

中学物理奥赛辅导

ZHONGXUE WULI AOSAI FUDAO

物理竞赛真题解析

热学·光学·近代物理学

WULI JINGSAI ZHENTI JIEXI
REXUE GUANGXUE JINDAI WULIXUE

崔宏滨 编著

中国科学技术大学出版社

中学物理奥赛辅导

物理竞赛真题解析

热学·光学·近代物理学

崔宏滨 编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书收集了第1~30届物理竞赛中的热学、光学、相对论、原子物理、核物理与粒子物理方面的考题,对每道考题均给出了详细的分析与解答。为了便于读者学习,本书将考题分类编辑,对同类考题的基础知识、物理背景以及实际应用作了概括。

本书可供参加物理竞赛和自主招生考试的高中生阅读,也可供开展相关教学工作的中学物理教师参考,对于物理爱好者理解和拓展物理知识也能够提供有益的帮助。

图书在版编目(CIP)数据

物理竞赛真题解析:热学·光学·近代物理学/崔宏滨编著. —合肥:中国科学技术大学出版社,2014.6

(中学物理奥赛辅导)

ISBN 978-7-312-03351-3

I. 物… II. 崔… III. 中学物理课一题解 IV. G634.75

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第035854号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路96号,230026
<http://press.ustc.edu.cn>
印刷 安徽江淮印务有限责任公司
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 787 mm×1092 mm 1/16
印张 16.5
字数 412千
版次 2014年6月第1版
印次 2014年6月第1次印刷
印数 1—3000册
定价 29.90元

前 言

“全国中学生物理竞赛”是由中国物理学会主办的、面向中学生(主要是高中生)的课外学科竞赛活动,在国际上亦称“中国物理奥林匹克”(Chinese Physics Olympiad, 即 CPhO)。竞赛内容结合中国高中生的实际情况,但不受中学教学大纲和教材的限制,与高考有着显著的区别。该竞赛每年举办一次,每次赛程包括预赛、复赛和决赛,全国统一试卷。每一阶段的优胜者可进入下一阶段的竞赛。预赛只包括理论部分,复赛和决赛既包括理论,也包括实验。

该项竞赛的内容涵盖普通物理学的各个分支,竞赛的各类题目,既涉及物理学的基础理论,也经常能够反映物理学的最新进展和最新应用。因而要求参赛者对物理概念、物理模型、物理方法有准确而深刻的理解,对物理问题能够作出正确的判断、推导和计算,掌握物理实验的操作技能并以正确的方式处理实验数据。客观上来说,对参赛者的数学基础和能力的要求较高。

可见,这样的竞赛能够全面考察学生的物理知识,竞赛的目的也是为了培养学生对物理的兴趣,促进学生全面拓展自己的物理素养。

事实上,国外也有类似的竞赛活动,许多国家每年都会面向中学生举办各种类型的物理竞赛,还有邀请各个国家参加的国际物理竞赛。中国物理学会每年都组织国内竞赛的优胜者参加国际上的相关竞赛。

物理学是一门结合实际的科学,物理学既要解决自然界物质运动的规律,解决人类认识客观世界过程中的各种疑惑,物理学的成果也能转化为生产力,为社会的进步做出巨大的贡献。对物理竞赛而言,其要求各类题目既要结合实际,又能反映物理学的进展和物理学的应用。值得欣慰的是,中国的物理竞赛做到了这一点,出现了很多非常好的考题。对这些题目进行全面而深入的分析,对提高中学生的物理水平一定会有所帮助,这正是编写本书的目的。

现在,读者可以方便地获得竞赛考题的“标准答案”,那么编写本书还有什么意义呢?

事实上,所谓“标准答案”只是批改竞赛试卷的一个参考,答案只针对题目列出解题步骤,就事论事,而不涉及其他;本书则是将相关的题目分类编排,解题过程中,既介绍这类问题的物理背景,也指出解决这类问题的重点和难点,并给出解决这类问题所涉及的物理方法和数学知识。编著者不是为解题而解题,而是希望为读者提供更多的知识,使读者已有的知识得到进一步的巩固,并修正对一些物理概念不正确、不准确的理解。正是基于这样的动机,编著者在解题中并没有参看“标准答案”,所以大多数题目的解法和步骤都与“标准答案”有所不同。也正是因为如此,编著者发现了一些考题和答案的瑕疵。当然,绝大多数考题都是非常好的,有瑕疵的考题和答案是极少的,这也是难免的。从另一方面看,因为编著者独立解题,缺乏他人审查,更容易出现错误。

牛顿将其物理学著作命名为“自然哲学的数学原理”,这说明,牛顿认为物理学就是将自然的规律和物理的实验定律用数学逻辑加以阐述和分析的理论体系。物理学的发展离不开数学,有很多数学理论就是为了解决物理问题而建立和发展起来的。物理竞赛的很多题目,都涉及一

些数学方法的应用,编著者在解题过程中对此都有所强调。

本书是第1~30届物理竞赛理论部分的热学、光学和近代物理学题目的解析。这些内容是物理学理论的重要组成部分,也是中学教学阶段涉及较少、中学生基础比较薄弱、比较不熟悉的部分。因而编著者在解析这些题目的过程中,对相应的基础知识做了尽可能详细的说明。

编著者希望本书能够对热爱物理的读者有所裨益,也真诚地希望读者对书中的讹误加以指正。

崔宏滨

2014年5月8日于中国科学技术大学

目 次

前言	(i)
第 1 部分 热学	(1)
热学 1 气体的性质	(1)
热学 2 液体的表面性质	(29)
热学 3 物态变化、热传递与热平衡	(30)
热学 4 分子动理论	(42)
热学 5 热力学第一定律	(43)
第 2 部分 光学	(90)
光学 1 几何光学的实验定律:光线的传播、反射和折射	(90)
光学 2 几何光学的成像定理	(109)
光学 3 波动光学与光的量子性	(169)
第 3 部分 近代物理学	(190)
近代物理 1 相对论与量子论	(190)
近代物理 2 原子的结构	(225)
近代物理 3 核物理与基本粒子	(243)
参考文献	(257)



第 1 部分 热 学

热学 1 气体的性质

1. (1 届预赛) 一根粗细均匀的 U 形玻璃管在竖直平面内放置, 如图 1.1 所示, U 形管左端封闭, 右端通大气, 大气压强为 p_0 , 管内装入水银, 两边水银面的高度差为 h , 左管内空气柱的长度为 L 。如果让该管在原来竖直平面内自由下落, 求两边水银面的高度差。

【解】 设水银的密度为 ρ 。静止时, 左管中气体的压强为

$$p = p_0 + \rho gh$$

整个装置在竖直平面内自由下落的过程中, 水银柱由于受重力而产生的压强消失, 左管中气体的压强等于大气压, 即 $p' = p_0$ 。由于是等温过程, 管的横截面不变, 所以 $p'L' = pL$, 即

$$L' = \frac{p}{p'}L = \frac{p_0 + \rho gh}{p_0}L = \left(1 + \frac{\rho gh}{p_0}\right)L$$

空气柱长度的增量为 $\Delta L = L' - L = \frac{\rho gh}{p_0}L$, 此时两管中水银面的高度差变为

$$\Delta h = h + 2(L' - L) = h + \frac{2\rho gh}{p_0}L$$

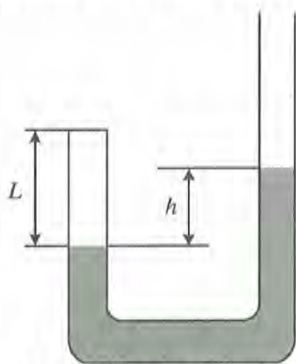


图 1.1 装有水银的 U 形管

2. (3 届预赛) 设一氢气球可自由膨胀以保持球内外的压强相等, 则随着气球的不断升高, 因大气压强随高度而减小, 气球将不断膨胀。如果氢气与大气皆可视为理想气体, 大气的温度、平均摩尔质量以及重力加速度随高度的变化皆可忽略, 则气球在上升过程中所受的浮力将_____。

【解】 按题设, 球内氢气的压强与外部大气的压强相等。气体经历的是等温过程, 则球内氢气满足条件 $pV = C$, 大气的压强与密度成正比, 即 $\rho = pC'$ 。气球所受浮力

$$F = \rho gV = gpC'V = gCC'$$

即气球所受浮力保持不变。

或者可按这样的方式详解: 理想气体的状态方程可以用体积、质量和密度表示为 $p \frac{m}{\rho} =$

νRT , 即 $\rho = \frac{m}{V} \frac{P}{RT}$; 而 $\frac{m}{\nu}$ 即为气体的摩尔质量 μ , 即 $\rho = \mu \frac{P}{RT}$ 。气球所受浮力等于其所排开的空气的重量, 即

$$F = \rho_a V g = \mu_a \frac{P_a}{RT_a} V g = \mu_a \frac{m_{H_2}}{\mu_{H_2}} \frac{P_a}{RT_a} g = \frac{\mu_a}{\mu_{H_2}} \frac{P_a}{P_{H_2}} \frac{T_{H_2}}{T_a} m_{H_2} g$$

按题中所设, 为等温过程, 气球内外气体的温度和压强始终相等, 则

$$F = \frac{\mu_a}{\mu_{H_2}} m_{H_2} g$$

可见, 在这种假设下, 气球所受到的浮力为常量。

3. (4 届预赛) 在一密闭的容器中装有放射性同位素氪(^{86}Kr)气, 在温度为 20°C 时, 其压强为 1 atm 。将容器埋入地下深处, 经过 22 年后取出, 在此期间有些氪经 β 衰变成铷(^{86}Rb), 铷最后是固体状态。现在, 在温度仍为 20°C 时, 测得容器中压强为 0.25 atm , 并测得容器中有固体铷 $0.75 \times 10^{-3}\text{ mol}$, 铷的体积与容器体积比较可忽略不计。试计算埋入时氪的质量以及氪的半衰期。

【解】 原子核放射性衰变的规律为

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

由于 22 年后, 容器内压强变为原来的 $1/4$, 则气体原子数亦变为原来的 $1/4$, 即

$$e^{-22\lambda} = (e^{-11\lambda})^2 = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

所以半衰期为 11 年。

埋入时, ^{86}Kr 的总物质的量为 $(4/3) \times 0.75 \times 10^{-3}\text{ mol} = 1.0 \times 10^{-3}\text{ mol}$ 。

质量为 $1.0 \times 10^{-3} \times 85\text{ g} = 85\text{ mg}$ 。

4. (6 届预赛) 有一两端封闭的、横截面积均匀的 U 形玻璃管, 两臂管内分别有适量的氢气和氦气, 一段水银柱把两种气体隔开, 如图 1.2 所示, 将此 U 形管两端朝上竖立起, 两臂中气柱的长度分别为 $L_{A1} = 12\text{ cm}$, $L_{B1} = 18\text{ cm}$; 两端朝下竖立起时, 气柱的长度分别为 $L_{A2} = 6\text{ cm}$, $L_{B2} = 24\text{ cm}$ 。问将此 U 形管平放在水平桌面上时, 两臂中气柱的长度 L_{A3} 和 L_{B3} 各是多少? 设 U 形管两臂的长度相等, 水银柱不断裂, 没有发生气体从一臂通过水银逸入另一臂中的情况。

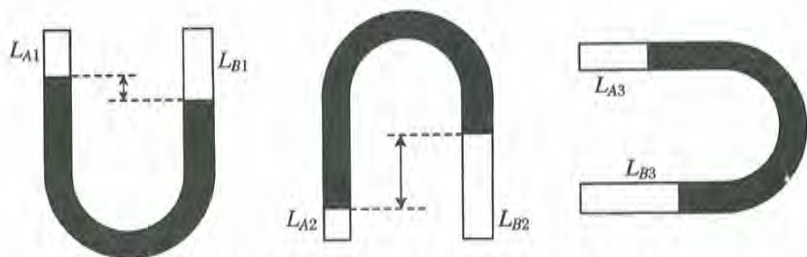


图 1.2 U 形管处于不同位置时水银柱的变化

【解】 气体的温度始终与环境相等,没有发生变化。

设两管中封闭气体的物质的量分别为 ν_A 和 ν_B , U 形管的截面积为 S , 则三种情况下两部分气体的状态方程分别为:

两臂直立向上时,有

$$\begin{cases} 12Sp_{A1} = \nu_A RT \\ 18Sp_{B1} = \nu_B RT \\ p_{B1} - p_{A1} = 6\rho g \end{cases} \quad (1)$$

两臂直立向下时,有

$$\begin{cases} 6Sp_{A2} = \nu_A RT \\ 24Sp_{B2} = \nu_B RT \\ p_{A2} - p_{B2} = 18\rho g \end{cases} \quad (2)$$

水平放置时,有

$$\begin{cases} p_{A3}SL_A = \nu_A RT \\ p_{B3}SL_B = \nu_B RT \\ p_{B3} - p_{A3} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

在方程组(1)中,消去 p_{A1} 和 p_{B1} , 可得到

$$2\nu_B RT = 3\nu_A RT + 216\rho gS \quad (4)$$

在方程组(2)中,消去 p_{A2} 和 p_{B2} , 可得到

$$\nu_B RT = 4\nu_A RT - 432\rho gS \quad (5)$$

联立式(4)、式(5), 可得到

$$\begin{cases} \nu_A RT = 216\rho gS \\ \nu_B RT = 432\rho gS \end{cases} \quad (6)$$

将式(6)代入方程组(3), 可得到

$$\begin{cases} \frac{L_A}{L_B} = \frac{1}{2} \\ L_A + L_B = 30 \end{cases} \quad (7)$$

解得

$$\begin{cases} L_A = 10 \text{ cm} \\ L_B = 20 \text{ cm} \end{cases}$$

5. (8 届预赛) 有人曾用图 1.3 所示的装置测量液体的体膨胀系数。A、B 为粗细均匀的 U 形细玻璃管, 竖直放置, 两臂分别插在恒温容器 C (较热的) 和 D (较冷的) 内, U 形管内盛有适量的待测液体, 通过测量 C、D 内的温度和 U 形管两臂内液面的高度, 就可计算出待测液体的体膨胀系数, 试导出计算公式。不计玻璃管的热膨胀。

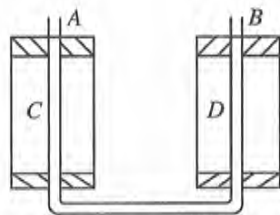


图 1.3 U 形管两臂温度不同

【解】 设恒温器 C、D 的温度分别为 T_1 、 T_2 , 管中液柱的高度分别为 h_1 、 h_2 。水平部分管中液体的密度为 ρ , 温度为 T 。由于温度改变, 一定量物质的体积膨胀, 密度下降。

由于 $V = V_0[1 + \beta(T - T_0)]$, 所以 $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{V_0[1 + \beta(T - T_0)]} = \frac{\rho_0}{1 + \beta(T - T_0)}$ 。

平衡时, 两段直管中的液柱所产生的压强相等, $\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2$, 即

$$\frac{h_1}{1 + \beta(T_1 - T_0)} = \frac{h_2}{1 + \beta(T_2 - T_0)}$$

上式对任意的温度 T_0 都成立, 所以不妨取 $T_0 = 0^\circ\text{C}$ 。于是

$$\frac{h_1}{1 + \beta T_1} = \frac{h_2}{1 + \beta T_2}$$

解得

$$\beta = \frac{h_1 - h_2}{h_2 T_1 - h_1 T_2}$$

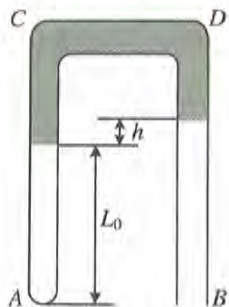


图 1.4 晃动 U 形管

6. (8 届预赛) 有一内径均匀、两支管等长且大于 78 cm 的、一端开口的 U 形管 ACDB。用水银将一定质量的理想气体封闭在 A 端后, 将管竖直倒立。平衡时两支管中液面高度差为 2 cm, 此时闭端气柱的长度 $L_0 = 38$ cm, 如图 1.4 所示。已知大气压强相当于 $h_0 = 76$ cmHg。若保持温度不变, 不考虑水银与管壁的摩擦, 当轻轻晃动一下 U 形管, 使左端液面上升 Δh (Δh 小于 2 cm) 时, 将出现什么现象, 试加以讨论并说明理由。

【解】 设温度不变, 左端液面升高, 其中气体体积增大, 压强减小。记 $h = 2$ cmHg, 当左端液面上升 Δh , 气体的压强增加 Δp , 则

$$(h_0 + h + \Delta p)(L_0 + \Delta h) = (h_0 + h)L_0$$

$$\Delta p = \frac{(h_0 + h)L_0}{L_0 + \Delta h} - (h_0 + h) = \frac{(h_0 + h)L_0 - (h_0 + h)(L_0 + \Delta h)}{L_0 + \Delta h} = -\frac{(h_0 + h)\Delta h}{L_0 + \Delta h}$$

此时两管中水银液面的高度差为 $h - 2\Delta h$, 管中水平段水银所受到的向右侧压强的增量为

$$\Delta p + 2\Delta h = 2\Delta h - \frac{(h_0 + h)\Delta h}{L_0 + \Delta h} = 2\Delta h \frac{\Delta h - 1}{76 + \Delta h}$$

所以, 当 $\Delta h > 1$ cm 时, 水银将从 B 端流出; 当 $\Delta h < 1$ cm 时, 水银将向 A 端回流, 并在平衡位置附近振动; 当 $\Delta h = 1$ cm 时, 水银处在不稳定平衡状态, 稍受扰动, 即会出现上述两种情况之一。

7. (9 届预赛) 如图 1.5 所示, 在一内径均匀的绝热的环形管内, 有三个薄金属片制成的活塞将管隔成三部分, 活塞的导热性和封闭性良好, 且可无摩擦地在圆环内运动。三部分中盛有同一种理想气体。容器平放在水平桌面上, 起始时, I、II、III 三部分气体的压强都是 p_0 , 温度分别是 $t_1 = -3^\circ\text{C}$, $t_2 = 47^\circ\text{C}$, $t_3 = 27^\circ\text{C}$ 。三个活塞到圆环中心连线之间的夹角分别是 $\alpha_1 = 90^\circ$, $\alpha_2 = 120^\circ$, $\alpha_3 = 150^\circ$ 。

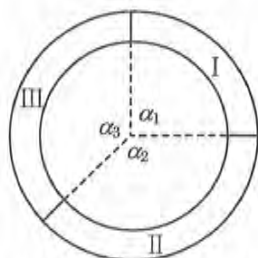


图 1.5 环形管中的气体

(1) 试求最后达到平衡时, 三个活塞到圆环中心的连线之间的夹角各是多少?

(2) 已知一定质量的理想气体的内能的变化量与其温度的变化

量成正比(与压强、体积的变化无关),试求达到平衡时气体的温度和压强。

【解】 由于系统与外界没有热量交换,且与外界之间没有做功发生,所以达到平衡时,三部分气体之间放出的总热量与吸收的总热量相等。设三部分气体的物质的量分别为 ν_1, ν_2, ν_3 , 达到平衡过程中放出的热量分别为 Q_1, Q_2, Q_3 , 设平衡时温度为 T , 由于比热容相等, 热平衡方程为

$$\nu_1(T - T_1) + \nu_2(T - T_2) + \nu_3(T - T_3) = 0$$

经过整理,上述方程可化为

$$(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3)T = \nu_1 T_1 + \nu_2 T_2 + \nu_3 T_3$$

各部分气体的状态方程为 $p_0 \alpha_{i0} = k\nu_i RT_i$ 和 $p\alpha_i = k\nu_i RT$, 代入上述方程, 可得到

$$p(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = p_0(\alpha_{10} + \alpha_{20} + \alpha_{30})$$

于是有 $p = p_0$ 。

而对每一部分气体, 有 $\frac{p_0 \alpha_{i0}}{T_i} = \frac{p\alpha_i}{T}$, 于是有

$$\frac{\alpha_{10}}{T_1} + \frac{\alpha_{20}}{T_2} + \frac{\alpha_{30}}{T_3} = \frac{\alpha_1}{T} + \frac{\alpha_2}{T} + \frac{\alpha_3}{T}$$

算得

$$T = 297.9 \text{ K}, \quad \alpha_i = \alpha_{i0} \frac{T}{T_i} = 99.3^\circ, 111.7^\circ, 149^\circ$$

8. (11 届预赛) 有一个两端开口、粗细均匀的 U 形玻璃细管, 放置在竖直平面内, 处在压强为 p_0 的大气中, 两个竖直支管的高度均为 h , 水平管的长度为 $2h$, 玻璃细管的半径为 $r, r \ll h$ 。今将水平管内灌满密度为 ρ 的水银, 如图 1.6 所示。如将 U 形管两个竖直支管的开口分别密封起来, 使其管内空气压强均等于大气压强。问当 U 形管向右做匀加速移动时, 加速度应为多大时才能使水平管内水银长度稳定为 $5h/3$? 如将其中一个竖直支管的开口密封起来, 使其管内气体压强为 1 atm。问当 U 形管绕以另一个竖直支管(开口的)为轴做匀速转动时, 转数 n 应为多大才能使水平管内水银长度稳定为 $5h/3$? (U 形管做以上运动时, 均不考虑管内水银液面的倾斜。)

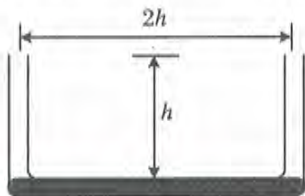


图 1.6 转动的 U 形管

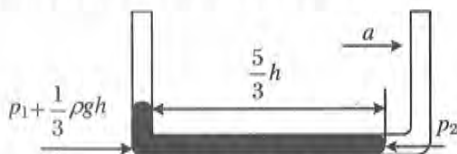


图 1.7 管向右做加速运动

【解】 管中气体的温度始终保持恒定。选取水平管中的水银柱为研究对象, 这一部分水银柱的长度为 $5h/3$, 在两端压力差的作用下, 具有一定的加速度。设细管的横截面积为 S 。

(1) 设管向右的加速度为 a , 由于管口密封, 其中的气体体积变化导致压强变化, 如图 1.7 所示。根

据玻意耳定律, 左管中气体的压强为 $p_1 = \frac{3}{2} p_0$, 水银柱的压强为 $\frac{1}{3} \rho gh$, 右管中气体的压强为

$$p_2 = \frac{3}{4} p_0。$$

于是水平管中的水银所受到的向右的压力为 $F = \left(\frac{3}{2} p_0 + \frac{1}{3} \rho gh - \frac{3}{4} p_0 \right) S$ 。而其中水银的质量为 $m = \frac{5}{3} h S \rho$ ，于是

$$\left(\frac{3}{2} p_0 + \frac{1}{3} \rho gh - \frac{3}{4} p_0 \right) S = \frac{5}{3} h S \rho a$$

解得 $a = \frac{9 p_0 + 4 \rho gh}{20 h \rho} = \frac{9 p_0}{20 h \rho} + \frac{1}{5} g$ 。

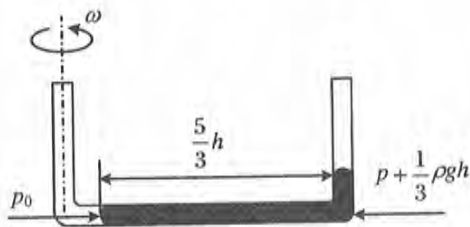


图 1.8 管绕一臂旋转

(2) 如图 1.8 所示，水平管中的水银左端压强为大气压强 p_0 ，右端压强为 $\frac{3}{2} p_0 + \frac{1}{3} \rho gh$ 。两端压力差为向心力，水银柱的质心至转轴的距离为 $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{5}{3} \right) h = \frac{7}{6} h$ ，于是有

$$\left(\frac{3}{2} p_0 + \frac{1}{3} \rho gh - p_0 \right) S = \frac{5}{3} h S \rho \times \frac{7}{6} h \times \omega^2$$

解得角速度

$$\omega = \sqrt{\frac{3(3 p_0 + 2 \rho gh)}{35 h^2 \rho}}$$

每秒转动周数为

$$n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi h} \sqrt{\frac{3(3 p_0 + 2 \rho gh)}{35 \rho}}$$

9. (11 届预赛) 两端封闭的均匀玻璃管内，有一段水银柱将管内气体分为两部分，如图 1.9 所示。玻璃管与水平面成 α 角不变，将玻璃管整体浸入较热的水中，重新达到平衡。试论证水银柱的位置是否变化，如果变化，如何变？

【解】 设初始上下两段气体的压强分别为 p_1 和 p_2 ，浸入热水后压强分别为 p'_1 和 p'_2 ，水银柱的长度为 l ，则上下两段的压强差

$$\Delta p = l \sin \alpha = p_2 - p_1$$

设开始时的温度为 T ，浸入热水后温度为 T' ，假设气体的体积都不变，

则有 $\frac{p_1}{p'_1} = \frac{T}{T'}$ ， $\frac{p_2}{p'_2} = \frac{T}{T'}$ ，即

$$\frac{T}{T'} = \frac{p_1}{p'_1} = \frac{p_2}{p'_2} = \frac{p_2 - p_1}{p'_2 - p'_1} = \frac{\Delta p}{\Delta p'}$$

该系统中，由于玻璃管和水银的热胀冷缩可忽略，所以上下两部分气体的压强差保持不变，即 $\Delta p' = \Delta p$ ，而 $T' > T$ ，所以上述假设不成立。或者说，在假设体积不变的前提下，会有 $\Delta p' > \Delta p$ ，水银柱将向上移动。

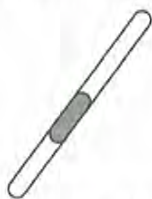


图 1.9 封闭玻璃管中的水银柱

10. (15 届预赛) 一个质量为 m 、管口截面为 S 的薄壁长玻璃管内灌满密度为 ρ 的水银，现把它竖直倒插在水银槽中，再慢慢向上提起，直到玻璃管口刚与槽中的水银面接触。这时，玻璃管内水银高度为 h 。现将管的封闭端挂在天平另一个盘的挂钩上，而在天平另一个盘中放砝

码,如图 1.10 所示。要使天平平衡,则所加砝码的质量等于_____。

【解】这时,管中上部为真空,其中的水银由于黏滞作用而与玻璃管结合,因而天平此端的重量为 $mg + \rho ghS$,所以另一端砝码的质量为 $m + \rho hS$ 。

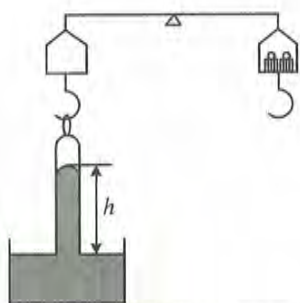


图 1.10 挂在天平一端的装有水银的玻璃管

11. 如图 1.11 所示, C 为圆筒形容器, P 为活塞, P 的两边充有理想气体, P 与圆筒间无摩擦、不漏气。 L 为固定在活塞上的细长直杆, 细杆与圆筒间无摩擦且密封很好, 不漏气。 a 为跨过无摩擦的定滑轮并与悬盘相连的轻绳, 两悬盘的质量相等。整个装置放在恒温室中。

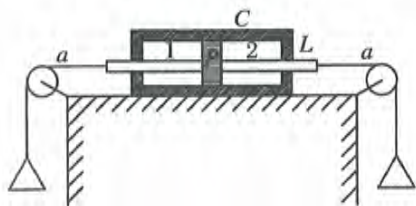


图 1.11 活塞两侧可挂砝码

当温度为 $T = 300 \text{ K}$, 左盘上放置砝码 $m_1 = 1.2 \text{ kg}$ 且活塞平衡时, 两部分的气体体积相等, 即 $V_1 : V_2 = 1 : 1$ 。

当温度 $T' = 400 \text{ K}$, 右盘上放置砝码 $m_2 = 0.5 \text{ kg}$ 且活塞平衡时, 两部分气体体积之比为 $V'_1 : V'_2 = 4 : 1$ 。

现欲使活塞不因温度的变化而左右移动, 问:

- (1) 应如何在盘内放置砝码?
- (2) 此时左右两部分气体的体积比是多少?

