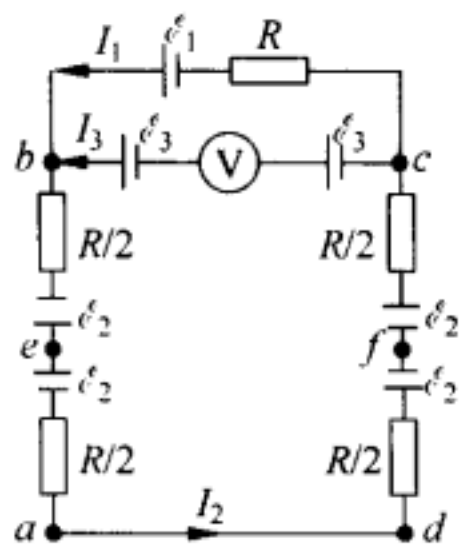


图 2-30

由以上分析可得如图 2-30 所示的等效电路. 设各导线中的电流分别为 I_1 、 I_2 和 I_3 , 方向如图所示, 则有

$$U_b - U_c = -I_1 R + \mathcal{E}_1 \quad (1)$$

$$U_b - U_c = -I_3 R_g + \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_3 \quad (2)$$

$$U_b - U_c = 2I_2 R \quad (3)$$

以及

$$I_1 + I_3 = I_2 \quad (4)$$

注意到 $2\mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_1$, 得

$$\left. \begin{aligned} I_1 R - I_3 R_g &= 0 \\ I_1 R + 2I_2 R &= \mathcal{E}_1 \\ I_1 + I_3 &= I_2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

解(5)式并将 $R_g = nR$ 代入, 得

$$I_3 = \mathcal{E}_1 / [(3n+2)R], \quad I_2 = [(n+1)/(3n+2)](\mathcal{E}_1/R)$$

电压表的读数

$$V = I_3 R_g = n\epsilon_1 / (3n + 2) = nBLv / (3n + 2)$$

2) e 点与 f 点的电势差

$$\begin{aligned} U_e - U_f &= I_2 R / 2 + I_2 R / 2 + \epsilon_2 + \epsilon_2 = I_2 R + 2\epsilon_2 \\ &= [(n + 1) / (3n + 2) + \sqrt{2} - 1] BLv \end{aligned}$$

一般来说,电动势是由非静电力的功决定的,具体在此题中是由导线切割磁感线所受的洛伦兹力产生的.电势差是由电荷产生的静电场决定的.电压表的读数是由流过电压表的电流和电压表的内阻两者的乘积决定的.这三者是三个不同的概念,但三者之间也有一定的关系.学生可通过对这类题目的分析研究,更具体地理解三者的不同及其联系.

16. 有一条长 350km 的海底电缆 AB, 现发现由于其绝缘外皮在某处受到外来损伤导致绝缘性能变坏. 为探查其受损地点, 现作如下测量:

1) 使 B 端开路, 在 A 端与地之间接入电动势为 200V 的电池(电池内阻和接地电阻均不计), 测得 B 端对地的电压为 40V.

2) 使 A 端开路, 在 B 端与地之间接入电动势为 200V 的电池, 测得 A 端对地的电压为 50V.

你能根据以上测量结果计算出破损地点距 A 端的距离吗?

解析

电缆的绝缘性能变坏意味着某处有漏电, 即与地之间的电阻不是无限大. 其等效电路如图 2-31 所示, 图 2-31(a)、图 2-31(b) 分别是 1) 和 2) 两次测量线路的示意图. 已知 $\epsilon = 200\text{V}$, $U_1 = 40\text{V}$, $U_2 = 50\text{V}$, $AB = L = 3.50 \times 10^5 \text{m}$. 设受损地点在 C 处, 距 A 端为 l . 由于受损, 该处与地之间的漏电电阻设为 R , 电缆的线电阻率设为 ρ , 在不计电池内阻、接地电阻以及测量用的导线电阻时, 根据欧姆定律, 对 1)、2) 两次测量分别有

$$\epsilon = \rho l \frac{U_1}{R} + U_1$$

$$\epsilon = \rho(L - l) \frac{U_2}{R} + U_2$$

由此两式中消去 R , 可得

$$l = \frac{LU_2(\epsilon - U_1)}{\epsilon(U_1 + U_2) - 2U_1U_2}$$

代入数值, 得 $l = 200\text{km}$.

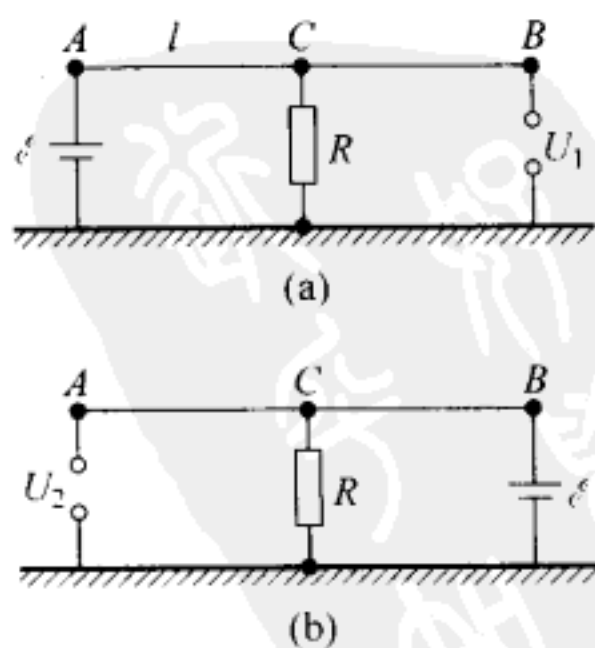


图 2-31

学生在解答本题时的主要障碍是不理解题文所述“绝缘性能变坏”的含义,因而列不出欧姆定律的关系式.

17. 如图 2-32 所示,有一由匀质细导线弯成的半径为 a 的圆线圈和一内接等边三角形的电阻丝组成的电路(电路中各段的电阻值见图). 在圆线圈平面内有垂直纸面向里的均匀磁场,磁感应强度 B 随时间 t 均匀减小,其变化率的大小为一已知常量 k . 已知 $2r_1 = 3r_2$. 试求图中 A 、 B 两点的电势差 $U_A - U_B$.

解析

在各段电路上,感应电流的大小和方向如图 2-33 所示. 电流的分布,已考虑到电路的对称性. 根据法拉第电磁感应定律和欧姆定律,对半径为 a 的圆电路,可得

$$\pi a^2 k = 2r_1 I_1 + r_1 I'_1$$

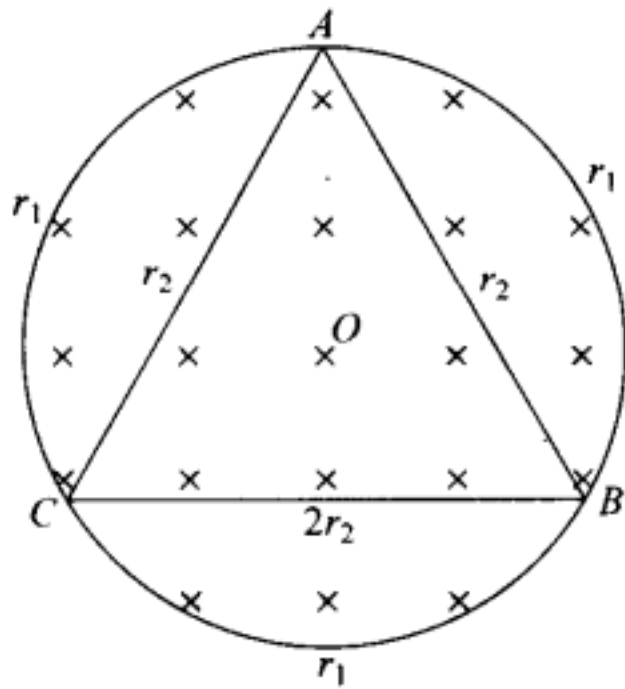


图 2-32

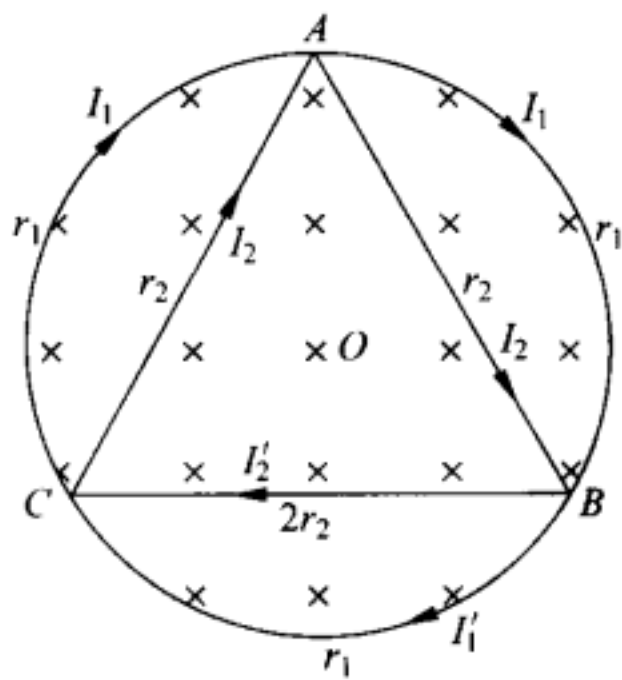


图 2-33

对等边三角形三个边组成的电路,可得

$$3\sqrt{3}a^2 k/4 = 2r_2 I_2 + 2r_2 I'_2$$

对由弦 AB 和弧 AB 构成的回路,可得

$$(\pi a^2 - 3\sqrt{3}a^2/4)k/3 = r_1 I_1 - r_2 I_2$$

考虑到流进 B 点的电流之和等于流出 B 点电流之和,有

$$I_1 + I_2 = I'_1 + I'_2$$

由含源电路欧姆定律可得

$$U_B - U_A = \pi a^2 k/3 - I_1 r_1$$

由以上各式及题给出的 $r_2 = 2r_1/3$ 可解得

$$U_A - U_B = -\sqrt{3}a^2 k/32$$

18. 如图 2-34 所示,电阻 $R_1 = R_2 = 1\text{k}\Omega$,电动势 $\mathcal{E} = 6\text{V}$,两个相同的二极管 D 串联在电路中,二极管 D 的 $I_D - U_D$ 特性曲线如图 2-35 所示. 试求:

- 1) 通过二极管 D 的电流.
- 2) 电阻 R_1 消耗的功率.

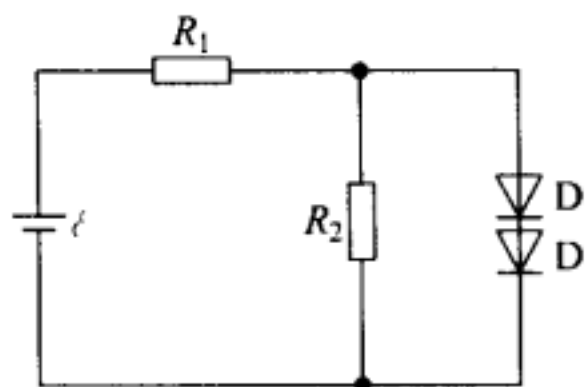


图 2-34

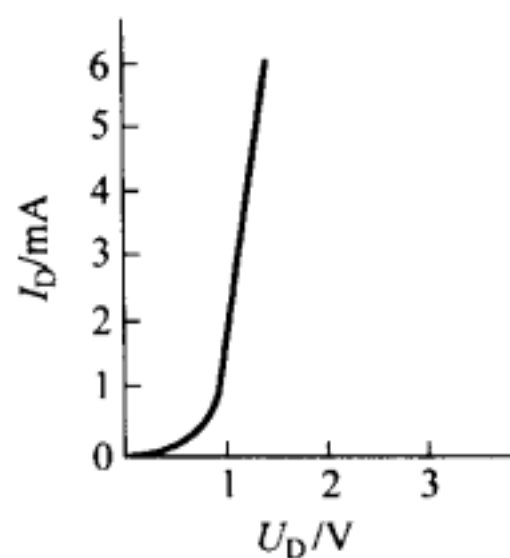


图 2-35

解析

解法 I 设二极管 D 两端的管压为 U_D , 流动二极管的电流为 I_D . 则有

$$2U_D = \mathcal{E} - \left(I_D + \frac{2U_D}{R_2} \right) R_1 \quad (1)$$

代入数据解得 U_D 与 I_D 的关系为

$$U_D = 1.5 - 0.25I_D \times 10^3 \quad (2)$$

这是一个在图 2-36 中横轴上截距为 1.5、纵轴上截距为 6、斜率为 -4 的直线方程(称为二极管的负载线). 因管压 U_D 与流过二极管电流 I_D 还受二极管 D 的 $I_D - U_D$ 特性曲线的限制, 因而二极管就工作在负载线与 $I_D - U_D$ 特性曲线的交点 P 上(见图 2-36). 由此得二极管两端的管压和电流分别为

$$U_D = 1\text{V}, \quad I_D = 2\text{mA} \quad (3)$$

电阻 R_1 上的电压

$$U_1 = \mathcal{E} - 2U_D = 4\text{V}$$

其功率

$$P_1 = \frac{U_1^2}{R_1} = 16\text{mW} \quad (4)$$

解法 II 设两个二极管用一个等效二极管 D' 代替, 当流过等效二极管的电流为 $I_{D'}$ 时, 等效二极管的管压为 $U_{D'} = 2U_D$. 即有

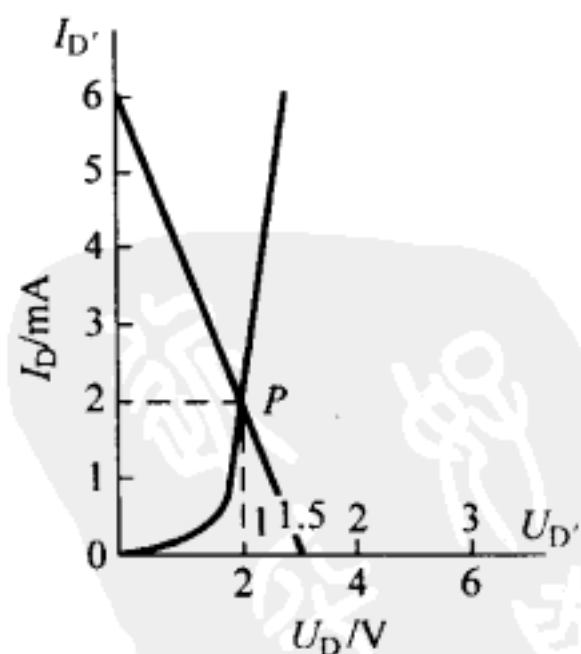


图 2-36

$$U_{D'} = \mathcal{E} - \left(I_{D'} + \frac{U_{D'}}{R_2} \right) R_1 \quad (5)$$

代入数据解得 $U_{D'}$ 与 $I_{D'}$ 的关系为

$$U_{D'} = 3 - 0.5 I_{D'} \times 10^3 \quad (6)$$

这是一个在横轴上截距为 3、纵轴上截距为 6、斜率为 -2 的负载线方程, 二极管 D' 的 $I_{D'}-U_{D'}$ 特性曲线只要将图 2-36 的横坐标增大一倍即可. 用作图法, 求出负载线与管 D' 的特性曲线相交的 P 点得

$$U_{D'} = 2\text{V}, \quad I_{D'} = 2\text{mA} \quad (7)$$

电阻 R_1 上的电压

$$U_1 = \mathcal{E} - U_{D'} = 4\text{V}$$

其功率

$$P_1 = \frac{U_1^2}{R_1} = 16\text{mW} \quad (8)$$

学生经常遇到的问题是组成电路的元件两端的电压与流过该元件的电流成正比的线性关系, 这类元件称之为线性元件. 而二极管这类元件是非线性元件, 因此在电子线路中通常用图解法. 用负载线与二极管的特性曲线相交求得工作点, 这是学生不太熟悉的方法, 但却可开阔学生的思路.

19. 图 2-37 是由 24 个等值电阻连接而成的网格, 图 2-38 中电动势为 $\mathcal{E} = 3.00\text{V}$ 、内阻 $r = 2.00\Omega$ 的电源与一阻值为 28.0Ω 的电阻 R' 及二极管 D 串联后引出两线 P 、 Q ; 二极管 D 的正向伏安曲线如图 2-39 所示.

1) 若将 P 、 Q 两端与图 2-37 中电阻网格 E 、 G 两点相接, 测得二极管两端间的电压为 0.86V . 求电阻网格 E 与 A 间的电压 U_{EA} .

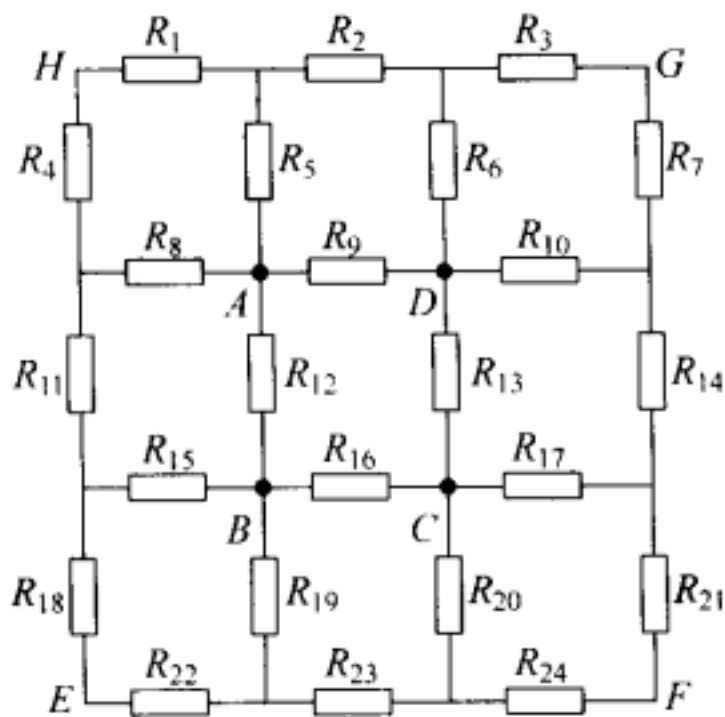


图 2-37

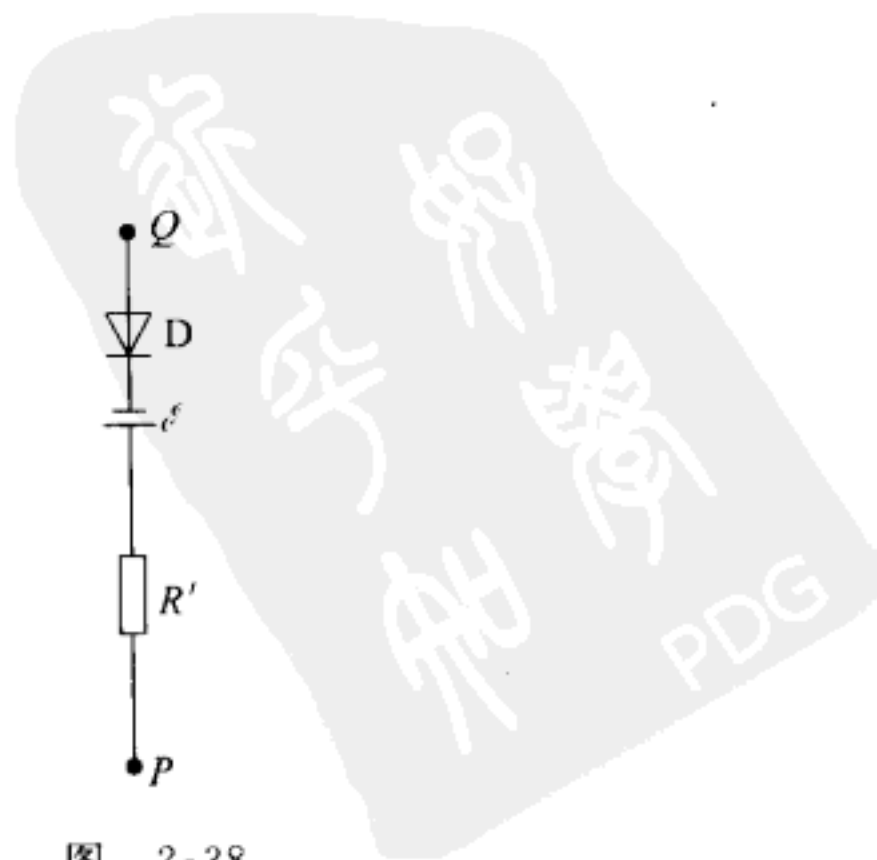


图 2-38

2) 若将 P 、 Q 两端与图 2-37 中电阻网格 B 、 D 两点相接, 求通过二极管 D 的电流 I_D 和网格中 E 、 G 间的电压 U_{EG} .

解析

1) 当引线两端 P 、 Q 与电阻网格 E 、 G 两点相接时, 二极管两端的电压 $U_{D1} = 0.86\text{V}$, 则电阻网格 E 、 G 两点间电压为

$$U_{EG} = \mathcal{E} - I_1 R - U_{D1} \quad (1)$$

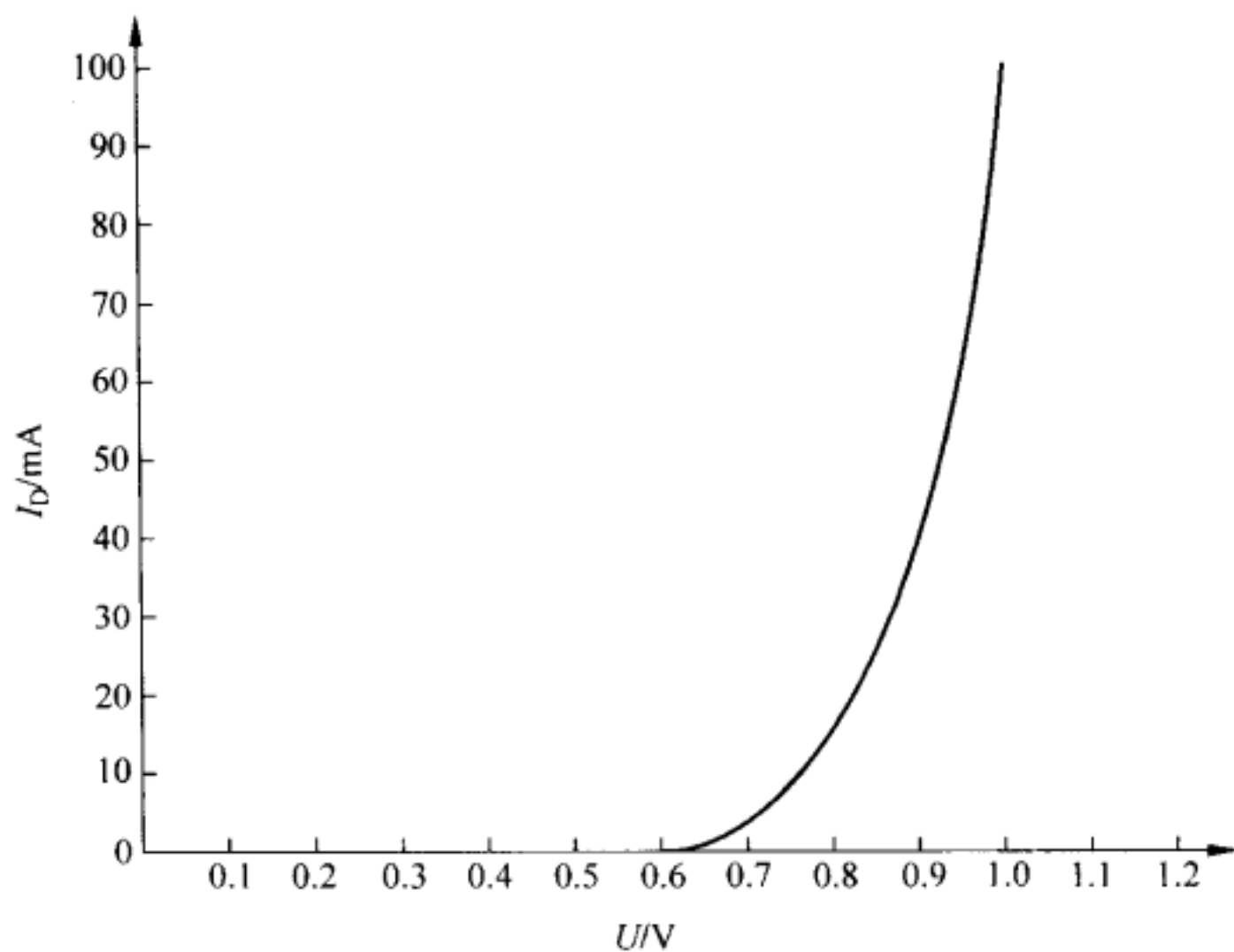


图 2-39

式中 R 为电源内阻 r 与电阻 R' 阻值的和. 从图 2-39 的二极管 D 的正向伏安曲线中可查得电压 U_{D1} 对应的电流 I_1 为 25.0mA , 此电流就是流过电阻 R 及由 E 点流入电阻网格的电流. 将数据代入(1)式, 得

$$U_{EG} = 1.39\text{V} \quad (2)$$

电阻网格 EG 两端的等效电阻 U_{EG} 可由图 2-40 表示, 根据对称性, H 、 A 、 C 、 F 各点电势相等, 且知 U_{EA} 为 U_{EG} 的一半, 即

$$U_{EA} = 0.695\text{V} \quad (3)$$

或设 R_1 至 R_{24} 各电阻的阻值均为 R_0 , 由图 2-40 可求得等效电阻 R_{EG} 与 R_0 有关系

$$R_{EG} = \frac{13}{7}R_0$$

而等效电阻

$$R_{EG} = \frac{U_{EG}}{I_1} = 55.6\Omega \quad (4)$$

求得

$$R_0 = \frac{7}{13}R_{EG} = 29.9\Omega \quad (5)$$

因流经电阻 R_{18} 的电流为 $I_1/2$, 此电流分别在包含电阻 R_{11} 与 R_{15} 二支路中分流, 经计算, 在电阻 R_{15} 、 R_{12} 、 R_9 、 R_6 串联的支路上的电流是 $\frac{I_1}{2}$ 的 $\frac{3}{7}$. 故

$$\begin{aligned} U_{EA} &= \left(\frac{I_1}{2}\right)R_{18} + \left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{I_1}{2}\right)(R_{15} + R_{12}) \\ &= \left(\frac{I_1}{2}\right)\left(1 + \frac{6}{7}\right)R_0 = \left(\frac{13}{14}\right)I_1R_0 = 0.695V \end{aligned} \quad (6)$$

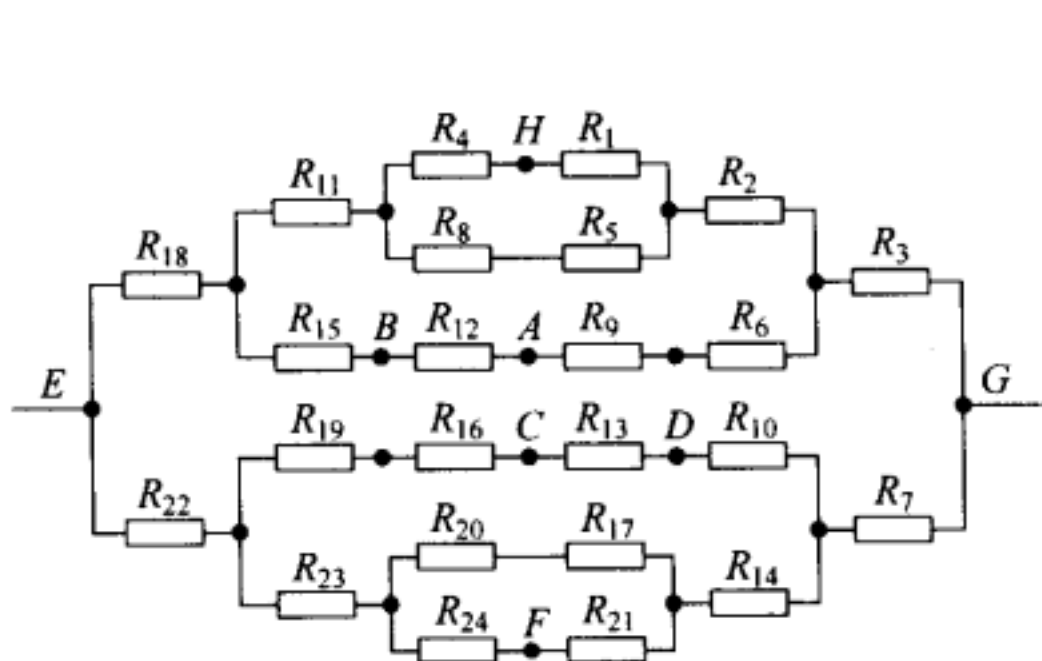


图 2-40

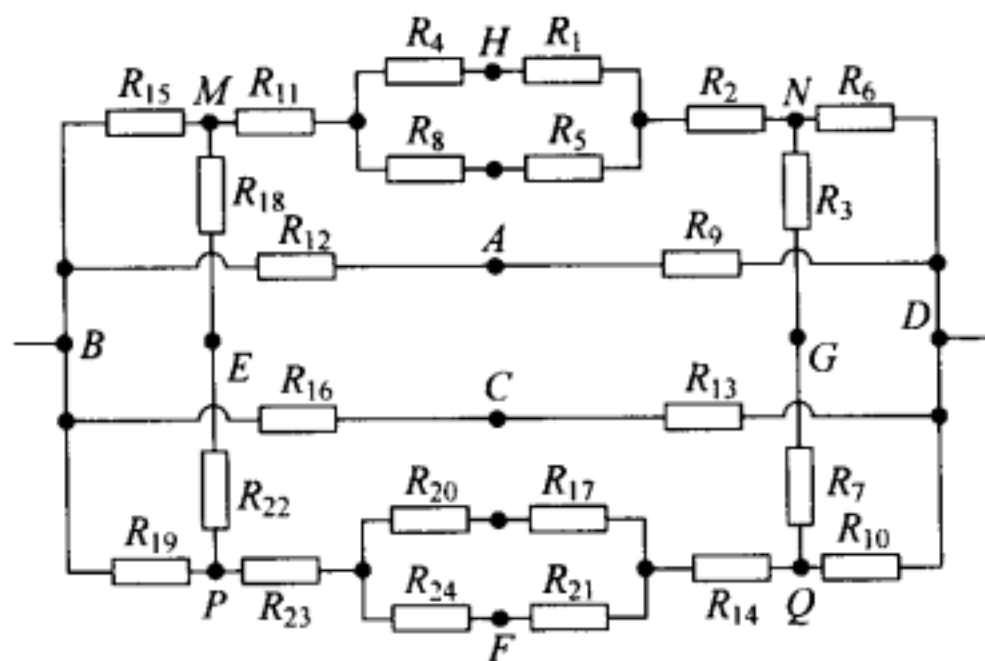


图 2-41

2) 当引线两端 P 、 Q 与电阻网络 B 、 D 两点相接时, 由图 2-41 求得等效电阻 R_{BD} 与 R_0 关系, 并代入 R_0 的阻值

$$R_{BD} = \frac{5}{7}R_0 = 21.4\Omega \quad (7)$$

通过二极管 D 的电流 I_{D2} 与二极管两端电压有关系

$$U_{D2} = \mathcal{E} - I_{D2}(R_{BD} + R_0)$$

代入数据得

$$U_{D2} = 3V - I_{D2} \times 51.3\Omega \quad (8)$$

这是一条联系 U_D 与 I_D 的直线方程, 但是 U_D 与 I_D 又必须满足二极管的伏安特性曲线, 在图 2-42 中描出(8)式所示的直线, 它与二极管伏安特性曲线的交点的纵坐标即为通过二极管的电流 I_D , 由图 2-42 中读出

$$I_D = 40.5\text{mA} \quad (9)$$

根据对称性, 图 2-41 中, M 、 P 两点等势, N 、 Q 两点等势, 流过 R_{18} 、 R_{22} 及流过 R_3 、 R_7 电阻的电流均为零, 因此 E 、 G 间的电势差与 M 、 N 间的电势差相等. 由图 2-41 知

$$\begin{aligned} U_{EG} &= U_{MN} = \frac{2}{7}\left(\frac{I_D}{2}\right)\left[R_{11} + \frac{(R_4 + R_1)(R_8 + R_1)}{(R_4 + R_1 + R_8 + R_1)} + R_2\right] \\ &= \frac{2}{7}\left(\frac{I_D}{2}\right) \times 3R_0 = 0.52V \end{aligned} \quad (10)$$

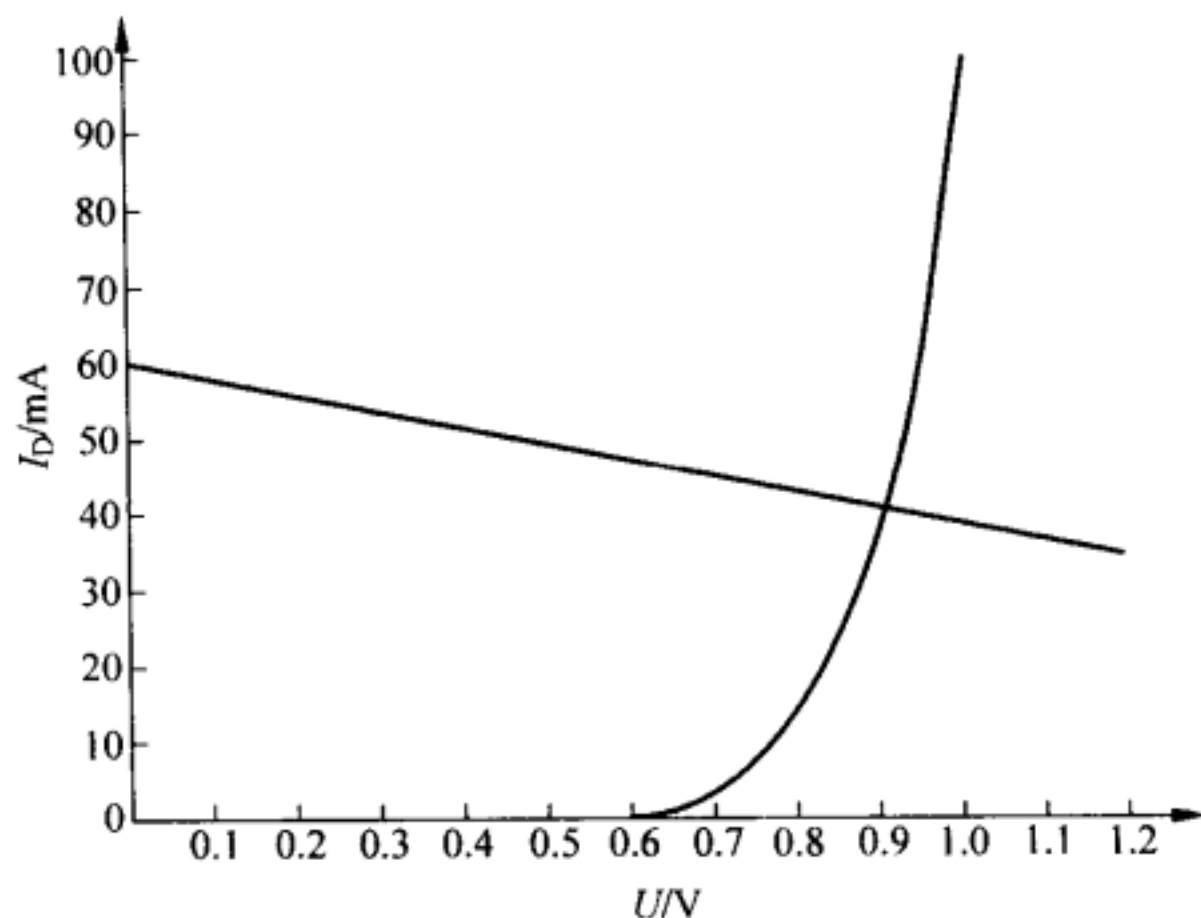


图 2-42

与传统的电路题不同的是电路中包含有非线性元件(二极管),其伏安特性曲线没有用解析式写出,而含源支路电压与电流的关系是一斜率为负的直线方程(负载线),用作图求出直线与曲线的交点(工作点)的方法实际上是曲线方程与直线方程的联立求解的过程.至于电路的其他部分,只要考虑到对称性,求解电阻网络的等效电阻并不困难.

20. 滑线变阻器常用来限流和分压,其原理电路分别如图 2-43 和图 2-44 所示.已知电源端电压为 U (内阻不计),负载电阻为 R_0 ,滑线变阻器的全电阻为 R ,总匝数为 N , A 、 C 段的电阻为 R_{AC} .

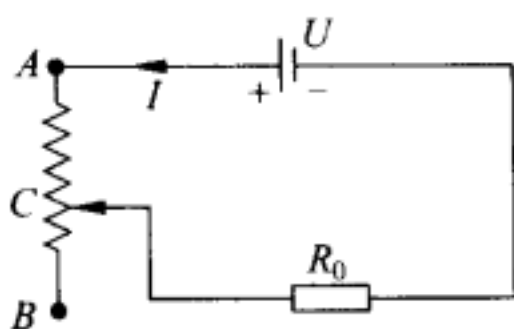


图 2-43

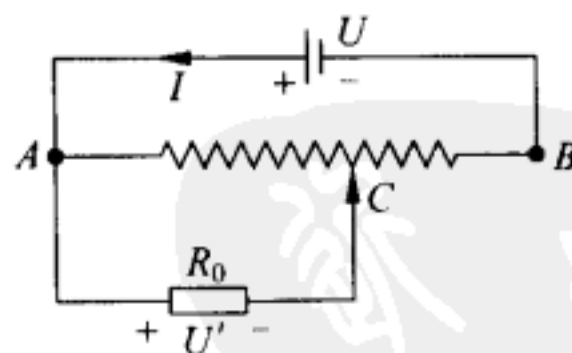


图 2-44

- 1) 在图 2-43 中,当滑动端 C 移动时,电流 I 的最小改变量 ΔI 为多少?(设变阻器每匝阻值 $\ll R_0$)
- 2) 在图 2-43 中,为使在整个调节范围内电流 I 的最小改变量 ΔI 不大于 I 的 0.1% ,滑线变阻器的匝数 N 不得小于多少匝?
- 3) 在图 2-44 中,滑线变阻器的额定电流 I_e 不得小于多少?
- 4) 在图 2-44 中,设 $R_0 \gg R$. 证明:负载端电压 U' 与 R_{AC} 有简单的正比关系.

解析

1) 由图 2-43 可知, 不论滑动端 C 位置在何处, 均有

$$I = \frac{U}{R_0 + R_{AC}} \quad (1)$$

设变阻器每匝阻值为 ΔR , 当滑动端 C 移动一匝时, 电流 I 变为

$$I + \Delta I = \frac{U}{R_0 + R_{AC} + \Delta R}$$

即

$$\begin{aligned} I + \Delta I &= \frac{U}{(R_0 + R_{AC}) \left(1 + \frac{\Delta R}{R_0 + R_{AC}}\right)} \\ &\approx \frac{U}{R_0 + R_{AC}} \left(1 - \frac{\Delta R}{R_0 + R_{AC}}\right) \end{aligned}$$

故得

$$\Delta I = -\frac{U}{(R_0 + R_{AC})^2} \cdot \Delta R$$

显然

$$\Delta R = \frac{R}{N} \quad (2)$$

故

$$\Delta I = -\frac{U}{(R_0 + R_{AC})^2} \cdot \frac{R}{N} \quad (3)$$

式中的负号表明: 当 R_{AC} 增加(或减小)时, 电流 I 减小(或增大).

2) 由(1)式和(3)式得

$$\frac{\Delta I}{I} = -\frac{R}{N(R_0 + R_{AC})}$$

由此可见, 当 $R_{AC} \rightarrow 0$ 时, $\Delta I/I$ 值最大. 如此时变阻器的匝数 N 能满足题给要求, 则在整个调节范围内肯定能满足题给要求.

当 $R_{AC} \rightarrow 0$ 时, 得

$$\frac{\Delta I}{I} = -\frac{R}{NR_0} \quad (4)$$

依题意

$$\frac{I}{|\Delta I|} \geq 1000 \quad (5)$$

因而
$$N \geq 1000 \frac{R}{R_0} \quad (6)$$

3) 设与电源端电压 U 所接电路的总电阻为 R_z , 由图 2-44 可知

$$I = \frac{U}{R_z}$$

式中

$$\begin{aligned} R_z &= R - R_{AC} + \frac{R_0 R_{AC}}{R_0 + R_{AC}} \\ &= R - \frac{R_0 R_{AC} + R_{AC}^2 - R_0 R_{AC}}{R_0 + R_{AC}} \\ &= R - \frac{R_{AC}^2}{R_0 + R_{AC}} \end{aligned}$$

故

$$R_z = R - \frac{R_{AC}}{\frac{R_0}{R_{AC}} + 1}$$

由此式的第二项可见: 当 R_{AC} 增大时, 分子增大, 分母减小, 总电阻 R_z 单调减小.

当 $R_{AC} \rightarrow R$ 时, 则

$$R_z \rightarrow R - \frac{R^2}{R_0 + R} = \frac{R_0 R}{R_0 + R} \quad (7)$$

总电流 I 随 R_z 的单调减小而单调增大, 且

$$I \rightarrow \frac{(R_0 + R)U}{R_0 R} \quad (8)$$

此电流为滑动端 C 就要滑至尽头而尚未滑出尽头时流过变阻器最末端的电流.

因此所求额定电流应为

$$I_e \geq \frac{(R_0 + R)U}{R_0 R} \quad (9)$$

4) 由图 2-44 可知, 负载端电压

$$U' = \frac{U}{R - R_{AC} + \frac{R_0 R_{AC}}{R_0 + R_{AC}}} \cdot \frac{R_0 R_{AC}}{R_0 + R_{AC}} \quad (10)$$

即

$$U' = \frac{U}{R - R_{AC} + \frac{R_{AC}}{1 + \frac{R_{AC}}{R_0}}} \cdot \frac{R_{AC}}{1 + \frac{R_{AC}}{R_0}}$$

当 $R_0 \gg R$ 时, $R_0 \gg R_{AC}$

故得

$$U' \approx \frac{U}{R - R_{AC} + R_{AC}} \cdot R_{AC} = \frac{U}{R} \cdot R_{AC} \quad (11)$$

即

$$U' \approx KR_{AC} \quad (12)$$

式中,比例系数 $K = \frac{U}{R}$ 是一个不变的常量,证毕.

这是一道有实际意义的有关实验内容的竞赛题,有利于培养学生在使用实验仪器与器件过程中遇到的理论问题作出分析和综合,以及根据题目要求作必要的近似处理和讨论的能力.

21. 有若干电阻组成如图 2-45 所示的电路,其中 A、B 两点的接地电阻是固定不动的,输入电压 V_1, V_2, \dots, V_n 仅取 1V 或者 0V 两个值,0V 表示接地.

- 1) 当 $n=3$ 时, B 点的输出电压有几个可能的值?
- 2) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, B 点的最大输出电压为多少?

解析

1) 当 $n=3$ 时, V_1, V_2, V_3 各取 0、1 两值,共有 $2^3 = 8$ 种情况. 相应地, B 点的输出电压有 8 种可能的值,分别为 0V、 $(1/12)V$ 、 $(1/6)V$ 、 $(1/3)V$ 、 $(1/4)V$ 、 $(5/12)V$ 、 $(1/2)V$ 和 $(7/12)V$.

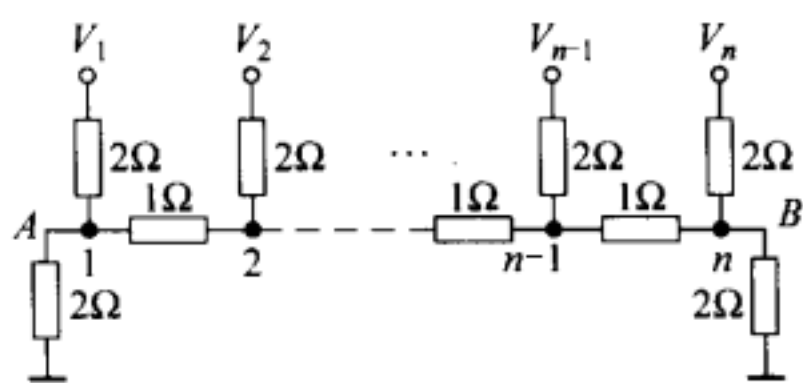


图 2-45

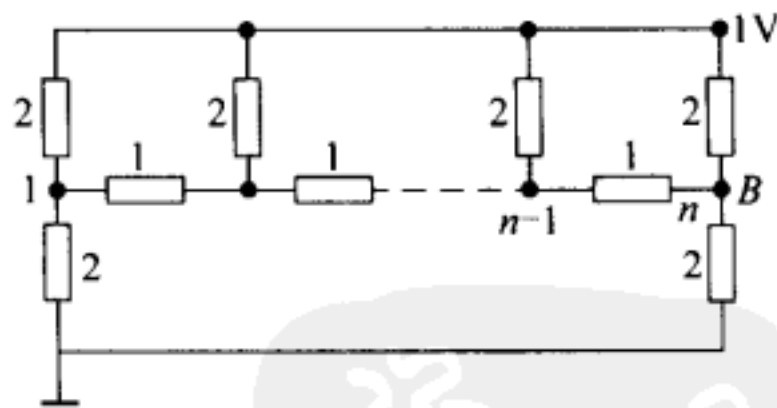


图 2-46

2) 由于是分压输出,显然只有当 $V_1 = V_2 = \dots = V_n = 1V$ 时, B 点输出电压最大,当有一个(或多个)电阻接地, B 点等效接地电阻都将变小,输出电压也相应变小.

故当 n 固定时,有最大输出电压的电路如图 2-46 所示. 根据叠加原理,这时输出电压 $U(n)$ 等于每一电源单独作用时提供的输出电压之和

$$U(n) = \sum_{i=1}^n U_i$$

其中 U_i 为 $V_i = 1V, V_{k \neq i} = 0V$ 的情况下的输出电压. 从图 2-47 可算出为

$$U_i = (1/3)(1/2)^{n-1} V$$

故有

$$U(n) = \sum_{i=1}^n U_i = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \text{V}$$

当 n 趋于无限大时, 我们得到最大输出电压为

$$U = \lim_{n \rightarrow \infty} U(n) = \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \text{V} = \frac{2}{3} \text{V}$$

本题乍看似乎繁无头绪, 利用叠加原理是切入此题的“蹊径”, “每一个电源单独作用”意味着其他电源不存在, 电动势为零, 即演化为图 2-47. 各电阻数值的分配使我们从“柳暗花明”中探得求解此题的途径. 该题考查了学生灵活的应变能力.

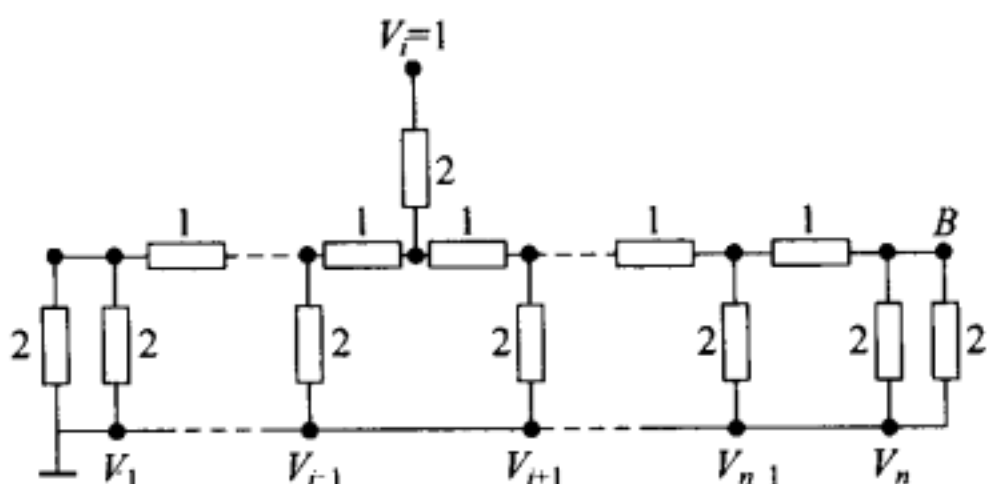


图 2-47

22. 试设计一个由电阻元件组成且能满足下列要求的直流电路:

- 1) 有四个端点 A 、 B 、 A' 、 B' , 其中 B 与 B' 是直接相连的. A' 、 B' 开路时, A 、 B 间的电阻为 8.0Ω ; A 、 B 开路时, A' 、 B' 间的电阻为 8.0Ω .
- 2) 在 A 、 B 两端加上 1.0V 电压时 (A 接正、 B 接负), 测得 A' 、 B' 两端的电压为 0.1V (A' 为正、 B' 为负). 在 A' 、 B' 两端加上 1.0V 电压时, 测得 A 、 B 间的电压为 0.1V .
- 3) 所用电阻元件的个数要尽可能地少.
- 4) 要求设计两种电路.

解析

因为 B 、 B' 是直接相连的, 而 A 、 B 与 A' 、 B' 从题给测量数据看有对称性, 故可设计如图 2-48 和图 2-49 所示的两种电路.

在图 2-48 中, 由题给测量电阻的结果可得

$$\frac{(R+r)r}{(R+r)+r} = 8.0\Omega$$

由题给测量电压的结果可得

$$R+r = 10r$$

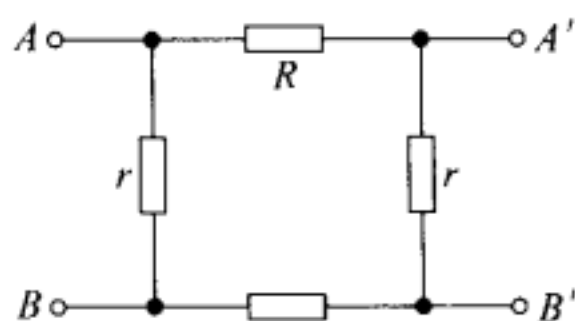


图 2-48

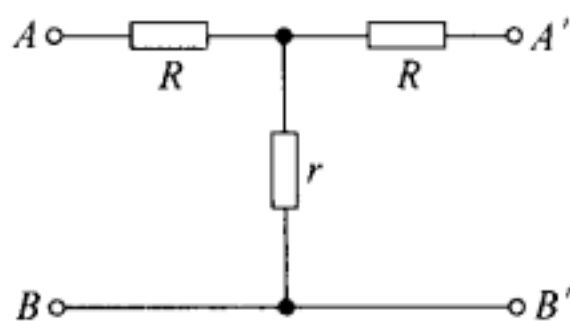


图 2-49

由此可解出

$$R = 79.2\Omega, \quad r = 8.8\Omega$$

在图 2-49 中,同理可得

$$R + r = 8.0\Omega$$

$$R + r = 10r$$

由此可解出

$$R = 7.2\Omega, \quad r = 0.8\Omega$$

这是一个简单的衰减器的实用电路.要求学生把用电阻降压的电路设计成对称的电路,本题考查学生运用已知知识独立分析和解决问题的能力.

23. 用均匀电阻线做成的正方形网络(如图 2-50 所示),由 9 个相同的小正方形组成,小正方形每边的电阻均为 $r=8\Omega$.

1) 在 A、B 两点间接入电池,其电动势 $\mathcal{E}=5.7\text{V}$,内阻可以忽略.求流过电池的电流强度.

2) 若用导线连结 C、D 两点,求通过此导线的电流(略去导线的电阻).

解析

1) 如图 2-51 所示,当 A、B 两点与电池连接后,在正方形网络中产生电流.相对于 CABD 来说,该网络的上、下两半部具有对称性,故 1 与 1'、2 与 2'、3 与 3'、4 与 4'、5 与 5' 和 0 与 0' 均分别为等势点,因而图 2-51 可简化为图 2-52.再考虑到点 3 与点 0 电势相等,图 2-52 又可进一步简化为图 2-53(图中每一个电阻的阻值为 $r/2=4\Omega$),这样,AB 两端等效电阻为

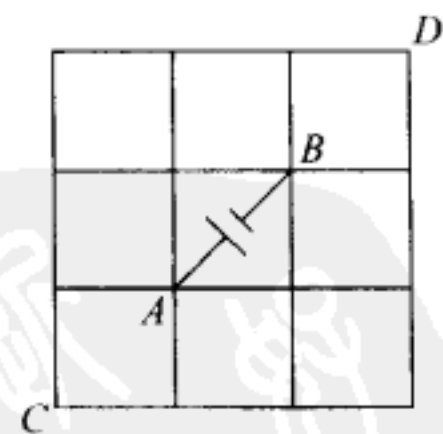


图 2-50

$$R_{AB} = \frac{(4 \times 5) \times 8}{(4 \times 5) + 8} \Omega = \frac{160}{28} \Omega = 5.7\Omega$$

$$I_{AB} = \mathcal{E}/R_{AB} = (5.7/5.7)\text{A} = 1\text{A}$$

2) 当用导线连接 C 、 D 两点时, 图 2-53 可改画成图 2-54, 图中最上面的支路等效电阻为 $R_1 = 8\Omega$, 第 2 行的支路等效电阻为 $R_2 = 12\Omega$, A 、 B 间上半部电路的等效电阻 $R_{AB\pm} = 8\Omega + \frac{8 \times 12}{8 + 12}\Omega = 12.8\Omega$, 通过 CD 间导线的电流为

$$I_{CD} = \frac{\mathcal{E}}{R_{AB\pm}} \times \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{5.7}{12.8} \times \frac{12}{20} \text{A} = 0.267 \text{A}$$

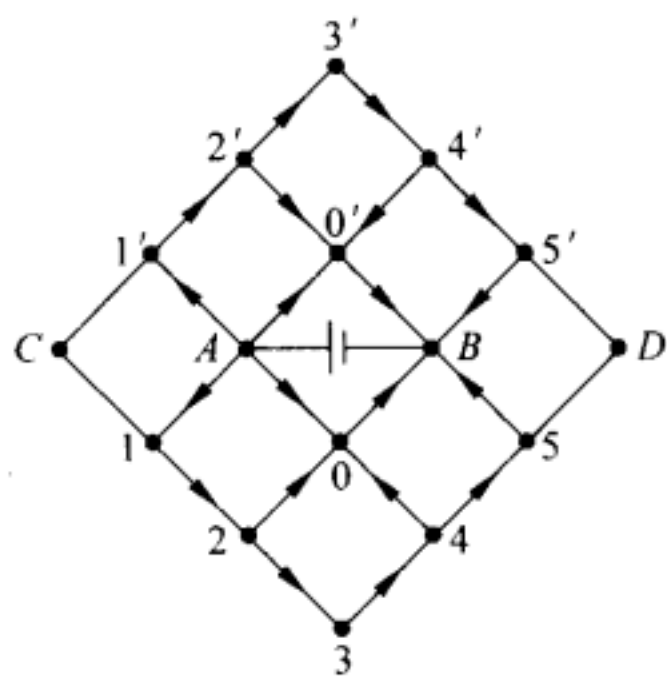


图 2-51

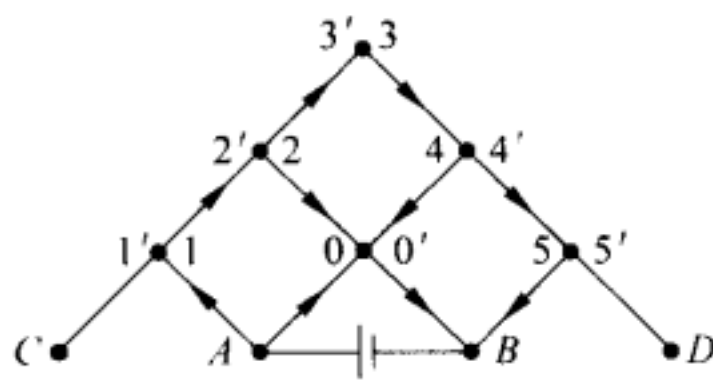


图 2-52

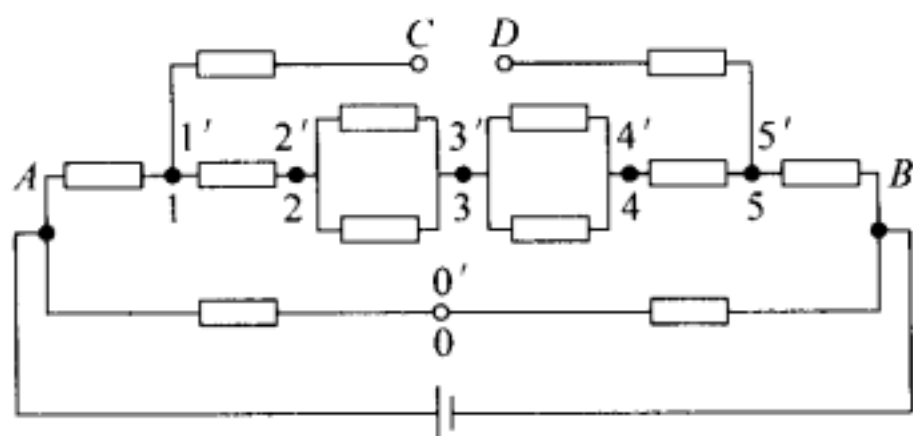


图 2-53

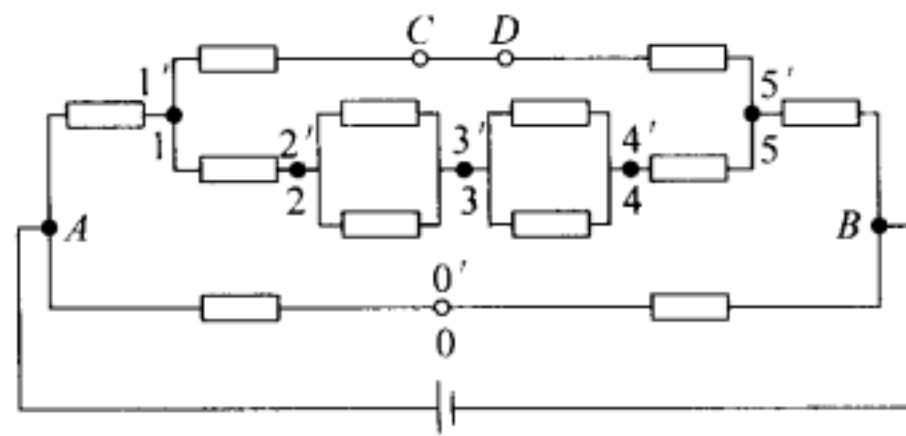


图 2-54

此题是根据对称性分析直流电路的一例, 实质上是求出 A 、 B 两点间的等效电阻. 分析技巧在于 1) 看出 0 和 $0'$ 、 1 和 $1'$ 、 2 和 $2'$ 、 3 和 $3'$ 、 4 和 $4'$ 及 5 和 $5'$ 分别为一对对的等势点, 可以各自合并; 2) 通过 $0(0')$ 与 $3(3')$ 这两个合并点的等势分析, 画出等效电路图 2-53, 这等于把由 $4(4')$ 连到 $0(0')$ 的电阻换为由 $4(4')$ 连到 $3(3')$; 3) 看出 $1(1')$ 与 $5(5')$ 是等效电路中的分支点. 解题主要错误常出在以上三个方面. 此外, 等效电路图 2-53 中的电阻均代表两个并联的电阻 r 的等效电阻, 这也是不容忽视的.

24. 图 2-55 中 da 、 cb 为相距 l 的平行导轨(电阻很小, 可以忽略). a 、 b 间连接一个固定电阻, 阻值为 R . 长直细杆 MN 可以按任意角 θ 架在平行导轨上, 并以匀速 v 滑动(平

移), v 的方向和 da 平行. 杆 MN 有电阻, 每米长的电阻值为 R . 整个空间充满匀强磁场, 磁感应强度的大小为 B , 方向垂直纸面($dabc$ 平面)向里.

- 1) 求固定电阻 R 上消耗的电功率为最大时角 θ 的值.
- 2) 求杆 MN 上消耗的电功率为最大时角 θ 的值.

解析

如图 2-55 所示, 棒滑动时切割磁感线而产生感应电动势 \mathcal{E} , 其值与 θ 角无关, 为

$$\mathcal{E} = lvB$$

以 r 表示两导轨间那段棒的电阻, 则回路中的电流为

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$$

- 1) 电阻 R 上消耗的功率为

$$P_R = I^2 R = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R+r)^2}$$

由于 \mathcal{E} 和 R 均与 θ 无关, 所以 r 的值最小时 P_R 达最大值. 当棒与导轨垂直时两轨道间的棒长最短, r 的值最小. 所以 P_R 最大时的 θ 值为

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

- 2) 棒上消耗的电功率为

$$P_r = I^2 r = \mathcal{E}^2 \frac{r}{(R+r)^2}$$

要求 P_r 最大, 即要求 $\frac{r}{(R+r)^2}$ 取最大值. 由于

$$\frac{r}{(R+r)^2} = \frac{1}{4R} \left[1 - \left(\frac{r-R}{r+R} \right)^2 \right]$$

显见, $r=R$ 时, $\frac{r}{(R+r)^2}$ 有极大值. 因每米杆长的电阻值为 R , $r=R$ 即要求两导轨间的棒长为 1m . 所以有以下两种情况:

- (i) 如果 $l \leq 1\text{m}$, 则当 θ 满足下式时 $r=R$:

$$1 \times \sin\theta = l$$

所以

$$\theta = \arcsin l$$

- (ii) 如果 $l > 1\text{m}$, 则两导轨间那段棒的长度总是大于 1m , 即总是 $r > R$. 由于

$$\left(\frac{r-R}{r+R} \right)^2 = \left(1 - \frac{2R}{R+r} \right)^2$$

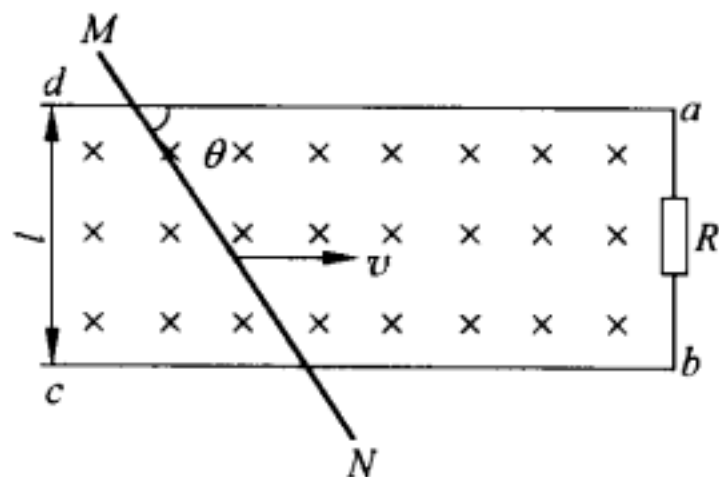


图 2-55

在 $r > R$ 的条件下, 上式随 r 的减小而单调地减小, r 取最小值时 ($\theta = \pi/2$ 时), $\left(\frac{r-R}{r+R}\right)^2$ 取最小值, $r/(R+r)^2$ 取最大值. 所以 P_r 取最大值时的 θ 值为

$$\theta = \pi/2$$

25. 六个外形相同的电阻, 用导线连接如图 2-56, 已知其中五个电阻的值均精确地等于 2Ω , 另一个的阻值则与 2Ω 有明显差异. 用欧姆表对图示电路测量三次, 就可以找出这个与众不同的电阻. 试扼要说明测量方法和论据 (必要时列出计算公式).

解析

本电路相当于在正四面体的六条棱上各有一个电阻. 假设六个电阻的阻值都相同, 则从对称性可知 A, B, C, D 任何两点间的电阻值必然相同. 这时若测量 BC 间电阻值, 由对称性可知 A, D 两点的电势必相等, 所以 AD 间必无电流, 因此, 相当于三个电阻 BAC, BDC, BC 并联. 设测得总电阻为 r , 则

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{R} = \frac{2}{R}$$

即

$$r = \frac{R}{2}$$

已知 $R = 2\Omega$, 所以

$$r = 1\Omega$$

根据题意知六个电阻中有一个阻值与众不同. 这时, 三次测量可以在任意三个节点 (例如 A, B, C) 间分别进行. 测得的电阻值记为 r_{AB}, r_{BC}, r_{CA} .

如果这三个节点之间某一个电阻 (即图 2-56 中三个外围电阻中的一个, 例如 A, B 之间的那一个) 为与众不同者, 则由对称性可知, 此时必有 $r_{CA} = r_{BC} \neq r_{AB}$, 而且 $r_{AB} \neq 1\Omega$.

如果与众不同的电阻是在此三节点之一 (例如 A) 与 D 之间的那个电阻, 则由对称性可知, 此时必有 $r_{AC} = r_{AB} \neq r_{BC}$, 而且当测量在 BC 间进行时, 由于对称, AD 间无电流, AD 间的电阻值不影响测量结果, 这时必有 $r_{BC} = 1\Omega$ (即与六个电阻都是 2Ω 时的结果一样).

总之, 测出的三个值, 一定有两个相同, 一个不同. 如果后者不等于 1Ω , 则与众不同的电阻必为与测出不同值时两节点直接相联的那个电阻. 如果后者等于 1Ω , 则与众不同的电阻必为与测出不同值时两节点正对着的两节点之间的那个电阻.

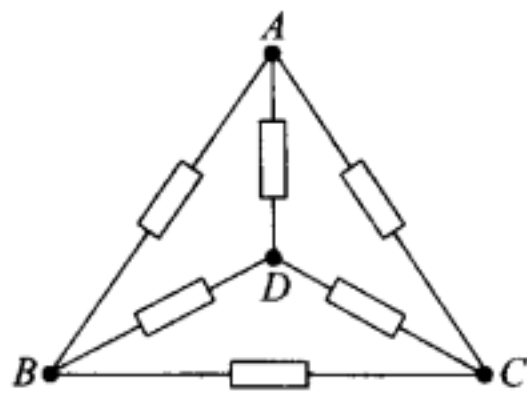


图 2-56

26. 如图 2-57 所示电路,各电阻的阻值都是 1Ω ,安培计和电源的内阻皆可忽略,电源端电压为 $10V$,试求:

- 1) 通过安培计的电流强度.
- 2) 若两个 r 是好电阻,而 r_1, r_2, r_3 是坏电阻,它们互不相关地时通时断, r_1, r_2, r_3 各自通电的概率都是 $\frac{1}{2}$,求电源的平均输出功率(r_1, r_2, r_3 通电时阻值仍为 1Ω).

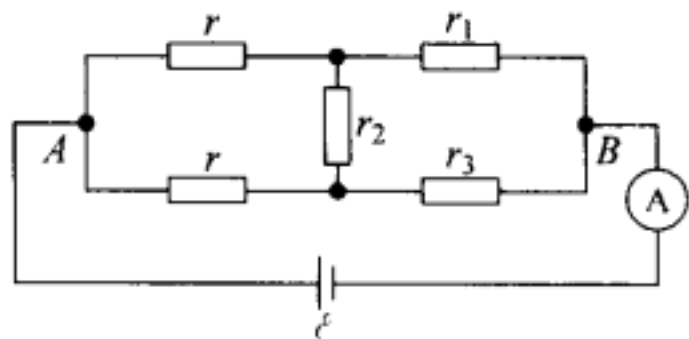


图 2-57

解析

1) 由 r, r_1 和 r_3 的阻值可知,此时满足电桥平衡条件

$$\frac{r}{r_1} = \frac{r}{r_3}$$

因此, r_2 中无电流.

若用 r_{AB} 表示 AB 间的等效电阻,则

$$r_{AB} = \frac{1}{\frac{1}{r+r_1} + \frac{1}{r+r_3}} \Omega = 1\Omega$$

所以通过电流计的电流强度为

$$I = \frac{V}{r_{AB}} = 10A$$

2) r_1, r_2 和 r_3 各有“通”、“断”两种情况. 通时阻值为 1Ω . 断时阻值为 ∞ , 因此电路中的组合情况共有 $2^3 = 8$ 种可能, 如列表 2-1 所示.

表 2-1

r_1	r_2	r_3	等效电阻 r_{AB}/Ω	功率/W
通	通	通	1	100
通	通	断	$5/3$	60
通	断	通	1	100
通	断	断	2	50
断	通	通	$5/3$	60
断	通	断	∞	0
断	断	通	2	50
断	断	断	∞	0

由于 r_1, r_2 和 r_3 的通断是随机的, 以上 8 种可能性的概率相同, 因此平均功率为:

$$\text{平均功率} = \frac{1}{8} (100 + 60 + 100 + 50 + 60 + 0 + 50 + 0) W = 52.5 W$$

本题从定量方面来看并不难, 但增加了概率的概念, 需要分析各种情况进行平均.

27. 一导线围成半径为 D 的圆环 adb , 在圆环所围的区域内有一半径为 $D/2$ 的圆形区域, 其周界与圆环内切于 c 点. 此区域内有均匀磁场, 磁感应强度 B 垂直于圆面, 其指向如图 2-58 所示. 磁场的磁感应强度随时间增大, 其变化率 $\Delta B/\Delta t = k = \text{常量}$. 导线 ab 是圆环的一条直径, 与有磁场分布的圆形区域的周界相切. 设导线 ab 以及被其所分割成的两个半圆环的电阻都是 r , 今用一电流计 G 接在 a, b 两点之间, 电流计位于纸面内, 电流计的内阻亦为 r (连接电流计的导线的电阻忽略不计). 设圆形区域外的磁场可忽略不计. 试问在下列情况下, 通过电流计的电流 I_g 为多少?

- 1) 半圆环 acb 与 adb 都位于纸面内, 并分别位于直径 ab 的两侧.
- 2) 半圆环 adb 绕直径 ab 转过 90° , 折成与纸面垂直.
- 3) 半圆环再绕直径转 90° , 折成与 acb 重合.

解析

1) 如令电路 acb 中的感应电动势为 \mathcal{E}_1 , 在 ab, abd 和 abG 中的感应电动势分别为 \mathcal{E}_2 , 于是有

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{1}{4} \pi D^2 k \quad (1)$$

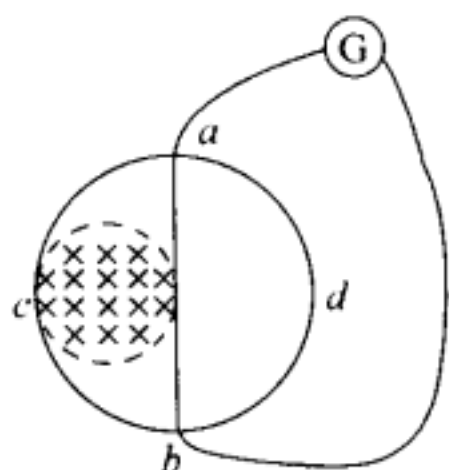


图 2-58

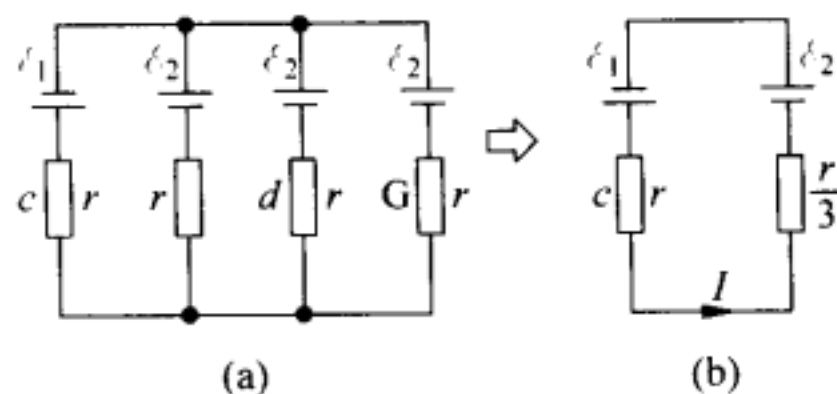


图 2-59

电路原理图如图 2-59(a) 所示. 其等效电路如图 2-59(b) 所示.

由等效电路可算出通过半圆环 acb 的电流是

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{r + \frac{1}{3}r} = \frac{3(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)}{4r} \quad (2)$$

将(1)式代入, 得

$$I = \frac{3}{16} \frac{\pi D^2 k}{r}$$

所以通过电流计的电流是

$$I_g = \frac{I}{3} = \frac{\pi D^2 k}{16r} \quad (3)$$

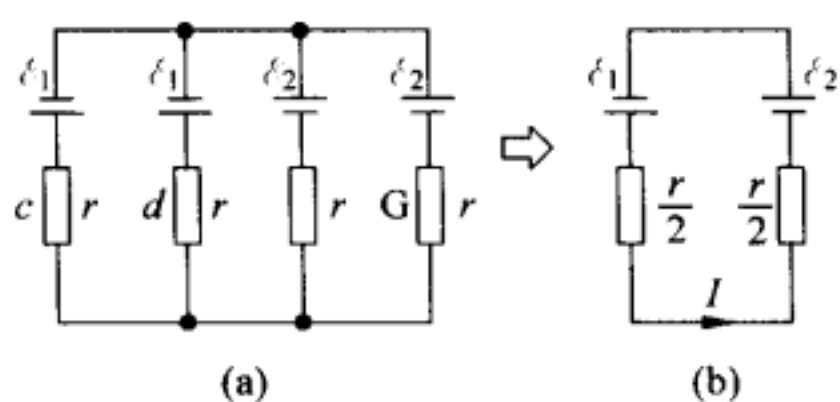


图 2-60

2) 与 1) 的结果相同.

3) 原理图和等效电路分别如图 2-60(a)、(b)所示.

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r} = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{r} = \frac{1}{4} \frac{\pi D^2 k}{r}$$

$$I_g = \frac{1}{2}I = \frac{1}{8} \frac{\pi D^2 k}{r}$$

有一些学生没有注意到 \overline{ab} 、 \widehat{adb} 和连接电流计的导线上也是含源电路,更没有抓住三者的电动势相等这个关键.虽然不知道 \mathcal{E}_1 与 \mathcal{E}_2 的数值,但是 $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ 的数值是知道的,只要抓住这些关键,问题就不难解决.

28. 用伏安法测定一个阻值约为 $25\text{k}\Omega$,额定功率为 $(1/20)\text{W}$ 的电阻的阻值.备用仪器及元件有:

1) 待测电阻,如图 2-61(a)所示,阻值约 $25\text{k}\Omega$,功率为 $(1/20)\text{W}$.

2) 直流电流表 2 个,如图 2-61(b)所示.

(A_1) 量程 $0 \sim 100\mu\text{A}$,内阻约为 $2\text{k}\Omega$.

(A_2) 量程 $0 \sim 500\mu\text{A}$,内阻约为 300Ω .

3) 直流电压表 3 个,如图 2-61(c)所示.

(V_1) 量程 $0 \sim 1\text{V}$,内阻约为 $10\text{k}\Omega$.

(V_2) 量程 $0 \sim 10\text{V}$,内阻约为 $100\text{k}\Omega$.

(V_3) 量程 $0 \sim 50\text{V}$,内阻约为 $500\text{k}\Omega$.

4) 电源 3 种,如图 2-61(d)所示.

(\mathcal{E}_1) 两节干电池,每节 1.5V .

(\mathcal{E}_2) 直流稳压电源,输出电压 15V ,额定电流 1A .

(\mathcal{E}_3) 直流稳压电源,输出电压 50V ,额定电流 0.5A .

5) 电位器,如图 2-61(e)所示.电阻值 $1\text{k}\Omega$,额定功率 1W .

6) 开关、导线.

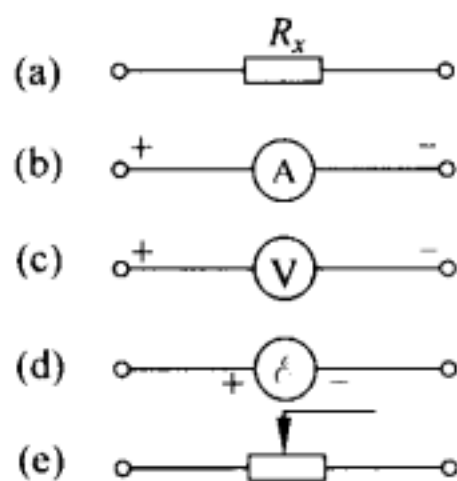


图 2-61

试从以上所提供的仪器和元件中选择合适的规格及适宜的线路,使得被测电阻的测量结果达到尽可能高的精确度.绘出电路图并标明所选仪器与元件的规格.

解析

电路及仪器、元件规格如图 2-62 所示.

[说明]

1) 不能或不宜直接用电源接上 R_x . 因为: (i) 若用 50V 电源, 则超过 R_x 的额定功率; (ii) 若用 15V 电源, 则流过 R_x 的电流约为 $600\mu\text{A}$, 超过所给电流表的量程; (iii) 若用 3V 电源, 则流过 R_x 的电流约为 $120\mu\text{A}$, 超过所给电流表 (A_1) 的量程. 若选用电流表 (A_2), 虽不超程, 但电流值只有满量程的 $1/4$ 左右, 从而降低了精确度.

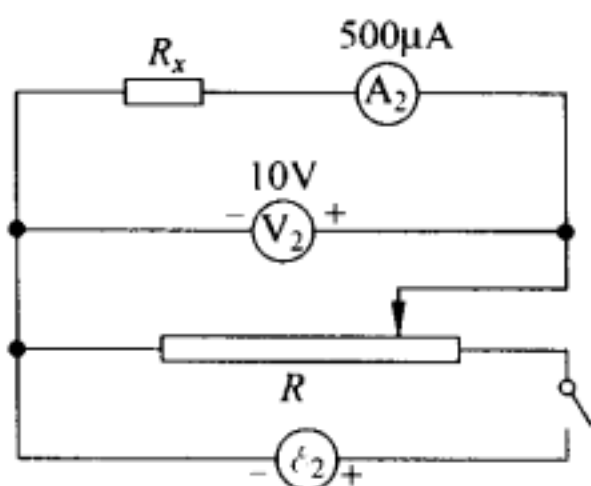


图 2-62

2) 不能或不宜把电位器用作限流电阻, 将它与电源和 R_x 串接使用. 因为: (i) 若用 50V 电源, 则超过 R_x 的额定功率; (ii) 若用 15V 或 3V 电源, 因为电位器的电阻值 ($1\text{k}\Omega$) 比 R_x 的电阻值 (约 $25\text{k}\Omega$) 小得多, 所以由估算可知, 结论与上述 1) 中相同.

3) 用电位器 R 作分压器, 即采用如图 2-62 中所示的分压电路. 这时电源应选 15V. 因为: 若选用 50V 电源, 则超过电位器的额定功率; 若选用 3V 电源, 则不宜用电压表 (V_2) 和 (V_3), 因为指针偏转过小, 降低了测量的精确度; 若用电压表 (V_1), 则经估算可知, 电流表的指针偏转也过小.

在选用电位器 R 作分压器并选 15V 电源后, 电压表应选 (V_2). 因为 (V_3) 会使电压表指针偏转过小, 而 (V_1) 会使电流表指针偏转偏小, 都不利于提高测量的精确度. 当选用 (V_2) 时, 可调节分压器的输出电压略小于 10V, 这时经估算可知, 流过 R_x 的电流约为 $400\mu\text{A}$. 因此选电流表 (A_2) 是适宜的.

4) 由于电压表 (V_2) 的内阻约为待测电阻 R_x 的 4 倍, 因此电流表应当“内接” (如图 2-62 所示), 这样可减小因电表内阻对测量结果造成的系统误差.

在已确定了实验的目的和方法后, 根据已有的条件, 如何选择所用仪器和元件的规格, 使实验既能安全进行又能提高测量结果的精确度, 是设计实验时一个重要的考虑方面. 本题的目的就是要考查学生这方面的水平.

29. 实验室有一个破损的多量程动圈式直流电流计, 有 1mA 、 10mA 和 100mA 三挡, 由一个单刀三掷开关转换, 其内部电路如图 2-63 所示. 电流计的表头已烧坏, 无法知道其电特性, 但三个精密分流电阻完好, 测得 $R_1 = 144\Omega$. 现有两个表头 A 和 B, 外形都与原表头相同, 表头 A 的满刻度电流为 0.2mA , 内阻为 660Ω ; 表头 B 的满刻度电流为 0.5mA , 内阻为 120Ω . 问在保留分流电阻 R_1 、 R_2 和 R_3 的情况下,

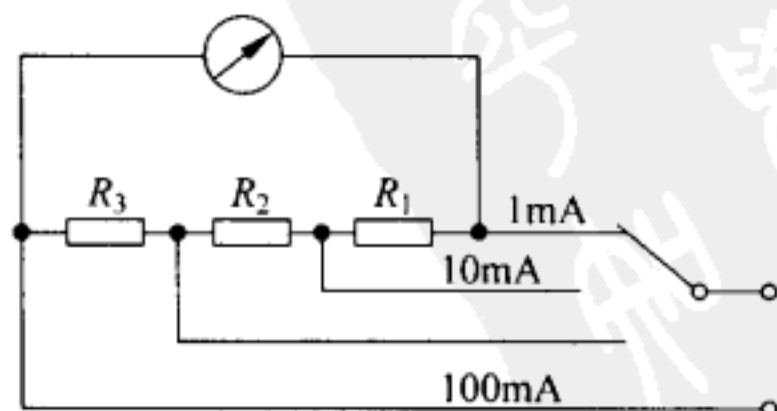


图 2-63

应该用哪个表头修复此电流计？怎样恢复？

解析

设原表头的满刻度电流为 I_0 ，内阻为 r 。

1mA 挡的等效电路如图 2-64 所示，输入 1mA 电流时可得下列关系：

$$\frac{I_0}{1 - I_0} = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{r} \quad (1)$$

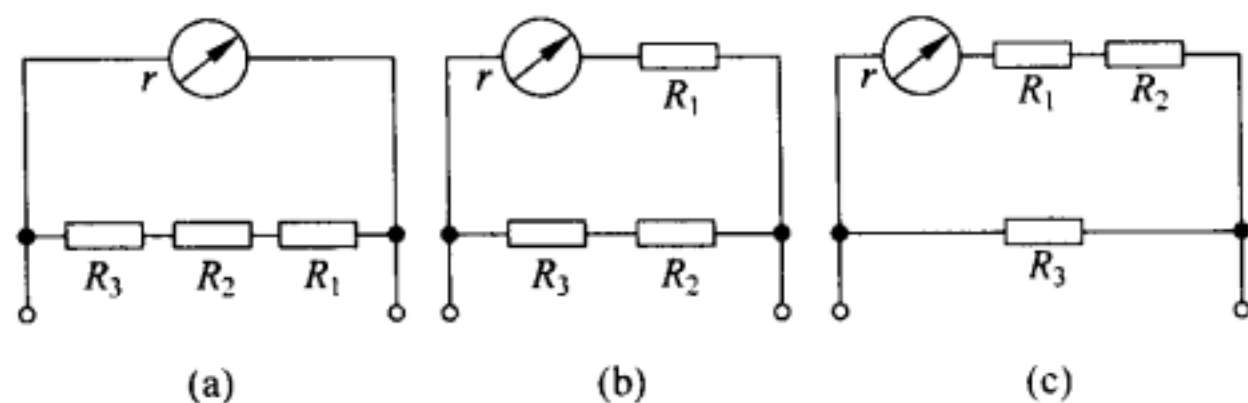


图 2-64

10mA 挡和 100mA 挡的等效电路如图 2-64 (b) 和 (c) 所示，分别输入 10mA 和 100mA 电流时，可得下列关系：

$$\frac{I_0}{10 - I_0} = \frac{R_2 + R_3}{r + R_1} \quad (2)$$

$$\frac{I_0}{100 - I_0} = \frac{R_3}{r + R_1 + R_2} \quad (3)$$

将所给 R_1 值代入，消去 R_2 和 R_3 可得

$$I_0(r + 160) = 160\text{mV} \quad (4)$$

这就是表头的 I_0 与 r 所必须满足的关系，且只要满足此关系的表头，三个量程都可给出正确读数，并不一定需要用与原表头参数一样的表头。

现有表头 A 的参数 $I_0 = 0.2\text{mA}$ ， $r = 660\Omega$ ，由于

$$I_0(r + 160) = 0.2(660 + 160)\text{mV} = 164\text{mV} \neq 160\text{mV}$$

不满足 (4) 式，故表头 A 不能在保持 R_1 、 R_2 和 R_3 不变的条件下使用。

表头 B 的参数 $I_0 = 0.5\text{mA}$ ， $r = 120\Omega$ ，虽然

$$I_0(r + 160) = 0.5(120 + 160)\text{mV} = 140\text{mV}$$

也不满足 (4) 式，但若将 r 加上 40Ω ，使表头 B 的内阻变为 $r' = r + 40\Omega = 160\Omega$ ，即可满足 (4) 式。因此答案是：表头 B 可用来修复此电流计，方法是将表头 B 与一个 40Ω 电阻串联接入原表头位置即可。

本题是一道带有考查学生实验能力性质的竞赛题. 除了对多量程电流表的结构原理有所了解, 并能根据串、并联关系式求出满度电流与表头内阻的关系外, 还要求学生能从 A、B 两个都不符合要求的表头中选出有可能进行改装的一个. 对于实验知识较差的学生, 在推导出 I_0 与 r 的关系后, 可能仍不知该怎样修复电流计.

30. 有一装置如图 2-65 所示, 整个装置处于真空中, 从阴极 K 发射出的电子通过第 I 区域, 从阳极小孔 B 射出进入由金属管构成的第 II 区域, 离开金属管后进入有一均匀磁场的第 III 区域, 磁场方向垂直于纸面向里, 电子在哪些区域内会发射电磁波? (A) 只在第 I 区域; (B) 只在第 II 区域; (C) 只在第 III 区域; (D) 只在第 I、III 区域; (E) 只在第 I、II 区域.

解析

D.

因为只有在区域 I 与 III 中电子因作加速运动而辐射电磁波.

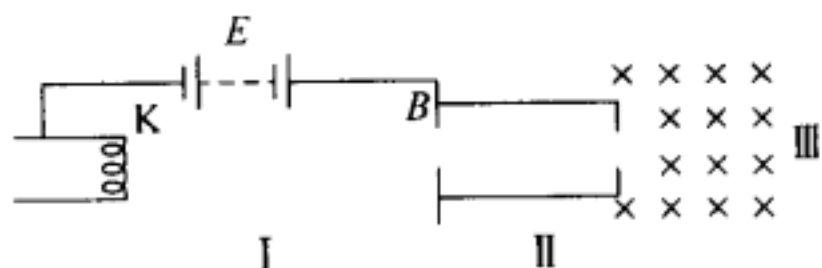


图 2-65

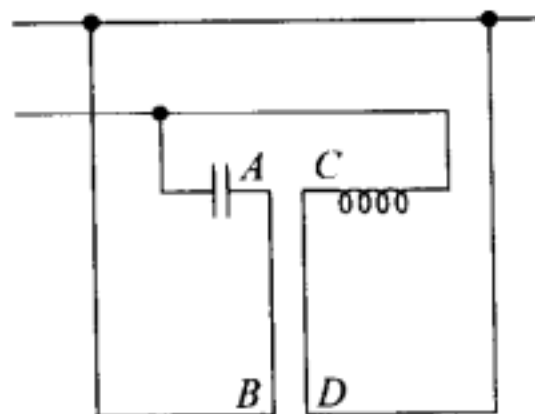


图 2-66

31. 从同一交流电路上接出两个支路, 如图 2-66 所示. 一支路连接一个无泄漏电阻的电容器; 另一支路连接一个无电阻的电感线圈. 则导线 AB 和 CD 的相互作用是: (A) 相吸; (B) 相斥; (C) 吸、斥不定; (D) 无相互作用.

解析

B.

由于电容与电感的存在使导线 AB 和 CD 的电流与电压有相位 $\pi/2$ 之差, 使二导线电流相位差为 π , 平均效果是相互排斥.

32. 有一台内阻及损耗均不计的直流发电机, 其定子的磁场恒定, 先把它的电枢(转子)线圈与一个电阻 R 连接, 再在电枢的转轴上缠绕足够长的轻绳, 绳下端悬挂一质量为 m 的重物(如图 2-67 所示), 重物最后以速率 v_1 匀速下落. 现将一电动势为 \mathcal{E} , 内阻不计

的电源如图 2-68 所示接入电路中,使发电机作电动机用,悬挂的重物不变,最后重物匀速上升,求重物上升的速率 v_2 .



图 2-67

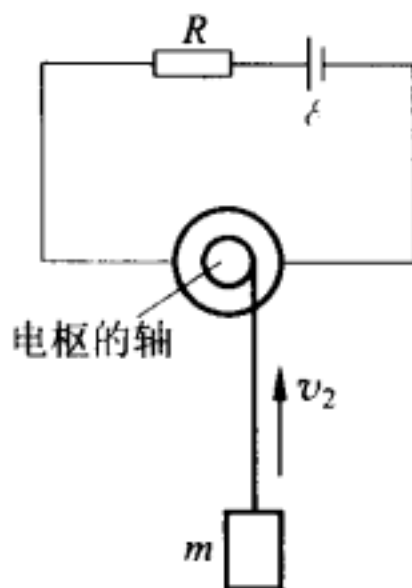


图 2-68

解析

在图 2-67 中,把重物、电机和电路看作一个系统,由于不计电机内的损耗,而且当重物匀速下落时,重物和电机运动的动能都已稳定不变,根据功能原理可知,重力的功率应等于电阻上消耗的功率. 设电路中的电流强度为 I_1 ,则有

$$mgv_1 = I_1^2 R \quad (1)$$

在图 2-68 中,同样根据功能原理可知,电源供给的功率一部分消耗在电阻上,另一部分用来提升重物,即克服重力做功. 因而有

$$\varepsilon I_2 = I_2^2 R + mgv_2 \quad (2)$$

在图 2-67 和图 2-68 中,由于重物都是匀速运动,所以绳子的张力都与重力相等,因此绳对电机拉力的力矩也相等. 电机是匀速转动,所以电机内的磁力矩也必定相等. 题中已知磁场恒定,因而可知电流一定相等,即

$$I_1 = I_2 \quad (3)$$

由(1)、(2)、(3)三式可解得

$$v_2 = \varepsilon \sqrt{\frac{v_1}{mgR}} - v_1 \quad (4)$$

33. 有一无限大平面导体网络,它由大小相同的正六边形网眼组成,如图 2-69 所示. 所有六边形每边的电阻均为 R_0 ,求网络结点 a 、 b 间的等效电阻.

解析

由网络的对称性可知,假设有电流 I 由 a 点流入网络,必有 $I/3$ 电流由 a 流向 c ,在 c 点又分两支路电流向 d 和 b ,即流经 cb 的电流为 $I/6$ (图 2-70).

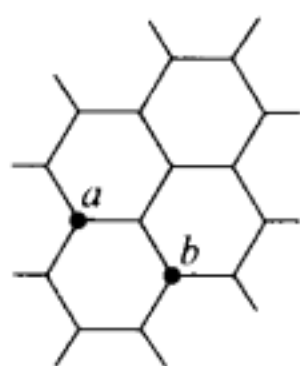


图 2-69

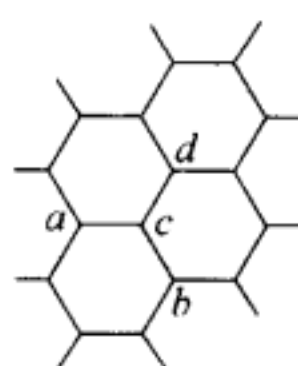


图 2-70

另一方面,假设有电流 I 从网络 b 点流出,亦有 $I/3$ 电流由 c 点流向 b , a 和 d 分别有 $I/6$ 流向 c .

将两种情况叠加,则有电流 I 由 a 流入,从 b 流出,按电流可叠加性,必有

$$I_{ac} = \frac{I}{3} + \frac{I}{6} = \frac{I}{2}, \text{ 经导线 } ac \text{ 由 } a \text{ 流向 } c$$

$$I_{cb} = \frac{I}{3} + \frac{I}{6} = \frac{I}{2}, \text{ 经导线 } cb \text{ 由 } c \text{ 流向 } b$$

所以 a, b 两点间等效电阻

$$R_{ab} = \frac{U_{ab}}{I} = \frac{I_{ac}R_0 + I_{cb}R_0}{I} = R_0$$

此题是利用旋转对称性分析电路的一个例子(电路绕垂直于图面过任一结点的轴旋转 120° 就恢复原状).

严格说这里所说的“叠加”是指恒流源(不论负载如何均提供恒定不变电流的电源)的叠加原理:“任一支路的电流是电路中各个电源单独作用时在该支路产生的电流的代数和。”本题主要考查学生灵活运用知识的能力.

34. 在图 2-71 所示的电路中,两电容器的电容相等,即 $C_1 = C_2 = C$. 两个二极管 D_1 、 D_2 皆为理想二极管(正向电阻为零,反向电阻为无限大). 当电源输入电压为图 2-72 所示的稳定方波时,试在图 2-73 和图 2-74 中分别画出达到稳定状态后 L 点的电压 U_L 和 M 点的电压 U_M 随时间变化的图像. 图中 $t=0$ 表示达到稳定状态后的某一时刻.

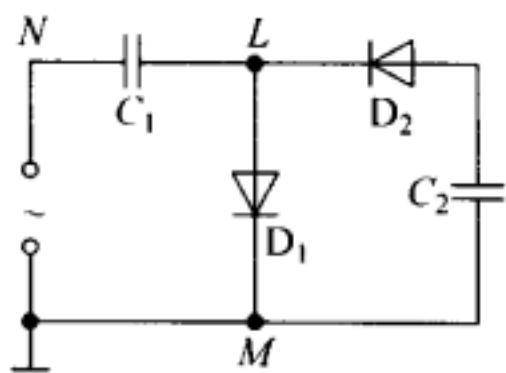


图 2-71

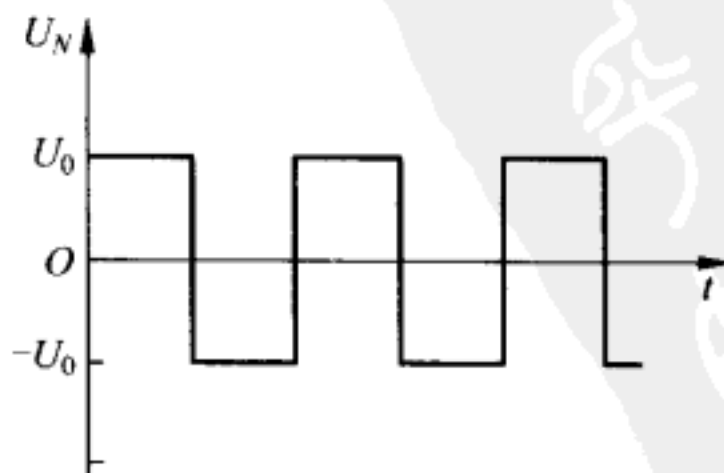


图 2-72

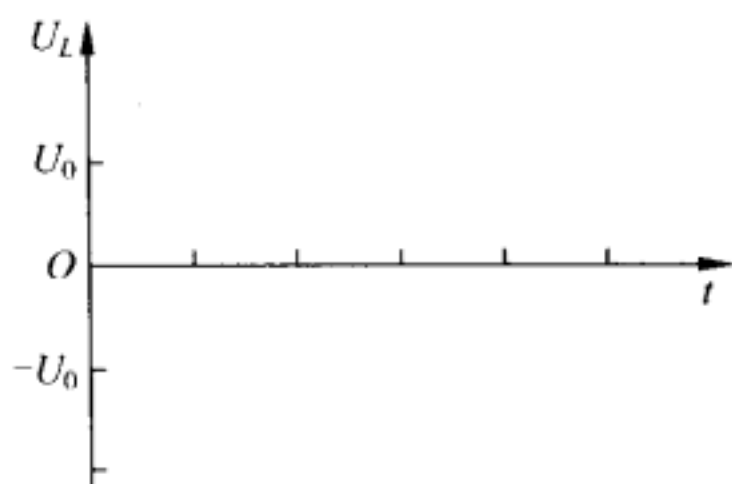


图 2-73

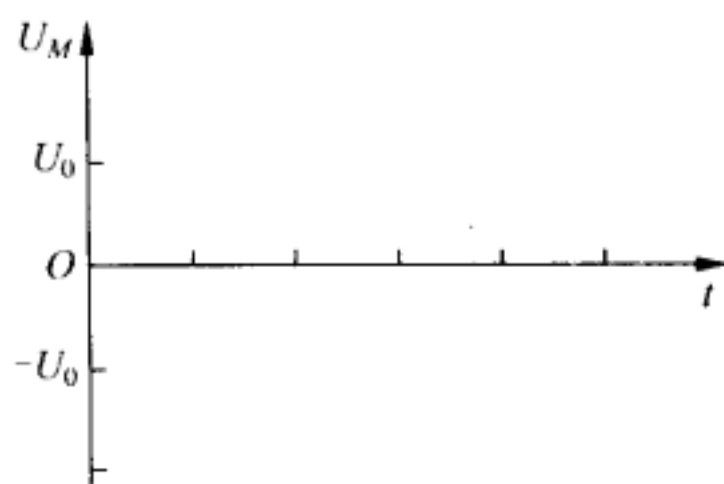


图 2-74

解析

如图 2-75、图 2-76 所示。

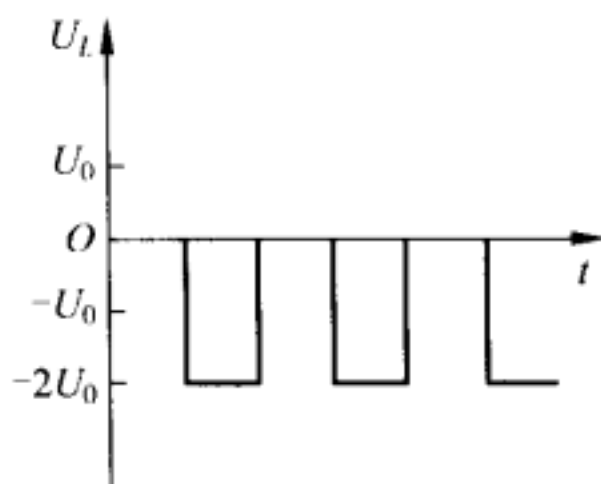


图 2-75

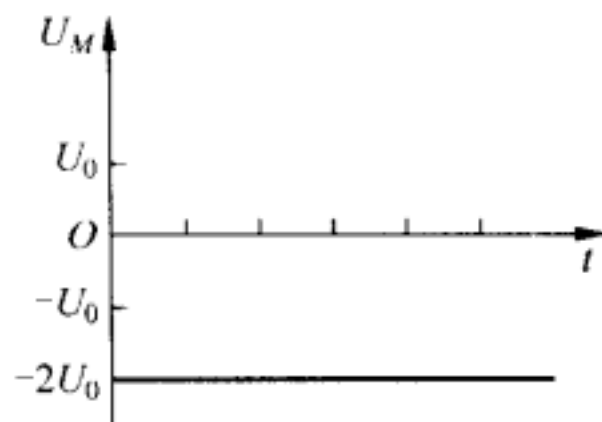


图 2-76

由于二极管的单向导电性,图 2-71 所示的电路由开始通电到趋于稳定的过程中,电容器 C_1 有多次充放电过程,而电容器 C_2 则有多次充电过程。

设开始通电时 N 点电压为 $+U_0$,两电容器上均无电荷。这时,因 D_1 导通、 D_2 截止, C_1 将充电至电压为 U_0 (左板带正电,右板带负电)。当 N 点电压变为 $-U_0$ 时, D_1 截止、 D_2 导通,电路成为 C_1 、 C_2 与电源的串联电路, C_1 右板上的负电荷将有一部分分到 C_2 的上板上 (对于 C_1 来说,这相当于它通过电源放电),而 C_2 的下板将充入正电荷 (C_2 第一次充电) 达到两电容器上电压之和等于 $-U_0$ 。当 N 点电压再次变成 $+U_0$ 时,再次有 D_1 导通、 D_2 截止, C_1 再次充电到电压为 U_0 , C_2 上则电压不变,电荷不变 (下板正,上板负)。当 N 点电压再变为 $-U_0$ 时,再发生 C_1 右板上的一部分电荷向 C_2 上板的转移 (C_1 放电、 C_2 第二次充电)。以后在输入电压的每一变化周期中都发生上述过程,只是 C_1 放电时电荷的转移依次变少,因而 C_2 充电时电荷的增加也依次变少,直到 C_1 上电压趋于一定值 U_1 (由左向右计), C_2 上电压趋于一定值 U_2 (由上向下计) 而达到稳定状态。这时,当 N 点电压为 $+U_0$ 时 (D_1 导通、 D_2 截止),有

$$U_1 = U_0$$

而当 N 点电压为 $-U_0$ 时 (D_1 截止、 D_2 导通), 有

$$U_1 + U_2 = -U_0$$

故得

$$U_1 = U_0, \quad U_2 = -2U_0$$

因此, L 点的电压

$$U_L = U_N - U_1 = U_N - U_0$$

当 $U_N = +U_0$ 时, $U_L = 0$; 当 $U_N = -U_0$ 时, $U_L = -2U_0$. M 点的电压

$$U_M = U_2 = -2U_0$$

故得到 U_L 和 U_M 的图像分别如图 2-75 和图 2-76 所示.

此题要求在中学物理水平上通过简化的分析得出电路的稳定状态解, 关键在于要能看到为建立稳态必须经过电容器 C_1 的多次充放电和电容器 C_2 的多次充电, 才能使 C_2 的上板积累足够多的负电荷. 学生虽能根据电压分配的考虑意识到最后的稳态解应为 $U_1 = U_0, U_2 = -2U_0$, 但会遇到如何使 C_1 右板和 C_2 上板的总的负电荷满足要求的问题, 这就必须考虑到经过多次电源电压的下半周时 C_1 、 C_2 上的电压分配 (满足当时的上述负电荷总量), 与多次电源电压的上半周时 C_1 右板上负电荷的补充才能达到. 这是此题分析中的主要难点.

35. 图 2-77 为一个电路图 (称作“电子张弛振荡器”). 图中 S_c 是恒流源 (其电流不因负载的变化而变化), 电流值恒为 I_0 . K 为电子开关, 它的开、关动作由一个正弦信号发生器 F 产生的电压 $U_F(t) = U_1 + U_0 \sin \omega t$ 控制, 这里 U_1 为常电压值, U_0 和 ω 分别是正弦信号的幅度和圆频率, $U_0 < U_1$. U_F 只起控制 K 动作的作用, 不对电容 C 充放电. 当 K 两端电压 (即电容器两端电压) $U(t)$ 达到 $U_F(t)$ 时, K 自动合上, 使电容 C 放电, $U(t)$ 迅速下降, 直到 U 降到 U_{\min} 时, K 才自动断开. 这里 U_{\min} 是小于 $U_1 - U_0$ 的常电压值.

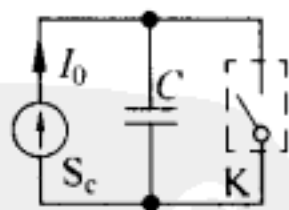


图 2-77

1) 分析电容器两端电压 U 随时间 t 的变化规律, 并在 $U-t$ 图上画出 $U_F(t)$ 、 U_{\min} 和 U 随 t 的变化曲线. 可以不考虑 $t=0$ 时是如何情况.

2) 若在一定的 I_0 、 U_1 、 U_0 、 ω 、 U_{\min} 参数值下, $U(t)$ 每相邻两次达到 $U_F(t)$ 的时间间隔都相等, 求每次 $U(t) = U_F(t)$ 时, $U(t)$ 数值与各参数的关系.

解析

1) $U_F(t)$ 如图 2-78 中正弦曲线所示, U_{\min} 如图中平行于 t 轴的直线所示. 当 $U_{\min} < U(t) < U_F(t)$ 时, K 是断开的, S_c 以恒定电流 I_0 对 C 充电, 每秒内极板上电量的增加量为 I_0 , 因而每秒内电压的增加量为 I_0/C , 在 $U-t$ 图上为一斜率为 I_0/C 的直线. 当 $t=t_n$ 时, 此

直线与 $U_F(t)$ 相交, 有 $U(t) = U_F(t)$, K 自动合上, 电容 C 通过 K 放电. $U(t)$ 在极短时间内降到 U_{\min} . 若在计算中忽略开关与联线的电阻, 可认为 $U(t)$ 由 $U_F(t)$ 回降到 U_{\min} 的时间为无限短. $U-t$ 图上这一段 $U(t)$ 为垂直 t 轴的直线. 当降到 U_{\min} 时(这时用 $U(t+0) = U_{\min}$ 表示), K 又断开, $U(t)$ 再次以不变斜率上升. 从而电容器两端的电压按锯齿波形变化, 形成张弛振荡如图 2-78 所示.

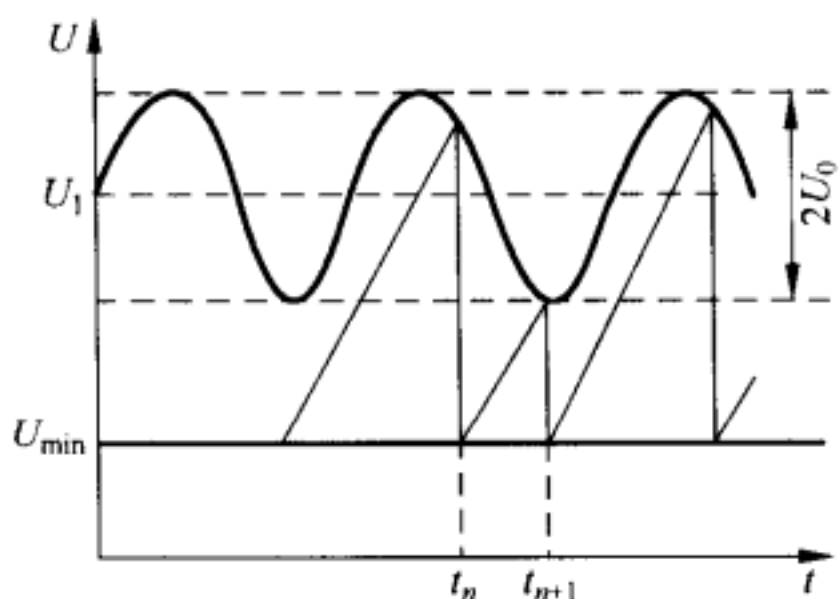


图 2-78

2) 设 t_n, t_{n+1}, \dots 依次为 $U(t)$ 达到上阈值 $U_F(t)$ 的时刻, $t_n+0, t_{n+1}+0, \dots$ 为降到 U_{\min} 的时刻, 当 $t_n+0 \leq t \leq t_{n+1}$ 时, 由于 $U(t)$ 上升斜直线斜率恒为 I_0/C , 有

$$U(t) = U_{\min} + I_0(t - t_n)/C$$

当 $t = t_{n+1}$ 时, 有

$$\begin{aligned} U(t_{n+1}) &= U_{\min} + I_0(t_{n+1} - t_n)/C \\ &= U_F(t_{n+1}) = U_1 + U_0 \sin(\omega t_{n+1}) \end{aligned} \quad (1)$$

因而得到

$$t_{n+1} = t_n + \frac{(U_1 - U_{\min})C}{I_0} + \frac{U_0 C}{I_0} \sin(\omega t_{n+1}) \quad (2)$$

当任意相邻两次达到 $U_F(t)$ 的时间间隔均相等, 即对任一 n , 有 $t_{n+1} - t_n = t_{n+2} - t_{n+1} = \dots$ 时由(2)式得到

$$\sin(\omega t_n) = \sin(\omega t_{n+1}) = \dots \quad (3)$$

由(3)式, 可得

$$\omega t_{n+1} = \omega t_n + 2k\pi \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (4)$$

或

$$\omega t_{n+1} = \pi - \omega t_n + 2k\pi \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (5)$$

由(4)、(5)式均可得到 $U(t_{n+1}) = U(t_n) = U_a$ (U_a 为常量), 但除了在 $U_a = U_1$ 的情况外, (5)式不合题意. 这是由于由(5)式得到的 $t_{n+1} - t_n$ 与 $t_{n+2} - t_{n+1}$ 并不相等. 所以(4)式是等幅张弛振荡的一般解. 因而可得

$$t_{n+1} = t_n + 2\pi k/\omega, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

由(1)式可得

$$\begin{aligned} U_a = U(t_{n+1}) &= U_{\min} + \frac{I_0(t_{n+1} - t_n)}{C} \\ &= U_{\min} + k \frac{2\pi}{\omega} \frac{I_0}{C} \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (6)$$

显然, 必须有 $U_1 - U_0 \leq U_a \leq U_1 + U_0$, 所以对每个 k 值, 有一个参数 ω, I_0, C 的允许范

围,如果认为电容 C 值不变, I_0 也不变,而选取正弦信号的幅度 U_0 与圆频率 ω 构成参数平面,产生“ k 阶等幅张弛振荡”的范围可在 ω - U_0 平面中标出. 不同 k 值的范围是不同的.

本题第一问是画图. 因为是恒流源,所以电压是线性增大的,故画起来不难. 第二问是研究等时间间隔的振荡条件,这要联系图线列出条件方程并进行讨论. 一般来说,在多参数的情况下对条件方程进行分析讨论,都含有较强的物理和数学上的分析能力要求. 所以,独立地做这种题目,对学生这方面能力的培养和提高是有帮助的.

36. 某暗盒内是由若干定值电阻连接成的电路. 从该电路中引出四个端钮 1、1'、2 和 2', 如图 2-79(a) 所示. 要求:

① 当 2-2' 端短接, 1-1' 端加 $U_1 = 9.0\text{V}$ 电压时, 测得 $I_1 = 3.0\text{A}$, $I_2 = 3.0\text{A}$, 方向如图 2-79(b) 所示.

② 当 1-1' 端短接, 2-2' 端加 $U_2 = 3.0\text{V}$ 电压时, 测得 $I'_1 = 1.0\text{A}$, $I'_2 = 1.5\text{A}$, 方向如图 2-79(c) 所示.

1) 试判断确定暗盒内能满足上述条件的最简单的电路并计算构成此电路的各电阻的阻值.

2) 当 1-1' 端接电动势 $\mathcal{E} = 7.0\text{V}$ 、内阻 $r = 1.0\Omega$ 的电源而 2-2' 端接 $R_L = 6.0\Omega$ 的负载时, 如图 2-79(d) 所示, 该负载获得的功率 P_L 是多少?

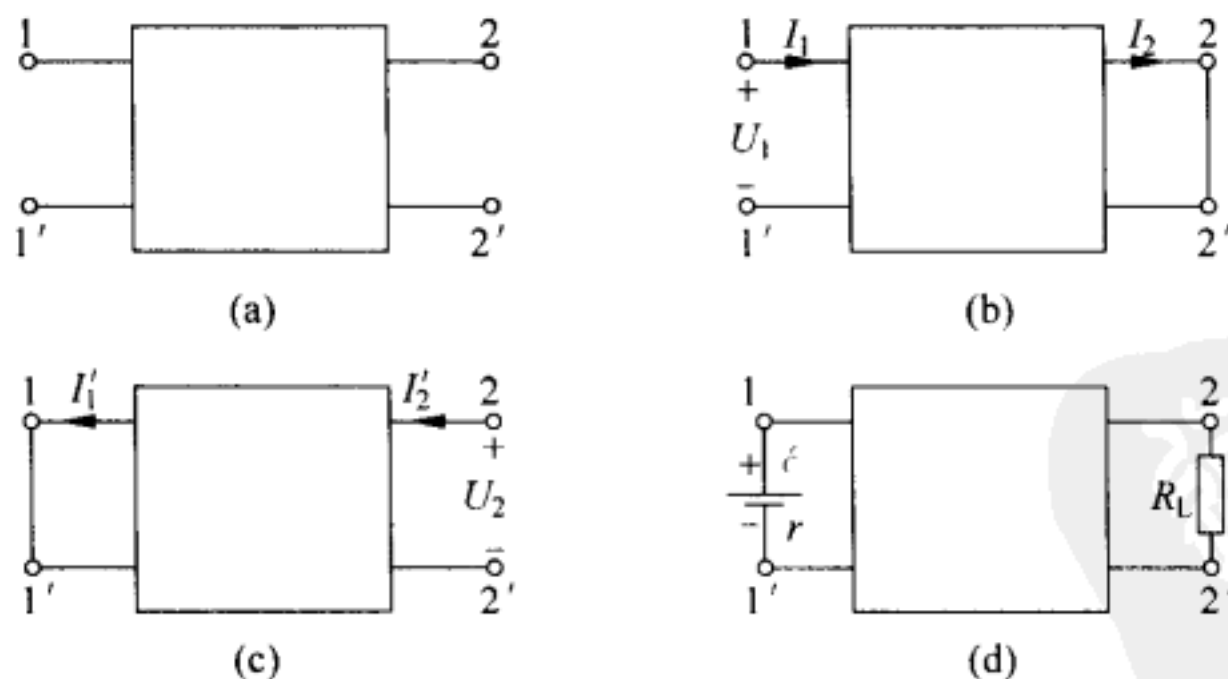


图 2-79

解析

1) 若盒内是仅由一个电阻连成的电路, 则因无论怎样连接均不能同时满足条件①和条件②, 故不可能是这种电路.

若盒内是由两个电阻连成的电路, 则一种情况是两个电阻串联或并联, 因它们均等效

为一个电阻,如前所述,这两种电路均不满足题所给出的条件.另一种情况是两电阻的连接如图 2-80 或图 2-81 所示.

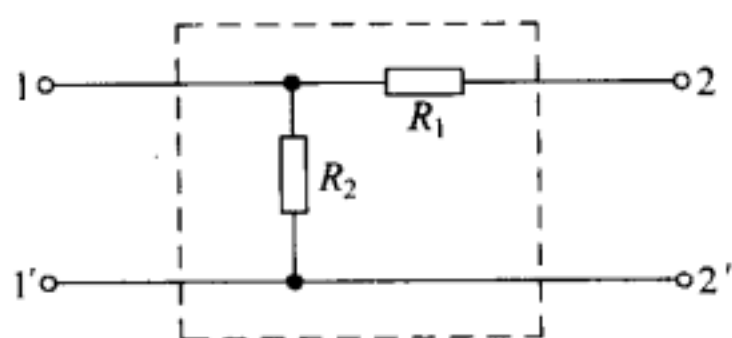


图 2-80

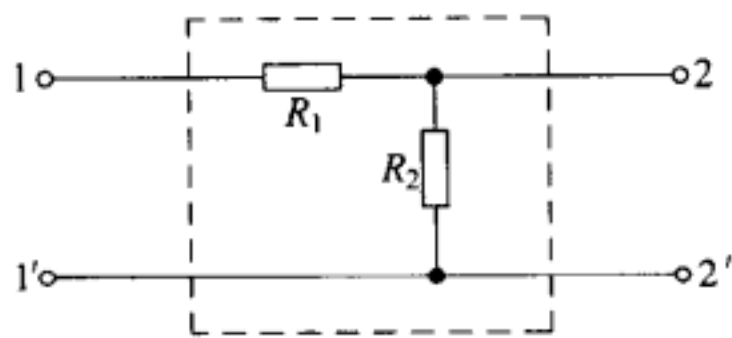


图 2-81

在图 2-80 中,因条件①不能满足,不符合题意.

在图 2-81 中,只要 $R_1 = 3.0\Omega$,则能满足条件①.为了满足条件②,设 2-2' 间的电阻为 R' , R' 必须满足下列条件:

$$R' = \frac{U_2}{I_2'} = \frac{3.0}{1.5}\Omega = 2.0\Omega$$

$$R' = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

因 $R_1 = 3.0\Omega$,得 $R_2 = 6.0\Omega$.即 $R_1 = 3.0\Omega$, $R_2 = 6.0\Omega$ 时,图 2-81 所示的电路结构就是能同时满足条件①和②的最简单的电路.

2) 按题意,完整的电路如图 2-82 所示.

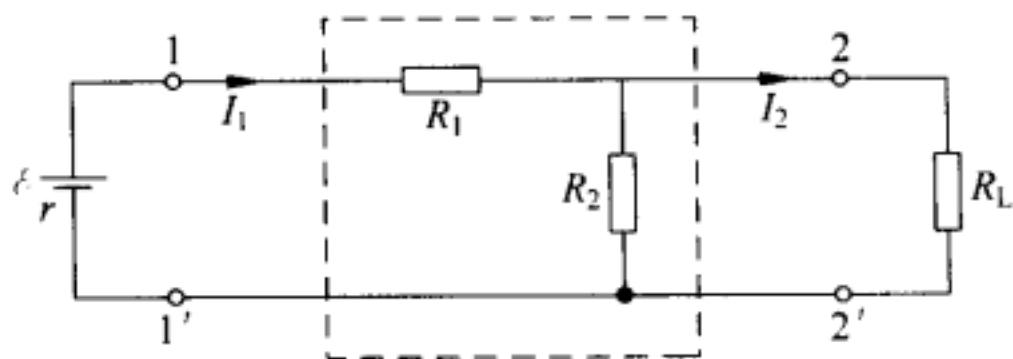


图 2-82

根据欧姆定律,有

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{r + R_1 + \frac{R_2 R_L}{R_2 + R_L}} \quad (1)$$

$$I_2 = I_1 \frac{R_2 R_L}{R_2 + R_L} \cdot \frac{1}{R_L} = I_1 \frac{R_2}{R_2 + R_L} \quad (2)$$

负载获得的功率为

$$P_L = I_2^2 R_L \quad (3)$$

代入数值得

$$P_L = 1.5\text{W} \quad (4)$$

这种“黑盒子”问题往往是在不明朗的状态下通过分析、判断和筛选,寻找出解题的途

径和结果,这需要有清晰的思路和灵巧的方法.本题对学生是一个颇好的考查和训练.

37. 晶体三极管的基极 B、发射极 E 和集电极 C 的电势分别用 U_B 、 U_E 和 U_C 表示. 理想的硅 NPN 开关三极管的性能如下:

当 U_B 较 U_E 高 0.6V 或更高,即 $U_B - U_E \geq 0.6V$ 时,三极管完全导通,即发射极 E 与集电极 C 之间相当于用导线直接接通.

当 $U_B - U_E < 0.6V$ 时,三极管关断,即发射极 E 与集电极 C 之间完全不通. 开关三极管只有完全导通与关断两个状态. 图 2-83 所示是一个有实际用途的电路, I 和 II 都是理想的硅 NPN 开关三极管. 要求:

- 1) 在图 2-84 中画出输出电压 U_2 随输入电压 U_1 变化的图线.
- 2) 举出此电路一个可能的应用.

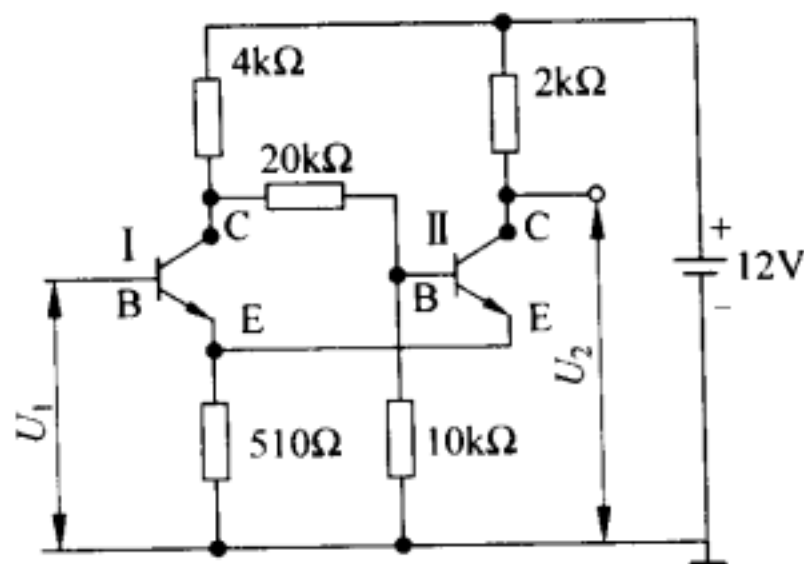


图 2-83

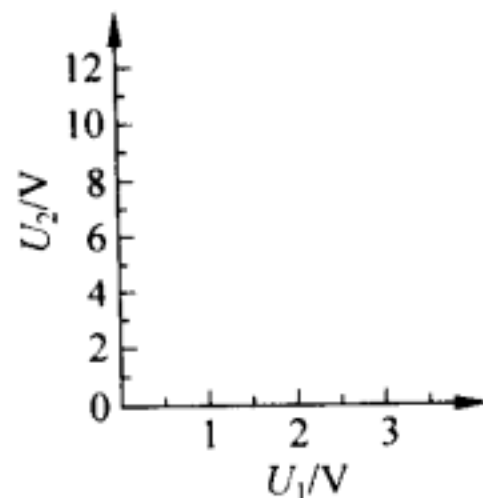


图 2-84

解析

1) 如图 2-85 所示.

以电源负极为电势零点(见图 2-83).

(i) 当输入电压 $U_1 = 0$ 时, $U_{B1} - U_{E1} = 0 < 0.6V$, 故三极管 I 关断, 这时 $U_{E2} = U_{E1} = 0$. $U_{B2} - U_{E2} = 10 \times 12 / (4 + 20 + 10) \approx 3.5V > 0.6V$, 所以三极管 II 导通, 输出电压为

$$U_2 = 510 \times 12 / (2000 + 510) V \approx 2.4V$$

三极管 II 导通后, 在 R_1 (指 510Ω 那个电阻) 上有电压降, 使发射极电势升高. 这时

$$U'_{E2} = U'_{E1} = 12 \times 510 / (2000 + 510) V \approx 2.4V$$

$$U_{B1} - U'_{E1} = 0 - 2.4V = -2.4V < 0.6V$$

$$U_{B2} - U'_{E2} = 3.5V - 2.4V = 1.1V > 0.6V$$

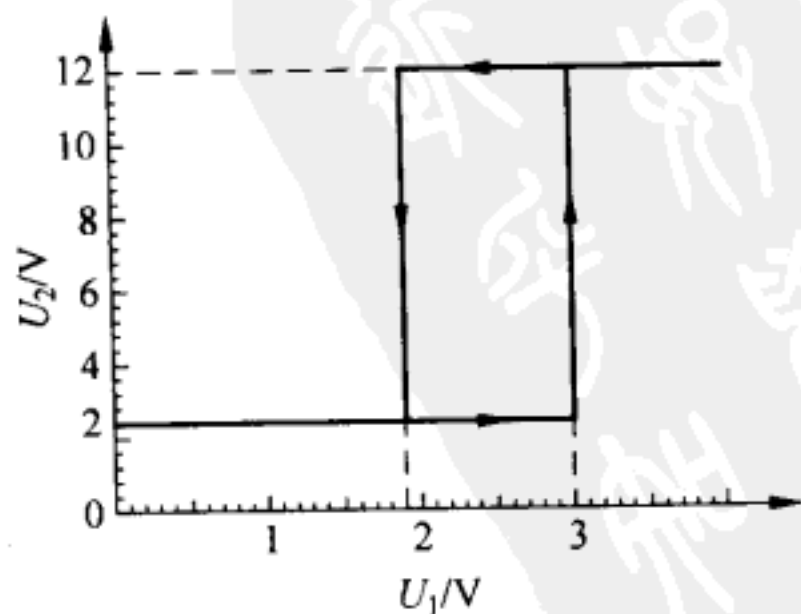


图 2-85

故三极管 I 仍关断, II 仍导通, 处于稳定状态.

(ii) 使输入电压增加到 $U_1 = U'_{B1} = 3.0\text{V}$ 时, 有

$$U'_{B1} - U'_{E1} = 3.0\text{V} - 2.4\text{V} = 0.6\text{V}$$

使三极管 I 导通, 导通后, 由于 R_1 上的电压降使 U'_{E1} 变为

$$U''_{E1} \approx 12 \times 510 / [510 + 4000 \times 2000 / (4000 + 2000)] \text{V} \approx 3.3\text{V}$$

(此式中忽略了并联的 $20\text{k}\Omega + 10\text{k}\Omega$) 而

$$U'_{B2} = 3.3 \times 10 / (10 + 20) \text{V} \approx 1.1\text{V}$$

$$U'_{B2} - U''_{E2} = 1.1\text{V} - 3.3\text{V} = -2.2\text{V} < 0.6\text{V}$$

使三极管 II 关断, 这样 U''_{E1} 由 3.3V 变为

$$12 \times 510 / (510 + 4000) \text{V} = 1.3\text{V}$$

$$U'_{B1} - U''_{E1} = 3.0\text{V} - 1.3\text{V} = 1.7\text{V} > 0.6\text{V}$$

故三极管 I 仍保持导通, 因为三极管 II 关断, $U_{C2} = 12\text{V}$. 这时输出端电压 $U'_2 = 12\text{V}$, 电路处于稳定状态.

(iii) 继续增加输入电压时, 输出电压不再变化, 仍为 $U'_2 = 12\text{V}$.

(iv) 从 $U_1 = 3.0\text{V}$ 减小输入电压时, 由于现在 $U''_{E1} = 1.3\text{V}$, 因此, 输入电压降低到 $U'_1 = U''_{B1} = 1.9\text{V}$, 能使

$$U''_{B1} - U''_{E1} = 0.6\text{V}$$

电压再降一点, 即达到(i)中所讨论的情况, 三极管 I 关断, II 导通, 这时输出电压又变到

$$U_2 = 2.4\text{V}$$

当输入电压 U_1 由 1.9V 变到 0 时, 仍与(i)中所讨论的情况相同, 输出电压保持在 $U_2 = 2.4\text{V}$, 不再改变.

2) 例如用来控制水塔自动上水、冰箱自动启动等.

关于硅 NPN 开关三极管的性能, 中学生是完全没有学过的, 这种称为“施密特触发器”的电路更没有见过, 本题要求用刚刚获得的知识去分析一个未见过的电路, 能在完全平等的基础上考查学生分析问题的能力.

38. 有 7 个外形完全一样的电阻, 已知其中 6 个的阻值相同, 另一个的阻值不同, 请按照下面提供的器材和操作限制, 将那个阻值不同的电阻找出, 并指出它的阻值是偏大还是偏小, 同时要求画出所用电路图, 并对每步判断的根据予以论证.

提供的器材有: ① 电池; ② 一个仅能用来判断电流方向的电流表(量程足够), 它的零刻度在刻度盘的中央, 而且已知当指针向右偏时电流是由哪个接线柱流入电流表的; ③ 导线若干.

操作限制: 全部过程中电流表的使用不得超过三次.

解析

判断所用电路如图 2-86, a 、 b 、 c 、 d 为四个电阻. P 、 Q 间可接电流计, 由电流计中电流 I 的方向可判断出 P 、 Q 两点中哪一点的电势较高. 可能出现下列三种情况:

1) $I=0$, 这表示四个电阻的阻值相等.

2) I 从 P 到 Q , 这表示 P 点电势较高, a 、 b 、 c 、 d 中有一电阻偏大或偏小. 有下列四种可能: b 偏大、 c 偏大、 a 偏小、 d 偏小.

3) I 从 Q 到 P , 这表示 P 点电势较低, 有四种可能: a 偏大、 d 偏大、 b 偏小、 c 偏小.

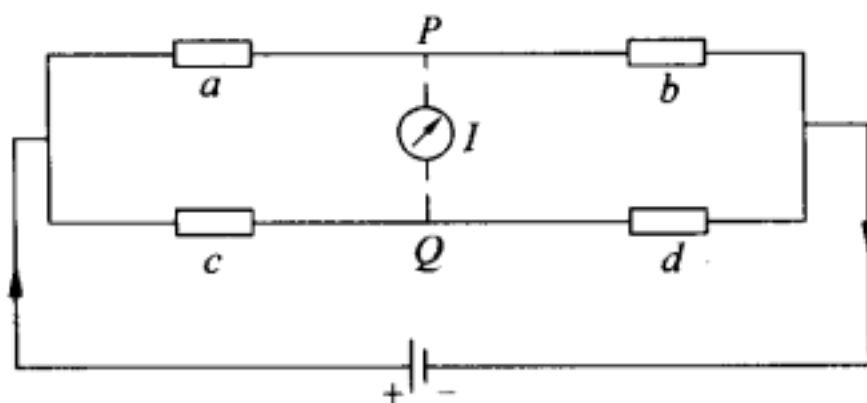


图 2-86

应采取的实验步骤和判断: 设七个电阻为

①、②、③、④、⑤、⑥、⑦, 阻值相同的称为正常电阻, 阻值不同的那个为特异电阻.

第一次测量: 将①、②、③、④分别接入 a 、 b 、 c 、 d 位置, 这时可有以下三种情况:

情况 A: I 向下, 则有四种可能: ②大; ③大; ①小; ④小.

情况 B: I 向上, 则有四种可能: ①大; ④大; ②小; ③小.

情况 A 和情况 B 中, 其余三个电阻⑤、⑥、⑦均正常.

情况 E: $I=0$, 这时①、②、③、④正常, 特异电阻在⑤、⑥、⑦中.

第二次测量: 若情况 A 或情况 B 成立, 进行第二次测量时将①、②对调, 即将②、①、③、④分别接入 a 、 b 、 c 、 d 位置. 这时可能有以下两种情况:

情况 C: I 向下, 这时有以下四种可能: ①大; ③大; ②小; ④小.

情况 D: I 向上, 这时有以下四种可能: ②大; ④大; ①小; ③小.

若情况 E 成立, 特异电阻在⑤、⑥、⑦中. 第二次测量取其中两个, 例如⑤、⑥放于电路中 a 、 b 位置, c 、 d 位置用正常电阻, 则有三种情况:

情况 F: I 向下, 这时有两种可能: ⑤小; ⑥大.

情况 G: I 向上, 这时有两种可能: ⑥小; ⑤大.

情况 H: $I=0$, 这时⑤、⑥均正常, 特异电阻即为⑦.

前两次测量分析:

若情况 A、C 成立, 则只有两个可能: ④小; ③大.

若情况 A、D 成立, 则只有两个可能: ①小; ②大.

若情况 B、C 成立, 则只有两个可能: ②小; ①大.

若情况 B、D 成立, 则只有两个可能: ③小; ④大.

若情况 E、F 成立, 则只有两个可能: ⑤小; ⑥大.

若情况 E、G 成立, 则只有两个可能: ⑥小; ⑤大.

若情况 E、H 成立, 则只有一个可能: 即⑦为特异电阻, 偏大或偏小待定.

第三次测量：无论以上前六种情况哪一种成立，可疑电阻的范围均缩小成为两个，可能是某一个偏小，或是某一个偏大。第三次测量可将可能偏小的电阻与三个正常电阻接入电路，根据电流计的电流方向即可判断出它或者确定偏小或者是正常电阻。若是前者，这个电阻就是特异电阻。若后者成立，则可能偏大的那个电阻，阻值确实偏大，是特异电阻。

对于情况 E、H，只需测定⑦的阻值偏大或偏小。用⑦及三个正常电阻接入电路，即可根据测定结果作出判断。

[注] 若第一次测量结果为情况 A 或 B，进行第二次测量时可以利用正常电阻⑤、⑥、⑦中的任意两个代替①、②、③、④中的任意两个，分析与判断方法与上述相似。

这是一道除了检查物理知识之外还带有一定机智竞赛的题目。许多题目只要按部就班去做总能做得出来，然而这道题就不行了，需要动脑筋，想出巧妙办法才行。但是物理知识又是想出巧妙办法的基础，物理知识不多或不牢固，巧妙办法是想不出来的。

39. 如图 2-87 所示， P 为一块均匀的半圆形薄电阻合金片，先将它按图 2-87(a) 的方式接在电极 A 、 B 之间，测得它的电阻为 R 。然后再将它按图 2-87(b) 的方式接在电极 C 、 D 之间，这时， P 的电阻值为_____。

解析

$4R$ 。

如图 2-87(a) 所示，半圆形薄电阻合金片可看成是由两块相同的 $1/4$ 圆形电阻片并联而成的，故每块的电阻为 $2R$ 。当按图 2-87(b) 的方式连接时，相当于两块相同的 $1/4$ 圆形电阻片串联，所以总电阻为 $4R$ 。

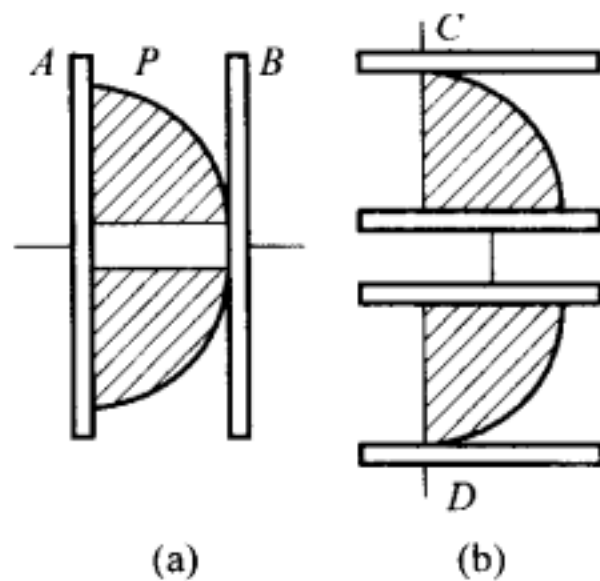


图 2-87

40. 在空间有 n 个点，分别标记为点 $1, 2, \dots, n$ 。任意两点间均用一电阻为 R 的导线相连接，再把点 1 和点 n 接到电动势为 \mathcal{E} 、内阻为 r 的电源上，求流过连接点 1 和点 n 的电阻 R 上的电流值。

解析

解法 I

1) 假设由电源发出的电流由点 1 进入导线网络，而由点 n 回到电源。对于点 1 ，它分别与点 $2, 3, \dots, n$ 相连，把由点 1 出发到点 i 连线上的电流记为 I_{1-i} ($i=2, 3, \dots, n$)，对于点 n ，它分别与点 $1, 2, \dots, n-1$ 相连，把由点 $1, 2, \dots, n-1$ 出发到点 n 连线上的电流记为

I'_{n-i} ($i=1, 2, \dots, n-1$). 其中 I'_{n-1} 即上面定义的 I_{n-1} . 示意图为图 2-88, 图中仅画出解题需要的部分连线. 根据对称性, 点 1 处流出电流的分配与点 n 处电流流入的情况完全对应:

$$I'_1 = I_1, I'_2 = I_2, \dots, I'_{n-2} = I_{n-2}$$

$$\text{即} \quad I'_i = I_i \quad (i=1, 2, \dots, n-1) \quad (1)$$

2) 设点 n 与点 1 之间电位差为 V , 则(考虑由点 1→点 n):

$$V = I_{n-1} \cdot R$$

$$\text{改写为} \quad 2V = I_{n-1} \cdot R + I_{n-1} \cdot R \quad (2)$$

考虑由点 1→点 2→点 n :

$$V = I_1 R + I'_{n-2} R = I_1 R + I_{n-2} R$$

考虑由点 1→点 3→点 n :

$$V = I_2 R + I'_{n-3} R = I_2 R + I_{n-3} R$$

⋮

考虑由点 1→点 \dots $n-1$ →点 n :

$$V = I_{n-2} R + I'_1 R = I_{n-2} R + I_1 R$$

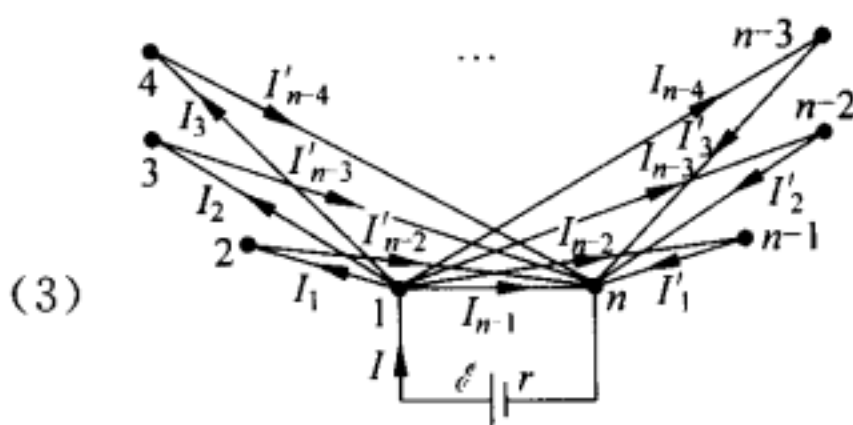


图 2-88

这里在(3)式中应用了(1)式, 而(3)式一共有 $n-2$ 个式子. 把(2)和所有(3)式相加, 得到

$$2V + (n-2)V = 2(I_1 + I_2 + \dots + I_{n-1})R$$

$$\text{即} \quad nV = 2IR \quad (4)$$

这里 $I = I_1 + I_2 + \dots + I_{n-1}$, 是由点 1 到其他各点的总电流, 也就是由电源流入点 1 的电流.

3) 由欧姆定律

$$I = (\varepsilon - V)/r$$

代入(4)式即解得

$$V = 2R\varepsilon / (nr + 2R)$$

于是题目欲求的电流为

$$I_{n-1} = V/R = 2\varepsilon / (nr + 2R)$$

解法 II

1) 根据线路的对称性, 将除 1、 n 这两点以外的任一点上的连线和另一点上的连线对调, 整个线路和原来的线路完全一样, 线路结构没有改变, 各线上电流、各点的电势均无改变. 可见, 由点 2 到点 $n-1$ 这 $n-2$ 个点是完全等价的.

2) 因此, 上述 $n-2$ 个点的电势必然完全相同, 从而这些点之间的所有连线上都没有电流, 在考虑本题所问时, 这些连线可以全部撤去. 于是, 电流就简化为图 2-89(a)与图 2-89(b).

3) 根据全电路欧姆定律

$$I = \frac{\varepsilon}{1/[2R/(n-2) + 1/R] + r} = \frac{\varepsilon}{2R/n + R}$$

于是连接点 1 和点 n 间电阻 R 上电流的大小为

$$I' = I \cdot \frac{2R/(n-2)}{2R/(n-2) + R} = I \cdot \frac{2}{n} = \frac{2\mathcal{E}}{2R + nr}$$

此题乍看起来电路非常复杂, 首先应该经过分析, 抓住电路的特点.

此电路有两个明显的特点. 第一个是电路的对称性; 第二个是除 1、 n 两点外其余各点的电势相同. 前者是几何特点, 后者是物理特点. 抓住特点之后再思考解法, 题目便迎刃而解了.

解法 I 利用了第一个特点, 即对称性. 解法 II 则利用了第二个, 即物理的特点; 解法 II 更简单一些. 既然两端电势相等的电阻当中没有电流, 就可以把这些电阻一律去掉. 这样一来电路成为图 2-89 右图的电路, 很快就解出了答案.

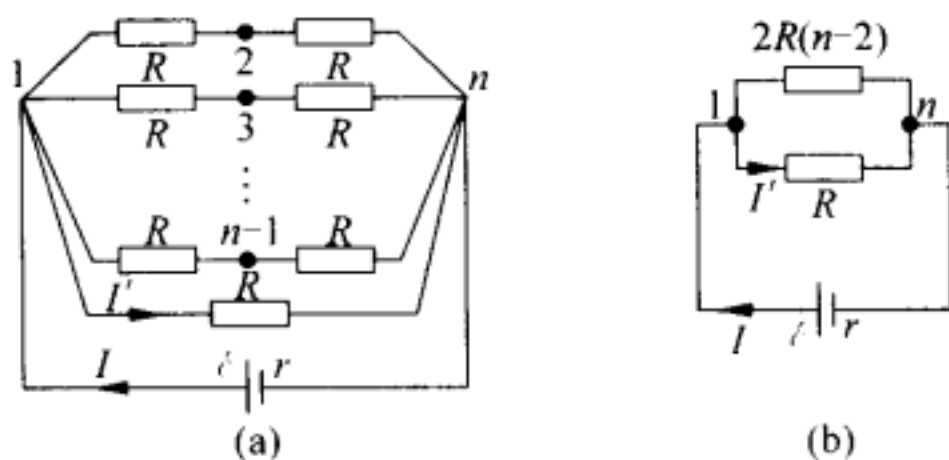


图 2-89

41. 六个相同的电阻(阻值均为 R) 连成一个电阻环, 六个接点依次为 1、2、3、4、5 和 6, 如图 2-90 所示. 现有五个完全相同的这样的电阻环, 分别称为 D_1 、 D_2 、 \dots 、 D_5 .

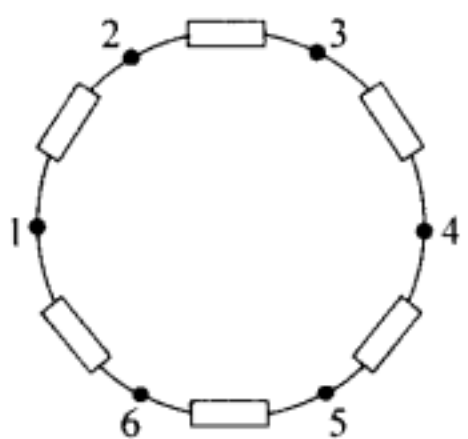


图 2-90

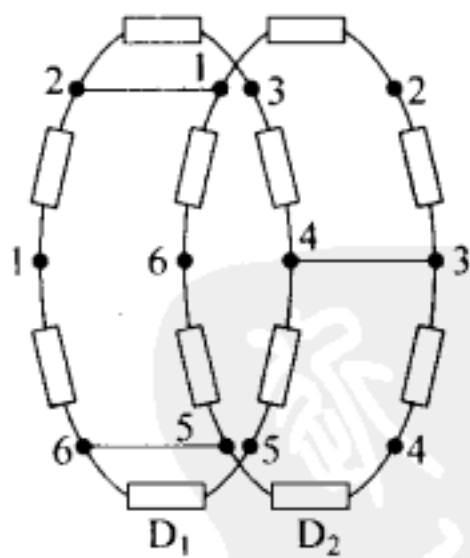


图 2-91

现在将 D_2 的 1、3、5 三点分别与 D_1 的 2、4、6 三点用导线连接, 如图 2-91 所示. 然后将 D_3 的 1、3、5 三点分别与 D_2 的 2、4、6 三点用导线连接, \dots 以此类推, 最后将 D_5 的 1、3、5 三点分别连接到 D_4 的 2、4、6 三点上.