【解】 设两室中气体的物质的量分别为 ν_1, ν_2 , 活塞截面积为 S , 则状态方程分别为

$$p_1 V_1 = \nu_1 RT \quad \text{和} \quad p_2 V_2 = \nu_2 RT$$

第一种情形中, $(p_1 - p_2)S = m_1 g$, 即

$$\left(\frac{\nu_1}{V_1} - \frac{\nu_2}{V_2}\right)RT_1 S = m_1 g \quad (1)$$

第二种情形中, $(p'_2 - p'_1)S = m_2 g$, 即

$$\left(\frac{\nu_2}{V'_2} - \frac{\nu_1}{V'_1}\right)RT_2 S = m_2 g \quad (2)$$

设左盘砝码比右盘多 Δm 时, 活塞不因温度变化而移动, 则要求

$$\left(\frac{\nu_1}{V'_1} - \frac{\nu_2}{V'_2}\right)RTS = \Delta mg \quad (3)$$

只有 $\frac{\nu_1}{V'_1} = \frac{\nu_2}{V'_2}$ 时, 式(3)才能成立, 同时 $\Delta m = 0$ 。

设容器的总容积为 V , 则 $V_1 = V_2 = \frac{1}{2} V$, $V'_1 = \frac{4}{5} V$, $V'_2 = \frac{1}{5} V$ 。式(1)和式(2)可分别化为

$$\nu_1 - \nu_2 = \frac{m_1 g V}{2T_1 R S}, \quad 4\nu_2 - \nu_1 = \frac{4m_2 g V}{5T_2 R S}, \quad \text{所以有} \quad \frac{\nu_1 - \nu_2}{4\nu_2 - \nu_1} = \frac{5}{8} \frac{m_1 T_2}{m_2 T_1} = \frac{5}{8} \cdot \frac{1.2}{0.5} \cdot \frac{400}{300} = 2, \quad \text{即} \quad \frac{\nu_1}{\nu_2} = 3,$$

所以

$$\frac{V'_1}{V'_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2} = 3$$

12. (25 届预赛) 如图 1.12 所示, 放置在升降机地板上的盛有水的容器中, 插有两根相对容器的位置是固定的玻璃管 a 和 b , 管的上端都是封闭的, 下端都是开口的, 管内被水各封有一定质量的气体。平衡时, a 管内的水面比管外低, b 管内的水面比管外高。现令升降机从静止开始加速下降, 已知在此过程中管内气体仍被封闭在管内, 且经历的过程可视为绝热过程, 则在此过程中, ()。

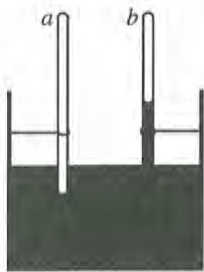


图 1.12 水银容器

- A. a 中气体内能将增加, b 中气体内能将减少
- B. a 中气体内能将减少, b 中气体内能将增加
- C. a 、 b 中气体内能都将增加
- D. a 、 b 中气体内能都将减少

【解】 升降机加速下降的过程中, 气体的压强不变, 水柱的压强减小, 因而为了维持内外气体的压强差, a 管中液面降低, 管中气体对外做功; b 管中液面升高, 大气压对管中气体做功。所以, a 中气体内能将减少, b 中气体内能将增加, 答案是 B。

13. (25 届预赛) 图 1.13 所示为由粗细均匀的细玻璃管弯曲成的“双 U 形管”, a 、 b 、 c 、 d 为其四段竖直的部分, 其中 a 、 d 上端是开口的, 处在大气中。管中的水银把一段气体柱密封在 b 、 c 内, 达到平衡时, 管内水银面的位置如图 1.13 所示。现缓慢地降低气柱中气体的温度, 若 c 中的水银面上升了一小段高度 Δh , 则()。

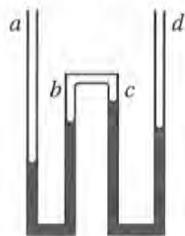


图 1.13 双 U 形管

- A. b 中的水银面也上升 Δh
- B. b 中的水银面也上升, 但上升的高度小于 Δh
- C. 气柱中气体压强的减少量等于高为 Δh 的水银柱所产生的压强
- D. 气柱中气体压强的减少量等于高为 $2\Delta h$ 的水银柱所产生的压强

【解】 降低温度, 气柱的压强也将降低, c 段水银液面上升 Δh , d 段水银液面下降 Δh , 高度差变为 $2\Delta h$, a 、 b 段水银液面的高度差也将增加为 $2\Delta h$ 。所以答案为 A、D。

14. (28 届预赛) 在大气中, 将一容积为 0.5 m^3 的一端封闭、一端开口的圆筒筒底朝上竖直插入水中, 然后放手。平衡时, 筒内空气的体积为 0.4 m^3 。设大气压强与 10.0 m 高的水柱产生的压强相同, 则筒内外水面的高度差为_____。

【解】 若不考虑浮力以及表面张力, 重新平衡时, 大气压强与其重力的压强等于筒内气体的压强。筒中气体初末态温度相同, 则末态气体的压强为大气压强的 1.25 倍, 所以筒内外水面的高度差为 2.5 m 。

15. (28 届预赛) 由双原子分子构成的气体, 当温度升高时, 一部分双原子分子会分解成两个单原子分子, 温度越高, 被分解的双原子分子的比例越大, 于是整个气体可视为由单原子分子构成的气体与由双原子分子构成的气体的混合气体。这种混合气体的每一种成分气体都可视为理想气体。在体积 $V = 0.045 \text{ m}^3$ 的坚固的容器中, 盛有一定质量的碘蒸气, 现于不同温度下测得容器中蒸气的压强如下:

T/K	1073	1473
p/Pa	2.099×10^5	4.120×10^5

试求温度分别为 1073 K 和 1473 K 时,该碘蒸气中单原子分子碘蒸气的质量与碘的总质量的比值。已知碘蒸气的总质量与 1 mol 的双原子碘分子的质量相同,普适气体常量 $R = 8.31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ 。

【解】 设不同温度 T, T' 下两种分子的物质的量分别为 ν_1, ν_2 和 ν'_1, ν'_2 , 分压分别为 p_1, p_2 和 p'_1, p'_2 , 总压强分别为 p, p' 。则根据题中数据和状态方程,可得

$$\nu_1 + \nu_2 = \frac{pV}{RT} = \frac{2.099 \times 10^5 \times 0.045}{8.31 \times 1073} = 1.059$$

$$\nu'_1 + \nu'_2 = \frac{p'V}{RT'} = \frac{4.120 \times 10^5 \times 0.045}{8.31 \times 1473} = 1.515$$

而 $\frac{1}{2}\nu_1 + \nu_2 = 1, \frac{1}{2}\nu'_1 + \nu'_2 = 1$, 可解得 $\begin{cases} \nu_1 = 0.118 \\ \nu_2 = 0.941 \end{cases}, \begin{cases} \nu'_1 = 1.03 \\ \nu'_2 = 0.485 \end{cases}$

所以单原子碘质量与总质量之比为

$$\frac{\nu_1}{2} = \frac{0.118}{2} = 0.054, \quad \frac{\nu'_1}{2} = \frac{1.103}{2} = 0.552$$

16. (13 届复赛) 有一个用伸缩性极小且不漏气的布料制作的气球(布的质量可忽略不计), 直径为 $d = 2.0 \text{ m}$ 。球内充有压强 $p_0 = 1.005 \times 10^5 \text{ Pa}$ 的气体。该布料所能承受的最大不被撕破力为 $F_m = 8.5 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ (即对于一块展平的 1 m 宽的布料, 沿布面且垂直于布料宽度方向所施加的力超过 $8.5 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ 时, 布料将被撕破)。开始时, 气球被置于地面上, 该处的大气压强为 $p_{a0} = 1.000 \times 10^5 \text{ Pa}$, 温度 $T_0 = 293 \text{ K}$ 。假设空气的压强和温度均随高度而线性地变化, 压强的变化为 $\alpha_p = -9.0 \text{ Pa} \cdot \text{m}^{-1}$, 温度的变化为 $\alpha_T = -3.0 \times 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}$, 问该气球上升到多高时将破裂?

假设气球上升很缓慢, 可认为球内温度随时与周围空气的温度保持一致。在考虑气球破裂时, 可忽略气球周围各处和底部之间空气压强的差别。

【解】 气球上内外气体的压强差为 $p - p_a$ 。如果将气球等分为两半, 则大圆每一侧所受的气体的张力为 $F = \frac{\pi d^2}{4}(p - p_a)$, 该大圆上单位长度的张力

$$f = \frac{F}{\pi d} = \frac{d}{4}(p - p_a)$$

而该大圆所能承受的最大张力为每个半球所受到的气体的张力为 F_m 。

依题意, 大气压强和温度随高度 y 处的变化可分别表示为 $p_a = p_{a0} + \alpha_p y$ 和 $T = T_0 + \alpha_T y$ 。

忽略气球体积的变化, 则球内压强为 $p = \frac{p_0 T}{T_0} = p_0 \left(1 + \alpha_T \frac{y}{T_0}\right)$ 。

$$f = \frac{d}{4}(p - p_a) = \frac{d}{4} \left(p_0 - p_{a0} - \alpha_p y + \alpha_T \frac{p_0 y}{T_0} \right)$$

气球破裂时, 有以下关系式

$$\frac{d}{4} \left(p_0 - p_{a0} - \alpha_p y + \alpha_T \frac{p_0 y}{T_0} \right) = F_m$$

解得

$$y = \frac{\frac{4F_m}{d} - p_0 + p_{a0}}{\alpha_T \frac{p_0}{T_0} - \alpha_p} = 2.1 \times 10^3 \text{ m}$$

17. (14 届复赛) 如图 1.14(a)所示,正确使用高压锅的办法是:将已加上密封锅盖的高压锅加热,当锅内水沸腾时,加上一定重量的高压阀,此时可以认为锅内空气已全部排除,只有饱和和水蒸气。继续加热,水温将继续升高,到高压阀被蒸气顶起时,锅内温度即达到预期温度。

某一高压锅的预期温度为 120°C ,如果某人在使用此锅时,未按上述程序,而在水温被加热至 90°C 时就加上高压阀(可以认为此时锅内水汽为饱和水汽),问当继续加热到高压阀开始被顶起而冒汽时,锅内温度为多少?

已知:大气压强 $p_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$; 90°C 时水的饱和气压 $p_w(90) = 7.010 \times 10^4 \text{ Pa}$; 120°C 时水的饱和气压 $p_w(120) = 1.985 \times 10^5 \text{ Pa}$; 在 90°C 到 120°C 之间水的饱和气压 p_w 和温度 $t(^{\circ}\text{C})$ 的函数关系 $p_w(t)$ 如图 1.14(b)所示。

【解】 在水温被加热至 90°C 时,锅中干空气的压强为 $p_0 - p_w(90) = 3.12 \times 10^4 \text{ Pa}$ 。加上阀后,由于是等容过程,故温度改变时,干空气的分压为

$$p(t) = \frac{T}{T_0} p_0 = \frac{t + 273}{90 + 273} \times 3.12 \times 10^4 = (0.086t + 23.5) \times 10^3 (\text{Pa})$$

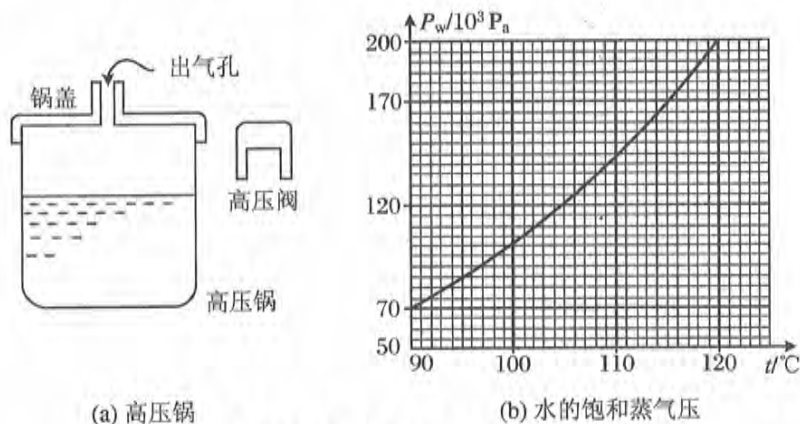


图 1.14 高压锅及水的饱和蒸气压

当阀被顶起时,饱和水蒸气的分压与干空气的分压之和等于 120°C 时水的饱和蒸气压,即

$$p(t) + p_w(t) = p_w(120)$$

代入参数,可得

$$(0.086t + 23.5) \times 10^3 + p_w(t) = 198.5 \times 10^3$$

当阀被顶起时,锅内饱和蒸气压为

$$p_w(t) = 198.5 \times 10^3 - (0.086t + 23.5) \times 10^3 = (175.0 - 0.086t) \times 10^3 (\text{Pa})$$

这是一条直线。在图 1.14(b)上画出此直线,该直线与饱和蒸气压的曲线的交点即是所求。温度为 114.5°C 。

18. (18 届复赛) 正确使用压力锅的方法是: 将已盖好密封锅盖的压力锅, 如图 1.15 所示加热, 当锅内水沸腾时再加盖压力阀 S, 此时可以认为锅内只有水的饱和蒸气, 空气已全部排除。然后继续加热, 直到压力阀被锅内的水蒸气顶起时, 锅内即已达到预期温度(即设计时希望达到的温度)。现有一压力锅, 在海平面处加热能达到的预期温度为 120°C , 某人在海拔 5 000 m 的高山上使用此压力锅, 锅内有足量的水。

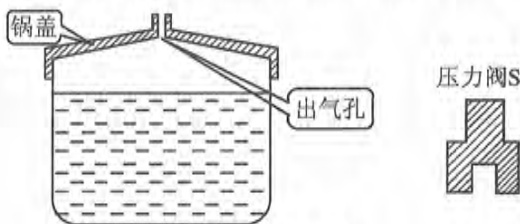


图 1.15 高压锅

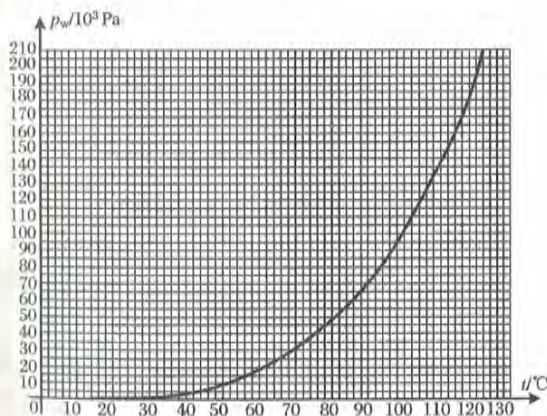
(1) 若不加盖压力阀, 锅内水的温度最高可达多少?

(2) 若按正确方法使用压力锅, 锅内水的温度最高可达多少?

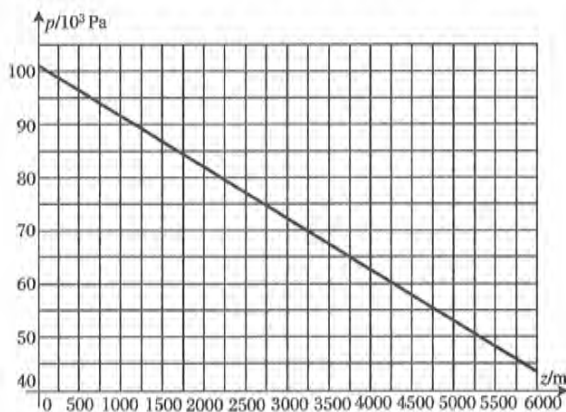
(3) 若未按正确方法使用压力锅, 即盖好密封锅盖一段时间后, 在点火前就加上压力阀, 此时水温为 27°C , 那么加热到压力阀刚被顶起时, 锅内水的温度是多少? 若继续加热, 锅内水的温度最高可达多少? 假设空气不溶于水。

已知: 水的饱和蒸气压 $p_w(t)$ 与温度 t 的关系图线如图 1.16(a) 所示。大气压强 $p(z)$ 与高度 z 的关系的简化图线如图 1.16(b) 所示。当 $t = 27^{\circ}\text{C}$ 时, $p_w(27^{\circ}\text{C}) = 3.6 \times 10^3 \text{ Pa}$; $z = 0$ 处, $p(0) = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ 。

【解】 (1) 由图 1.16(b) 可以看出, 在海拔 5 000 m 处, 大气压强为 $p(5\,000) = 53.0 \times 10^3 \text{ Pa}$ 。若不加阀, 锅内的压强最高可达 $53.0 \times 10^3 \text{ Pa}$, 这就是水的饱和蒸气压, 根据图 1.16(a), 对应的温度约为 81°C 。



(a) 水的饱和蒸气压与温度的关系



(b) 大气压强与高度的关系

图 1.16 饱和蒸气压、大气压数据

(2) 温度为 120°C 时, 水的饱和蒸气压为 $195 \times 10^3 \text{ Pa}$, 这是海平面处大气压与阀产生的总压强。而在海拔 5 000 m 处, 大气压强为 $53.0 \times 10^3 \text{ Pa}$, 比海平面减小了 $48.0 \times 10^3 \text{ Pa}$ 。因而此时锅内的最高压强为 $147 \times 10^3 \text{ Pa}$ 。按正确方法使用, 待锅内干空气全部排出后再加阀, 锅内最

大的饱和蒸气压为 $147 \times 10^3 \text{ Pa}$, 对应的温度为 111°C 。

(3) 27°C 时, 锅内干空气的分压为

$$p_0 = p(5000) - p_w(27^\circ\text{C}) = 49.4 \times 10^3 \text{ Pa}$$

阀被顶起时, 锅内的压强为 $147 \times 10^3 \text{ Pa}$ 。

可以解得压力阀刚被顶起时, 锅内水的温度是 97°C 。若继续加热, 锅内干空气最终会被排空, 水的温度仍可达到 111°C 。

19. (19 届复赛) 某甲设计了一个如图 1.17 所示的“自动喷泉”装置, 其中 A、B、C 为三个容器, D、E、F 为三根细管。管栓 K 是关闭的。A、B、C 及细管均盛有水, 容器水面的高度差分别为 h_1 和 h_2 。A、B、C 的截面半径为 12 cm , D 的半径为 0.2 cm 。甲向同伴乙说:“我若拧开管栓 K, 会有水从细管口喷出。”乙认为不可能。理由是:“低处的水自动走向高处, 能量从哪儿来?”甲当即拧开 K, 果然见到有水喷出, 乙哑口无言, 但不能明白自己的错误何在。甲又进一步演示。在拧开管栓 K 前, 先将喷管 D 的上端加长到足够长, 然后拧开 K, 管中水面即上升, 最后水面静止于某个高度。

(1) 讨论拧开 K 后水柱上升的原因。

(2) 当 D 管上端足够长时, 求拧开 K 后 D 中静止水面与 A 中水面的高度差。

(3) 论证水柱上升所需的能量来源。

【解】(1) 如图 1.18 所示, 在 A、B、C 瓶中, 水面上方均有空气。其中 A 瓶水面处大气压为 p_0 , 由于 A、C 两瓶通过毛细管 E 相连, 而 E 中有水, 则 C 瓶水面处的压强为 $p_0 + \rho g(h_1 + h_2)$, 其中 ρ 为水的密度。则 C 瓶中空气的压强亦为 $p_0 + \rho g(h_1 + h_2)$ 。

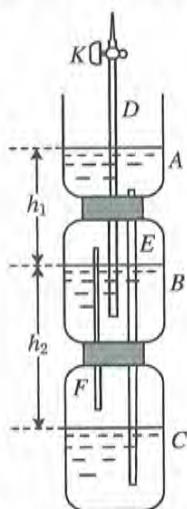


图 1.17 “自动喷泉”装置

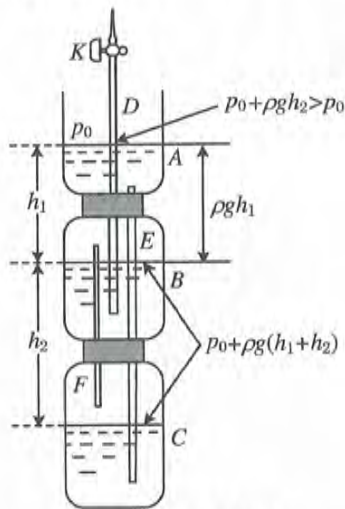


图 1.18 压强分析

B、C 瓶通过毛细管 F 相连, F 中是空气, 因而 B、C 瓶中空气的压强相等。因此, B 瓶中水面处的压强为 $p_0 + \rho g(h_1 + h_2)$ 。

毛细管 D 插入 B 瓶的水中, 则 D 管中在 B 瓶的水面处压强为 $p_0 + \rho g(h_1 + h_2)$ 。若将 D 的管栓 K 开启, 则 D 中水面可上升至比 B 瓶中水面高出 $h_1 + h_2$ 的位置, 即 D 管中的水面比 A 瓶的水面高出 h_2 , 因而 D 管中水柱上升。

(2) 若 D 管上端足够长, 拧开 K 后, D 中静止水面比 A 中水面高 h_2 。

(3) 由上面的分析可知, D 管中水面上升, B 瓶中水面将下降, 其中空气体积增大, 压强下降。则 C 瓶中空气进入 B 瓶, 导致 C 瓶中空气压强降低, 则 A 瓶中的水通过管 E 进入 C 瓶, 这样 A 瓶中的水面就要降低。所以, 水柱上升的能量来源是大气对 A 中的水做功的结果。

由于水瓶截面积是细管截面积的 3 600 倍, 故管中水面上升, 不会导致瓶中水面有明显改变。

20. (20 届复赛) U 形管的两支管 A 、 B 和水平管 C 都是由内径均匀的细玻璃管做成的, 它们的内径与管长相比都可忽略不计。已知三部分的截面积分别为 $S_A = 1.0 \times 10^{-2} \text{ cm}^2$, $S_B = 3.0 \times 10^{-2} \text{ cm}^2$, $S_C = 2.0 \times 10^{-2} \text{ cm}^2$, 在 C 管中有一段空气柱, 两侧被水银封闭。当温度为 $t_1 = 27^\circ\text{C}$ 时, 空气柱长为 $l = 30 \text{ cm}$, 如图 1.19 所示, C 中气柱两侧的水银柱长分别为 $a = 2.0 \text{ cm}$, $b = 3.0 \text{ cm}$, A 、 B 两支管都很长, 其中的水银柱高均为 $h = 12 \text{ cm}$ 。大气压强保持为 $p_0 = 76 \text{ cmHg}$ 不变。不考虑温度变化时管和水银的热膨胀。试求气柱中空气温度缓慢升高到 $t = 97^\circ\text{C}$ 时空气的体积。

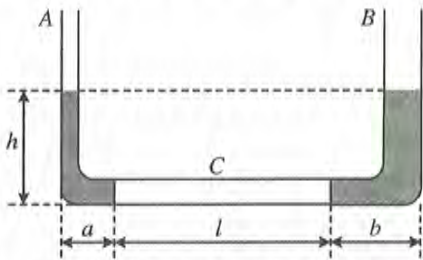


图 1.19 U 形管中的气柱和水银柱

【解】 设温度升高后, 气柱的长度变化了 Δl , 体积变化了 $\Delta V = S_C \Delta l$ 。相应地, 两侧水银柱各升高了 Δh , 则 $(S_A + S_B) \Delta h = S_C \Delta l$, 即

$$\Delta h = \frac{S_C \Delta l}{S_A + S_B}$$

由状态方程, 可得 $\frac{(p_0 + h + \Delta h)(l + \Delta l)}{T} = \frac{(p_0 + h)l}{T_1}$, 即

$$\frac{\left(p_0 + h + \frac{S_C \Delta l}{S_A + S_B}\right)(l + \Delta l)}{T} = \frac{(p_0 + h)l}{T_1}$$

$$\frac{S_C}{S_A + S_B} \Delta l^2 + \left(\frac{S_C l}{S_A + S_B} + p_0 + h\right) \Delta l + (p_0 + h)l - \frac{T(p_0 + h)l}{T_1} = 0$$

$$\frac{1}{2} \Delta l^2 + (15 + 88) \Delta l + 88 \times 30 - \frac{88 \times 30 \times 370}{300} = 0$$

$$\Delta l^2 + 206 \Delta l - 1232 = 0$$

解得 $\Delta l = 5.82 \text{ cm}$ 。

由于 $\Delta l > a + b$, 说明气体已经进入竖管。由于 B 管较粗, 所以气体一定是首先进入 B 管。而当气体进入竖管后, 由于 B 管中水银柱长度不再变化, 所以管中气压也不再变化, A 管中水银柱的液面也保持不变。

当气体刚刚进入 B 管时, B 管中水银柱的高度增加了 $2b/3$, A 管中水银柱的高度也增加这么多, 所以 C 管左端水银的长度减少了 $b/2$, C 管气体的长度为 $l + 7b/6$, 此时气体的压强为 $p_m = p_0 + h + 2b/3$, 温度为

$$T_m = \frac{\left(p_0 + h + \frac{2}{3}b\right)\left(l + \frac{7}{6}b\right)}{p_1 l} T_1 = 347.7 \text{ K}$$

此后气体等压膨胀, $p_m = p_0 + h + 2b/3$, 体积

$$V = \frac{T}{T_m} V_m = \frac{370}{347.7} \left(30 + \frac{7 \times 5}{6} \right) \times 2 \times 10^{-2} \text{ cm}^3 = 0.72 \text{ cm}^3$$

21. (21 届复赛) 薄膜材料气密性能的优劣常用其透气系数来加以评判。对于均匀薄膜材料, 在一定温度下, 某种气体通过薄膜渗透过的的气体分子数 $N = k \frac{\Delta p S t}{d}$, 其中 t 为渗透持续时间, S 为薄膜的面积, d 为薄膜的厚度, Δp 为薄膜两侧气体的压强差。 k 称为该薄膜材料在该温度下对该气体的透气系数。透气系数愈小, 材料的气密性能愈好。

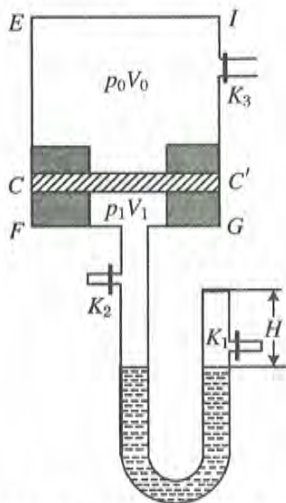


图 1.20 测量薄膜透气系数

图 1.20 为测定薄膜材料对空气的透气系数的一种实验装置示意图。EFGI 为渗透室, U 形管左管上端与渗透室相通, 右管上端封闭; U 形管内横截面积 $A = 0.150 \text{ cm}^2$ 。实验中, 首先测得薄膜的厚度 $d = 0.66 \text{ mm}$, 再将薄膜固定于图中 CC' 处, 从而把渗透室分为上下两部分, 上面部分的容积 $V_0 = 25.00 \text{ cm}^3$, 下面部分连同 U 形管左管水面以上部分的总容积为 V_1 , 薄膜能够透气的面积 $S = 1.00 \text{ cm}^2$ 。打开开关 K_1, K_2 与大气相通, 大气的压强 $p_1 = 1.00 \text{ atm}$, 此时 U 形管右管中气柱长度 $H = 20.00 \text{ cm}$, $V_1 = 5.00 \text{ cm}^3$ 。关闭 K_1, K_2 后, 打开开关 K_3 , 对渗透室上部分迅速充气至气体压强 $p_0 = 2.00 \text{ atm}$, 关闭 K_3 并开始计时。两小时后, U 形管左管中的水面高度下降了 $\Delta H = 2.00 \text{ cm}$ 。实验过程中, 始终保持温度为 0°C 。求该薄膜材料在 0°C 时对空气的透气系数。(本实验中由于薄膜两侧的压强差在实验过程中不能保持恒定, 在压强差变化不太大的情况下, 可用计时开始时的压强差和计时结束时的压强差的平均值 $\overline{\Delta p}$ 来代替公式中的 Δp 。普适气体常量 $R = 8.31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$,

$1.00 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ 。

【解】 根据公式 $N = k \frac{\Delta p S t}{d}$, 可得到透气系数为 $k = \frac{d}{S} \frac{N}{\Delta p t}$ 。则只要知道了某一时间内渗透过的分子数, 即可算出透气系数。

初态, 薄膜下方的气压为 p_1 , 上方气压为 p_0 , 压强差为 $\Delta p_0 = p_0 - p_1$ 。

末态, U 形管右管气柱长度为 $H - 2\Delta H$, 由于是等温过程, 所以压强为 $p_R = p_1 \frac{H_1}{H_1 - 2\Delta H}$ 。而左管比右管液面低 $2\Delta H$, 所以左管中的气压

$$p_L = p_R + 2\rho g \Delta H = p_1 \frac{H_1}{H_1 - 2\Delta H} + 2\rho g \Delta H$$

气体的状态方程可以写作 $pV = \frac{N}{N_A} RT$, 其中分子数 $N = \frac{N_A pV}{RT}$ 。左管中增加的分子数

$$\Delta N = \frac{N_A}{RT} (p_L V_L - p_1 V_1) = \frac{N_A}{RT} \left[\left(\frac{p_1 H_1}{H_1 - 2\Delta H} + 2\rho g \Delta H \right) (V_1 + A \Delta H) - p_1 V_1 \right]$$

而薄膜上方的气压

$$p' = \frac{N - \Delta N}{N_A} \frac{RT}{V_0}$$

压强差

$$\Delta p = p' - p_L = \frac{N - \Delta N}{N_A} \frac{RT}{V_0} - \frac{p_1 H_1}{H_1 - 2\Delta H} - 2\rho g \Delta H$$

以平均压强差代替渗透过程中不断变化的压强差,将参数代入,可得到

$$k = \frac{Nd}{\Delta p t S} = 2.4 \times 10^{11} \text{ Pa}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$

22. (25 届复赛) 图 1.21 所示为低温工程中常用的一种气体、蒸气压联合温度计的原理示意图, M 为指针压力表, 以 V_M 表示其中可以容纳气体的容积; B 为测温泡, 处在待测温度的环境中, 以 V_B 表示其体积; E 为贮气容器, 以 V_E 表示其体积; F 为阀门。 M 、 E 、 B 由体积可忽略的毛细血管连接。在 M 、 E 、 B 均处在室温 $T_0 = 300 \text{ K}$ 时充以压强 $p_0 = 5.2 \times 10^5 \text{ Pa}$ 的氢气。假设氢的饱和蒸气仍遵从理想气体状态方程。现考察以下各问题:

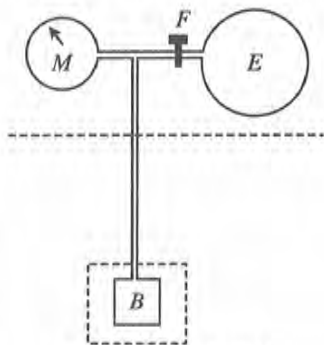


图 1.21 一种温度计

(1) 关闭阀门 F , 使 E 与温度计的其他部分隔断, 于是 M 、 B 构成一简易的气体温度计, 用它可测量 25 K 以上的温度, 这时 B 中的氢气始终处在气态, M 处在室温中。试导出 B 处的温度 T 和压力表显示的压强 p 的关系。除题中给出的室温 T_0 时 B 中氢气的压强 p_0 外, 理论上至少还需要测量几个已知温度下的压强才能定量确定 T 与 p 之间的关系?

(2) 开启阀门 F , 使 M 、 E 、 B 连通, 构成一用于测量 $20 \sim 25 \text{ K}$ 温度区间的低温的蒸气压温度计, 此时压力表 M 测出的是液态氢的饱和蒸气压。由于饱和蒸气压与温度有灵敏的依赖关系, 知道了氢的饱和蒸气压与温度的关系, 通过测量氢的饱和蒸气压, 就可相当准确地确定这一温区的温度。在设计温度计时, 要保证当 B 处于温度低于 $T_v = 25 \text{ K}$ 时, B 中一定要有液态氢存在。而当温度高于 $T_v = 25 \text{ K}$ 时, B 中无液态氢。为达到这一目的, $V_M + V_E$ 与 V_B 间应满足怎样的关系? 已知 $T_v = 25 \text{ K}$ 时, 液态氢的饱和蒸气压 $p_v = 3.3 \times 10^5 \text{ Pa}$ 。

(3) 已知室温下压强 $p_1 = 1.04 \times 10^5 \text{ Pa}$ 的氢气体积是同质量的液态氢体积的 800 倍, 试论证蒸气压温度计中的液态氢不会溢出测温泡 B 。

【解】 (1) 对于 M 、 B 构成的气体温度计, 当其中的氢气始终处于气态时, 初态时, M 、 B 中的温度相同, 均为 T_0 , 压强均为 p_0 ; 末态时, B 中的温度仍为 T_0 , B 中的温度变为 T , M 、 B 中压强均为 p 。则状态方程分别为

$$p_0(V_B + V_M) = \nu RT_0 \quad (1)$$

$$pV_M = \nu_M RT_0 \quad (2)$$

$$pV_B = (\nu - \nu_M) RT \quad (3)$$

由式(2)、式(3)分别解出 $\nu_M = \frac{pV_M}{RT_0}$, $\nu - \nu_M = \frac{pV_B}{RT}$, 两者相加, 并与式(1)解出的 $\nu =$

$\frac{p_0(V_B + V_M)}{RT_0}$ 联立, 得到 $\frac{pV_M}{RT_0} + \frac{pV_B}{RT} = \frac{p_0(V_B + V_M)}{RT_0}$, 从中解出

$$T = \frac{p}{p_0} \frac{T_0}{1 + \frac{V_B}{V_M} \left(1 - \frac{p}{p_0}\right)}$$

但题中 V_M 和 V_B 未知,因而还需要另测量至少 2 个已知温度下的压强,才能确定 V_M 和 V_B 的值,然后测量未知温度。

(2) 当 B 中的氢被液化时,温度计中气体的压强即等于氢的饱和蒸气压,该压强仅与温度有关。所以只要测定压强,即可知道温度。

设温度计中氢的总物质的量为 ν ,温度低于 25 K 时, E 、 M 中氢的物质的量为 ν_1 , B 中仍处于气态的氢的物质的量为 ν_2 ,忽略液态氢所占的体积,则气体的状态方程分别为

$$p_0(V_E + V_M + V_B) = \nu RT_0, \quad \text{即} \quad \nu = \frac{p_0(V_E + V_M + V_B)}{RT_0}$$

$$p_V(V_E + V_M) = \nu_1 RT_0, \quad \text{即} \quad \nu_1 = \frac{p_V(V_E + V_M)}{RT_0}$$

$$p_V V_B = \nu_2 RT_V, \quad \text{即} \quad \nu_2 = \frac{p_V V_B}{RT_V}$$

由于部分氢被液化,所以 $\nu \geq \nu_1 + \nu_2$,即

$$\frac{p_0(V_E + V_M + V_B)}{T_0} \geq \frac{p_V(V_E + V_M)}{T_0} + \frac{p_V V_B}{T_V}$$

代入数据,得到

$$\begin{aligned} \frac{5.2 \times 10^5 (V_E + V_M + V_B)}{300} &\geq \frac{3.3 \times 10^5 (V_E + V_M)}{300} + \frac{3.3 \times 10^5 V_B}{25} \\ \frac{1.9(V_E + V_M)}{300} &\geq \frac{3.3 V_B}{25} - \frac{5.2 V_B}{300} = \frac{(12 \times 3.3 - 5.2) V_B}{300} = \frac{34.4 V_B}{300} \\ V_M + V_E &\geq 18.1 V_B \end{aligned}$$

(3) 由于液态氢的密度随温度改变很小,所以室温下压强 $p_0 = 5.2 \times 10^5$ Pa 时氢气被液化,体积变为原来的 1/800。设温度计中氢的总量为 ν ,测温时,若 B 中全部是液态氢,则其中氢的物质的量为

$$\Delta \nu = \frac{800 p_0 V_B}{RT_0}$$

而 $V_B \leq \frac{V_E + V_M + V_B}{19.1}$,所以

$$\Delta \nu \leq \frac{800}{19.1} \frac{p_0 (V_E + V_M + V_B)}{RT_0} = 40 \nu$$

所以液态氢不会溢出测温泡 B 。

23. (13 届预赛) 一个密闭的圆柱形气缸竖直放在水平桌面上,缸内有一与底面平行的可上下滑动的活塞将气缸隔为两部分。活塞导热性能良好,与气缸壁之间无摩擦、不漏气。活塞上方盛有 1.5 mol 氢气,下方盛有 1 mol 氧气,如图 1.22 所示。它们的温度始终相同。已知在温度为 320 K 时,氢气的体积是氧气的 4 倍。试问在温度是多少时氢气的体积是氧气的 3 倍?

【解】 设气缸除去活塞后的总容积为 V ,初态时,两部分气体的压强分别为

$$p_1 = \frac{\nu_1 RT_0}{V_1}, \quad p_2 = \frac{\nu_2 RT_0}{V_2}$$

末态时,两部分压强分别为

$$p'_1 = \frac{\nu_1 RT}{V'_1}, \quad p'_2 = \frac{\nu_2 RT}{V'_2}$$

达到平衡时 $p_2 - p_1 = p'_2 - p'_1$, 即

$$\frac{\nu_2 RT_0}{V_2} - \frac{\nu_1 RT_0}{V_1} = \frac{\nu_2 RT}{V'_2} - \frac{\nu_1 RT}{V'_1}$$

已知 $V_1 = 4V_2, \nu_1 = 1.5, \nu_2 = 1$, 代入上式, 可得 $\frac{320}{V_2} - \frac{1.5 \times 320}{4V_2} = \frac{T}{V'_2} - \frac{1.5T}{3V'_2}$ 。由于 $V_2 = \frac{V}{5}, V'_2 = \frac{V}{4}$, 最终解得 $T = 500 \text{ K}$ 。

24. (12届决赛) 如图 1.23 所示, 一根两端封闭、粗细均匀的石英管, 竖直放置, 内有一段水银柱, 将管隔成上下两部分。下方为空气, 上方为一种可分解的双原子分子气体(每个分子由两个原子组成)。此种双原子分子气体的性质为: 当 $T > T_0$ 时, 其分子开始分解为单原子分子(仍为气体)。用 n_0 表示 T_0 时的双原子分子数, Δn 表示 $T + \Delta T$ 时分解了的双原子分子数, 其分解规律为: 当 ΔT 很小时, 有如下的关系:

$$\Delta n/n_0 = \Delta T/T_0$$

已知初始温度为 T_0 , 此时, 下方的气柱长度为 $2l_0$, 上方气柱长度为 l_0 , 水银柱产生的压强为下方气体压强的 $\alpha (0 < \alpha < 1)$ 倍, 试讨论当温度由 T_0 开始缓慢上升时, 水银柱将上升还是下降。忽略石英管和水银柱的体积随温度的变化。



图 1.22 竖直气缸



图 1.23 石英管内部封闭气体和水银柱

提示: 可用 x 表示水银柱因温度升高而移动的距离, $x > 0$ 表示升高, $x < 0$ 表示下降。

【解】 设管内部横截面积为 S , 下部管中空气的物质的量为 ν , 下方空气压强为 p_2 。初态温度为 T_0 时, 上部全是单原子分子, 设物质的量为 ν_1 , 则上方气体压强为 $p_1 = (1 - \alpha)p_2$ 。上下部分气体的状态方程分别为 $(1 - \alpha)p_2 l_0 S = \nu_1 RT_0$ 和 $2p_2 l_0 S = \nu RT_0$, 可得 $\nu_1 = \frac{1 - \alpha}{2} \nu$ 。

末态温度为 $T = T_0 + \Delta T$ 时, 设下部空气柱长度改变了 Δl , 则下部空气的压强为

$$p'_2 = \frac{\nu R(T_0 + \Delta T)}{(2l_0 + \Delta l)S}$$

上部气体的压强为

$$p'_1 = p'_2 - \alpha p_2 = \frac{\nu R(T_0 + \Delta T)}{(2l_0 + \Delta l)S} - \frac{2l_0 S}{(1-\alpha)\nu T_0 + \Delta T}$$

温度上升后,上部气体增加的物质的量为 $\Delta \nu = \frac{\nu_1 \Delta T}{(1-\alpha)\nu \Delta T} = \frac{T_0}{2} \frac{\nu_1 \Delta T}{(1-\alpha)\nu \Delta T}$, 总物质的量变为

$$\nu'_1 = \nu_1 + \Delta \nu = \frac{1-\alpha}{2} \nu + \frac{(1-\alpha)\nu}{2} \frac{T_0}{(1-\alpha)\nu \Delta T} = \frac{(1-\alpha)\nu}{2} \frac{T_0 + \Delta T}{T_0}$$

压强可表示为

$$p'_1 = \frac{\frac{2}{T_0} R(T_0 + \Delta T)}{(1-\alpha)\nu T_0 + \Delta T} = \frac{(l_0 - \Delta l)S}{R(T_0 + \Delta T)} = \frac{(1-\alpha)\nu R(T_0 + \Delta T)^2}{2(l_0 - \Delta l)ST_0}$$

于是得到关系式

$$\nu R(T_0 + \Delta T) - \frac{\alpha \nu R T_0}{(1-\alpha)\nu R(T_0 + \Delta T)^2} = \frac{2l_0 S}{(1-\alpha)\nu R(T_0 + \Delta T)^2} - \frac{2l_0 S}{2(l_0 - \Delta l)ST_0}$$

为了表达简单,记 $\Delta T = \beta T_0, \Delta l = \lambda l_0$, 上述关系式化为

$$\alpha \lambda^2 + \left\{ \alpha - (1 + \beta)[2 + (1 - \alpha)(1 + \beta)] \right\} \lambda + 2\beta[2\alpha - 1 - (1 - \alpha)\beta] = 0$$

据此求出 λ , 并根据 λ 的正负号确定水银柱是上升还是下降。解为

$$\lambda = \frac{2\alpha}{[\alpha - 2(1 + \beta) - (1 - \alpha)(1 + \beta)^2]}$$

$$\pm \frac{\sqrt{[\alpha - 2(1 + \beta) - (1 - \alpha)(1 + \beta)^2]^2 - 8\alpha\beta[2\alpha - 1 - (1 - \alpha)\beta]}}{2\alpha}$$

当温度稍稍升高时, $\beta \rightarrow 0, \lambda = \frac{3 - 2\alpha \pm (3 - 2\alpha)}{2\alpha} = \begin{cases} 0 \\ \frac{\alpha}{3} - 2 > 1 \end{cases}$, 所以应当取“-”号。

记

$$b = -\frac{\alpha - 2(1 + \beta) - (1 - \alpha)(1 + \beta)^2}{2\beta[2\alpha - 1 - (1 - \alpha)\beta]}, \quad c = \frac{\alpha}{2\beta[2\alpha - 1 - (1 - \alpha)\beta]}$$

方程表示为 $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, 解为 $\lambda = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$ 。

由于 $\alpha < 1$, 所以 $\alpha - (1 + \beta)[2 + (1 - \alpha)(1 + \beta)]$ 一定小于 0, 即 $b < 0$ 。于是 λ 的正负取决于 c 的正负, 即 $2\alpha - 1 - (1 - \alpha)\beta$ 的正负。

由于刚刚开始升温时, $\beta = \Delta T/T_0$ 是个小量, 所以 λ 的正负由 $2\alpha - 1$ 决定。即:

$\alpha > 1/2$, 水银柱上升; $\alpha \leq 1/2$, 水银柱下降。

从上面的过程看出, 计算是比较复杂的, 但是, 由于只要作出判断, 不是要定量的结果, 所以实际上不必这么做, 而可以用以下的方法得出结论。

假设水银柱不动, 即升温后, 两部分气体的体积不变。升温后, 下部气体压强为 $p'_2 =$

$$\frac{T_0 + \Delta T}{T_0} p_2; \text{上部气体的压强为 } p'_1 = \frac{T_0}{(1-\alpha)(T_0 + \Delta T)^2} p_2. \text{ 压强差变为}$$

$$p'_2 - p'_1 = [1 - (1 - \alpha) \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right)] \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right) p_2$$

比较一下 $p'_2 - p'_1$ 与 αp_2 的大小, 就能得到结论。这样, 就省去了解方程的麻烦。

25. (19 届决赛) 如图 1.24 所示, 两个截面积为 S 的相同的 U 形管 1、2, 其内分别装有高度为 h_1 和 h_2 、密度为 ρ 的液体, 如图 1.24(a)。现用同样截面的导管将两者在大气中密接起来, 如图 1.24(b) 所示。导管中有一活塞 D , 它把管中气体分成长度皆为 L_0 的两部分, 每部分中气体的压强皆为大气压 p_0 。活塞与管壁间最大的静摩擦力为 F 。现向 U 形管 1 开口端缓慢注入一定量的同种液体, 达到平衡时 U 形管 2 的左端液面高度变为 h_3 。试求注入液体的体积。

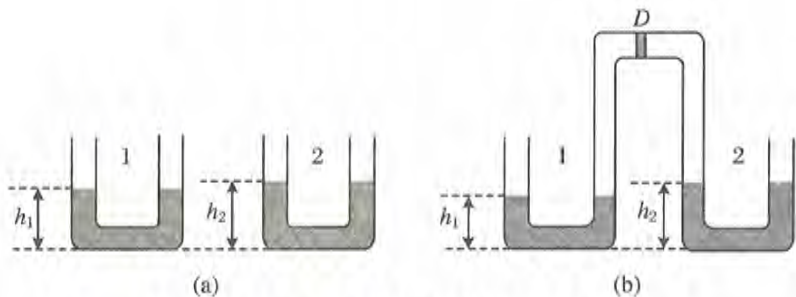


图 1.24 装有液体的两个 U 形管(a)及其连接(b)

【解】 活塞平衡时, 摩擦力向左, 大小为 F 。U 形管 2 两端液面的高度差为 $\Delta h_2 = 2(h_2 - h_3)$, 活塞右侧气体的压强为 $p_2 = p_0 + \rho g \Delta h_2$, 因而左侧气体的压强为

$$p_1 = p_0 + \rho g \Delta h_2 + \frac{F}{S} = p_0 + 2\rho g(h_2 - h_3) + \frac{F}{S}$$

U 形管 1 两端液面的高度差为

$$\Delta h_1 = \frac{p_1 - p_0}{\rho g} = 2(h_2 - h_3) + \frac{F}{\rho g S}$$

所以注入的液体体积为

$$\Delta V = \frac{\Delta h_1}{2} S = (h_2 - h_3) S + \frac{F}{\rho g}$$

26. (7 届预赛) 一个质量 $m = 200.0 \text{ kg}$, 长 $l_0 = 2.00 \text{ m}$ 的薄底大金属桶倒扣在宽旷的水池底部, 如图 1.25 所示。桶内的横截面积 $S = 0.500 \text{ m}^2$ (桶的容积为 $l_0 S$), 桶本身(桶壁与桶底)的体积 $V_0 = 2.50 \times 10^{-2} \text{ m}^3$ 。桶内封有高度 $l = 0.200 \text{ m}$ 的空气, 池深 $H_0 = 20.00 \text{ m}$, 大气压强 $p_0 = 10.00 \text{ m}$ 水柱高, 水的密度 $\rho = 1.000 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ 。重力加速度 g 取 $10.00 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 。若用图中所示的吊绳将桶上提, 使桶底能到达水面处, 则绳拉力所需做的功有一最小值。从开始到绳拉力刚完成此功的过程中, 桶和水(包括池水及桶内水)的机械能改变了多少(结果要保留 3 位有效数字)? 不计水的阻力, 设水温很低, 不计其饱和和蒸气压的影响, 并设水温上下均匀且保持不变。