- 1) 证明全部接好后, 在 D_1 上的 1、3 两点间的等效电阻为 $\frac{724}{627}R$.
- 2) 求全部接好后, 在 D_5 上的 1、3 两点间的等效电阻.

解析

本题可能有多种解法,在此提供两种解法.

解法 I**(i) 电阻图变形**

此题连好的线路的平面图如图 2-92 所示.

现将电阻环改画成三角形,1、3、5 三点为顶点,2、4、6 三点为三边中点,如图 2-93 与图 2-94 所示. 整个连好的线路相当于把 D_n 的三个顶点分别接到 D_{n-1} 的三个中点上,图 2-92 变为图 2-95. 这样第 1) 问归结为求图 2-95 中最外层三角环任意两顶点间的等效电阻.

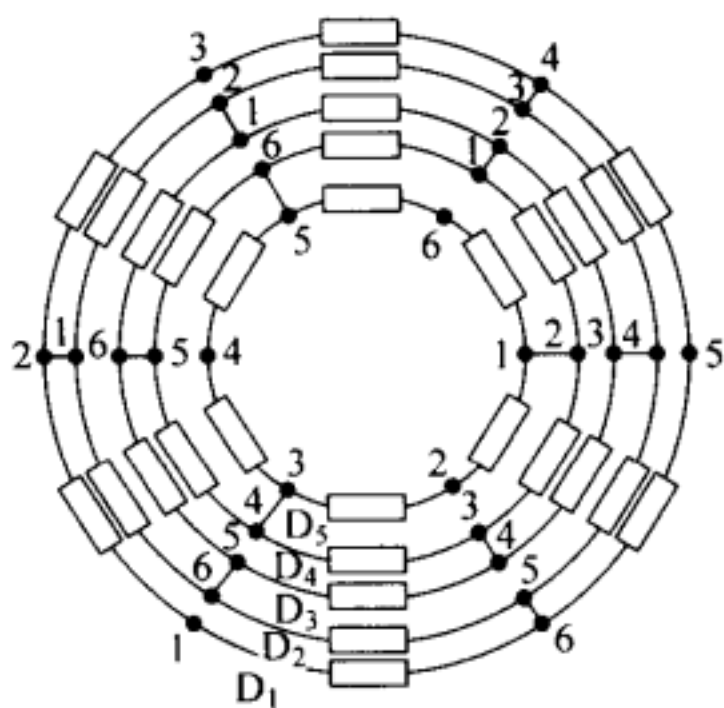


图 2-92

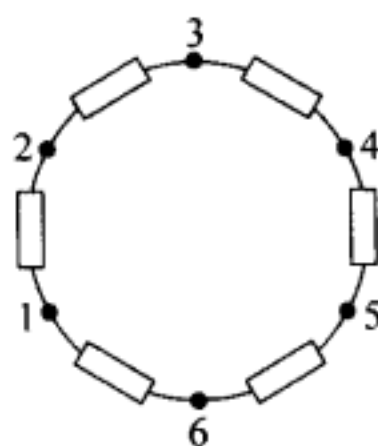


图 2-93

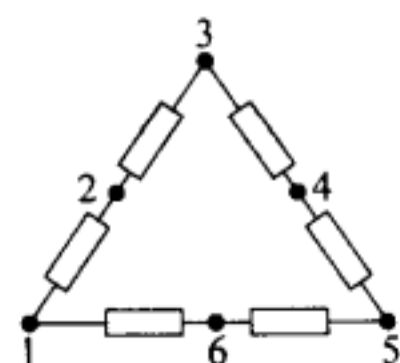


图 2-94

(ii) 递推公式

为使图形简化,讨论如何将接好的两个电阻环化简成为一个单环. 由六个阻值为 r 的电阻构成一个三角环,将其顶点接在另一由六个阻值为 R 的电阻构成的三角环的中点上(如图 2-96 所示).

图 2-97 是由六个阻值为 R' 的电阻构成的三角环. 若图 2-96 顶点 1、3 间的电阻与图 2-97 顶点 1、3 间的电阻阻值相等,我们称图 2-97 中的 R' 为等效单环电阻.

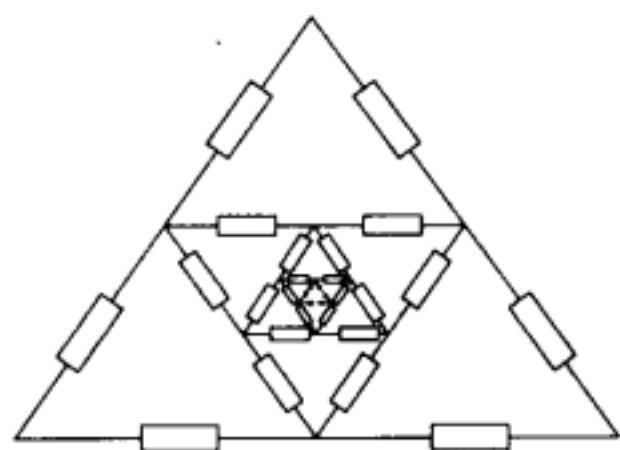


图 2-95

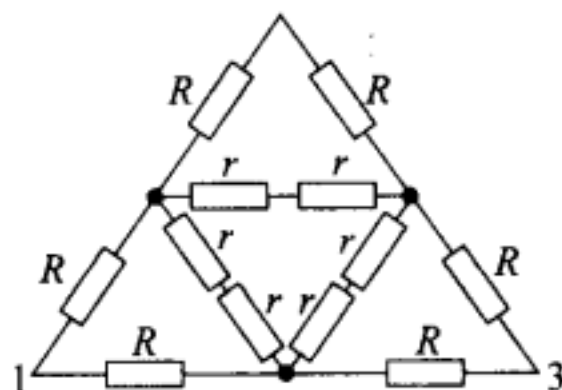


图 2-96

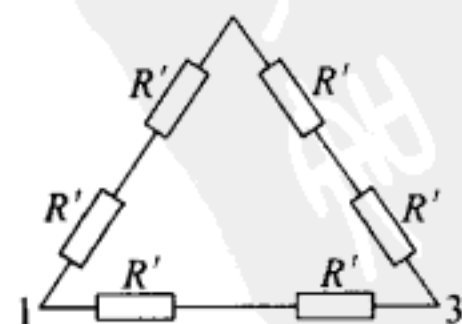


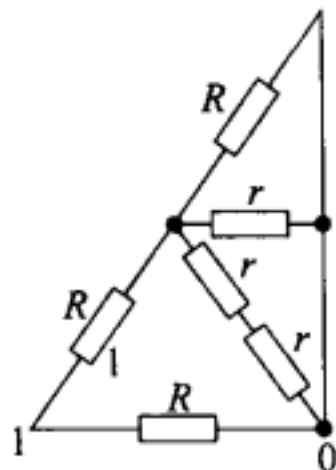
图 2-97

用符号“//”表示电阻的并联,如有 A、B 两个电阻,其并联后

$$R_A // R_B = \frac{1}{(1/R_A) + (1/R_B)}$$

由图 2-96 中的对称性可知,1、3 两顶点间的电阻 $R_{1,3}$ 等于图 2-98 中 1、0 间的电阻 $R_{1,0}$ 的两倍,即

$$\begin{aligned} R_{1,3} &= 2R_{1,0} = 2\{[R // r // (2r)] + R // R\} \\ &= 2\left[\left[\frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{r} + \frac{1}{2r}} + R\right] // R\right] \\ &= 2\left(\frac{4rR + 3R^2}{2r + 3R} // R\right) = \frac{1}{3} \frac{4r + 3R}{r + R} R \\ &= R + \frac{1}{3}(r // R) = \frac{1}{3}[3R + (r // R)] \end{aligned}$$



(1) 图 2-98

同理,图 2-97 中 1、3 两顶点间的电阻 $R_{1,3}$ 为

$$R_{1,3} = 2[(2R') // R'] = \frac{4}{3}R' \quad (2)$$

由 1、2 式得等效单环电阻 R' 为

$$R' = \frac{3}{4}R + \frac{1}{4}(r // R) \quad (3)$$

1) 现在考虑把 D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 按相反的次序,由内向外依次连接的情况. 首先将 D_4 接在 D_5 外面,求双环 $D_4 - D_5$ 的等效单环电阻 $R^{(2)}$ [即(3)式中的 R']. 这时 $r = R$. 由(3)式得到 $R^{(2)}$ 为

$$R^{(2)} = \frac{3}{4}R + \frac{1}{4}(R // R) = \frac{7}{8}R$$

其次,在双环 $D_4 - D_5$ 外面接上 D_3 ,这时 $r = R^{(2)}$. 三环 $D_3 - D_4 - D_5$ 的等效单环电阻 $R^{(3)}$ 为

$$R^{(3)} = \frac{3}{4}R + \frac{1}{4}(R // R^{(2)}) = \frac{3}{4}R + \frac{1}{4}\left[R // \left(\frac{7}{8}R\right)\right] = \frac{13}{15}R$$

由此可得一般公式, $(s+1)$ 环的等效单环电阻 $R^{(s+1)}$ 可由 $R^{(s)}$ 求出

$$R^{(s+1)} = \frac{3}{4}R + \frac{1}{4}(R // R^{(s)}) \quad (4)$$

于是

$$R^{(4)} = \frac{3}{4}R + \frac{1}{4}(R // R^{(3)}) = \frac{3}{4}R + \frac{1}{4}\left[R // \left(\frac{13}{15}R\right)\right] = \frac{97}{112}R$$

$$R^{(5)} = \frac{3}{4}R + \frac{1}{4}(R // R^{(4)}) = \frac{3}{4}R + \frac{1}{4}\left[R // \left(\frac{97}{112}R\right)\right] = \frac{181}{209}R$$

由(2)式 $R_{1,3} = (4/3)R'$ 得出由一个环(D_5)、两个环(D_5-D_4)直至五个环($D_5-D_4-D_3-D_2-D_1$)构成的线路 1、3 点间的电阻为

$$R_{1,3}^{(1)} = \frac{4}{3}R' = \frac{4}{3}R$$

$$R_{1,3}^{(2)} = \frac{4}{3} \left(\frac{7}{8} \right) R = \frac{7}{6}R$$

$$R_{1,3}^{(3)} = \frac{4}{3} \left(\frac{13}{15} \right) R = \frac{52}{45}R$$

$$R_{1,3}^{(4)} = \frac{4}{3} \left(\frac{97}{112} \right) R = \frac{97}{84}R$$

$$R_{1,3}^{(5)} = \frac{4}{3} \left(\frac{181}{209} \right) R = \frac{724}{627}R$$

答：所求的五个环的 1 与 3 间的等效电阻确为 $\frac{724}{627}R$ 。证毕。

2) 根据五个 D 组成的圆柱形网络的对称性, D_5 的 1、3 两点等价于 D_1 的 2、4 两点。等价线路如图 2-99 与图 2-100 所示。设二图等价, 求图 2-100 中的 R'' 即可。

$$R'' = (2R) // (2R^{(4)}) = \frac{1}{\frac{1}{2R} + \frac{56}{97R}} = \frac{194}{209}R$$

所以

$$R_{2,4}^{(5)} = R'' // 2R'' = \frac{2}{3}R'' = \frac{388}{627}R$$

答：所求值为 $\frac{388}{627}R$ 。

解法 II

1) 图 2-94 可看作 D_5 的接线图, 其一半如图 2-101 所示, 竖直粗线为一短路线。一个环(D_5)构成线路的 1 与 0 点间的阻值用 $R_{1,0}^{(1)}$ 表示, 根据对称性, $R_{1,0}^{(1)} = \frac{1}{2}R_{1,3}^{(1)} = \frac{2}{3}R$ 。

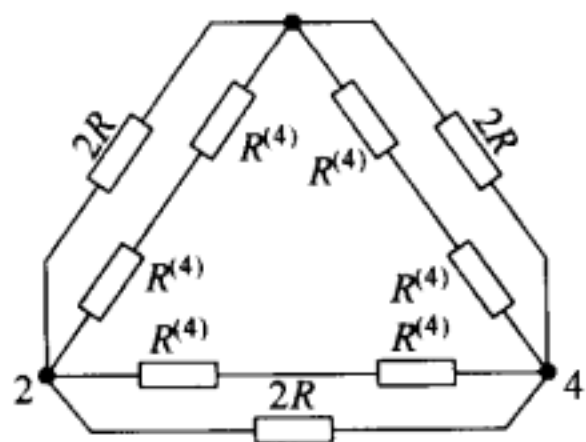


图 2-99

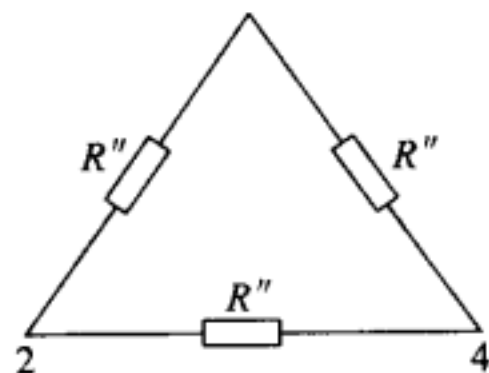


图 2-100

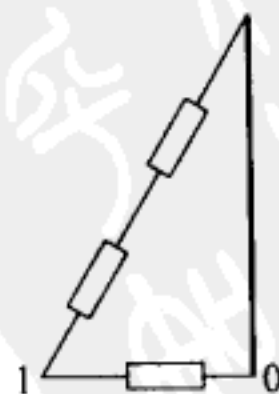


图 2-101

当 D_5 接入 D_4 后,由两个环(类似图 2-96)构成线路图的一半如图 2-102 所示.三个带阴影的电阻与短路线围成的三角形(2-0'-0)中的 2 与 0' 间的阻值就是图 2-101 中 1 与 0 间的阻值 $R_{1,0}^{(1)}$.其等效电路如图 2-103 所示.图 2-102(或图 2-103)中的 1 与 0 点间的阻值用 $R_{1,0}^{(2)}$ 表示.有

$$R_{1,0}^{(2)} = [(R // R_{1,0}^{(1)}) + R] // R = \left[\left(R // \frac{2}{3}R \right) + R \right] // R = \frac{7}{12}R$$

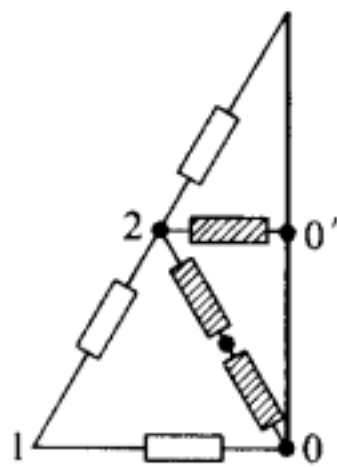


图 2-102

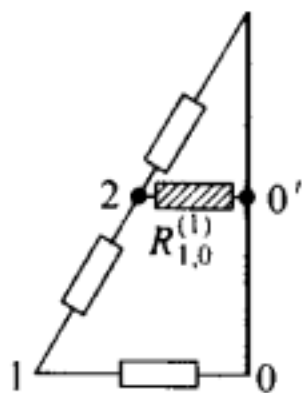


图 2-103

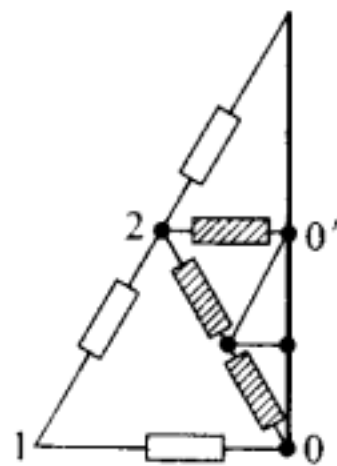


图 2-104

再将双环 $D_5 - D_4$ 接入 D_3 ,其一半如图 2-104 所示,三个带阴影的电阻与短路线围成的三角形中含有六个电阻,其 2 与 0' 间的阻值就对应为 $R_{1,0}^{(2)}$,参看图 2-103 的等效电路,得

$$R_{1,0}^{(3)} = [(R // R_{1,0}^{(2)}) + R] // R = \left[\left(R // \frac{7}{12}R \right) + R \right] // R = \frac{26}{45}R$$

同理,得

$$\begin{aligned} R_{1,0}^{(4)} &= [(R // R_{1,0}^{(3)}) + R] // R \\ &= \left[\left(R // \frac{26}{45}R \right) + R \right] // R = \frac{97}{168}R \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{1,0}^{(5)} &= [(R // R_{1,0}^{(4)}) + R] // R \\ &= \left[\left(R // \frac{97}{168}R \right) + R \right] // R = \frac{362}{627}R \end{aligned}$$

由此得

$$R_{1,3}^{(5)} = 2R_{1,0}^{(5)} = \frac{724}{627}R$$

2) 五个电阻环构成线路后,最外层环(D_1)上 2 点与 4 点间的等效电阻可借用图 2-103 求得,将图中 $R_{1,0}^{(1)}$ 换成 $R_{2,0'}^{(4)}$,五个环构成的线路中 2 与 4 间阻值可如下求得:

$$\text{因 } R_{2,0'}^{(5)} = 2R // R_{1,0}^{(4)} // R = 2R // \frac{97}{168}R // R = \frac{194}{627}R$$

故

$$R_{2,4}^{(5)} = 2R_{2,0'}^{(5)} = \frac{388}{627}R$$

竞赛的含义除了在通常意义下考查学生灵巧的思路和扎实的基础知识外,还需要考查学生解题的信心和毅力. 本题就是一个例子, 学生需要一次又一次地简化电路, 尽管这个过程比较繁复. 要求证的等效电阻的数值看来也不怎么“整齐和简单”, 但是需要的是坚持不懈、信心十足, 而不是侥幸取巧, 更不能半途而废.

42. 波兰数学家谢尔宾斯基 1916 年研究了一个有趣的几何图形. 他将如图 2-105 所示的一块黑色的等边三角形 ABC 的每一个边长平分为二, 再把平分点连起来, 此三角形被分成四个相等的等边三角形, 然后将中间的等边三角形挖掉, 得到如图 2-106 的图形; 接着再将剩下的黑色的三个等边三角形按相同的方法处理, 经过第二次分割就得到图 2-107 的图形. 经三次分割后, 又得到图 2-108 的图形. 这是带有自相似特征的图形, 这样的图形又称为谢尔宾斯基镂垫. 它的自相似性就是将其中一个小单元(例如图 2-108 中 $\triangle BJK$)适当放大后, 就得到图 2-106 的图形. 如果这个分割过程继续下去, 直至无穷, 谢尔宾斯基镂垫中的黑色部分将被不断地镂空.

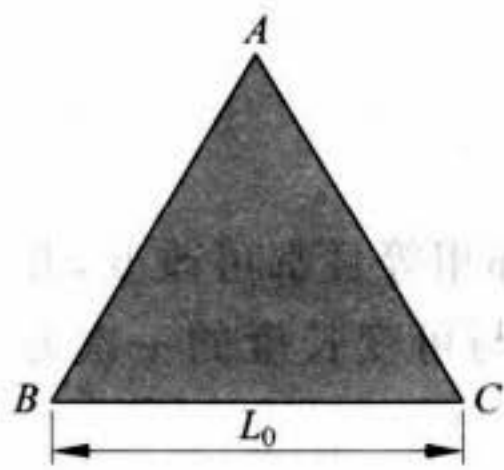


图 2-105

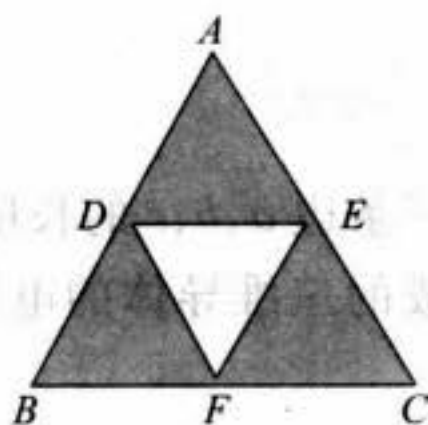


图 2-106

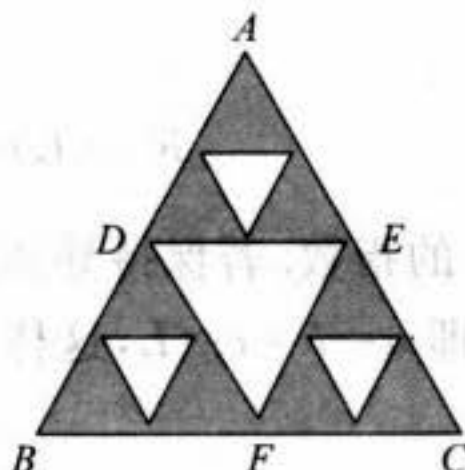


图 2-107

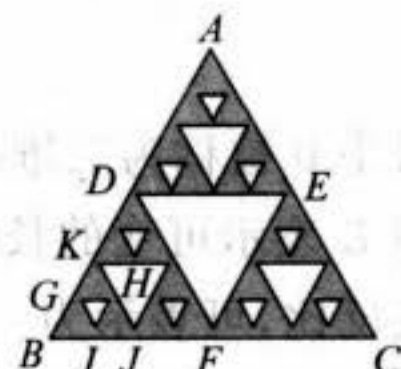


图 2-108

数学家对这类几何图形的自相似性进行了研究, 创造和发展出了一门称为“分形几何学”的新学科. 近三十多年来, 物理学家将分形几何学的研究成果和方法用于有关的物理领域, 取得了有意义的进展.

我们现在就在这个背景下研究按谢尔宾斯基镂垫图形的各边构成的电阻网络的等效电阻问题: 设按如图 2-105 所示的三角形 ABC 的边长 L_0 的电阻均为 r ; 经一次分割得到如图 2-106 所示的图形, 其中每个小三角形边长的电阻是原三角形 ABC 的边长的电阻 r 的 $1/2$; 经二次分割得到如图 2-107 所示的图形, 其中每个小三角形边长的电阻是原三角形 ABC 的边长的电阻 r 的 $1/4$; 三次分割得到如图 2-108 所示的图形, 其中每个小三角形边长的电阻是原三角形 ABC 的边长的电阻 r 的 $1/8$.

- 1) 试求经三次分割后, 三角形 ABC 任意两个顶点间的等效电阻.
- 2) 试求按此规律作了 n 次分割后, 三角形 ABC 任意两个顶点间的等效电阻.
- 3) 由第 2) 问可知, 对边长均为 L_0 、边长电阻均为 r 的电阻三角形 ABC , 现用获得谢尔宾斯基镂垫的方法进行分割, 分割的次数越多, $\triangle ABC$ 中每个小三角形的边长越短, 参

与计算等效电阻的小三角形的边长越多,分割后的 $\triangle ABC$ 两顶点间的等效电阻与其中的小三角形的边长有关.为了从“分形几何学”的角度讨论这个问题,我们先介绍二端电阻网络“指数”的概念.考虑一长、宽、高分别为 a 、 b 、 c 的均匀长方形导体,如图2-109所示.若电流沿平行于导体长度 a 的方向流进导体,则该导体的垂直于电流方向的两个端面间的电阻可表示为

$$R = \rho \frac{a}{bc}$$

式中 ρ 为导体的电阻率.若保持 b 、 c 不变,使另一边 a 的长度变化,并用 L 表示这一可改变的长度,这样构成的一维导体的电阻与 L 成正比,其电阻可表示为

$$R_{(1)}(L) = \rho \frac{L}{bc} \propto L^1$$

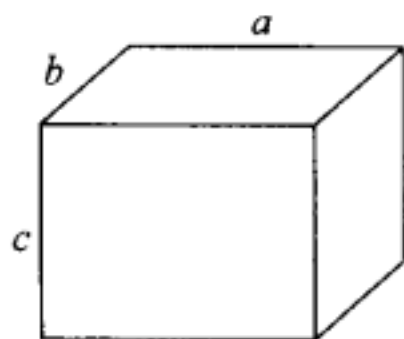


图 2-109

式中1被称为一维导体的指数.若保持 c 的长度不变,但使 a 边和 b 边的长度相等且可以改变,并用 L 表示这一可改变的长度,即 $a=b=L$,这样构成的二维导体的电阻与可变的长度无关,可表示为

$$R_{(0)}(L) = \rho \frac{1}{c} \propto L^0$$

式中0被称为二维导体的指数.若保持导体的三条边 a 、 b 、 c 的长度都相等且都可改变,并用 L 表示可变的长度,即 $a=b=c=L$,这样构成的三维导体的电阻与可变长度的一次方成反比,可表示为

$$R_{(-1)}(L) = \rho \frac{1}{L} \propto L^{-1}$$

式中-1被称为三维导体的指数.可以将上述结论推广到一般情况,若两端电阻网络的等效电阻与可变长度 L 的关系为

$$R_{(s)}(L) = kL^s$$

式中比例系数 k 是与 L 和 s 都无关的恒量,则称 s 为此二端电阻网络的指数.

从谢尔宾斯基镂垫图形看,未经分割的三角形的边长为 L_0 ,经多次分割,每个最小三角形的边长随分割次数而变,可视为可变长度 L .求出经 n 次分割后的谢尔宾斯基镂垫图形A、B两点的等效电阻与可变长度 L 的关系,并计算出相应的指数.

解析

1) 先证明由三个阻值均为 r 的电阻接成的 \triangle 网络ABC,其任意两顶点间的电阻与可以改接成由三个电阻值均为 $r/3$ 的电阻接成Y状网络,ABC的任意两点间的电阻是相等的,即将图2-110的 \triangle 网络改换成图2-111的电阻Y状网络,接入相同的外电路,外电路的电路状态不会改变,这种变换称为 \triangle -Y等效变换.

图 2-110 中的

$$R_{AB}(\Delta) = \frac{r \cdot 2r}{r + 2r} = \frac{2}{3}r$$

与图 2-111 中的

$$R_{AB}(Y) = \left(\frac{1}{3}r + \frac{1}{3}r \right) = \frac{2}{3}r$$

相等,因而证得:三个电阻网络作了这样的替换后

$$R_{AB}(\Delta) = R_{AB}(Y)$$

三角形 ABC 经过一次分割,得到三个小三角形,即 $\triangle ADE$ 、 $\triangle DBF$ 、 $\triangle EFC$,每个边的电阻均为 $r/2$,构成的电阻网络如图 2-112 所示.将三个小三角作 Y 变换得图 2-113,进而得图 2-114、图 2-115、图 2-116.

解得

$$R_{AB} = \frac{5}{9}r$$

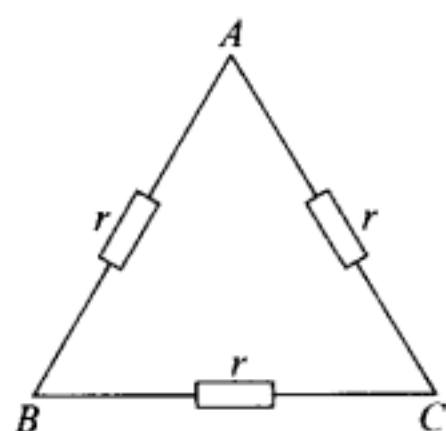


图 2-110

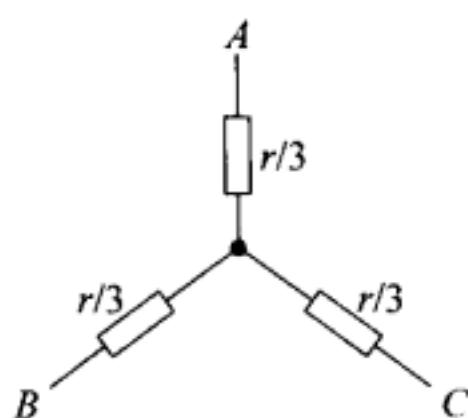


图 2-111

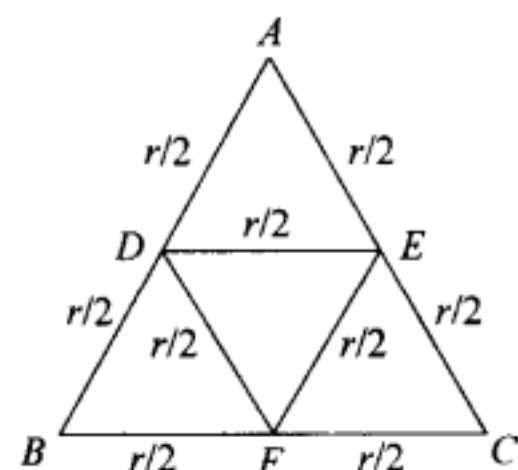


图 2-112

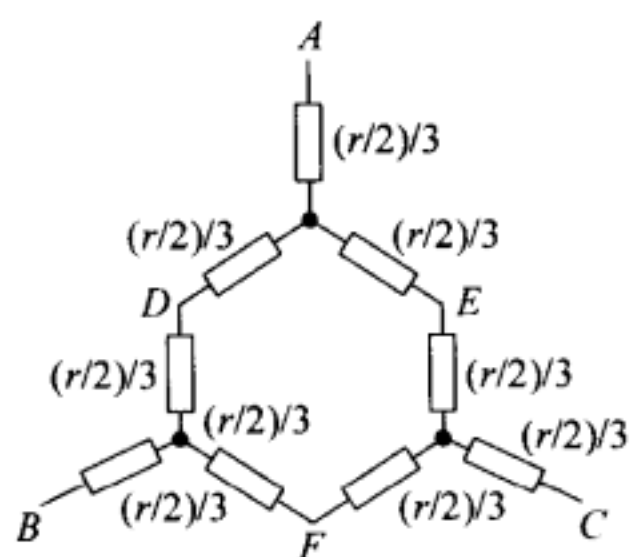


图 2-113

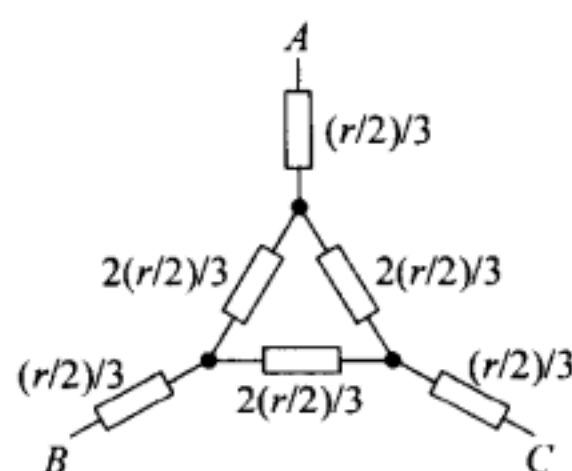


图 2-114

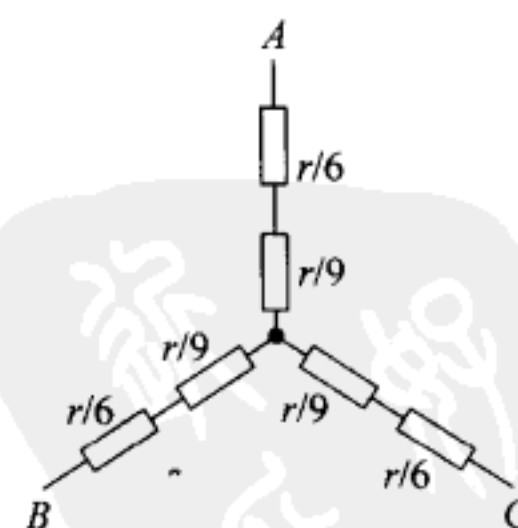


图 2-115

若将未经分割的三角形即图 2-110 中 $\triangle ABC$ 任意两顶点间的等效电阻表示为 $R(0)$,则

$$R(0) = \frac{2}{3}r \quad (1)$$

若将三角形作了一次分割操作后得到的三角形网络即图 2-112 中两顶点 AB 间的等效电阻表示为 $R(1)$,则由上面的结果,有

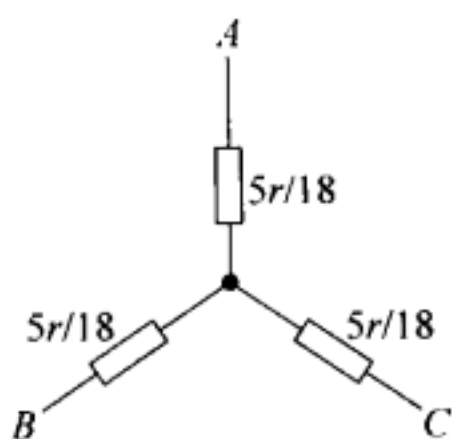


图 2-116

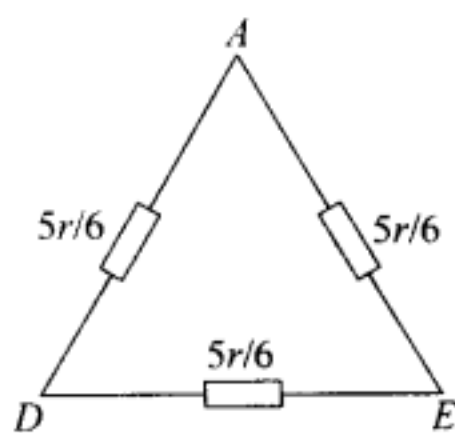


图 2-117

$$R(1) = \left(\frac{5}{9}\right)r = \left(\frac{5}{3}\right)^1 \left[\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^1 r\right] = \left[\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\right]^1 \left(\frac{2}{3}\right)r \quad (2)$$

现将图 2-116 的 Y 形的电阻网络变换为图 2-117 的 \triangle 的电阻网络, 三角形每边的电阻应为 $5r/6$, 图 2-112 是将 $\triangle ABC$ 作了第 2 次分割操作后的情况. 欲求第 2 次分割操作后 $\triangle ABC$ 两顶点 AB 间的等效电阻, 只要将图 2-110 与图 2-111 相对比, 注意到图 2-110 每个小三角形的边长的电阻值是图 2-111 每个小三角形的边长的电阻的 $1/2$, 所以只需将图 2-111 中上、左、右三个三角形每个边的电阻改为

$$\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)r \quad \text{或} \quad \left(\frac{5}{6}\right)\frac{r}{2}$$

即可. 根据(2)式, 得

$$R(2) = \left[\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 \left(\frac{2}{3}\right)\frac{5}{6}r = \left(\frac{5}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)r \quad (3)$$

经过 3 次分割, $\triangle ABC$ 两顶点 AB 间的等效电阻为

$$R(3) = \left(\frac{5}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)r = \frac{250}{648}r \quad (4)$$

2) 仿照计算第一次分割操作后求 $\triangle ABC$ 两顶点 AB 间的等效电阻的方法, 就可求得经过 n 次分割, 三角形两顶点间的等效电阻

$$R(n) = \left(\frac{5}{3}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{2}{3}\right)r \quad (5)$$

3) 已知未分割时 $\triangle ABC$ 两顶点间对应的等效电阻可表示为

$$R(L_0) = \frac{2}{3}r = kL_0^s \quad (6)$$

经 n 次分割后 $\triangle ABC$ 两顶点间对应的等效电阻可表示为

$$R\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n L_0\right] = \left(\frac{5}{3}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{2}{3}\right)r = k\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n L_0\right]^s \quad (7)$$

由(6)、(7)两式消去 k 得

$$\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^s \quad (8)$$

故得

$$\ln\left[\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\right] = s \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$s = 1 + \frac{\ln(5/3)}{\ln(1/2)} \approx 0.263 \quad (9)$$

单就求等效电阻的试题,除了本题涉及称之为“Y- Δ ”变换方法外,学生利用递推方法求电阻没有什么障碍.题目前一段叙述只是问题的背景材料,学生需要耐心地读完读懂,这是近来某些竞赛题的一种“风格”和“特色”.恰当地联系和补充些题外资料可以扩充学生的视野,也使题目联系实际并具时代特征.当然,这样做不是为赶时髦,简单地“穿鞋戴帽”.所以我们强调它的恰当性.

分形是近年来创造出的一种新型几何,用来揭示自然界混乱无规结构的规律性及物理本质.曼德耳布罗特(Mandelbrot)是分形科学的创始人,在20世纪70年代开创了分析几何的研究.近30年来,在有关领域取得了异乎寻常的成就,成为当代最具有吸引力的科学研究领域之一.实际上,分形几何的研究在更早的时候就有人做过,1916年谢尔宾斯基(Sierpinski)就曾创造出了一个分形.

本题在“谢尔宾斯基垫”背景上研究电阻网络的等效电阻问题和一个比较抽象的“ n 维导体的指数”.前者(即第1)、第2)问)是比较传统的,第3)问比较抽象,但耐心地读懂了,明白问的是是什么,也就不难解答了.在某种意义上,从大堆原始材料中筛选和抓住问题中心也是对学生的一种锻炼和考查.

43. 在图2-118所示的网络中,已知部分支路上电流值及其方向,某些元件参数和支路交点的电势值(有关数值及参数已标在图上).请你利用所给的有关数值及参数求出含有电阻 R_x 的支路上的电流值 I_x 及其方向.

解析

由稳恒电流性质可知,流入闭合包围面的电流值等于流出的电流值.在题所给定的电路中,作一与待求电流值所在支路相截的闭合包围面.如果被该包围面所截的其他支路的电流值都已知,那么,待求支路的电流值就可以求得.

作包围面 S ,被它所截的各支路 I_a 、 I_d 、 I_c 和 I_x 如图2-119所示.图中待求有关支路中的电流 I_a 、 I_b 、 I_c 、 I_d 、 I_e 和 I_x 的电流方向如图中所设.有关各支路的电流值计算如下:

对图中的支路交点 Q 有

$$I_a = I_2 - I_1 = 3\text{A}$$

为了求得 I_d ,考查含源支路 FE ,有

$$V_E - V_F = \mathcal{E}_2 - I_b \cdot 10$$

$$I_b = (\mathcal{E}_2 - U_{EF})/10 = 1\text{A}$$

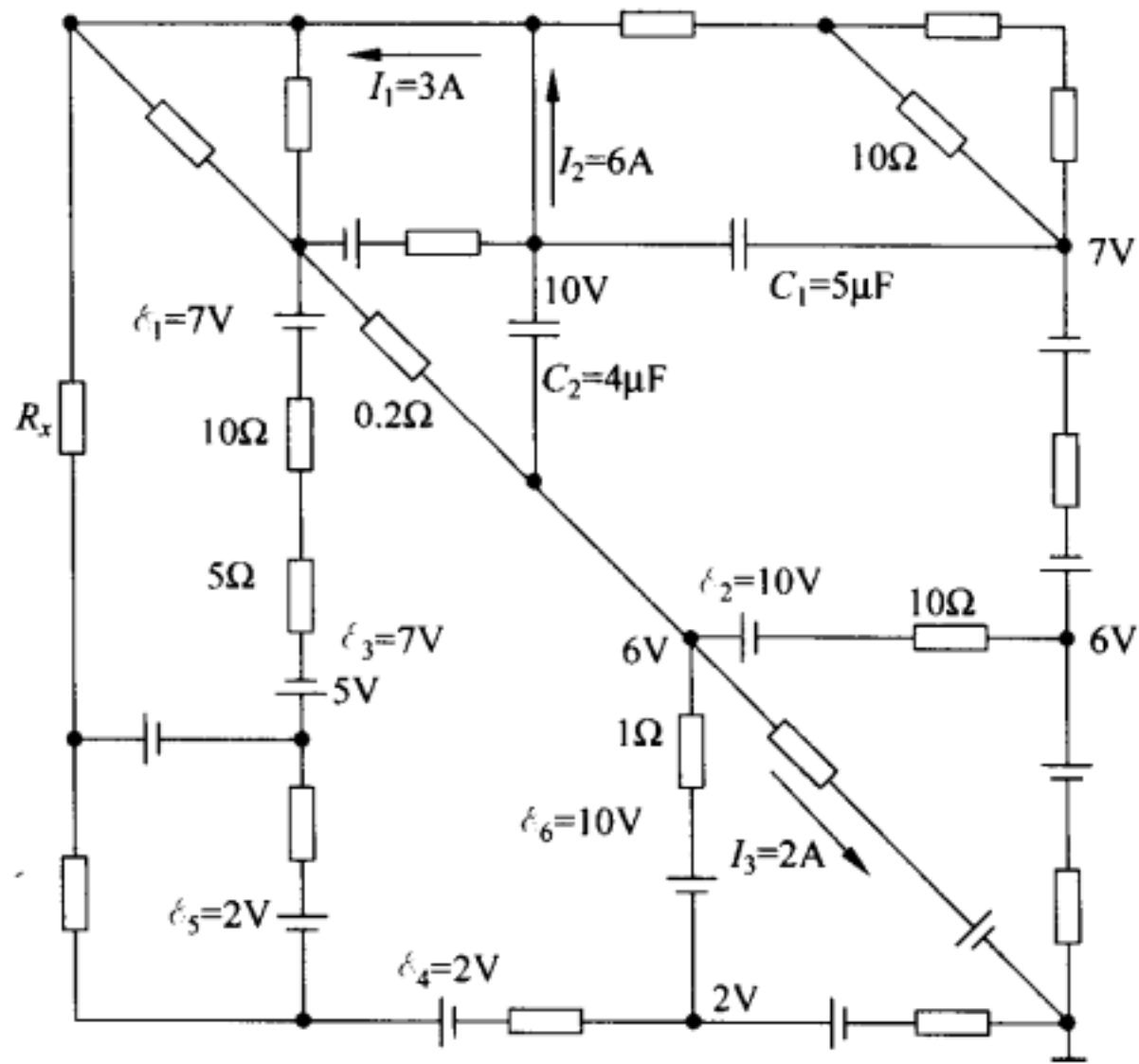


图 2-118

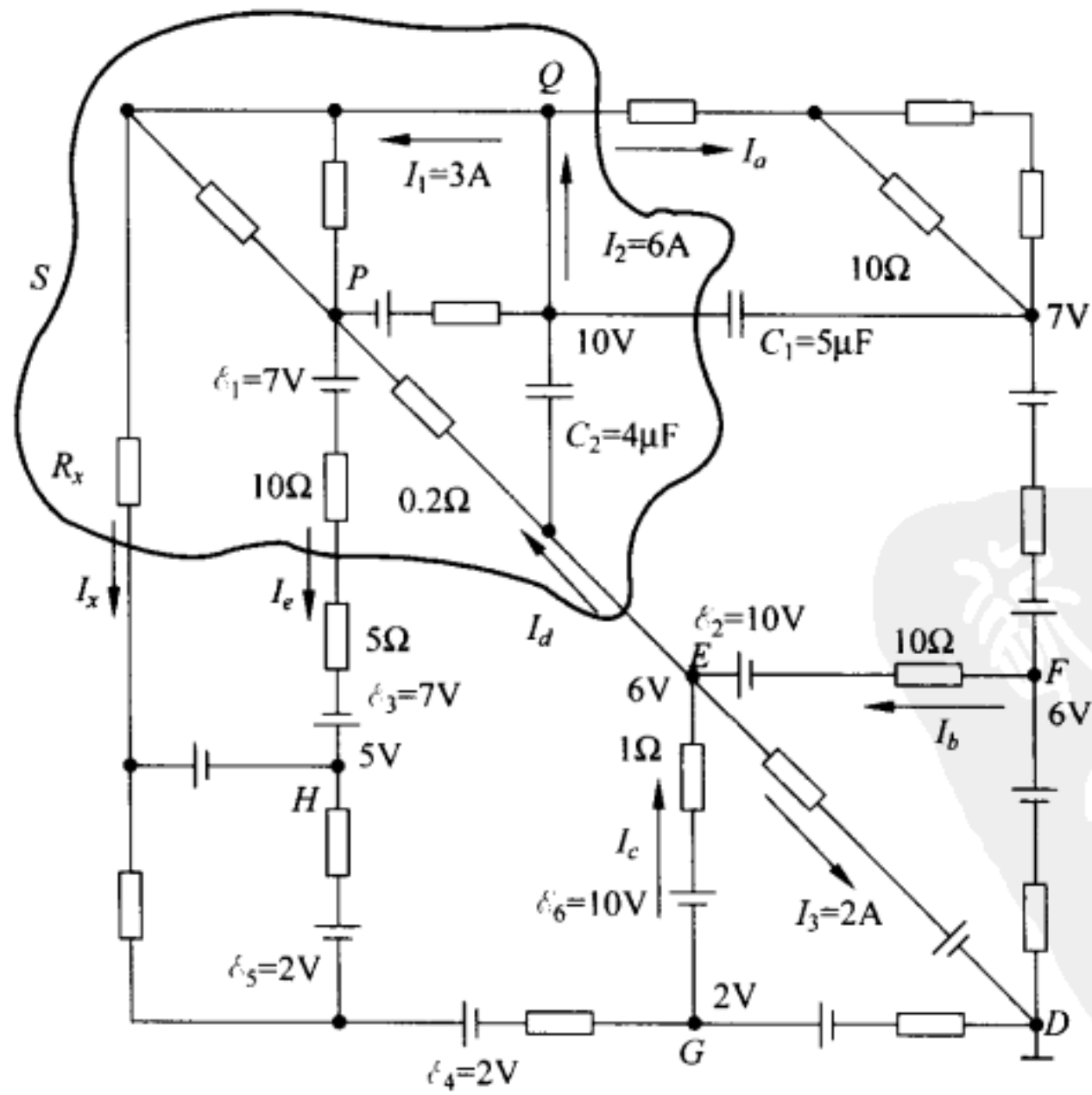


图 2-119

为了求得 I_c , 考查含源支路 EG

$$\begin{aligned} V_E - V_G &= \mathcal{E}_2 - I_c \cdot 1 \\ I_c &= (\mathcal{E}_2 - U_{EG}) / 1 = 6 \text{ A} \end{aligned}$$

对支路交点 E , 有

$$I_d = I_b + I_c - I_3 = 5 \text{ A}$$

为了求得 I_c , 先考查 P 点电势, 因

$$V_E - V_P = I_d \cdot 0.2 = 1 \text{ V}$$

故 P 点电势

$$V_P = 5 \text{ V}$$

对含源支路 PH 有

$$\begin{aligned} V_H - V_P &= (\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_1) - I_c \cdot (5 + 10) \\ I_c &= [(\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_1) - U_{HP}] / 15 = 0 \end{aligned}$$

因而对闭合包围面 S , 有

$$I_x = I_d - I_c - I_a = (5 - 0 - 3) \text{ A} = 2 \text{ A}$$

电流方向与图中所标一致, 为由上至下.

此电路题的出法与解法似乎不太“传统”, 关键是需要点“灵巧劲儿”. 题中给出的某些参数颇有迷惑性, 是否有用还要经过筛选. 抓住稳恒电路的特点: 在一个闭合面内, 流进去的电流值必等于流出来的电流值. 在电路图上作一个包含(与之相截)待求电流的支路与其他可求出电流值的支路的闭合面, 问题就迎刃而解了.

44. 某电视台有一台用于智力竞赛的抢答显示系统(抢答机), 它可供红、黄、蓝三个参赛队使用. 抢答机用继电器控制, 其线路如图 2-120 所示(参见后附说明). 主持人宣布问题要求抢答, 然后说“现在开始”以后, 最先按下按钮的队的指示灯点亮, 其余任何一个队再按按钮则无任何反应, 而亮灯的队松开按钮后其指示灯依然点亮. 若在主持人说“现在开始”前任何一个队违规提前按按钮, 导致自己的指示灯点亮, 主持人即可判定该队犯规. 为了解除某队指示灯点亮的状态, 主持人只需按一下自己操作台上的按钮, 即可恢复初始的待命状态. 现在为能满足四个队参加比赛, 必须增加一个供绿队使用的绿灯线路, 为此需将原线路改装, 技术人员已将部分线路连好, 如图 2-121 所示. 请你将尚未完成的接线继续接妥, 使其整体成为一台供四个队参赛用的抢答机.

[说明]

1) 各图中 $\text{—}\bigcirc\text{—}$ 表示按钮开关, 按下时为接通, 松手时自动弹起为断开.

2) 图 2-122 中 L 为电磁铁线圈, 不通电时, 继电器不吸合, 如图 2-122(a) 所示, 这时三对常闭接点 A_1 与 A'_1 接通, A_2 与 A'_2 接通, A_3 与 A'_3 接通; 三对常开接点 B_1 与 B'_1 , B_2 与 B'_2 , B_3 与 B'_3 均不相通. L 通电时, 继电器吸合, 如图 2-122(b) 所示. 三对常闭接点断开, 三对

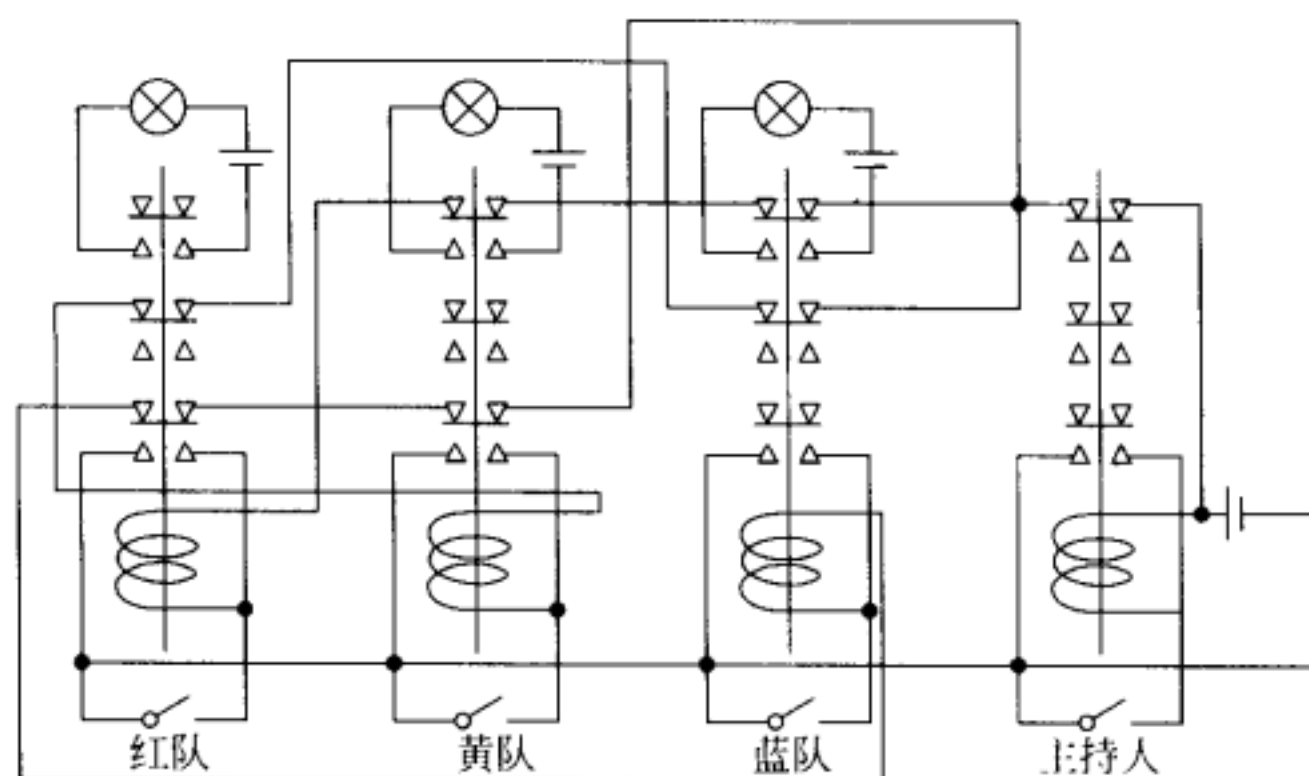


图 2-120

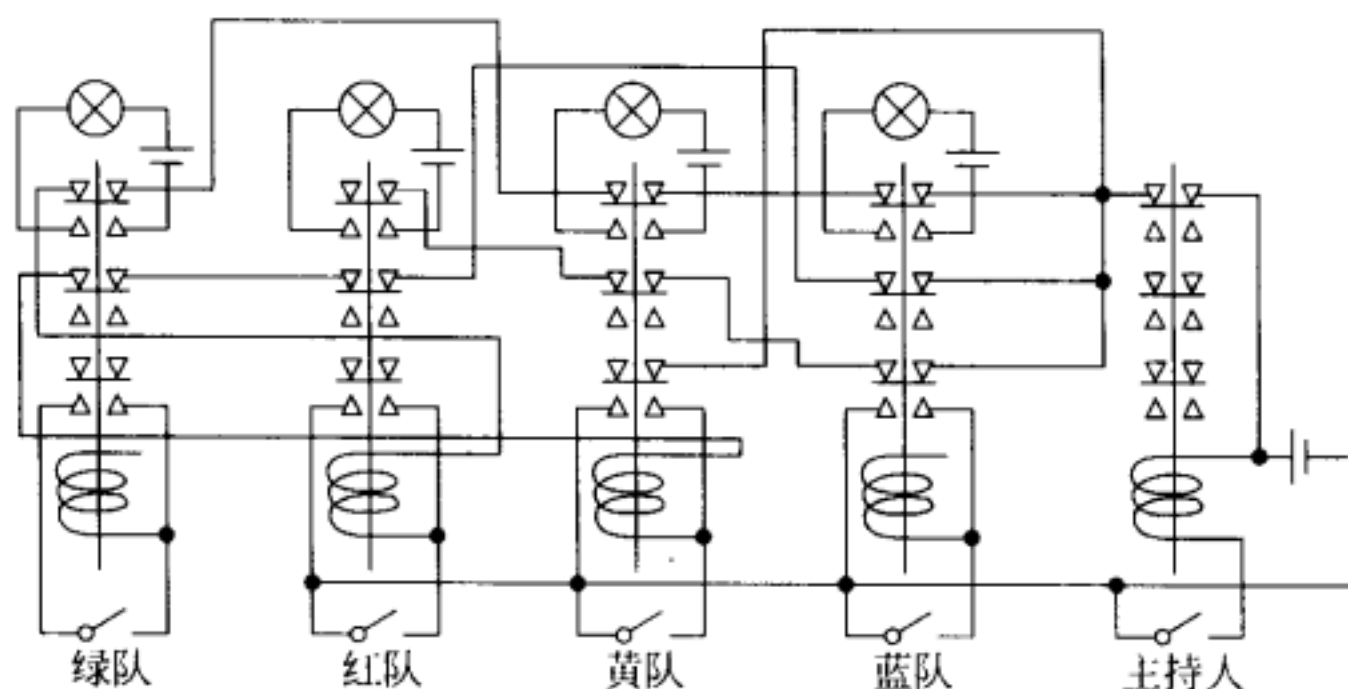


图 2-121

常开接点中 B_1 与 B'_1 接通, B_2 与 B'_2 接通, B_3 与 B'_3 接通.

3) 作图时, 不连接的交叉线如图 2-123 所示.

4) 两连接的交叉线, 在连接处画上黑点, 如图 2-124 所示.

解析

需补添的连线如图 2-125 中粗线所示.

此题涉及继电器的知识虽然不是纯物理的内容, 但对扩大学生的知识面, 尤其联系在知识竞赛电视节目中所使用的抢答机, 学生感到比较亲切, 尽管实际使用的抢答机线路与题中给的线路可能不尽相同, 但对用继电器作控制的基

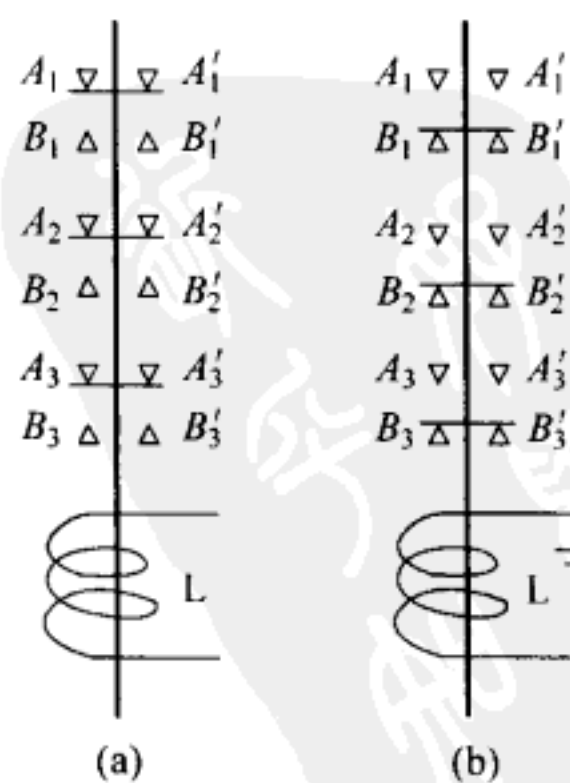


图 2-122



图 2-123



图 2-124

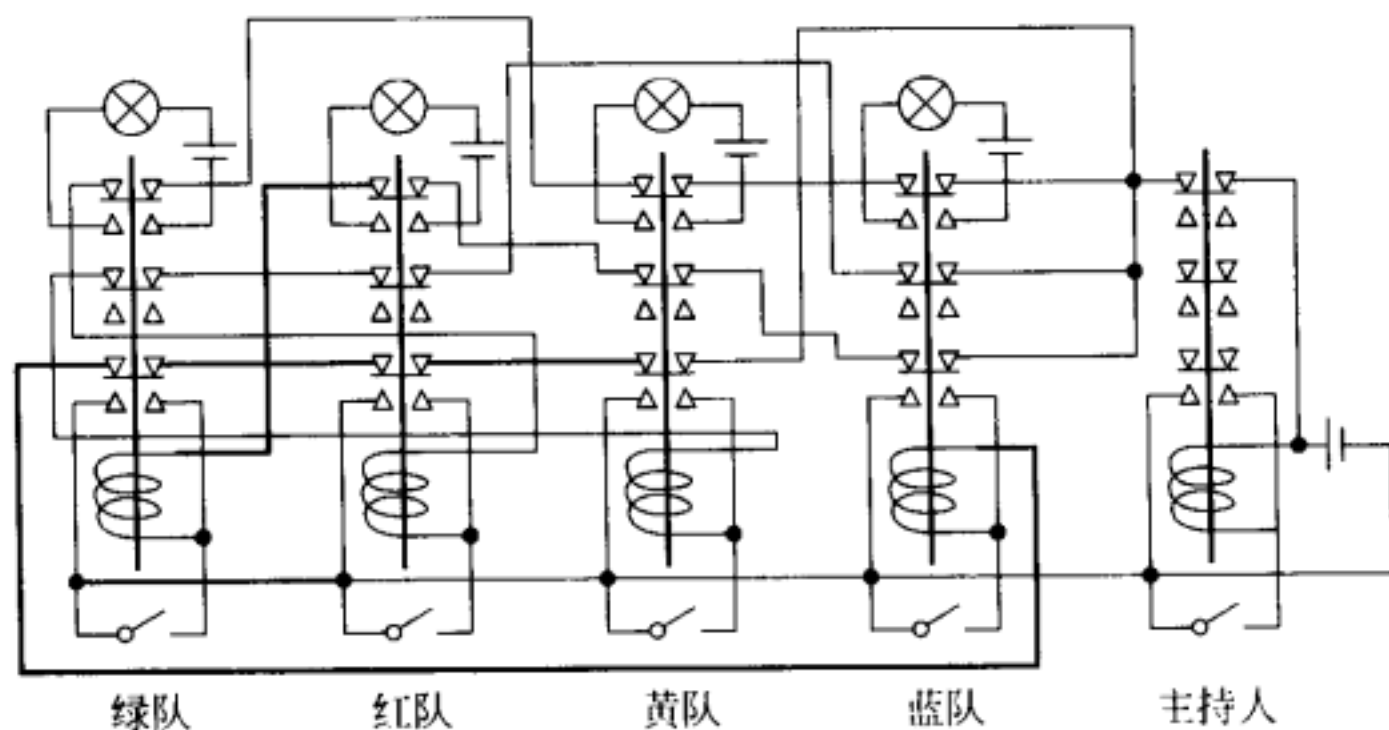


图 2-125

本线路,例如接通后能自动保持功能、常开接点与常闭接点的运用等,对学生观察新事物,学习新知识,提倡创造性思维都不无好处.由于此题用在预赛阶段,在难度上作了限制,考虑到参赛面很大,为使答案惟一,便于阅卷,又将答案限定在只是补上有限的几条接线的操作上,因而留给同学思考空间是有限的,限制了学生思考的独创性.同学们若感兴趣,可以研究此线路的优缺点,进而设计更合理的控制线路.甚至自己动手连一连线路,检验一下效果.

45. 远距离开动与停止电动机,通常用电磁开关(交流接触器),其构造示意图如图 2-126 所示. T_1 、 T_2 为由电磁铁驱动的电板,上面画斜线部分为导体.电磁铁 M 不通电时, T_1 、 T_2 处于图示位置,主接点 A_1 与 A'_1 、 A_2 与 A'_2 均不接通;电磁铁 M 通电时, T_1 、 T_2 被吸引向上移动,使主接点 A_1 与 A'_1 接通, A_2 与 A'_2 接通.电磁开关通常还附有四对接点 B_1 、 B'_1 、 B_2 、 B'_2 , C_1 、 C'_1 和 C_2 、 C'_2 都称为辅助接点.电磁铁不通电时,接点 B_1 与 B'_1 、 B_2 与 B'_2 均不接通,而接点 C_1 与 C'_1 接通, C_2 与 C'_2 接通.电磁铁通电时,情况正好相反.

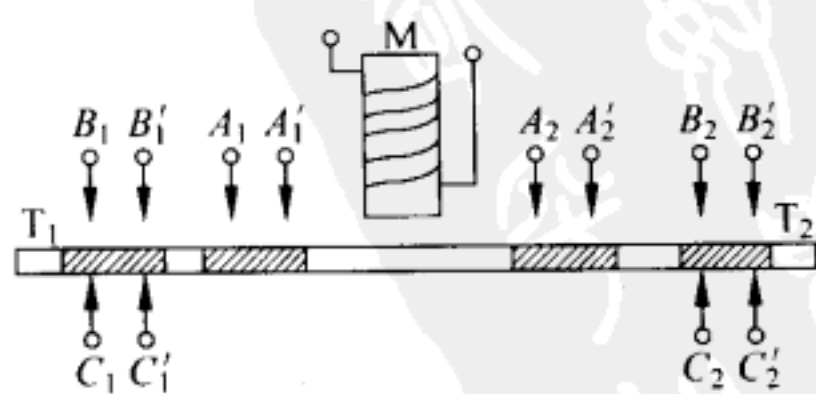


图 2-126

控制用的按钮开关的构造如图 2-127 所示. D 、 D' 为一对接点, 按钮下装有弹簧, 不按按钮或按后手又松开时, 按钮都处在图中所示位置, D 、 D' 接通; 按下按钮时, D 、 D' 切断. E 、 E' 为另一对接点, 按下按钮时接通, 不按按钮或按后手又松开时切断.

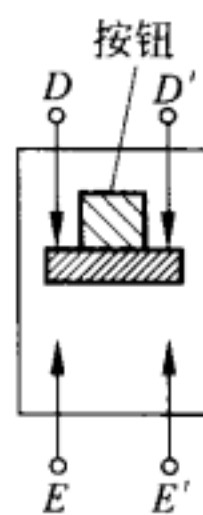


图 2-127

现在电机的主电路(主接点与电源、电机的连线)已经接好如图 2-128, 请在图上画连线, 连接控制电路以满足下述要求: 在离电机较远的甲、乙两处地方, 均设开机按钮和停机按钮, 当电机停止时, 按下任何一个开机按钮(随即松开), 电机即开始运转; 当电机运转时, 按下任何一个停机按钮(随即松开), 电机即可停机(辅助接点限定只利用 B_2 、 B'_2).

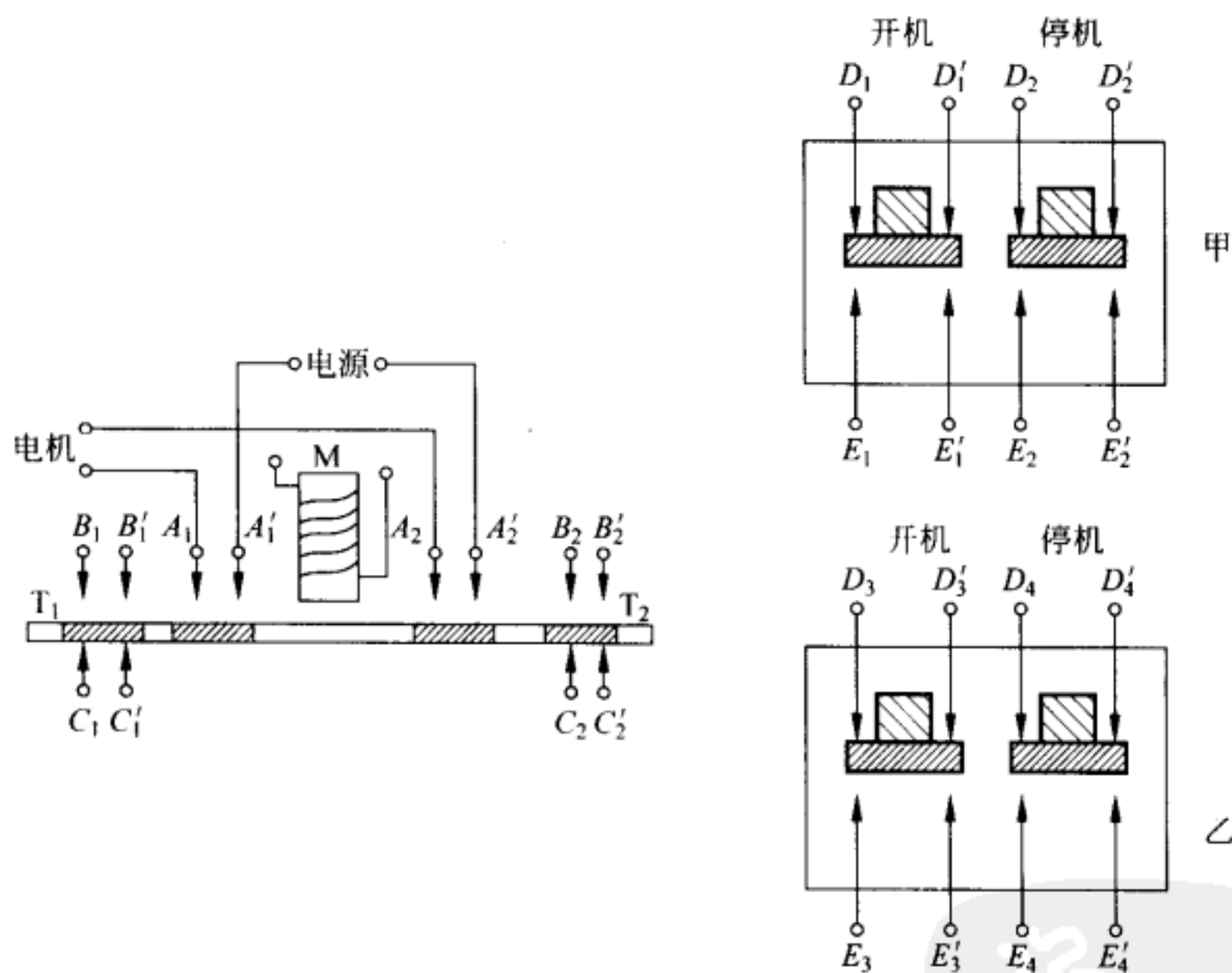


图 2-128

解析

连接控制电路的基本思路如图 2-129 所示, 其关键在于:

- 1) 利用电磁开关的辅助接点 B_2 与 B'_2 作自保接点, 使电磁铁通电时, 辅助接点同时接通.
- 2) 将两个开机按钮的 E_1 、 E'_1 和 E_3 、 E'_3 接点分别都与自保接点并联.
- 3) 将两个停机按钮的 D_2 、 D'_2 和 D_4 、 D'_4 接点相串联并和自保接点串联.

一种参考接法如图 2-130 所示。

命此题的目的,并不是要求学生事先知道这方面的实际知识,靠着准确的或模糊的记忆来回答问题,而是要求学生能看懂题目,想想办法.此题涉及的物理概念和原理很少且很简单,但对学生的设计思想和创造性等思维能力都有较高的要求.

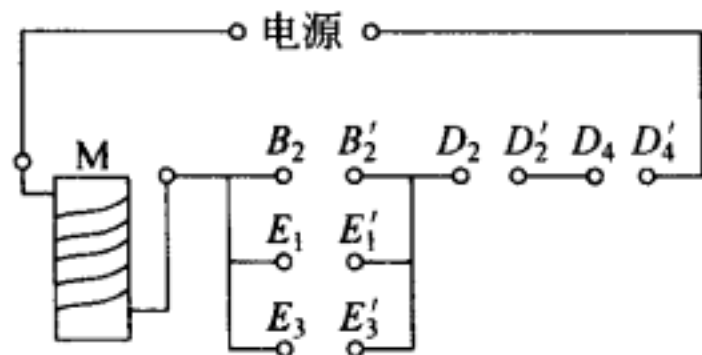


图 2-129

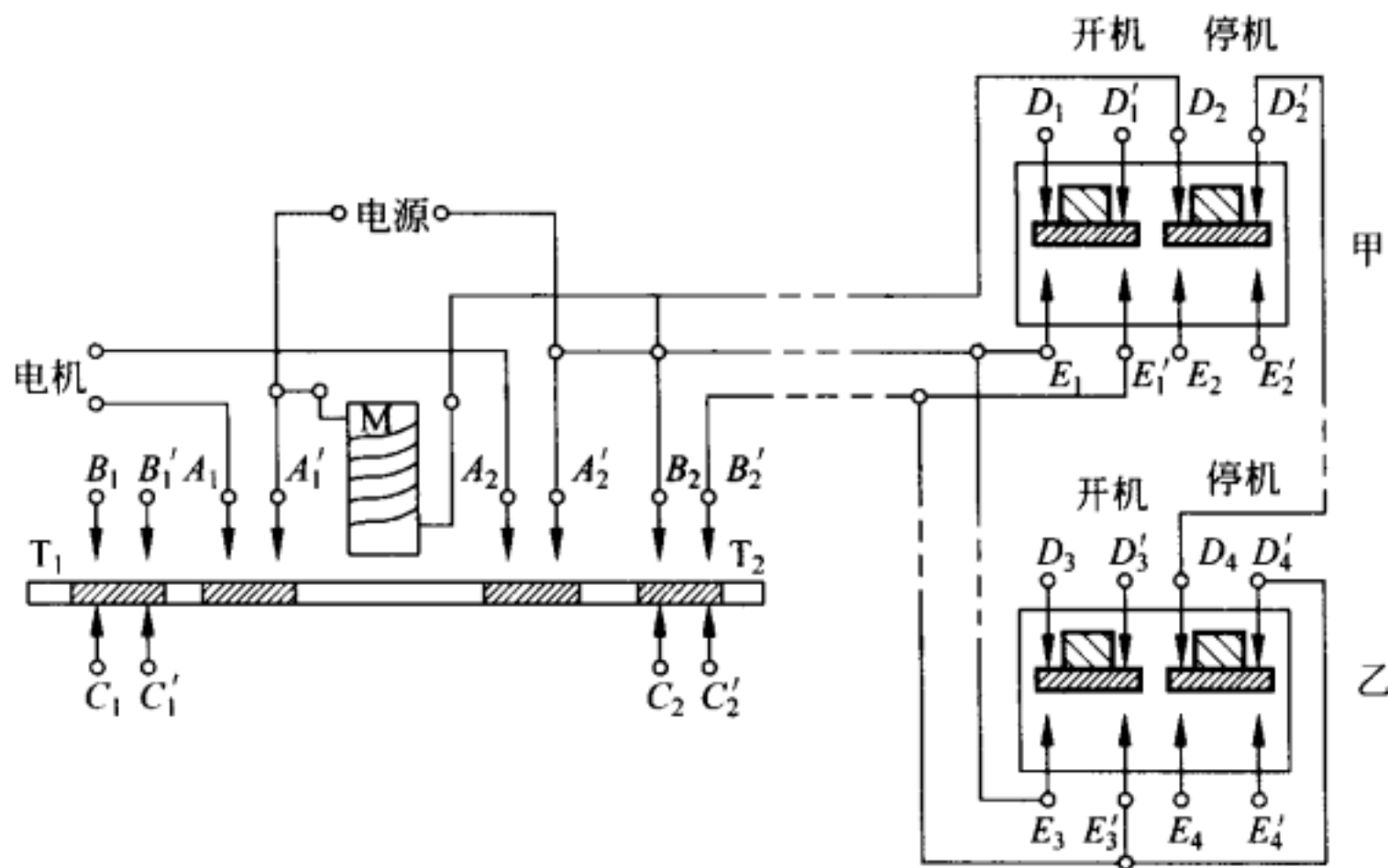


图 2-130

46. 图 2-131 是一用两个按钮控制四个灯的电路. $D_1 \sim D_4$ 是四个电子装置, 分别控制 1、2、3、4 四个灯(四个灯图中未画出), 若 D_1 中有电流流过, 则它所控制的灯 1 亮等. 线路中 B 为直流电源, $R_1 \sim R_4$ 为四个相同的电阻, K_1 与 K_2 是两个双刀双掷按钮开关, K_1 中有两组接点 $a_1 b_1 c_1$ 和 $a_2 b_2 c_2$. 平时(不按时) a 与 b 接通, 按下时 a 点改与 c 点接通, K_2 的情况与此相同. 线路中交叉处凡是无黑点者均不通.

线路中有 16 对接线点 $m_1 n_1, m_2 n_2, \dots, m_{16} n_{16}$ (用黑点表示). 每对接线点 m, n 之间可以接入一个二极管, 也可以不接入. 由 K_1, K_2 引出的四条竖线用 x, y, z, t 表示.

1) 请你用一些二极管接入某些成对的 m, n 接线点之间, 按照表 1 要求设计出两种不同的控制电路.

请你把所设计的方案 1、2(见表 2-2)画入图 2-132 和图 2-133 中, 为简单起见, 图 2-132 和图 2-133 只画出了二极管阵列部分, 略去了其他部分.

表 2-2

	K_1 不按 K_2 不按	K_1 不按 K_2 按下	K_1 按下 K_2 不按	K_1 按下 K_2 按下
设计方案 1	灯 1 亮	灯 2 亮	灯 3 亮	灯 4 亮
设计方案 2	灯 1 亮	1、2 两灯亮	灯 3 亮	2、4 两灯亮

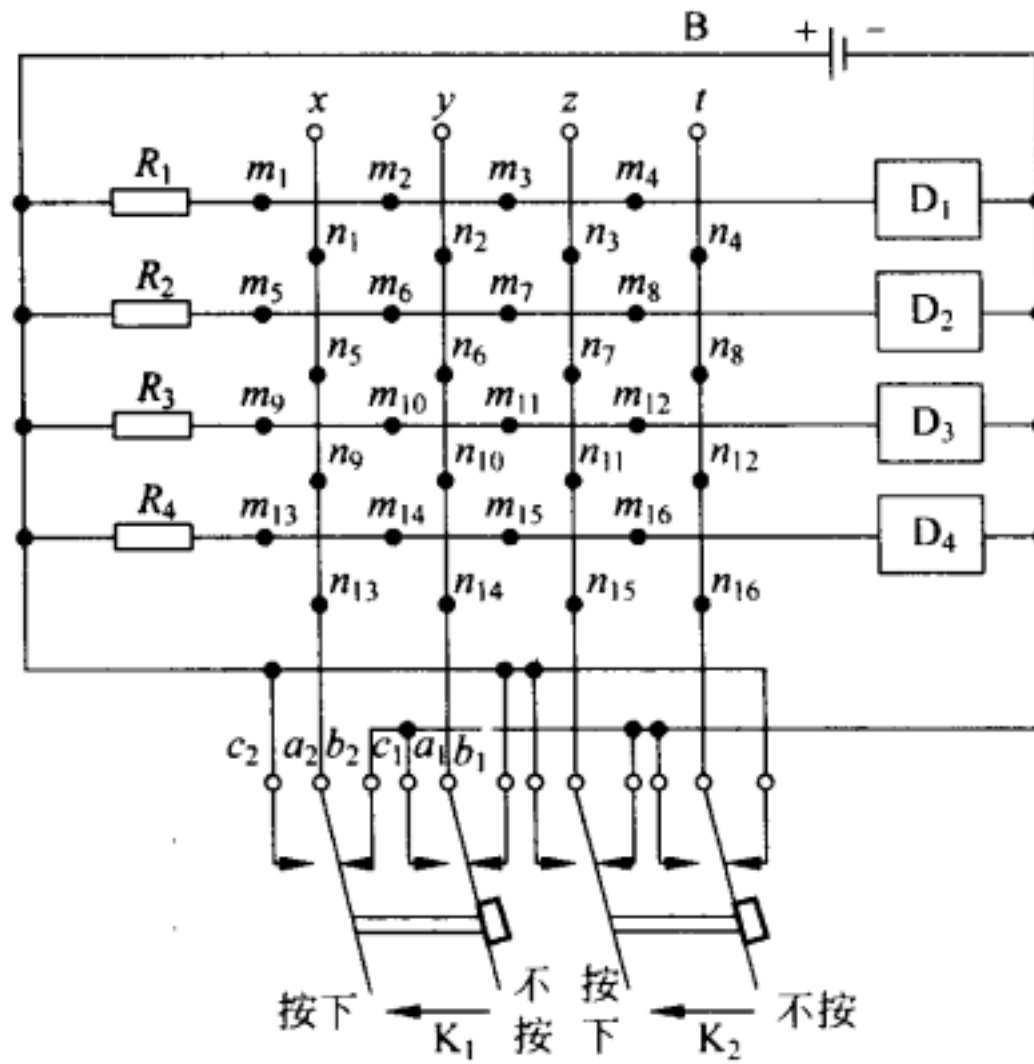


图 2-131

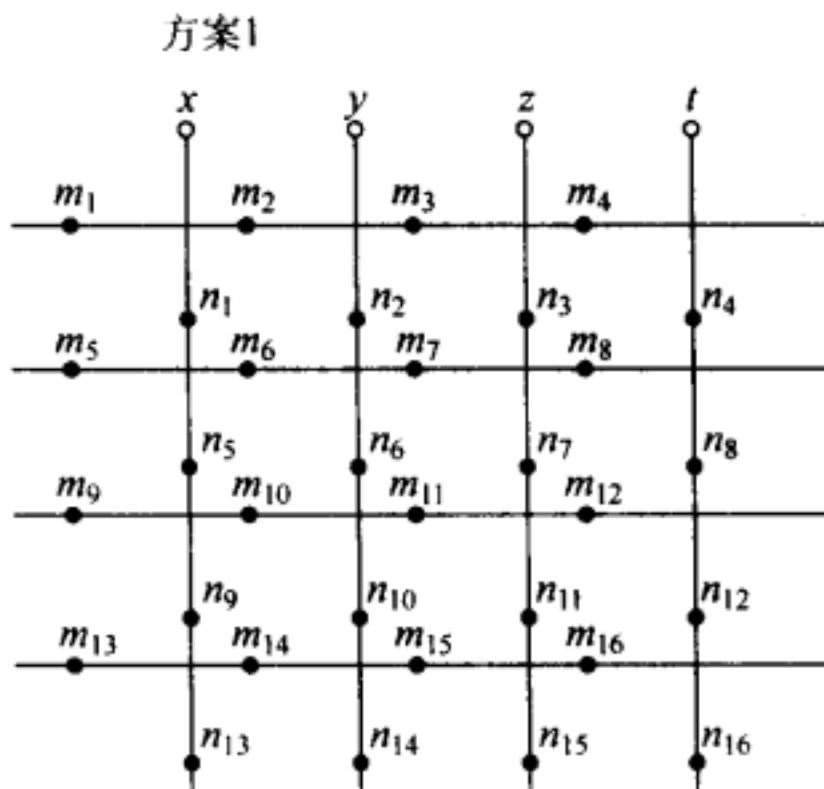


图 2-132

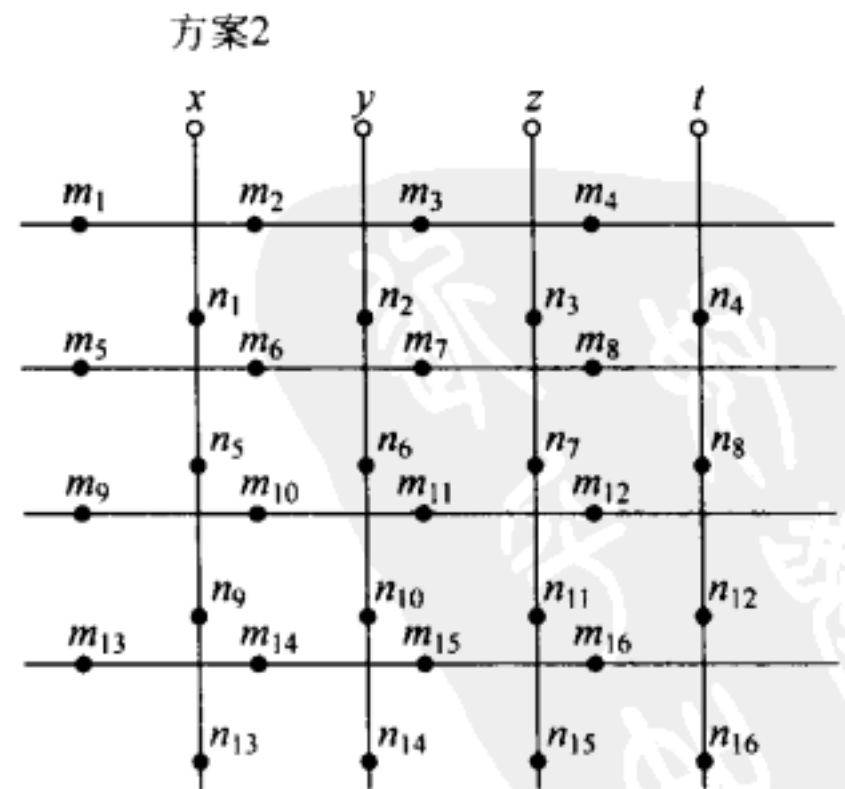


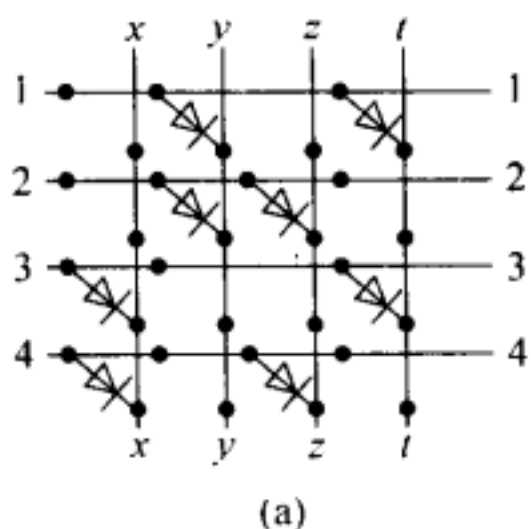
图 2-133

2) 简要地写出设计的依据.

解析

1) 设计: 如图 2-134(a)和(b)所示.

方案1:



方案2:

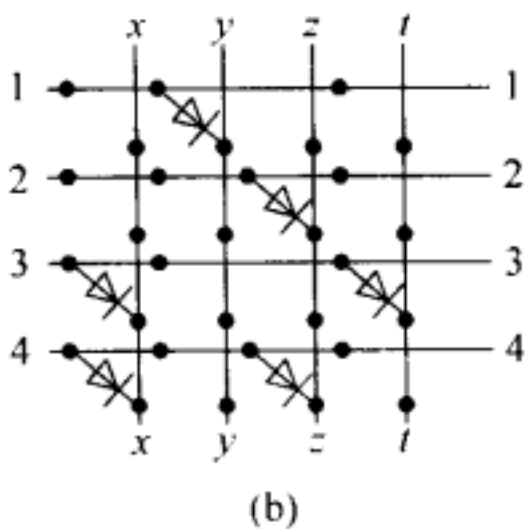


图 2-134

2) 设计依据

(i) 在一条控制线上不接二极管时,这条线所控制的灯亮.

(ii) 二极管负极接 m , 正极接 n 时, 不论 n 点处于高电位还是低电位, 均无任何影响, 这条控制线所控制的灯仍亮, 因此全部接入的二极管都应是正极接 m , 负极接 n .

(iii) 按上述接法用二极管将控制线接入高电位, 仍无任何影响, 只有将控制线接入低电位时, 有关的 D 失去电流, 控制的灯熄灭. 这种接法相当于用二极管正向将 D 旁路.

(iv) 设计时, 在按钮的四种情况中, 应当注意 x, y, z, t 四条线中处于低电位的两条. 要求哪个灯亮, 这个灯的控制线就不应通过二极管与低电位相接. 这样就确定了全部不应接入二极管的位置.

(v) 把其余位置接入二极管, 再检查一下如有多余的二极管将其去掉即可.

本题是由二极管译码器简化而成的. 二极管译码器是数字脉冲电路中的一种基本电路, 有着重要的应用, 其原理很简单, 中学生所学的物理知识完全能够解决. 本题旨在检查学生运用所学知识解决实际问题的能力. 由于这一题目中学生一般没有见过, 因此在参加决赛的学生中有 73% 的同学由于提不出一个判据, 而对此题无从下手.

47. 用直径为 1mm 的超导材料制成的导线做成一个半径为 5cm 的圆环. 圆环处于超导状态, 环内电流为 100A. 经过 1a(a 为年的符号), 经检测发现, 圆环内电流的变化量小于 10^{-6} A. 试估算该超导材料电阻率数量级的上限.

[提示] 半径为 r 的圆环中通以电流 I 后, 圆环中心的磁感应强度为 $B = \frac{\mu_0 I}{2r}$, 式中 B, I, r 各量均用国际单位, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$.

解析

根据题中所给的条件,当圆环内通过电流 I 时,圆环中心的磁感应强度

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{r}$$

穿过圆环的磁通量可近似为

$$\Phi \approx BS = \frac{\mu_0}{2} \pi I r \quad (1)$$

根据法拉第电磁感应定律,电流变化产生的感生电动势的大小

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{\mu_0}{2} \pi r \frac{\Delta I}{\Delta t} \quad (2)$$

圆环的电阻

$$R = \frac{\mathcal{E}}{I} = \frac{\mu_0 \pi r}{2I} \frac{\Delta I}{\Delta t} \quad (3)$$

根据题设条件 $r=0.05\text{m}$, $\mu_0=4\pi\times 10^{-7}\text{N}\cdot\text{A}^{-2}$, $I=100\text{A}$, $\frac{\Delta I}{\Delta t} \leq 10^{-6}\text{A}\cdot\text{s}^{-1} \approx 3 \times 10^{-14}\text{A}\cdot\text{s}^{-1}$,代入(3)式得

$$R \leq 3 \times 10^{-23} \Omega \quad (4)$$

由电阻与电阻率 ρ 、导线截面积 S 、长度 l 的关系

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

及已知导线的直径 $d=1\text{mm}$,环半径 $r=5\text{cm}$,得电阻率

$$\rho = R \frac{S}{l} = R \frac{d^2}{8r} = 7.5 \times 10^{-29} \Omega \cdot \text{m} \quad (5)$$

题目的解答并不困难,计算也不复杂,但提问“估算某物理量的上限”却难倒了部分学生,他们认为这里暗含玄机不知从何下手.实际这在处理实际的物理问题,特别是与试验联系的问题中是常见的.学生在学物理时,习惯于物理题目理想化,给出的数据又很规整.只要套上公式计算就行了,这样就免不了碰上小小的障碍.实际上,任何一个物理量的测量精度都会受到实验仪器和测量手段的限制,同时也取决于我们对测量精度的要求,这些都会影响到最终物理量的精确范围,物理上需要对最终结果的误差提出一个限度(上限或者下限).本题对金属圆环电流大小的测定取决于电流计的最小精度,比如我们使用的仪器测不出电流的“变化”,从科学上看,还不能断言电流就不“变化”.人们有理由问,如果电流计的精度再提高一个数量级,是否就能看出电流的“变化”呢?再说,监测时间一年没有变化,但提高一个数量级,即由一年延长到十年,电流会不会改变呢?因此,对超导态电阻及电阻率上限的估算取决于实验的仪器和实验过程.我们对物理量数值的估计理所当然地要留有余地.这是我们应有的科学态度.有了科学的态度和正确的方法就能指导观察、判断我们应选用仪器的精度,应测量的方法以及测量数据应取多少位的有效数字等等.我们希望学生通过算题能看到纸面上题目及答案后面的东西.

三、运动电荷及载流导体所受的磁场力

1. 把两个相同的电容器 A 和 B 如图 3-1 所示连接起来. 当它们都带有一定电荷量时, 电容器 A 中质量为 m 的带电微粒恰好静止, 现在使电容器 B 两板错开, 而距离不变, 使它们对着的面积成为原来的 $1/2$, 这时微粒的加速度的大小是_____.

解析

$g/3$.

电容器 B 二极板未错开时二电容器的电荷量分别为 Q_A 与 Q_B , 因二电容器电容值相等, 即

$$C_A = C_B \quad (1)$$

故

$$Q_A = Q_B \quad (2)$$

当电容器 B 二极板错开时, 其电容值

$$C'_B = \frac{1}{2}C_B \quad (3)$$

此时二电容器上的电荷将重新分布, 但维持电压值相等, 即有

$$\frac{Q'_A}{C_A} = \frac{Q'_B}{C'_B} \quad (4)$$

解得

$$Q'_B = \frac{1}{2}Q'_A$$

因二电容器极板电荷总量不变, 故有

$$Q'_A + Q'_B = Q_A + Q_B = 2Q_A \quad (5)$$

解(4)、(5)式得

$$Q'_A = \frac{4}{3}Q_A \quad (6)$$

因电容器极板间电场与电荷量成正比, 故电容器 A 中场强将发生变化, 设由 E_A 变化至 E'_A , 则有

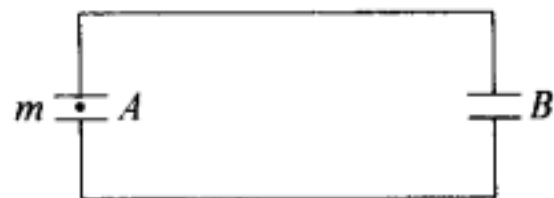


图 3-1



$$E'_A = \frac{4}{3}E_A \quad (7)$$

此时电容器 A 中的带电粒子所受的电场力

$$F'_E = qE'_A = \frac{4}{3}qE_A \quad (8)$$

粒子受的力

$$F'_A = F'_E - mg \quad (9)$$

开始时粒子受的电场力 F_E 与重力平衡,故有

$$F_E = qE_A = mg$$

(9)式可表示为

$$F'_A = \frac{4}{3}qE_A - qE_A = \frac{1}{3}qE_A = \frac{1}{3}mg$$

根据牛顿第二定律

$$F'_A = ma = \frac{1}{3}mg$$

得

$$a = \frac{1}{3}g \quad (10)$$

此题虽是一简单的填空题,但有一定的灵活性,(10)式的结果是对 $C_A = C_B$ 而言的,如果二电容器的电容值满足一定关系,仍可按同样思路求解,只是计算工作量要增多一些.

2. 两块竖直放置的平行金属大平板 A、B,相距 d ,两板间的电压为 U .一带正电的质点从两板间的 M 点开始以竖直向上的初速度 v_0 运动,当它到达电场中某点 N 时,速度变为水平方向,大小仍为 v_0 ,如图 3-2 所示.求 M、N 两点间的电势差(忽略带电质点对金属板上电荷均匀分布的影响).

解析

带电质点在竖直方向做匀减速运动,加速度的大小为 g ;在水平方向因受电场力作用而做匀加速直线运动,设加速度为 a .若质点从 M 到 N 经历的时间为 t ,则有

$$v_x = at = v_0 \quad (1)$$

$$v_y = v_0 - gt = 0 \quad (2)$$

由以上两式得

$$a = g \quad (3)$$

$$t = \frac{v_0}{g}$$

M、N 两点间的水平距离

$$x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{v_0^2}{2g}$$

于是 M、N 两点间的电势差

$$U_{MN} = \frac{U}{d}x = \frac{Uv_0^2}{2dg}$$

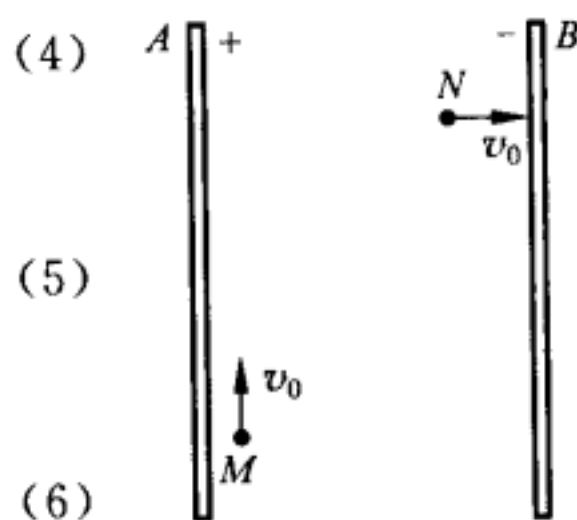


图 3-2

3. 如图 3-3 所示, A、B 是两块水平放置的互相平行的带电金属板, 其间的电场可视为匀强电场. 假设有一带负电的微粒在 a 点处沿与水平成 $\theta = 45^\circ$ 角的方向射出, 并从此时刻开始计时. 已知在 $t = 0.10\text{s}$ 时, 微粒到达其轨迹最高点; 在 $t = 0.30\text{s}$ 时, 微粒的动能为 750eV . 在以上运动过程中微粒一直处在均匀电场内, 且未与 A、B 相碰. 试求微粒的初动能.

解析

设微粒的质量为 m , 在 a 点时的初速度为 v_0 , 则初动能为

$$E_0 = mv_0^2/2$$

由于微粒所受的重力和电场力均为恒力, 微粒的运动轨迹为抛物线, 如图 3-4 所示. 在 $t = 0$ 时微粒在 a 点, 在 $t = 0.1\text{s}$ 时微粒在 b 点, 在 $t = 0.3\text{s}$ 时微粒在 c 点.

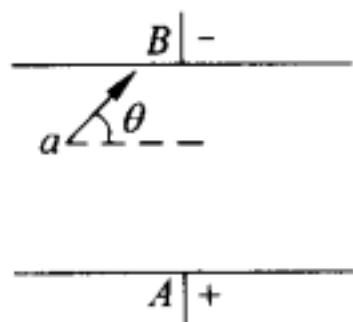


图 3-3

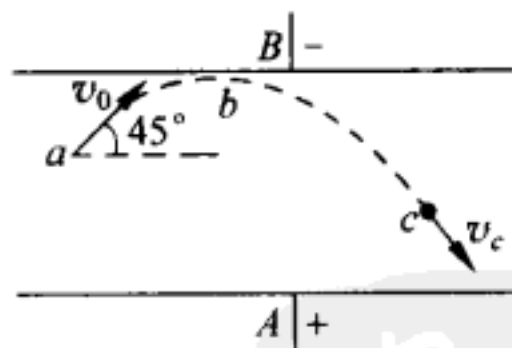


图 3-4

微粒沿水平方向的分运动为匀速运动, 分速度为

$$v_x = v_0 \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}v_0$$

设微粒在竖直向下方向所受的合力为 F , 则根据动量定理, 从 a 到 b, 有

$$F(t_b - t_a) = 0.1F = mv_0 \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}mv_0$$

从 b 到 c, 有

$$F(t_c - t_b) = 0.2F = mv_{cy}$$

因此

$$v_{cy} = \sqrt{2}v_0$$

在 c 点微粒的动能为

$$E_c = \frac{1}{2}m(v_{cx}^2 + v_{cy}^2) = \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{2}v_0^2 + 2v_0^2\right) = 5mv_0^2/4$$

由题设条件知道 $E_c = 750\text{eV}$, 因而

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{2}{5}E_c = 300\text{eV}$$

本题考查学生对于动量和动能两个概念及有关的关系的掌握. 题目并未给出微粒的质量和电荷量, 因而必须在不知具体受力大小的情况下解决此题. 解题的关键是微粒所受的力一定是竖直方向上的恒力.

4. 如图 3-5 所示, 在 $x > 0$ 的空间各点, 存在沿 x 轴正方向的电场, 其中在 $x \leq d$ 的区域中, 电场是非匀强电场, 场强 E 的大小随 x 增大, 即 $E = bx, b > 0$, 为已知常量; 在 $x \geq d$ 的区域中, 电场是匀强的, 场强为 $E = bd$. 在 $x < 0$ 的空间各点, 电场的分布与 $x > 0$ 的空间中分布对称, 只是场强的方向都沿 x 轴负方向.

一电子, 其电荷为 $-e$, 质量为 m , 在 $x = \frac{5}{2}d$ 处以沿 y 轴正方向的初速度 v_0 开始运动, 如图 3-5 所示. 求:

- 1) 电子的 x 方向分运动的周期;
- 2) 电子运动的轨迹与 y 轴的各个交点中, 任意两个相邻交点间的距离.

解析

1) 先研究电子在 x 方向上的分运动.

电子沿 x 方向运动的初速度为零, 在电场力作用下开始向负 x 方向做加速运动. 在 $d \leq x \leq \frac{5}{2}d$ 区间, 电子受到沿负 x 方向的力, 大小为

$$F = ebd$$

电子的加速度大小为

$$a_1 = \frac{ebd}{m}$$

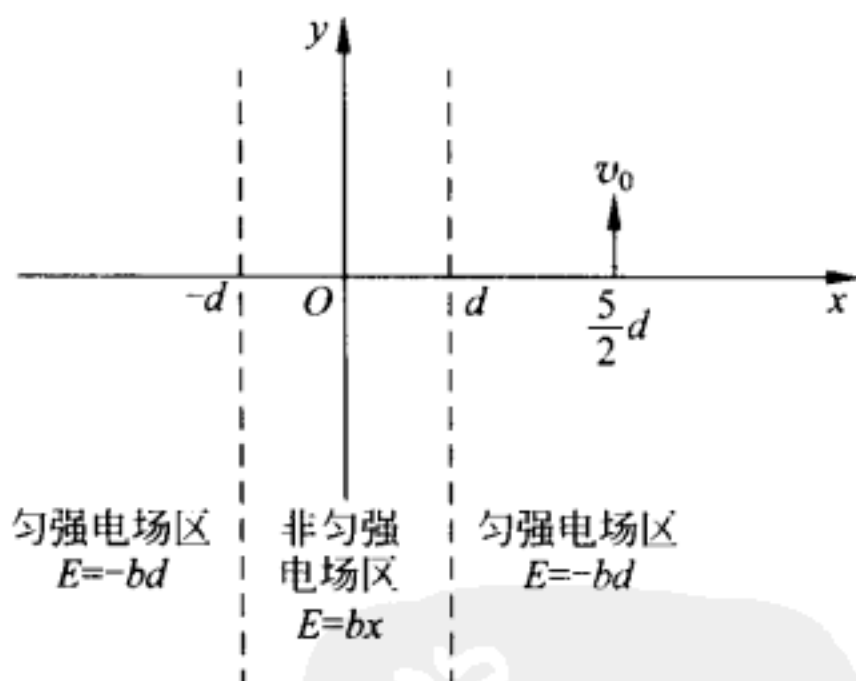


图 3-5

设电子由 $\frac{5}{2}d$ 到 d 处需时 t_1 , 则有

$$\frac{5}{2}d - d = \frac{1}{2}a_1 t_1^2$$

得

$$t_1 = \sqrt{\frac{3m}{eb}} \quad (1)$$

电子到 $x=d$ 处时, 其 x 方向分速度的大小为

$$v_1 = \sqrt{\frac{3eb}{m}}d \quad (2)$$

在 $-d \leq x \leq d$ 区间, 电子受力

$$F = -eE = -ebx = -kx$$

其中 $k=eb$. 在此区间内电子的 x 方向分运动是简谐振动, 振动的角频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{eb}{m}} \quad (3)$$

因此, 就 x 方向上的分运动而言, 在此区间内电子的运动是平衡位置在 $x=0$ 处, 周期为 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{eb}}$, 振幅为 A 的简谐振动的一部分;

在 $x=d$ 处时, 电子的速度为 $v = v_1 = \sqrt{\frac{3eb}{m}}d = \sqrt{3}\omega d$, 方向向左. 设在半径为 A 的参考圆(见图 3-6)上, 这时旋转半径与 x 轴的夹角为 φ , 则由图 3-6 有

$$x = A\cos\varphi = d$$

$$v_1 = \omega A\sin\varphi = \sqrt{3}\omega d$$

可解得

$$A = 2d \quad (4)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{3} \quad (5)$$

设电子自 $x=d$ 运动到 $x=-d$ 所需时间为 t_2 , 则由图 3-6 可得

$$\omega t_2 = \pi - 2\varphi = \frac{\pi}{3}$$

$$t_2 = \frac{\pi}{3\omega} = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{eb}} \quad (6)$$

在 $x \leq -d$ 区间内, 电子在 x 方向上以初速度 v_1 向左做匀减速运动, 到达 $x = -\frac{5}{2}d$

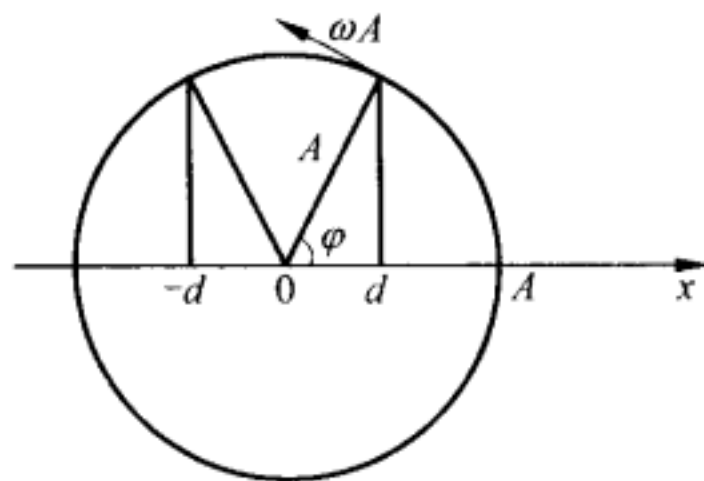


图 3-6

处时,速度为零,这一过程经历的时间为

$$t_3 = t_1$$

此后电子的 x 方向上的分运动为在 $x = -\frac{5}{2}d$ 与 $x = \frac{5}{2}d$ 间的往复振动,其周期为

$$T = 2(t_1 + t_2 + t_3) = \left(4\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}\right)\sqrt{\frac{m}{eb}} \quad (7)$$

2) 电子运动的轨迹与 y 轴的各交点中,任意两相邻交点间的距离 Δy 都相等,且

$$\Delta y = v_0 \frac{T}{2} = \left(2\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\right)\sqrt{\frac{m}{eb}}v_0 \quad (8)$$

此题的电场分布实际是厚度为 $2d$ 的均匀电荷体密度的无限带电板产生的,板内的电场随 x 作线性变化,板外的电场为匀强电场. 此题是运动学问题,在板外带电粒子在 x 方向受恒力,做匀加速(或匀减速)运动,在板内仅受 x 方向的回复力,在 x 方向做简谐运动. 因我们关心的是带电粒子在 x 方向的分运动,因此不必求出带电粒子的轨迹与进入均匀带电板时速度的大小与方向,只需要将带电粒子速度的 x 分量做简谐运动的过程看作在参考圆上做匀角速运动在 x 轴投影的结果即可,借助参考圆还可以求出做简谐运动的初相位. 而且也不必从带电粒子的具体轨迹找出与 y 轴相交的相邻交点的距离,尽管带电粒子在板内 x 方向的运动并未完成一个简谐运动的全过程,但根据运动对 y 轴对称的特点,可以认定具体轨迹与 y 轴相交的相邻交点的距离与粒子在板内 x 方向做简谐运动半个周期乘以 v_0 的距离是相等的,因此抓住带电粒子在 x 轴的一维运动这一特点,是解此题的关键.

5. 图 3-7 中 A 和 B 是真空中两块面积很大的平行金属板,加上周期为 T 的交流电压,在两板间产生交变的匀强电场. 已知 B 板电势为零, A 板电势 U_A 随时间变化的规律,如图 3-8 所示,其中 U_A 的最大值为 U_0 ,最小值为 $-2U_0$. 在图 3-7 中,虚线 MN 表示与 A、B 板平行等距的一个较小的面,此面到 A 和 B 的距离皆为 l . 在此面所在处,不断地产生电荷量为 q 、质量为 m 的带负电的微粒,各个时刻产生带电微粒的机会均等. 这种微粒产生后,从静止出发在电场力的作用下运动. 设微粒一旦碰到金属板,它就附在板上不再运动,且其电荷同时消失,不影响 A、B 板的电压. 已知上述的 T 、 U_0 、 l 、 q 和 m 等各量的值正好满足等式

$$l^2 = \frac{3}{16} \frac{U_0 q}{2m} \left(\frac{T}{2}\right)^2$$



图 3-7

若在交流电压变化的每个周期 T 内, 平均产生 320 个上述微粒, 试论证在 $t=0$ 到 $t=T/2$ 这段时间内产生的微粒中, 有多少微粒可到达 A 板(不计重力, 不考虑微粒之间的相互作用).

解析

在电压为 U_0 时, 微粒所受电场力为 $U_0 q/2l$, 此时微粒的加速度为 $a_0 = U_0 q/2lm$. 将此式代入题中所给的等式, 可将该等式变为

$$l = \frac{3}{16} a_0 \left(\frac{T}{2} \right)^2 \quad (1)$$

现在分析从 0 到 $T/2$ 时间内, 何时产生的微粒在电场力的作用下能到达 A 板, 然后计算这些微粒的数目.

在 $t=0$ 时产生的微粒, 将以加速度 a_0 向 A 板运动, 经 $T/2$ 后, 移动的距离 x 与(1)式相比, 可知

$$x = \frac{1}{2} a_0 \left(\frac{T}{2} \right)^2 > l \quad (2)$$

即 $t=0$ 时产生的微粒, 在不到 $T/2$ 时就可以到达 A 板. 在 $U_A = U_0$ 的情况下, 设刚能到达 A 板的微粒是产生在 $t=t_1$ 时刻, 则此微粒必然是先被电压 U_0 加速一段时间 Δt_1 , 然后再被电压 $-2U_0$ 减速一段时间, 到 A 板时刚好速度为零. 用 d_1 和 d_2 分别表示此两段时间内的位移, v_1 表示微粒在 Δt_1 内的末速度, 也等于后一段时间的初速度, 由匀变速运动公式应有

$$d_1 = \frac{1}{2} a_0 (\Delta t_1)^2 \quad (3)$$

$$0 = v_1^2 + 2(-2a_0)d_2 \quad (4)$$

又有

$$v_1 = a_0 \Delta t_1 \quad (5)$$

$$d_1 + d_2 = l \quad (6)$$

$$t_1 + \Delta t_1 = \frac{T}{2} \quad (7)$$

由(3)式到(7)式及(1)式, 可解得

$$t_1 = \frac{T}{4} \quad (8)$$

这就是说, 在 $U_A = U_0$ 的情况下, 从 $t=0$ 到 $t=T/4$ 这段时间内产生的微粒都可到达 A 板(确切地说, 应当是 $t < T/4$).

为了讨论在 $T/4 < t \leq T/2$ 这段时间内产生的微粒的运动情况, 先设想有一静止粒子

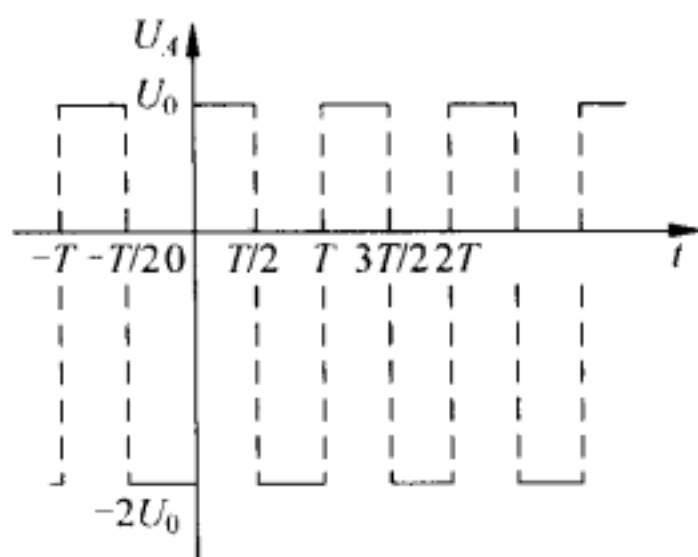


图 3-8

在 A 板附近, 在 $U_A = -2U_0$ 电场作用下, 由 A 板向 B 板运动, 若到达 B 板经历的时间为 τ , 则有

$$2l = \frac{1}{2}(2a_0)\tau^2$$

根据(1)式可求得

$$\tau = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{4}T$$

由此可知, 凡位于 MN 到 A 板这一区域中的静止微粒, 如果它受 $U = -2U_0$ 的电场作用时间大于 τ , 则这些微粒都将到达 B 板.

在 $t = T/4$ 发出的微粒, 在 $U_A = U_0$ 的电场作用下, 向 A 板加速运动, 加速的时间为 $T/4$, 接着在 $U_A = -2U_0$ 的电场作用下减速, 由于减速时的加速度为加速时的两倍, 故经过 $T/8$ 微粒速度减为零. 由此可知微粒可继续在 $U_A = -2U_0$ 的电场作用下向 B 板运动的时间为

$$\tau_1 = \frac{1}{2}T - \frac{1}{8}T = \frac{3}{8}T = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4}T$$

由于 $\tau_1 > \tau$, 故在 $t = T/4$ 时产生的微粒最终将到达 B 板(确切地说, 应当是 $t < T/4$), 不会再回到 A 板.

在 t 大于 $T/4$ 但小于 $T/2$ 时间内产生的微粒, 被 $U_A = U_0$ 的电场加速的时间小于 $T/4$, 在 $U_A = -2U_0$ 的电场作用下速度减到零的时间小于 $t = T/8$, 故可在 $U_A = -2U_0$ 的电场作用下向 B 板运动的时间为

$$\tau' > \frac{1}{2}T - \frac{1}{8}T = \tau_1$$

所以这些微粒最终都将打到 B 板上, 不可能再回到 A 板.

由以上分析可知, 在 $t = 0$ 到 $t = T/2$ 时间内产生的微粒中, 只有在 $t = 0$ 到 $t = T/4$ 时间内产生的微粒能到达 A 板, 因为各个时刻产生带电微粒的机会均等, 所以到达 A 板的微粒数为

$$N = 320 \times \frac{1}{4} = 80 \quad (9)$$

本题基本是运动学的问题, 研究粒子在某个初速度情况下, 在一定的时间区段里, 受到一恒定不变的电场力后的运动情况. 关键是电场力的大小和方向是周期性地改变, 因此就要论证不同时刻出发的粒子是到达 A 板还是到达 B 板. 解答里已论证前半个周期内, 在 $0 \leq t \leq T/4$ 时间区段内产生的微粒均可到达 A 板, 还论证了 $T/4 < t \leq T/2$ 时间区段内产生的微粒不能到达 A 板, 这样的论证是必须的. 只有这样才完整地回答了本题.

作为本题的扩充, 若问在以后的时段中, 即 $T/2 < t \leq T$ 的时间区段里发出的粒子, 还

有没有可能到达 A 板呢? 回答是肯定的. 通过分析计算发现, 还有一个时段发出的粒子仍能到达 A 板(这些粒子的运动历程要复杂些), 当然, 我们必须论证其他时段发出的粒子不可能到达 A 板, 即这些粒子都到达了 B 板.

这两个时段粒子在两板间移动并且最终到达 A 板, 它们随时间 t 的 x 位移曲线, 可以通过图 3-9 帮助理解. 参照此图可分析, 在一个周期内, t_1 时刻($T/4$)前发射的粒子均可到达 A 板, 在 t_2 时刻(可以计算得出)后发射的粒子亦将到达 A 板. 这就留作学生思考吧. 因此本题的回答对学生思维的严密性是有要求的.

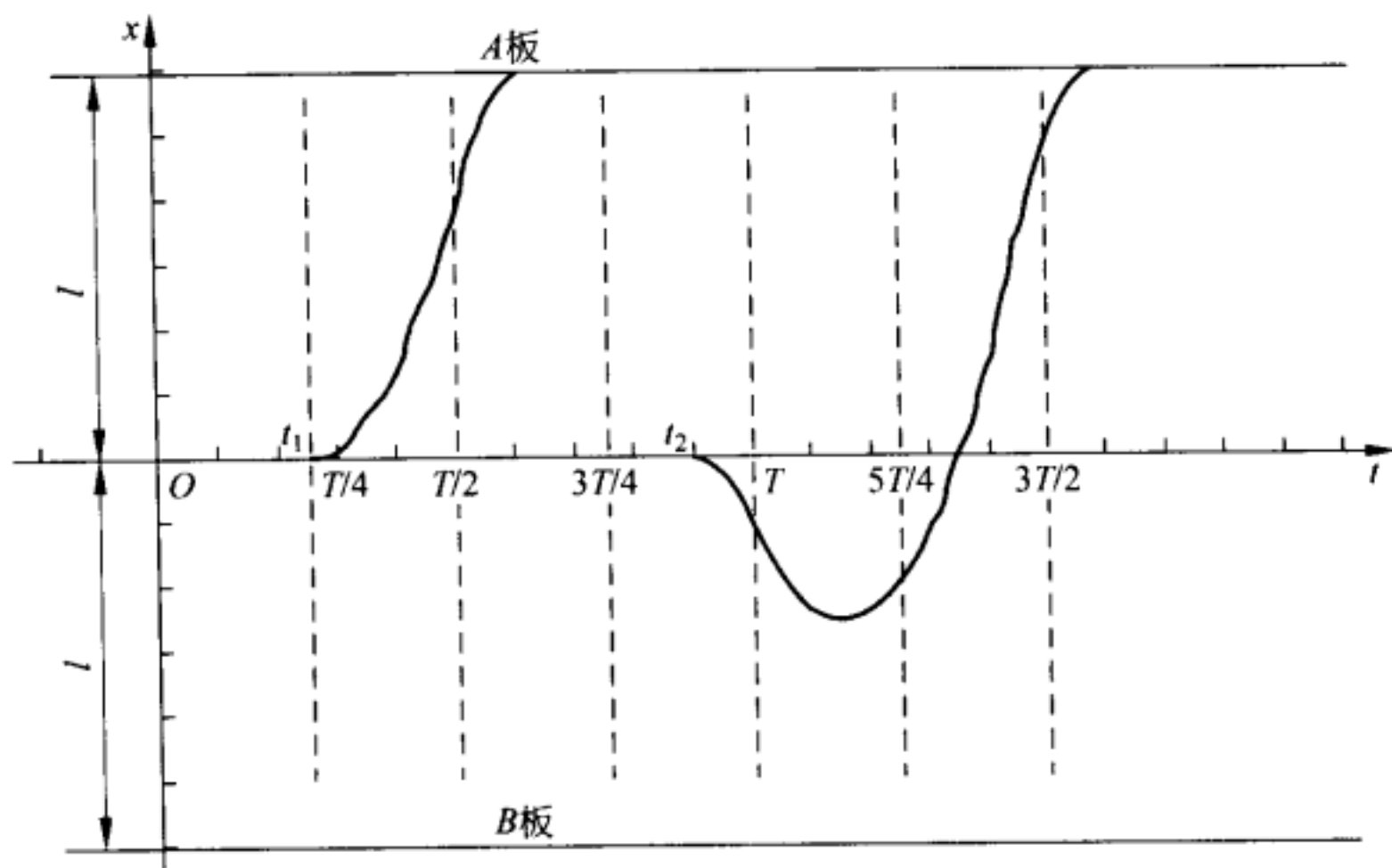


图 3-9

6. 如图 3-10 所示, 一质量为 0.10kg 、电荷量为 $8 \times 10^{-4}\text{C}$ 的带正电小球, 从水平地面上 A 点以与 x 轴正方向成 $\alpha = 30^\circ$ 夹角的初速度 v_0 抛出 (v_0 在 xOy 竖直平面内). 当达到最高点 B 时 (B 点恰好处在 Oy 轴上), 在全空间立刻产生一个匀强电场 E , 场强为 $2.50 \times 10^3 \text{N} \cdot \text{C}^{-1}$, 方向平行于 xOy 平面, 并与 x 轴负方向成 θ 夹角. 当带电小球再次通过 Oy 轴时, 匀强电场立刻消失. 试分析讨论当 θ 角变化时 ($0 \leq \theta \leq 180^\circ$), 带电小球自 B 点以后的运动情况, 并画出带电小球在各种情况下的运动轨迹简图 ($g = 10\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$).

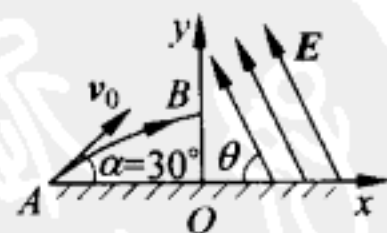


图 3-10

解析

带电小球到最高点 B 加入匀强电场后, 受到两个力的作用, 一个是重力 mg , 另一个

是电场力 qE . 由于电场力在 x 方向和 y 方向的分量的大小与 θ 角有关, 因此, 带电小球自 B 点以后的运动可分为以下 6 种情况:

1) 当 $qE\sin\theta = mg$ 时, 即 $\theta = 30^\circ$, 带电小球只受到电场力在 x 负方向的分量 $qE\cos\theta$ 的作用, 又由于小球在 B 点具有向 x 正方向的速度 $v_0\cos\alpha$, 因此, 带电小球的运动轨迹如图 3-11 所示.

2) 当 $qE\sin\theta < mg$ 时, 即 $0 \leq \theta < 30^\circ$, 带电小球受到 y 负方向力 $mg - qE\sin\theta$ 和 x 负方向力 $qE\cos\theta$, 又由于小球在 B 点具有 x 正方向速度 $v_0\cos\alpha$, 这样小球自 B 点以后的运动随 θ 角变化 ($0 \leq \theta < 30^\circ$) 有以下 3 种情况 (见图 3-12、图 3-13、图 3-14).

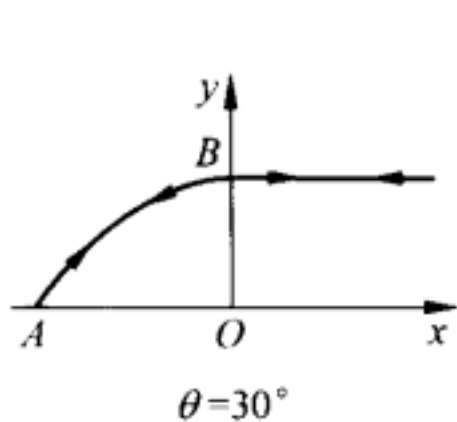


图 3-11

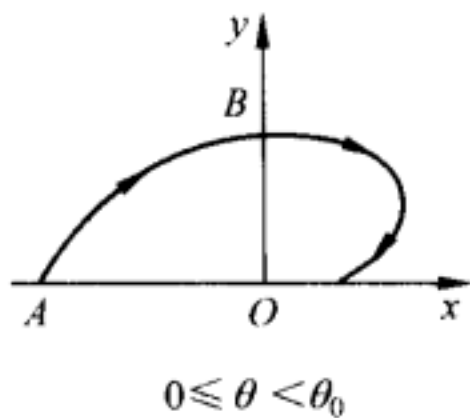


图 3-12

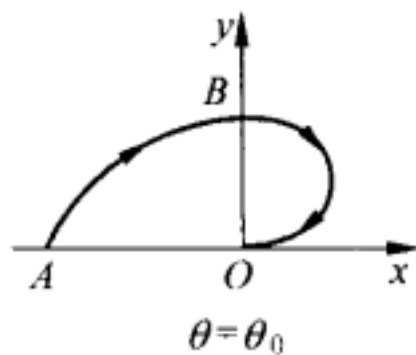


图 3-13

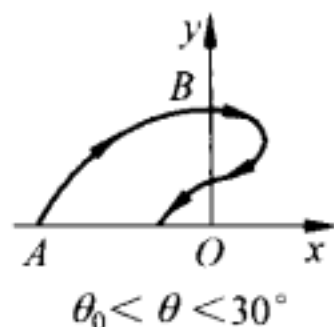


图 3-14

根据上面分析, 我们可以在 $0 \leq \theta < 30^\circ$ 范围内找到一个角 θ_0 , 使得小球运动情况满足图 3-13 的情况, 也就是小球从 B 点垂直下落所需时间 $t_{BO\perp}$ 等于小球从 B 点水平往返运动所需时间, 即

$$t_{BO\perp} = t_{BB_1//} + t_{BO//} = 2t_{BB_1//}$$

而

$$\begin{aligned} t_{BB_1//} &= v_0 \cos\alpha / (qE \cos\theta_0 / m) \\ &= mv_0 \cos\alpha / (qE \cos\theta_0) = (\sqrt{3}/40)(v_0 / \cos\theta_0) \\ t_{BO\perp} &= \sqrt{[2 \times (v_0^2 \sin^2\alpha / 2g)] / [(mg - qE \sin\theta_0) / m]} \\ &= (v_0 / 20) \sqrt{1 / (1 - 2\sin\theta_0)} \end{aligned}$$

式中 v_0 以 m/s 为单位, t 的单位为 s.

由以上三式可得

$$\sin^2\theta_0 - 6\sin\theta_0 + 2 = 0$$

根据题意可得

$$\theta_0 = \arcsin(3 - \sqrt{7}) = 20^\circ 45'$$

3) 当 $qE\sin\theta > mg$ 时, 即 $30^\circ < \theta < 90^\circ$, 带电小球受到 y 正方向力 $qE\sin\theta - mg$ 和 x 负方向力 $qE\cos\theta$, 又由于小球在 B 点具有 x 正方向速度 $v_0\cos\alpha$, 因此, 带电小球自 B 点以后的运动轨迹如图 3-15 所示.

4) 当 $90^\circ \leq \theta < 150^\circ$ 时, 即 $qE\sin\theta > mg$, 带电小球受到 y 正方向力 $qE\sin\theta - mg$ 和 x

正方向力 $qE\cos\theta$, 又由于小球在 B 点具有 x 正方向速度 $v_0\cos\alpha$, 因此, 带电小球自 B 点以后的运动轨迹如图 3-16 所示.

5) 当 $\theta=150^\circ$ 时, 即 $qE\sin\theta=mg$, 带电小球只受到 x 正方向的力 $qE\cos\theta$, 又由于小球在 B 点具有 x 正方向速度 $v_0\cos\alpha$, 因此, 带电小球自 B 点以后的运动轨迹如图 3-17 所示.

6) 当 $150^\circ<\theta\leq 180^\circ$ 时, 即 $qE\sin\theta<mg$, 带电小球受到 y 正方向力 $mg-qE\sin\theta$ 和 x 正方向力 $qE\cos\theta$, 又由于小球在 B 点具有 x 正方向速度 $v_0\cos\alpha$, 因此, 带电小球自 B 点以后的运动轨迹如图 3-18 所示.

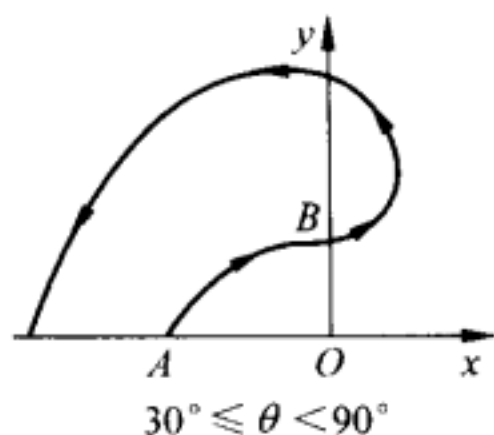


图 3-15

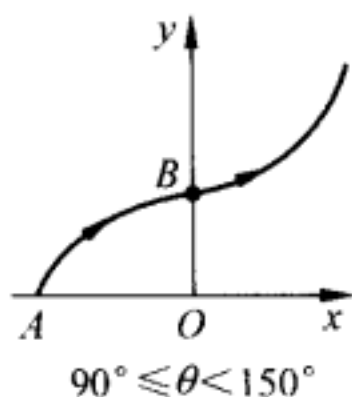


图 3-16

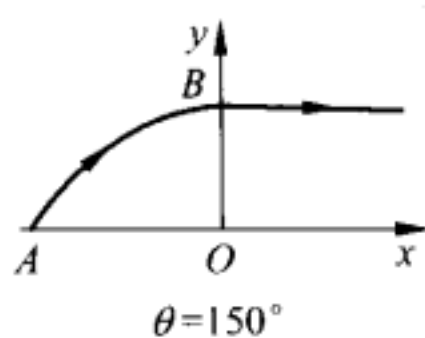


图 3-17

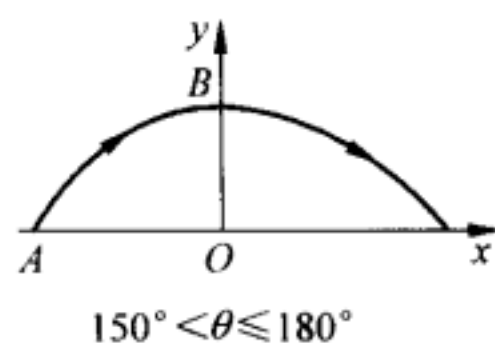


图 3-18

无论在何种情况下, 带电小球受到的都是恒力, 因此, 都是抛物线型的运动, 特例是直线运动. 只要分析清楚对应于不同的 θ 范围合力的情况, 就可判断出轨迹的图形.

7. 从 z 轴上的 O 点发射一束电荷量为 $q (> 0)$ 、质量为 m 的带电粒子, 它们速度的方向分布在以 O 点为顶点、 z 轴为对称轴的一个顶角很小的锥体内 (见图 3-19), 速度的大小都等于 v . 试设计一种匀强磁场, 能使这束带电粒子会聚于 z 轴上的另一点 M , M 点离开 O 点的距离为 d . 要求给出该磁场的方向、磁感应强度的大小和最小值. 不计粒子间的相互作用和重力的作用.

解析

设计的磁场为沿 z 轴方向的匀强磁场, O 点和 M 点都处于这个磁场中. 下面我们根据题意求出这种磁场的磁感应强度的大小. 粒子由 O 点射出就进入了磁场, 可将与 z 轴成 θ 角的速度分解成沿磁场方向的分速度 v_z 和垂直于磁场方向的分速度 v_\perp (见图 3-20), 注意到 θ 很小, 得



图 3-19

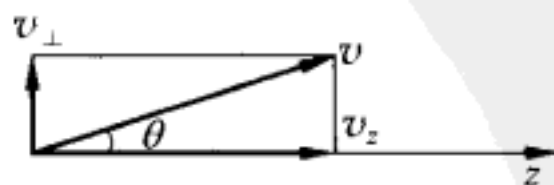


图 3-20

$$v_z = v \cos \theta \approx v \quad (1)$$

$$v_{\perp} = v \sin \theta \approx v \theta \quad (2)$$

粒子因具有垂直磁场方向的分速度,在洛伦兹力作用下做圆周运动.以 R 表示圆周的半径,有

$$qBv_{\perp} = m \frac{v_{\perp}^2}{R}$$

圆周运动的周期

$$T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}}$$

由此得

$$T = \frac{2\pi m}{qB} \quad (3)$$

可见周期与速度分量 v_{\perp} 无关.

粒子因具有沿磁场方向的分速度,将沿磁场方向做匀速直线运动.由于两种分速度同时存在,粒子将沿磁场方向做螺旋运动.螺旋运动螺距为

$$h = v_z T = vT \quad (4)$$

由于它们具有相同的 v ,因而也就具有相同的螺距;又由于这些粒子是从同一点射出的,所以经过整数个螺距(最小是一个螺距)又必定会聚于同一点.只要使 OM 等于一个螺距或一个螺距的 n (整数)倍,由 O 点射出的粒子绕磁场方向旋转一周(或若干周后)必定会聚于 M 点,如图 3-21 所示.所以

$$d = nh \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (5)$$

由(3)、(4)、(5)式解得

$$B = \frac{2\pi m v n}{qd} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (6)$$

这就是所要求磁场的磁感应强度的大小,最小值应取 $n=1$,所以磁感应强度的最小值为

$$B = \frac{2\pi m v}{qd} \quad (7)$$

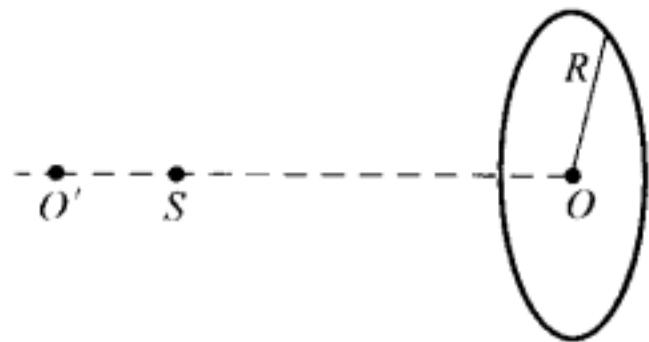


图 3-22

8. 图 3-22 中 S 为一离子源,它能机会均等地向各方向持续地大量发射正离子.离子的质量皆为 m ,电荷量皆为 q ,速率皆为 v_0 .在离子源的右侧有一半半径为 R 的圆屏,图中 $O'O$ 是通过圆屏的圆心并垂直于屏面的轴

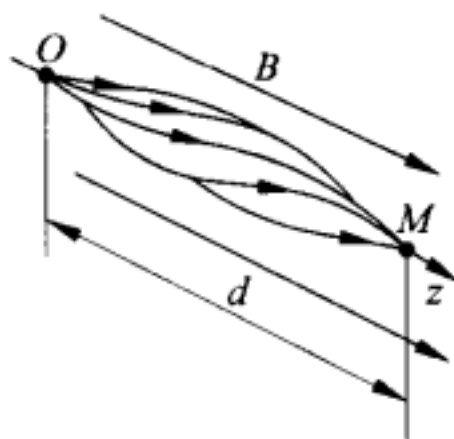


图 3-21

线, S 位于轴线上. 离子源和圆屏所在的空间有一匀强磁场, 磁感应强度的大小为 B , 方向垂直于圆屏向右. 在发射的离子中, 有的离子不管 \overline{SO} 的距离如何变化, 总能打到圆屏面上. 求这类离子的数目与总发射离子数之比. 不考虑离子间的电力作用及它们之间的碰撞.

解析

从 S 发出的正离子凡是方向偏左的, 都打不到圆屏上. 所以只考虑方向偏右的. 令 θ 表示发射方向与轴线间的夹角, 则离子沿轴线方向的分速度为 $v_0 \cos\theta$, 垂直于轴线方向的分速度为 $v_0 \sin\theta$. 在洛伦兹力作用下, 每个离子都做等距螺旋运动. 根据洛伦兹力和牛顿定律, 可求得圆周运动的半径 r 与发射角 θ 的关系如下. 因为

$$qBv_0 \sin\theta = m \frac{(v_0 \sin\theta)^2}{r} \quad (1)$$

所以
$$r = \frac{mv_0 \sin\theta}{qB} \quad (2)$$

因为所有的螺旋线都是与轴线 $O'O$ 相切的, 所以, 无论 \overline{SO} 的距离等于多大, 最终总能打在圆屏面上的只能是满足下列关系的那些离子:

$$r \leq \frac{R}{2} \quad (3)$$

(大于 r 的离子在一定条件下虽也能打在屏面上, 但不是在 \overline{SO} 取任何值时都能打上.) 由 (2)、(3) 两式可得到这些离子的发射角 θ 必须满足关系式:

$$\sin\theta \leq \frac{RBq}{2mv_0}$$

令 $\sin\theta_m = \frac{RBq}{2mv_0}$, 由图 3-23 可知, 这些离子就是发射方向是在以 S 为顶点, 以 $O'O$ 为轴线, 以 $2\theta_m$ 为顶角的圆锥范围内的那些离子. 当发射总数很大时, 这些离子的数目与总发射数之比, 应当等于图中被圆锥截得的球冠面积 A_1 除以整个球面面积 A . 取球的半径为单位长度, 令 K 表示所求的比值, 则因为

$$A_1 = 2\pi(1 - \cos\theta_m)$$

$$A = 4\pi$$

所以

$$K = \frac{A_1}{A} = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta_m)$$

将 θ_m 值代入上式, 可得

$$K = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{R^2 B^2 q^2}{4m^2 v_0^2}} \right)$$

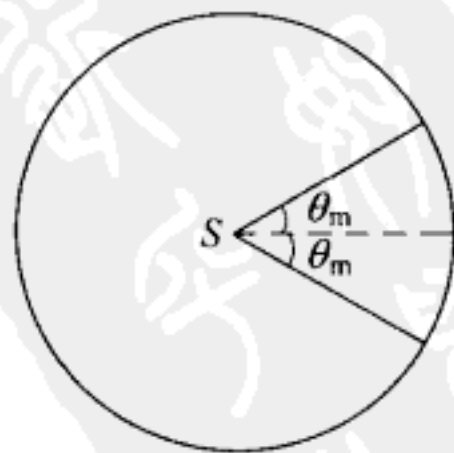


图 3-23

有的学生粗心大意,将(3)式条件写成 $r < R$ 而导致错误.

9. 如图 3-24 所示, A_1 和 A_2 是两块面积很大、互相平行又相距很近的带电金属板,相距为 d , 两板间的电势差为 U . 同时, 在这两板间还有方向与均匀电场正交而垂直纸面向外的均匀磁场. 一束电子通过左侧带负电的板 A_1 上的小孔, 沿垂直于金属板的方向射入, 为使该电子束不碰到右侧带正电的板 A_2 , 问所加磁场的磁感应强度至少要多大? 设电子所受到的重力及从小孔进入时的初速度均可不计.

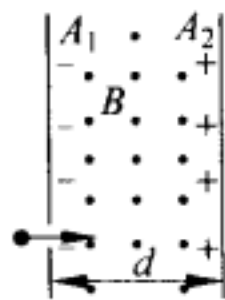


图 3-24

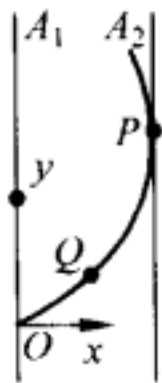


图 3-25

解析

解法 I 在电场力和磁场力的作用下, 进入两板间的电子将在由 A_1 向 A_2 运动的过程中向上偏转, 但不会离开纸平面. 考虑当磁场为某临界值时, 电子束的运动轨迹刚好与板 A_2 相切, 如图 3-25 所示, 采用图示坐标系, 对切点 P , 有

$$x_P = d, \quad (v_x)_P = 0 \quad (1)$$

而由能量关系得(这里, 磁场力不做功, 不改变电子的能量)

$$(1/2)m(v_y)_P^2 = eU \quad (2)$$

再取运动轨迹上某一点 Q , 当一个电子位于 Q 点时, 它所受到的 y 方向的力是

$$F_y = ev_x B$$

这个力提供了电子在 y 方向的加速度

$$ev_x B = ma_y \quad (3)$$

注意到(3)式对电子运动过程中各个时刻都是成立的, 它可以写成

$$eB \Delta x_i / \Delta t_i = m \Delta (v_y)_i / \Delta t_i$$

亦即

$$eB \Delta x_i = m \Delta (v_y)_i \quad (4)$$

我们把电子从 O 点到 P 点运动过程中所有小段的(4)式全部加起来

$$\sum_i (eB \Delta x_i) = \sum_i [m \Delta (v_y)_i] \quad (5)$$

由于 $\sum_i x_i = x_P - x_O = d$, $\sum_i \Delta (v_y)_i = (v_y)_P - (v_y)_O$. 而 $(v_y)_O = 0$, $(v_y)_P$ 可由(2)式求出, 所以, (5)式就变成 $eBd = m\sqrt{2eU/m}$, 即

$$B = \sqrt{2mU/(ed^2)} \quad (6)$$

这就是电子束运动轨迹与 A_2 板相切情形下, 磁感应强度的临界值. 只要所加磁场的磁感应强度大于此值, 电子就不会碰到 A_2 板.

解法 II 按题意, 电子在刚进入二板间时, 初速度为零, 我们设想: 此时电子具有沿如图 3-25 所示的 y 方向的速度 $+v$ 和 $-v$, 使 $+v$ 这个速度所引起的磁场力正好与电子在两板间所受的电场力相平衡, 即 v 的大小满足 $evB = eE = eU/d$, 或写成

$$v = U/(Bd) \quad (7)$$

(7)式表明, 这个正值是恒定的.

照此设想, 电子在其后的运动过程中将受三个力, 一个是沿 x 方向的电场力, 一个是由于电子沿 y 轴向上运动而产生的一 x 方向的磁场力, 另一个是电子向下运动产生的 x 方向的磁场力. 这第三个力所相应的加速度引起电子速度的改变, 它和原来电子向下运动的速度的合成正是一种匀速率圆周运动模式, 而电子向上运动这个分速度没有改变, 也就是说, 它所引起的磁场力和电场力始终保持平衡. 于是, 电子的运动综合起来, 可视为是一个速度为 v 的向上运动和一个速率为 v 的匀速圆周运动的合成. 对匀速圆周运动, 有

$$evB = mv^2/R \quad (8)$$

而要求电子不碰到 A_2 板, 则必须

$$R < d/2 \quad (9)$$

将(8)式和(7)式代入(9)式, $d/2 > R = mv/(eB) = mU/(eB^2d)$, 即

$$B > \sqrt{2mU/(ed^2)}$$

解法 I 中利用能量关系、磁场力不做功的性质, (5)式本是积分运算过程, 现处理为初等数学求和的方法. 解法 II 中将初速度为零的状态设想分解为 $+v$ 与 $-v$ 的合成, 而使得一个分量的磁场力与电场力合力为零, 从而简化了问题的求解过程, 各有巧妙之处. 对处理同类问题有启迪作用.

10. 在真空中建立一坐标系, 如图 3-26 所示. 以水平向右为 x 轴正方向, 竖直向下为 y 轴正方向, z 轴垂直纸面向里. 在 $0 \leq y \leq L$ 的区域内有匀强磁场, $L = 0.80\text{m}$, 磁场的磁感强度的方向沿 z 轴的正方向, 其大小 $B = 0.10\text{T}$. 今把一比荷 (即荷质比) $q/m = 50\text{C} \cdot \text{kg}^{-1}$ 的带正电质点在 $x=0, y=-0.20\text{m}, z=0$ 处静止释放, 将带电质点过原点的

时刻定为 $t=0$ 时刻, 求带电质点在磁场中任一时刻 t 的位置坐标. 并求它刚离开磁场时的位置和速度. 取重力加速度 $g=10\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

解析

解法 I 带电质点静止释放时, 受重力作用做自由落体运动, 当它到达坐标原点时, 速度为

$$v_1 = \sqrt{2g|y|} = 2.0\text{m/s} \quad (1)$$

方向竖直向下. 带电质点进入磁场后, 除受重力作用外, 还受到洛伦兹力作用, 质点速度的大小和方向都将变化, 洛伦兹力的大小和方向亦随之变化. 我们可以设想: 在带电质点到达原点时, 给质点附加上沿 x 轴正方向和负方向两个大小都是 v_0 的初速度, 由于这两个方向相反的速度的合速度为零, 因而不影响带电质点以后的运动. 在 $t=0$ 时刻, 带电质点因具有沿 x 轴正方向的初速度 v_0 而受洛伦兹力 F_1 的作用

$$F_1 = qv_0B \quad (2)$$

其方向与重力的方向相反. 适当选择 v_0 的大小, 使 F_1 等于重力, 即

$$qv_0B = mg \quad (3)$$

$$v_0 = \frac{g}{(q/m)B} = 2.0\text{m/s} \quad (4)$$

只要带电质点保持(4)式决定的 v_0 沿 x 轴正方向运动, F_1 与重力的合力永远等于零. 但此时, 位于坐标原点的带电质点还具有竖直向下的速度 v_1 和沿 x 轴负方向的速度 v_0 , 二者的合成速度大小为

$$v = \sqrt{v_0^2 + v_1^2} = 2.8\text{m/s} \quad (5)$$

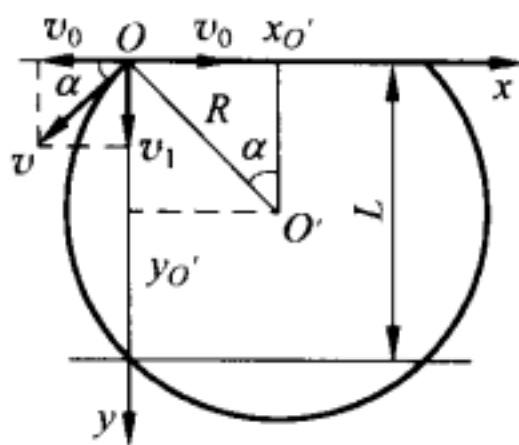


图 3-27

方向指向左下方. 设它与 x 轴的负方向的夹角为 α , 如图 3-27 所示, 则

$$\tan\alpha = \frac{v_1}{v_0} = 1$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \quad (6)$$

因而带电质点从 $t=0$ 时刻起的运动可以看作是速率为 v_0 , 沿 x 轴的正方向的匀速直线运动和在 xOy 平面内速率为 v 的匀速圆周运动的合成. 圆周半径

$$R = \frac{mv}{qB} = 0.56\text{m} \quad (7)$$

带电质点进入磁场瞬间所对应的圆周运动的圆心 O' 位于垂直于质点此时速度 v 的直线

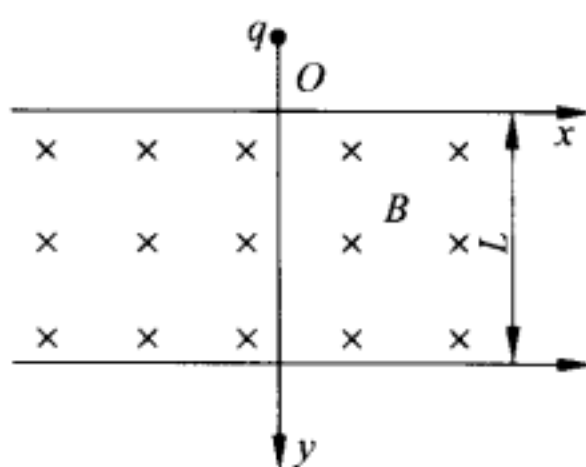


图 3-26

上,由图 3-27 可知,其坐标为

$$\left. \begin{aligned} x_G &= R\sin\alpha = 0.40\text{m} \\ y_G &= R\cos\alpha = 0.40\text{m} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

圆周运动的角速度

$$\omega = \frac{v}{R} = 5.0\text{rad/s} \quad (9)$$

由图 3-27 可知,在带电质点离开磁场区域前的任何时刻 t ,质点位置的坐标为

$$x = v_0 t - [R\sin(\omega t + \alpha) - x_G] \quad (10)$$

$$y = y_G - R\cos(\omega t + \alpha) \quad (11)$$

式中 v_0 、 R 、 ω 、 α 、 x_G 、 y_G 已分别由(4)、(7)、(9)、(6)、(8)各式给出.