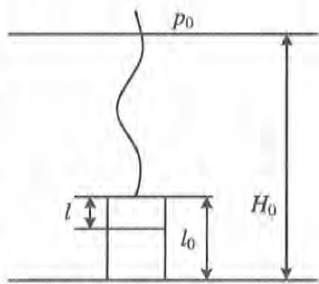


图 1.25 金属桶倒扣池底

【解】 设过程进行得非常缓慢, 忽略系统动能的变化。

$$F = (p_1 - p_2)S = -p_0 S^2 \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right) x = -kx$$

活塞所受合力为

$$p_1 = \frac{V_1 + xS}{V_1} p_0 = \left(1 + \frac{V_1}{S} x \right) p_0$$

$$p_2 = \frac{V_2 - xS}{V_2} p_0 = \left(1 - \frac{V_2}{S} x \right) p_0$$

点,则当活塞移动到 x 时,两侧的压强分别为

【解】(1) 取 x 轴沿活塞运动方向,并以平衡位置为坐标原

的周期 τ 之比。

(2) 求气体温度 $t = 0^\circ\text{C}$ 时的周期 τ 与气体温度 $t' = 30^\circ\text{C}$ 时

(1) 求活塞运动的周期,将结果用 p_0, V_1, V_2, m, S 表示。

位置,然后放开,活塞将在两边气体的压力下来回运动。整个系统可看作是恒温的。

同,压强都是 p ,体积分别为 V_1 和 V_2 ,如图 1.27 所示。现在用某种方法使活塞稍微平衡,气体分为两部分。活塞可在容器中无摩擦地滑动,当活塞处于平衡时,活塞两边气体的温度相同,压强都是 p ,体积分别为 V_1 和 V_2 ,如图 1.27 所示。现在用某种方法使活塞稍微平衡

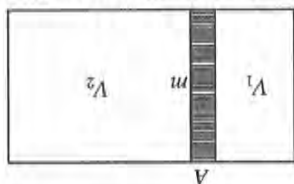


图 1.27 分为两部分的密闭容器

$$\Delta E_p = \Delta E_{p1} + \Delta E_{p2} + \Delta E_{pz} = 1.37 \times 10^4 \text{ J}$$

解得

$$\Delta E_{pz} = -\rho g S_0 l [H_0 - (H + l_0)] + \rho g S_0 (h - l_0) (H - h)$$

桶内的水,除了填充在池底时的空间之外,多出的一部分升到水面处,势能的变化为

$$\Delta E_{pz} = mg [H_0 - (H + l_0)]$$

金属桶势能的变化

$$\Delta E_{p1} = -\rho g V_0 [H_0 - (H + l_0)]$$

解得 $H = 5.82 \text{ m}$ 。过程中,被金属桶所排开的水的势能的变化为

$$(10 + H + h)h = 0.350(10.350 + H) = 28.2 \times 0.200$$

桶中的气体经历等温过程,所以有 $p_2 h = p_1 l$,即

柱高。

在池底时,桶中气体的压强为 $p_1 = 10.00 + H_0 - (l_0 - l) = (30.00 - 1.80) \text{ m} = 28.20 \text{ m}$ 水

(10.350 + H) m 水柱高。

解得 $h = 0.350 \text{ m}$ 。则其中气体的压强为 $p_2 = 10 + H + h =$

$$1 \times 10^3 (2.5 \times 10^{-2} + 0.500h) = 200.0$$

的条件为 $\rho g (V_0 + hS_0) = mg$,即

浮力与其重力相等,这时其中空气的高度为 h 。浮力与重力相等

如图 1.26 所示,设桶底到达距水面某一深度 H 时,所受的

量忽略)相等,则此后不需外力做功,桶也会浮到水面处。

大。如果在水面下某一位置,上述浮力与桶的重量(其中气体重

中的空气)所排开的液体的体积会逐渐增大,所受浮力将逐渐增

在用力将水桶向上拉的过程中,其中气体的压强逐渐减小,体积逐渐增大,所以桶(包括其

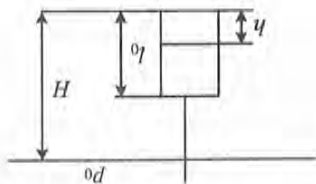


图 1.26 上升过程

其中 $k = p_0 S^2 \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right)$ 。因而活塞做周期运动, 周期为

$$\tau_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2\pi}{S} \sqrt{\frac{m(V_2 - V_1)}{p_0 V_2 V_1}}$$

(2) 初态时, 两室温度和压强相等, 分别设为 T_0 和 p_0 , 设其中气体的物质的量分别为 ν_1 、 ν_2 , 则有 $\nu_1 = \frac{p_0 V_1}{RT_0}$, $\nu_2 = \frac{p_0 V_2}{RT_0}$ 。温度变为 T , 平衡时, $\nu_1 = \frac{pV'_1}{RT}$, $\nu_2 = \frac{pV'_2}{RT}$ 。可见

$$\frac{V'_1}{V'_2} = \frac{V_1}{V_2}$$

即温度变化, 但平衡时, 两部分气体的体积不变。压强随温度改变为

$$p = \frac{T}{T_0} p_0$$

因而振动的周期为

$$\tau = \frac{2\pi}{S} \sqrt{\frac{m(V_2 - V_1)}{pV_2 V_1}} = \frac{2\pi}{S} \sqrt{\frac{m(V_2 - V_1)}{p_0 V_2 V_1} \frac{T_0}{T}} = \tau_0 \sqrt{\frac{T_0}{T}}$$

即

$$\frac{\tau_0}{\tau} = \sqrt{\frac{T}{T_0}} = \sqrt{\frac{303}{273}} = 1.05$$

28. (15 届决赛) 1 mol 理想气体经历了一个在 T - V 图上标为 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ 的循环过程, 如图 1.28 所示。其中, 过程 $1 \rightarrow 2$ 的方程式为 $T = 2T_1 \left(1 - \frac{1}{2} \beta V \right) \beta V$, 过程 $2 \rightarrow 3$ 为经过原点的直线上的一段, 过程 $3 \rightarrow 1$ 的方程式为 $T = T_1 \beta^2 V^2$, 式中 β 是常量。状态 1 和状态 2 的热力学温度已知分别为 T_1 和 $\frac{3}{4} T_1$ 。求该气体在此循环过程中对外所做的功。

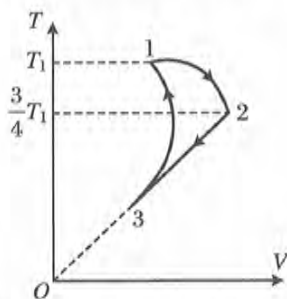


图 1.28 T - V 图上的循环过程

【分析】若气体经历一个微小变化过程, 此过程中压强为 p , 体积增量为 dV , 则在这样一个微小变化过程中所做的机械功可以表示为 $dW = pdV$ 。这样的功可以用 p - V 图上压强随体积变化的曲线下的面积表示或计算, 因而, 要求得功, 应当将题中所给的 T - V 图转换为 p - V 图。

【解】1 mol 理想气体的状态方程为 $pV = RT$ 。过程 $1 \rightarrow 2$ 的方程式为

$$T = 2T_1 \left(1 - \frac{1}{2} \beta V \right) \beta V \quad (1)$$

可转换为 $\frac{pV}{R} = 2T_1 \left(1 - \frac{1}{2} \beta V \right) \beta V$, 即

$$p = 2RT_1 \left(1 - \frac{1}{2} \beta V \right) \beta \quad (2)$$

这是一段直线。

在电子气所经历的膨胀过程中,经过时间 dt ,其半径变为

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

度为 dr 的薄球壳,体积为

【解】如图 1.30 所示,以太阳为中心取一个半径为 r 、厚

质子与电子间的相互碰撞,试求 τ 随 r 变化的关系式 $\tau = \tau(r)$ 。

着与太阳中心的距离 r 变化的变化率为 $\tau = \Delta v / \Delta r$ 。若不考虑

解释为日冕中的电子气向外的等温膨胀。记太阳风的速率 v 随

小得多,太阳风的速度其实是电子定向运动的速度,太阳风可

风的速率)向外膨胀;太阳风中质子的定向运动速度比电子的

视为理想气体;日冕中的电子气是等温(温度为 T)的、各向同性的,以球对称的速率 $v(r)$ (太阳

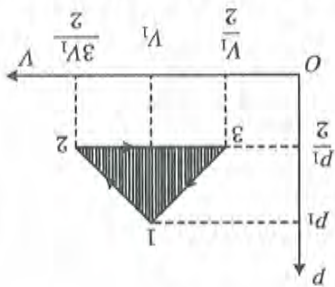
离 r 的增加而增大。现提出一简单模型来解释这一现象的物理机制;假定日冕中的大量电子可

的质量相对于太阳质量 m_s 可忽略不计。观测表明,太阳风速度的大小 v 随着与太阳中心的距

断向星际空间发射的稳定的、由相同数目的质子和电子构成的带电粒子流,它使太阳每年减少

29. (17 届决赛) 太阳风是从太阳大气外层(称为日冕)不

图 1.29 p - V 图上的循环过程



这也是一段直线。

转换为 $\frac{p}{V} = T_1 \beta^2 V_2$, 即

程式为

在 p - V 图上是一段平行于 V 轴的直线。由于 $V = \frac{RT}{p_2}$, $V_2 = \frac{4}{3} \frac{RT_1}{p_2}$, $V_3 = \frac{RT_3}{p_2}$, 过程 3→1 的方

$$(3)$$

$$p = p_2 = \frac{1}{2} p_1$$

过程 2→3 为经过原点的直线上的一段,可表示为 $T = \alpha V$, 这是等压过程,即

$$\text{即 } V_2 = \frac{2\beta}{3} V_1, \text{ 压强为 } p_2 = \frac{1}{3} R\beta T_1 = \frac{1}{2} p_1.$$

= βRT_1 。状态 2 时, $\frac{4}{3} T_1 = 2T_1 (1 - \frac{1}{2} \beta V_2) \beta V_2$, 体积为 $V_2 = \frac{1}{\beta} (1 \pm \frac{1}{2})$, 显然应当取“+”,

由式(1)可得,状态 1 时, $T_1 = 2T_1 (1 - \frac{1}{2} \beta V_1) \beta V_1$, 体积为 $V_1 = \frac{1}{\beta}$, 压强为 $p_1 = RT_1 \beta^2 V_1$

$$W = \frac{1}{2} p_1 V_1 = \frac{1}{2} \frac{4\beta}{RT_1} = \frac{2}{RT_1}$$

的功为

p - V 图上的循环过程如图 1.29 所示,可解得过程中所做

$$V_3 = \frac{RT_1 \beta^2}{p_3} = \frac{1}{2} V_1.$$

可得状态 3 时的压强 $p_3 = p_2 = \frac{1}{2} R\beta T_1 = \frac{1}{2} p_1$, 体积

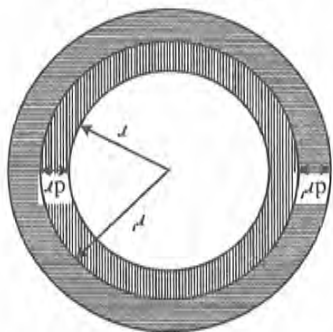
$$(5)$$

$$p = RT_1 \beta^2 V$$

$$(4)$$

$$T = T_1 \beta^2 V^2$$

图 1.30 日冕膨胀



$r' = r + dr$, 厚度变为 dr' , 速度由 v 变为 $v' = v + dv$ 。体积变为

$$dV' = 4\pi r'^2 dr' = 4\pi(r + dr)^2 dr'$$

设其中电子的质量为 dm , 而电子的摩尔质量为 μ , 则这部分气体的状态方程为

$$4\pi pr^2 dr = \frac{dm}{\mu} RT, \quad 4\pi p' r'^2 dr' = \frac{dm}{\mu} RT$$

电子气经历等温膨胀, 因而 $4\pi pr^2 dr = 4\pi p' r'^2 dr'$, 即

$$\frac{p' r'^2}{p r^2} = \frac{dr}{dr'}$$

这部分气体所受到内外侧其他气体的压力差为

$$\Delta F = 4\pi p' r'^2 - 4\pi p r^2 = 4\pi p r^2 \left(\frac{dr}{dr'} - 1 \right) = \frac{dm RT}{\mu} \frac{1}{dr} \left(\frac{dr}{dr'} - 1 \right) = \frac{dm RT}{\mu} \left(\frac{1}{dr'} - \frac{1}{dr} \right)$$

这一部分气体所受太阳的引力为

$$F' = \frac{Gm_s dm}{r^2}$$

合外力为

$$F = \Delta F + F' = \frac{dm RT}{\mu} \left(\frac{1}{dr'} - \frac{1}{dr} \right) + \frac{Gm_s dm}{r^2}$$

膨胀过程中的冲量定理为 $dmv' - dm v = F dt$, 即

$$\begin{aligned} dv &= \left[\frac{RT}{\mu} \left(\frac{1}{dr'} - \frac{1}{dr} \right) + \frac{Gm_s}{r^2} \right] dt = \frac{RT}{\mu} \left[\frac{1}{\frac{dr}{dt}} - \frac{1}{dr} \right] + \frac{Gm_s}{r^2} dt = \frac{RT}{\mu} \left(\frac{1}{v'} - \frac{1}{v} \right) + \frac{Gm_s}{r^2} dt \\ &= \frac{RT}{\mu} \frac{v - v'}{v'v} + \frac{Gm_s}{r^2} dt = -\frac{RT}{\mu} \frac{dv}{v(v + dv)} + \frac{Gm_s}{r^2} dt = -\frac{RT}{\mu} \frac{dv}{v^2} + \frac{Gm_s}{r^2} dt \end{aligned}$$

即 $\left(1 + \frac{RT}{\mu v^2} \right) dv = \frac{Gm_s}{r^2} dt$, 两端均除以 dr , 可得 $\left(1 + \frac{RT}{\mu v^2} \right) \frac{dv}{dr} = \frac{Gm_s}{r^2} \frac{dt}{dr} = \frac{Gm_s}{vr^2}$ 。于是

$$\frac{dv}{dr} = \frac{Gm_s \mu v}{r^2 (\mu v^2 + RT)}$$

30. (9 届决赛) 一球形热气球, 其隔热很好的球皮连同吊篮等装载的总质量为 300 kg, 经加热后, 气球膨胀到最大体积, 此时它的直径为 18 m, 设内外气体成分相同, 而球内气体压强稍稍高过大气压。试求出刚好能使热气球上升时球内空气的温度。已知此时大气温度为 27 °C, 压强为 1.01×10^5 Pa, 在标准状态下空气的密度为 $1.3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ 。

【分析】 球内气体受热膨胀, 密度减小。当气球所受浮力大于重力时, 即可上升。

【解】 理想气体的状态方程为 $pV = \nu RT$, 若以密度表示, 则有

$$p \frac{m}{\rho} = \nu RT$$

设球外大气的密度为 ρ_1 , 则气球膨胀至最大体积时所受浮力为 $F = \rho_1 V g$ 。记气球及其装载的质量为 M , 则气球刚能上升时其中热空气的质量为 $m = \rho_1 V - M$, 密度为 $\rho = \rho_1 - M/V$ 。与球外空气相比, 相当于球内气体体积膨胀 ρ_1/ρ 倍, 由于热气球是开口的, 所以这是一个等压过程, 即

$$F_0 = p_0 V_0 g = n M_a g = 141.92 \text{ N}$$

说明此时气球的球皮没有完全张紧,因而球内外气体的压强相等,而内外的温度又始终保持不变,则此时内外气体的 p 、 T 相同,所以相等体积内气体的物质的量也相等。所受浮力为所排开

的 500 mol 空气的重量,即

$$V_0 = \frac{nRT}{p_0} = \frac{500 \times 8.315 \times 289.64}{1.0000 \times 10^5} = 12.042 \text{ (m}^3\text{)}$$

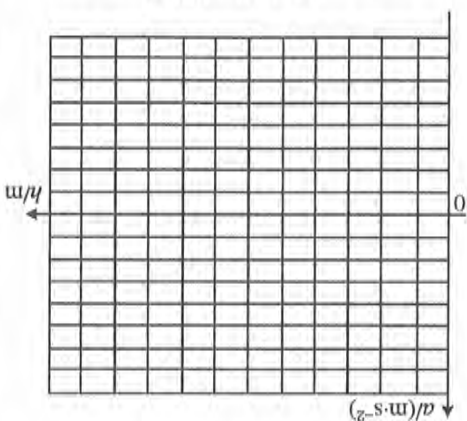
在地面上,500 mol 氮气的体积为

【解】气球的总质量为 $m_0 = m + nM_{He} = 14.0013 \text{ kg}$,所受重力为 $m_0 g = 137.21 \text{ N}$ 。

【提示】在 $x \ll 1$ 时,指数函数 e^x 可用近似公式 $e^x = 1 + x$ 进行计算。

$\sigma = 1.179 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ 。假设气球上升过程中与空气间的摩擦可忽略不计。
上升的范围内,大气温度和氮气的温度都没有变化,其数值为 $T = 289.54 \text{ K}$,由此,可求得
为重力加速度, $R = 8.351 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ 为普适气体常量。为了使问题简化,我们假设在气球

图 1.31 a-h 图



为 $M_a = 28.964 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$, $g = 9.800 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
强, $\sigma = \frac{M_a g}{RT}$, 其中 M_a 为大气的平均摩尔质量,其数值
 $p_0 e^{-\sigma h}$, 其中 $p_0 = 1.0000 \times 10^5 \text{ Pa}$, 为地面处的大气压
大气压强与距地面高度 h 之间的关系为 $p(h) =$
已知氮的摩尔质量 $M_{He} = 4.0026 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$,

标明关键点的坐标数值。
球高度 h 的关系如何? 在图 1.31 中画出 $a-h$ 图线并
的最大高度是多少? 气球上升过程中的加速度 a 与气
 $n = 500.00 \text{ mol}$ 的氮气后,释放气球。问:该气球上升
 $V_1 = 12.500 \text{ m}^3$ 。当气球位于地面时,给气球充入
气球,球皮质量 $m = 12.000 \text{ kg}$,气球的最大容积为
31. (18 届决赛) 有一个用不会收缩也不会伸长的柔软的性能良好的材料制成的薄皮

即球内气体的温度达到 54°C 即开始上升。

$$T = \frac{p_1 - \frac{M}{V} T_1}{p_1} T_1 = \frac{1 - \frac{M}{p_1 V}}{T_1} T_1 = \left(1 - \frac{T_1}{T_0} \frac{M}{p_0 V} \right)^{-1} T_1$$

$$= 300 \left[1 - \frac{300}{273} \frac{1.3 \times \frac{4\pi}{3} \times 9^3}{300} \right]^{-1} = 327 \text{ (K)}$$

于是有

$$p_1 = \frac{p_0 T_0}{T_1} p_0 = \frac{T_0}{T_1} p_0$$

而按同样的道理, $\frac{p_1}{p_0} T_1 = \frac{p_0}{p_1} T_0$, 可根据标准状态下空气的密度算出 27°C 时的空气密度,有

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_0 - \frac{M}{V}}{T_1}$$

浮力大于重力,气球加速上升。

上升过程中,在气球内氦气的体积达到 V_1 之前,浮力保持不变,所以加速度为常量,即

$$a_1 = \frac{F_0 - m_0 g}{m_0} = 0.336 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

等到气球完全张紧时,压强为 $p_1 = \frac{V_0}{V_1} p_0 = \frac{12.042}{12.500} p_0 = 0.9634 p_0$ 。而根据大气压强与高度的关系 $p(h) = p_0 e^{-\sigma h}$,可得

$$h_1 = -\frac{1}{\sigma} \ln \frac{p(h_1)}{p_0} = -\frac{1}{1.179 \times 10^{-4}} \ln 0.9634 = 316.6 \text{ (m)}$$

若设此时气球的速度为 v_1 ,则气球的动能为 $E_{k1} = \frac{1}{2} m_0 v_1^2 = m_0 a h_1 = 1491 \text{ J}$ 。

在此之后,气球的体积不变,而大气由于压强减小,密度降低,故所提供的浮力随高度增加而减小,加速度向上,但不断减小,直至等于 0,速度仍不断增大。

气体密度可表示为 $\rho = \mu \frac{P}{RT}$,由于是等温过程,密度与压强为线性关系,即

$$\rho_a = \frac{M_a}{RT} p(h) = \frac{M_a p_0}{RT} e^{-\sigma h}$$

气球所受的向上的力为

$$F = \rho_a V_1 g - m_0 g = \frac{M_a V_1 g}{RT} p_0 e^{-\sigma h} - m_0 g = \sigma V_1 p_0 e^{-\sigma h} - m_0 g$$

达到某一高度时, $F=0$,即 $\sigma V_1 p_0 e^{-\sigma h_2} = m_0 g$,可得

$$h_2 = -\frac{1}{\sigma} \ln \frac{m_0 g}{\sigma V_1 p_0} = -\frac{1}{1.179 \times 10^{-4}} \ln \frac{137.21}{1.179 \times 10^{-4} \times 12.500 \times 1.0000 \times 10^5} = 603 \text{ (m)}$$

这一过程中,合力也可表示为 $F = \sigma V_1 p_0 e^{-\sigma h} - \sigma V_1 p_0 e^{-\sigma h_2} = [e^{-\sigma(h-h_2)} - 1] m_0 g$,而 $\sigma(h-h_2)$ 是一个比 1 小得多的数,于是利用近似计算公式 $e^x = 1 + x$,得到

$$F_2 = \sigma(h_2 - h) m_0 g$$

加速度为 $a_2 = \sigma(h_2 - h)g$ 。

在此之后,浮力小于重力,气球加速度向下,速度逐渐减小,直至停止上升。

$$F_3 = -\sigma(h - h_2) m_0 g$$

加速度为 $a_3 = -\sigma(h - h_2)g$ 。

由于在高度 h_1 之后,气球做变加速运动,所以从能量的角度求解比较容易。由于合力与高度为线性关系,所以第 2 阶段的合力也可用力的平均值代替。

$$\bar{F}_2 = \frac{F(h_1) + F(h_2)}{2} = \frac{F(h_1)}{2} = \frac{1}{2} \sigma(h_2 - h_1) m_0 g$$

在第 2 阶段,浮力对气球所做的功为

$$W_2 = \bar{F}_2(h_2 - h_1) = \frac{1}{2} \sigma(h_2 - h_1)^2 m_0 g$$

设第 2 阶段结束时气球的速度为 v_2 ,则有

$$\frac{1}{2} m_0 v_1^2 + W_2 = \frac{1}{2} m_0 v_2^2 + m_0 g(h_2 - h_1)$$

即 $\frac{V}{V_0} + \frac{T}{T_0} \frac{V}{V_0} - 1 = \sqrt{\frac{2T}{T_0} - \frac{3}{4}}$, 进一步化为关于 $\frac{V}{V_0}$ 的二次方程, 即

从图 1.33 中可见, 循环过程中可以有 $\frac{V}{V_0} = \frac{2}{3}$ 同时 $\frac{P}{P_0} = 1$ 的状态, 所以式(3)右端取正值。

$$(3) \quad \frac{V}{V_0} + \frac{T}{T_0} \frac{V}{V_0} - 1 = \pm \sqrt{\frac{2T}{T_0} - \frac{3}{4}}$$

从其中可解得

$$\left(\frac{V}{V_0} + \frac{T}{T_0} \frac{V}{V_0} - 1\right)^2 - \frac{T_0}{2T} + 1 = \frac{1}{4}$$

$\frac{T_0}{T} \frac{V}{V_0}$, 代入式(2), 得到

气体的状态方程为 $pV = \nu RT$, 对于本题, $\nu = 1, \frac{P}{P_0} =$

$$(2) \quad \left(\frac{V}{V_0} + \frac{P}{P_0} - 1\right)^2 - 2 \frac{V}{V_0} \frac{P}{P_0} + 1 = \frac{1}{4}$$

方程(1)也可以写作

$$(1) \quad \left(\frac{V}{V_0} - 1\right)^2 + \left(\frac{P}{P_0} - 1\right)^2 = \frac{1}{4}$$

整理后得到

【解】图中的椭圆方程为 $\frac{(V - V_0)^2}{(V_0/2)^2} + \frac{(P - P_0)^2}{(P_0/2)^2} = 1$,

300 K。求在整个循环过程中气体的最高温度 T_1 和最低温度 T_2 各是多少。

32. (15 属预赛) 1 mol 理想气体缓慢地经历了一个循环过程, 在 $p-V$ 图中这一过程是一个椭圆, 如图 1.33 所示。已知此气体若处在与椭圆中心 O' 点所对应的状态时, 其温度为 $T_0 =$

32. (15 属预赛) 1 mol 理想气体缓慢地经历了一个循环过程, 在 $p-V$ 图中这一过程是一个椭圆, 如图 1.33 所示。已知此气体若处在与椭圆中心 O' 点所对应的状态时, 其温度为 $T_0 =$

在第 3 阶段, 与上一过程相似, 若设气球

上升的高度为 h_3 , 则气球所受合力的平均值

为 $\bar{F}_3 = -\frac{1}{2} \sigma (h_3 - h_2) m_0 g$ 。

浮力所做的功为

$$W_3 = \bar{F}_3 (h_3 - h_2) = -\frac{1}{2} \sigma (h_3 - h_2)^2 m_0 g$$

所以有 $\frac{1}{2} m_0 v_3^2 + W_3 = m_0 g (h_3 - h_2)$, 即

$$E_{k2} - \frac{1}{2} \sigma (h_3 - h_2)^2 m_0 g = (h_3 - h_2) m_0 g$$

可求得 $h_3 = 1120$ m, 此处的加速度为 $a_3 =$

$$-\sigma (h_3 - h_2) g = -0.597 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

加速度与高度的关系画在图 1.32 中。

解得气球的动能为 $E_{k2} = \frac{1}{2} m_0 v_3^2 = 2.166 \times 10^3 \text{ J}$ 。

图 1.32 加速度与高度关系图线

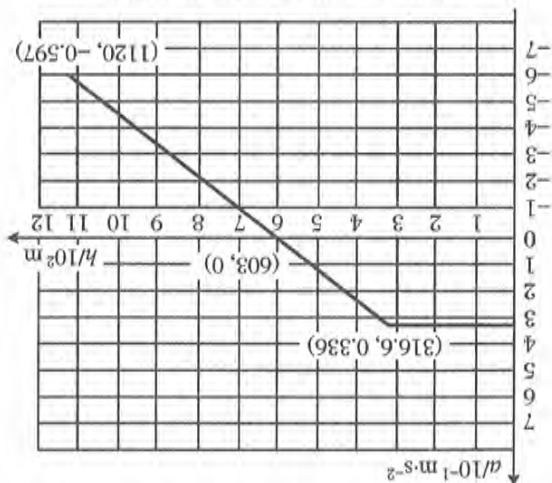
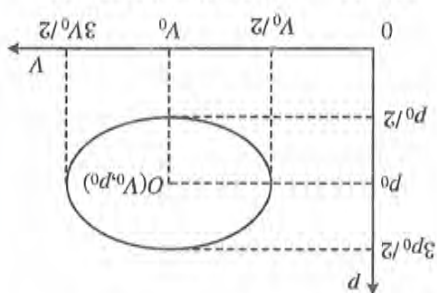


图 1.33 $p-V$ 图中的气体循环过程



$$\left(\frac{V}{V_0}\right)^2 - \left(1 + \sqrt{\frac{2T}{T_0} - \frac{3}{4}}\right)\frac{V}{V_0} + \frac{T}{T_0} = 0 \quad (4)$$

等温线与椭圆相切时,温度取最大或最小值,所以上式的两个根相等时,温度取极值,即

$\left(1 + \sqrt{\frac{2T}{T_0} - \frac{3}{4}}\right)^2 - \frac{4T}{T_0} = 0$ 。得到方程 $4\left(\frac{T}{T_0}\right)^2 - 9\frac{T}{T_0} + \frac{49}{16} = 0$ 。该方程的两个解为

$$\begin{cases} \frac{T_1}{T_0} = \frac{9 + \sqrt{32}}{8} \\ \frac{T_2}{T_0} = \frac{9 - \sqrt{32}}{8} \end{cases}, \text{最高和最低温度分别为} \begin{cases} T_{\max} = 1.83T_0 = 549 \text{ K} \\ T_{\min} = 0.418T_0 = 125 \text{ K} \end{cases}$$

33. 一根截面均匀、不变形的 U 形细塑料管,两臂长分别为 $l_0 = 20.0 \text{ cm}$ 和 $h_0 = 180.0 \text{ cm}$, 竖直放置,如图 1.34 所示。管内灌有水银,长管上端开口,短管上端封闭,管内封着长 $l = 10.0 \text{ cm}$ 的空气柱。已知长管及横管中的水银柱长度分别为 $h = 60 \text{ cm}$ 和 $x = 10.0 \text{ cm}$, 大气压强 $p_0 = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ (合 76.0 cmHg)。现将此管绕通过长管拐点 A 且与塑料管所在平面相垂直的轴线逆时针方向缓慢转过 180° , 然后将长管的开口端迅速截去 50.0 cm , 求与管内封闭的空气相接触的水银面的最后的位置。

【解】 首先看一下倒转后水银面的位置。

倒转之前,气体的压强为 $(76 + 50) \text{ cmHg} = 126 \text{ cmHg}$ 。若处于水平位置的横管中仍有水银,则气体的体积最多增大为原来的 4 倍,由于是等温过程,则压强变为原来的 $1/4$,而此时管中的压强最大为 $(76 - 50) \text{ cmHg} = 26 \text{ cmHg}$, 不足原来的 $1/4$ 。所以气体的体积会进一步增大,而一旦气体进入长管,则由于长度为 80 cm 的水银柱的压强大于大气压,水银就会流出一部分,直至达到平衡。设此时管中水银柱的长度为 y , 如图 1.35 所示,则有

$$(180 - y + 30)(76 - y) = 10(76 - 50)$$

整理得到 $y^2 - 286y + 15760 = 0$, 解得 $y = 74.5 \text{ cm}$ 。

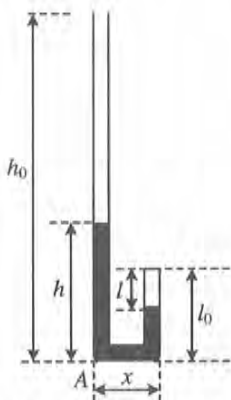


图 1.34 注水银 U 形管

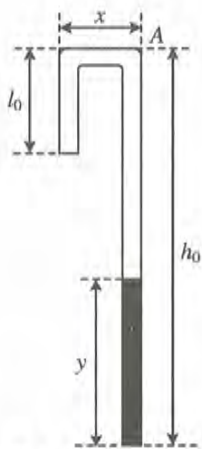


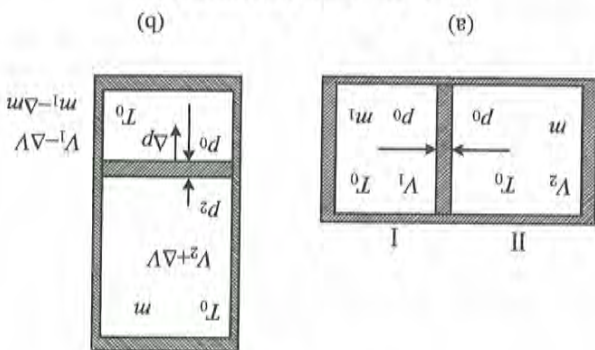
图 1.35 将管倒转

空气柱的总长度为 $180 - y + 30 = 135.5 \text{ cm}$ 。

若将长管截去 50 cm , 则管中剩余的水银柱长度为 24.5 cm 。由于水银所产生的压强减小,

转动后,活塞由于重力而产生的压强为

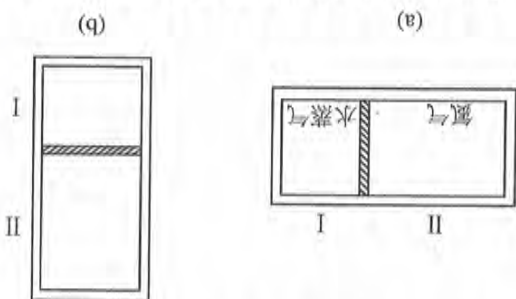
图 1.38 转动前后系统的参数



$$(1) \quad p_0 V_2 = \frac{\mu_2}{m} RT_0$$

【解】按题意,可认为容器和活塞都是导热的。转动前后系统的参数示于图 1.38 中。设初态时,两室中气体的体积分别为 V_1 和 V_2 。则这时氮气的状态方程为

图 1.37 将容器由水平位置缓缓转到竖直位置



小,液化放热。

之前相同,所以压强不变。水蒸气由于体积减小,膨胀而压强减小, I 室中为饱和水蒸气,温度与

【分析】转动之后, II 室中气体由于等温

系统与外界交换的热量。

分别为 μ_1 和 μ_2 。求在整个过程中, I 室内的氮气的汽化热为 L , 水蒸气和氮气的摩尔质量

的温度仍是 T_0 , 并有少量水蒸气液化成水。已

慢地转到图 1.37(b) 所示的直立位置, 两室内

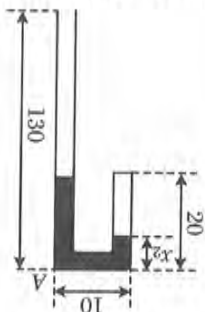
时, 活塞两边气体的温度均为 $T_0 = 373 \text{ K}$, 压强同为 p_0 , 如图 1.37(a) 所示。今将整个容器缓

的氮气, 活塞可在容器中无摩擦地滑动。原先, 容器被水平地放置在桌面上, 活塞处于平衡

M 的活塞把容器隔成 I、II 两室; I 室中为饱和水蒸气, II 室中有质量为

34. (15 届复赛) 在一个横截面积为 S 的密闭容器中, 有一个质量为

图 1.36 截去部分长管



x_1 , 则有

$$(30 - x_1)[76 - (24.5 - x_1)] = 10(76 - 50)$$

解得 $x_1 = 21.3 \text{ cm}$, 仍不合理, 说明水银已进入短管中。

如图 1.36 所示, 设短管中水银的高度为 x_2 , 则

$$(20 - x_2)[76 - (24.5 - 10 - x_2)] = 10(76 - 50)$$

解得 $x_2 = 16.7 \text{ cm}$ 。

解得 $l_1 = 5 \text{ cm}$ 这不合理, 说明水银已进入横管中。设横管中水银长度为

$$l_1(76 - 24.5) = 10(76 - 50)$$

则气柱的长度会缩短。若设水银全部在长管中, 空气柱的总长度为 l_1 , 则有

$$p = \frac{Mg}{S}$$

而 I 室中饱和水蒸气的压强仍为 p_0 , II 室中的氮气压强变为

$$p_2 = p_0 - p = p_0 - \frac{Mg}{S}$$

II 室中的氮气等温膨胀, 设体积增加了 ΔV , 体积变为 $V_2 + \Delta V = \frac{p_0}{p_2} V_2$, 将式(1)代入, 则有

$$\Delta V = \left(\frac{p_0}{p_2} - 1 \right) V_2 = \left(\frac{p_0 S}{p_0 S - Mg} - 1 \right) \frac{m}{\mu_2 p_0} RT_0 = \frac{Mg}{p_0 S - Mg} \frac{m RT_0}{\mu_2 p_0} \quad (2)$$

设 I 室中有质量为 Δm 的水蒸气被液化, 则转动之前, 这部分水蒸气液化之前的状态方程为

$$p_0 \Delta V = \frac{\Delta m}{\mu_1} RT_0$$

将式(2)的结果代入, 可解得

$$\Delta m = \frac{\mu_1 p_0 \Delta V}{RT_0} = \frac{\mu_1 p_0}{RT_0} \frac{Mg}{p_0 S - Mg} \frac{m RT_0}{\mu_2 p_0} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{m Mg}{p_0 S - Mg}$$

所以, 水蒸气由于被液化而放出的热量为

$$Q = \Delta m L = \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{Mg}{p_0 S - Mg} mL$$

热学 2 液体的表面性质

1. (4 届预赛) 在航天飞机坐舱中原来有两个圆柱形洁净的玻璃容器, 其中分别封装有水和银, 如图 1.39 所示, 当航天飞机处于失重状态时, 试把水和银的表面形状分别画在两空框内。

【解】 在失重状态下, 由于表面张力, 液体将尽量呈现球形。容器中水比较多, 且水与玻璃浸润, 由于附着力, 水与器壁接触, 中间为球形。水银与玻璃不浸润, 且水银较少, 故其外形为球形。如图 1.40 所示。

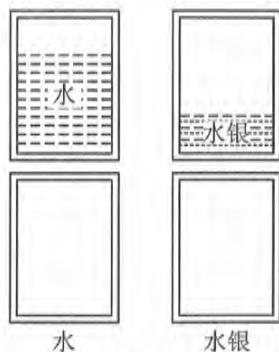


图 1.39 航天飞机上的液体

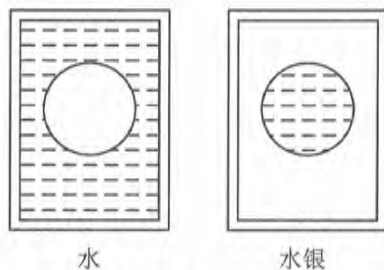


图 1.40 失重状态下水和银的外形

1. (1 届预赛) 夏天, 在运输大量冰块的卡车上, 有时看到冰面上有淡乳白色的气体飘动, 出现这种现象是由于_____。

热学 3 物态变化、热传递与热平衡

$$3 \times 10^{-3} \text{ m} < h < 4 \times 10^{-3} \text{ m}$$

由于 $0 < \theta < \pi/2$, 所以算得圆饼的高度范围为

$$\text{于是有 } h = \sqrt{\frac{2\sigma(1 + \cos \theta)}{\rho g}}$$

$$\sigma\alpha R(1 + \cos \theta) = \frac{1}{2}\alpha R\rho gh^2$$

表面张力与上述指向侧面沿水平方向的压力相平衡, 即 $f_1 + f_2 = F$, 可得

$$F = p\Delta S = p\alpha R h = \frac{1}{2}\alpha R\rho gh^2$$

的压强替代, 则平均压强为 $p = \frac{1}{2}\rho gh$, 侧面所受的沿水平方向指向外侧的压力为

这一部分水银由于重力而产生压强, 侧面各处压强并不相等, 但平均压强可用中心高度处

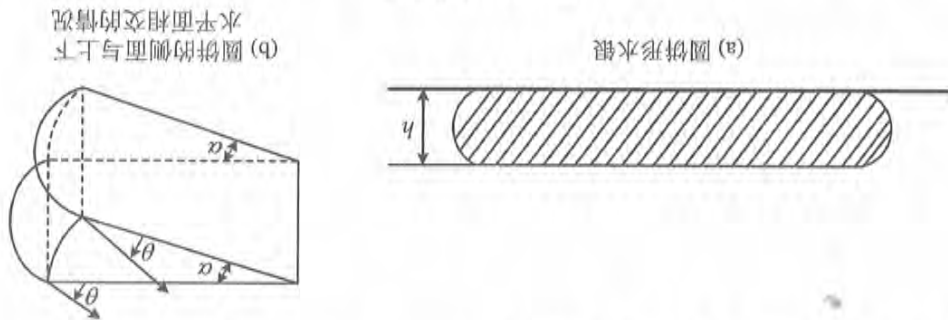
向的表面张力为 $f_2 = \sigma\alpha R \cos \theta$ 。

若侧面圆弧与上水平面的夹角为 θ , 则图 1.41(b) 中侧面与上表面相交的圆弧上沿水平方

饼的半径。

侧面与下表面相交的圆弧的表面张力沿水平方向指向圆心, 大小为 $f_1 = \sigma\alpha R$, 其中 R 为圆

图 1.41 水银截面



处, 圆与玻璃相切, 但与水平的上表面并不相切。

【解】在圆饼形的水银上取中心角为 α 的一部分, 如图 1.41(b) 所示。在水银截面的边缘位有效数字)?

张力系数 $\sigma = 0.49 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ 。当圆饼的半径很大时, 试估算其厚度 h 的数值大约是多少(取 1 位有效数字)?

便, 水银和玻璃的接触角可按 180° 计算。已知水银的密度 $\rho = 13.6 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, 水银的表面

银近似呈圆饼形状(侧面向外突出), 过圆饼轴线的竖直面如图 1.41(a) 所示。为了计算方

2. (5 届预赛) 在水平放置的洁净的玻璃板上有一些水银, 由于重力与表面张力的影响, 水

【解】 冰块附近空气中的水分子由于温度降低而凝结成水蒸气。

2. (2届预赛) 一密闭气缸内有空气, 平衡状态下缸底还有极少量的水, 如图 1.42 所示。缸内气体温度为 T , 气体体积为 V_1 , 压强 $p_1 = 2.00 \text{ atm}$ 。现将活塞缓慢下压, 并保持缸内温度不变, 当气体体积减少到 $V_2 = \frac{1}{2} V_1$ 时, 压强变为 $p_2 = 3.00 \text{ atm}$, 求温度 T 的值。

【解】 密闭气缸中有水, 则其中气体的压强等于干空气的分压强与水蒸气的分压强之和。气体经历等温过程, 其中水的饱和蒸气压不变。由于压缩后体积变为原来的一半, 对其中的干空气, 压缩前后分压之间的关系为

$$p'' = p' \frac{V_1}{V_2} = 2p'$$

记此温度下水的饱和蒸气压为 p , 则由于 $p + p' = 2 \text{ atm}$, $p + p'' = 3 \text{ atm}$, 可得 $p = 1 \text{ atm}$ 。由此可判断此时的温度为 100°C 。

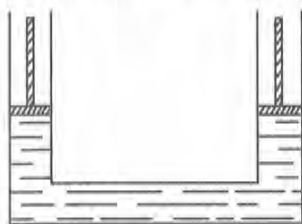


图 1.43 储有乙醚的 U 形管

3. (3届预赛) 图 1.43 中所示为一两臂内径相同的 U 形管, 其中盛有乙醚。两臂中各有一活塞与液面紧密接触。起始时两活塞在同一水平面上, 现将两活塞同时十分缓慢的上提, 左右臂活塞提高的距离分别为 h 和 $2h$, 然后将两活塞固定, 两臂中液面的高度差为_____。

【解】 提起活塞时, 有一部分乙醚成为气态, 由于两臂温度相等, 所以乙醚的饱和蒸气压也相等, 即管中两臂内气体的压强始终相等, 所以液面的高度差为 0。

4. (1届预赛) 钢尺 A、钢尺 B 和一段角钢是用同样的材料制成的。钢尺 A 在 $+20^\circ\text{C}$ 使用时是准确的; 钢尺 B 在 -30°C 使用时是准确的。

用这两把尺子在 -30°C 的野外去测量上述角钢的长度, 其读数分别为 l_A 及 l_B , 则

A. $l_A > l_B$ B. $l_A = l_B$ C. $l_A < l_B$

在 $+20^\circ\text{C}$ 温度下, 用这两把尺子分别去测量角钢的长度, 其读数为 l'_A 及 l'_B , 则

A. $l'_A > l'_B$ B. $l'_A = l'_B$ C. $l'_A < l'_B$

【解】 (1) 由于热胀冷缩, -30°C 时, 钢尺 A 的刻度小于实际值, 而钢尺 B 的刻度等于实际值, 此时所以 A 的读数比 B 大。

(2) $+20^\circ\text{C}$ 时, 钢尺 A 的刻度等于实际值, 而钢尺 B 的刻度大于实际值, 所以 A 的读数比 B 大。

从上述分析可见, 由于钢尺 A 校准的温度高于钢尺 B, 在同一温度下, 钢尺 A 的刻度比钢尺 B 要短, 因而测量同一物体, A 的读数总是大于 B 的读数。

5. (4届预赛) 某地大气中的水汽没有达到饱和状态, 若无其他水汽来源, 则当气温升高

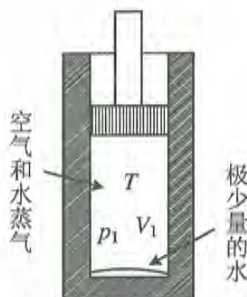


图 1.42 气缸中有极少量的水

8. (28 届预赛) 下面列出的一些说法中正确的是 ()。

A. 在温度为 20°C 和压强为 1 atm 时, 一定量的水蒸发为同温度的水蒸气, 在此过程中, 它所吸收的热量等于其内能的增量。

B. 有人用水银和酒精制成两种温度计, 他把把水的冰点定为 0°C , 水的沸点定为 100°C , 并都把 0 刻度与 100 刻度之间均匀分成同数量的刻度, 若用这两种温度计去测量同一环境的温度 (大于 0°C 小于 100°C) 时, 两者测量的温度数值必定相同。

C. 一定量的理想气体分别经过不同的过程后, 压强都减小了, 体积都增大了, 则从每个过

气, 主要是还没有完全变为单个分子的细小水珠, 是液态物质。

冰变来的。气态的水是以单个水分子的形式存在, 眼睛是看不到的, 所以水烧开后, 上方的白色冰上方的白色气主要是空气中的水蒸气冷凝成小水珠而形成的, 与冰有关, 但并非由 100°C 的纯水的饱和蒸气压为 1 atm , 即 $1.01325 \times 10^5\text{ Pa}$ 。

纯水的比热容为 $4.18\text{ kJ} \cdot (\text{kg} \cdot \text{K})^{-1}$ 。纯水在 4°C 时密度最大。

【解】(1) 相对湿度是在某一温度下, 空气中水蒸气的分压强与同一温度下水的饱和气压的比值。

A. 前者主要是由杯中水变来的“水的气态物质”

B. 前者主要是由杯中水变来的“水的液态物质”

C. 后者主要是由冰变来的“水的气态物质”

D. 后者主要是由冰变来的“水的液态物质”

也有“白色气”, 则 ()。

(2) 一杯水放在炉上加热烧开后, 水面上方有“白色气”; 夏天一块冰放在桌面上, 冰的上方度最大。 100°C 的纯水的饱和蒸气压是 Pa 。

相对湿度是 $\text{J} \cdot (\text{kg} \cdot \text{K})^{-1}$ 。水的比热容是 $\text{J} \cdot (\text{kg} \cdot \text{K})^{-1}$ 。纯水在 C 时密度最大。

7. (9 届预赛) (1) 将答案填写在题中横线上方。

水的汽化热为 $2.49\text{ kJ} \cdot \text{g}^{-1}$, 则这些水全部蒸发所需的时间为 $\frac{2490m}{18.8m}\text{ min} = 132\text{ min}$ 。

每分钟吸收的热量为 $90m \times 4.18/20\text{ J} = 18.8m\text{ J}$;

【解】设水的质量为 m 克, 则在 20 分钟内, 水所吸收的来自火炉的热量为 $90m \times 4.18\text{ J}$; 取 2 位有效数字即可)。

6. (7 届预赛) 有一壶水, 水温是 10°C , 把它放到火力恒定的炉火上烧。当气压为一大气压时, 经 20 分钟即沸腾。若继续放在火上, 试估算再经过约多少分钟后, 这壶水将被烧干(结果

对湿度不变; 露点不变。

【解】饱和蒸气压只与温度有关, 温度升高, 饱和蒸气压增大; 温度升高, 相对湿度减小; 绝对湿度不变; 露点不变。

A. 饱和水汽压 _____

C. 绝对湿度 _____

B. 相对湿度 _____

D. 露点 _____

后, 以下各物理量:

程气体与外界交换的总热量看,在有的过程中气体可能是吸收了热量,在有的过程中气体可能是放出了热量,在有的过程中气体与外界交换的热量为0。

D. 地球表面 1 m^2 所受的大气压力,其大小等于这 1 m^2 表面单位时间内受上方做热运动的空气分子对它的冲量,加上这 1 m^2 以上的大气的重量。

【解】 A. 由于水分子要对外做功,还要克服表面张力做功,所以其内能的增量小于其吸收的热量。

B. 这两只温度计只在固定点是相等的,其他温度下,测量结果不一定相同。

C. 一定量的气体,无论吸热、绝热、放热,都可能导致体积增大,也可能压强减小。

D. 从微观上看,气体的压强都是由于碰撞而产生的,与不参与碰撞的分子的重量无关,大气的压强也是如此。

所以只有 C 是正确的。

9. (6 届预赛) 已知冰、水和水蒸气在一密闭容器内(容器内没有任何其他物质)。如能三态平衡共存,则系统的温度和压强必定分别是 $t_1 = 0.01\text{ }^\circ\text{C}$ 和 $p_1 = 4.58\text{ mmHg}$ 。现在有冰、水和水蒸气各 1 g 处于上述平衡状态。若保持总体积不变而对此系统缓缓加热,输入的热量 $Q = 0.255\text{ kJ}$,试估算系统再达到平衡后冰、水和水蒸气的质量。已知在此条件下冰的升华热 $L_1 = 2.83\text{ kJ} \cdot \text{g}^{-1}$,水的汽化热 $L_2 = 2.49\text{ kJ} \cdot \text{g}^{-1}$ 。

【解】 根据题目所给条件,可知冰的熔化热约为 $L_3 = L_1 - L_2 = 0.34\text{ kJ} \cdot \text{g}^{-1}$ (实际值为 $334\text{ J} \cdot \text{g}^{-1}$)。因此,输入的热量不足以使冰全部融化,所以重新平衡后,依然是三相共存的状态,温度不变,则饱和蒸气压不变。由于部分冰融化为水,体积的变化可以忽略,因而可认为水蒸气的质量没有变化,过程中只是部分冰融化成水。

冰融化的质量为

$$\Delta m = \frac{Q}{L_3} = 0.75\text{ g}$$

最后,冰的质量为 0.25 g ,水为 1.75 g ,水蒸气为 1 g 。

10. (16 届复赛) 一气缸的初始体积为 V_0 ,其中盛有 2 mol 的空气和少量的水(水的体积可以忽略),平衡时气体的总压强是 3.0 atm ,经等温膨胀使其体积加倍,在膨胀结束时,其中的水刚好完全消失,此时的总压强为 2.0 atm 。若让其继续等温膨胀,使其体积再次加倍,试计算此时:

- (1) 气缸中气体的温度;
- (2) 气缸中水蒸气的物质的量;
- (3) 气缸中气体的总压强。

假定空气和水蒸气均可当作理想气体处理。

11. (2 届预赛) 房间中间有一台电冰箱,夏天时把这台正在工作的电冰箱的门打开,想用此方法来降低室内的平均温度,这种方法可行吗? _____ (“是”或“否”);理由是_____。

【解】 电冰箱通过消耗电能制冷,将冰箱内的热量吸收,在冰箱外释放,所以,打开冰箱门不可能降低室内的平均温度,由于这样导致冰箱的压缩机持续工作,反而会使室内的温度升得更高。