带电质点到达磁场区域下边界时, $y=L=0.80\text{m}$,代入(11)式,再代入有关数值,解得

$$t = 0.31\text{s} \quad (12)$$

将(12)式代入(10)式,再代入有关数值得

$$x = 0.63\text{m} \quad (13)$$

所以带电质点离开磁场下边界时的位置的坐标为

$$x = 0.63\text{m} \quad y = 0.80\text{m} \quad z = 0 \quad (14)$$

带电质点在磁场内的运动可分解成一个速率为 v 的匀速圆周运动和一个速率为 v_0 的沿 x 轴正方向的匀速直线运动,任何时刻 t ,带电质点的速度 u 便是匀速圆周运动速度 v 与匀速直线运动速度 v_0 的合速度.若圆周运动的速度在 x 方向和 y 方向的分量为 v_x 、 v_y ,则质点合速度在 x 方向和 y 方向的分速度分别为

$$u_x = v_x + v_0 \quad (15)$$

$$u_y = v_y \quad (16)$$

虽然 $\sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v$, v 由(5)式决定,其大小是恒定不变的, v_0 由(4)式决定,也是恒定不变的,但在质点运动过程中因 v 的方向不断变化,它在 x 方向和 y 方向的分量 v_x 和 v_y 都随时间变化,因此 u_x 和 u_y 也随时间变化,取决于所考察时刻质点做圆周运动速度的方向.由于圆周运动的圆心的 y 坐标恰为磁场区域宽度的一半,由对称性可知,带电质点离开磁场下边缘时,圆周运动的速度方向应指向右下方,与 x 轴正方向夹角 $\alpha' = \frac{\pi}{4}$,故代入数值得

$$v_x = v\cos\alpha' = 2.0\text{m/s}$$

$$v_y = v\sin\alpha' = 2.0\text{m/s}$$

将以上两式及(5)式代入(15)、(16)式,便得带电质点刚离开磁场区域时的速度分量,它们分别为

$$u_x = 4.0 \text{ m/s} \quad (17)$$

$$u_y = 2.0 \text{ m/s} \quad (18)$$

速度大小为

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = 4.5 \text{ m/s} \quad (19)$$

设 u 的方向与 x 轴的夹角为 β , 如图 3-28 所示, 则

$$\tan\beta = \frac{u_y}{u_x} = \frac{1}{2}$$

$$\beta = 27^\circ \quad (20)$$

解法 II 若以带电质点到达坐标原点 O 的时刻作为起始时刻 ($t=0$), 则质点的初速度为

$$v_1 = \sqrt{2g|y|} = 2.0 \text{ m/s} \quad (21)$$

方向沿 y 轴方向, 进入磁场区后, 带电质点将受到洛伦兹力作用, 洛伦兹力在 x 方向的分力取决于质点在 y 方向的分速度, 因此质点动量在 x 方向的分量的增量为

$$m\Delta v_x = qv_y B \Delta t = qB \Delta y \quad (22)$$

Δy 是带电质点在 Δt 时间内沿 y 方向的位移, 质点在磁场运动的整个过程中, 此式对每一段 Δt 时间都成立, 所以在 $t=0$ 到 $t=t$ 时间内 x 方向的动量的改变为

$$mv_x - mv_{0x} = qB(y - y_0)$$

因初始时刻 ($t=0$), 带电质点在 x 轴方向的动量 mv_{0x} 为零, 其位置在原点, $y_0=0$, 因而得

$$mv_x = qyB$$

即

$$v_x = \frac{qB}{m}y \quad (23)$$

当带电质点具有 x 方向的分速度后, 便立即受到沿 y 负方向的洛伦兹力的作用. 根据牛顿第二定律, 在 y 方向上有加速度 a_y

$$ma_y = mg - qv_x B \quad (24)$$

将(23)式代入(24)式, 得

$$ma_y = - \left[\frac{(qB)^2}{m} \right] \left(y - \frac{m^2}{q^2 B^2} g \right) \quad (25)$$

令

$$y' = y - D \quad (26)$$

式中

$$D = \frac{m^2 g}{(qB)^2} = \frac{g}{(q/m)^2 B^2} = 0.40 \text{ m} \quad (27)$$

即在 y 方向作用于带电质点的合力

$$F_y = -ky'$$

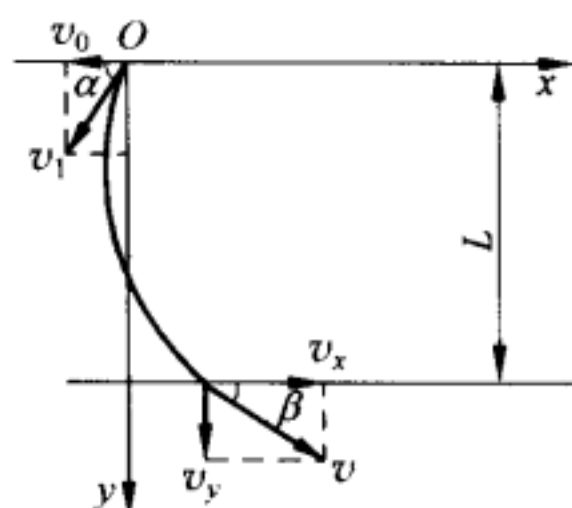


图 3-28

其中

$$k = \frac{q^2 B^2}{m}$$

F_y 是准弹性力, 在 F_y 作用下, 带电质点在 y' 方向的运动是简谐振动, 振动的频率

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{qB}{m}\right)^2} = 5.0 \text{ rad/s} \quad (28)$$

y' 随时间变化的规律为

$$y' = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (29)$$

或

$$y = A \cos(\omega t + \varphi_0) + D \quad (30)$$

A 与 φ_0 是待求的常量. 质点的简谐振动可以用参考圆来描写, 以所考察的简谐振动的振幅 A 为半径作一圆, 过圆心 O_1 作一直角坐标 $x'O_1y'$. 若有一质点 M 沿此圆周做匀速率圆周运动, 运动的角速度等于所考察简谐振动的角频率 ω , 且按逆时针方向转动, 在 $t=0$ 时刻, M 点在圆周上的位置恰使连线 O_1M 与 y' 轴的夹角等于 (29) 式中的常量 φ_0 , 则在任意时刻 t , O_1 与 M 的连线与 y' 轴的夹角等于 $\omega t + \varphi_0$, 于是连线 O_1M 在 y' 轴上的投影即为 (29) 式所示的简谐振动. 将 x' 轴平行下移 $D=0.40\text{m}$, 连线 O_1M 在 y 轴的投影如 (30) 式所示 (参看图 3-29). M 点做圆周运动的速度大小 $v=A\omega$, 方向与 O_1M 垂直, 速度 v 的 y 分量就是带电质点沿 y 轴做简谐振动的速度, 即

$$v_y = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (31)$$

(30) 和 (31) 两式中的 A 和 φ_0 可由下面的方法求得: 因为已知在 $t=0$ 时, 带电质点位于 $y=0$ 处, 速度 $v_y=v_1$, 把此条件代入 (30) 式与 (31) 式得

$$A \cos \varphi_0 + D = 0$$

$$v_1 = -A\omega \sin \varphi_0$$

解上面两式, 结合 (21)、(28) 式, 注意到振幅 A 总是正的, 故得

$$\varphi_0 = 5\pi/4 \quad (32)$$

$$A = 0.56\text{m} \quad (33)$$

把 (30) 式代入 (23) 式, 便得带电质点沿 x 轴运动的速度

$$v_x = \omega D + A\omega \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (34)$$

(34) 式表示带电质点在 x 方向上的速度是由两个速度合成的, 即沿 x 方向的匀速运动速度 ωD 和 x 方向的简谐振动速度 $A\omega \cos(\omega t + \varphi_0)$ 的合成. 带电质点沿 x 方向的匀速运动的位移

$$x' = \omega D t \quad (35)$$

由沿 x 方向的简谐振动速度 $A\omega \cos(\omega t + \varphi_0)$ 可知, 沿 x 方向振动位移的振幅等于速度的最大值与角频率的比值 (参看图 3-29), 即等于 A . 由参考圆方法可知, 沿 x 方向的振动的

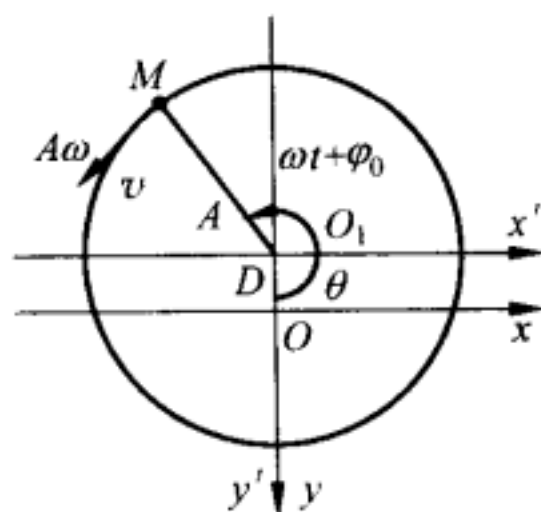


图 3-29

位移 x'' 具有如下的形式:

$$A \cos\left(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

它可能是 $x'' = A \sin(\omega t + \varphi_0)$, 亦可能是 $x'' - b = A \sin(\omega t + \varphi_0)$. 在本题中, $t=0$ 时刻, x 应
为零, 故前一表示式不符合题意; 后一表示式中, b 应取的值为 $b = -A \sin \varphi_0$. 故有

$$x'' = -A \sin \varphi_0 + A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (36)$$

带电质点在 x 方向的合位移 $x = x' + x''$, 由(35)、(36)式, 得

$$x = \omega D t - A \sin \varphi_0 + A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (37)$$

(37)、(30)、(34)和(31)式分别给出了带电质点在离开磁场区域前任何时刻 t 的位置坐标
和速度的 x 分量与 y 分量, 式中常量 ω 、 A 、 φ_0 、 D 已分别由(28)、(33)、(32)和(27)式
给出.

当带电质点到达磁场的下边界时

$$y = L = -0.80 \text{m} \quad (38)$$

将与(30)式有关的数据代入(30)式, 可解得

$$t = 0.31 \text{s} \quad (39)$$

代入(37)式, 得

$$x \approx 0.63 \text{m} \quad (40)$$

将(39)式分别代入(34)式与(31)式, 得

$$v_x = 4.0 \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \quad v_y = 2.0 \text{m/s}$$

速度大小为

$$u = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 4.5 \text{m/s} \quad (41)$$

速度方向为

$$\beta = \arctan(v_y/v_x) = 27^\circ \quad (42)$$

解法 II 通过坐标变换, 将质点在 y 方向的运动归结为简谐运动, 并通过参考圆的方法, 利用初始条件定出待定常数. 这种方法有一定的代表性, 对处理同类问题, 是可以借鉴
的一种方法.

11. 如图 3-30 所示, 半径为 R 的圆筒形真空管中有两个隔板把管内分为三个区域, 隔板上分别有位于中心的小孔 A 与 A' , 其间距离为 L . 区域 I 中有电场, 区域 II 有沿管轴方向的匀强磁场, 区域 III 中既无电场也无磁场. 由阴极 K 连续发出的电子在区域 I 中由电场加速, 穿过小孔 A 成发散电子束进入区域 II. 设各个电子穿过小孔 A 时沿管轴方向的分速度都为 v . 调节区域 II 中的磁感应强度使它等于为使在区域 III 中有穿过小孔 A' 的发散电子束所必需的最低值, 从这时

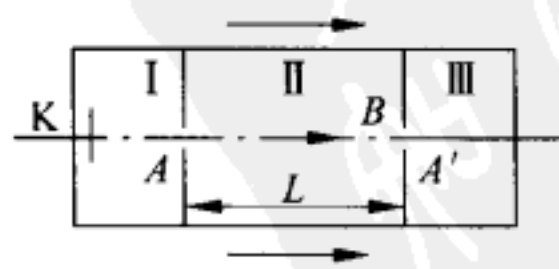


图 3-30

开始计时且保持此最低值不变,但使磁场方向做周期为 T 的周期性正、反变化,如图 3-31 所示. 设真空管中凡碰到管壁的电子均不弹回.

1) 求在区域 III 中有穿过 A' 的发散电子束时 T 的最小值 T_0 .

2) 设 $T=2T_0$,在图 3-31 的时间轴上标出区域 III 中有发散电子束的时间区间.

3) 进入区域 III 内的电子束中,电子运动方向与管轴间的夹角最大可能值为多大?

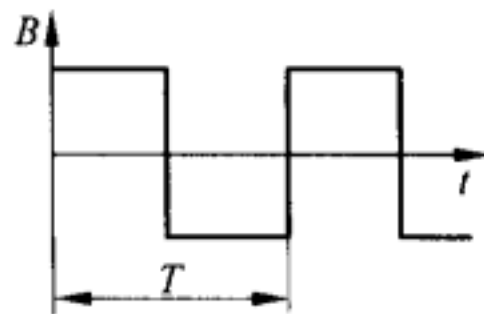


图 3-31

解析

1) 根据题设情况,经过孔 A 进入区域 II 的发散电子束中,斜入射的电子将做螺旋线运动,其运动轨迹在垂直于管轴的平面上的投影为圆,设圆运动的周期为 T' . 由题设,磁场已调整到能使这些电子达到 A' 的最低值,即在此磁场的大小和方向保持不变时,这些电子经历时间 T' 后在管轴方向恰好运动一个螺距的距离而到达 A' ,亦即

$$T' = L/v$$

如果这些电子在进入区域 II 后运动的时间尚不到 T' ,磁场方向即改变为反向,则电子将偏离原螺旋线,不能到达 A' ,不能进入区域 III. 因此要使这些电子中有能到达 A' 进入区域 III 的,必须磁场方向变化的周期 T 满足关系

$$T/2 \geq T'$$

最小值

$$T_0 = 2T' = 2L/v$$

2) 若 $T=2T_0$,则斜入射电子在磁场方向为正向的前一半时间内进入区域 II 的可以穿过 A' ,后一半时间内进入的则不能穿过. 能穿过 A' 的这些电子必须在区域 II 中经历时间 T' ,故有斜入射电子穿过 A' 的时间如图 3-32 中时间轴上非波纹线部分.

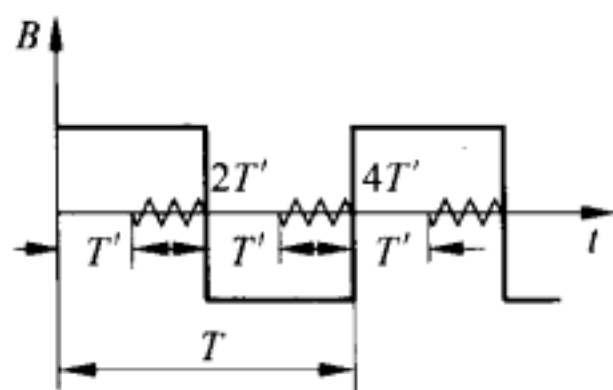


图 3-32

3) 设斜入射到区域 II 中的电子在垂直于管轴方向的分速度为 v_{\perp} ,则电子做圆周运动的圆半径 r 和圆周运动周期 T' 分别为

$$r = \frac{mv_{\perp}}{eB} \propto v_{\perp}$$

$$T' = \frac{2\pi m}{eB}$$

其轨迹在垂直于管轴的平面上的投影如图 3-33 所示. 这些电子中只有 $2r < R$ 的那些电子能在管内运动时不与管壁相碰,从而能到达 A' ,即这些电子必须满足下列条件

$$\frac{2mv_{\perp}}{eB} < R, \quad \text{即} \quad v_{\perp} < \frac{eBR}{2m}$$

利用 $T = 2\pi m / (eB) = L/v$, 可消去 B 而得

$$v_{\perp} < \frac{\pi R v}{L}$$

穿过 A' 后这些电子做直线运动, 设运动方向与管轴间夹角为 θ , 则有

$$\tan \theta = \frac{v_{\perp}}{v} < \frac{\pi R}{L}$$

即

$$\theta < \arctan \frac{\pi R}{L}$$

本题是带电粒子在磁场中运动的题目, 第2)与3)问实际是对粒子在时间与空间的要求和限制. 解本题除了要掌握磁场中电子的运动规律外, 还需要有较强的立体概念, 这就比一般的平面问题或简单的螺线运动问题增加了难度.

12. 空间有半径为 R 、长度 L 很短的圆柱形的磁场区域, 圆柱的轴线为 z 轴, 磁场中任一点的磁感应强度的方向沿以 z 轴为对称轴的圆的切线, 大小与该点离 z 轴的距离 r 成正比, 即 $B = Kr$, K 为常数, 如图 3-34 中“·”与“×”所示. 电荷量为 $q (> 0)$, 质量为 m 的一束带电粒子流如图中一簇平行箭头所示, 以很高的速度 v 沿圆柱轴线方向穿过该磁场空间, 磁场区域外的磁场的大小可视为零. 试讨论这束带电粒子流穿过磁场区域后的运动情况.

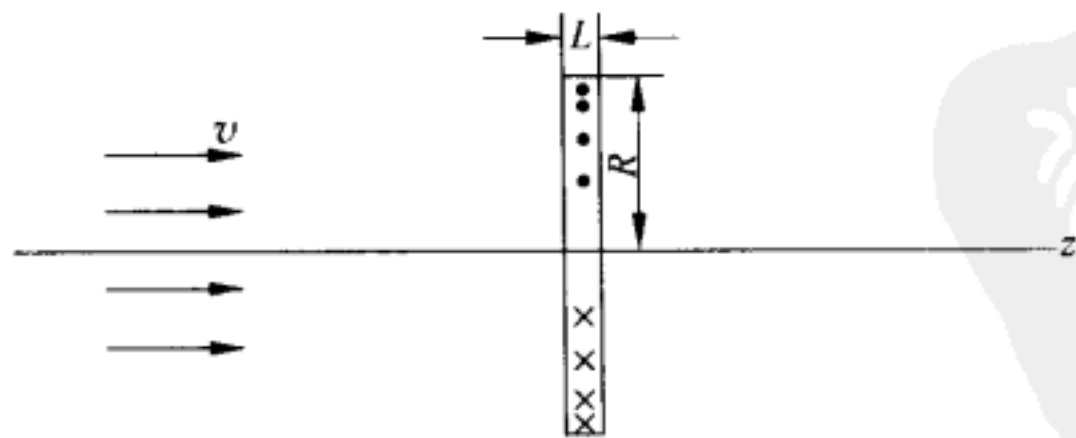


图 3-34

解析

设想沿距 z 轴为 r 的平行线运动的带电粒子进入磁场区, 带电粒子受到指向 z 轴的径向洛伦兹力 F 向轴偏转.

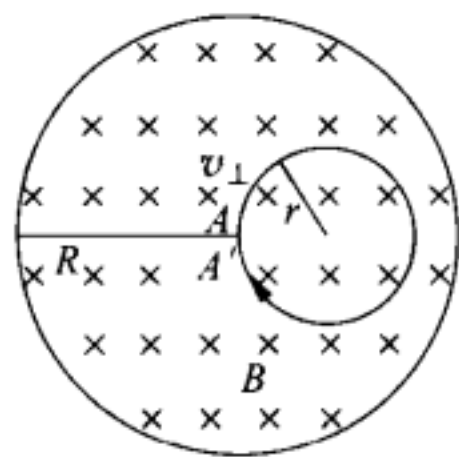


图 3-33

$$F = qvB \quad (1)$$

因粒子速度很快,粒子经过磁场区的时间 Δt 很短,

$$\Delta t = \frac{L}{v} \quad (2)$$

粒子经磁场区所受的冲量 p_r 为

$$p_r = F\Delta t = \frac{qvBL}{v} = qBL = qKLr \quad (3)$$

粒子逸出磁场区后将沿直线方向运动.运动的直线轨迹与 z 轴交于 M 点,因为粒子沿轴向运动的动量 p 经过磁场区域发生的改变可以忽略,由图 3-35 可见,

$$\frac{p}{p_r} = \frac{d}{r} \quad (4)$$

代入(3)式,得

$$d = \frac{p}{p_r} r = \frac{mv}{qKL} r \quad (5)$$

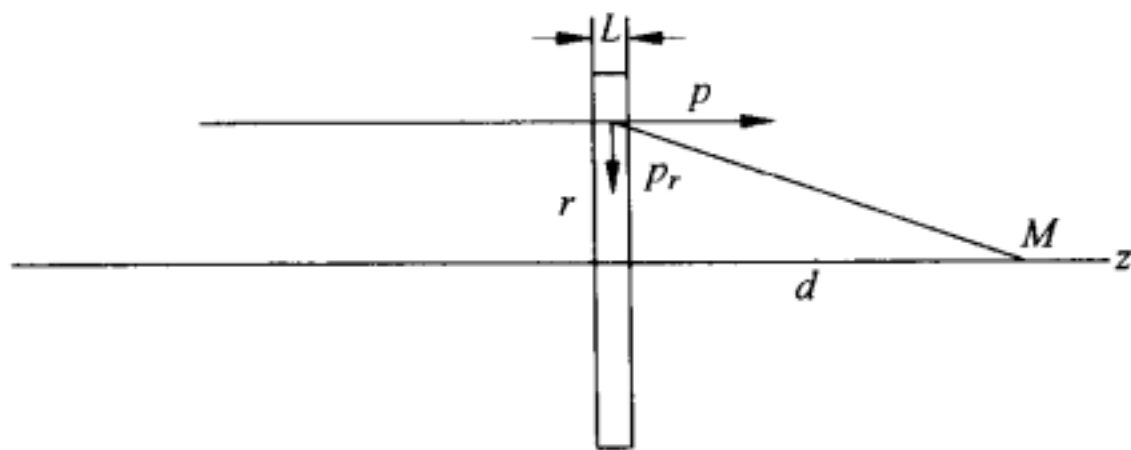


图 3-35

由(5)式可见,粒子与 z 轴交点 M 的位置与粒子距轴的距离无关,因所有粒子均以速度 v 平行于 z 轴进入磁场区,受到洛伦兹力后,都折向 M 点,但平行 z 轴的速度分量基本不改变,所以粒子束经磁场区后,均会同时会聚于 M 点.

粒子之所以能“会聚”于 M 点,是因受磁场力,且磁场仅集中于长度为 L 极薄区域的理想情况的假设.在实际情况下,这样的磁场区域是比较难实现的.

13. 围绕地球周围的磁场是两极强,中间弱的空间分布.1958年,范·阿仑通过人造卫星搜集到的资料研究了带电粒子在地球磁场空间中的运动情况后,得出了在距地面几千公里和几万公里的高空存在着电磁辐射带(范·阿仑辐射带)的结论.有人在实验室中通过实验装置,形成了如图 3-36 所示的磁场分布区域 MM ,在该区域中,磁感应强度 B 的大小沿 z 轴从左到右,由强变弱,由弱变强,对称面为 PP .已知 z 轴上 O 点磁感应强度 B 的大小为 B_0 ,两端 M 点的磁感应强度为 B_M .现有一束质量均为 m ,电荷量均为 q ,速度

大小均为 v_0 的粒子,在 O 点以与 z 轴成不同的投射角 α_0 向右半空间发射. 设磁场足够强,粒子只能在由紧邻 z 轴的磁感线围成的截面积很小的“磁力管”内运动. 试分析说明具有不同的投射角 α_0 的粒子在磁场区 MM 间的运动情况.

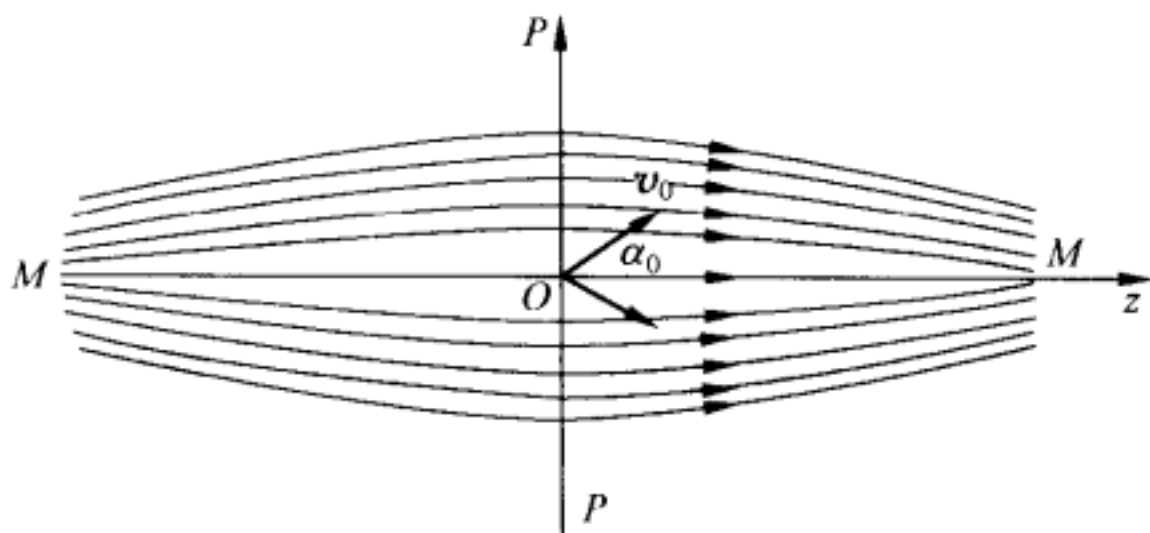


图 3-36

[提示] 理论上可证明:在细“磁力管”的管壁上粒子垂直磁场方向的速度 v_{\perp} 的平方与磁力管轴上的磁感应强度的大小 B 之比为一常量.

解析

1) 带电粒子沿 z 轴做螺旋运动时受到阻力而减速.

设粒子达到磁感应强度为 B 处的速度为 v , 其垂直和平行于磁场的方向的分速度分别为 v_{\perp} 和 v_{\parallel} . 粒子刚从 O 点射出时, 其垂直磁场方向的分速度为 $v_{0\perp} = v_0 \sin \alpha_0$, 根据提示, 粒子运动过程中, 在细“磁力管”的管壁上垂直磁场方向的速度的平方与磁力管轴上的磁场的大小 B 之比为一常量, 即

$$\frac{v_{\perp}^2}{B} = \frac{v_{0\perp}^2}{B_0} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{B_0} \quad (1)$$

因粒子还具有沿轴向的分速度, 所以粒子在磁力管中做螺旋运动, 由于洛伦兹力 F 垂直粒子的速度, 对带电粒子不做功, 因而粒子在任何点的速度的大小不变均为 v_0 . 按题设, z 轴上 O 点右侧磁场 B 逐渐变大, 因而, 粒子向右运动过程中, 垂直磁场方向的速度 v_{\perp} 随之增大. 平行于磁场方向的速度 v_{\parallel} 亦随之按下列规律变化:

$$v_{\parallel} = \sqrt{v_0^2 - v_{\perp}^2} = v_0 \sqrt{1 - \frac{B}{B_0} \sin^2 \alpha_0} \quad (2)$$

由(2)式可知, 随沿 z 轴磁场 B 的增大, 平行于磁场方向的速度 v_{\parallel} 将随之减小. 轴向速度的减小是因为粒子沿轴向右运动时受到阻力, 因磁力管壁的磁场与 z 轴不平行, 粒子在运动过程中受到的洛伦兹力 F 斜向指向 z 轴, 如图 3-37 所示. F_{\parallel} 是 F 平行于 z 轴的分量, 它成为阻碍粒子沿轴向右运动的阻力. F_{\perp} 是洛伦兹力 F 垂直于 z 轴的分量, 它为粒子做螺旋运动时提供粒子做圆周运动的向心力, 圆周半径 $r = \frac{mv_{\perp}}{qB}$, 由式(1)得

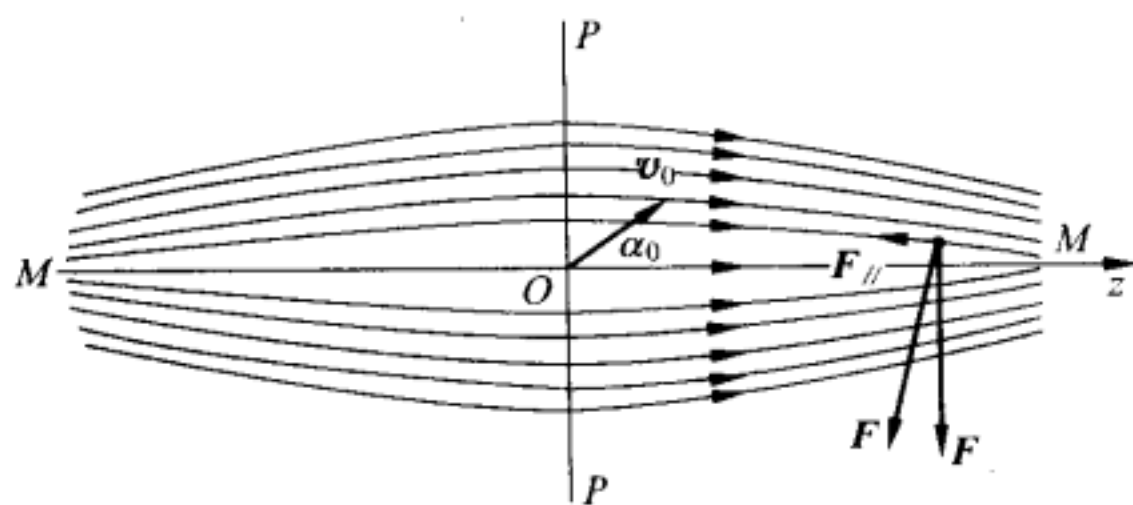


图 3-37

$$r = \frac{mv_{\perp}}{qB} = \frac{mv_0 \sin \alpha_0}{q} \sqrt{\frac{1}{BB_0}} \quad (3)$$

此式表明螺旋半径随磁场 B 的增大而减小. 结合(2)式的讨论可知, 螺旋运动的轴向速度逐渐减小, 即螺旋螺距逐渐减小. 到达 M 端时, 粒子以半径 $r_M = \frac{mv_0 \sin \alpha_0}{q} \sqrt{\frac{1}{B_M B_0}}$ 做圆周运动.

2) 临界投射角

由(2)式知, 以某个投射角 α_{0L} 发射的粒子到达 M 点时, 其平行于磁场方向的速度 $v_{M//}$ 恰等于零, $\sqrt{1 - \frac{B_M}{B_0} \sin^2 \alpha_{0L}} = 0$, 得

$$\sin \alpha_{0L} = \sqrt{\frac{B_0}{B_M}} \quad (4)$$

此式表明: 当投射角 $\alpha = \alpha_{0L}$ 时, 粒子恰好在 M 点轴向速度为零, $v_{M\perp} = v_0$, 即垂直于磁场方向的分速度最大, α_{0L} 称为临界投射角. 投射角 $\alpha < \alpha_{0L}$ 的粒子到达 M 点时, 因轴向速度尚未减至零, 这些粒子就从 M 处逸出, 离开磁场区域.

3) 投射角大于临界角的粒子的运动

当粒子在 O 点以临界角 α_{0L} 发射, 即做螺旋运动到达端点 M 时, 因轴向速度为零, 粒子在此瞬间停止向右移动, 只做圆周运动, 但因沿 z 轴磁场分布的非均匀性, 磁场大小存在变化陡度. 因而粒子在 M 点仍受到向左的作用力, 粒子即离开端点 M 向左做螺旋运动 (螺旋的方向不变). 到达 O 点时, 向左运动的沿轴向速度达到最大, 继续向左运动. 离开 O 点后, 左半程运动的情况与右半程的运动情况相仿, 到达左端点 M 时, 轴向速度亦为零, 并受到指向 O 点的洛伦兹力沿轴向的分量作用, 向右运动. 因此, 左、右端 M 点处, 犹如镜面反射一样, 粒子在邻近 z 轴的细磁力管内, 在两端面间做螺旋形往复周期运动.

投射角 $\alpha > \alpha_{0L}$ 的粒子在未到达 M 点时, 轴向速度已减至零, 这些粒子将在小于 MM 点距离间相对于对称面 PP 做周期的往复螺旋运动. 投射角 α 愈大, 往复运动的距离愈

小,当投射角 $\alpha=90^\circ$ 时,粒子不受轴向力,就在对称面 PP 上以半径 $r_0 = \frac{mv_0}{qB_0}$ 做圆周运动.

本题具有一定的实际背景,即所谓“磁约束”问题.它不仅存在于地球磁场的区域,而且在核聚变反应试验中也采用这种“瓶状”分布的磁场来约束带电粒子(即等离子体)的运动区域.试题要求学生分析带电粒子在“瓶状”磁场区域内的运动情况,这种设问方式是开放性的.回答质量的优劣,取决于学生对此问题的理解.一些学生习惯于根据传统模式去算题和答题,对略带开放性的试题往往不能抓住重点和本质,有层次、有分析地表达自己的思想,显得支离破碎和凌乱.这是需要注意的.

14. 空间分区均匀的强磁场其方向均沿着 z 轴. $y=0$ 处有一个磁场分界面,在 $y>0$ 的区域内,磁感应强度大小为 B_1 ,在 $y<0$ 的区域内,磁感应强度大小为 B_2 (如图 3-38), $B_2/B_1=4/3$. 在 $t=0$ 时刻,处于磁场分界面上的一个静止中性粒子裂变为两个带电粒子 a 和 b ,质量分别为 m 和 m' . 已知粒子 a 开始沿 y 轴方向飞去. 试问在什么条件下两个粒子以后又在分界面上相遇. 完全忽略重力作用和粒子间的静电相互作用.

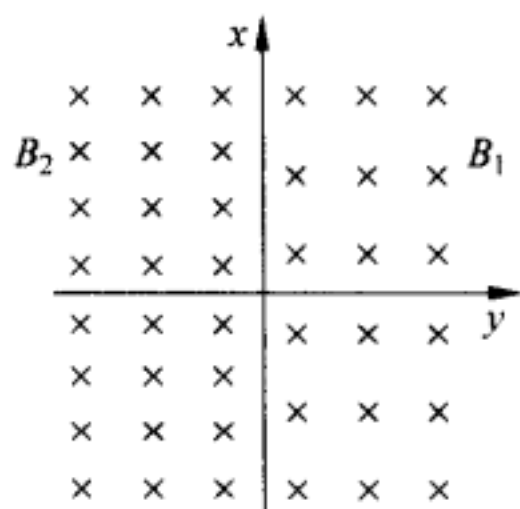


图 3-38

解析

取原中性粒子所在处为坐标原点($x=0, y=0$). 设分裂后粒子 a 的质量为 m , 速度大小为 v , 电荷为 q_a ; 粒子 b 的质量为 m' , 速度大小为 v' , 电荷为 q_b .

设粒子 a 的电荷 $q_a = q > 0$, 则由电荷守恒定律, 有

$$q_b = -q_a = -q$$

根据动量守恒定律, 有

$$mv = m'v' \quad (1)$$

粒子 b 沿 $-y$ 方向运动.

由于 a, b 所带电量符号相反, 它们在磁场中将做转动方向相反的回旋运动. 粒子 a 在 B_1 区内运动时的回旋半径 r_1 和周期 T_1 分别为

$$r_1 = mv/(qB_1), \quad T_1 = 2\pi m/(qB_1) \quad (2)$$

当 $t = t_1 = T_1/2 = \pi m/(qB_1)$ 时, a 第一次回到分界面, 其 x 坐标为

$$x_1 = d_1 = 2r_1 = 2mv/(qB_1) \quad (3)$$

然后, a 进入 B_2 区, 在 B_2 区中, a 的回旋半径 r_2 和周期 T_2 分别为

$$r_2 = mv/(qB_2) \quad (4)$$

$$T_2 = 2\pi m / (qB_2)$$

当 a 再经过时间间隔 $t_2 = T_2/2$, 即

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\pi m}{q} \left(\frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2} \right)$$

时, a 第二次回到界面. 此时其 x 坐标为

$$x_2 = 2(r_1 - r_2) = d_1 - d_2 \quad (5)$$

由于 $B_2 > B_1$, 故 $d_1 > d_2$, $x_2 > 0$, 这样回旋下去, 粒子 a 各次回到分界面的坐标和时间分别为:

$$d_1, d_1 - d_2, 2d_1 - d_2, 2(d_1 - d_2), \dots \quad (6)$$

$$t_1, t_1 + t_2, 2t_1 + t_2, 2(t_1 + t_2), \dots \quad (7)$$

写成普遍的形式, 则 a 的坐标和时间分别为

$$x_a = d_1 + k(d_1 - d_2) = (k+1)d_1 - kd_2 \quad \text{或} \quad (k+1)(d_1 - d_2) \quad (8)$$

$$t_a = (k+1)t_1 + kt_2 \quad \text{或} \quad (k+1)(t_1 + t_2) \quad (9)$$

其中 $k=0, 1, 2, \dots$.

对粒子 b 可作类似的讨论. 由于 $m'v' = mv$, 粒子 b 在 B_1 区和 B_2 区的回旋半径与粒子 a 一样, 即 $r'_1 = r_1, r'_2 = r_2$, 但回旋周期不同, b 在 B_2 区和 B_1 区的回旋半周期分别为

$$t'_2 = \pi m' / (qB_2) \quad \text{和} \quad t'_1 = \pi m' / (qB_1) \quad (10)$$

粒子 b 各次回到分界面的坐标和时间分别为

$$x_b = d_2 + k'(d_2 - d_1) = (k'+1)d_2 - k'd_1 \quad \text{或} \quad (k'+1)(d_2 - d_1) \quad (11)$$

$$t_b = (k'+1)t'_2 + k't'_1 \quad \text{或} \quad (k'+1)(t'_2 + t'_1) \quad (12)$$

其中 $k'=0, 1, 2, \dots$.

按题目要求, 粒子 a、b 在分界面处相遇, 则 x_a, x_b, t_a, t_b 必须满足 $x_a = x_b, t_a = t_b$. 由于 x_a 总是正的, 而 $(k'+1)(d_2 - d_1) < 0$, 故考虑二者相遇时, 可排除 $(k'+1)(d_2 - d_1) < 0$ 的情形, 而只研究下面两种情形:

$$(k+1)d_1 - kd_2 = (k'+1)d_2 - k'd_1 \quad (13)$$

$$(k+1)t_1 + t_2 = (k'+1)t'_2 + k't'_1 \quad (14)$$

和 $(k+1)(d_1 - d_2) = (k'+1)d_2 - k'd_1 \quad (15)$

$$(k+1)(t_1 + t_2) = (k'+1)t'_2 + k't'_1 \quad (16)$$

对于第一种情况, 由坐标方程解出 $k+k' = -1$.

因 k 和 k' 都为非负整数, 所以这种情况也不可能出现, 对于第二种情况, 由坐标方程解出

$$d_1/d_2 = (k+k'+2)/(k+k'+1) \quad (17)$$

由于 $d_1/d_2 = r_1/r_2 = B_2/B_1$, 得

$$B_2/B_1 = (k+k'+2)/(k+k'+1) \quad (k, k' = 0, 1, 2, \dots) \quad (18)$$

这是 a、b 在分界面上通过同一点的情况下 B_1 和 B_2 的数值必须满足的关系. 若要 a、b 相遇, 则还必须满足 $t_a = t_b$.

将 $t_1 = \pi m / (qB_1)$, $t_2 = \pi m / (qB_2)$, $t'_1 = \pi m' / (qB_1)$, $t'_2 = \pi m' / (qB_2)$ 代入(16)式, 即可解出 m 和 m' 必须满足的关系式

$$\frac{m'}{m} = \frac{(k+1)(B_2/B_1 + 1)}{k' + 1 + k'B_2/B_1} = \frac{2k^2 + 2kk' + 5k + 2k' + 3}{2k'^2 + 2kk' + k + 4k' + 1} \quad (19)$$

其中 $k, k' = 0, 1, 2, \dots$ 如果令 $k + k' + 1 = n$, 则有

$$B_2/B_1 = (n+1)/n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (20)$$

$$\frac{m'}{m} = \frac{(2n+1)(k+1)}{2n(n+1) - (2n+1)(k+1)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)) \quad (21)$$

这是 a、b 在分界面相遇必须满足的两个条件.

在本题中, $B_2/B_1 = 4/3$, 故 $n=3$. 若 a、b 在分界面上相遇, 则它们的质量比必须为

$$m'/m = 7/17, 7/5, 7 \quad (22)$$

对应于上式中 $k=0, 1, 2$. 在这三种情况下二者可以在分界面相遇, 而且只有这三种情况.

本题是关于电磁漂移运动的问题. 带电粒子射入磁场中时, 如果磁场是不均匀的, 则一般说来, 粒子除了回旋运动外, 还有漂移运动. 本题把非均匀磁场简化为每半边都是均匀磁场但两边的磁感应强度不同.

若把带电粒子 a、b 在磁场中运动的轨迹画出来, 则如

图 3-39 所示. 图中相遇点 1 对应于 $k=0, k'=2$. 即 $\frac{m'}{m} = \frac{7}{17}$.

这时由(15)式可知, a 粒子先在 B_1 区向上回旋到 4 处, 然后在 B_2 区向下回旋到 1 处. b 粒子先在 B_2 区向上回旋到 3 处, 再在 B_1 区向下回旋到 -1 处, 再在 B_2 区向上回旋到 2 处, 再在 B_1 区向下回旋到 -2 处, 再在 B_2 区向上回旋到 1 处, 与 a 相遇. 图中相遇点 2 对应 $k=1, k'=1$. 即 $\frac{m'}{m} = \frac{7}{5}$. 这

时由(15)式可知, a 先在 B_1 区运动到 4, 再在 B_2 区运动到 1, 再在 B_1 区运动到 5, 再在 B_2 区运动到 2. 而 b 只在 B_2 区运动到 3, 再在 B_1 区运动到 -1, 再在 B_2 区运动到 2, 与 a

相遇. 图中相遇点 3 对应 $k=2, k'=0$, 即 $\frac{m'}{m} = 7$. 这时 a 先到 4, 再到 1, 再到 5, 再到 2, 再到 6, 再到 3. 而 b 则由 0 处开始在 B_2 区中向上回旋到 3 与 a 相遇.

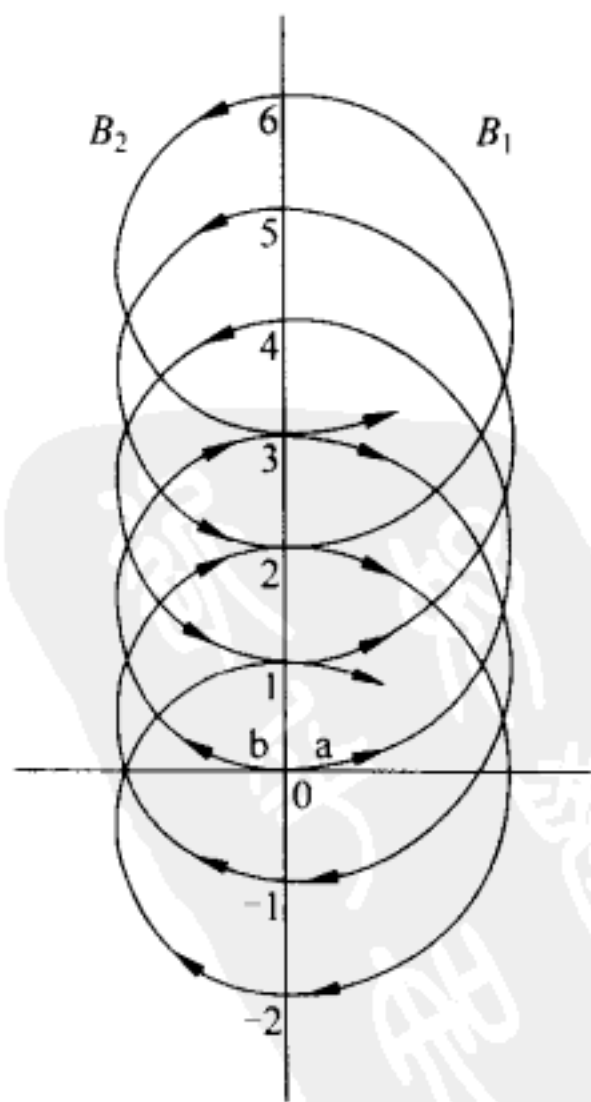


图 3-39

15. 如图 3-40 所示, y 轴右边存在磁感应强度为 $2B_0$ 的匀强磁场, y 轴左边存在磁感应强度为 B_0 的匀强磁场, 它们的方向皆垂直于纸面向里. 在原点 O 处, 一个带正电的电荷量为 q 、质量为 m 的粒子 a , 在 $t=0$ 时以大小为 $2v_0$ 的初速度沿 x 轴方向运动. 在粒子 a 开始运动后, 另一质量和电荷量都与 a 相同的粒子 b 从原点 O 以大小为 v_0 的初速度沿负 x 轴方向开始运动. 要想使 a 和 b 能在运动过程中相遇, 试分析和计算它们出发的时间差的最小值应为多大, 并求出与此对应的相遇地点的坐标. 设整个磁场区域都处于真空中, 且不考虑重力及 a 、 b 两粒子之间的相互作用力.

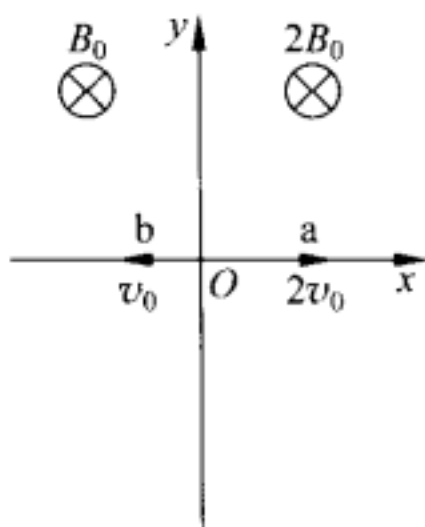


图 3-40

解析

带电荷量为 q 、质量为 m 、初速度为 v 的粒子, 当它在磁感应强度为 B 的匀强磁场中运动时, 如果其初速度的方向与磁场方向垂直, 由洛伦兹力和牛顿定律可知, 它将在磁场中做匀速圆周运动. 令 T 和 R 分别表示其周期和轨道半径, 则有

$$qvB = m \frac{v^2}{R} = mR \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \quad (1)$$

由此求得

$$T = \frac{2\pi m}{qB} \quad (2)$$

$$R = \frac{mv}{qB} \quad (3)$$

把这些结论用到本题中, 可知 a 粒子开始在第一象限中运动 (y 轴以右)

$$T_{ar} = \frac{2\pi m}{q(2B_0)} = \frac{\pi m}{qB_0} \quad (4)$$

$$R_{ar} = \frac{m(2v_0)}{q(2B_0)} = \frac{mv_0}{qB_0} \quad (5)$$

经半个周期 (即 $\frac{1}{2}T_{ar}$) 后, 进入第二、三象限中 (y 轴以左), 周期和轨道半径变为

$$T_{al} = \frac{2\pi m}{qB_0} \quad (6)$$

$$R_{al} = \frac{2mv_0}{qB_0} \quad (7)$$

以后就按此模式在 xy 平面内沿图 3-41 中的虚线运动.

同理, 粒子 b 开始在第三象限 (y 轴以左) 中运动

$$T_{bl} = \frac{2\pi m}{qB_0} \quad (8)$$

$$R_{bl} = \frac{mv_0}{qB_0} \quad (9)$$

经半个周期(即 $\frac{1}{2}T_{bl}$)后,进入第四象限(y 轴以右)运动,周期和轨道半径变为

$$T_{br} = \frac{\pi m}{qB_0} \quad (10)$$

$$R_{br} = \frac{mv_0}{2qB_0} \quad (11)$$

以后就按此模式在 xy 平面内沿图3-41的中实线运动.由以上分析可知,只要在右边,不管 a 还是 b ,周期皆为 $T_0 = \pi m/qB_0$;只要在左边,周期皆为 $2T_0$.

由图3-41可见,只有在两轨迹交叉或相切的那些点,才有相遇的可能性.为求得题中所说的时间差的最小值,下面我们先假设,如果 a 、 b 同时开始运动,分析经过哪个交叉或相切点时两者的时间差最短,则这个时间差就应当等于题中所说的要 a 、 b 在此交叉或相切点能相遇时,两者出发时间的的时间差.为此,结合图3-41分别考查 a 、 b 的运动,经过分析就可看出,在 $5T_0$ 到 $5.25T_0$ 之间的那个交叉点(图3-41中的 P 点)处, a 、 b 通过它的时间差最短(在 $5T_0$ 以前和 $5.25T_0$ 以后的那些交叉或相切点, a 、 b 通过时的时间差都较长).

为了定量地求出此时间差,取负 y 轴上距原点 O 为 $3R_{al}$ (即 $6R_{bl}$)处为新的原点 O' ,如图3-42所示.取时间 $t=5T_0$ 为新的起始计时时刻,对 a 用 $t'=0$ 表示,对 b 用 $t''=0$ 表示.在 y 轴以左 a 、 b 的周期相同,所以角速度亦相同,以 ω_1 表示 a 、 b 在 y 轴以左的角速度

$$\omega_1 = \frac{\pi}{T_0} \quad (12)$$

对 a

$$x'_a = R_{al} \cos\left(\omega_1 t' + \frac{\pi}{2}\right) \quad (13)$$

$$y'_a = R_{al} \sin\left(\omega_1 t' + \frac{\pi}{2}\right) \quad (14)$$

对 b

$$x'_b = \frac{R_{al}}{2} \cos(\omega_1 t'' + \pi) \quad (15)$$

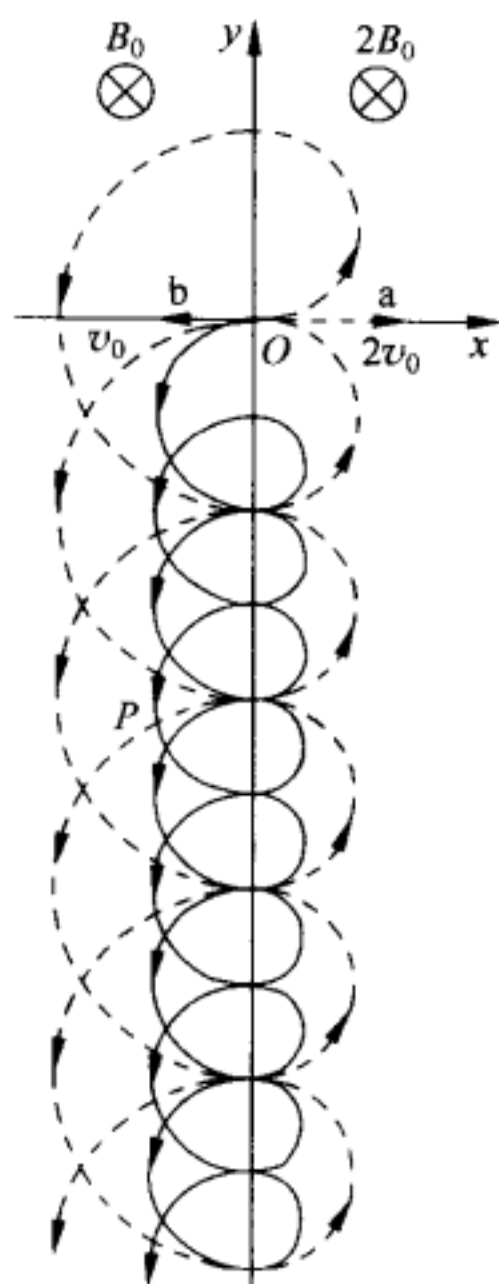


图 3-41

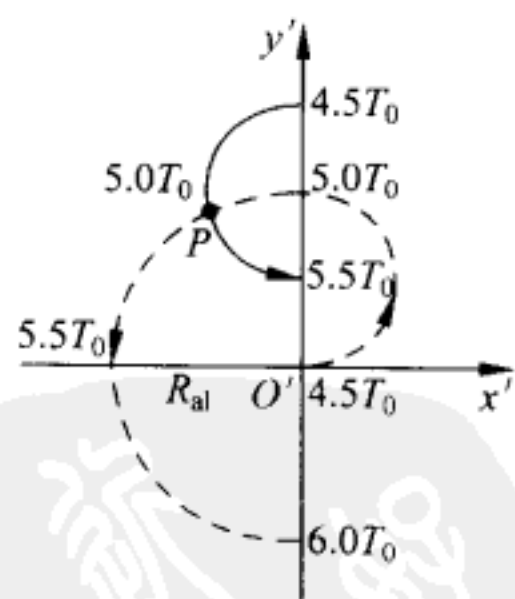


图 3-42

$$y'_b = R_{a1} + \frac{R_{a1}}{2} \sin(\omega_1 t'' + \pi) \quad (16)$$

对 P 点应有

$$x'_a = x'_b \quad y'_a = y'_b \quad (17)$$

由以上各式可解得所求的时间差应为

$$\Delta t = t' - t'' = 0.0802 \frac{\pi m}{qB_0} \quad (18)$$

这个结果说明,如果 a 、 b 同时出发,则 a 比 b 晚 $0.0802\pi m/qB_0$ 时间通过 P 点. 换成题目的要求,就应当说,要 a 、 b 相遇,则 b 的出发时间应比 a 晚 $0.0802\pi m/qB_0$.

由以上各式还可求得 O 点的坐标

$$x'_P = -\frac{\sqrt{15}}{8} R_{a1} = -0.484 R_{a1} = -0.968 \frac{mv_0}{qB_0} \quad (19)$$

$$y'_P = \frac{7}{8} R_{a1} = 0.875 R_{a1} = 1.75 \frac{mv_0}{qB_0} \quad (20)$$

换为 Oxy 坐标系

$$x_P = -0.968 \frac{mv_0}{qB_0} \quad (21)$$

$$y_P = -3R_{a1} + \frac{7}{8} R_{a1} = -2.125 R_{a1} = -4.25 \frac{mv_0}{qB_0} \quad (22)$$

解题时要注意:两个带电粒子的轨迹可以在 y 轴上有很多共同的相切点,在 y 轴左侧又有很多相交点.但是若是在 O 点同时按各自轨迹运动,到达这些轨迹相交点的时间各不相同,因此需要找出它们过同一轨迹相交点时的时间差,控制它们出发时刻,就可以实现题目的要求.

16. 如图 3-43 所示,在半径为 R 的圆形平面内,分布有匀强磁场,磁场方向与圆面垂直且指向纸面外,圆面的周界是一刚性的固定的圆环, SD 是圆环的一条直径.一束质量和电荷量都相等的带正电的粒子以不同的速度沿垂直于磁场的方向从 S 点射入磁场,速度方向与 SD 的夹角不超过 30° . 已知这种粒子在该磁场中做圆周运动时的周期为 T . 在 D 点,圆环上有一小孔,只要粒子到达 D 点,该粒子便从小孔穿出磁场区域. 设粒子与圆环的碰撞都是完全弹性的,每次碰撞后,粒子的电量不变,不考虑粒子间的相互作用与相互碰撞以及重力的影响. 求满足以下条件的那些粒子在射入磁场时的速度的大小和方向: 在磁场内运动的总时间为 T 且与圆环的碰撞不超过 6 次,其中最后一次“碰撞”是指正好到

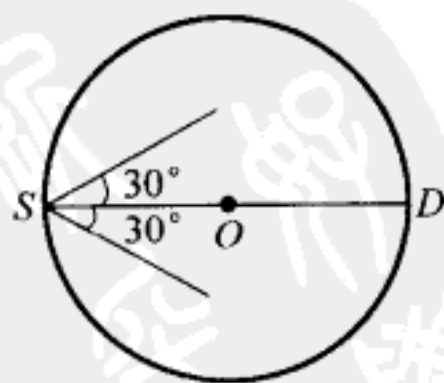


图 3-43

达D点.

解析

设粒子的质量为 m , 电荷为 q , 磁场的磁感应强度为 B . 速度大小为 v 的粒子进入磁场后, 因受洛伦兹力作用而做圆周运动, 轨道的半径 r 为

$$r = \frac{mv}{qB} \quad (1)$$

圆周运动的周期 T 为

$$T = \frac{2\pi m}{qB} \quad (2)$$

不同速度的粒子, 其圆周运动的轨道半径不同, 但周期是相等的. 先考察速度方向在 SD 下侧的粒子, 其速度方向与 SD 的夹角为 i , 速度大小为 v , 从 S 点进入磁场后, 因受磁场区域的限制, 它在磁场中的轨迹仅是圆周的一段圆弧, 在与圆环碰撞后, 速度方向改变, 沿同样长的一段圆弧运动后, 再与圆环碰撞. 设每一段圆弧与圆环的两交点与圆环中心 O 的连线间的夹角 $\angle SOP = 2\alpha$, 该圆弧对其圆心所张的圆心角 $\angle SO'P = 2\beta$, 如图 3-44 所示. 由几何关系可知

$$i = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \quad (3)$$

即 α 和 β 的大小与粒子射入磁场时速度的方向有关. 若粒子从射入磁场至最后达到圆环上的 D 点的过程中, 与圆环碰撞 n 次 (包括达到 D 点那一次), 则它在磁场中运动的轨迹为 n 段圆弧. 每段弧的两端与圆环中心 O 的连线的夹角的总和为 $2n\alpha$. 按题意有

$$2n\alpha = (2k+1)\pi \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

$k=0$ 表示粒子绕圆环中心半周便“碰撞” D 点, $k=1$ 表示粒子绕圆环中心一周半后“碰撞” D 点. 由此式得

$$\alpha = \frac{(2k+1)}{2n}\pi \quad (4)$$

因为粒子在磁场中运动的时间为 T , 故 n 段圆弧对其圆心所张的圆心角的总和为

$$2n\beta = 2\pi$$

即

$$\beta = \frac{\pi}{n} \quad (5)$$

把(4)、(5)两式代入(3)式, 得

$$i = \frac{n-2k-3}{2n}\pi \quad (6)$$

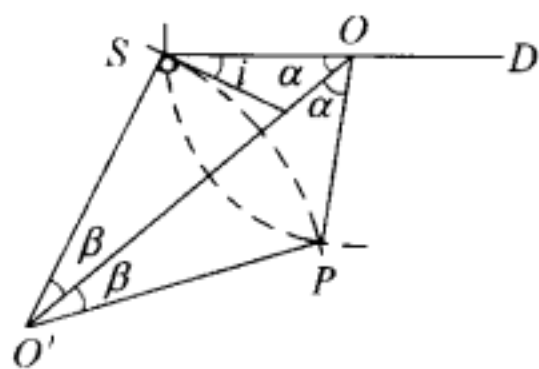


图 3-44

因 i 在 0° 到 30° 之间, 故有

$$0 \leq \frac{n-2k-3}{2n}\pi \leq \frac{\pi}{6}$$

即有

$$(2k+3) \leq n \leq \frac{3}{2}(2k+3) \quad (7)$$

式中 n 是 1 至 6 的整数, k 为大于等于零的整数. 满足(7)式的 k 值和 n 值以及对应的 α 、 β 和 i 的值为

$$\left. \begin{array}{l} k=0 \quad n=3 \quad \alpha = \frac{\pi}{6} \quad \beta = \frac{\pi}{3} \quad i=0 \\ k=0 \quad n=4 \quad \alpha = \frac{\pi}{8} \quad \beta = \frac{\pi}{4} \quad i = \frac{\pi}{8} \\ k=1 \quad n=5 \quad \alpha = \frac{3}{10}\pi \quad \beta = \frac{\pi}{5} \quad i=0 \\ k=1 \quad n=6 \quad \alpha = \frac{\pi}{4} \quad \beta = \frac{\pi}{6} \quad i = \frac{\pi}{12} \end{array} \right\} \quad (8)$$

上面的第四种情况即 $k=1$ 、 $n=6$, 粒子运动轨道的圆弧的两端与圆环中心的连线间的夹角 $2\alpha = \frac{\pi}{2}$, 该粒子从 S 进入磁场, 第一次与圆弧的碰撞点正好在半圆环的中点, 第二次碰撞点正好在 D 点. 它在磁场中运动的时间尚未达到 T 便离开磁场, 故这种粒子不符合本题要求.

再考虑速度方向在 SD 上侧的粒子, 其速度的大小为 v , 方向与 SD 的夹角为 i , 从进入磁场到第一次与圆环碰撞的运动轨迹如图 3-45 所示, 由几何关系可得

$$i = (\alpha + \beta) - \frac{\pi}{2} \quad (9)$$

α 仍由(4)式给出, β 仍由(5)式给出. 把(4)式和(5)式代入(9)式得

$$i = \frac{2k+3-n}{2n}\pi \quad (10)$$

因 i 在 0 到 $\frac{\pi}{6}$ 之间, 故有

$$0 \leq \frac{2k+3-n}{2n}\pi \leq \frac{\pi}{6}$$

即有

$$\frac{3}{4}(2k+3) \leq n \leq (2k+3) \quad (11)$$

满足上式的 k 值、 n 值以及对应的 α 、 β 和 i 的值为

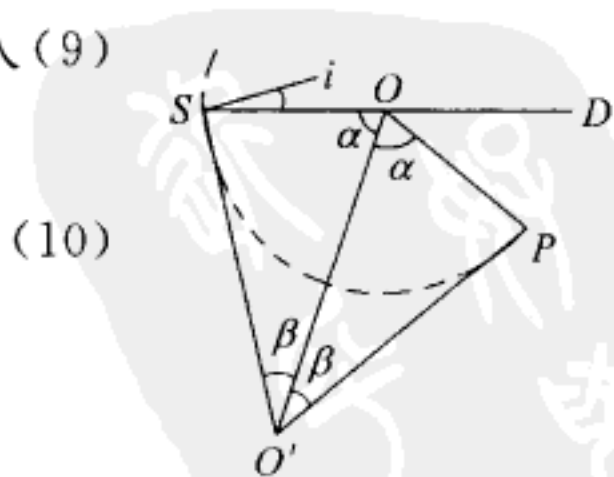


图 3-45

$$\left. \begin{aligned} k=0 \quad n=3 \quad \alpha &= \frac{\pi}{6} \quad \beta = \frac{\pi}{3} \quad i=0 \\ k=1 \quad n=4 \quad \alpha &= \frac{3}{8}\pi \quad \beta = \frac{\pi}{4} \quad i = \frac{\pi}{8} \\ k=1 \quad n=5 \quad \alpha &= \frac{3}{10}\pi \quad \beta = \frac{\pi}{5} \quad i=0 \\ k=2 \quad n=6 \quad \alpha &= \frac{5}{12}\pi \quad \beta = \frac{\pi}{6} \quad i = \frac{\pi}{12} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

粒子做圆周运动的轨道半径 r 与粒子的速度 v 有关, 而 r 与圆环半径 R 以及 α 和 β 的关系可由正弦定理给出, 即

$$\frac{\sin\alpha}{r} = \frac{\sin\beta}{R} \quad (13)$$

由(1)式和(13)式以及(2)式得

$$v = \frac{2\pi R}{T} \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \quad (14)$$

v 的大小仅取决于 α 和 β 的值, 与 i 无关. 结合(8)式与(12)式所得的结果, 符合题意的 α 和 β 的值有 5 组, 即符合本题要求的粒子速度的大小有 5 种, 这 5 组 α 、 β 和 i 的值分别为

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\pi}{6} \quad \beta_1 = \frac{\pi}{3} \quad i_1 = 0 \quad (n=3) \\ \alpha_2 &= \frac{\pi}{8} \quad \beta_2 = \frac{\pi}{4} \quad i_2 = \frac{\pi}{8} \quad (n=4) \\ \alpha_3 &= \frac{3}{10}\pi \quad \beta_3 = \frac{\pi}{5} \quad i_3 = 0 \quad (n=5) \\ \alpha_4 &= \frac{3}{8}\pi \quad \beta_4 = \frac{\pi}{4} \quad i_4 = -\frac{\pi}{8} \quad (n=4) \\ \alpha_5 &= \frac{5}{12}\pi \quad \beta_5 = \frac{\pi}{6} \quad i_5 = -\frac{\pi}{12} \quad (n=6) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

由(14)式, 可求得各速度的大小

$$v_1 = \frac{2\pi R}{T} \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi R}{T} \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (i_1 = 0)$$

$$v_2 = \frac{2\pi R}{T} \frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{2\pi R}{T} \sqrt{2} \sin\frac{\pi}{8} \quad \left(i_2 = \frac{\pi}{8}\right)$$

$$v_3 = \frac{2\pi R}{T} \frac{\sin \frac{3\pi}{10}}{\sin \frac{\pi}{5}} \quad (i_3 = 0)$$

$$v_4 = \frac{2\pi R}{T} \frac{\sin \frac{3\pi}{8}}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{2\pi R}{T} \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{8} \quad \left(i_4 = -\frac{\pi}{8}\right)$$

$$v_5 = \frac{2\pi R}{T} \frac{\sin \frac{5\pi}{12}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{4\pi R}{T} \sin \frac{5\pi}{12} \quad \left(i_5 = -\frac{\pi}{12}\right)$$

i 为负值表示速度的方向在 SD 的上侧.

由于在均匀磁场中,运动的带电粒子所做圆周运动的周期均相等,又由于粒子与环壁做完全弹性碰撞,只改变粒子速度的方向不改变粒子速度的数值,因而粒子在磁场中的运动轨迹是相等圆心角的圆弧,若将其全过程的运动轨迹画出,是一幅美丽的对称图形.解此题时,按题意选出一个或几个粒子并不困难,关键是能有序地、不多亦不少地选出所有粒子.例如既要求出从 SD 下侧射出、小于 30° 的带电粒子,又不要漏掉从 SD 上侧射出、小于 30° 的带电粒子.还要注意剔除那些未到达一个周期时间就早早从小孔 D 逸出的那些粒子.解答中提供用列表方法选出符合要求的所有粒子.同学在思考问题时,减少盲目性,培养严谨、有条理的思维、分析归纳的习惯是很重要的.

17. 如图 3-46 所示,在半径为 a 的圆柱空间中(图中圆为其横截面)充满磁感应强度大小为 B 的均匀磁场,其方向平行于轴线远离读者.在圆柱空间中垂直轴线平面内固定放置一绝缘材料制成的边长为 $L=1.6a$ 的刚性等边三角形框架 $\triangle DEF$,其中心 O 位于圆柱的轴线上. DE 边上 S 点 ($\overline{DS} = \frac{1}{4}L$) 处有一发射带电粒子的源,发射粒子的方向皆在图 3-46 中截面内且垂直于 DE 边向下.发射粒子的电荷量皆为 $q(>0)$,质量皆为 m ,但速度 v 有各种不同的数值.若这些粒子与三角形框架的碰撞均为完全弹性碰撞,并要求每一次碰撞时速度方向垂直于被碰的边.试问:

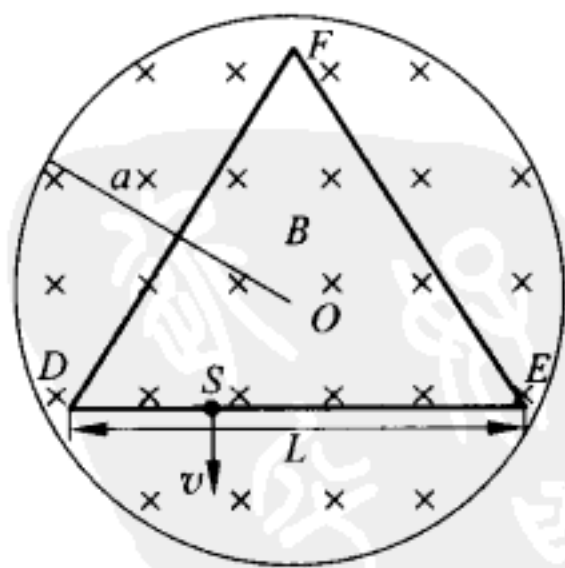


图 3-46

- 1) 带电粒子速度 v 的大小取哪些数值时可使 S 点发出的粒子最终又回到 S 点?
- 2) 这些粒子中,回到 S 点所用的最短时间是多少?

解析

带电粒子(以下简称粒子)从 S 点垂直于 DE 边以速度 v 射出后,在洛伦兹力作用下做匀速圆周运动,其圆心一定位于 DE 边上,其半径 R 可由下式

$$qvB = \frac{mv^2}{R}$$

求得,为

$$R = \frac{mv}{qB} \quad (1)$$

1) 此粒子每次与 $\triangle DEF$ 的三条边碰撞时都与边垂直,且能回到 S 点,则 R 和 v 应满足以下条件:

(i) 与边垂直的条件

由于碰撞时速度 v 与边垂直,粒子运动轨迹圆的圆心一定位于三角形的边上,粒子绕过三角形顶点 D 、 E 、 F 时的圆弧的圆心就一定在相邻边的交点(即 D 、 E 、 F)上. 粒子从 S 点开始向右做圆周运动,其轨迹为一系列半径为 R 的半圆,在 \overline{SE} 边上最后一次的碰撞点与 E 点的距离应为 R ,所以 \overline{SE} 的长度应是 R 的奇数倍. 粒子从 FD 边绕过 D 点转回到 S 点时,情况类似,即 \overline{DS} 的长度也应是轨道半径的奇数倍. 取 $\overline{DS} = R_1$, 则当 \overline{DS} 的长度被奇数除所得的 R 也满足要求,即

$$R = R_n = \frac{\overline{DS}}{(2n-1)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

因此为使粒子与三角形各边发生垂直碰撞, R 必须满足下面的条件:

$$R = R_n = \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{L}{4} = \frac{2a}{5(2n-1)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2)$$

此时

$$\overline{SE} = 3\overline{DS} = (6n-3)R_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

\overline{SE} 为 R_n 的奇数倍的条件自然满足. 只要粒子绕过 E 点与 EF 边相碰,由对称关系可知,以后的碰撞都能与三角形的边垂直.