(1) 试采用以上某些数据估算铝的比热容 c (图 1.44 为陷入深度与铝球温度的 $h-t$ 图)。
 已知铝的密度约为水的密度的 3 倍, 设实验时的环境温度及湖面冰的温度均为 0°C 。已知此情况下, 冰的熔解热 $\lambda = 3.34 \times 10^5 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$ 。

实验顺序数	1	2	3	4	5	6	7	8
热铝球的温度 $t/^{\circ}\text{C}$	55	70	85	92	104	110	120	140
陷入深度 h/cm	9.0	12.9	14.8	16.0	17.0	18.0	17.0	16.8

8 次, 最终得到如下数据:

14. (18 届预赛) 物理小组的同学在寒冷的冬天做了这样一个实验: 他们把一个实心的大铝球加热到某温度 t , 然后把它放在结冰的湖面上(冰层足够厚), 铝球便逐渐陷入冰内。当铝球不再下陷时, 测出球的最低点陷入冰中的深度 h 。将铝球加热到不同的温度, 重复上述实验

【解】地球吸收太阳的辐射, 同时也向外辐射热量, 以此维持热平衡。 CO_2 分子能够强烈吸收红外波段的辐射, 吸收之后, 分子能量增加, 又会将吸收的能量以红外辐射的方式释放, 由于分子的热辐射沿各个方向, 所以其中有一半是朝向地球的, 因而导致地球温度上升。答案为 D。

- 【解】地球吸收太阳的辐射, 同时也向外辐射热量, 以此维持热平衡。 CO_2 分子能够强烈吸收红外波段的辐射, 吸收之后, 分子能量增加, 又会将吸收的能量以红外辐射的方式释放, 由于分子的热辐射沿各个方向, 所以其中有一半是朝向地球的, 因而导致地球温度上升。答案为 D。
- 温度升高
- E. 对由地面向外辐射的红外线有强烈的反射作用, 使这些能量返回地面, 从而地面附近气温增高
- 从而地面附近气温增高
- D. 强烈吸收由地面向外辐射的红外线, 又向各方向辐射红外线, 其中约一半向地面辐射,
- C. 对由地面向外辐射的红外线有强烈的吸收作用, 是这些被吸收的热量使大气温度升高
- 温度升高, 导致全球气温增高
- B. 在一昼夜中对射来的太阳光中吸收的热量大于它向地球外四周辐射的热量, 这就使 CO_2 的
- A. 对射来的太阳光中的红外线有强烈的吸收作用, 这就足以使全球气温增高

环境保护面临的一个重大问题。 CO_2 对地面附近气温产生影响, 主要是因为 CO_2 。

即此时水的温度为 22.6°C 。

$$\Delta T_{45} = 64 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{45}{30}} = 64 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{3}{2}} = 22.6 (^{\circ}\text{C})$$

算得

$$\Delta T = 64 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{50}{30}}$$

【解】根据表中数据, 每经过 30 min, 温度降为原来的一半。于是
 试根据以上的数据, 找出温度差随时间变化的规律公式, 求出 $t = 45 \text{ min}$ 时的温度。

$t(\text{min})$	0	30	60	90	120	150
$\Delta T(^{\circ}\text{C})$	64	32	16	8	4	2

12. (2 届预赛) 一密闭容器中, 盛有温度均匀的热水, 在室温始终保持为 20°C 的环境中慢慢冷却。测出各时刻 t 时热水与室温的温度差 ΔT , 结果如下表所示:

(2) 对未被采用的实验数据,试说明不采用的原因,并作出解释。

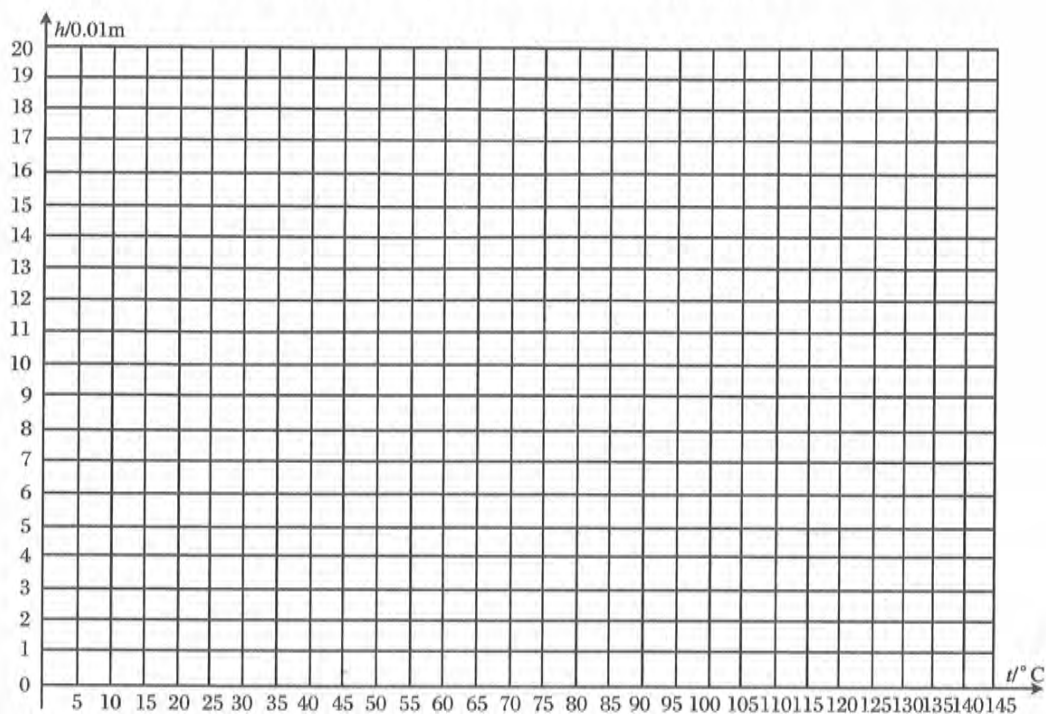


图 1.44 陷入深度与铝球温度的 $h-t$ 图,供作图分析之用

【解】 若球没入的深度小于半径,融化的冰的体积与没入冰中的铝球的体积相等;若大于半径,则融化的冰的体积等于半球再加上其上的圆柱部分的体积。设球的半径为 R ,则球冠的体积为 $V_h = \frac{\pi}{3} h^2 (3R - h)$,半球的体积为 $V_R = \frac{2\pi}{3} R^3$ 。降温过程中铝球释放的热量为 $Q = \frac{12\pi}{3} R^3 \rho c t$ 。若假设上述热量全部用以使冰融化,则冰融化的体积为

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{Q}{\rho\lambda} = \frac{4\pi}{\lambda} R^3 c t$$

小于半球时, $\frac{\pi}{3} h^2 (3R - h) = \frac{4\pi}{\lambda} R^3 c t$, 即

$$t = \frac{h^2 (3R - h)\lambda}{12cR^3} \quad (1)$$

大于半球时, $\frac{2\pi}{3} R^3 + \pi R^2 (h - R) = \frac{4\pi}{\lambda} R^3 c t$, 即

$$t = \frac{\lambda}{4c} \left(\frac{h}{R} - \frac{1}{3} \right) \quad (2)$$

将表中的数据绘于图上,如图 1.45 所示。可见 t 与 h 基本上是线性关系,所以是式(2)的情形。

直线的方程为 $h = \frac{13}{110} t + 5$, $h = 0$, $t = -\frac{5 \times 110}{13} = -\frac{\lambda}{12c}$, 于是有

$$mc(t_n - 10) = c_0 90 \sum_i m_i - c_0 \sum_i m_i t_i = c_0 (90M - \sum_i m_i t_i)$$

以上各式相加,得到

$$\begin{aligned} mc(t_1 - 10) &= m_1 c_0 (90 - t_1) \\ mc(t_2 - 10) &= m_2 c_0 (90 - t_2) \\ mc(t_3 - 10) &= m_3 c_0 (90 - t_3) \end{aligned}$$

t_2, t_3, t_4, \dots 于是有

设每次使用的水的质量依次为 $m_1, m_2, m_3, m_4, \dots$ 各次平衡后,构件的温度为依次为 $t_1, t_2, t_3, t_4, \dots$ 于是有
 实际上,达到热平衡时的温度越高,则高温物体所释放出的热量越少。为了尽量利用水热量,应设法使其平衡时温度尽量低。为达此目的,可每次用少量的热水与构件接触,平衡后将水倒掉,使构件的温度逐渐升高,这样,就可以充分利用水的热量达到目的。

$$4.20(t - 10) \times 0.880 \times 10^3 = 1.200(90 - t) \times 4.20 \times 10^3$$

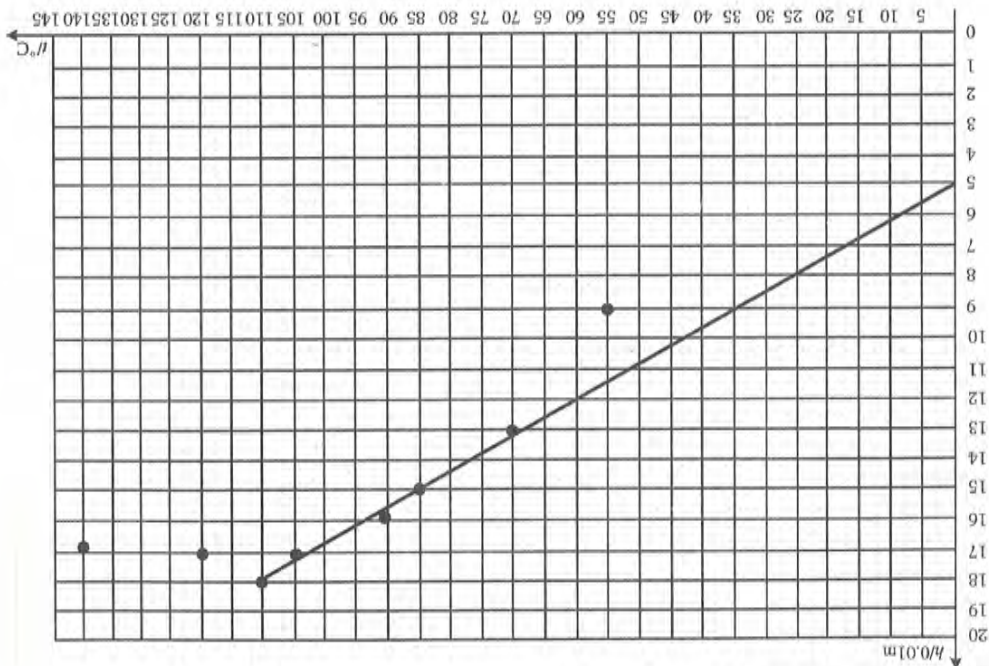
算得 $t = 56.13^\circ\text{C}$, 达不到需要的温度。

【解】 如果将全部热水一次与构件热接触,则平衡时的温度为

计向周围环境散失的热量。

15. (20 届预赛) 在野外施工中,需要使质量 $m = 4.20\text{ kg}$ 的铝合金构件升温。除了保温瓶中尚存有温度 $t = 90.0^\circ\text{C}$ 的 1.200 kg 的热水外,无其他热源。试提出一个操作方案,能利用这些热水使构件从温度 $t_0 = 10^\circ\text{C}$ 升温到 66.0°C 以上(含 66.0°C), 并通过计算验证你的方案。已知铝合金的比热容 $c = 0.880 \times 10^3\text{ J} \cdot (\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})^{-1}$, 水的比热容 $c_0 = 4.20 \times 10^3\text{ J} \cdot (\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})^{-1}$, 不计向周围环境散失的热量。

图 1.45 数据分析图



$$c = \frac{13 \times 3.34 \times 10^5}{12 \times 550} = 658\text{ J} \cdot (\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})^{-1}$$

其中只要 $t_n \geq 66.0^\circ\text{C}$ 即可。为计算简单起见,不妨设每次使用的水量相等,则只要满足以下条件即可

$$mc(66 - 10) \geq c_0 M \left(90 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i \right)$$

例如,将 1.200 kg 热水分 5 次倒出来,每次倒出 $m_i = 0.240$ kg,在第一次使热水与构件达到热平衡的过程中,水放热为

$$Q_1 = c_0 m_i (t - t_1) \quad (1)$$

构件吸热为

$$Q'_1 = cm(t_1 - t_0) \quad (2)$$

由 $Q_1 = Q'_1$ 及题给的数据,可得

$$t_1 = 27.1^\circ\text{C} \quad (3)$$

同理,第二次倒出 0.240 kg 热水后,可使构件升温到

$$t_2 = 40.6^\circ\text{C} \quad (4)$$

依次计算出 $t_1 \sim t_5$ 的数值,分别列在下表中。

倒水次数/次	1	2	3	4	5
平衡温度/ $^\circ\text{C}$	27.1	40.6	51.2	59.5	66.0

可见 $t_5 = 66.0^\circ\text{C}$ 时,符合要求。

16. (25 届复赛) 在地面上方垂直于太阳光的入射方向,放置一半径 $R = 0.10$ m、焦距 $f = 0.50$ m 的薄凸透镜,在薄透镜下方的焦面上放置一黑色薄圆盘(圆盘中心与透镜焦点重合),于是可以在黑色圆盘上形成太阳的像。已知黑色圆盘的半径是太阳像的半径的 2 倍。圆盘的导热性极好,圆盘与地面之间的距离较大。设太阳向外辐射的能量遵从斯特藩-玻尔兹曼定律:在单位时间内在其单位面积上向外辐射的能量为 $W = \sigma T^4$,式中 σ 为斯特藩-玻尔兹曼常量, T 为辐射体表面的绝对温度。对太阳而言,取其温度 $T_s = 5.50 \times 10^3^\circ\text{C}$ 。大气对太阳能的吸收率为 $\alpha = 0.40$ 。又设黑色圆盘对射到其上的太阳能全部吸收,同时圆盘也按斯特藩-玻尔兹曼定律向外辐射能量。如果不考虑空气的对流,也不考虑杂散光的影响,试问薄圆盘到达稳定状态时可能达到的最高温度为多少 $^\circ\text{C}$?

【分析】 这是一道将光学与热学相结合的题目。既要用到成像的知识,也要用到热平衡的概念。

【解】 斯特藩-玻尔兹曼定律描述的是黑体辐射的规律,即单位时间通过单位表面辐射的能量与温度的 4 次方成正比。黑体单位时间辐射的能量就是其辐射功率,通过单位表面辐射的能量就是其辐射的能量密度,因而单位时间通过单位表面辐射的能量就是辐射的功率密度,其实就是表面辐射的光强。

太阳是球体,向各个方向的辐射都是相同的。首先要确定来自太阳的辐射,到达地球表面时,其辐射光强,或者功率密度是多少。

如图 1.46(a),设地球到太阳的距离为 d ,地球和太阳的半径分别为 R_E 和 R_s ,太阳表面的温度为 T_s ,则太阳辐射的总功率为

$$P_s = 4\pi R_s^2 W = 4\pi R_s^2 \sigma T_s^4$$

17. (27届复赛) 地球上的能量从源头上说来自太阳辐射。到达地面的太阳辐射(假定不计大气对太阳辐射的吸收)一部分被地球表面反射到太空,其余部分被地球吸收。被吸收的部分最终转换为地球热辐射(红外波段的电磁波)。热辐射在向外传播过程中,其中一部分会被

$$t = 1.55 \times 10^3 \text{ } ^\circ\text{C}$$

即

$$T = \left(\frac{R_s^2 \alpha R_s^2}{r^2 8d^2} \right)^{\frac{1}{4}} T_s = \left(\frac{d^2 \alpha R_s^2}{f^2 8d^2} \right)^{\frac{1}{4}} T_s = \left(\frac{\alpha R_s^2}{8f^2} \right)^{\frac{1}{4}} T_s = \left(\frac{0.40 \cdot 0.10^2}{8} \right)^{\frac{1}{4}} \times 5.77 \times 10^3 = 1.82 \times 10^3 \text{ (K)}$$

将式(2)代入式(1),则

$$(2) \quad \frac{R_s}{r} = \frac{d}{s'} = \frac{f}{d}$$

离 d 比透镜的焦距 f 大得多,像距为 $s' = \frac{d-f}{df} \approx \frac{d}{df} = f$ 。像的横向放大率为

太阳通过透镜在圆盘上成一个半径为 r 的实像,如图 1.46(b) 所示。由于地球到太阳的距

$$(1) \quad T^4 = \frac{\alpha R_s^2 R_s^2 T_s^4}{8r^2 d^2}$$

达到热平衡时,辐射功率与吸收功率相等, $P_A = P_E$, 即 $\alpha \pi R_s^2 R_s^2 \sigma T_s^4 = 2\pi (2r)^2 \sigma T^4$, 即

$$P_E = 2\pi (2r)^2 \sigma T^4$$

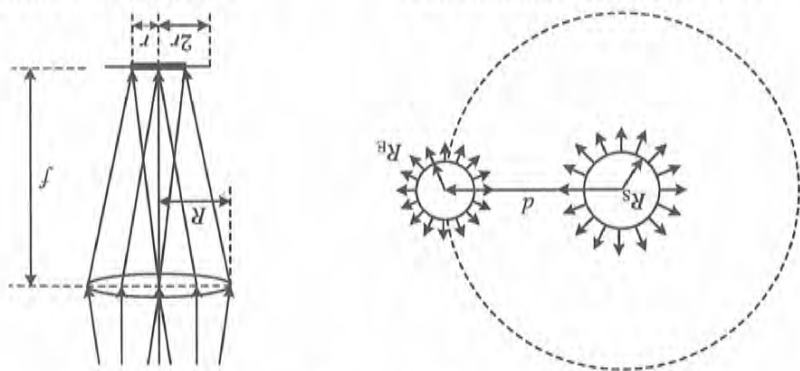
若黑色圆盘各处温度相等,温度为 T , 半径为 $2r$, 两个表面都要辐射, 则辐射功率为

$$P_A = \alpha \pi R_s^2 I = \frac{\alpha \pi R_s^2 R_s^2 \sigma T_s^4}{d^2}$$

通过透镜的辐射全部被黑色圆盘吸收, 吸收的功率为

图 1.46 热辐射与太阳经透镜成像

(a) 太阳的辐射、地球的吸收与辐射 (b) 黑色圆盘上太阳的像



$$I = \frac{P_s}{4\pi d^2} = \frac{\alpha R_s^2 T_s^4}{d^2}$$

到达地球表面, 太阳辐射的功率密度为

温室气体反射回地面,地球以此方式保持了总能量平衡。作为一个简单的理想模型,假定地球表面的温度处处相同,且太阳和地球的辐射都遵从斯特藩-玻尔兹曼定律:单位面积的辐射功率 J 与表面的热力学温度 T 的四次方成正比,即 $J = \sigma T^4$,其中 σ 是一个常量。已知太阳表面温度 $T_s = 5.78 \times 10^3 \text{ K}$,太阳半径 $R_s = 6.69 \times 10^5 \text{ km}$,地球到太阳的平均距离 $d = 1.50 \times 10^8 \text{ km}$ 。假设温室气体在大气层中集中形成一个均匀的薄层,并设它对热辐射能量的反射率为 $\beta = 0.38$ 。

(1) 如果地球表面对太阳辐射的平均反射率 $\alpha = 0.30$,试问考虑了温室气体对热辐射的反射作用后,地球表面的温度是多少?

(2) 如果地球表面一部分被冰雪覆盖,覆盖部分对太阳辐射的反射率为 $\alpha_1 = 0.85$,其余部分的反射率为 $\alpha_2 = 0.25$ 。问冰雪被盖面占总面积多少时地球表面温度为 273 K 。

【分析】 本题与 25 届复赛题相似。

【解】 (1) 设地球到太阳的距离为 d ,地球和太阳的半径分别为 R_E 和 R_s ,太阳表面的温度为 T_s ,则太阳辐射的总功率为

$$P_s = 4\pi R_s^2 J = 4\pi R_s^2 \sigma T_s^4$$

到达地球表面,太阳辐射的功率密度为

$$I = \frac{P_s}{4\pi d^2} = \frac{\sigma R_s^2 T_s^4}{d^2}$$

地球朝向太阳的截面积为 πR_E^2 ,地球吸收辐射的功率为

$$P_A = (1 - \alpha) \pi R_E^2 I = \frac{(1 - \alpha) \pi \sigma R_E^2 R_s^2 T_s^4}{d^2}$$

设地球表面的温度为 T_E ,温室气体将地表的辐射反射回来,则地球辐射的功率为

$$P_E = (1 - \beta) 4\pi R_E^2 \sigma T_E^4$$

达到热平衡时, $P_A = P_E$,即 $\frac{(1 - \alpha) \pi \sigma R_E^2 R_s^2 T_s^4}{d^2} = (1 - \beta) 4\pi R_E^2 \sigma T_E^4$ 。地球的温度为

$$T_E = \sqrt[4]{\frac{(1 - \alpha) R_s^2}{4(1 - \beta) d^2}} T_s = \sqrt[4]{\frac{1 - 0.30}{4(1 - 0.38)} \left(\frac{6.69 \times 10^5}{1.50 \times 10^8}\right)^2} \times 5.78 \times 10^3 = 281 \text{ (K)}$$

(2) 设冰雪覆盖部分所占的比例为 η ,平均反射率为 $\eta\alpha_1 + (1 - \eta)\alpha_2 = \eta(\alpha_1 - \alpha_2) + \alpha_2$,则平衡时

$$[(1 - \alpha_1)\eta + (1 - \alpha_2)(1 - \eta)] \frac{\pi \sigma R_E^2 R_s^2 T_s^4}{d^2} = (1 - \beta) 4\pi R_E^2 \sigma T_E^4$$

$$\eta = \frac{1 - \alpha_2 - 4(1 - \beta) \frac{d^2}{R_s^2} \frac{T_E^4}{T_s^4}}{\alpha_1 - \alpha_2} = \frac{1 - 0.25 - 4(1 - 0.38) \left(\frac{1.50 \times 10^8}{6.69 \times 10^5}\right)^2 \left(\frac{273}{5.78 \times 10^3}\right)^4}{0.85 - 0.25}$$

$$= 21.6\%$$

18. (8 届决赛) 质量为 2.0 kg 、温度为 -13°C 、体积为 0.19 m^3 的氟利昂(分子量为 121),在保持温度不变的条件下被压缩,其体积变为 0.1 m^3 。试问在此过程中有多少 kg 的氟利昂被液化? 已知在温度为 -13°C ,液态氟利昂的密度为 $\rho_l = 1.44 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$,饱和蒸气压为 $p_s = 2.08 \times 10^5 \text{ Pa}$ 。氟利昂饱和蒸气可近似地看作理想气体。

【解】 设初始条件下,气缸中能够容纳的气态氟利昂质量为 m ,这部分氟利昂的状态方程

$$r = \frac{2 + (\alpha_1 + \alpha_2)\Delta T}{(\alpha_2 - \alpha_1)\Delta T} d = 2.0 \times 10^2 \text{ mm}$$

解得

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{r-d}{r+d} = \frac{1 + \alpha_1 \Delta T}{1 + \alpha_2 \Delta T}$$

由式(2)~式(4),可得

$$l_2 = l_0 + \Delta l_2 = l_0(1 + \alpha_2 \Delta T) \quad (5)$$

$$l_1 = l_0 + \Delta l_1 = l_0(1 + \alpha_1 \Delta T) \quad (4)$$

根据式(1),膨胀后两金属片的长度分别为

$$l_2 = r_2 \Delta \theta = (r+d)\Delta \theta \quad (3)$$

$$l_1 = r_1 \Delta \theta = (r-d)\Delta \theta \quad (2)$$

圆心角记作 $\Delta \theta$ 。两金属片中心的弧长分别为

将双金属片中心弧线的半径记作 r , 每片的厚度记作 $2d$, 则

所以焊在一起的双金属片膨胀后向钢一侧弯曲, 形成圆弧形。

由于青铜的线膨胀系数比钢大, 而由于金属片有一定的厚度,

其中 α 为线膨胀系数, l_0 为原长, ΔT 为温度的增量。

$$\Delta l = \alpha l_0 \Delta T \quad (1)$$

【解】忽略金属片厚度的变化, 金属片的线膨胀特性为

如图 1.47 所示, 试求双金属片弯曲的曲率半径。(忽略加热时金属片厚度的变化。)

19. (30 届复赛) 温度开关用厚度均为 0.20 mm 的钢片和青铜片作感温元件; 在温度为 20 °C 时, 将它们紧贴, 两端焊接在一起, 成为等长的平直双金属片。若钢和青铜的线膨胀系数分别为 1.0×10^{-5} /度和 2.0×10^{-5} /度。当温度升高到 120 °C 时, 双金属片将自动弯成圆弧形,

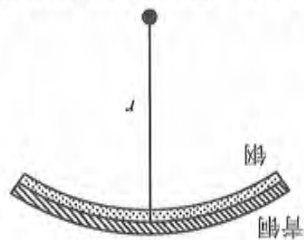


图 1.47 双金属片热膨胀弯曲

解得

$$\Delta m = \frac{\frac{m_0}{\rho_1} RT - p_s V_0}{\frac{m_0}{\rho_1} RT - p_s V_0} = 0.84 \text{ kg}$$

$$p \left(V_0 - \frac{\Delta m}{\rho_1} \right) = \frac{m_0 - \Delta m}{\rho_1} RT$$

剩余的气态氟利昂是饱和蒸气, 状态方程为 $p(V_0 - \Delta V) = \frac{m_0 - \Delta m}{\rho_1} RT$, 即

$$\Delta V = \frac{\Delta m}{\rho_1}$$

设气缸容积减少后, 被液化的氟利昂质量为 Δm , 则液化后这部分液体的体积为

说明开始时, 气缸中所有的氟利昂都处于气态, 是未饱和的蒸气。

$$m = \frac{pV_0}{RT} = 2.2 \text{ kg}$$

为 $pV_0 = \frac{m}{\rho_1} RT$, 从中解得

20. (30 届决赛) 一厚度为 t 的薄金属盘悬吊在温度为 300.0 K 的空气中, 其上表面受到太阳直射, 温度为 360.0 K , 下表面的温度为 340.0 K 。空气的温度保持不变, 单位时间内金属盘每个表面散失到空气中的能量与此表面和空气的温度差以及此表面的面积成正比, 忽略金属盘侧面的能量损失。若此金属盘的厚度变为原来的 2 倍, 求金属盘上、下表面的温度。

【解】 由于金属盘很薄, 忽略其侧面的散热。记上下表面积为 S , 温度分别为 T_1 、 T_2 , 空气的温度为 T_0 。按题中所给条件, 通过上下表面的散热功率分别为

$$P_1 = \frac{\Delta Q_1}{\Delta t} = \alpha(T_1 - T_0)S, \quad P_2 = \frac{\Delta Q_2}{\Delta t} = \alpha(T_2 - T_0)S$$

其中 α 为表面向空气的散热系数。

如图 1.48 所示, 由于上下两表面之间有温差, 热量亦会从上表面向下表面传输, 这种热传导的功率与温差成正比、与截面积成正比、与两面间距成反比, 为

$$P_{12} = \frac{\Delta Q_{12}}{\Delta t} = \kappa \frac{T_1 - T_2}{t} S$$

其中 β 为两表面间的热传导系数。

稳态时, 金属盘各处吸热的功率与散射的功率相等, 若上表面从太阳吸收热量的功率为 W , 则有

$$\begin{cases} W = P_1 + P_{12} \\ P_{12} = P_2 \end{cases}$$

于是, 厚度为 t 和 $2t$ 时, 上式分别为

$$\begin{cases} W = \alpha(T_{01} - T_0)S + \frac{\kappa}{t}(T_{01} - T_{02})S \\ \frac{\kappa}{t}(T_{01} - T_{02})S = \alpha(T_{02} - T_0)S \end{cases}, \quad \begin{cases} W = \alpha(T_1 - T_0)S + \frac{\kappa}{2t}(T_1 - T_2)S \\ \frac{\kappa}{2t}(T_1 - T_2)S = \alpha(T_2 - T_0)S \end{cases}$$

对于上述每个方程组, 有

$$\frac{W}{S} = \alpha(T_{01} - T_0) + \alpha(T_{02} - T_0) = \alpha(T_{01} + T_{02}) - 2\alpha T_0$$

从中可得 $\alpha(T_{01} + T_{02}) = \alpha(T_1 + T_2) = \frac{W}{S} + 2\alpha T_0$, 即

$$T_1 + T_2 = T_{01} + T_{02} = 360 + 340 = 700\text{ (K)}$$

将两方程组的第 2 式两端相除, 得到

$$\frac{T_1 - T_2}{2(T_{01} - T_{02})} = \frac{T_2 - T_0}{T_{02} - T_0}$$

其中 $T_0 = 300\text{ K}$, $T_{01} = 360\text{ K}$, $T_{02} = 340\text{ K}$, $T_1 = 700\text{ K} - T_2$, 于是

$$\frac{700 - T_2 - T_2}{2 \times 20} = \frac{T_2 - 300}{40}$$

解得 $T_2 = \frac{1000}{3}\text{ K}$, 而 $T_1 = \frac{1100}{3}\text{ K}$ 。

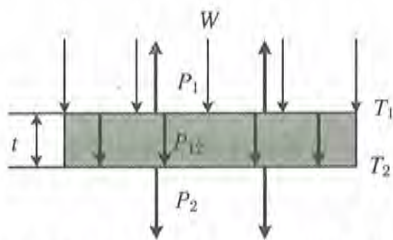


图 1.48 通过金属盘各个界面的热功率

热学 4 分子动理论

1. (2届预赛) 估计在室温下,真空度达到 1×10^{-3} mm 汞高时,容器内空气分子间的平均距离(取 1 位有效数字)。

【解】 气体的状态方程可以写作

$$pV = \nu RT = \frac{N}{N_A} RT$$

其中 ν 为物质的量, N 为分子数, N_A 为阿伏伽德罗常数。上式也可写成

$$p = \frac{N}{V} \frac{R}{N_A} T = nkT$$

其中 n 为单位体积中的分子数, k 为玻尔兹曼常数, 于是

$$n = \frac{p}{kT}$$

每个分子所占的体积为 $1/n$, 则分子间的平均距离为

$$\bar{d} = 1/\sqrt[3]{n} = \sqrt[3]{kT/p} = \sqrt[3]{1.38 \times 10^{-23} \times 300 / (1 \times 10^{-3} \times 10^5 / 760)} \approx 3 \times 10^{-7} (\text{m})$$

2. 气体分子的直径约为 2×10^{-10} m, 试估算标准状态下近邻气体分子间的平均距离 l 与

分子直径 d 的比值(取 2 位有效数字即可)。

【解】 按上题的方法, 分子间的平均距离为

$$l = \sqrt[3]{kT/p} = \sqrt[3]{1.38 \times 10^{-23} \times 273 / (1.0 \times 10^5)} \approx 3.4 \times 10^{-9} (\text{m})$$

已知 $d = 2 \times 10^{-10}$ m, 所以两者之比为

$$\frac{l}{d} = 17$$

3. (5届预赛) 一个密闭容器内盛有水(未满), 处于平衡状态。已知水在 14°C 时的饱和蒸

气压为 12.0 mmHg。设水蒸气分子碰到水面时都变成水, 气体分子的平均速率与气体的热力学

温度的平方根成正比, 试近似计算在 100°C 和 14°C 时, 单位时间内通过单位面积水面的蒸发

变成水蒸气分子之比 n_{100}/n_{14} 等于多少(取 1 位有效数字)?

【解】 在容器中的水, 汽达到平衡状态时, 单位时间内从液体蒸发的分子数与从气体进入

液体的分子数相等。

设水蒸气分子一旦碰到液面, 立刻进入水中, 则根据泄流的结果, 可得单位时间内通过单位

面积进入水中的分子数为 $\frac{1}{2} n \bar{v}$, 其中 n 为单位体积中的分子数。于是有

$$\frac{n_{100}}{n_{14}} = \frac{n_1 \bar{v}_1}{n_2 \bar{v}_2} = \frac{\frac{p_1}{T_1} \sqrt{T_1}}{\frac{p_2}{T_2} \sqrt{T_2}} = \frac{p_2 \sqrt{T_1}}{p_1 \sqrt{T_2}} = \frac{p_2 \sqrt{T_1}}{p_1 \sqrt{T_2}} = \frac{12 \sqrt{373}}{760 \sqrt{287}} = 55$$

4. (29 届预赛) 下列说法中正确的是()。

A. 水在 0°C 时密度最大

B. 一个绝热容器中盛有气体, 假设把气体中分子速率很大的如大于 v_A 的分子全部取走, 则气体的温度会下降, 此后气体中不再存在速率大于 v_A 的分子

C. 杜瓦瓶的器壁是由两层玻璃制成的, 两层玻璃之间抽成真空, 抽成真空的主要作用是既可降低热传导, 又可降低热辐射

D. 图 1.49 所示为一绝热容器, 中间有一隔板, 隔板左边盛有温度为 T 的理想气体, 右边为真空, 现抽掉隔板, 则气体的最终温度仍为 T



图 1.49 带隔板的绝热容器

【解】 水的密度在 4°C 时最大。

从统计的观点看, 任何温度下, 其中分子的速度都有一个由极低到极高的分布, 因而即使温度降低了, 其中仍有少量速度很高的分子。

真空可以降低热传导, 但不能降低热辐射。

D 中, 抽掉隔板后, 气体经历自由膨胀过程, 既不吸热, 也不做功, 所以内能不变, 温度不变。因而, 只有 D 正确。

热学 5 热力学第一定律

1. (3 届预赛) 一直立的不传热的刚性封闭圆筒, 高度为 $2h$, 被一水平透热隔板 C 分成体积皆为 V 的 A 、 B 两部分, 如图 1.50 所示, A 中充有 1 mol 较轻的理想气体, 其密度为 ρ_A 。 B 中充有 1 mol 较重的理想气体, 其密度为 ρ_B 。现将隔板抽开, 上下两部分的气体在短时间内均匀混合。若 A 、 B 中气体的定容摩尔热容量 (1 mol 的气体在体积不变的条件下温度升高 1 K 所吸收的热量) 均为 $3R/2$, 则两部分气体完全混合后的温度 T_2 与混合前的温度 T_1 之差为_____。

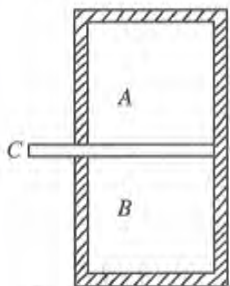


图 1.50 封闭圆筒

【解】 初态时, 整个系统的内能为

$$U_1 = 3RT_1$$

重力势能为

$$E_{p1} = \frac{gh}{2}\rho_B V + \frac{3gh}{2}\rho_A V = (3\rho_A + \rho_B)\frac{gh}{2}V$$

混合后, 整个系统的内能为 $U_2 = 3RT_2$ 。势能为

$$E_{p2} = gh\frac{\rho_B}{2}2V + gh\frac{\rho_A}{2}2V = (\rho_A + \rho_B)ghV$$

由能量守恒, 可得 $3RT_1 + (3\rho_A + \rho_B)\frac{gh}{2}V = 3RT_2 + (\rho_A + \rho_B)ghV$ 。解得重新达到平衡

时的温度为

水银的重力势能较大,说明外界(大气)对其做功较多,因而其温度较高。

【解】 终态,两只管中水银的高度相同,体积也相同,但B管中

热交换。

图,问两管中水银的温度是否相同?为什么?设水银与外界没有真空,再同时分别插入两个水银池中。当水银柱停止运动时(如除了管较粗的部分高低不同之外,其他一切全同。将此两容器抽成

3. (11届预赛) 图 1.52 中所示的 A、B 是两个管状容器,

$$Q = \Delta U_1 = M_L c (T_1 - T_L) = 624 \text{ J}$$

热量等于左筒中气体内能的增量。即

容。这是右筒对左筒中气体做功的结果,而右筒中气体内能不变,所以右筒中气体从热源吸收的左筒中气体内能增量为 $\Delta U_1 = M_L c (T_1 - T_L)$, 其中 $c = 3.14 \text{ J} \cdot (\text{g} \cdot \text{K})^{-1}$ 为气体的比热

322.5 K。

两筒中气体压强相等, $p_1 = p_2 = 1.52 \text{ atm}$, 则左筒中气体的温度变为 $T_1 = \frac{p_1 V_1}{p_L V_L} T_L =$

左筒中气体体积减小 $\Delta V = SL = 5.00 \times 10^3 \text{ cm}^3 = 5 \text{ L}$, 末态的体积变为 $V_1 = 17.4 \text{ L}$ 。

末态的体积变为 $V_2 = 27.4 \text{ L}$ 。由于是等温膨胀, 其中气体的压强变为 $p_2 = \frac{V_2}{V_R} p_R = 1.52 \text{ atm}$ 。

放开活塞后, 右筒中气体体积增加了 $\Delta V = SL = 5.00 \times 10^3 \text{ cm}^3 = 5 \text{ L}$, 其中 $1 \text{ L} = 1 \times 10^3 \text{ cm}^3$,

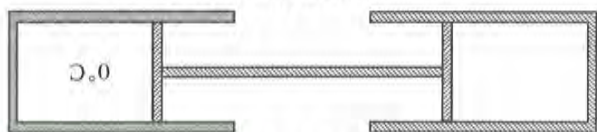
$$p_R = \frac{M_R}{M_L} p_L = \frac{7.44}{4} \times 1 = 1.86 \text{ (atm)}$$

根据题中所给参数, 两筒中气体初始状态相同, 而质量不同, 由此可算出右筒中气体压强为

$$p_L V_L = \frac{M_L}{M_R} R T_L, \quad p_R V_R = \frac{M_R}{M_L} R T_R$$

【解】 活塞被放开之前, 两筒中气体的状态方程分别为

图 1.51 两个容器的活塞以细杆相连



少热量? 已知其中气体的定容比热为 $3.14 \text{ J} \cdot (\text{g} \cdot \text{K})^{-1}$ 。

2. (11届预赛) 如图 1.51 示为两个横截面积均为 $S = 100 \text{ cm}^2$ 的圆筒。左筒内充有某种气体, 质量 $M_L = 4.0 \text{ g}$, 体积 $V_L = 22.4 \text{ L}$, 压强 $p_L = 760 \text{ mmHg}$, 温度 $T_L = 273 \text{ K}$; 右筒内有同种气体, 质量 $M_R = 7.44 \text{ g}$, 体积 $V_R = 22.4 \text{ L}$, 温度 $T_R = 273 \text{ K}$, 左筒筒壁绝热, 右筒靠大热库维持在 0°C 的恒定温度。整个系统在真空中, 左、右筒的活塞通过刚性细杆相连。放开活塞后, 活塞移动了 $L = 50 \text{ cm}$ 后达到平衡而静止, 设活塞与筒壁之间无摩擦。求右筒内的气体吸收了多少热量?

$$T_2 = T_1 + (\rho_A - \rho_B) \frac{gh}{6R} V$$

4. (14 届预赛) 如图 1.53 所示, 一薄壁钢筒竖直放在水平桌面上, 桶内有一与底面平行并可上下移动的活塞 K , 它将筒割成 A 、 B 两部分, 两部分的总容量 $V = 8.31 \times 10^{-2} \text{ m}^3$ 。活塞导热性能良好, 与桶壁无摩擦, 不漏气。筒的顶部轻轻放上一质量与活塞 K 相等的铅盖, 盖与筒的上端边缘接触良好 (无漏气缝隙)。当桶内温度 $t = 27^\circ\text{C}$ 时, 活塞上方 A 中盛有 $\nu_A = 3.00 \text{ mol}$ 的理想气体, 下方 B 中盛有 $\nu_B = 0.400 \text{ mol}$ 的理想气体, B 中气体体积占总容积的 $1/10$ 。现对桶内气体缓慢加热, 把一定的热量传给气体, 当达到平衡时, B 中气体体积变为占总容积的 $1/9$ 。问桶内气体温度 t' 是多少? 已知桶外大气压强为 $p_0 = 1.04 \times 10^5 \text{ Pa}$, 普适气体常量 $R = 8.31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ 。



图 1.53 容器的上端用铅盖覆盖

【解】 初始, 两部分气体的状态方程分别为

$$p_A V_A = \nu_A RT, \quad p_B V_B = \nu_B RT$$

且 $V_A = 9V_B$, $p_B = p_A + \Delta p$, 其中 Δp 为活塞产生的压强, $V_A + V_B = V$ 。可算得

$$p_A = \frac{\nu_A RT}{V_A} = \frac{3 \times 8.31 \times 300}{8.31 \times 10^{-2} \times 0.9} = 1.00 \times 10^5 \text{ (Pa)}$$

$$p_B = \frac{\nu_B RT}{V_B} = \frac{0.4 \times 8.31 \times 300}{8.31 \times 10^{-2} \times 0.1} = 1.20 \times 10^5 \text{ (Pa)}$$

$$\Delta p = p_B - p_A = 1.20 \times 10^5 - 1.00 \times 10^5 = 0.2 \times 10^5 \text{ (Pa)} \quad (1)$$

吸热后, 下部气体的压强为

$$p'_B = \frac{\nu_B RT'}{V'_B} = \frac{9\nu_B RT'}{V} \quad (2)$$

若上部气体无泄漏, 则压强变为 $p'_A = \frac{\nu_A RT'}{V'_A} = \frac{9\nu_A RT'}{8V}$, 于是有

$$\frac{p'_B}{p'_A} = \frac{8\nu_B}{\nu_A} = \frac{8 \times 0.4}{3} = \frac{3.2}{3} \quad (3)$$

同时有

$$p'_B = p'_A + \Delta p \quad (4)$$

由式(2)、式(3)、式(4)可解得 $p'_B = 3.2 \times 10^5 \text{ Pa}$, $p'_A = 3.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ 。

显然, 由于上部气体的压强 p'_A 大于大气压与铅盖的压强之和 $p_0 + \Delta p = 1.24 \times 10^5 \text{ Pa}$, 铅盖将被顶起, 气体会泄露。这样一来, 其中气体的压强维持在 $p'_A = p_0 + \Delta p = 1.24 \times 10^5 \text{ Pa}$ 。

则下部气体的压强为 $p'_B = p'_A + \Delta p = 1.44 \times 10^5 \text{ Pa}$, 温度为

$$T' = \frac{p'_B V'_B}{\nu_B R} = \frac{1.44 \times 10^5 \times 8.31 \times 10^{-2} / 9}{0.4 \times 8.31} = 400 \text{ (K)}$$

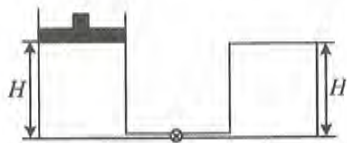


图 1.54 用细管连通的绝热容器

5. (16 届预赛) 如图 1.54 所示, 两个截面相同的圆柱形容器, 右边容器高为 H , 上端封闭, 左边容器上端是一个可以在容器内无摩擦滑动的活塞。两容器由装有阀门的极细管道相连通, 容器、活塞和细管都是绝热的。开始时, 阀门关闭, 左边容器中装有热力学温度为 T_0 的单原子理想气体, 平衡时活塞到容器底的距离为 H , 右边容器内为真空。现将阀门缓慢打开, 活塞便缓慢下降, 直至系统

过程中对 A 中气体所做的功为

$$pV - 2p\Delta V = R(\nu_A + \nu_B)(T - T_0) \quad (4)$$

式(3) - 式(1) - 式(2), 得到

$$2pV = (\nu_A + \nu_B)RT \quad (3)$$

$$2p\Delta V = \nu_B RT_0 \quad (2)$$

$$pV = \nu_A RT_0 \quad (1)$$

【解】由于 B 的容积比 A 大得多, 所以过程中 B 中气体的压强不变。末态时, A 中气体的压强变为原来的两倍。设容器 A 的容积为 V, 初始 A 中气体的物质的量为 ν_A , 压强为 p, 温度为 T_0 , 末态, 从 B 进入 A 中的气体的物质的量为 ν_B , 体积为 ΔV , 气体的温度为 T。则

气体的内能为 $U = \frac{5}{2}RT$, 式中 R 为普适气体常量, T 是绝对温度。

在打开到关闭阀门的过程中处在 A 中的气体与处在 B 中的气体之间无热交换。已知每摩尔该 2 倍。现将阀门缓慢打开, 直至压强相等时关闭。问此时容器 A 中气体的温度为多少? 假设连。开始时阀门关闭, 两容器中盛有同种理想气体, 温度均为 30°C, B 中气体的压强为 A 中的 6. (17 届预赛) 绝热容器 A 经一阀门与另一容积比 A 的容积大得很多的绝热容器 B 相

$$T = \frac{7T_0}{5}$$

再由式(3)、式(4), 得到 $\frac{5}{7} = \frac{T_0}{T}$, 即

$$\text{可得 } h = \frac{5}{2}H.$$

$$pS(H - h) = \frac{3}{2}phS$$

式(4)减去式(3), 可得 $phS = \nu R(T - T_0)$, 由式(1)、式(2), 有

$$p(h + H)S = \nu RT \quad (3)$$

$$pHS = \nu RT_0 \quad (4)$$

气体的状态方程为

$$\Delta U = \frac{3}{2}\nu R(T - T_0) = W \quad (2)$$

系统内能的增量为

$$W = pS(H - h) \quad (1)$$

设平衡时活塞的高度为 h, 系统的温度为 T。气体的压强不变, 则外界对系统所做的功为

$$\text{压强为 } p = p_0 + \frac{mg}{S}.$$

【解】设大气压强为 p_0 , 活塞质量为 m, 容器截面积为 S。则初始时, 左边容器中气体的温度。

提示: 1 mol 单原子理想气体的内能为 $\frac{3}{2}RT$, 其中 R 为普适气体常量, T 为气体的热力学

达到平衡。求此时左边容器中活塞的高度和缸内气体的温度。

$$2p\Delta V = \frac{5R}{2}(\nu_A + \nu_B)(T - T_0) \quad (5)$$

由式(4)、式(5)可知, $pV - 2p\Delta V = 2p\Delta V \times \frac{2}{5}$, 即 $\Delta V = \frac{5V}{14}$ 。式(4)可化为

$$\frac{2}{7}pV = R(\nu_A + \nu_B)(T - T_0) \quad (6)$$

式(3)除以式(6), 得到 $7 = \frac{T}{T - T_0}$, 即

$$T = \frac{7T_0}{6} = 353.5 \text{ K}$$

7. (22届预赛) 如图 1.55 所示, 两根位于同一水平面内的平行的直长金属导轨, 处于恒定磁场中, 磁场方向与导轨所在平面垂直。一质量为 m 的均匀导体细杆, 放在导轨上, 并与导轨垂直, 可沿导轨无摩擦地滑动, 细杆与导轨的电阻均可忽略不计。导轨的左端与一根阻值为 R_0 的电阻丝相连, 电阻丝置于一个绝热容器中, 电阻丝的热容量不计。容器与一水平放置的开口细管相通, 细管内有一截面为 S 的小液柱(质量不计), 液柱将 1 mol 气体(可视为理想气体)封闭在容器中。已知温度升高 1 K 时, 该气体的内能的增加量为 $5R/2$ (R 为普适气体常量), 大气压强为 p_0 , 现令细杆沿导轨方向以初速 v_0 向右运动, 试求达到平衡时细管中液柱的位移。

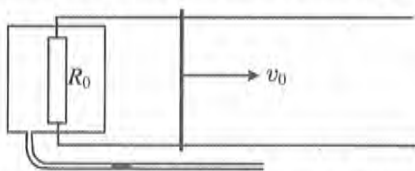


图 1.55 绝热容器中的电阻被加热

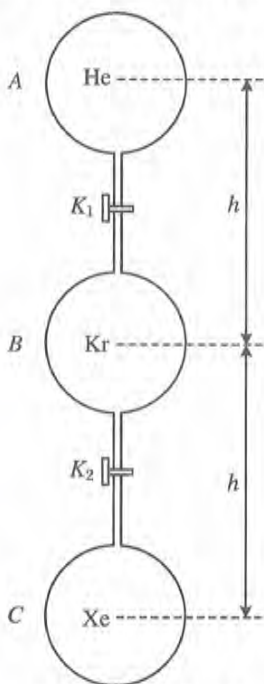


图 1.56 三个连通的球形容器

【解】 细杆切割磁场线, 在回路中感生出电流, 电流使电阻丝发热, 容器中气体温度升高, 压强增大, 推动液柱对外做功。细杆停止, 其全部初始能量等于气体内能的增量与对外做功之和。设平衡时气体的温度变化为 ΔT , 体积增量为 ΔV , 气体膨胀过程中, 压强始终等于大气压。则

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{5R}{2}\Delta T + p_0\Delta V \quad (1)$$

又由于 $p_0V = RT_0$, $p_0(V + \Delta V) = RT$, 所以 $p_0\Delta V = R\Delta T$ 。于是式(1)化为

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{5}{2}p_0\Delta V + p_0\Delta V = \frac{7}{2}p_0\Delta V \quad (2)$$

由式(2)可得液柱的位移为

$$\Delta l = \frac{\Delta V}{S} = \frac{mv_0^2}{7p_0S}$$

8. (19届预赛) 如图 1.56 所示, 三个绝热的、容积相同的球状容器 A、B、C, 用带有阀门 K_1 、 K_2 的绝热细管连通, 相邻两球球心的高度差 $h = 1.00 \text{ m}$ 。初始时, 阀门是关闭的, A 中装有 1 mol 的氦(He), B 中装有 1 mol 的氪(Kr), C 中装有 1 mol 的氙(Xe), 三者的温度和压强都相同。气体均可视为理想气体。现打开阀门 K_1 、 K_2 ,

$$W = -p_0(V_2 - V_0)$$

程。外界对气体做功为

第二过程中,活塞可无摩擦自由运动,外界压强 p_0 不变,气体的压强 p_0 也不变,是等压过

$$Q_1 = \Delta U_1 = \nu c_V(T_1 - T_0) = \nu c_V \left(\frac{p_1}{p_0} - 1 \right) T_0 = c_V \left(\frac{p_1}{p_0} - 1 \right) \frac{R}{p_0 V_0}$$

量为

1 mol 该气体温度升高 1°C 内能的增加为已知恒量,设该恒量为 c_V 。此过程中所吸收的热

能。设平衡时气体的温度为 T_1 ,由状态方程 $\frac{p_0}{T_0} = \frac{p_1}{T_1}$,可得 $T_1 = \frac{p_1}{p_0} T_0$ 。