(ii) 粒子能绕过顶点与三角形的边相碰的条件

由于磁场局限于半径为 a 的圆柱范围内,如果粒子在绕 E 点运动时圆轨迹与磁场边界相交,它将在相交点处以此时的速度方向沿直线运动而不能返回. 所以粒子做圆周运动的半径 R 不能太大,由图 3-47 可见,必须 $R \leq \overline{DM}$ (三角形的顶点沿圆柱半径到磁场边界的距离, $R = \overline{DM}$ 时,粒子圆周运动轨迹与圆柱磁场边界相切),由给定的数据可算得

$$\overline{DM} = a - \frac{8\sqrt{3}}{15}a \approx 0.076a \quad (3)$$

将 $n = 1, 2, 3, \dots$ 分别代入(2)式,得

$$n = 1, \quad R_1 = \frac{2a}{5} = 0.400a$$

$$n = 2, \quad R_2 = \frac{2a}{15} = 0.133a$$

$$n = 3, \quad R_3 = \frac{2a}{25} = 0.080a$$

$$n = 4, \quad R_4 = \frac{2a}{35} = 0.057a$$

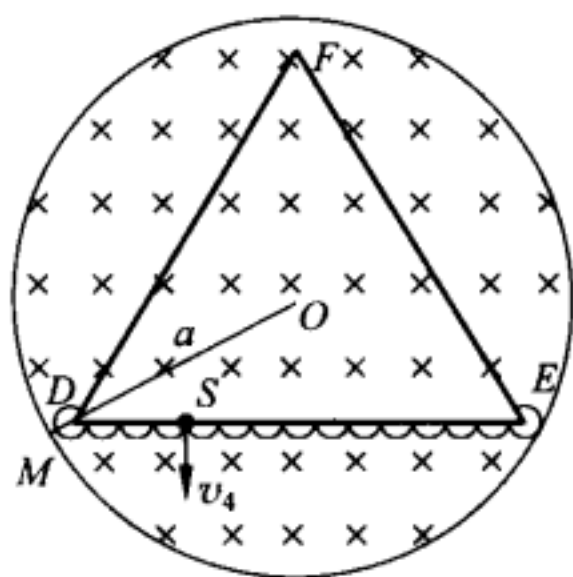


图 3-47

由于 $R_1, R_2, R_3 \geq \overline{DM}$, 这些粒子在绕过三角形的顶点 E 时, 将从磁场边界逸出, 只有 $n \geq 4$ 的粒子能经多次碰撞绕过 E 、 F 、 D 点, 最终回到 S 点. 由此结论及(1)、(2)两式可得与之相应的速度

$$v_n = \frac{qB}{m} R_n = \frac{qB}{m} \cdot \frac{2a}{5(2n-1)} \quad (n = 4, 5, 6, \dots) \quad (4)$$

这就是由 S 点发出的粒子与三角形的三条边垂直碰撞并最终又回到 S 点时, 其速度大小必须满足的条件.

2) 这些粒子在磁场中做圆周运动的周期为

$$T = \frac{2\pi R}{v}$$

将(1)式代入, 得

$$T = \frac{2\pi m}{qB} \quad (5)$$

可见在 B 及 q/m 给定时, T 与 v 无关. 粒子从 S 点出发最后回到 S 点的过程中, 与三角形的边碰撞次数愈少, 所经历的时间就愈少, 所以应取 $n=4$, 如图 3-47 所示(图中只画出在边框 DE 的碰撞情况), 此时粒子的速度为 v_4 , 由图可看出该粒子的轨迹包括 3×13 个半圆和 3 个圆心角为 300° 的圆弧, 所需时间为

$$t = 3 \times 13 \times \frac{T}{2} + 3 \times \frac{5}{6} T = 22T \quad (6)$$

以(5)式代入得

$$t = 44 \frac{\pi m}{qB} \quad (7)$$

18. 在空间某区域中, 可能存在匀强电场和匀强磁场, 也可能只存在两者之一或都不存在. 现在此区域中, 建立 $Oxyz$ 坐标系如图 3-48 所示.

1) 已知一质量为 m 、电荷量为 q 的质子 1 以大小为 v_1 的速度在该区域中沿 z 轴正方向运动时, 测得其加速度 $a_1 = 0$. 试根据质子 1 运动提供的信息, 判断该区域中电场强度 E

和磁感应强度 B 的大小和方向有哪些可能. 把判断出的结论填在横线上. 填写时要求: 若不存在电场或磁场, 用 $E=0$ 或 $B=0$ 表示; 若存在电场或磁场, 电场强度和磁感应强度的大小分别用它在 $Oxyz$ 坐标系中的分量 E_x, E_y, E_z 或 B_x, B_y, B_z 来表示; 电场强度和磁感应强度的方向凡是可用它与坐标轴正方向之间的夹角来表示的都用它们来表示, 规定夹角是由坐标轴正方向沿小于(或等于) 180° 的夹角转到要考查的矢量方向(在本小题中, 不要求写出理由或推理过程).

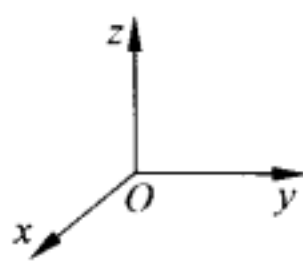


图 3-48

2) 简要写出得出以上结论的理由和推理过程.

3) 现又知另一质子 2 以大小为 $v_2 = \sqrt{2}v_1$ 的速度在该区域中的 yz 平面内沿与 y 轴正方向和 z 轴正方向都成 $\alpha = 45^\circ$ 角的方向运动时, 测得此时质子 2 的加速度大小为 a_2 , 方向沿 x 轴的负方向. 试再结合质子 2 运动提供的信息, 对上面第 1 小题中你所得的各种结论作进一步的分析, 最后判断出该区域中电场强度 E 和磁感应强度 B 的大小和方向有哪些可能, 把最后判断出的结论填在下面横线上. 填写时电场强度和磁感应强度的大小和方向的表示方法与第 1 小题中的要求相同(本小题不要求写出理由或推理过程).

解析

1) (i) $E=0, B=0$.

(ii) $E=0, B_x=0, B_y=0, B_z$ 可为任意值.

(iii) $E_z=0, E_x$ 可为任意值, E_y 可为任意值, 即 E 与 z 垂直; B_x 可为任意值, B_y 可为任意值, 但 $v_1 \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$, B_z 可为任意值, B 与 E 垂直且与 z 轴正方向的夹角 $\gamma_B = \arcsin \frac{E}{v_1 B}$.

2) 由于质子 1 的加速度 $a_1=0$, 故作用于质子 1 的电场力与洛伦兹力的合力必为零.

(i) 当该区域中既无电场又无磁场时, 作用于质子 1 的电场力与洛伦兹力的合力都为零, 故有第一种可能. 即 $E=0, B=0$.

(ii) 当该区域中无电场有磁场时, 因质子 1 沿 z 轴正方向运动, 只要磁场方向沿 z 轴, 作用于质子 1 的电场力为零, 洛伦兹力亦为零. 故有第二种可能, 即 $E=0, B_x=0, B_y=0, B_z$ 可为任意值.

(iii) 当该区域中存在磁场, 只要磁场的方向不沿 z 轴, 质子 1 便受到洛伦兹力作用, 故该区域中必存在电场, 才可能使质子 1 没有加速度. 由于洛伦兹力与 z 轴垂直, 故只有电场强度 E 亦与 z 轴垂直时, 电场力和洛伦兹力的合力才可能等于零, 故有 $E_z=0$, 但 E_x, E_y 可以为任意值. 由于洛伦兹力垂直于 z 轴与 B 构成的平面, 故电场强度 E 亦垂直

于 z 轴与 B 构成的平面, 即与 B 垂直. 当 B 的大小和方向不同时, B 的三个分量 B_x, B_y 和 B_z 亦不同. E 的方向与 x 轴正方向的夹角 α_E 便取 $0 \sim 360^\circ$ 间的不同的值, 使 E 与 B 保持相互垂直. 但洛伦兹力只决定于 B 的垂直于 z 轴方向的分量, 亦即只决定于 B_x 和 B_y , 由 B_x 与 B_y 作用于质子 1 的洛伦兹力和电场力的合力为零, 可得 $v_1 \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$. 若 B 与 z 轴正方向的夹角为 γ_B , 则由 $qE = qv_1 B \sin \gamma_B$, 可得 $\gamma_B = \arcsin \frac{E}{v_1 B}$, 同时与 E 垂直. 这便是第三种可能.

3) (i) $E=0, B_x=0, B_y=0, B_z = -\frac{ma_2}{v_1 q}$. B 的方向与 z 轴正方向的夹角 $\gamma_B = 180^\circ$.

(ii) E_x 可为不等于零的任意值, $E_y=0, E_z=0$. E 的方向与 x 轴正方向的夹角 $\alpha_E = 0$, 或 $\alpha_E = 180^\circ$. $B_x=0, B_y = \frac{E_x}{v_1}, B_z = -\frac{ma_2}{v_1 q}$ (B 在 $O-yz$ 平面内).

当 $\alpha_E = 0$ 时, B 与 z 轴正方向的夹角 γ_B 可在 $90^\circ \sim 180^\circ$ 之间, 即 $90^\circ < \gamma_B < 180^\circ$.

当 $\alpha_E = 180^\circ$ 时, B 与 z 轴正方向的夹角 γ_B 可在 $180^\circ \sim 270^\circ$ 之间, 即 $180^\circ < \gamma_B < 270^\circ$.

回答本题的关键首先是将题目的已知条件搞清楚, 要有比较强的三维空间概念. 因为电场 E 与磁场都是矢量, 因此就要根据带电粒子受电场力与磁场力的性质, 对可能的情况作出分析与判断. 该题对学生缜密和有条件的分析能力有较高的要求.

19. 一宇宙人在太空(那里万有引力可以忽略不计)玩垒球. 辽阔的太空球场半侧为均匀电场 E , 另半侧为均匀磁场 B , 电场与磁场的分界面为平面, 电场方向与界面垂直, 磁场方向垂直纸面指向里. 宇宙人位于电场一侧距界面为 h 的 P 点, O 点是 P 点至界面垂线的垂足, D 点位于纸面上 O 点的右侧, OD 与磁场 B 的方向垂直, $OD = d$, 如图 3-49 所示. 垒球的质量为 m , 且带有电荷量 $-q (q > 0)$.

1) 宇宙人是否可能自 P 点以某个适当的投掷角(与界面所成的夹角) α_0 及适当的初速度 v_P 投出垒球, 使它经过 D 点, 然后历经磁场一次自行回至 P 点? 试讨论实现这一游戏, d 必须满足的条件并求出相应的 α_0, v_P .

2) 若宇宙人从 P 点以初速度 v_0 平行于界面投出垒球, 要使垒球击中界面上的某一 D 点, 初速度 v_0 的指向和大小应如何?

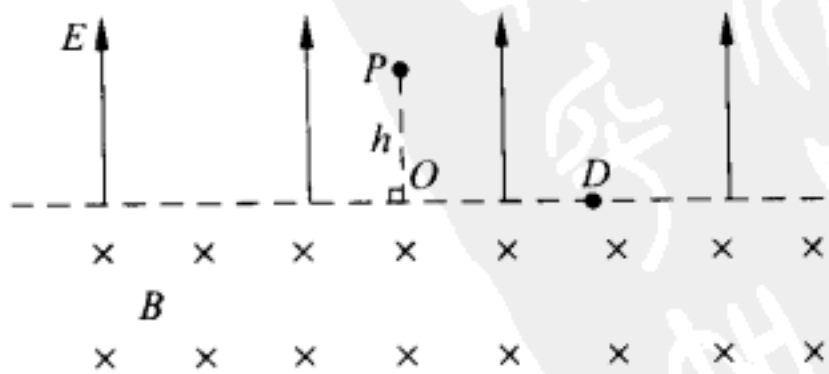


图 3-49

解析

1) 如图 3-50 所示, 以 O 为原点, 作一直角坐标系, 使 x 轴与直线 OD 重合, y 轴与直线 OP 重合. 根据题中所给条件, 若宇宙人在 xOy 面内将垒球投向 y 轴的右侧, 使垒球保持在 xOy 平面内运动, 则在电场区, 垒球做斜抛(或平抛)运动, 当垒球到达分界面上的 D 点时, 其速度 v_D 与 x 轴夹角为 α . 进入磁场区后, 垒球沿半径为 R 的圆弧运动, 到达界面的另一点 D' , 又从 D' 进入电场区做斜上抛运动. 只要 D' 位于 x 轴上 O 点的左侧, 且 $\overline{D'O} = \overline{OD} = d$, 垒球就能自 D' 斜抛恰好回到 P 点. 由于

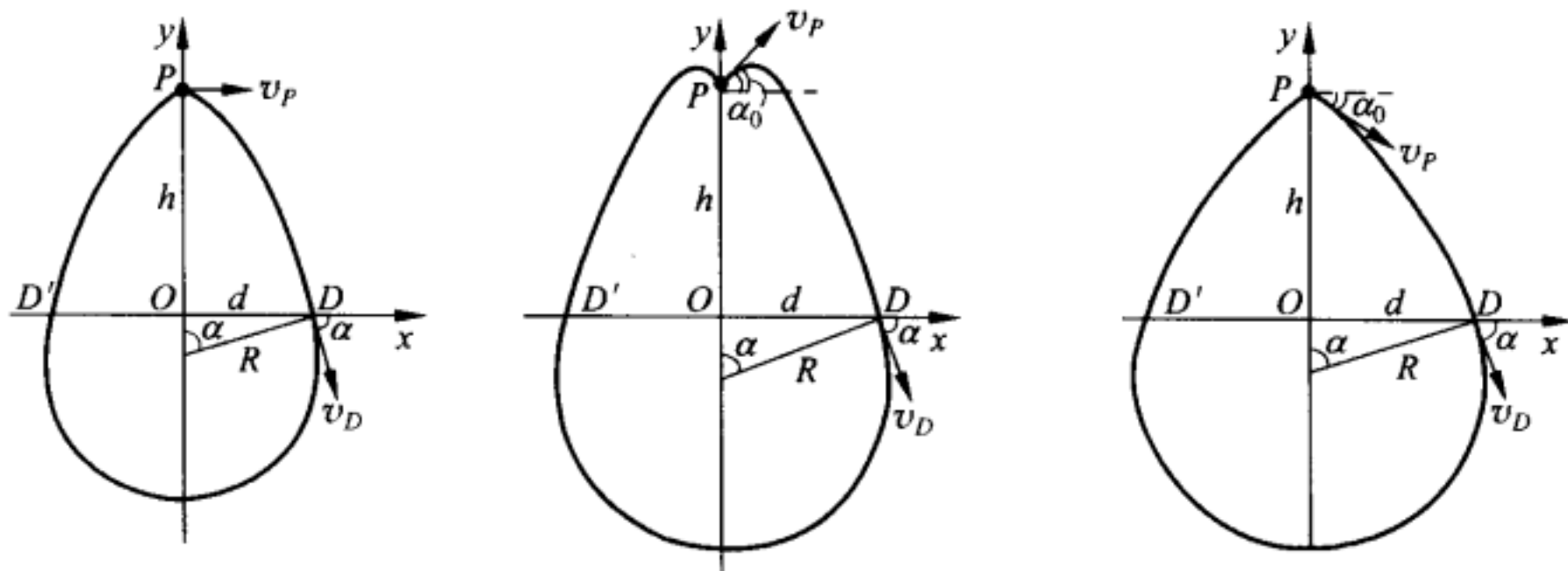


图 3-50

$$d = R \sin \alpha = \frac{m v_D}{qB} \sin \alpha = -\frac{m v_{Dy}}{qB} \quad (1)$$

因而

$$v_{Dy} = -\frac{qBd}{m}$$

设 a 为垒球在电场区垂直“下落”的加速度, 得

$$v_{Dy}^2 - v_{Py}^2 = 2ah = \frac{2qEh}{m} \quad (2)$$

所以

$$\begin{aligned} v_{Py} &= \pm \sqrt{v_{Dy}^2 - \frac{2qEh}{m}} \\ &= \pm \frac{1}{m} \sqrt{q^2 B^2 d^2 - 2qEhm} \end{aligned} \quad (3)$$

式中“+”与“-”分别对应于在 P 点做斜上抛与斜下抛的情况.

设垒球从 P 点到 D 点所经历的时间为 τ , 则

$$v_{Dy} = v_{Py} - a\tau = v_{Py} - \frac{qE}{m}\tau \quad (4)$$

而

$$\tau = \frac{d}{v_{Px}} \quad (5)$$

将(2)、(5)式代入(4)式,得

$$-\frac{qBd}{m} = v_{Py} - \frac{qEd}{m v_{Px}}$$

解得
$$v_{Px} = \frac{qEd}{qBd + m v_{Py}} = \frac{qEd}{qBd \pm \sqrt{q^2 B^2 d^2 - 2qEhm}} \quad (6)$$

因(3)式和(6)式是实数,故必须满足条件

$$d \geq \sqrt{\frac{2Emh}{qB^2}} \quad (7)$$

(i) 若
$$d = \sqrt{\frac{2Emh}{qB^2}} \quad (8)$$

则由(3)式和(6)式可得

$$v_{Py} = 0, \quad v_{Px} = E/B$$

即
$$v_P = E/B \quad (9)$$

$$\alpha_0 = 0 \quad (10)$$

(ii) 若
$$d > \sqrt{\frac{2Emh}{qB^2}} \quad (11)$$

则有

$$v_P = \sqrt{v_{Px}^2 + v_{Py}^2} = \left[\frac{q^2 E^2 d^2}{(qBd \pm \sqrt{q^2 B^2 d^2 - 2qEhm})^2} + \frac{q^2 B^2 d^2 - 2qEhm}{m^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

$$\alpha_0 = \arctan(v_{Py}/v_{Px}) = \arctan\left(\frac{q^2 B^2 d^2 - 2qEhm \pm qBd \sqrt{q^2 B^2 d^2 - 2qEhm}}{mqEd}\right) \quad (13)$$

式中根式前面取“+”号对应于从 P 点做斜向上抛的运动,取“-”对应于从 P 点做斜向下抛的运动(如图 3-50 所示).

(iii) 当 $d < \sqrt{\frac{2Emh}{qB^2}}$ 时,无论怎样选取 α_0 和 v_P ,投出的垒球都无法按题中要求回至 P 点.

2) 平行于界面的初速度 v_0 必须指向正 x 轴方向才有可能击中 D 点. 击中 D 点方式有如下三种:

(i) 从 P 点平抛出后经过电场区域,直接到达 D 点. 若所经历时间为 t ,则由

$$h = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2, \quad d = v_0 t$$

消去 t , 得

$$v_0 = d\sqrt{\frac{qE}{2hm}} \quad (14)$$

(ii) 从 P 点向右平抛“下落”, 然后经磁场回转, 又在电场区斜上抛, 如此循环, 历经磁场 n 次, 最终在电场区经斜上抛到达 D 点, 如图 3-51(a) 所示.

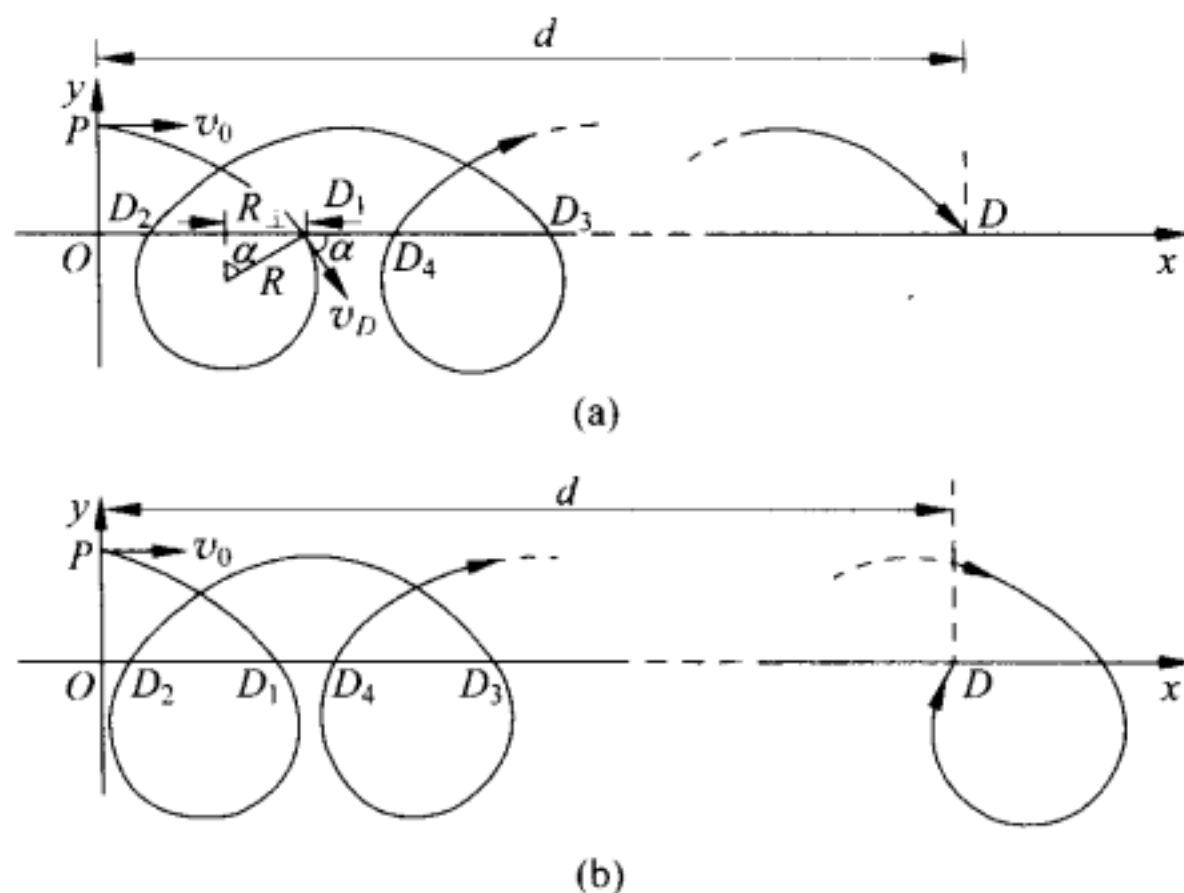


图 3-51

设自 P 点平抛的水平射程 $OD_1 = d_n$. 全球经磁场回转一次, 在 x 轴方向倒退 $\overline{D_1 D_2} = 2R_{\perp}$. 其中

$$R_{\perp} = R \sin \alpha = \frac{m v_D}{qB} \sin \alpha = \frac{m |v_{Dy}|}{qB} = \frac{m}{qB} \sqrt{\frac{2qEh}{m}} \quad (15)$$

从 D_2 出磁场区后经电场区的斜上抛运动全球在 x 轴方向前进 $2d_n$. 如此历经 n 次循环, 最后从电场区到达 D 点, 应有关系

$$d_n + 2nd_n - 2nR_{\perp} = d \quad (16)$$

解得

$$d_n = \frac{d + 2nR_{\perp}}{2n + 1} \quad (17)$$

若 P 点抛出的初速度为 v_{0n} , 则由

$$h = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2, \quad d_n = v_{0n} t$$

消去 t , 得

$$v_{0n} = d_n \sqrt{\frac{qE}{2hm}} = \frac{d + 2nR_{\perp}}{2n + 1} \sqrt{\frac{qE}{2hm}} \quad (18)$$

$$\text{或} \quad v_{0n} = \frac{1}{2n+1} \left(d \sqrt{\frac{qE}{2hm}} + 2n \frac{E}{B} \right) \quad (19)$$

(iii) 自 P 点向右平抛“下落”，再经磁场回转，然后在电场区斜上抛，如此循环，历经磁场 n 次，最终在磁场区回转到达 D 点，如图 3-51(b) 所示。

设自 P 点平抛的水平射程为 d'_n ，则应有

$$d'_n + 2(n-1)d'_n - 2nR_{\perp} = d \quad (20)$$

$$\text{解得} \quad d'_n = \frac{d + 2nR_{\perp}}{2n-1} \quad (21)$$

相应的初速度为 v'_{0n} ，则有

$$v'_{0n} = d'_n \sqrt{\frac{qE}{2hm}} = \frac{d + 2nR_{\perp}}{2n-1} \sqrt{\frac{qE}{2hm}} \quad (22)$$

$$\text{或} \quad v'_{0n} = \frac{1}{2n-1} \left(d \sqrt{\frac{qE}{2hm}} + 2n \frac{E}{B} \right) \quad (23)$$

以上各式中 $n=1, 2, 3, \dots$ 。

此题主要涉及在电场和磁场中的运动学问题，问题是答案要全面（不遗漏）、准确。例如第 1) 问就要确定 $d \geq \sqrt{\frac{2Emh}{qB^2}}$ 的条件，题中用“宇宙人”的表述主要是避免引力的作用，这种表述方法增加了趣味性，使宇宙人无论平抛、斜上抛、斜下抛均能使垒球回到原抛点。第 2) 问则是在确定了 D 点后，求出到达 D 点的平抛速度的所有可能值。要求学生有较强的分析综合能力。

20. 如图 3-52 所示，一质量均匀分布的细圆环，其半径为 R ，质量为 m 。令此环均匀带正电，总电荷量为 Q 。现将此环平放在绝缘的光滑水平桌面上，并处于磁感应强度为 B 的均匀磁场中，磁场方向竖直向下。当此环绕通过其中心的竖直轴以匀角速度 ω 沿图示方向旋转时，环中的张力等于多少？

解析

当环旋转时，电荷随环一起运动而形成电流，因此会受到磁场对它的力的作用。根据磁场方向、圆环绕轴转动方向（即电流方向）可以判断圆环上各部分所受磁场力的方向都是沿半径向外的。

由于圆环做匀角速转动，因而环上每一段小圆弧都在做匀速圆周运动。每一小圆弧所受各个力的合力必为向心力。

从以上分析我们可以看出,解答此题的关键在于分析圆环上每一段小圆弧的受力情况,找出各力之间的关系.

图 3-53 所示就是我们研究的小圆弧的受力情况.

在竖直方向上,小圆弧受到重力和桌面对它的支持力,这两个力的合力为零,在本题中可不予考虑.

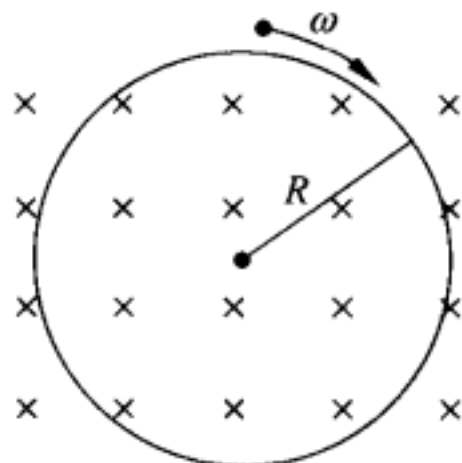


图 3-52

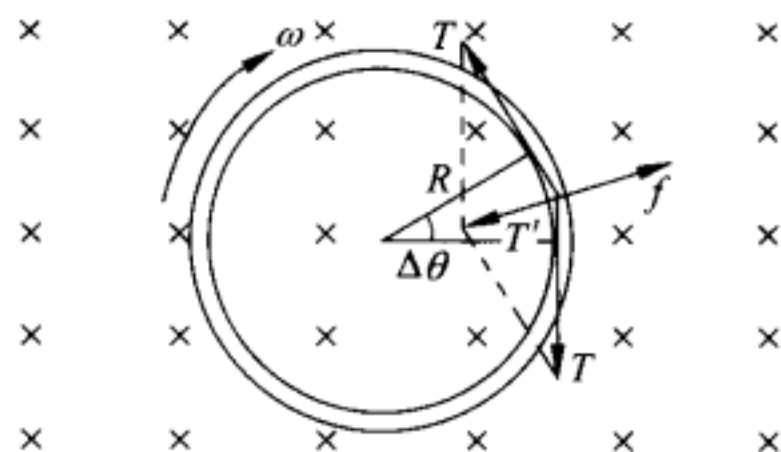


图 3-53

在水平面上,小圆弧做匀速圆周运动,它所受力的合力一定指向圆心,其大小等于所需的向心力.已知磁场对它的作用力是向外的,从而可知环中一定存在张力.小圆弧所受张力的合力在向心方向的分力除了克服磁场对它的作用力外,还提供它做匀速圆周运动所需的向心力.

设环中的张力为 F_T ,小圆弧所受张力的合力为 F'_T ,磁场对它的作用力为 F ,小圆弧的质量为 Δm ,长度为 Δl ,对应的圆心角为 $\Delta\theta$.若不计电荷之间的相互作用,当圆弧很小时,由牛顿第二定律可知

$$F'_T - F = \Delta m \cdot R\omega^2 \quad (1)$$

由几何关系得到

$$F'_T = 2F_T \sin(\Delta\theta/2)$$

当 $\Delta\theta$ 很小时, $\sin(\Delta\theta/2) \approx \Delta\theta/2$, 因此

$$F'_T = 2F_T(\Delta\theta/2) = F_T \Delta\theta \quad (2)$$

小圆弧所带电荷量为

$$q = (Q/2\pi R)\Delta l = (Q/2\pi R)R\Delta\theta = Q\Delta\theta/2\pi$$

其运动速度为 $v=R\omega$, 因此,小圆弧所受的磁场力

$$F = qvB = Q\Delta\theta R\omega B/2\pi \quad (3)$$

小圆弧的质量为

$$\Delta m = (m/2\pi R)\Delta l = (m/2\pi R)R\Delta\theta = m\Delta\theta/2\pi \quad (4)$$

将(2)、(3)、(4)式代入(1)式,可得到

$$F_T \Delta\theta - QR\omega B \Delta\theta/2\pi = m\Delta\theta R\omega^2/2\pi$$

最后解出

$$F_T = (R\omega/2\pi)(QB + m\omega)$$

本题涉及圆周运动、安培力、力的合成和分解等内容. 参赛学生在学校大都学过用隔离法处理动力学问题, 而且反复训练过. 但在连续体上求内应力是平时很少见到的, 因此, 要求学生能针对问题的需要自己想出一个解决的办法, 即在物体中隔离出很小一段圆弧, 分析其受力情况和运动情况. 学生的主要错误是把整个圆环当作一个质点来处理并套用了质点的圆周运动公式. 其次是有的同学没有考虑当圆环转动时, 圆环上各段圆弧都有向心加速度, 错误地套用了载流直导线受到安培力的公式, 认为安培力与环中的张力平衡. 这样做的同学占 43%. 这说明有许多同学根本没有把题目所描述的物理过程分析清楚, 就胡乱地套用公式去求解了.

21. 质量为 m 的小珠, 可以而且只能沿半径为 r 的圆环形轨道运动, 轨道平面为水平面. 小珠带有固定正电荷 q . 设有空间分布均匀但随时间 t 变化的磁场, 磁感应强度 $B(t)$, 方向垂直环面向上(如图 3-54 所示).

$t=0$ 时, $B=0$, 小珠静止于环上;

$0 < t < T$ 时, $B(t)$ 随时间 t 均匀增长;

$t=T$ 时, $B=B_0$;

$t \geq T$ 时, 磁场稳定不变.

试定量地讨论 $t > 0$ 时小珠的运动状况以及小珠对轨道的作用力.

重力和摩擦力忽略不计.

[提示] 在磁场随 t 增长的过程中, 由于电磁感应, 空间将感生出电场 E , 其方向在水平面内, 在环上 E 指向环的切线方向(正因如此, 环路中产生感应电动势.).

解析

在 $0 < t < T$ 时, 磁感应强度 B 随时间 t 均匀增长, 可以写成

$$B = kt$$

由已知条件, 在 $t=0$ 时, $B=0$, 可知在 Δt 时间内磁感应强度的增加量 ΔB 与 Δt 的关系为

$$\Delta B = k\Delta t$$

在 $t=T$ 时, $B=B_0$, 可得到

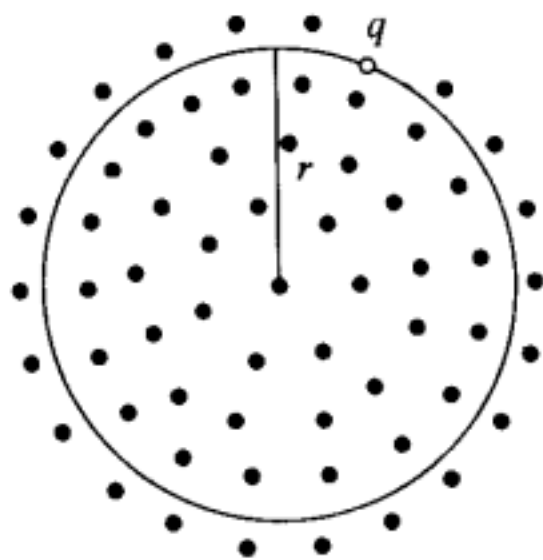


图 3-54

$$k = \frac{B_0}{T}$$

因而

$$B = \frac{B_0}{T}t$$

随着 B 的增加,通过圆形轨道所围面积内的磁通量也将随时间均匀增加.由于电磁感应,空间将感生出电场 E ,其方向在水平面内,在环上 E 指向环的切线方向(见图 3-55).因此,环中将产生感应电动势 \mathcal{E} .电荷 q 受电场力 F 作用而产生切向加速度 a_t ,其速度 v 也将随时间而增大.

由法拉第电磁感应定律得

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{\Delta BS}{\Delta t} = kS = \frac{B_0}{T}\pi r^2 \quad (1)$$

由于圆环轨道的对称性,在轨道上各点感生电场 E 的大小都相等,因此整个圆形轨道上的感应电动势为

$$\mathcal{E} = E \cdot 2\pi r \quad (2)$$

由(1)、(2)式可解出

$$E = \frac{B_0 r}{2T} \quad (3)$$

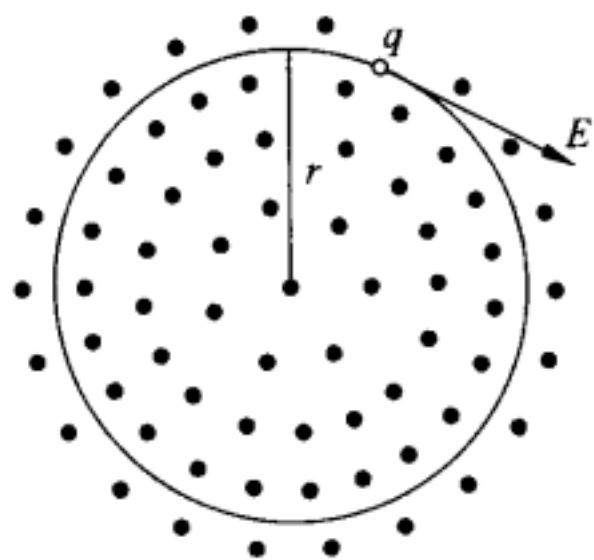


图 3-55

(3)式说明,感生电场的大小是恒定不变的,电荷 q 所受电场力的大小也是恒定不变的,其加速度的大小也不变.小珠带正电荷,所受电场力的方向及加速度的方向都与场强方向相同,也是沿轨道的切线方向.

$$a_t = \frac{F}{m} = \frac{qE}{m} = \frac{qB_0 r}{2mT}$$

所以,电荷 q 的运动速率 v 随时间 t 变化的规律是

$$v = a_t t = \frac{qB_0 r}{2mT}t \quad (4)$$

(4)式说明,在 $0 < t < T$ 的这段时间内,电荷沿圆形轨道运动的速率随时间而均匀增大.

电荷在磁场中运动时将受到洛伦兹力 F 的作用,洛伦兹力的大小为

$$F = qvB = q \frac{qB_0 r}{2mT}t \frac{B_0}{T}t = \frac{q^2 B_0^2 r}{2mT^2}t^2$$

电荷维持半径为 r 的圆周运动所需的向心力是

$$F_n = m \frac{v^2}{r} = m \frac{\left(\frac{qB_0 r}{2mT}t\right)^2}{r} = \frac{q^2 B_0^2 r}{4mT^2}t^2$$

显然, $F_n < F$. 因此轨道对小珠必然有沿半径方向向外的作用力 F_N .

$$F_N = F - F_n = \frac{q^2 B_0^2 r}{2mT^2} t^2 - \frac{q^2 B_0^2 r}{4mT^2} t^2 = \frac{q^2 B_0^2 r}{4mT^2} t^2$$

小珠对轨道的作用力 F'_N 与轨道对小珠的作用力 F_N 大小相等, 方向相反. 即小珠对轨道的作用力随时间增大, 且与时间平方成正比:

$$F'_N = \frac{q^2 B_0^2 r}{4mT^2} t^2$$

方向沿半径指向圆心.

在 $t \geq T$ 时, 磁场稳定不变, 通过轨道所围面积内的磁通量不再改变, 因而感生电场 $E=0$. 电荷 q 将保持匀速率圆周运动, 其速率为

$$v_T = \frac{qB_0 r}{2mT} T = \frac{qB_0 r}{2m}$$

电荷 q 对轨道的作用力的大小也将恒定不变, 其值为

$$F'_{NT} = \frac{q^2 B_0^2 r}{4mT^2} T^2 = \frac{q^2 B_0^2 r}{4m}$$

方向沿半径指向圆心.

22. 如图 3-56 所示, 均匀磁场的方向垂直纸面向里, 磁感应强度 B 随时间 t 变化, $B = B_0 - Kt$ (K 为大于 0 的常数). 现有两个完全相同的均匀金属圆环相互交叠并固定在图中所示位置, 环面处于图中纸面内. 圆环的半径为 R , 电阻为 r , 相交点的电接触良好. 两个环的接触点 A 与 C 间的劣弧对圆心 O 的张角为 60° . 求 $t = t_0$ 时, 每个环所受的均匀磁场的作用力. 不考虑感应电流之间的作用.

解析

1) 求网络各支路的电流

因磁感应强度大小随时间减小, 考虑到电路的对称性, 可设两环各支路的感应电流 I_1, I_2 的方向如图 3-57 所示.

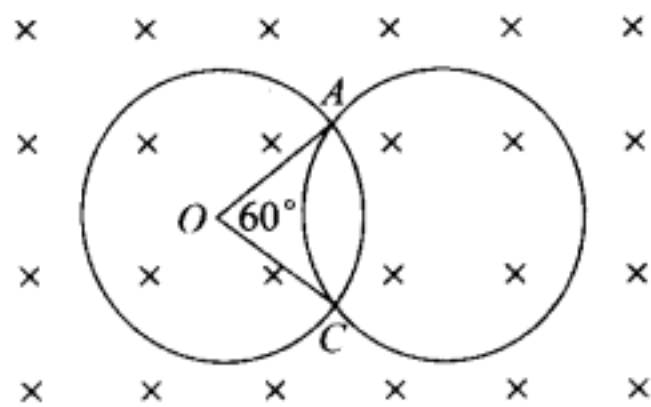


图 3-56

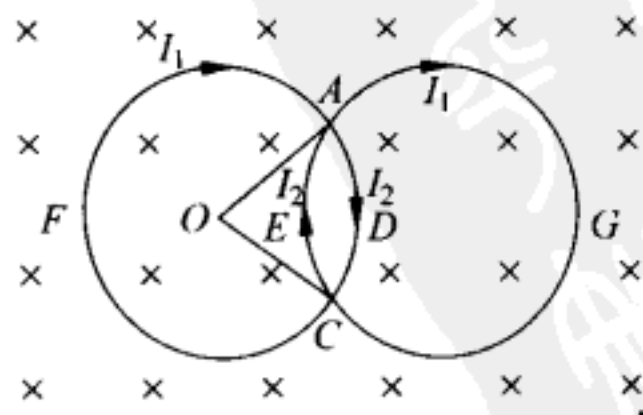


图 3-57

对左环电路 ADCFA 有关系

$$\mathcal{E} = I_1 r_{CFA} + I_2 r_{ADC}$$

因 $r_{CFA} = \frac{5r}{6}$, $r_{ADC} = \frac{r}{6}$, $\mathcal{E} = K\pi R^2$, 故有

$$K\pi R^2 = I_1 \frac{5r}{6} + I_2 \frac{r}{6} \quad (1)$$

因回路 ADCEA 所围的面积为

$$2\left(\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12}\right)R^2$$

故对该回路有

$$K\left[2\left(\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12}\right)R^2\right] = 2I_2 \frac{r}{6} \quad (2)$$

解得

$$I_2 = \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})R^2 K}{2r} \quad (3)$$

代入(1)式, 得

$$I_1 = \frac{(10\pi + 3\sqrt{3})R^2 K}{10r} \quad (4)$$

2) 求每个圆环所受的力

先求左环所受的力, 如图 3-58 所示, 将圆环分割成很多小圆弧, 由左手定则可知, 每段圆弧所受的力的方向均为径向. 根据对称性分析, 因圆弧 PMA 与圆弧 CNQ 中的电流方向相反, 所以在磁场中受的安培力相互抵消. 而弧 PQ 与弧 AC 的电流相对 x 轴上下是对称的, 因而每段载流导体所受的安培力在 y 方向的合力为零. 以载流导体弧 PQ 上的线段 $\Delta l'$ 为例, 安培力 ΔF 为径向. 其 x 分量的大小表示为

$$|\Delta F_x| = I_1 B \Delta l' \cos\alpha \quad (5)$$

因 $\Delta l' \cos\alpha = \Delta l$, 故

$$\begin{aligned} |\Delta F_x| &= I_1 B \Delta l \\ |F_x| &= \sum I_1 B \Delta l = I_1 B \overline{PQ} = I_1 BR \quad (6) \end{aligned}$$

由于导体弧 PQ 在 y 方向的合力为零, 所以在 t_0 时刻所受安培力的合力 F_1 仅有 x 分量, 即

$$\begin{aligned} F_1 &= |F_x| = I_1 BR = \left[\frac{(10\pi + 3\sqrt{3})R^2 K}{10r} \right] BR \\ &= \left[\frac{(10\pi + 3\sqrt{3})R^2 K}{10r} \right] (B_0 - Kt_0) R \quad (7) \end{aligned}$$

方向向左.

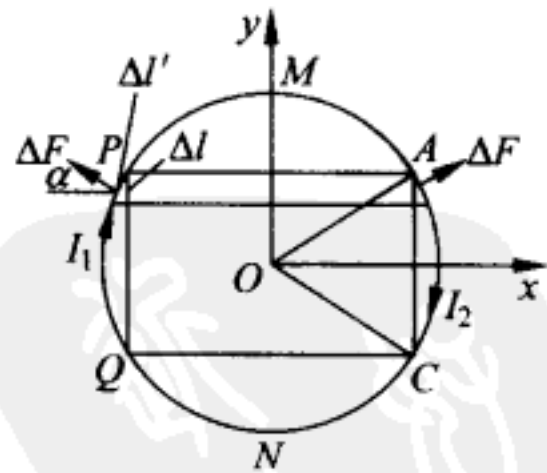


图 3-58

同理,载流导体弧 AC 在 t_0 时刻所受的安培力为

$$\begin{aligned} F_2 &= I_2 BR = \left[\frac{(2\pi - 3\sqrt{3})R^2 K}{2r} \right] BR \\ &= \left[\frac{(2\pi - 3\sqrt{3})R^2 K}{2r} \right] (B_0 - Kt_0) R \end{aligned} \quad (8)$$

方向向右.

左环所受的合力大小为

$$F = F_1 - F_2 = \frac{9\sqrt{3}}{5r} K (B_0 - Kt_0) R^3 \quad (9)$$

方向向左.

同理,可求出右环所受的合力大小和方向.



四、电磁感应

1. 如图 4-1 所示,在竖直放置的两平行光滑长直金属导轨的上端,接有一个电容为 C 、击穿电压为 U_b 的电容器,有一匀强磁场与两金属导轨平面垂直,磁感应强度为 B . 现有一质量为 m 、长为 L 的金属杆 ef ,在 $t=0$ 时以初速度 v_0 沿导轨下滑. 试求金属杆 ef 下滑多长时间电容器就被击穿. 假设图中任何部分的电阻和电感均可忽略不计.

解析

由于电路中的电阻和电感均可忽略不计,电容器两端电压 U_c 等于金属杆 ef 在磁场中沿金属导轨下滑产生的动生电动势,即

$$U_c = BLv \quad (1)$$

金属杆的运动方程为

$$ma = mg - BLI \quad (2)$$

(2)式中 I 为电容器充电电流.

$$I = \Delta Q / \Delta t = C \Delta U_c / \Delta t = CBL \Delta v / \Delta t = CBLa \quad (3)$$

把(3)式代入(2)式得到

$$a = mg / (m + CB^2L^2) \quad (4)$$

(4)式表明金属杆 ef 以恒定加速度 a 沿导轨下滑,因此下滑速度 v 为

$$v = v_0 + at = v_0 + mgt / (m + CB^2L^2) \quad (5)$$

当电容器两端电压 $U_c = U_b$ 时,电容器被击穿,由(1)式知此时的速度

$$v = U_b / BL \quad (6)$$

将(6)式代入(5)式得电容器被击穿所需的金属杆 ef 下滑的时间为

$$t = (U_b / BL - v_0)(m + CB^2L^2) / (mg)$$

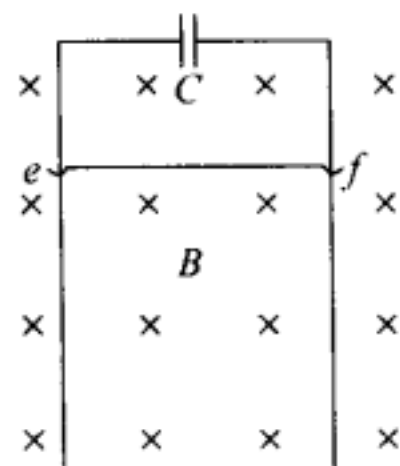


图 4-1

2. 假想有一水平方向的匀强磁场,磁感应强度 B 很大. 有一半径为 R 、厚度为 d ($d \ll R$) 的金属圆盘,在此磁场中竖直下落,盘面始终位于竖直平面内并与磁场方

向平行,如图 4-2 所示. 若想使圆盘在磁场中下落的加速度比没有磁场时减小 1% (不计空气阻力), 试估算所需磁感应强度的数值. 假定金属盘的电阻为零, 并设金属盘的密度 $\rho = 9 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, 其介电常数为 $\epsilon = 9 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$.

解析

当盘在磁场中下落的速度为 v 时, 盘中的感应电动势为 $\mathcal{E} = Bvd$. 在感应电动势的作用下, 圆盘两个表面上将带有等量异号的电荷 ($\pm Q$), 因为盘电阻为零, 所以由此电荷 ($\pm Q$) 引起的两表面间的电压 U 等于盘中感应电动势的数值, 即

$$U = \mathcal{E} = Bvd$$

圆盘上的 Q 与 U 之间的关系跟一个同样尺寸的带电电容器的 Q 和 U 之间关系相同, 如图 4-3 所示, 此电容器的电容

$$C = \epsilon S/d = \epsilon \pi R^2/d$$

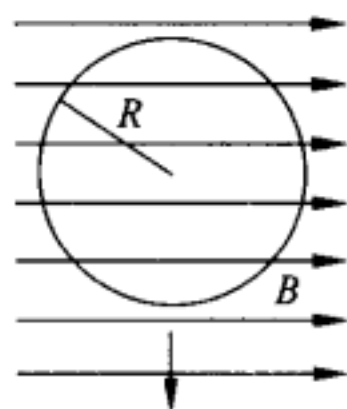


图 4-2

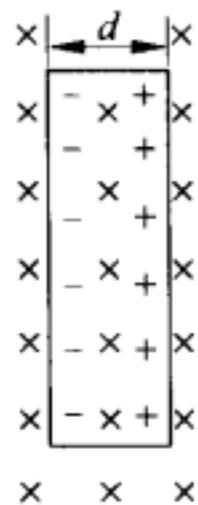


图 4-3

故圆盘表面所带电荷量

$$Q = CU = (\epsilon \pi R^2/d) \cdot Bvd = \epsilon \pi R^2 Bv$$

在盘下落过程中, 盘的速度 v 随时间增大, 盘面上的电荷量 Q 也随时间增大, 由此可求出盘中电流为

$$I = \Delta Q/\Delta t = \epsilon \pi R^2 B \Delta v/\Delta t$$

磁场对此电流的作用力 F 的方向向上, 大小为

$$F = BId = \epsilon \pi R^2 B^2 d \Delta v/\Delta t$$

若盘的质量为 m , 则盘受到的力为 F 和重力 (mg), 盘的加速度 $a = \Delta v/\Delta t$ 可由下式给出:

$$mg - F = ma = m \Delta v/\Delta t$$

或

$$mg - \epsilon \pi R^2 B^2 d \Delta v/\Delta t = m \Delta v/\Delta t$$

由此得盘的加速度

$$a = mg/(m + \epsilon \pi R^2 B^2 d)$$

注意到

$$m = \pi R^2 d \rho$$

得 $a = g / (1 + \epsilon B^2 / \rho)$
 按题意 $a = g - (1/1000)g = (1 - 1/1000)g$
 比较得 $1 / (1 + \epsilon B^2 / \rho) = 1 - 1/1000$
 由此得 $\epsilon B^2 / \rho \approx 1/1000, B \approx \sqrt{(\rho / \epsilon) \times 10^{-3}}$
 代入数据, 得 $B \approx 10^6 \text{ T}$

一个三维的导体块在磁场中切割磁感线而产生电磁感应及由此而来的安培力, 都是比较复杂的问题. 本题中做了一些假设: 盘面始终与磁场平行, 盘的厚度远小于盘的直径等, 这样就可不考虑各种次要的因素, 而使问题变得简单多了, 虽然如此, 但此题对考生分析问题的能力仍有较高的要求. 首先, 要分析清楚使盘下落的加速度减小的力是怎样产生的. 题中给出条件 $d \ll R$, 但这绝不能把盘看成一个没有厚度的面. 因为恰恰是厚度 d 这一维在切割磁感线产生感应电动势, 而且因为下落速度不断增加, 使感应电动势也在不断增加, 从而才能在盘的两个表面之间出现持续的感应电流, 正是这个电流受的安培力, 其结果使盘下落的加速度变小. 其次, 在定量计算的过程中, 要进行电流的计算, 因为已知电阻为零, 所以不能由欧姆定律求电流, 于是要用到平行板电容器的知识 (即电势差或场强与电荷之间的关系), 对中学生来说, 这要求有一定的灵活处理问题的能力.

此题从最后结果看, 所需的磁场要强到不可思议的程度是做不到的. 也就是说, 题中的假设加速度是不能实现的.

3. 如图 4-4 所示的有铁心的变压器中, 原线圈匝数为副线圈的 2 倍. 原线圈的电阻为 R_1 , 副线圈的电阻为 R_2 , 电源的电动势为 $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$, 电源内阻可忽略. 设磁感线都集中在铁心内, 并且铁心不损耗电能. 当副线圈开路时, 用 I_1 表示原线圈中的电流, U_2 表示副线圈两端的电压, 则有

- 1) (A) $I_1 = 0$;
- (B) $I_1 = \frac{\mathcal{E}_0}{R_1} \sin \omega t$;
- (C) $I_1 = \frac{1}{4} \frac{\mathcal{E}_0}{R_2} \sin \omega t$;
- (D) I_1 无法根据题文所给的数据确定.
- 2) (A) $U_2 = 0$;
- (B) $U_2 = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 \sin \omega t$;
- (C) $U_2 = \frac{1}{2} (\mathcal{E}_0 \sin \omega t - I_1 R_1)$;

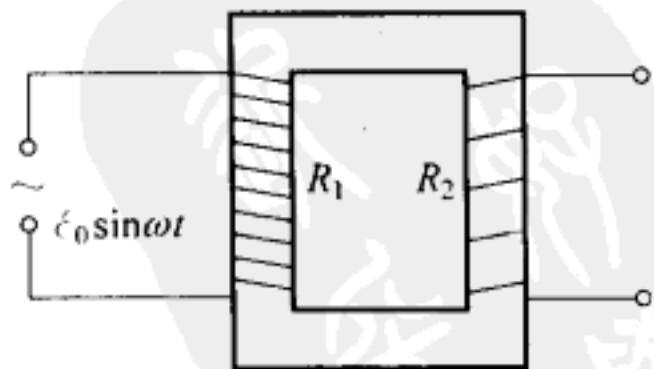


图 4-4

(D) U_2 无法根据题文所给的数据确定.

解析

1) 关于 I_1 的数值, 可作如下分析.

当副线圈为开路时, 副线圈中电流为零, 因而副线圈的存在与否对原线圈中的电流没有影响. 从输入端来看, 整个变压器就是一个绕在铁心上的、自感值很大的电感线圈. 加上交流电压后, 线圈中有交变电流通过, 即 I_1 . I_1 的大小与自感值的大小有关, 而自感值的大小又与原线圈的匝数、铁心的截面积以及铁心的磁学性质有关. 由于这些参量在题文中均未给出, 所以 I_1 的数值无法确定. 正确的答案是(D).

2) 关于 U_2 , 可作如下分析.

当原线圈中有电流 I_1 通过时, 设铁心中磁感应强度为 B , 通过铁心横截面的磁通量为 Φ . 由于线圈紧紧绕在铁心上, 通过每匝线圈所围面积的磁通量也是 Φ . 题文给出“磁感线都集中在磁心内”, 所以副线圈每匝线圈的磁通量也是 Φ .

由于 I_1 是随时间变化的交流电, Φ 也随时间变化, 因而在原线圈和副线圈都将产生感应电动势, 分别为 \mathcal{E}_{11} 和 \mathcal{E}_{12} , \mathcal{E}_{11} 和 \mathcal{E}_{12} 也是随时间变化的. 因为交流量时正时负, 我们必须给这些物理量取正值时的含义作个规定. 现在我们规定 I_1 、 Φ 、 $\mathcal{E}_0 \sin \omega t$ 与图 4-5 中所画方向一致时取正值.

如果在时间间隔 Δt 内 Φ 的增量为 $\Delta\Phi$, 则原线圈中的感应电动势为

$$\mathcal{E}_{11} = N_1 \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

式中 N_1 为原线圈的匝数. $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} > 0$ 时 \mathcal{E}_{11} 的方向在使 Φ 减小的方向, 即与图中 $\mathcal{E}_0 \sin \omega t$ 的方向相反. 对原线圈应用欧姆定律可得

$$\mathcal{E}_0 \sin \omega t - \mathcal{E}_{11} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t - N_1 \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = I_1 R \quad (1)$$

副线圈中感应电动势为

$$\mathcal{E}_{12} = N_2 \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \quad (2)$$

其方向也是使 Φ 减小的方向, 即图中所画的方向. 副线圈中电流等于零, 所以副线圈的端电压 $U (=U_a - U_b)$ 即等于 \mathcal{E}_{12} , 由(1)、(2)两式消去 $\Delta\Phi/\Delta t$ 可得

$$U = \mathcal{E}_{12} = \frac{N_2}{N_1} (\mathcal{E}_0 \sin \omega t - I_1 R)$$

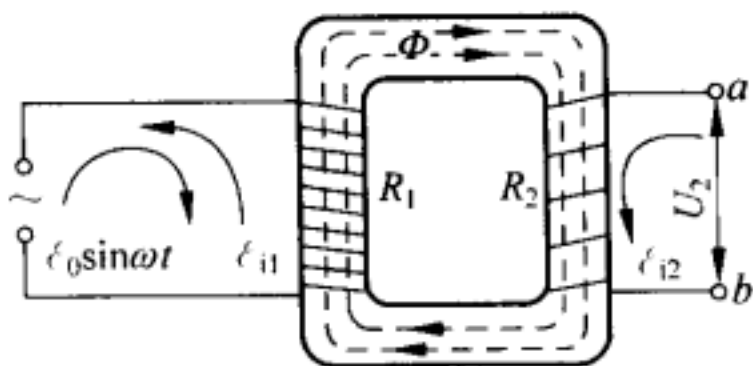


图 4-5

由题设条件, $N_2/N_1 = 1/2$, 因而有

$$U = \frac{1}{2}(\mathcal{E}_0 \sin \omega t - I_1 R_1)$$

所以选择项(C)是成立的. 但由于 I_1 的值, 如前所述, 无法确定, 所以 U 的值也无法确定, 选择项(D)也是正确的. 综上所述本题正确的答案是(C)、(D).

4. 位于竖直平面内的矩形平面导线框 $abcd$. ab 长为 l_1 , 是水平的, bc 长为 l_2 , 线框的质量为 m , 电阻为 R . 其下方有一匀强磁场区域, 该区域的上、下边界的 PP' 和 QQ' 均与 ab 平行, 两边界间的距离为 H , $H > l_2$, 磁场的磁感应强度为 B , 方向与线框平面垂直, 如图 4-6 所示. 令线框的 dc 边从离磁场区域上边界 PP' 的距离为 h 处自由下落, 已知在线框的 dc 边进入磁场以后, ab 边到达边界 PP' 之前的某一时刻线框的速度已达到这一阶段的最大值. 问从线框开始下落到 dc 边刚刚到达磁场区域下边界 QQ' 的过程中, 磁场作用于线框的安培力做的总功为多少?

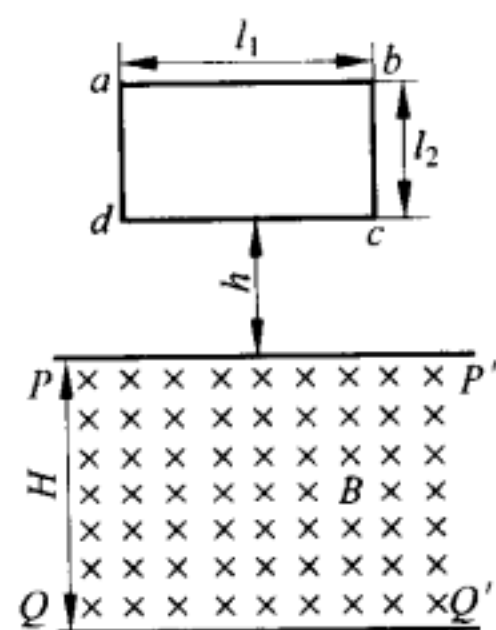


图 4-6

解析

设线框的 dc 边刚刚到达磁场区域上边界 PP' 时的速度为 v_1 , 则有

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mgh \quad (1)$$

dc 边进入磁场后, 按题意线框虽然受安培力阻力作用, 但依然加速下落, 设 dc 边下落到离 PP' 的距离为 Δh_1 时, 速度达到最大值, 以 v_0 表示最大速度, 这时线框中的感应电动势为

$$\mathcal{E} = Bl_1 v_0$$

线框中的电流

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{Bl_1 v_0}{R}$$

作用于线框的安培力为

$$F = Bl_1 I = \frac{B^2 l_1^2 v_0}{R} \quad (2)$$

速度达到最大的条件是安培力

$$F = mg$$

由此得

$$v_0 = \frac{mgR}{B^2 l_1^2} \quad (3)$$

在 dc 边向下运动距离 Δh_1 的过程中, 重力做功 $A_1 = mg\Delta h_1$, 安培力做功 A_2 , 由动能

定理得

$$A_1 + A_2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

将(1)、(3)式代入得安培力做的功

$$A_2 = -mg\Delta h_1 + \frac{m^3 g^2 R^2}{2B^4 l_1^4} - mgh \quad (4)$$

线框速度达到 v_0 后,做匀速运动.当 dc 边匀速向下运动的距离为 $\Delta h_2 = l_2 - \Delta h_1$ 时, ab 边到达磁场的边界 PP' ,整个线框进入磁场.在线框 dc 边向下移动 Δh_2 的过程中,重力做功 A'_1 ,安培力做功 A'_2 ,但线框速度未变化,由动能定理

$$A'_1 + A'_2 = 0$$

$$A'_2 = -A'_1 = -mg\Delta h_2 = -mg(l_2 - \Delta h_1) \quad (5)$$

整个线框进入磁场后,直至 dc 边到达磁场区的下边界 QQ' ,作用于整个线框的安培力为零,安培力做的功也为零,线框只在重力作用下做加速运动.

所以,整个过程中安培力做的总功

$$A = A_2 + A'_2 = -mg(l_2 + h) + \frac{m^3 g^2 R^2}{2B^4 l_1^4} \quad (6)$$

本题若是从运动学的方法来思考,问题就比较复杂,但从功能关系去求安培力所做的功就比较简单,关键是要掌握线框下落过程中不同区段的功能关系.

5. 一个长为 L_1 ,宽为 L_2 ,质量为 m 的矩形导电线框,由质量均匀分布的刚性杆构成,静止放置在不导电的水平桌面上,可绕与线框的一条边重合的光滑固定轴 ab 转动,在此边中串接一能输出可变电流的电流源(图中未画出).线框处在匀强磁场中,磁场的磁感应强度 B 沿水平方向且与转轴垂直,俯视图如图 4-7 所示.现让电流从零逐渐增大,当电流大于某一最小值 I_{\min} 时,线框将改变静止状态.

1) 求电流值 I_{\min} .

2) 当线框改变静止状态后,设该电流源具有始终保持恒定电流值 I_0 不变($I_0 > I_{\min}$)的功能.已知在线框运动过程中存在空气阻力,试分析线框的运动状况.

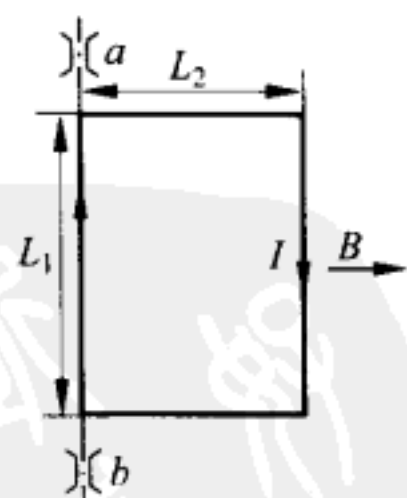


图 4-7

解析

1) 解法 I 导体线框放在水平桌面上,俯视图如图 4-8 所示.由图可见,在线框没动之前,线框的 PQ 边与 $P'Q'$ 边平行于磁场 B ,因而不受磁场力. PP' 边受的安培力的大小

为 IBL_1 , 方向垂直于桌面向下, 但此力对轴的力矩为零, QQ' 边受的安培力的大小为 $F_{QQ'} = IBL_1$, 方向垂直桌面向上. 此力对固定轴的力矩为

$$M_0 = IBL_1L_2 \quad (1)$$

除此力矩外, 线框还受到重力矩作用. 重力矩等于重力乘线框重心 (O 点) 到轴 ab 的距离, 即

$$\tau_0 = mg(L_2/2) \quad (2)$$

当 $M_0 = \tau_0$ 时, 桌面对线框的支持力的力矩为零, $M_0 > \tau_0$ 时, 线框将改变静止状态, 开始绕轴 ab 向上翘起. 根据题意及 (1)、(2) 式, 由力矩平衡原理可知

$$I_{\min}BL_1L_2 = \frac{1}{2}mgL_2 \quad (3)$$

解得

$$I_{\min} = \frac{mg}{2BL_1} \quad (4)$$

解法 II 线框所受的重力矩也可以由各边对 ab 轴的重力矩来求. PQ 边与 $P'Q'$ 边的重心均在 $(L_2/2)$ 处, 两条边对 ab 轴的合力矩为

$$\tau_1 = \left[\frac{mgL_2}{(L_1 + L_2)} \right] \left(\frac{L_2}{2} \right) \quad (5)$$

QQ' 边对 ab 轴的力矩为

$$\tau_2 = \left[\frac{mgL_1}{2(L_1 + L_2)} \right] L_2 \quad (6)$$

故线框所受的重力矩为

$$\tau_0 = \tau_1 + \tau_2 = (mg/2)L_2$$

与解法 I 求得的 (2) 式一致. 从而求得 I_{\min} 与 (4) 式相同.

2) 线框处于静止状态时, 若电流 I_0 比 I_{\min} 稍大, 线框所受的电磁力矩 M 将大于重力矩 τ , 使线框绕 ab 轴向上翘起, PQ 边和 $P'Q'$ 边所受电磁力不等于零, 但二者相互抵消. 当保持电流值 I_0 恒定不变时, 线框将从静止状态开始绕固定轴做加速转动. 在加速转动过程中, 由于通过线框的磁通量发生变化, 线框内将产生感应电动势, 它有使线框中的电流变小的趋势, 题中已设电流源有保持电流恒定不变的功能, 所以当线框平面转至与桌面成 α 角时, 如图 4-9 所示, 线框受到的合力矩为

$$M - \tau = \left(I_0BL_1 - \frac{1}{2}mg \right) L_2 \cos\alpha \quad (7)$$

随着 α 角逐渐增大, 合力矩随之减小, 但 $M - \tau$ 始终大于零, 因而线框仍做逆时针加速转动, 角速度不断增大. 当线框平面转到竖直面 NN' 时, 合力矩为零, 角速度达到最大. 由于

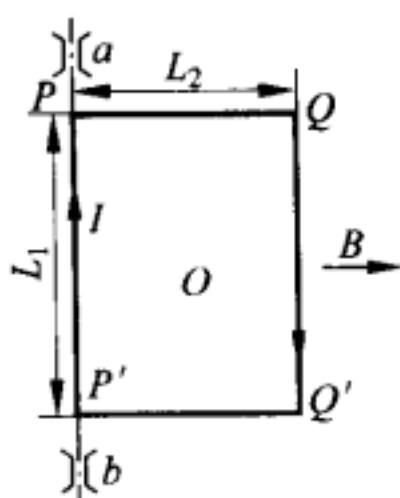


图 4-8

惯性,线框将越过 NN' 面做逆时针转动,此时,合力矩与线框转动方向相反,角速度将逐渐减小,合力矩的大小随着 α 角的增大而增大,如图 4-10 所示.

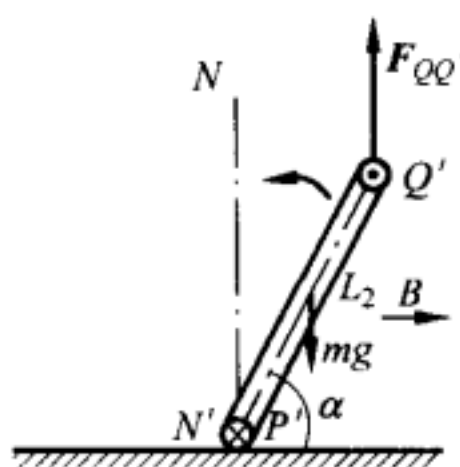


图 4-9

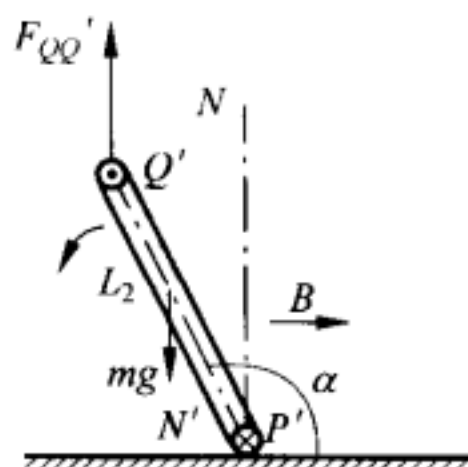


图 4-10

如果没有空气阻力, α 将增至 180° . 当 α 角等于 180° 时,线框转动的角速度为零,合力矩将使线框做顺时针加速转动. 结果线框将在 α 角等于 0° 与 180° 之间往复摆动不止. 实际上,由于空气阻力作用,线框平面在 NN' 平面两侧摆动的幅度将逐渐变小,最终静止在 NN' 面处,此时,电磁力矩与重力矩均为零. 如果线框稍偏离平衡位置 NN' ,电磁力矩与重力矩的合力矩将使线框回到 NN' 平面处,故线框处于稳定平衡状态.

线框运动过程中,因通过线框的磁通量随时间变化,在线框中产生感应电动势亦随时间变化,影响到通过线框的电流,从而使作用在线框 L_1 边上的安培力发生变化. 但是题设电源为一恒流源,因此安培力不变,然而线框所受的安培力矩仍随它所在的位置而改变.

一部分学生没有分析到线框将以 NN' 为对称面往复摆动. 实际上,一个通电线框总有使其通过的磁通量为零的趋向. 也就是说,线框中电流按右手螺旋法则确定的拇指方向总是力图趋向磁场的方向,保持通电线框在磁场中稳定平衡的状态.

6. 用密度为 D 、电阻率为 ρ 的导线做成正方形线框,线框平面在竖直平面内,从高处自由落下,初速度为零. 有一沿水平方向的匀强磁场区域,在竖直方向其线度与线框边长相等(见图 4-11),磁感应强度的大小为 B ,方向与线框平面垂直. 若要线框通过磁场区域时的速度恒定,试求线框开始下落时的高度 h (不计空气阻力).

解析

设线框的边长为 L ,线框导线的截面积为 S ,则线框的质量为

$$m = 4LSD$$

电阻为

$$R = 4L\rho/S$$

线框落下,其下缘开始进入磁场时速度为

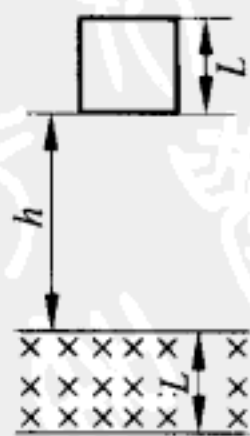


图 4-11

$$v = \sqrt{2gh}$$

题设在通过磁场区域的过程中,线框的速度不变,所以,线框中的感应电动势保持为

$$\mathcal{E} = BLv$$

感生电流为

$$I = \mathcal{E}/R$$

在磁场中,线框所受的安培力方向向上,大小为

$$F = IBL$$

根据题设条件,线框在通过磁场时速度恒定,因而安培力应与重力大小相等、方向相反,即

$$F = mg$$

由以上各式可解得

$$h = 128D^2 \rho^2 g / B^4$$

7. 图 4-12 中 oc 为一绝缘杆, c 端固定着一金属细杆 ab . 已知 $\overline{ac} = \overline{cb}$, $\overline{ab} = \overline{oc} = R$, $\angle aco = 60^\circ$. 此结构整体可绕 o 点在纸面内沿顺时针方向以匀角速度 ω 转动. 设有磁感应强度为 B 、方向垂直于纸面向里的匀强磁场存在, 则 a, b 间的电势差 $U_{ab} = U_a - U_b =$ _____.

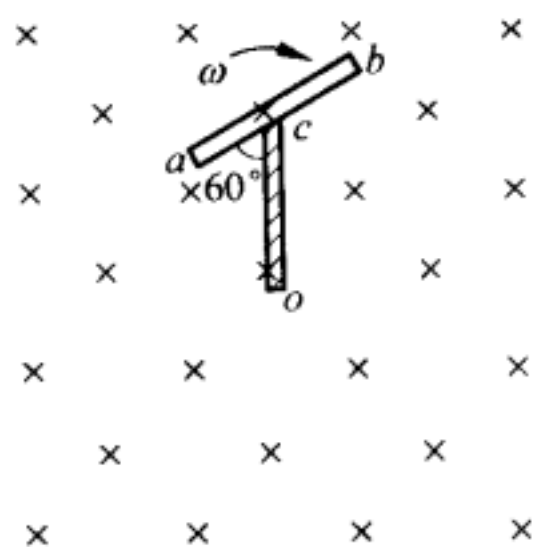


图 4-12

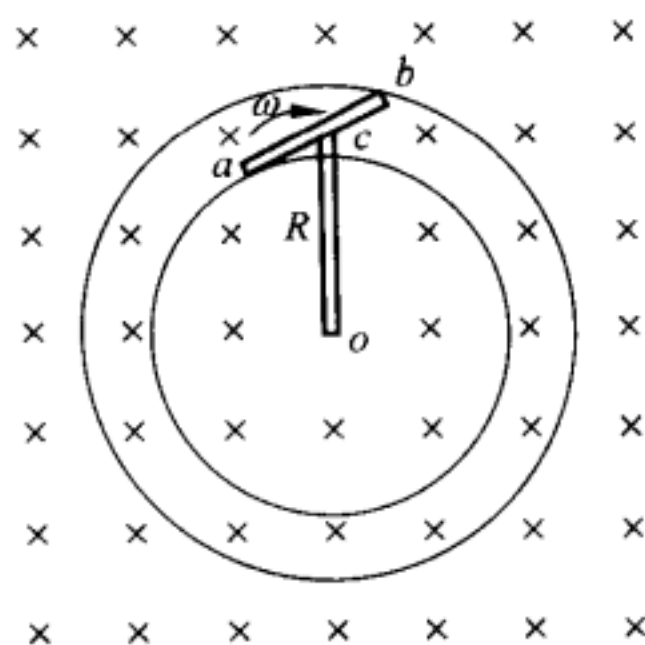


图 4-13

解析

$$-\omega R^2 B/2.$$

讨论金属杆在磁场中切割磁感线的速率.

由图 4-13 可得

$$\overline{oa}^2 = \frac{3}{4}R^2$$

$$\overline{ob}^2 = \frac{7}{4}R^2$$

金属杆 ab 绕 o 旋转一周扫过的面积

$$A = \pi(\overline{ob}^2 - \overline{oa}^2) = \pi R^2$$

所用时间

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

切割磁感线速率

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{BA}{T} = \frac{\omega R^2 B}{2}$$

ab 上电动势

$$\mathcal{E} = \frac{\omega R^2 B}{2} \quad (\text{方向由 } a \text{ 向 } b)$$

ab 两端电势差(b 端电势高)

$$U_b - U_a = \mathcal{E} = \frac{\omega R^2 B}{2}$$

故

$$U_{ab} = U_a - U_b = -\frac{\omega R^2 B}{2}$$

8. 如图 4-14 所示, 一根被弯成半径为 $R=10\text{cm}$ 的半圆形导线, 在磁感应强度 $B=1.5\text{T}$ 的均匀磁场中以速度 $v=6\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 沿 ac 方向向右运动, 磁场的方向垂直纸面向里.

- 1) 求导线上 a 、 b 两点的电势差, 指出哪一点电势高.
- 2) 求导线上 a 、 c 两点的电势差.

解析

1) 作辅助线 \overline{ab} , 与弧 \widehat{ab} 围成一弓形, 在沿 ac 方向向右运动时, 弓形面积不变, 根据法拉第电磁感应定律

$$\mathcal{E}_{\widehat{ab}} + \mathcal{E}_{\overline{ba}} = 0$$

故

$$\mathcal{E}_{\widehat{ab}} = \mathcal{E}_{\overline{ab}} = (\sqrt{2}R)vB \cos 45^\circ$$

代入数据 $\mathcal{E}_{\widehat{ab}} = 0.9\text{V}$

而

$$V_{ab} = -\mathcal{E}_{\widehat{ab}} = -0.9\text{V}$$

故 b 点的电势高.

2) 作辅助线 \overline{ac} , 与 \widehat{ac} 弧围成半圆面积. 同理,

$$\mathcal{E}_{\widehat{ac}} + \mathcal{E}_{\overline{ac}} = 0$$

$$\mathcal{E}_{\widehat{ac}} = \mathcal{E}_{\overline{ac}} = 0$$

而

$$V_{ac} = -\mathcal{E}_{\widehat{ac}} = 0$$

故 a 、 c 两点等电势.

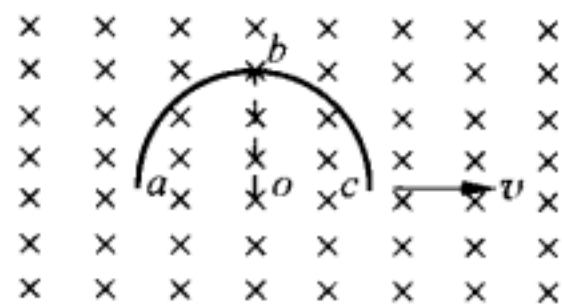


图 4-14

9. 在水平放置的光滑导轨上,沿着导轨方向固定一条形磁铁,如图 4-15 所示. 现有 4 个滑块,分别由铜、铁、铝和有机玻璃制成. 使它们从导轨上 A 点以一定的初速度向磁铁滑去. 则做加速运动的是_____ ; 做匀速运动的是_____ ; 做减速运动的是_____ .

解析

铁; 有机玻璃; 铜和铝.

铜和铝为“抗磁质”,即在外磁场作用下它们的 N、S 极的极性方向与外磁场方向相反,因而与磁铁之间有排斥效果. 不过由于一般抗磁性物质的磁化现象不很明显,因此该实验中减速的效果也许不明显.



图 4-15

10. PQQ_nP_n 是由若干正方形导线方格 $PQQ_1P_1, P_1Q_1Q_2P_2, P_2Q_2Q_3P_3, \dots, P_{n-1}Q_{n-1}Q_nP_n$ 构成的网络,如图 4-16 所示. 方格每边长度 $l=10.0\text{cm}$. 边 $QQ_1, Q_1Q_2, Q_2Q_3, \dots$ 与边 $PP_1, P_1P_2, P_2P_3, \dots$ 的电阻都等于 r , 边 $PQ, P_1Q_1, P_2Q_2, \dots$ 的电阻都等于 $2r$. 已知 PQ 两点间的总电阻为 Cr , C 是一已知数, 在 $x>0$ 的半空间分布有随时间 t 均匀增加的匀强磁场, 磁场方向垂直于 Oxy 平面并指向纸里, 如图 4-17 所示.

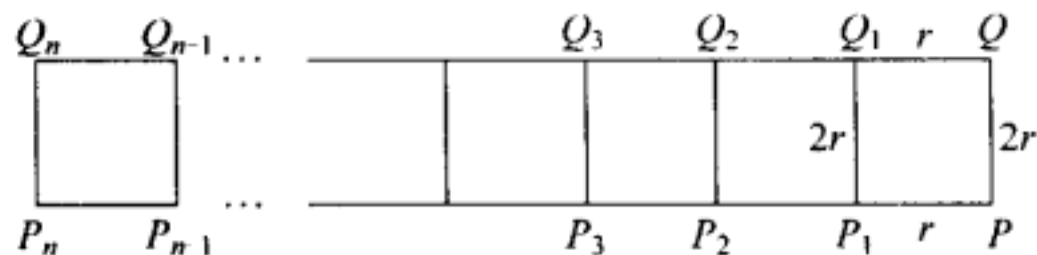


图 4-16

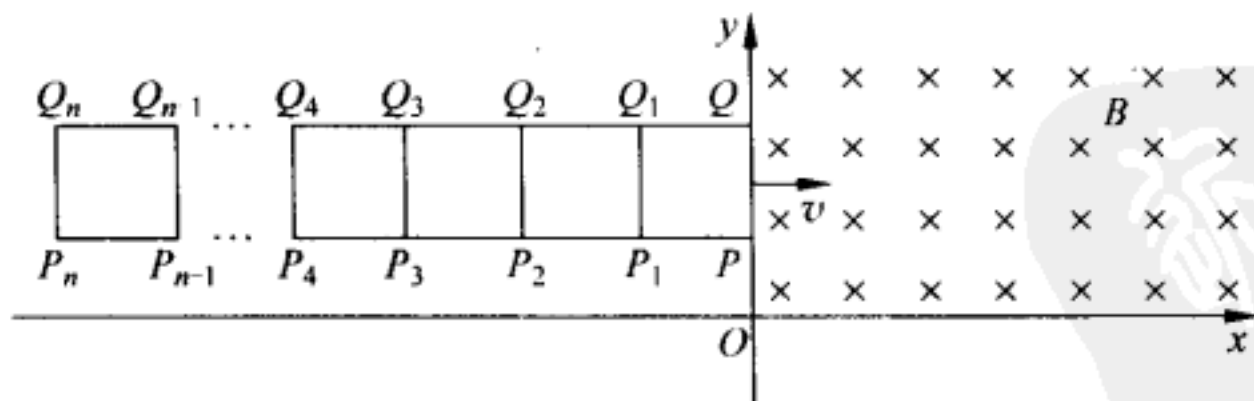


图 4-17

今令导线网络 PQQ_nP_n 以恒定的速度 $v=5.0\text{cm/s}$ 沿 x 方向运动并进入磁场区域, 在运动过程中方格的边 PQ 始终与 y 轴平行. 若取 PQ 与 y 轴重合的时刻为 $t=0$, 在以后任一时刻 t 磁场的磁感应强度为 $B=B_0+bt$, 式中 t 的单位为 s , B_0 为已知恒量, $b=0.10B_0\text{s}^{-1}$. 求 $t=2.5\text{s}$ 时刻, 通过导线 PQ 的电流(忽略导线网络的自感).

解析

网络由 n 个方格构成, 用 R_n 表示 PQ 两端的总电阻, 则

$$R_n = Cr \quad (1)$$

设 P_1Q_1 左边所有方格(包括 P_1Q_1)的总电阻为 R_{n-1} , 则可求得

$$R_n = \frac{2(R_{n-1} + 2r)r}{R_{n-1} + 4r}$$

由此得 $R_{n-1} = \frac{4r(R_n - r)}{2r - R_n}$, $R_{n-2} = \frac{4r(R_{n-1} - r)}{2r - R_{n-1}}$.

即由 PQ 两端的总电阻便可求得 P_1Q_1 左边所有方格的总电阻, 并由此类推可求得任意两点 P_iQ_i 左边(包括 P_iQ_i)所有方格的总电阻.

在网络沿 x 方向运动的过程中, 因导线切割磁感线和磁场随时间变化, 都可以在导线中产生感应电动势.

每一个完整的方格通过 y 轴所经历的时间为

$$T = \frac{l}{v} = 2s \quad (2)$$

在 $t=2.5s$ 时, 有一个完整的方格已在磁场区域中, 此刻网络在磁场中的位置如图 4-18 所示.

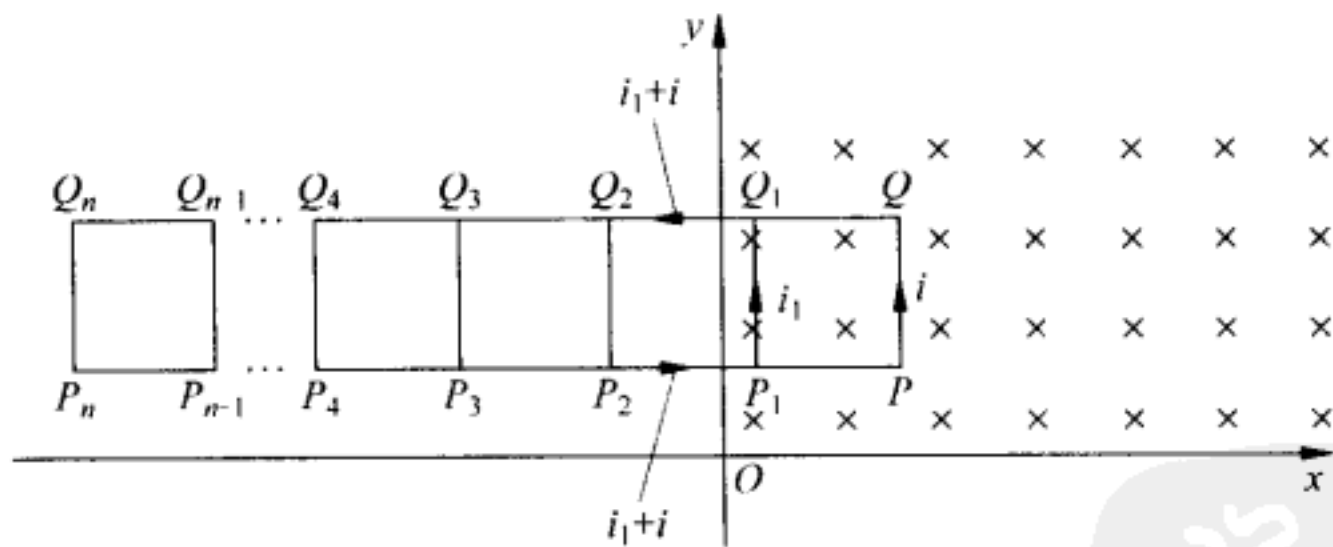


图 4-18

设有关导线中的电流如图所示, 令方格 PQQ_1P_1 中的感应电动势为 \mathcal{E}_1 , 则有

$$4ir - 2i_1r = \mathcal{E}_1 \quad (3)$$

若方格 $P_1Q_1Q_2P_2$ 中的感应电动势为 \mathcal{E}_2 , 则有

$$2i_1r + (i + i_1)(2r + R_{n-2}) = \mathcal{E}_2 \quad (4)$$

由于方格 PQQ_1P_1 全部都在磁场中, PQ 与 P_1Q_1 因切割磁感线而产生的感应电动势之和为零, \mathcal{E}_1 仅是因为磁场随时间的变化而引起的, 即有

$$\mathcal{E}_1 = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = l^2 \frac{\Delta B}{\Delta t} = l^2 b \quad (5)$$

方格 $P_1Q_1Q_2P_2$ 的 P_2Q_2 尚未进入磁场,故 \mathcal{E}_2 中的一部分是因 P_1Q_1 在磁场中的运动而产生的感应电动势

$$\mathcal{E}'_2 = Blv = (B_0 + bt)lv$$

另一部分则是由磁场的变化引起的感应电动势,即

$$\mathcal{E}''_2 = lv(t - T) \frac{\Delta B}{\Delta t} = lv(t - T)b = lvt - l^2b$$

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}'_2 + \mathcal{E}''_2 = B_0lv + 2blvt - l^2b \quad (6)$$

解(3)、(4)、(5)、(6)各式得

$$i = \frac{2r(B_0lv + 2blvt - l^2b) + (4r + R_{n-1})l^2b}{20r^2 + 6rR_{n-2}} \quad (7)$$

由(1)式可求得

$$R_{n-1} = \frac{4(C-1)}{2-C}r, \quad R_{n-2} = \frac{2(5C-6)}{4-3C}r \quad (8)$$

代入有关数据得

$$i = \frac{B_0}{r} \cdot \frac{56-41C}{8} \times 10^{-3} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \quad (9)$$

此题乍看起来, n 个有限的网格中又有感生电动势, 又有动生电动势, 计算某一根电阻的电流似乎抓不住头绪. 实际上, 在第一个网格 PQQ_1P_1 中, 只有两个未知电流 i 与 i_1 , 只要写出与这两个电流有关的电动势 \mathcal{E}_1 与 \mathcal{E}_2 即可解出电流 i , 第一个网格 PQQ_1P_1 中仅有感生电动势 \mathcal{E}_1 , 第二个网格 $P_1Q_1Q_2P_2$ 中既有动生电动势 \mathcal{E}'_2 , 又有感生电动势 \mathcal{E}''_2 . 在第二个网格中, 涉及等效电阻 R_{n-2} , 其值可从递推公式中用电阻 r 求得. 从较深入的层次看, 在第二个网格 $P_1Q_1Q_2P_2$ 中, 感生电动势 \mathcal{E}''_2 实质上是由于磁场区的磁场随时间变化而激发的感生电场提供的, 但我们不需具体求出网格 $P_1Q_1Q_2P_2$ 中每条支路上的感生电动势, 只需求出网格 $P_1Q_1Q_2P_2$ 中总感生电动势 \mathcal{E}''_2 即可. 网格 $P_1Q_1Q_2P_2$ 中用法拉第电磁感应定律磁通变化率求出的电动势应包含动生电动势与感生电动势的合贡献, 要注意的是磁通既是磁场 B 又是面积 S 的函数 $\Phi(B, S)$, 因而总电动势 $\mathcal{E} = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d(BS)}{dt} = B \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial t} S = \mathcal{E}' + \mathcal{E}''$, 前一项就是动生电动势 \mathcal{E}'_2 , 后一项就是感生电动势 \mathcal{E}''_2 .

11. 在如图 4-19 所示的直角坐标中, 有一塑料制成的半锥角为 θ 的圆锥体 Oab . 圆锥体的顶点在原点 O 处. 其轴线沿 z 轴方向. 有一条长为 l 的细金属丝 OP 固定在圆锥体的侧面上, 金属丝与圆锥体的一条母线重合. 整个空间中存在磁感应强度为 B 的均匀磁场, 磁场方向沿 x 轴正方向. 当圆锥体绕其轴沿图示方向做角速度为 ω 的匀角速转动时:

- 1) OP 经过何处时两端的电势相等?
- 2) OP 在何处时 P 端的电势高于 O 端?
- 3) 电势差 $U_P - U_O$ 的最大值是多少?

解析

1) 当 OP 经过 yOz 平面的瞬间, 两端的电势相等, 因为此时 OP 的运动方向和磁场方向平行(同向或反向).

2) 只要 OP 处在 yOz 平面的右侧, P 点的电势总是高于 O 点.

3) 当 OP 处于 yOz 平面的右侧且运动方向和磁场方向垂直时, 即通过 xOz 平面的瞬间(如图 4-20 所示), $U_P - U_O$ 的值最大. 其值等于在此瞬间很短时间间隔 Δt 内, OP 切割的磁感线数 $\Delta\Phi$ 除以 Δt , 由几何投影可知, $\Delta\Phi$ 也等于 Δt 内 OP 在 yOz 平面上的投影切割的磁感线的数目. P 在 yOz 平面上的投影为沿 y 轴方向做圆频率为 ω 、振幅为 $l\sin\theta$ 的简谐振动, 此简谐振动在 z 轴附近时其速度为 $\omega l\sin\theta$, 因此 OP 的投影切割的面积为一小三角形($\triangle MON$)的面积. 即

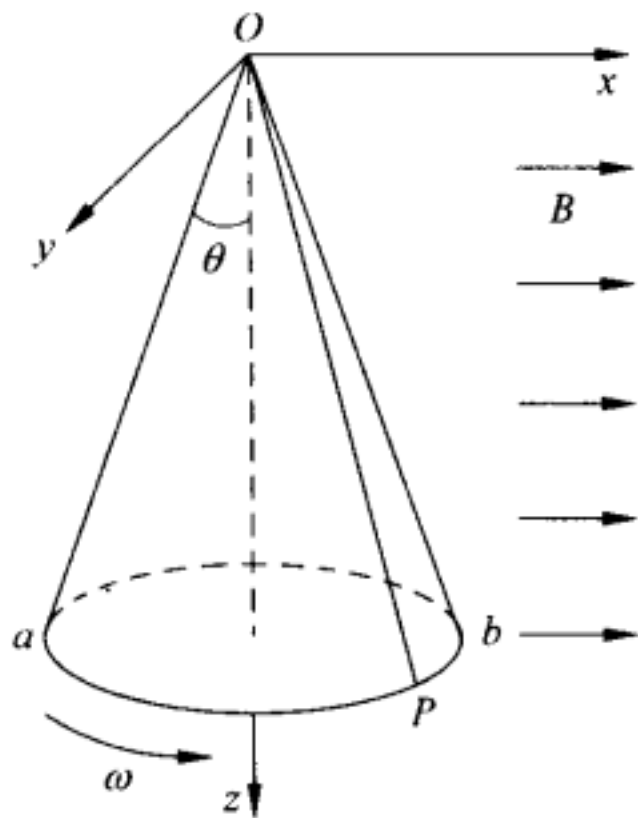


图 4-19

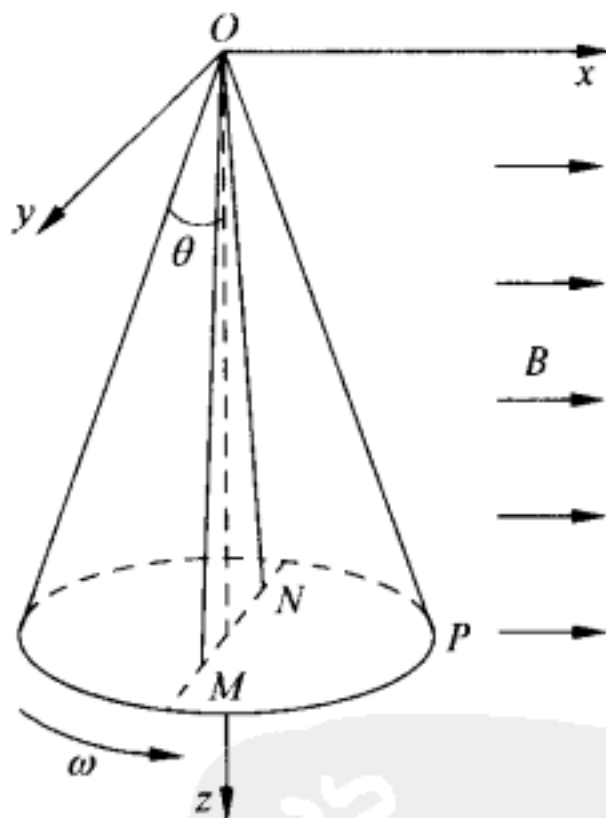


图 4-20

$$\Delta S = \frac{1}{2} l \cos\theta \omega l \sin\theta \cdot \Delta t \quad (1)$$

切割的磁感线数即磁通量为

$$\Delta\Phi = B\Delta S = \frac{1}{2} l^2 \omega B \cos\theta \sin\theta \cdot \Delta t \quad (2)$$

根据法拉第定律可知

$$U_P - U_O = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{1}{2} l^2 \omega B \cos\theta \sin\theta \quad (3)$$

本题属于法拉第电磁感应定律的运用,但比较灵活.难点在于第3)问,金属丝 OP 上各点切割磁感线的速度大小不同,无法直接用课内学过的 $\mathcal{E}=BLv$ 来计算.除了上面给出的解答外,也可以用 OP 在 yOz 平面上的投影 $l\cos\theta$ 作为长度 L ,以 OP 中点处通过 xOz 平面瞬间的速度 $\frac{1}{2}\omega l\sin\theta$ 作为速度 v ,由 $\mathcal{E}=BLv$ 来求解.

12. 有人设计了下述装置用以测量线圈的自感系数.在图 4-21 中, E 为电压可调的直流电源, K 为开关, L 为待测线圈的自感系数, r_L 为线圈的直流电阻, D 为理想二极管, r 为用电阻丝做成的电阻器的电阻, A 为电流表.将图 4-21 中 a 、 b 之间的电阻丝装进图 4-22 所示的试管 1 内.图 4-22 中其他装置见图下说明.其中注射器筒 5 和试管 1 组成的密闭容器内装有某种气体(可视为理想气体),通过活塞 6 的上下移动可调节毛细管 8 中有色液柱的初始位置,调节后将阀门 10 关闭,使两边气体隔开.毛细管 8 的内直径为 d .

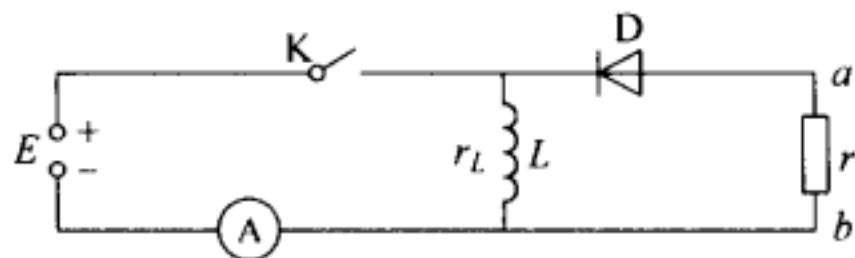


图 4-21

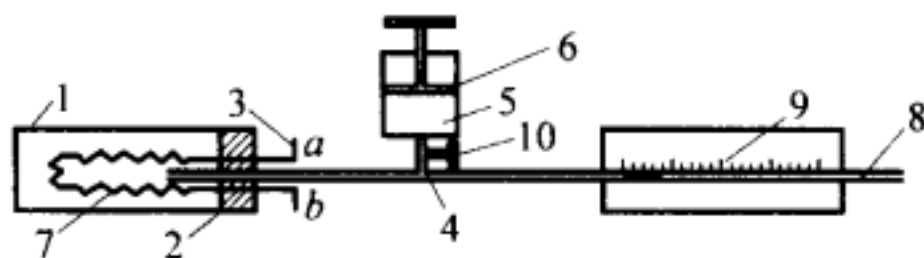


图 4-22

1—试管 2—橡皮塞 3—铜导线 4—三通管
5—注射器筒 6—活塞 7—电阻丝 8—水平放置的毛细管,
内有一段有色液柱,其右端与大气相通,左端与试管相通
9—画有刻度尺的底板 10 阀门

已知在压强不变的条件下,试管中每摩尔气体的温度升高 1K 时,需要吸收的热量为 C_p ,大气压强为 p .设试管、三通管、注射器和毛细管皆为绝热的,电阻丝的热容不计.当接通开关 K 后,线圈 L 中将产生磁场,已知线圈中储存的磁场能量 $W = \frac{1}{2}LI^2$, I 为通过线圈的电流,其值可通过电流表 A 测量.现利用此装置及合理的步骤测量线圈的自感系数 L .

- 1) 简要写出此实验的步骤.
- 2) 用题中所给出的各已知量(r 、 r_L 、 C_p 、 p 、 d 等)及直接测得的量导出 L 的表达式.

解析

- 1) (i) 调整活塞 6 使毛细管 8 中有色液柱处于适当位置,将阀门 10 关闭使两边气体隔绝,记下有色液柱的位置;
- (ii) 合上开关 K ,测得电流 I ;
- (iii) 打开开关 K ;
- (iv) 测出有色液体右移的最远距离 Δx ;

(V) 改变电源电压, 重复测量多次, 记下多次的 I 和 Δx 值.

2) 合上开关 K 后, 线圈储存磁场能量 $W = \frac{1}{2}LI^2$, 因 D 的存在, r 中无电流. 打开开关 K 后, 由于 L 中有感应电动势, 在线圈 L 、电阻器 ab 和二极管 D 组成的回路中有电流通过, 最后变为零. 在此过程中原来线圈中储存的磁场能量将转化为 r 和 r_L 上放出的热量, 其中 r 上放出的热量为

$$\Delta Q = \frac{1}{2}LI^2 \cdot \frac{r}{r+r_L} \quad (1)$$

此热量使试管中的气体加热、升温. 因为是等压过程, 所以气体吸热为

$$\Delta Q = \frac{m}{\mu} C_p \Delta T \quad (2)$$

式中 m 为气体质量, μ 为其摩尔质量, ΔT 为温升. 因为是等压过程, 设气体体积改变量为 ΔV , 则由理想气体状态方程可得

$$p\Delta V = \frac{m}{\mu} R \Delta T \quad (3)$$

而

$$\Delta V = \frac{\pi d^2}{4} \Delta x \quad (4)$$

由以上各式可得

$$L = \frac{\Delta x}{I^2} \cdot \frac{r_L + r}{2r} \cdot \frac{C_p p \pi d^2}{R} \quad (5)$$

本题是热学与电磁学的综合题. 从能量转换的观点看, 将有关关系搭上“桥梁”求解并不困难. 但相当一部分学生对第 1) 问中的实验步骤与安排不得要领, 说明一部分学生对一些非传统的题不知如何下手.

13. 在图 4-23 中, 半径为 R 的圆柱形区域内有匀强磁场, 磁场方向垂直纸面指向纸外. 磁感应强度 B 随时间均匀变化, 变化率 $\Delta B/\Delta t = K$ (K 为一正值常量). 圆柱形区外空间中没有磁场, 沿图中 AC 弦的方向画一直线, 并向外延长, 弦 AC 与半径 OA 的夹角 $\alpha = \pi/4$. 直线上有一任意点, 设该点与 A 点的距离为 x , 求从 A 沿直线到该点的电动势的大小.



图 4-23

解析

由于圆柱形区域内存在变化磁场, 在圆柱形区域内外空间中将产生涡旋电场, 电场线为圆, 圆心在圆柱轴线上, 圆面与轴线垂直, 如图 4-24 中虚点线所示. 在这样的电场中, 沿

任意半径方向移动电荷时,由于电场力与移动方向垂直,涡旋电场力做功为零,因此沿半径方向任意一段路径上的电动势均为零.

1) 任意点在磁场区域内: 令 P 为任意点(见图 4-24), $x \leq \sqrt{2}R$. 在图中连直线 OA 与 OP . 取闭合回路 $APOA$, 可得回路电动势 $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_{AP} + \mathcal{E}_{PO} + \mathcal{E}_{OA}$, 式中 \mathcal{E}_{AP} 、 \mathcal{E}_{PO} 、 \mathcal{E}_{OA} 分别为从 A 到 P 、从 P 到 O 、从 O 到 A 的电动势. 由前面的分析可知 $\mathcal{E}_{PO} = 0$, $\mathcal{E}_{OA} = 0$, 故

$$\mathcal{E}_{AP} = \mathcal{E}_1 \quad (1)$$

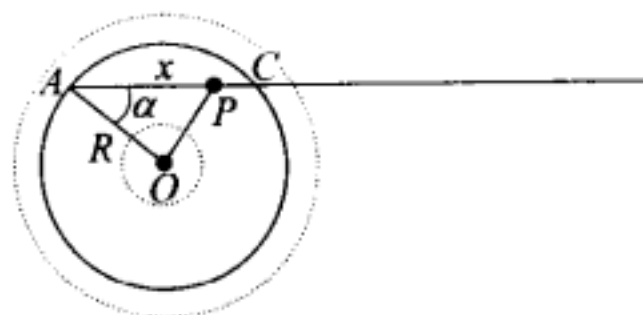


图 4-24

令 $\triangle AOP$ 的面积为 S_1 , 此面积上磁通量 $\Phi_1 = BS_1$, 由电磁感应定律, 回路的电动势大小为

$$\mathcal{E}_1 = \frac{\Delta\Phi_1}{\Delta t} = S_1 \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

根据题给的条件有

$$\mathcal{E}_1 = S_1 K \quad (2)$$

由图 4-24 可知

$$S_1 = \frac{1}{2} x R \sin\alpha = \frac{xR}{2\sqrt{2}} \quad (3)$$

由(1)、(2)、(3)式可得沿 AP 线段的电动势大小为

$$\mathcal{E}_{AP} = \frac{KR}{2\sqrt{2}} x \quad (4)$$

2) 任意点在磁场区域外: 令 Q 为任意点(见图 4-25), $x > \sqrt{2}R$. 在图中连 OA 、 OQ . 取闭合回路 $AQOA$, 设回路中电动势为 \mathcal{E}_2 , 根据类似上面的讨论, 有

$$\mathcal{E}_{AQ} = \mathcal{E}_2 \quad (5)$$

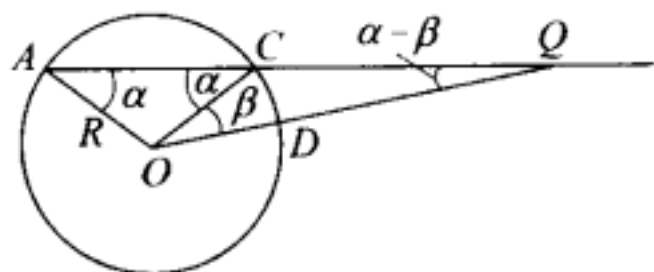


图 4-25

对于回路 $AQOA$, 回路中磁通量等于回路所包围的磁场区的面积的磁通量, 设此面积为 S_2 , 通过它的磁通量 $\Phi_2 = BS_2$. 根据电磁感应定律可知回路中电动势的大小为

$$\mathcal{E}_2 = S_2 K \quad (6)$$

在图中连 OC , 令 $\angle COQ = \beta$, 则 $\angle OQC = \alpha - \beta$, 于是

$$\begin{aligned} S_2 &= \triangle AOC \text{ 的面积} + \text{扇形 } OCD \text{ 的面积} \\ &= \left(\frac{1}{2} R \sin\alpha \right) \cdot 2R \cos\alpha + \frac{\beta}{2\pi} \pi R^2 \\ &= \frac{1}{2} R^2 (\sin 2\alpha + \beta) \end{aligned}$$

当 $\alpha = \pi/4$ 时, $S_2 = \frac{1}{2}R^2(1+\beta)$

$\triangle OCQ$ 中有

$$\frac{x-\sqrt{2}R}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin[(\pi/4)-\beta]}$$

$$R\sin\beta = (x-\sqrt{2}R)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right) = (x-\sqrt{2}R)\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\beta-\sin\beta)$$

$$\left[R + \frac{x-\sqrt{2}R}{\sqrt{2}}\right]\sin\beta = \frac{(x-\sqrt{2}R)}{\sqrt{2}}\cos\beta$$

$$\tan\beta = \frac{x-\sqrt{2}R}{x}$$

于是得

$$S_2 = \frac{1}{2}R^2\left(1 + \arctan \frac{x-\sqrt{2}R}{x}\right) \quad (7)$$

由(5)、(6)、(7)式可得沿 AQ 线的电动势的大小为

$$\mathcal{E}_{AQ} = \frac{KR^2}{2}\left(1 + \arctan \frac{x-\sqrt{2}R}{x}\right) \quad (8)$$

在一个区域内磁场发生变化即会在整个空间区域激发出涡旋电场. 可以证明电场线为以轴线为对称轴的同轴圆线. 要求出磁场区内、外直线上的感生电动势需要用积分的方法, 但是感应电动势可以通过中学熟知的法拉第电磁感应定律求出, 因此作辅助线 \overline{OA} 、 \overline{OP} 和 \overline{OQ} 的径向直线(径向直线的感应电动势为零), 与直线 \overline{AP} 或 \overline{AQ} 分别形成 $\triangle AOP$ 与 $\triangle AOQ$. 就可以应用法拉第电磁感应定律了.

14. 圆形线圈 C 的轴线 z 沿水平方向, 有一用钕铁硼材料制成的圆柱形强磁体 M, 其圆形端面分别为 N 极和 S 极, 将磁体 M 与线圈 C 共轴放置. 磁体的对称中心置于 z 轴的原点 O. Q 点是线圈 C 对称截面的圆心, 当 Q 点位于 z 轴不同位置时, 用实验的方法测得穿过线圈 C 的总磁通 Φ . 由此测得的 Φ 值沿 z 轴的分布函数图线如图 4-26(a) 所示. 图中横轴上 z 值是 Q 点的坐标. 现令强磁体 M 沿线圈的轴线方向穿过该线圈 C, 将 C 两端接一电阻, 其阻值 $R = 1000\Omega$, 远大于线圈的电阻阻值. 将接在电阻 R 两端的电压信号通过计算机实时处理(如图 4-26(b) 所示), 可在计算机屏幕上显示出线圈 C 两端的电压信号如图 4-26(c) 所示, 信号轨迹近似看作三角波形.

1) 试估算强磁体 M 通过线圈时的速度(不计线圈中的感应电流对运动磁体的影响).

2) 试求图 4-26(c) 中, t_1 至 t_3 期间流过电阻 R 的电荷量.

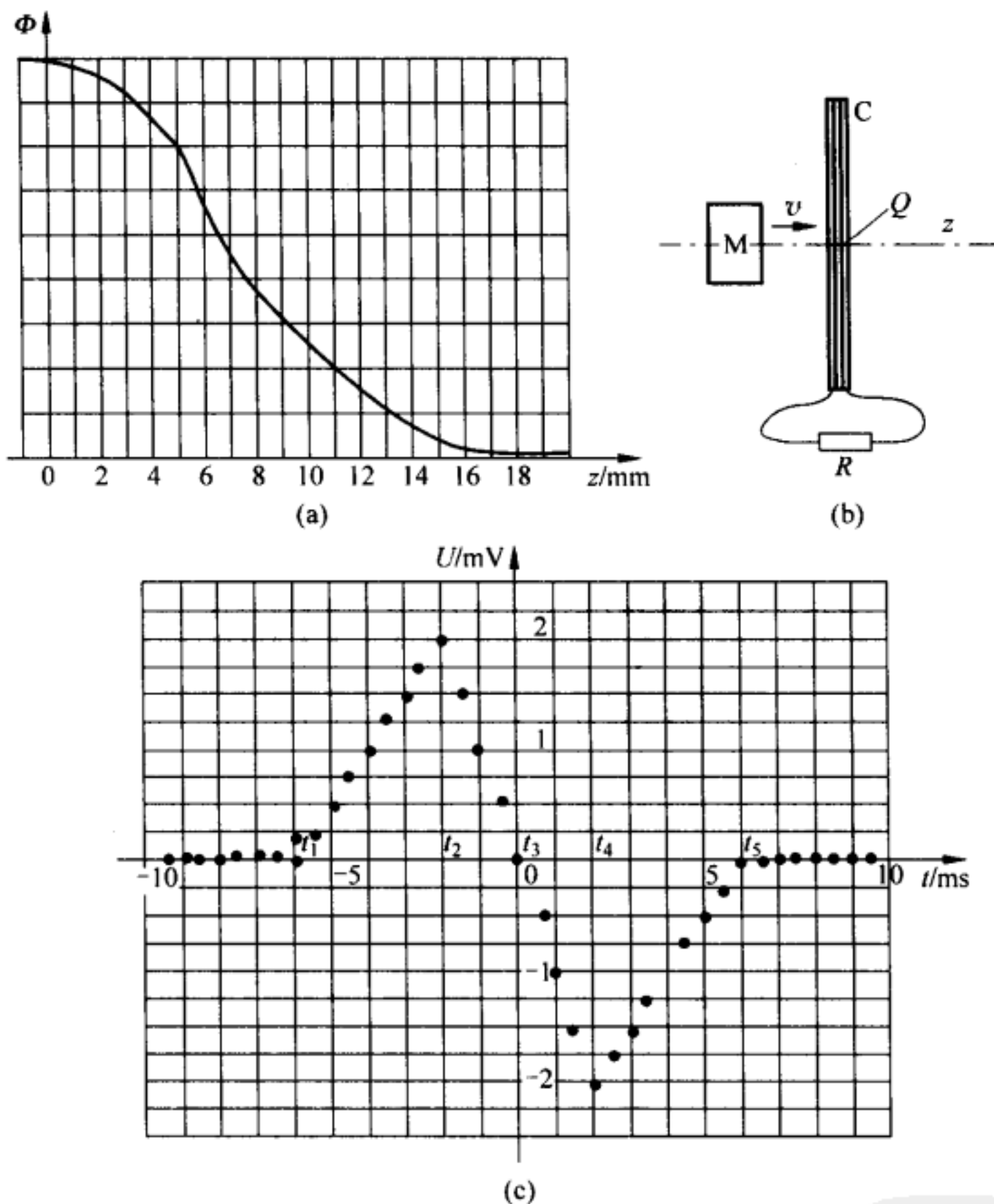


图 4-26

解析

1) 当磁体 M 向线圈 C 靠拢时, 穿过线圈 C 的总磁通 Φ 随 Q 点的坐标 z 的改变而变化, 因而在线圈内产生感应电动势 \mathcal{E} , 其数值为

$$\mathcal{E} = \left| \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right| \quad (1)$$

当磁体以速度 v 穿过线圈 C 时, 在 Δt 时间内 z 的改变量为 $\Delta z = v\Delta t$, 代入(1)式得

$$\mathcal{E} = \left| \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right| = \left| \frac{\Delta\Phi}{\Delta z} v \right| \quad (2)$$

所以 \mathcal{E} 的大小与 $\Phi-z$ 曲线各点的斜率的绝对值成正比, \mathcal{E} 的最大值与 $\frac{\Delta\Phi}{\Delta z}$ 的最大值相对应. 用三角板与图 4-27 中的曲线的不同点相切, 在 $z=6\text{mm}$ 处斜率最大, 此点应对应于电动势最大值, 计算机实时测得的数据是电阻 R 两端的电压值 U , 因其阻值远大于线圈 C 的阻值, 因而从 $U=\mathcal{E}$, 图 4-28 中的 t_2 时刻的 U_M 应对应于 C 位于 $z=6\text{mm}$ 处的电压值. 在 t_1 至 t_2 时间内, 随着磁体 M 向线圈 C 靠拢, $\frac{\Delta\Phi}{\Delta z}$ 的绝对值逐渐增大, t_2 时刻以后, 从图 4-27 可见, 在 $0 \leq z < 6\text{mm}$ 空间范围内, 磁通 Φ 虽继续增大, 但磁通随空间的变化率却在减缓, 表明随着磁体 M 向前运动, 与 $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ 成正比的电压 U 逐渐减小. 当磁体 M 的中点与

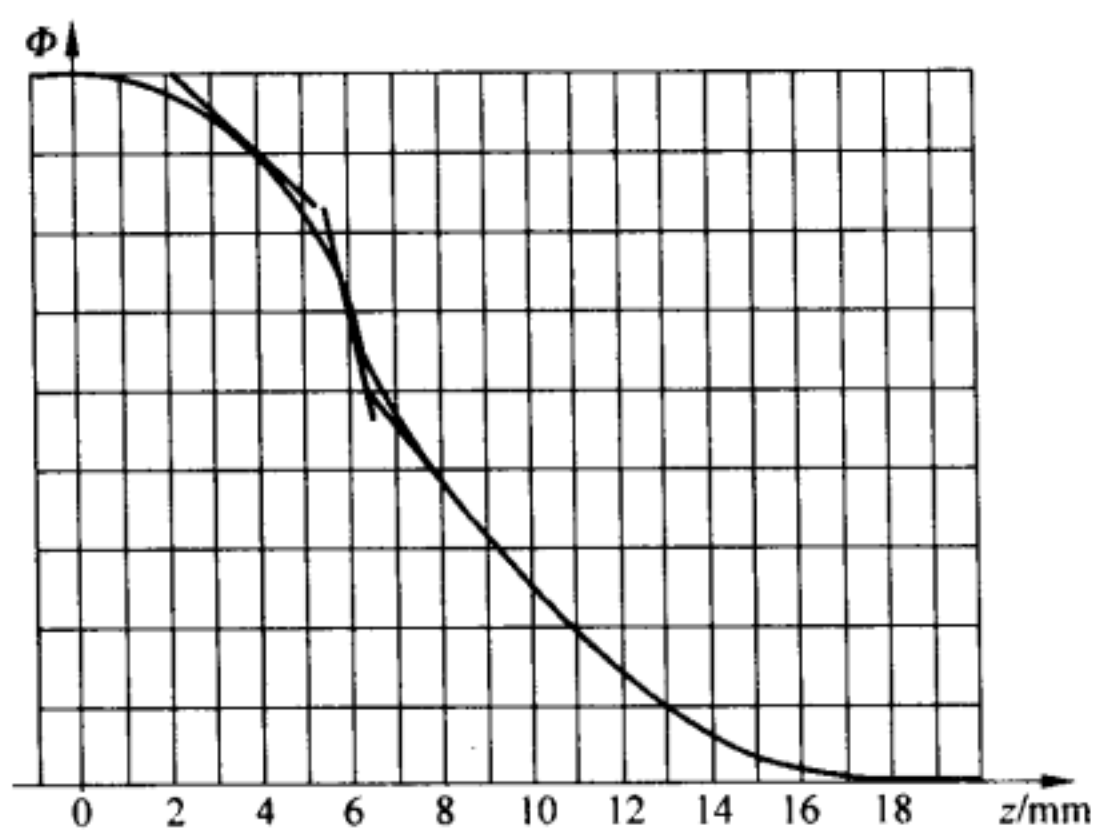


图 4-27

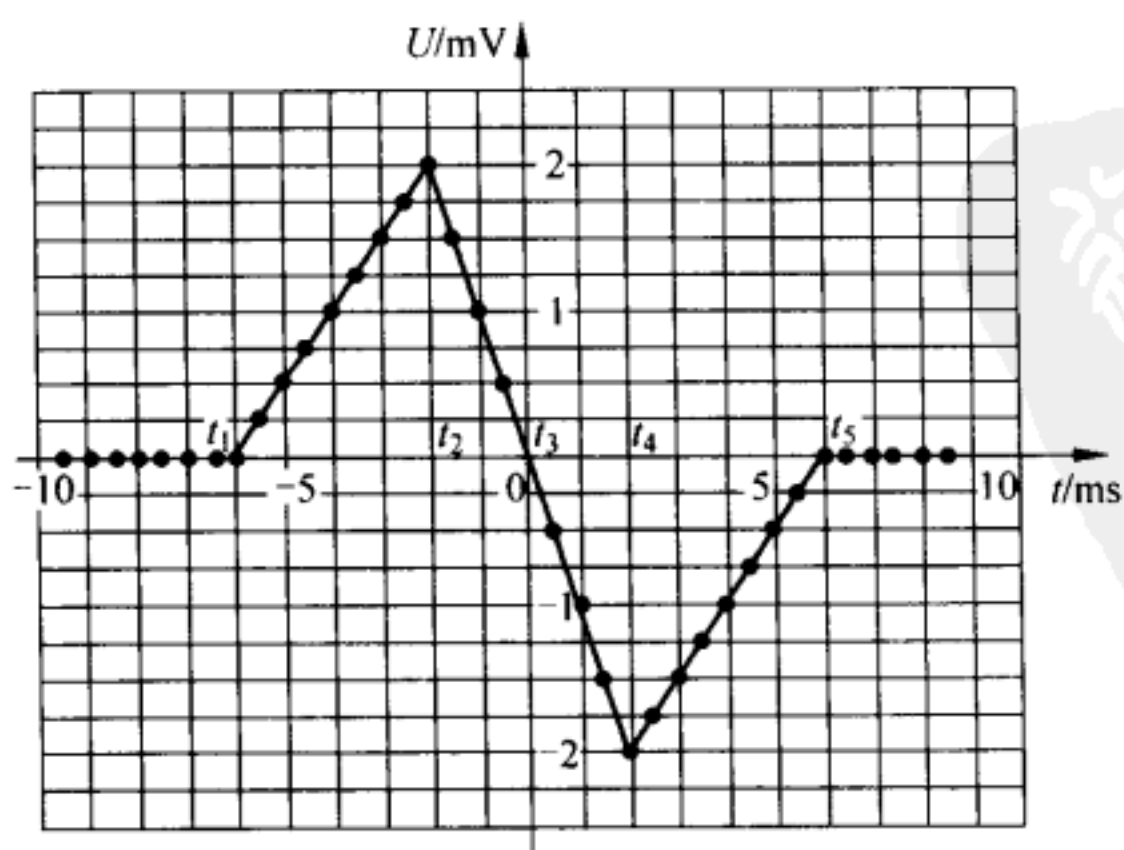


图 4-28

线圈的 Q 点重合时,总磁通 Φ 增至最大,但 $\frac{\Delta\Phi}{\Delta z}$ 为零,对应于图 4-28 中 t_3 时刻的 U 值为零. 当磁体 M 由左向右继续前进, Φ 的切线倾斜方向相反,表明 C 中感应电动势反向,流过电阻的电流反向, U 数值变为负,绝对值逐渐增大. 根据对称性,在 t_4 时刻,对应于线圈 C 的 Q 点位于 $z = -6\text{mm}$ 处, $\frac{\Delta\Phi}{\Delta z}$ 的绝对值也是最大值,对照图 4-28,此时刻,对应电压的绝对值最大. t_4 时刻以后,磁体 M 远离线圈 C,感应电动势 \mathcal{E} 绝对值逐渐减小至零. 由图 4-28 可见, t_2 至 t_4 时间间隔为 4ms ,磁体 M 通过的距离应等于两个磁通变化率最大值之间的距离 $\Delta s = 2 \times 6\text{mm} = 0.012\text{m}$,故

$$v = \frac{\Delta s}{t_4 - t_2} = 30\text{m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (3)$$

2) 通过电阻 R 的电流 i 为

$$i = \frac{U}{R} \quad (4)$$

由于 U 随时间 t 不断变化, i 也随时间不断变化,在很短时间间隔 Δt 内流过电阻 R 的电量 ΔQ 为

$$\Delta Q = i\Delta t = \frac{U}{R}\Delta t \quad (5)$$

$U\Delta t$ 表示图 4-28 中三角形面积内一个小时间间隔 Δt 的矩形面积,在 t_1 到 t_3 时间间隔中流过电阻 R 的总电量 Q 应为所有这些 ΔQ 之和,即

$$Q = \sum \Delta Q = \frac{1}{R} \sum U\Delta t \quad (6)$$

等式右端的取和值就是图 4-28 中 t_1 到 t_3 所对应的三角形面积,因三角形的顶点 $U = 2\text{mV}$, $t_3 - t_1 = 6\text{ms}$,故三角形面积为(U 以 V 为单位, t 以 s 为单位)

$$\frac{1}{2}[U_M(t_3 - t_1)] = 6 \times 10^{-6}$$

代入(6)式得

$$Q = 6 \times 10^{-9}\text{C} \quad (7)$$

这是曾在某文献介绍过的测量磁体运动速度的一种方法. 本题作了简化处理,图 4-26(a)、图 4-26(c)及图 4-27、图 4-28 可以通过计算机实时测量和数据处理得到;由学生熟知的法拉第电磁感应定律的(1)式转换成(2)式,需要动动脑筋;利用图 4-27 的图线找出与图 4-28 的对应关系,需要对磁体相对于线圈的运动中的物理过程比较清楚;由测量数据和图线寻找物理量之间的关系又需要有一定的实验知识. 在上述几个方面都是对学生有关能力的考查.

15. 如图 4-29 所示为两个均匀磁场区,分界面与纸面垂直,它们与纸面的交线 aa' 、 bb' 、 cc' 彼此平行,已知磁感应强度 B_1 的方向垂直纸面向外, B_2 的方向垂直纸面向内,且 B_2 的大小为 B_1 的 2 倍,其他区域无磁场.有一多边形开口折线导体 $ABCDEF$,位于纸面内,其边长 $AB=BC=2l$; $CD=DE=EF=l$. 各边夹角皆为直角,当 CD 边平行于 aa' 并匀速地沿垂直于 aa' 的方向向右运动时,试以 CD 边进入 aa' 为原点, CD 边与 aa' 线的距离 x 为横坐标, AF 间的电势差 U_{AF} (即 $U_A - U_F$) 为纵坐标,准确地画出 U_{AF} 随 x 变化的图线(以刚开始有感应电动势时 U_{AF} 的值作为 1 个单位). 本题不要求列出计算式和文字说明.

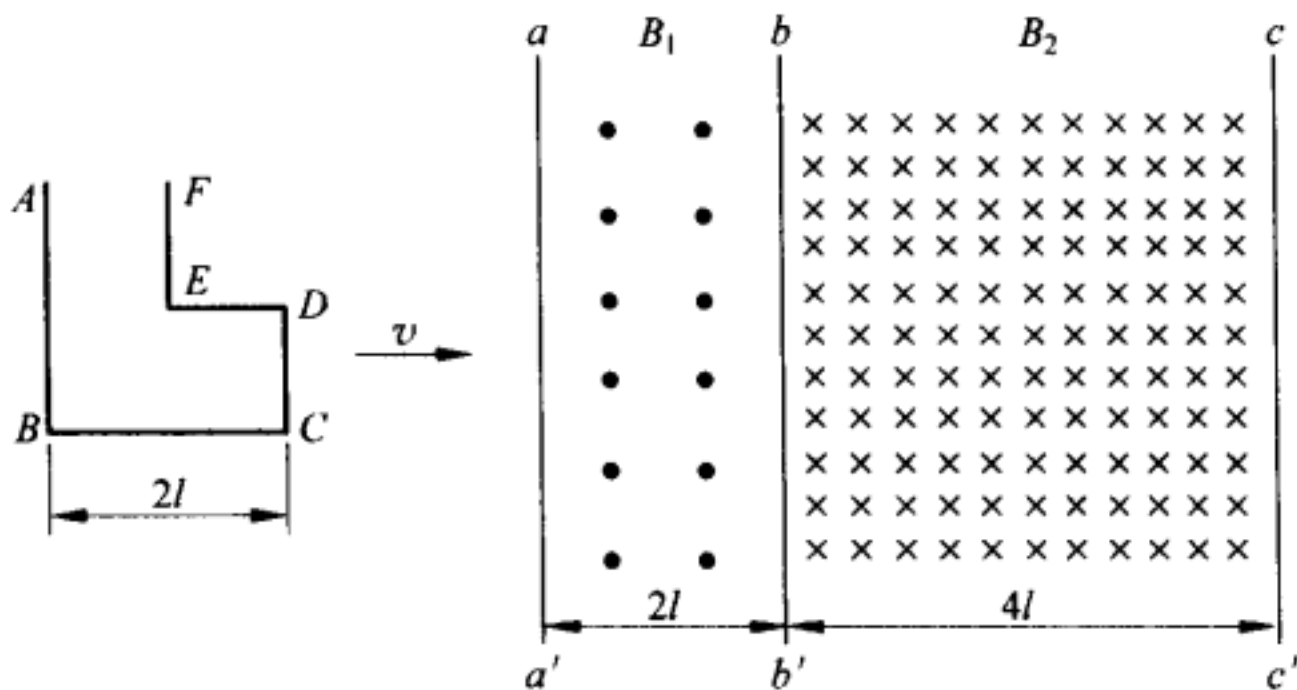


图 4-29

解析

折线导体各线段,切割磁感线时,在该线段中就会产生感应电动势, AF 间电势差 U_{AF} 的大小等于各段感应电动势的代数和的大小,当感应电动势的方向由 F 至 A 时, $U_A > U_F$, U_{AF} 为正值. 按此分析计算,结果如图 4-30 所示. 各段相应的状况为:

- 1) $0 < x < l$ CD 切割 B_1
- 2) $l < x < 2l$ CD 、 EF 都切割 B_1
- 3) $2l < x < 3l$ CD 切割 B_2 , EF 和 AB 都切割 B_1
- 4) $3l < x < 4l$ CD 、 EF 都切割 B_2 , AB 切割 B_1
- 5) $4l < x < 6l$ CD 、 EF 、 AB 均切割 B_2
- 6) $6l < x < 7l$ EF 、 AB 均切割 B_2
- 7) $7l < x < 8l$ AB 切割 B_2
- 8) $8l < x$ 折线导体全部移出磁场区,不再切割磁感线

问题和解答的方式虽然简单,但是运用法拉第电磁感应定律分析不同区段的感应电

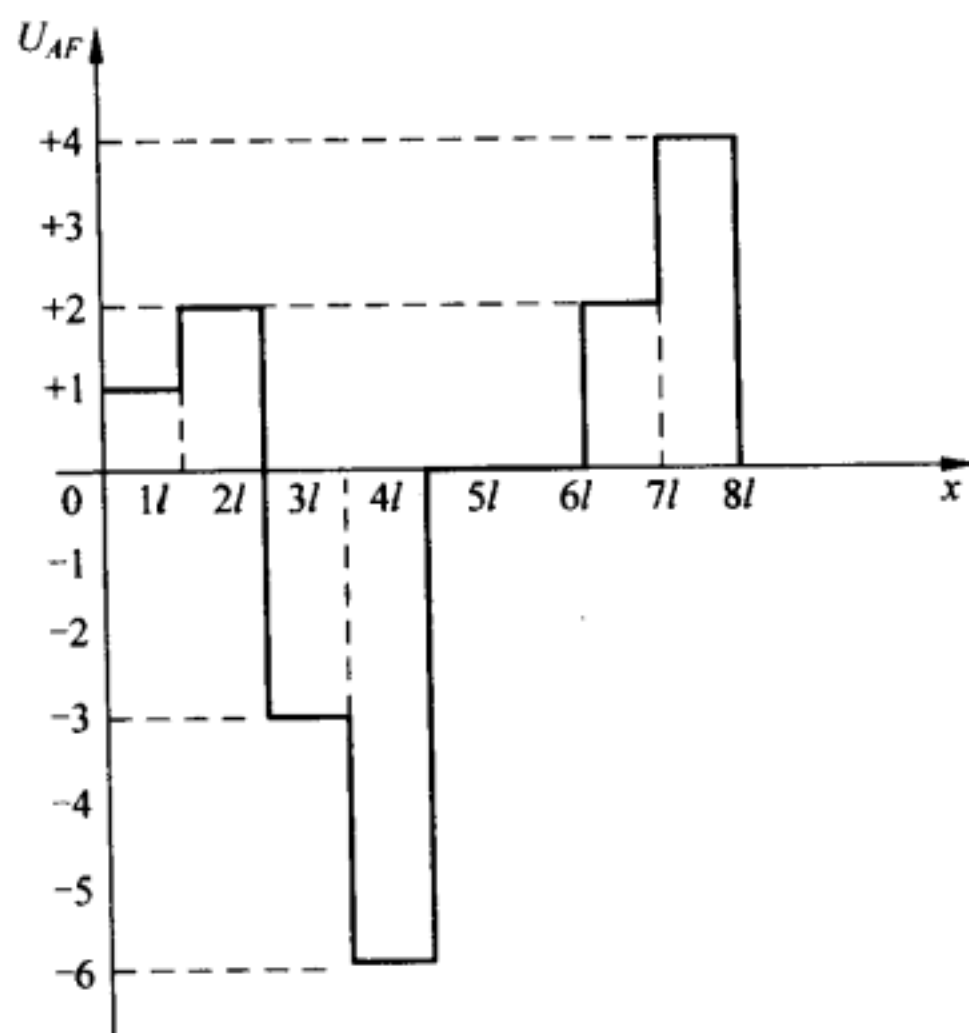


图 4-30

动势的大小和方向并准确地画出相应 U_{AF} 的图线却需要认真、仔细地分析. 这对学生的基本知识是否扎实是一个检验.

16. 如图 4-31 所示, 电源的端电压为 U , 电容器的电容为 C , K 是单刀双掷开关. MN 、 PQ 是两根位于同一水平面内的平行光滑长导轨, 它们的电阻可以忽略不计. 两导轨间距为 L , 导轨处在磁感应强度为 B 的均匀磁场中, 磁场方向垂直于两导轨所在的平面, 并指向图中纸面向里的方向. l_1 和 l_2 是两根横放在导轨上的导体小棒, 它们在导轨上滑动时与导轨保持垂直并接触良好, 不计摩擦. 两小棒的电阻相同, 质量分别为 m_1 和 m_2 , 且 $m_1 < m_2$. 开始时两根小棒均静止在导轨上, 现将开关 K 先合向 1, 然后合向 2. 求:

- 1) 两根小棒最终速度的大小.
- 2) 在整个过程中的焦耳热损耗.

(当回路中有电流时, 该电流所产生的磁场可以忽略不计)

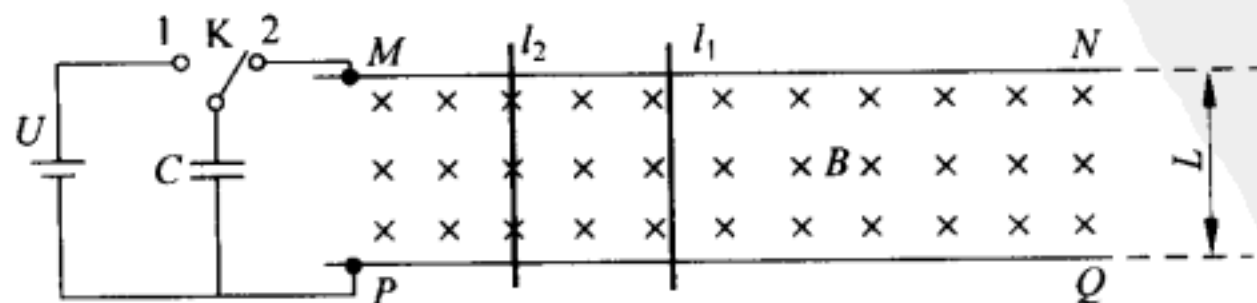


图 4-31

解析

1) 开关 K 由 1 合向 2 后, 起初电容器通过导轨及两小棒构成的回路放电, 外磁场 B 对通有电流的两小棒施加向右的安培力, 使两小棒从静止开始向右做加速运动. 随后, 由于以下三个因素: (i) 电容器的放电电流是随时间衰减的; (ii) 两小棒在磁场中运动切割磁感线所产生的感应电动势阻碍电容器通过小棒放电; (iii) 开始时两小棒受到的安培力相等, 但由于两棒质量不等, 故获得的速度不等, l_1 的速度较大, 产生的动生电动势亦较大, 从而使流经该棒的电流比较小, 导致 l_1 所受的安培力小于 l_2 , 相应的加速度亦较小. 两棒加速过程的差异最终导致两棒以相同的速度运动, 并使两棒产生的动生电动势均等于电容器两端的电压, 流经两棒的电流为零, 它们所受的安培力消失, 两棒维持以相同的速度做匀速运动.

自电容器开始放电至小棒达到最终速度恒定的过程中任一时刻的电流如图 4-32 所示. 此时作用于 l_1 与 l_2 上的安培力分别为

$$F_1 = BLi_1 \quad (1)$$

$$F_2 = BLi_2 \quad (2)$$

在 t 到 $t + \Delta t$ 时间内, 两棒增加的动量由动量定理给出, 即

$$F_1 \Delta t = BLi_1 \Delta t = m_1 \Delta v_1 \quad (3)$$

$$F_2 \Delta t = BLi_2 \Delta t = m_2 \Delta v_2 \quad (4)$$

由于开始时两棒均静止, 最终两棒速度相等, 设最终速度为 v , 则有

$$\sum BLi_1 \Delta t = m_1 v \quad (5)$$

$$\sum BLi_2 \Delta t = m_2 v \quad (6)$$

上两式相加, 得

$$BL \sum (i_1 + i_2) \Delta t = (m_1 + m_2) v \quad (7)$$

任何时刻, 通过 l_1 与 l_2 的电流的代数和等于电容器的放电电流 i , 即

$$i_1 + i_2 = i \quad (8)$$

而

$$\sum (i_1 + i_2) \Delta t = \sum i \Delta t = Q - q \quad (9)$$

式中 Q 为刚开始放电时电容器正极板带的电荷量, q 为小棒达到最终速度时电容器正极板带的电荷量, 显然

$$Q = CU \quad (10)$$

$$q = CBLv \quad (11)$$

由(7)、(8)、(9)、(10)、(11)式得

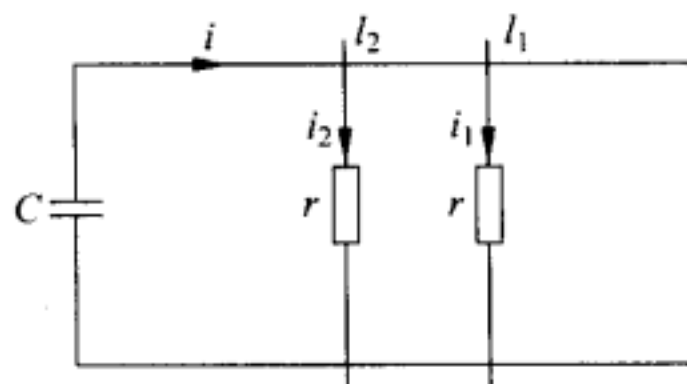


图 4-32

$$BLC(U - BLv) = (m_1 + m_2)v \quad (12)$$

解得

$$v = \frac{BLCU}{m_1 + m_2 + B^2L^2C} \quad (13)$$

2) 电容器开始放电时,所具有的电能为

$$W_0 = \frac{1}{2}CU^2 \quad (14)$$

棒达到最终速度时电容器的储能为

$$W_1 = \frac{1}{2} \frac{q_2^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{B^4L^4C^3U^2}{(m_1 + m_2 + B^2L^2C)^2} \quad (15)$$

两棒最终的动能和为

$$W_2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \frac{B^2L^2C^2U^2}{(m_1 + m_2 + B^2L^2C)^2} \quad (16)$$

整个过程中的焦耳热损耗为

$$\Delta W = W_0 - (W_1 + W_2) = \frac{(m_1 + m_2)CU^2}{2(m_1 + m_2 + B^2L^2C)} \quad (17)$$

双掷开关 K 拨至 1 仅是个电容器充电的过程, K 拨至 2 后才是我们关心的过程, 在导体棒达到匀速运动前, 电路中电流尚未达到稳定值, 这一过程称为暂态(过渡)过程, 解析中定性地分析了这个物理过程. 实际上我们不必具体研究这个过程, 只需抓住过程始末状态(力学的与电学的), 运用能量与动量守恒定律就可求解此题.

17. 如图 4-33 所示, 在光滑的水平面上, 有边长 $l=0.8\text{m}$ 的正方形导线框 $abcd$, 其质量 $m=100\text{g}$, 自感 $L=10^{-3}\text{V}\cdot(\text{s}\cdot\text{A})^{-1}$, 电阻可忽略不计. 该导线框的 bc 边在 $t=0$ 时, 从 $x=0$ 处以初速度 $v_0=4\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 进入磁感应强度为 B 的有界匀强磁场区域. 磁场区域宽度为 $s=0.2\text{m}$, B 的方向与导线框平面垂直(图中指向纸内), B 的大小为 0.5T . 忽略空气阻力. 试求:

- 1) $t=(\pi/36)\text{s}$ 时刻导线框 bc 边的位置.
- 2) 若初速度为 $4v_0/\sqrt{3}$, 求 $t=(\pi/36)\text{s}$ 时刻 bc 边的位置.

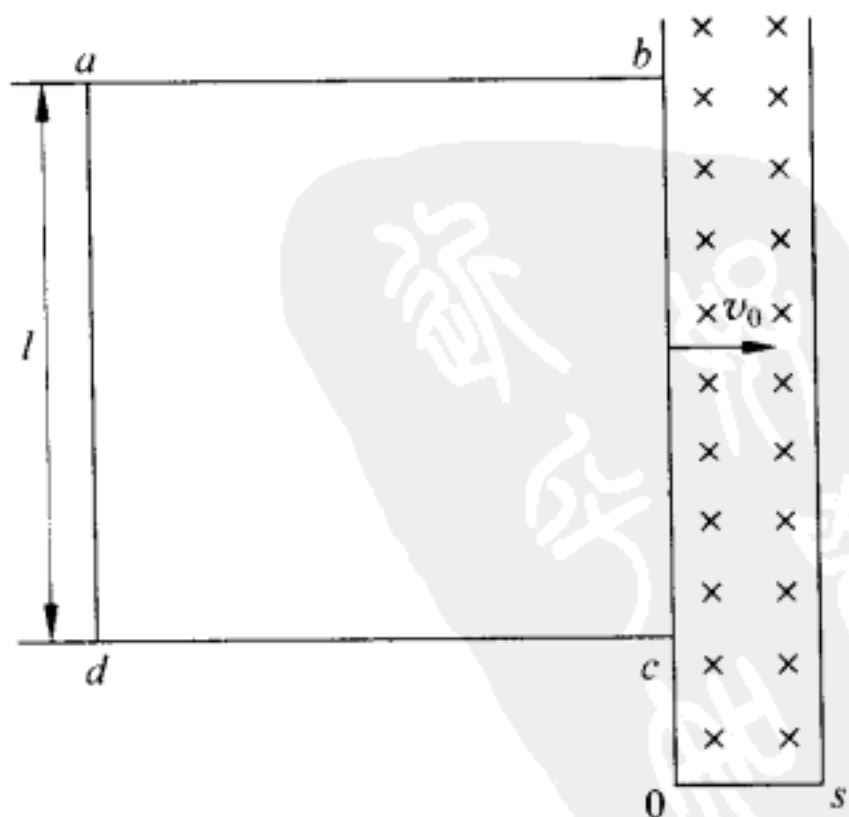


图 4-33

解析

导线框 bc 边进入磁场(ad 边仍在磁场外)

后,选定导线框的位移 x 和速度 v 正方向为向右;线框内的电流和感应电动势正方向为逆时针方向.即线框 $adcba$ 的自感电动势 $\mathcal{E}_i = L \frac{\Delta I}{\Delta t}$, bc 边的动生电动势 $\mathcal{E}_m = vBl$,线框的总电动势为 $\mathcal{E}_i + \mathcal{E}_m$.考虑到电路中电阻为零,故有

$$L \frac{\Delta I}{\Delta t} + vBl = 0$$

得

$$\begin{aligned} L\Delta I/\Delta t &= -vBl \\ L\Delta I &= -Blv\Delta t \\ LI &= -Blx \end{aligned} \quad (1)$$

选安培力 F 和线框的加速度 a 的正方向也是向右,即 bc 边 F 与 a 的关系为

$$F = BlI = ma \quad (2)$$

将(1)式代入(2)式得

$$ma = -Bl(Blx/L)$$

故

$$a = [-B^2 l^2 / (mL)]x$$

令 $\omega = Bl/\sqrt{mL}$,则

$$a = -\omega^2 x \quad (3)$$

(3)式说明 bc 边进入磁场后(ab 边还在磁场外)导线框做简谐振动,振动周期 T 为

$$\begin{aligned} T &= 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{mL}/(Bl) \\ &= 2\pi\sqrt{10^{-1} \times 10^{-3}}/(0.5 \times 0.8)\text{s} = (\pi/20)\text{s} \end{aligned} \quad (4)$$

借助于振动学中参考圆可知

$$x = A\cos(\omega t + \alpha) \quad (5)$$

$$v = -A\omega\sin(\omega t + \alpha) \quad (6)$$

由初始条件 $t=0$ 时, $x=0$, $v=v_0$ 可得

$$\alpha = -\pi/2$$

$$A = v_0/\omega = v_0\sqrt{mL}/(Bl) \quad (7)$$

将(7)式代入(5)、(6)式,得

$$\begin{aligned} x &= (\sqrt{mL}/Bl)v_0\sin\omega t = A\sin\omega t \\ v &= v_0\cos\omega t \end{aligned} \quad (8)$$

1) 若初速 $v_0 = 4\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$,则

$$A = v_0\sqrt{mL}/(Bl) = 4\sqrt{10^{-1} \times 10^{-3}}/(0.5 \times 0.8)\text{m} = 0.1\text{m}$$

在这种情形中,线框 bc 边可达 $s/2$ 处,然后返回.当 $\omega t_1 = \pi$,即经过 $t_1 = \pi/\omega$ 的时间,

bc 边回到 $x=0$ 处, 此时速度 $v=-v_0$, 从此线框沿 x 轴负方向以速度 v 做匀速直线运动, 在 $t=(\pi/36)$ s 时, bc 边的位置 x_1 为

$$\begin{aligned}x_1 &= v(t-t_1) = -4(\pi/36 - \pi/\omega)\text{m} \\ &= -4(\pi/36 - \pi/40)\text{m} \approx -0.035\text{m}\end{aligned}$$

2) 若初速度为 $v'_0=4v_0/\sqrt{3}$, 则 A' 为

$$A' = v'_0 \sqrt{mL}/(Bl) = (0.4/\sqrt{3})\text{m} \approx 0.231\text{m}$$

故在此情况下, bc 边的振幅可达 0.231m , 这表明 bc 边可越过磁场区. 设 bc 边达到 $x=s=0.2\text{m}$ 处的时间为 t_2 , 由(8)式有

$$s = A' \sin(\omega t_2)$$

即

$$\sin(\omega t_2) = s/A' = 0.2/(0.4/\sqrt{3}) = \sqrt{3}/2$$

故

$$\omega t_2 = \pi/3, \quad t_2 = \pi/(3\omega) = (\pi/120)\text{s}$$

在 t_2 时刻, bc 边的速度 v_2 为

$$v_2 = v'_0 \cos(\omega t_2) = v'_0/2 = 2v_0/\sqrt{3}$$

bc 边离开磁场后, 直至 ad 边进入磁场中时止, bc 边将以 v_2 沿 x 轴正方向做匀速直线运动, 在 $t=(\pi/36)$ s 时刻, bc 边的位置 x_2 为

$$x_2 = s + v_2(t-t_2) = 0.2\text{m} + (8/\sqrt{3})(\pi/36 - \pi/120)\text{m} = 0.483\text{m}$$

因 $l=0.8\text{m}$, $x_2 < l$, 故此时线框 ad 边尚未进入磁场区, 因此, 以上解法正确.

符号的正负看似事小, 但是不重视就会无所适从, 随意无章. 在解析中对有关物理量的正方向作了约定, 从而导出了(1)式和(2)式, 继而导出(3)式. 建议学生仔细检查体会, 也希望学生在学习时对物理量符号的正负选择养成一个良好的习惯.

18. 两根长度相等、材料相同, 电阻分别为 R 和 $2R$ 的细导线, 围成一直径为 D 的圆环, P 、 Q 为其两个接点, 如图 4-34 所示. 在圆环所围成的区域内, 存在垂直于圆面, 指向纸里的匀强磁场. 磁场的磁感应强度的大小随时间增大, 变化率为恒定值 b . 已知圆环中的感应电动势是均匀分布的.

设 M 、 N 为圆环上的两点, MN 间的弧长为半圆弧 $PMNQ$ 的一半, 试求这两点间的电压 $U_M - U_N$.

解析

根据电磁感应定律, 整个圆环中的感应电动势的大小

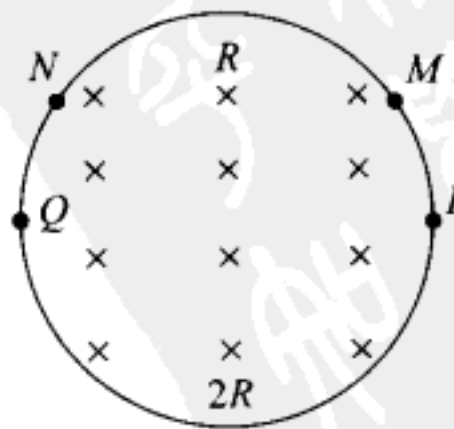


图 4-34

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{1}{4}\pi D^2 b$$

此电动势均匀分布在整個环路内,方向是逆时针方向.由欧姆定律可知感应电流

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + 2R}$$

M、N 两点的电压为:

$$U_M - U_N = \frac{3}{4}\mathcal{E} - I\left(2R + \frac{R}{2}\right)$$

由以上各式,可得

$$U_M - U_N = -\frac{1}{48}\pi D^2 b$$

19. 如图 4-35 所示,一个半径为 a (很大) 的均匀细圆环,其电阻为 r ,放在匀强磁场中,磁感应强度 B 的方向与圆面垂直(指向纸面内),大小随时间均匀增大,即 $\frac{\Delta B}{\Delta t} = b$ (常量). 图中 P 、 Q 是环上两点,对圆环中心的张角为 $\pi/2$. 现将一非常小的电压表用导线跨接在 P 、 Q 两点,电压表的内阻为 R ,连接电压表的导线电阻忽略不计. 并设上述匀强磁场在电压表内部产生的电磁感应及磁力作用皆忽略不计.

1) 若把电压表放在圆环中心处,连接用的导线沿环的半径,如图 4-35(a) 所示,这时电压表的读数是多少?

2) 若把电压表放在 PQ 弦的中点处,连接用的导线沿着此弦,如图 4-35(b) 所示,此时电压表的读数是多少?

解析

1) 设各支路的感应电动势及电流如图 4-36(a) 所示,以 $U_P - U_Q$ 表示 P 、 Q 两点的电势差,则根据欧姆定律,对三个支路可得下列三式:

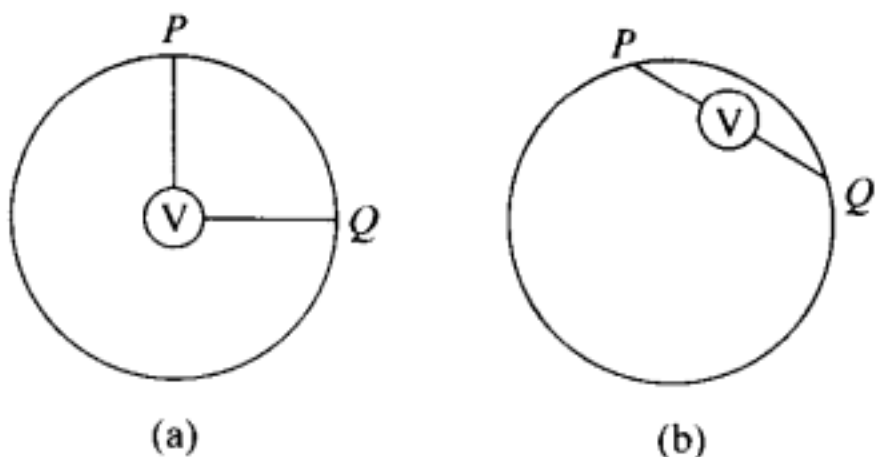


图 4-35

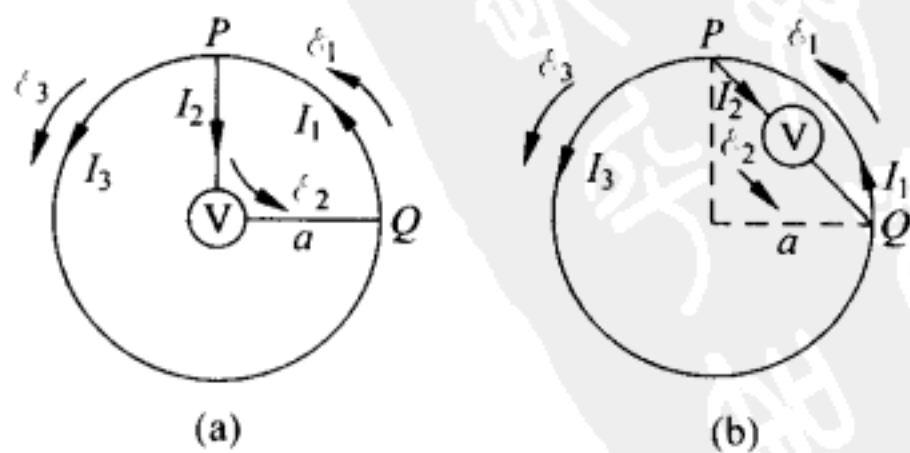


图 4-36

$$U_P - U_Q = \mathcal{E}_1 - \frac{1}{4}I_1 r$$

$$U_P - U_Q = I_2 R - \mathcal{E}_2$$

$$U_P - U_Q = I_3 \times \frac{3}{4}r - \mathcal{E}_3$$

根据法拉第电磁感应定律可知

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \frac{1}{4}\pi a^2 b, \quad \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_2 = \frac{3}{4}\pi a^2 b$$

又在 P 点可写出

$$I_1 = I_2 + I_3$$

由以上诸式可解得 $I_2 = 0$, 由此可知, 此时电压表读数为零.

2) 设各支路中感应电动势和电流如图 4-36(b) 所示, 以 $U_P - U_Q$ 表示 P 、 Q 两点的电势差, 则由欧姆定律可得

$$U_P - U_Q = \mathcal{E}_1 - \frac{1}{4}I_1 r$$

$$U_P - U_Q = I_2 R - \mathcal{E}_2$$

$$U_P - U_Q = I_3 \times \frac{3}{4}r - \mathcal{E}_3$$

由法拉第电磁感应定律可得

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \frac{1}{4}\pi a^2 b - \frac{1}{2}a^2 b$$

$$\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_2 = \frac{3}{4}\pi a^2 b + \frac{1}{2}a^2 b$$

又在 P 点可写出

$$I_1 = I_2 + I_3$$

由以上诸式可解得

$$I_2 = \frac{-8a^2 b}{16R + 3r}$$

故电压表的读数应为

$$\frac{8a^2 b R}{16R + 3r}$$

此题考查学生 1) 对于电磁感应现象中感生电动势的理解, 在磁场随时间变化的情况下, 闭合回路中的感生电动势存在于回路的各段支路中, 且每一支路上均满足一段含源电路的欧姆定律(支路上电动势、电阻上电势降与支路两端电势差三者之间的关系); 2) 对

于电压表读数的本质理解,即电压表读数由通过电压表的电流决定.从参考解答中可以明显看出解题的根据最根本的就是这两点.当然,在本题中不加说明地认为电路中电流是稳恒电流,这在中学物理水平上是不言而喻的.

此题应能对学生在思考问题时学会紧扣基本原理的物理思维方法有所启发与锻炼,不局限于笼统地认为电压表测电压(不管连接线),而稳恒电路中两点间电压是一定值.实际上,当接着电压表的测量电路也放在变化磁场中时,在电压表电路中也有感生电动势,因此测量电路导线所放位置不同,电压表的读数也会不同.

20. 如图 4-37 所示,转轮 1 和转轮 2 的轮缘都是很薄的良导体,每个转轮都有四根轮辐,每条轮辐的长度为 l ,电阻为 r .两轮都可绕各自的轮轴转动(在图中轮轴与纸面垂直).两轮的边缘通过电刷用导线连接.两轮轴亦通过电刷用导线连接.整个装置放在磁感应强度为 B 的匀强磁场中,磁场方向垂直于纸面向里.转轮 2 的边缘与一阻力闸 A 接触.今设法使转轮 1 以恒定的角速度 ω_1 旋转,假定电刷的阻力和导线的电阻都可忽略不计,而阻力闸与轮 2 之间的阻力恒为 F ,则在转轮 2 转动起来并达到稳定时,求

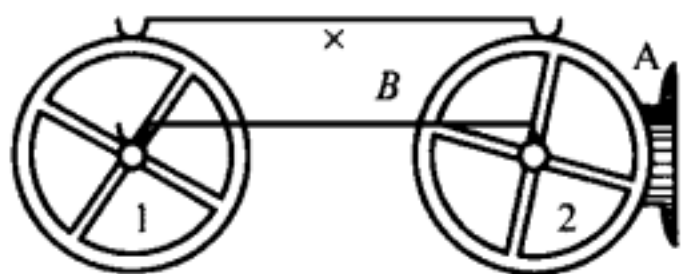


图 4-37

- 1) 转轮 2 的角速度 ω_2 .
- 2) 使转轮 1 做恒定角速度 ω_1 旋转所需的功率.

解析

- 1) 转轮 1 中每一轮辐上的感应电动势

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{1}{2}\omega_1 l^2 B \quad (1)$$

设转轮 2 达到稳定时角速度为 ω_2 ,则转轮 2 中反电动势为

$$\mathcal{E}_2 = \frac{1}{2}\omega_2 l^2 B \quad (2)$$

这时导线中的电流为

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{\frac{r}{4} + \frac{r}{4}} \quad (3)$$

当转轮 2 匀速转动时,其所受磁力矩与阻力矩相等.设转轮 2 轮辐中的电流为 I_2 ,则

$$Fl = 4BI_2 l \left(\frac{1}{2}l\right) \quad (4)$$

而 $I = 4I_2$,由以上各式可解得

$$\omega_2 = \omega_1 - \frac{2Fr}{B^2 l^3} \quad (5)$$

2) 转轮 1 以匀角速 ω_1 旋转所需功率即等于电路总功率

$$P = \mathcal{E}_1 I \quad (6)$$

将(1)、(3)式代入(6)式,可得

$$P = Fl\omega_1$$

21. 如图 4-38 所示,金属飞轮具有 n 条辐条,每条辐条长 l ,可绕转轴 OO' 旋转. 飞轮处在匀强磁场中,磁场方向与转轴平行,磁感应强度为 B . 转轴与飞轮边缘通过电刷与电阻 R 、电感 L 连成闭合回路. 飞轮及转轴的电阻和转动过程的摩擦均不计.

1) 现用一恒定的外力矩 M 作用于飞轮,使它由静止开始转动,求当飞轮转动达到稳定时,转动角速度 Ω_0 和通过电阻 R 的电流 I_0 .

2) 在飞轮转速达到稳定后,突然撤去外力矩 M ,则飞轮的角速度 Ω 和通过电阻 R 的电流 I 都将随时间变化. 当 R 取不同值时,角速度随时间变化的图线 $\Omega(t)$ 和电流随时间变化的图线 $I(t)$ 将不同.

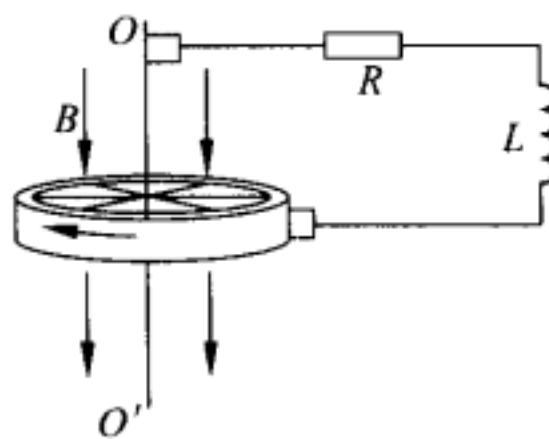


图 4-38

现给出了 $\Omega(t)$ 图线和 $I(t)$ 图线各 6 条(见图 4-39 和图 4-40),各图中都把刚撤去外力矩 M 的时刻作为起始时刻,即 $t=0$ 的时刻,此时刻的角速度 $\Omega=\Omega_0$,电流 $I=I_0$. 角速度 Ω 各图的纵坐标单位相同,电流 I 各图的纵坐标单位相同,各图的时间轴横坐标的单位相同. 试从这些图线中选出可能正确表示飞轮的角速度 Ω 随时间变化的图线 $\Omega(t)$,以及与所选图线对应的最接近正确的电流 I 随时间变化的图线 $I(t)$. 把你选出的图线 $\Omega(t)$ 与对应的 $I(t)$ 图线在下面的图线符号之间用直线连接起来.

$\Omega-1$

$\Omega-2$

$\Omega-3$

$\Omega-4$

$\Omega-5$

$\Omega-6$

$I-A$

$I-B$

$I-C$

$I-D$

$I-E$

$I-F$



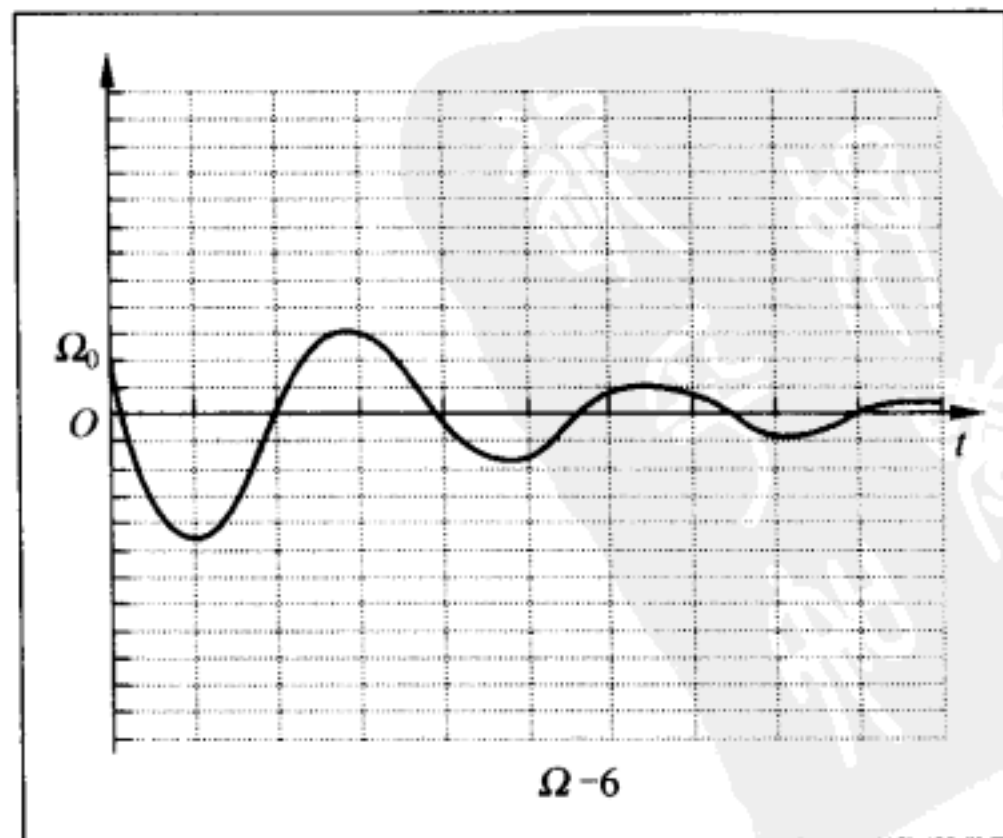
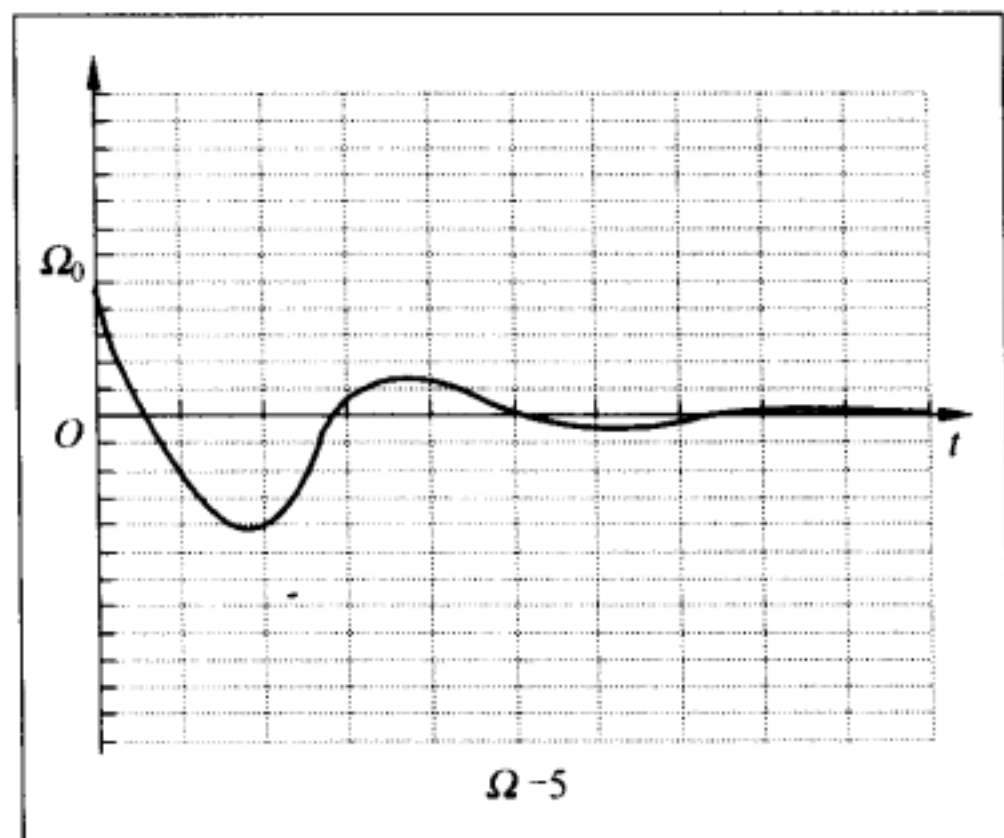
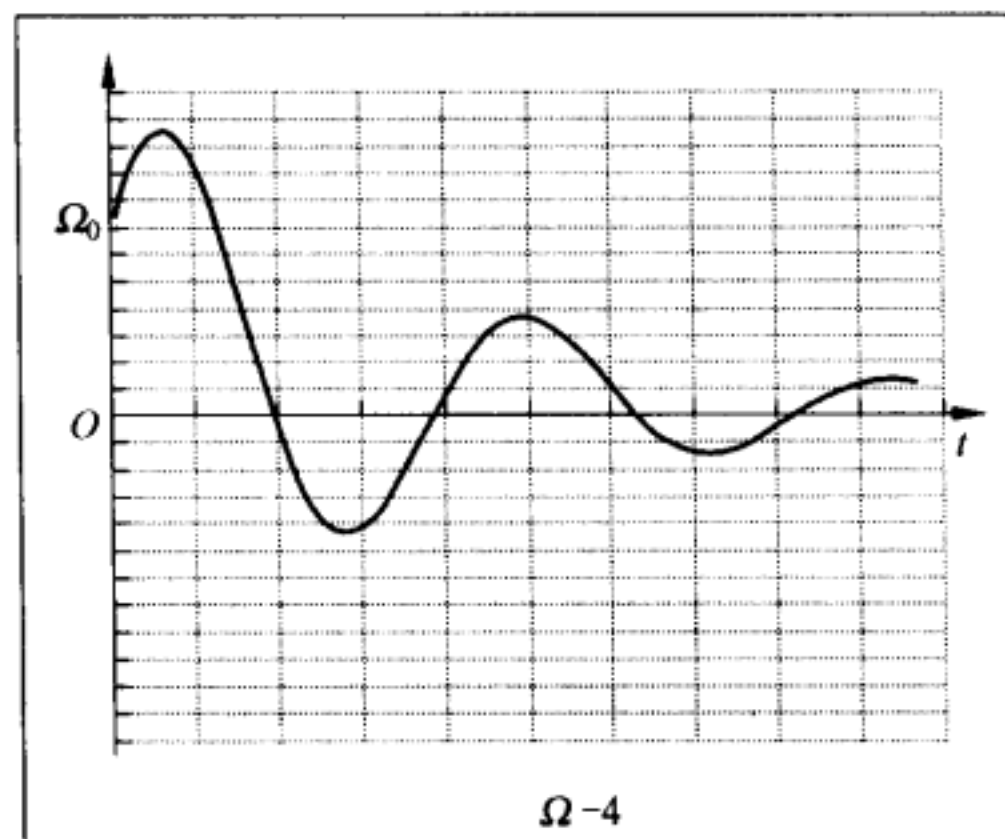
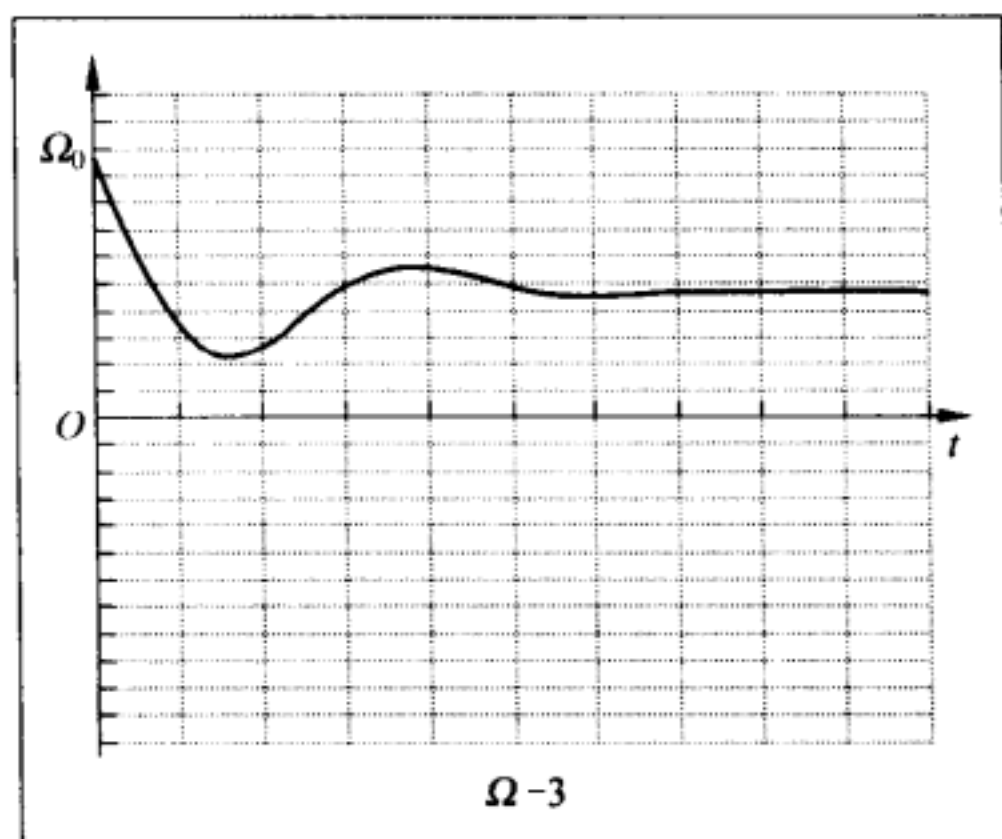
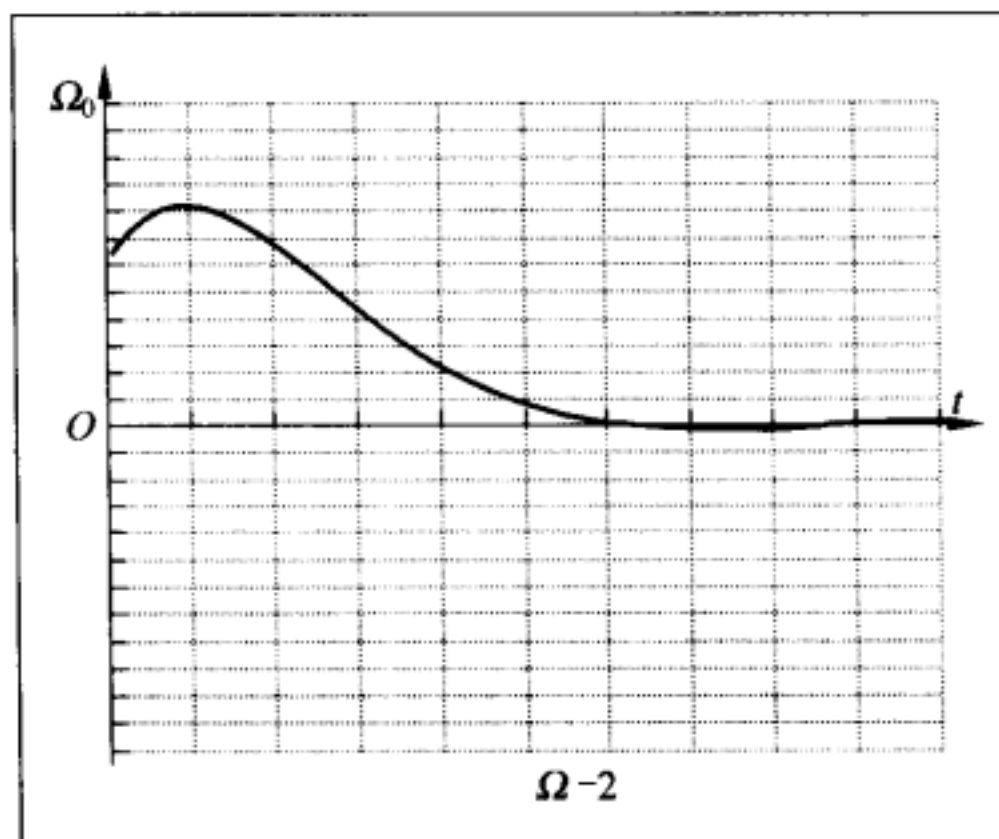
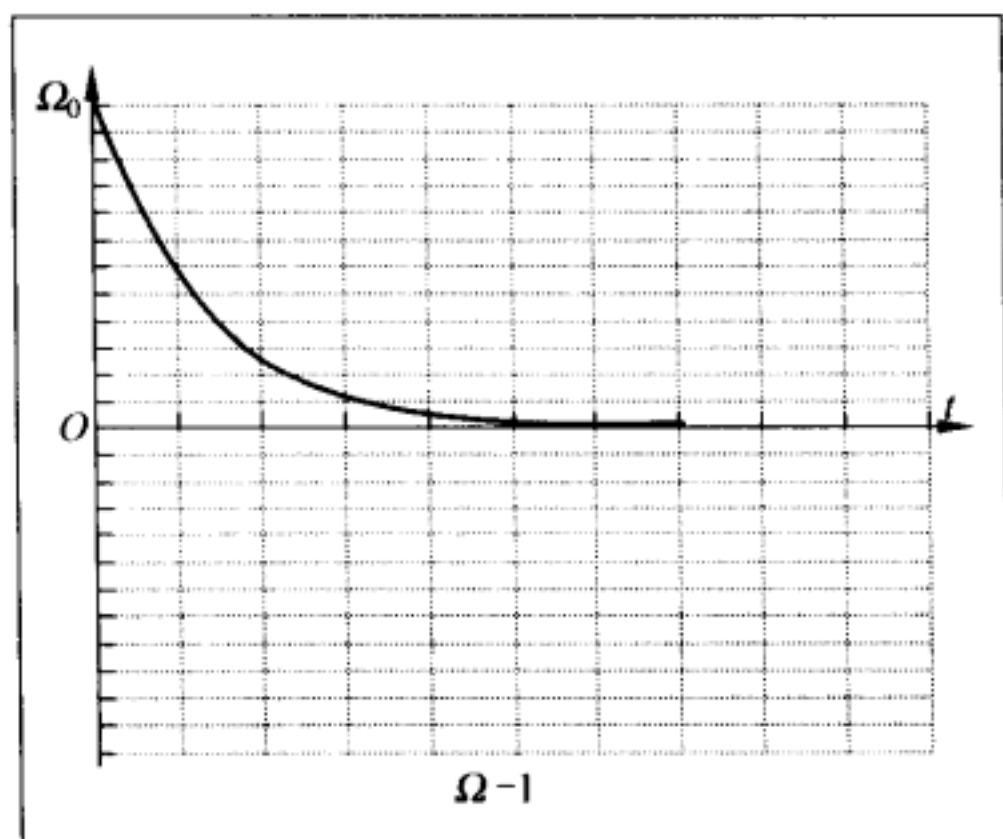
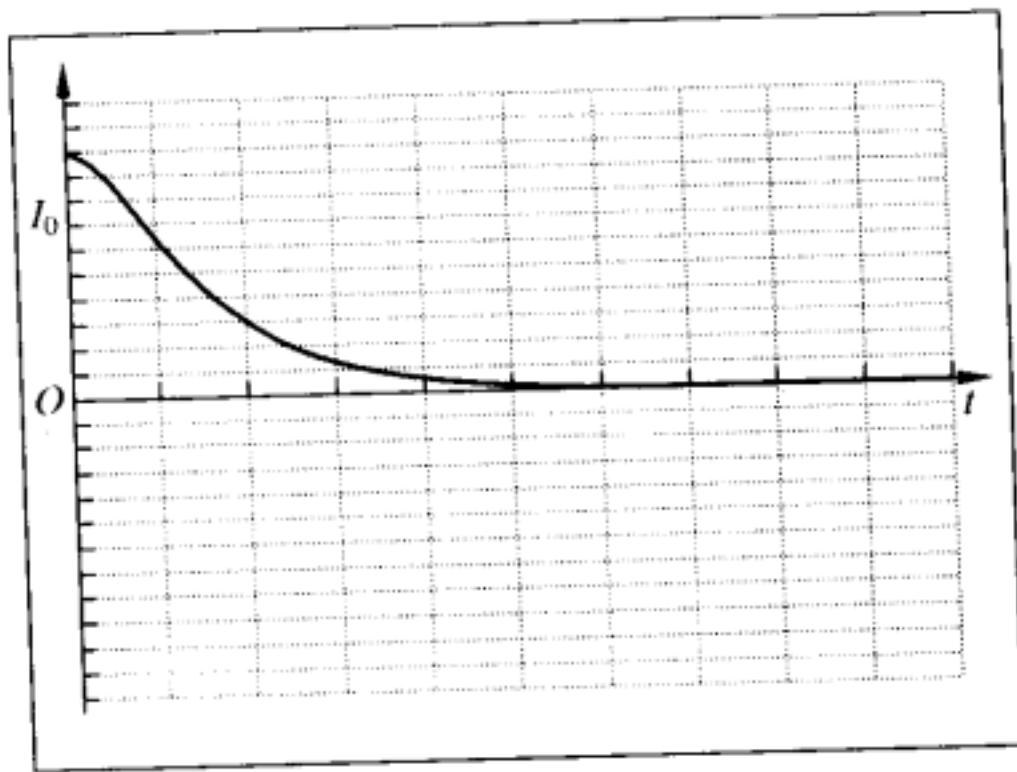
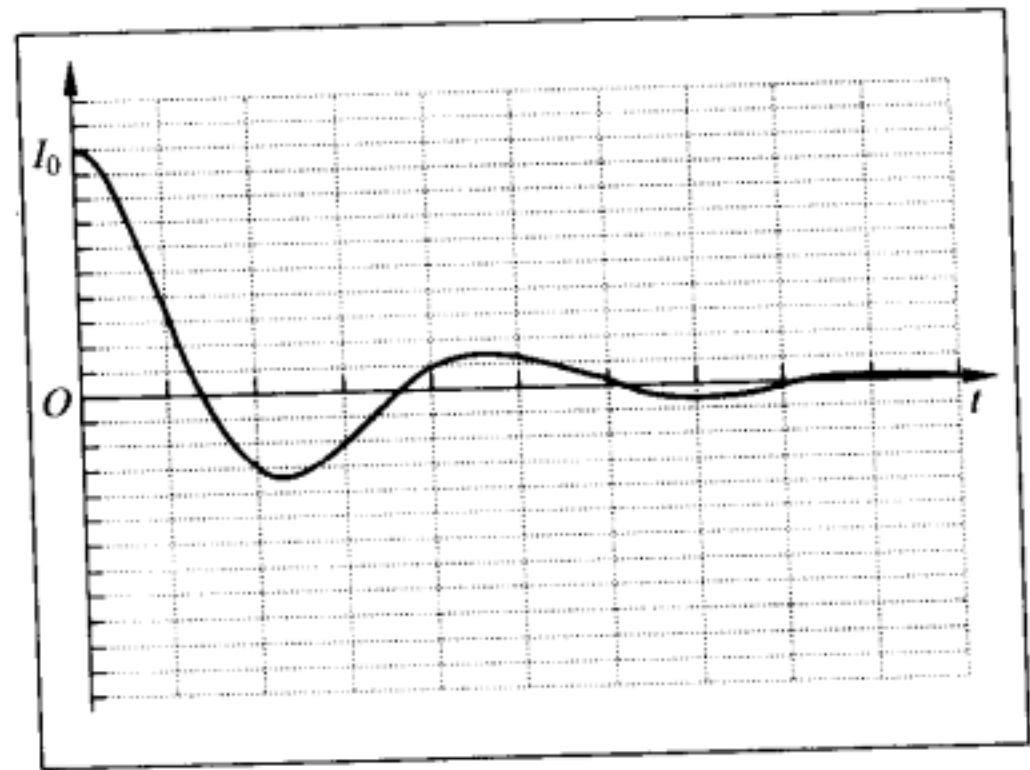


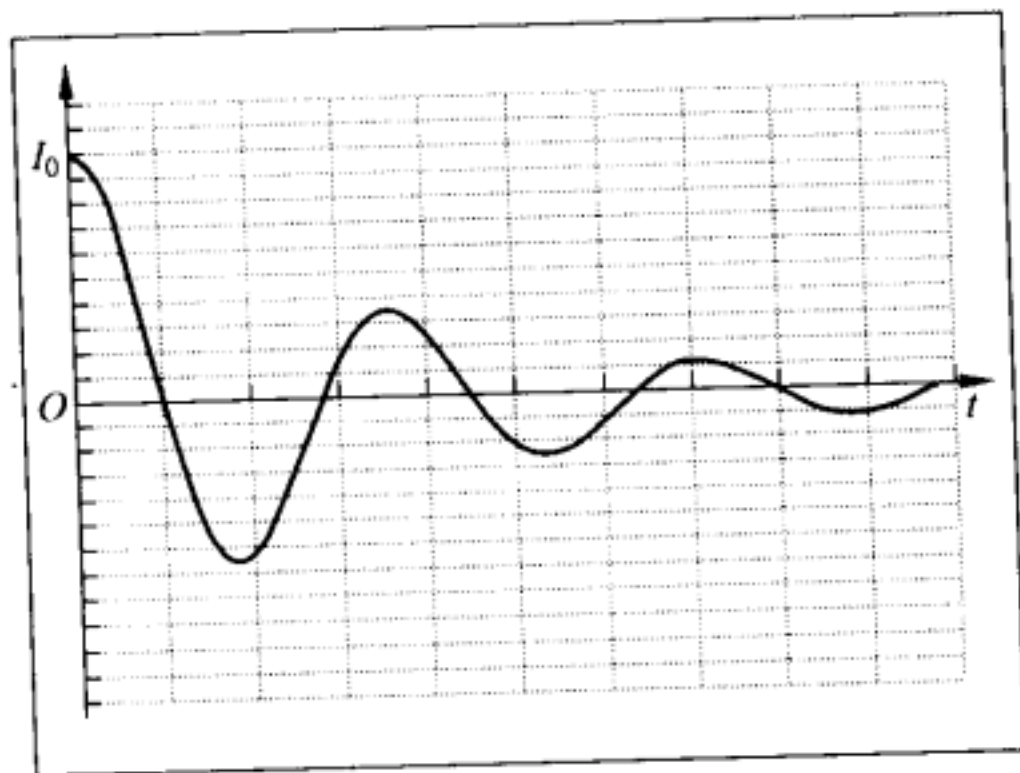
图 4-39



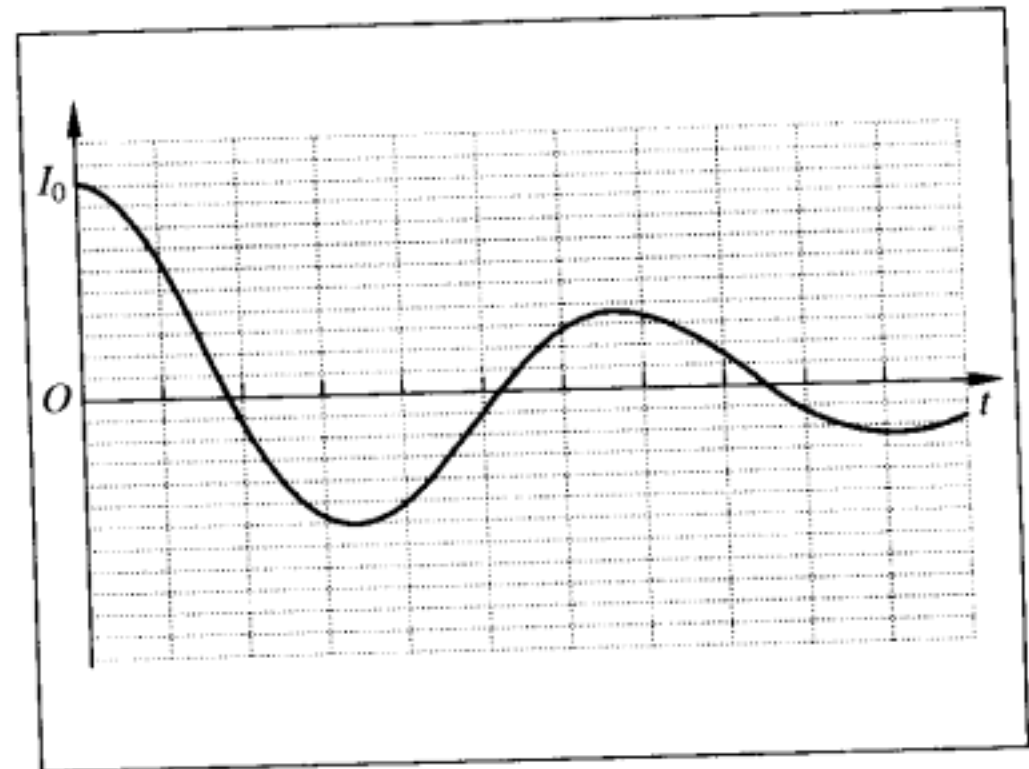
I-A



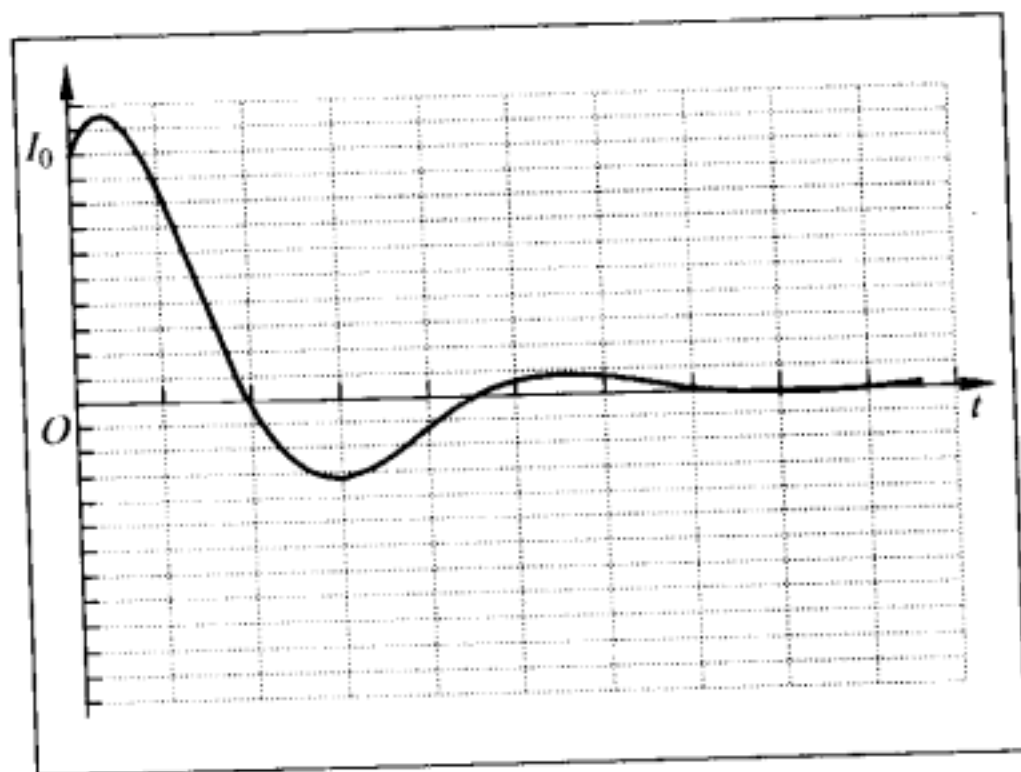
I-B



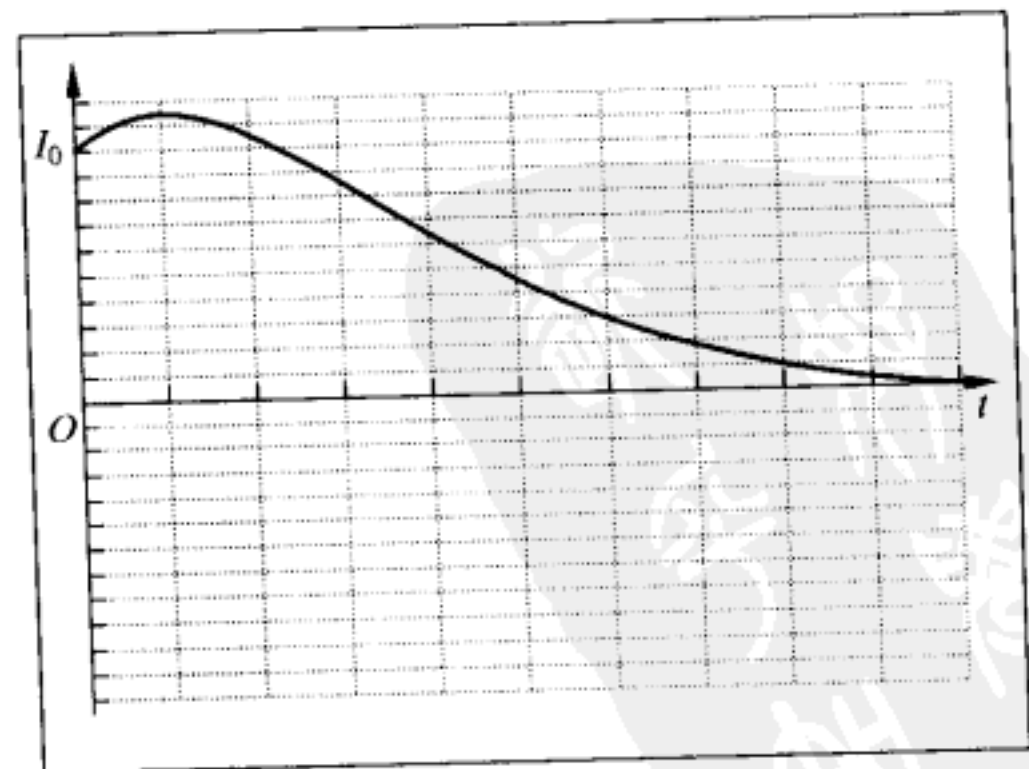
I-C



I-D



I-E



I-F

图 4-40

解析

1) 当飞轮的角速度为 Ω 时, 每一辐条中的感应电动势为

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} l^2 B \Omega \quad (1)$$

当有电流 I 通过电阻 R 时, 每条辐条中的电流

$$I' = \frac{1}{n} I \quad (2)$$

受到的安培力

$$F' = BlI' \quad (3)$$

安培力对转轴的磁力矩

$$M'_B = \frac{1}{2} l F' \quad (4)$$

作用于整个飞轮的总磁力矩

$$M_B = n M'_B \quad (5)$$

当

$$M = M_B \quad (6)$$

时, 飞轮做匀速转动, 即转动达到稳定, 这时 $\Omega = \Omega_0$, $I = I_0$. 由以上各式得

$$M = \frac{1}{2} Bl^2 I_0 \quad (7)$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} Bl^2 \Omega_0 \quad (8)$$

由欧姆定律有

$$\mathcal{E} = I_0 R \quad (9)$$

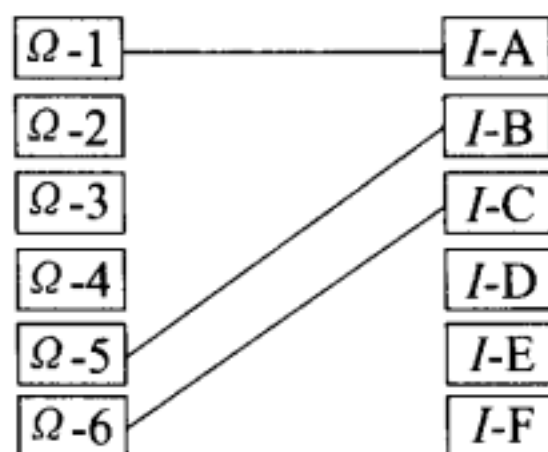
解(7)、(8)式和(9)式得

$$I_0 = \frac{2M}{l^2 B} \quad (10)$$

$$\Omega_0 = \frac{4MR}{l^4 B^2} \quad (11)$$

可见电阻 R 越大, 达到稳定时, 飞轮的角速度 Ω_0 越大, 而达到稳定时电流 I_0 与 R 无关.

2)



本题第1)问并不困难, 因为这是在飞轮处于稳态情况下得到的结论. 第2)问是讨论从初始稳态($t=0$ 时, 飞轮的角速度达到稳定的角速度 $\Omega = \Omega_0$)到最终稳态($t \rightarrow \infty$ 时, $\Omega_0 = 0$)

之间的变化过程,这个过程称为暂态过程.数学上,飞轮的角速度 $\Omega(t)$ 和电路的电流 $I(t)$ 分别满足两个二阶齐次常微分方程.联立求解后,考虑到它们的初始条件就可得出 $\Omega(t)$ 和 $I(t)$ 的解析解.限于数学的困难,不要求学生用高等数学的方法做定量的数学分析计算,只要求学生能抓住问题的关键点,形成比较清晰的物理图像,对本题定性地作出判断,从提供的可选择的角速度 $\Omega(t)$ 和电流 $I(t)$ 图线中,选出正确的图线来.由于学生对这类题目接触比较少,设问的方式又与传统的问法不同,较多的学生感到对暂态过程的特征难以把握.虽然此题的答案和答题的方式很简单,但是,如果不抓住问题的关键,用想当然或是连蒙带猜,碰运气的方法去答题是不行的.

对角速度 $\Omega(t)$ 作出正确的判断相对比较容易,对 $I(t)$ 的误判情况就比较多,尤其要作出两类图线的正确配对就比较难.因此决赛时全部答对这道题的学生很少,得分率很低.我们希望学生不只是猜对了答案,而是希望通过此题,较深入地理解本题所涉及的物理过程.下面对本题的答案稍作分析和展开.

首先,从提供的6条 $\Omega(t)$ 图线中挑选出正确的图线.因为在 $\Omega=\Omega_0$ 的稳态情况下,撤去外力矩 M (卸去机械负载),储存在飞轮中的转动动能和储存在电感线圈中的磁场能量都有一个随时间逐渐释放的过程.因此,在往后的时间区段中, $\Omega(t)$ 不可能有高于 Ω_0 的情况发生,因此,可以先将 $\Omega-2$ 和 $\Omega-4$ 图线剔除.再看 $\Omega-3$ 图线,在 $t\rightarrow\infty$ 时,它趋于一个稳定的角速度,在没有外界能量的补充情况下,维持飞轮的持续稳定的转动是不可能的,因此 $\Omega-3$ 图线亦应被剔除.剩下的 $\Omega-1$ 、 $\Omega-5$ 、 $\Omega-6$ 三种图线是可能发生的情况.但是 $\Omega-1$ 图线与 $\Omega-5$ 、 $\Omega-6$ 图线角速度 Ω 趋于零的模式不同, $\Omega-1$ 图线是角速度 $\Omega(t)$ 单调地、无起伏地逐渐衰减至零, $\Omega-5$ 、 $\Omega-6$ 图线是经过衰减振荡的方式衰减至零.表明飞轮角速度 Ω 减到零后,可以逆转方向作反方向转动,不少学生对 $\Omega-5$ 图线尚可理解, $t=0$ 时, Ω_0 的大小是5个单位(5格),由 $\Omega-5$ 图线可看出,反方向转动 $\Omega(t)$ 的第一个峰值大小是4格,比 Ω_0 小,以后逐渐衰减振荡至零.但 $\Omega-6$ 图线中, $t=0$ 时, Ω_0 的大小是2个单位(2格),反方向转动 $\Omega(t)$ 的第一个峰值大小却是5格,反方向转动的角速度 $\Omega(t)$ 的第一个峰值大小比 Ω_0 还大,然后再逐渐衰减振荡至零.不少学生认为这是不可能的,因而将其舍去.实际上这种情况是可能发生的,题目上已经提到:所提供的6条 $\Omega(t)$ 图线和6条 $I(t)$ 图线都是“当 R 取不同值时”发生的.因此,这是 $\Omega(t)$ 和电路的电流 $I(t)$ 分别满足的两个微分方程中取不同参数的结果.由第1)问解答中的(11)式可知, Ω_0 与电路中的电阻 R 成正比, $\Omega-1$ 、 $\Omega-5$ 、 $\Omega-6$ 图线中对应的 R 值依次减少,因而, Ω_0 值也依次减少.它们随时间变化的物理过程将在判断完 $I(t)$ 图线后再作分析.

其次,从提供的6条 $I(t)$ 图线中挑选出正确的图线.在没有外界能量补充的情况下, $I(t)$ 不可能有高于 I_0 的情况发生,因此,可以先将 $I-E$ 和 $I-F$ 图线剔除.剩下待选的有 $I-A$ 、 $I-B$ 、 $I-C$ 、 $I-D$ 4种图线.由第1)问解答中的(10)式可知, I_0 数值与电路中的电阻 R 无关,故6条 $I(t)$ 图线中在 $t=0$ 时刻, I_0 都是同样大小的标度.下面的筛选方法就需对照考

考虑已选中的3条 $\Omega-1$ 、 $\Omega-5$ 、 $\Omega-6$ 图线,从配对关系中选出相应的 $I(t)$ 图线.在 $t=0$ 时刻,电流方向没有变化,即维持原稳定转动时的电流方向,由于飞轮的转动提供的反电动势与电流方向相反,从而使 $I(t)$ 减少,施加在飞轮上的是电磁阻力矩,使 $\Omega(t)$ 逐渐减速.不难判断, $\Omega-1$ 图线应对应 $I-A$ 图线.那么, $\Omega-5$ 、 $\Omega-6$ 图线对应着怎样的 $I(t)$ 图线呢?对比 $I(t)$ 图线与 $\Omega(t)$ 图线, $I(t)$ 都比 $\Omega-5$ 、 $\Omega-6$ 图线中的 $\Omega(t)$ 先期减至零.在此时刻前,电磁力矩与转动方向相反,为阻力矩;在转动角速度为零的情况下,电磁力矩变为推动力矩,从能量转换的观点看,电感线圈释放的磁能转变为飞轮的转动动能.在此时刻后,飞轮转动方向逆转,在电磁力矩推动下,飞轮转动不断加速,只是随着电流继续减小,加速的势头逐渐减弱,当电流减小到零这一标志性时刻,飞轮反向转动的转速达到最大,此时刻电感线圈所释放的磁能全部转变为飞轮动能,由于飞轮惯性,其转动方向未变,由飞轮辐条切割磁力线产生的电动势使电流从零改变原流动方向,它所提供的电磁力矩又转为阻力矩,使飞轮减速.后面的情况如 $t=0$ 时刻后的时段一样,经历多次衰减振荡减至零.由此看出,电流为零的时刻必然对应于飞轮转速达到极大值的时刻,这是我们判断 $I(t)$ 图线与 $\Omega(t)$ 图线“配对”的一个标志性的时刻.根据这条判据,得出 $\Omega-5$ 应与 $I-B$ 相对应; $\Omega-6$ 应与 $I-C$ 相对应的结论.从而剔除掉 $I-D$ 图线.

现在我们回过头来研究 $\Omega-6$ 、 $\Omega-5$ 两条图线,前面已提及, $\Omega-6$ 图线对应的电阻 R 要比 $\Omega-5$ 图线对应的电阻 R 小,所以, $\Omega-6$ 图线对应的 Ω_0 要比 $\Omega-5$ 图线对应的 Ω_0 小,这意味着,在 $t=0$ 时刻,飞轮储存的机械动能前者比后者小,因此撤去外力矩后,在 $\Omega-6$ 图线中 $\Omega(t)$ 减至零的时刻,比 $\Omega-5$ 图线中 $\Omega(t)$ 减至零的时刻更早,对应于这个时刻, $\Omega-6$ 图线中对应的电流比 $\Omega-5$ 图线中对应的电流要大,意味着 $\Omega-6$ 图线中此时刻储存在电感线圈里的磁能比 $\Omega-5$ 图线中此时刻储存在电感线圈里的磁能多.到电流为零时,这部分的磁场能量将全部转变为飞轮的转动动能,使飞轮反向转动达到的极大值,因此, $\Omega-6$ 图线中飞轮反向转动角速度 Ω 达到的极大值,要比 $\Omega-5$ 图线中飞轮反向转动角速度 Ω 达到的极大值大,甚至可能发生反向转动达到的极大值的角速度 Ω 比初始时刻的 Ω_0 还大(如 $\Omega-6$ 图线所示).从工程技术的观点看,在一定参数条件下,带着机械负载作正常稳定运转的电机,若突然将机械负载卸去,有可能出现电机反向加速至非常大的转动速度,甚至远超过稳定状态下电机的安全转速,发生“飞散”的事故.这是要注意和防范的.

22. 如图4-41所示,一个电阻为 R 的长方形线圈 $abcd$ 沿着磁针所指的南北方向平放在北半球的一个水平桌面上. ab 边长为 l_1 , bc 边长为 l_2 .现突然将线圈翻转 180° ,使 ab 与 dc 互换位置,可设法测得导线中流过的电荷量为 Q_1 .然后维持 ad 边不移动,将线圈绕 ab 边转动,使之突然竖直,这次测得导线中流过的电荷量为 Q_2 .试求该处地磁场的磁感应强度的大小.

解析

当翻转线圈时,穿过线圈的地磁场的磁通量将发生变化,在线圈中形成感应电动势 \mathcal{E} 和感应电流 I . 若用 $\Delta\Phi$ 表示在很短时间 Δt 内穿过线圈的磁通量的改变量,用 ΔQ 表示这段时间内流过导线的电荷量,则根据法拉第定律和欧姆定律,可知它们在数值上的关系为

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = RI = R \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad (1)$$

即

$$\Delta\Phi = R\Delta Q$$

对每一极短时间都可列此方程,于是对整个翻转过程来说,就可写出起始时与终了时磁通量之差 $\Phi' - \Phi$ 与通过导线总电荷量 Q 的关系.

设该处地磁场的磁感应强度的竖直分量为 B_1 ,水平分量为 B_2 ,根据地磁场的特点可知,在北半球 B_1 的方向向下, B_2 的方向向北,则第一次翻转时,可得

$$\Phi'_1 - \Phi_1 = 2B_1 l_1 l_2 = RQ_1 \quad (2)$$

第二次转动时,可得

$$\Phi'_2 - \Phi_2 = B_2 l_1 l_2 - B_1 l_1 l_2 = RQ_2 \quad (3)$$

设该处的磁感应强度为 B ,则

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} \quad (4)$$

由(2)、(3)、(4)三式,可解得

$$B = \frac{\sqrt{2}R}{2l_1 l_2} \sqrt{Q_1^2 + 2Q_1 Q_2 + 2Q_2^2} \quad (5)$$

本题的测量方法与基础实验(例如冲击电流计)和某些实际测量有一定的联系. 通过线框的磁通量、流过的电流以及电荷量本是随时间变化的量,但是通过始末态测出这些物理量变化的累积值(数学上是积分的过程),求出微弱的磁场值,是一个有启迪作用的实验方法,作为竞赛题亦有一定的难度.

23. 两条平行的长直导轨位于同一水平面,导轨上平行地横放着两导体杆 ab 和 cd , 整个导轨和导体杆都处于均匀的恒定磁场中,磁场的方向竖直向上,磁感应强度为 B . 开始时,两杆都处在静止状态. 现突然给杆 ab 一冲击,使之获得水平速度 v_0 ,速度的方向与杆 ab 垂直,与导轨平行(图 4-42). 设杆 ab 与 cd 的长度都是 l ,质量分别为 m_1 和 m_2 ,电阻

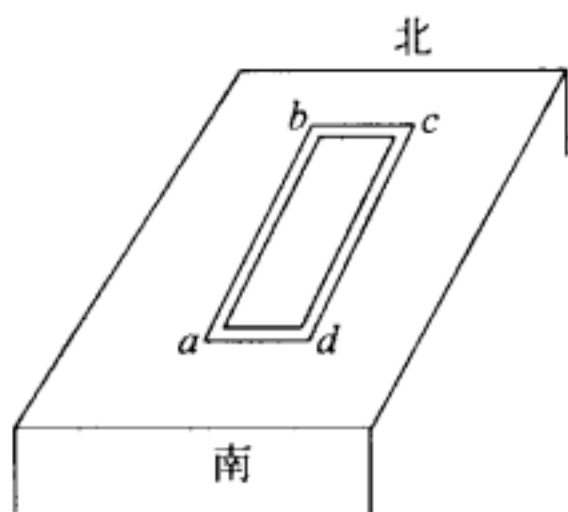


图 4-41

分别为 R_1 和 R_2 , 忽略导轨的电阻以及导体杆和导轨间的摩擦. 试问这一系统中可能产生的最大焦耳热是多少?

解析

杆 ab 在初始时刻具有速度 v_0 , 由于切割磁感线, 使杆 ab 出现动生电动势 $v_0 Bl$, 杆 ab 与杆 cd 及导轨形成回路, 电流由 a 流至 b, 在杆 cd 电流由 d 流至 c. 由于流经两杆的电流方向相反, 杆 ab 受的是电磁阻力, 使杆 ab 速度 v_1 由 v_0 逐渐减慢; 杆 cd 受的是电磁拉力, 使杆 cd 速度 v_2 由 0 开始逐渐增加. 在这段过程中, 回路 abdc 的电动势为

$$\mathcal{E} = (v_1 - v_2) Bl$$

经历无限长时间后 v_1 、 v_2 的最终速度趋于相同的速度 v_∞ , 这时回路 abdc 的电动势为 0, 杆 ab 与杆 cd 没有电流, 不受电磁力, 以同样的终极速度 v_∞ 在导轨上无摩擦地匀速滑动. 根据动量守恒定律, 有

$$m_1 v_0 = m_1 v_\infty + m_2 v_\infty$$

解得

$$v_\infty = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2}$$

根据能量守恒定律, 有

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} m_1 v_\infty^2 + \frac{1}{2} m_2 v_\infty^2 + Q$$

式中 Q 为回路 abdc 在整个过程中电路发出的(最大)焦耳热. 由上二式解得

$$Q = \frac{1}{2} \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) v_0^2$$

本题的设问很简单, 但是要写出杆 ab 与杆 cd 的运动解析式却要解微分方程, 要计算出每根杆发出的焦耳热还要用到积分运算, 这都是超过对中学生的要求的, 但是关键是想清楚整个物理过程, 按照动量守恒定律和能量守恒定律, 抓住初态和终态的物理量的变化就能迎刃而解.

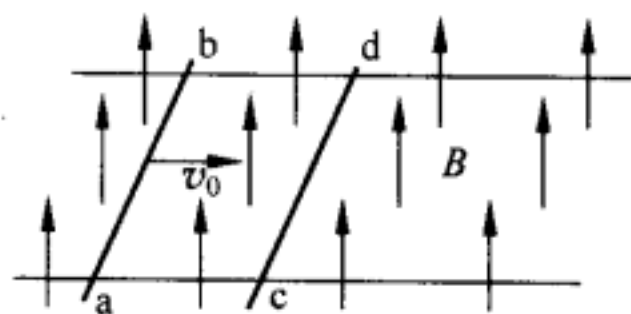


图 4-42

附录 全国中学生物理竞赛内容提要

(2005年1月修订, 2006年实行)

编者按:按照中国物理学会全国中学生物理竞赛委员会第九次全体会议的提议,由中国物理学会全国中学生物理竞赛委员会常务委员会根据《全国中学生物理竞赛章程》中关于命题原则的规定,结合我国目前中学生的实际情况,制订了《全国中学生物理竞赛内容提要》,作为今后物理竞赛预赛、复赛和决赛命题的依据.它包括理论基础、实验、其他方面等部分.其中理论基础的绝大部分内容和国家教委制订的《全日制中学物理教学大纲》中的附录,即1983年教育部颁布的《高中物理教学纲要(草案)》的内容相同.主要差别有两点:一是少数地方做了几点增补;二是去掉了教学纲要中的说明部分.此外,在编排的次序上做了一些变动,内容表述上做了一些简化.1991年2月20日经全国中学生物理竞赛委员会常务委员会扩大会议讨论通过并开始试行.1991年9月11日在南宁由全国中学生物理竞赛委员会第十次全体会议正式通过,开始实施.

经2000年,第十九次竞委会原则同意对《全国中学生物理竞赛内容提要》作适当的调整和补充.考虑到适当控制预赛试题难度的精神,提要中新补充的内容将用“※”符号标出,作为复赛题和决赛题增补的内容,预赛试题仍沿用原规定的内容提要,不增加修改补充后的内容.新规定的《全国中学生物理竞赛内容提要》将从2002年起实行,2001年举行的十八届物理竞赛预、复、决赛仍采用未修改、补充的《全国中学生物理竞赛内容提要》.

2005年1月,常委会对《全国中学生物理竞赛内容提要》作了少量修改和补充,修改后的《全国中学生物理竞赛内容提要》将从2006年开始实行.

一、理论基础

力 学

1. 运动学

参照系 质点运动的位移和路程、速度、加速度 相对速度
矢量和标量 矢量的合成和分解 ※矢量的标积和矢积
匀速及匀变速直线运动及其图像 运动的合成 抛体运动 圆周运动
刚体的平动和绕定轴的转动

2. 牛顿运动定律 力学中常见的几种力

牛顿第一、二、三运动定律 惯性参照系的概念
摩擦力
弹性力 胡克定律
万有引力定律 均匀球壳对壳内和壳外质点的引力公式(不要求导出) 开普勒定律
行星和人造卫星运动
※惯性力的概念

3. 物体的平衡

共点力作用下物体的平衡
力矩 刚体的平衡条件 重心
物体平衡的种类

4. 动量

冲量 动量 质点与质点组的动量定理 动量守恒定律 ※质心 ※质心运动定理
反冲运动及火箭

5. ※角动量

※冲量矩 ※角动量 ※质点和质点组的角动量定理(不引入转动惯量)
※角动量守恒定律

6. 机械能

功和功率
动能和动能定理

重力势能 引力势能 质点及均匀球壳内和壳外的引力势能公式(不要求导出)

弹簧的弹性势能

功能原理 机械能守恒定律

碰撞 恢复系数

7. 流体静力学

静止流体中的压强

浮力

8. 振动

简谐振动 $[x=A\cos(\omega t+\alpha)]$ 振幅 频率和周期 相位

振动的图像

参考圆 振动的速度 $v=-A\omega\sin(\omega t+\alpha)$

由动力学方程确定简谐振动的频率 简谐振动的能量

同方向同频率简谐振动的合成

阻尼振动 受迫振动和共振(定性了解)

9. 波和声

横波和纵波 波长、频率和波速的关系 波的图像

平面简谐波的表示式 $y=A\cos\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)$

波的干涉和衍射(定性) ※驻波

声波 声音的响度、音调和音品 声音的共鸣 乐音和噪声 ※多普勒效应

热 学

1. 分子动理论

原子和分子的量级

分子的热运动 布朗运动 温度的微观意义

分子力

分子的动能和分子间的势能 物体的内能

2. 热力学第一定律

热力学第一定律



3. ※热力学第二定律

※热力学第二定律 ※可逆过程与不可逆过程

4. 气体的性质

热力学温标

理想气体状态方程 普适气体恒量

理想气体状态方程的微观解释(定性)

理想气体的内能

理想气体的等容、等压、等温和绝热过程(不要求用微积分运算)

5. 液体的性质

液体分子运动的特点

表面张力系数

浸润现象和毛细现象(定性)

6. 固体的性质

晶体和非晶体 空间点阵

固体分子运动的特点

7. 物态变化

熔解和凝固 熔点 熔解热

蒸发和凝结 饱和气压 沸腾和沸点 汽化热 临界温度

固体的升华

空气的湿度和湿度计 露点

8. 热传递的方式

传导、对流和辐射

9. 热膨胀

热膨胀和膨胀系数

电 学

1. 静电场

库仑定律 电荷守恒定律



电场强度 电场线 点电荷的场强 场强叠加原理 均匀带电球壳壳内的场强和壳外的场强公式(不要求导出) 匀强电场

电场中的导体 静电屏蔽

电势和电势差 等势面 点电荷电场的电势公式(不要求导出) 电势叠加原理 均匀带电球壳壳内和壳外的电势公式(不要求导出)

电容 电容器的连接 平行板电容器的电容公式(不要求导出)

电容器充电后的电能

电介质的极化 介电常数

2. 稳恒电流

欧姆定律 电阻率和温度的关系

电功和电功率

电阻的串、并联

电动势 闭合电路的欧姆定律

一段含源电路的欧姆定律 ※基尔霍夫定律

电流表 电压表 欧姆表

惠斯通电桥 补偿电路

3. 物质的导电性

金属中的电流 欧姆定律的微观解释

液体中的电流 法拉第电解定律

气体中的电流 被激放电和自激放电(定性)

真空中的电流 示波器

半导体的导电特性 P型半导体和N型半导体

晶体二极管的单向导电性 三极管的放大作用(不要求机理)

超导现象

4. 磁场

电流的磁场 磁感应强度 磁感线 匀强磁场 长直导线中的电流的磁场

安培力 洛伦兹力 电子荷质比的测定 质谱仪 回旋加速器

5. 电磁感应

法拉第电磁感应定律

楞次定律 ※感应电场(涡旋电场)

自感系数

互感和变压器

6. 交流电

交流发电机原理 交流电的最大值和有效值

纯电阻、纯电感、纯电容电路

整流、滤波和稳压

三相交流电及其连接法 感应电动机原理

7. 电磁振荡和电磁波

电磁振荡 振荡电路及振荡频率

电磁场和电磁波 电磁波的波速 赫兹实验

电磁波的发射和调制 电磁波的接收、调谐、检波

光 学

1. 几何光学

光的直进、反射、折射 全反射

光的色散 折射率与光速的关系

平面镜成像 球面镜成像公式及作图法

薄透镜成像公式及作图法

眼睛 放大镜 显微镜 望远镜

2. 波动光学

光程

光的干涉和衍射 双缝干涉 单缝衍射

光谱和光谱分析 电磁波谱

近代物理

1. 光的本性

光电效应 爱因斯坦方程

光的波粒二象性 光子的能量与动量



2. 原子结构

卢瑟福实验 原子的核式结构

玻尔模型 用玻尔模型解释氢光谱 玻尔模型的局限性

原子的受激辐射 激光

3. 原子核

原子核的量级

天然放射现象 放射线的探测

质子的发现 中子的发现 原子核的组成

核反应方程

质能方程 裂变和聚变

“基本”粒子 ※夸克模型

4. ※不确定关系 ※实物粒子的波粒二象性

5. ※狭义相对论

爱因斯坦假设 时间和长度的相对论效应

相对论动量与能量 $p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$, $E = mc^2$

6. ※太阳系 银河系 宇宙和黑洞的初步知识

数学基础

1. 中学阶段全部初等数学(包括解析几何)
2. 矢量的合成和分解 极限、无限大和无限小的初步概念
3. 不要求用微积分进行推导或运算

二、实 验

1. 复赛实验试题从全国中学生物理竞赛常委会组编的《全国中学生物理竞赛实验指导书》中选定.

2. 本内容提要的“理论基础”和《全国中学生物理竞赛实验指导书》是决赛实验的基础.

三、其他方面

物理竞赛的内容有一部分有较大的开阔性,主要包括以下三方面:

1. 物理知识在各方面的应用.对自然界、生产和日常生活中一些物理现象的解释.
2. 近代物理的一些重大成果和现代的一些重大信息.
3. 一些有重要贡献的物理学家的姓名和他们的主要贡献.

参 考 资 料

1. 全国中学生物理竞赛委员会办公室主编的历届《全国中学生物理竞赛参考资料》.
2. 《北京市高级中学实验课本 物理》.北京市教育委员会编.主编 沈克琦.