【解】第一过程中,气体体积不变,是等容过程,外界所提供的热量全部转化为气体的内

然后停止通电,最后测得气体的体积为 V_2 。

(2) 仍从初始状态出发,让活塞处在自由状态,在电热丝中通以弱电流,也持续一段时间,

气体达到热平衡时,测得气体的压强为 p_1 。

电热丝中通以弱电流,并持续一段时间,然后停止通电,待

(1) 从初始状态出发,保持活塞 S 位置固定,在电

下两种过程中电热丝传给气体的热量 Q_1 与 Q_2 之比。

体温度升高 1 K 时其内能的增量为已知恒量。求以

初始时,气体的体积为 V_0 、压强为 p_0 。已知 1 mol 该气

体十分缓慢地加热。气缸处在大气中,大气压强为 p_0 。

擦地滑动。气缸左端的电热丝可通弱电流对气缸内气

密封在水平放置的绝热气缸内。活塞可在气缸内无摩

9. (24 届预赛) 如图 1.57 所示,绝热的活塞 S 把一定质量的稀薄气体(可视为理想气体)

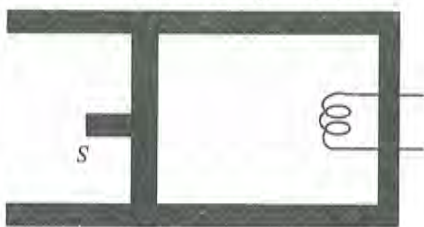


图 1.57 带加热器的绝热容器

$$\text{温度的改变量 } \Delta T = \frac{R}{2(\mu_{\text{He}} - \mu_{\text{Xe}})gh} = \frac{R}{2(4.003 - 131.3) \times 10^{-3} \times 9.8 \times 10^2} = -3.3 \times 10^{-2} \text{ K}$$

$$\text{内能增量 } \Delta U = 3 \times \frac{3R}{2} \Delta T = W = (\mu_{\text{He}} - \mu_{\text{Xe}})gh;$$

$$\text{外界对系统所做的功 } W = -(\Delta E_{\text{Kr}} + \Delta E_{\text{He}} + \Delta E_{\text{Xe}}) = (\mu_{\text{He}} - \mu_{\text{Xe}})gh;$$

$$\text{Xe 的势能变化 } \Delta E_{\text{Xe}} = \frac{1}{3} \mu_{\text{Xe}} gh + \frac{1}{3} \mu_{\text{Xe}} g 2h = \mu_{\text{Xe}} gh;$$

$$\text{He 的势能变化 } \Delta E_{\text{He}} = -\frac{1}{3} \mu_{\text{He}} gh - \frac{1}{3} \mu_{\text{He}} g 2h = -\mu_{\text{He}} gh;$$

【解】混合后, Kr 的势能不变, $\Delta E_{\text{Kr}} = 0$;

气体常量。

在体积不变时,这三种气体任何一种每摩尔温度升高 1 K,所吸收的热量均为 $3R/2$, R 为普通

$$\mu_{\text{Xe}} = 131.3 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\mu_{\text{Kr}} = 83.8 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\mu_{\text{He}} = 4.003 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$$

气体温度的改变量。已知三种气体的摩尔质量分别为

三种气体相互混合,最终每一种气体在整个容器中均匀分布,三个容器中气体的温度相同。求

设平衡时气体的温度为 T_2 , 由状态方程, $\frac{V_0}{T_0} = \frac{V_2}{T_2}$, 可得

$$T_2 = \frac{V_2}{V_0} T_0$$

这一过程中气体内能的增量为

$$\Delta U_2 = \nu c_V (T_2 - T_0) = \nu c_V \left(\frac{V_2}{V_0} - 1 \right) T_0 = c_V \left(\frac{V_2}{V_0} - 1 \right) \frac{p_0 V_0}{R}$$

吸收的热量

$$Q_2 = \Delta U_2 - W = c_V \left(\frac{V_2}{V_0} - 1 \right) \frac{p_0 V_0}{R} + p_0 (V_2 - V_0)$$

于是结果为

$$\begin{aligned} \frac{Q_1}{Q_2} &= \frac{c_V \left(\frac{p_1}{p_0} - 1 \right) \frac{p_0 V_0}{R}}{c_V \left(\frac{V_2}{V_0} - 1 \right) \frac{p_0 V_0}{R} + p_0 (V_2 - V_0)} = \frac{c_V (p_1 - p_0) V_0}{c_V p_0 (V_2 - V_0) + p_0 (V_2 - V_0) R} \\ &= \frac{c_V}{c_V + R} \frac{(p_1 - p_0) V_0}{p_0 (V_2 - V_0)} \end{aligned}$$

10. (26 届预赛) 一根内径均匀、两端开口的细长玻璃管, 竖直插在水中, 管的一部分在水面上。现用手指封住管的上端, 把一定量的空气密封在玻璃管中, 以 V_0 表示其体积; 然后把玻璃管沿竖直方向提出水面, 设此时封在玻璃管中的气体体积为 V_1 ; 最后把玻璃管在竖直平面内转过 90° , 使玻璃管处于水平位置, 设此时封在玻璃管中的气体体积为 V_2 。则有 ()。

- A. $V_1 > V_0 = V_2$ B. $V_1 > V_0 > V_2$ C. $V_1 = V_2 > V_0$ D. $V_1 > V_0, V_2 > V_0$

【解】 上述过程进行得比较短暂, 可视为绝热过程。在将管提起的过程中, 管中气体由于对外做功而导致温度降低, 所以, 将管水平放置时, 尽管压强仍等于 1 atm, 但其体积将比开始时要小。所以答案应当是 B。

11. (26 届预赛) 图 1.58 中 M_1 和 M_2 是绝热气缸中的两个活塞, 用轻质 M_1 和 M_2 是绝热气缸中的两个活塞, 用轻质刚性细杆连接, 活塞与气缸壁的接触是光滑的、不漏气的, M_1 是导热的, M_2 是绝热的, 且 M_2 的横截面积是 M_1 的 2 倍。 M_1 把一定质量的气体封闭在气缸的 L_1 部分, M_1 和 M_2 把一定质量的气体封闭在气缸的 L_2 部分, M_2 的右侧为大气, 大气的压强 p_0 是恒定的。 K 是加热 L_2 中气体用的电热丝。初始时, 两个活塞和气体都处在平衡状态, 分别以 V_{10} 和 V_{20} 表示 L_1 和 L_2 中气体的体积。现通过 K 对气体缓慢加热

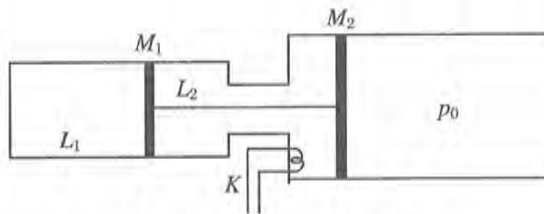


图 1.58 绝热容器, 带加热器

一段时间后停止加热, 让气体重新达到平衡态, 这时, 活塞未被气缸壁挡住。加热后与加热前比, L_1 和 L_2 中气体的压强是增大了、减小了还是未变? 要求进行定量论证。

非有三种:

由于分母一定是正值, ΔV 一定大于零, 所以 $p_1 - p_{10}$ 的正负与 $(V_{10} - V_{20})$ 一致。结果无

$$\begin{aligned} p_1 - p_{10} &= \frac{2\nu_1 p_0 V_2}{2\nu_1 p_0 V_2 + \nu_2 V_1} - \frac{2\nu_1 p_0 V_{20}}{2\nu_1 p_0 V_{20} + \nu_2 V_{10}} \\ &= \frac{2\nu_1 p_0 [V_2(2\nu_1 V_{20} + \nu_2 V_{10}) - V_{20}(2\nu_1 V_2 + \nu_2 V_1)]}{(2\nu_1 V_2 + \nu_2 V_1)(2\nu_1 V_{20} + \nu_2 V_{10})} \\ &= \frac{2\nu_1 p_0 (\nu_2 V_{10} V_2 - \nu_2 V_{20} V_1)}{(2\nu_1 V_2 + \nu_2 V_1)(2\nu_1 V_{20} + \nu_2 V_{10})} \\ &= \frac{2\nu_1 p_0 [V_2(V_{20} + \Delta V) - V_{20}(V_{10} + \Delta V)]}{(2\nu_1 V_2 + \nu_2 V_1)(2\nu_1 V_{20} + \nu_2 V_{10})} \\ &= \frac{2\nu_1 p_0 (\nu_2 V_{10} \Delta V - \nu_2 V_{20} \Delta V)}{(2\nu_1 V_2 + \nu_2 V_1)(2\nu_1 V_{20} + \nu_2 V_{10})} \end{aligned}$$

则

$$p_{10} = \frac{2\nu_1 p_0 V_{20}}{2\nu_1 V_{20} + \nu_2 V_{10}}$$

同样, 有

$$p_1 = \frac{2\nu_1 p_0 V_2}{2\nu_1 V_2 + \nu_2 V_1}$$

由式(1)和式(2), 可得 $\frac{p_1 V_1}{p_2 V_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{p_1 V_1}{(2p_0 - p_1)V_2}$, 可解出

$$\begin{cases} p_{10} V_{10} = \nu_1 RT_0 \\ p_{20} V_{20} = \nu_2 RT_0 \end{cases} \quad (3)$$

和

$$\begin{cases} p_1 V_1 = \nu_1 RT \\ p_2 V_2 = \nu_2 RT \end{cases} \quad (2)$$

体的状态方程为

由于 M_1 是导热的, 则加热过程中 L_1 与 L_2 中气体的温度始终相同。加热前后, 两部分气体

一段时间后, 压强和温度开始降低, 直至达到新的平衡。
两部分气体体积的增量都相同, L_1 中气体对 L_2 中气体做功, 同时 L_2 中气体对外界做功, 经过
力为 $p_2 S_1$, 将增加; 向左侧的压力为 $2(p_0 - p_1)S_1$, 将减小。必然导致向右运动。这一过程中,
以温度压强都增加, 同时 L_1 中气体亦由于温度增加而压强增加, 由于两活塞受到向右侧的压
不妨分析一下从加热开始直至重新达到平衡的物理过程: 开始时, L_2 中气体由于吸热, 所

$$p_1 + p_2 = 2p_0 \quad (1)$$

解得

$$p_0 S_2 - p_1 S_1 = 2p_0 S_1 - p_1 S_1 = p_2 S_1$$

若使系统处于平衡态, L_2 外部必须有指向左侧的压力恰与其抵消, 也就是

$$p_2 S_2 - p_2 S_1 = 2p_2 S_1 - p_2 S_1 = p_2 S_1$$

L_2 内部气体对刚性相连的两活塞的压力不同, 指向右侧的压力为

【解】在准静态过程中 L_1 、 L_2 中的各处气体压强相等, 但由于两侧活塞截面积不同, 因而

- ① $V_{10} = V_{20}$, 这时必然有 $\begin{cases} p_1 = p_{10} \\ p_2 = p_{20} \end{cases}$;
- ② $V_{10} > V_{20}$, 这时必然有 $\begin{cases} p_1 > p_{10} \\ p_2 < p_{20} \end{cases}$;
- ③ $V_{10} < V_{20}$, 这时必然有 $\begin{cases} p_1 < p_{10} \\ p_2 > p_{20} \end{cases}$ 。

12. (27 届预赛) 如图 1.59 所示, a 、 b 是绝热气缸内的两个活塞, 他们将气缸分为甲、乙两部分, 两部分中都封有等量的理想气体, a 是导热的, 其热容可忽略不计, 与气缸壁固连; b 是绝热的, 可在气缸内无摩擦滑动, 但不漏气, 其右方为大气。图中 k 为加热用的电热丝。开始时, 系统处于平衡状态, 两部分中气体的温度和压强皆相同。现在接通电源, 缓慢加热一段时间后停止加热, 系统又达到新的平衡, 则()。

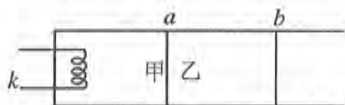


图 1.59 活塞将绝热气缸分为两部分

- A. 甲、乙中气体的温度有可能不变
 B. 甲、乙中气体的压强都增加了
 C. 甲、乙中气体的内能的增加量相等
 D. 电热丝放出的总热量等于甲、乙中气体增加内能的总和

【解】 上述过程中, 甲中气体等容吸热, 温度升高, 内能增加, 压强亦增加。乙中气体吸热后, 等压膨胀, 两部分气体温度相等, 而初态又相同, 所以内能的增量相等。由于乙中的气体不可能将全部热量转化为功, 所以温度不可能维持不变, 而由于做功, 乙中气体的内能增量小于其所吸收的热量。所以答案为 C。

13. (16 届决赛) 在如图 1.60 所示的装置中, 上下两个容器和连接它们的细长管都是用热容量很小的良导热体做成的, 管长为 l , K 为阀门, 整个装置与外界绝热。开始时, 阀门关闭, 两容器中都盛有质量为 m 、比热容为 c 的某种液体。平衡时, 温度都是 T_0 。由于该液体的蒸气分子受到重力的作用, 所以平衡时, 在管内的气体分子并非均匀分布, 而是上疏下密, 已知其蒸气压强是按指数规律分布



图 1.60 两容器以细管连接

$$p_h = p_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}$$

式中 h 为管内某点距下面容器中液面的高度, p_h 是该点的蒸气压强, p_0 是下面容器中液面处(即 $h=0$ 处)蒸气的压强, m 是一个蒸气分子的质量, T 是热力学温度, k 是一个常数。现在打开阀门, 试论述该系统的状态将发生怎样的变化, 并估算出变化最后的结果。

【解】 开始时, 整个系统各处温度相同, 上下两部分的气体都是饱和蒸气, 所以液体的液面附近蒸气压相等。 K 关闭时, 由于重力的作用, 阀门两侧气体的压强不等。左侧压强大于右侧, 因而开启 K 后, 气体向右流动。结果会导致上部液体进一步蒸发, 温度降低; 而下部气体不断凝结, 温度升高。

温度变化, 导致蒸气压变化, 下部液面处的蒸气压大于上部。结果会导致阀门处压强平衡。所以经过一段时间后, 整个系统处于平衡态, 尽管这时细管中不同高度处的气体压强不相等。

于是,按照热力学第一定律,降温过程中气体所吸收的热量

$$\Delta U = \nu c_V (T_2 - T_1) = \nu c_V \Delta T$$

气体内能的增量为

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} p dV = - \int_{V_1}^{V_2} \frac{\rho g V}{S} dV = - \frac{\rho g}{2S} (V_1^2 - V_2^2) = \frac{\nu R}{2} (T_1 - T_2) = - \frac{\nu R \Delta T}{2}$$

降温过程中,外界对气体做功为

$$\frac{\rho g V^2}{S} = \nu RT$$

可得

若降温过程中气体的体积由 V_1 变为 V_2 , 温度由 T_1 变为 T_2 , 则由状态方程 $pV = \nu RT$,

$$p = \frac{\rho g V}{S}$$

由于 $l = 76 \text{ cm}$, $\rho g h = 76 \text{ cmHg} = p_0$, 气体的压强为

$$p = p_0 - \rho g l + \frac{\rho g S}{S}$$

式(2)可写作

$$h = l - \frac{S}{V}$$

由式(1), 用管中气体体积 V 表示管中水银柱高度 h , 即

$$(2) \quad p = p_0 - \rho g h$$

$$(1) \quad V = (l - h)S$$

h , 水银密度为 ρ , 则管中气体的体积为

如图 1.61 所示, 设玻璃管的截面积为 S , 管中水银柱的高度为

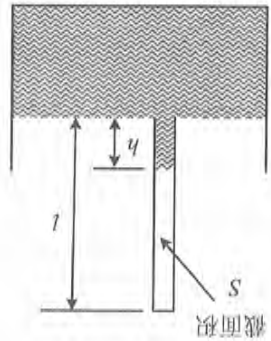


图 1.61 将竖管插入大水银槽中

对气体做功。

【解】在管中气体降温的过程中, 要向外放出热量, 其体积也相应减小, 水银面上升, 外界

为绝对温度, 常量 $c_V = 20.5 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, 普适气体常量 $R = 8.31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ 。

放出的热量为多少? 已知管外大气的压强为 76 cmHg , 每摩尔空气的内能 $U = c_V T$, 其中 T

水银槽与玻璃管都不动而设法使玻璃管内空气的温度缓慢地降低 10°C , 问在此过程中管内空

气放出的热量为多少? 已知管外大气的压强为 76 cmHg , 管内封闭有 $n = 1.0 \times 10^{-3} \text{ mol}$ 的空气。保持

水银液面以上的那部分玻璃管的长度 $l = 76 \text{ cm}$, 管内封闭有 $n = 1.0 \times 10^{-3} \text{ mol}$ 的空气。保持

水银液面以上的那部分玻璃管的长度 $l = 76 \text{ cm}$, 管内封闭有 $n = 1.0 \times 10^{-3} \text{ mol}$ 的空气。保持

水银液面以上的那部分玻璃管的长度 $l = 76 \text{ cm}$, 管内封闭有 $n = 1.0 \times 10^{-3} \text{ mol}$ 的空气。保持

水银液面以上的那部分玻璃管的长度 $l = 76 \text{ cm}$, 管内封闭有 $n = 1.0 \times 10^{-3} \text{ mol}$ 的空气。保持

水银液面以上的那部分玻璃管的长度 $l = 76 \text{ cm}$, 管内封闭有 $n = 1.0 \times 10^{-3} \text{ mol}$ 的空气。保持

水银液面以上的那部分玻璃管的长度 $l = 76 \text{ cm}$, 管内封闭有 $n = 1.0 \times 10^{-3} \text{ mol}$ 的空气。保持

水银液面以上的那部分玻璃管的长度 $l = 76 \text{ cm}$, 管内封闭有 $n = 1.0 \times 10^{-3} \text{ mol}$ 的空气。保持

水银液面以上的那部分玻璃管的长度 $l = 76 \text{ cm}$, 管内封闭有 $n = 1.0 \times 10^{-3} \text{ mol}$ 的空气。保持

水银液面以上的那部分玻璃管的长度 $l = 76 \text{ cm}$, 管内封闭有 $n = 1.0 \times 10^{-3} \text{ mol}$ 的空气。保持

水银液面以上的那部分玻璃管的长度 $l = 76 \text{ cm}$, 管内封闭有 $n = 1.0 \times 10^{-3} \text{ mol}$ 的空气。保持

水银液面以上的那部分玻璃管的长度 $l = 76 \text{ cm}$, 管内封闭有 $n = 1.0 \times 10^{-3} \text{ mol}$ 的空气。保持

水银液面以上的那部分玻璃管的长度 $l = 76 \text{ cm}$, 管内封闭有 $n = 1.0 \times 10^{-3} \text{ mol}$ 的空气。保持

水银液面以上的那部分玻璃管的长度 $l = 76 \text{ cm}$, 管内封闭有 $n = 1.0 \times 10^{-3} \text{ mol}$ 的空气。保持

若忽略气体蒸发及升温所吸收的热量, 则重力功使液体的温度变为

$$\Delta U = W = mgl$$

系统是绝热的, 与外部没有能量交换。但重力对系统做功, 会使其内能增大。即

部气体的蒸发过程就是一直持续, 直到液体全部蒸发, 而下部液体增多。

但是, 在本题中, 由于细管是很好的导热体, 所以整个系统的温度处处相等。这样一来, 上

$$Q = \Delta U - W = \nu c_v \Delta T - \frac{\nu R \Delta T}{2} = \nu \Delta T \left(c_v - \frac{R}{2} \right) = -10 \left(20.5 - \frac{8.31}{2} \right) = -163.45 \text{ (J)}$$

即放出的热量为 163.45 J。

15. (22 届复赛) 如图 1.62 所示, 水平放置的横截面积为 S 的带有活塞的圆筒形绝热容器中盛有 1 mol 的理想气体。其内能 $U = CT$, C 为已知常量, T 为热力学温度。器壁和活塞之间不漏气且存在摩擦, 最大静摩擦力与滑动摩擦力相等且皆为 F 。图中 r 为电阻丝, 通电时可对气体缓慢加热。起始时, 气体压强与外界大气压强 p_0 相等, 气体的温度为 T_0 。现开始对 r 通电, 已知当活塞运动时克服摩擦力做功所产生热量的一半被容器中的气体吸收。若用 Q 表示气体从电阻丝吸收的热量, T 表示气体的温度, 试以 T 为纵坐标, Q 为横坐标, 画出在 Q 不断增加的过程中 T 和 Q 的关系图线, 并在图中用题给的已知量及普适气体常量 R 标出反映图线特征的各量(不要求写出推导过程)。

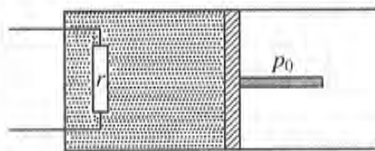


图 1.62 水平放置的带活塞绝热圆筒

【解】 加热过程中, 题中的气体经历一个准静态的绝热过程, 气体吸热, 温度升高, 体积膨胀, 推动活塞对外做功。

由于活塞与气缸之间有摩擦, 且活塞右侧大气压强不变, 因而只有气体的压强达到临界值之前, 体积不变, 是等容过程。该压强的临界值为

$$p_1 = p_0 + \frac{F}{S} \quad (1)$$

相应的温度为

$$T_1 = \frac{p_1 T_0}{p_0} = \left(p_0 + \frac{F}{S} \right) \frac{T_0}{p_0} \quad (2)$$

在等容过程中, 由于做功为零, 热力学第一定律为

$$Q = \Delta U = \nu C (T - T_0)$$

可得

$$T = \frac{Q}{\nu C} + T_0 \quad (3)$$

其中 $\nu = 1 \text{ mol}$ 。

显然, 第一过程中 T 和 Q 为线性关系, 图线斜率为 $\frac{1}{C}$ 。

第一过程中从外界吸收的总热量为

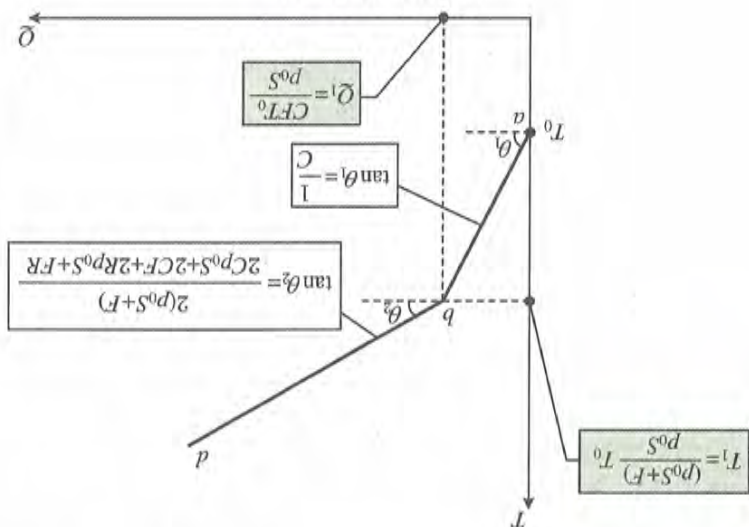
$$Q_1 = \nu C (T_1 - T_0) = \nu C \left[\left(p_0 + \frac{F}{S} \right) \frac{T_0}{p_0} - T_0 \right] = \frac{F}{p_0 S} \nu C T_0$$

第二过程中, 由于摩擦力与大气压强均保持不变, 因而气体等压膨胀, 压强为 p_1 。等压过程中, 温度升高至 T 时的体积为 $V_0 + \Delta V = \frac{T}{T_1} V_0$, 即

$$\Delta V = \left(\frac{T}{T_1} - 1 \right) V_0 \quad (4)$$

而根据气体的状态方程 $pV = \nu RT$, 可得初始的体积为

图 1.63 结果图示



1.63所示。

第二过程中 T 和 Q 仍为线性关系，图线斜率为 $\frac{2Cp_0S + 2CF + 2R p_0S + FR}{2(p_0S + F)}$ 。结果如图

$$(6) \quad T = \frac{2Cp_0S + 2CF + 2R p_0S + FR}{2(p_0S + F)} \left(Q - \frac{CFT_0}{p_0S} \right) + \frac{p_0S}{(p_0S + F)T_0}$$

将式(2)代入，可解得

$$\begin{aligned} &= Q - \frac{F}{p_0S} CT_0 + \left(p_0 + \frac{F}{S} \right) \nu RT_0 - \left(p_0 + \frac{F}{S} \right) \nu RT_0 \frac{T}{2p_0} \\ C(T - T_1) &= Q - \frac{F}{p_0S} CT_0 - \left(p_0 + \frac{F}{S} \right) \left(\frac{T}{T_1} - 1 \right) \nu RT_0 \end{aligned}$$

其中 $\Delta U = \nu C(T - T_1)$, $Q_2 = Q - Q_1 = Q - \frac{F}{p_0S} \nu CT_0$ 。进一步得到

$$\Delta U_2 = Q_2 + \Delta Q - W = Q_2 - \frac{2}{W}$$

第二过程中，热力学第一定律为

$$\Delta Q = \frac{1}{2} W = \left(p_0 + \frac{F}{S} \right) \left(\frac{T}{T_1} - 1 \right) \nu RT_0$$

所产生的热量被气体吸收的部分为

$$W = p_1 \Delta V = \left(p_0 + \frac{F}{S} \right) \left(\frac{T}{T_1} - 1 \right) \nu RT_0$$

体积增大 ΔV 过程中克服摩擦力所做的功为

$$\Delta V = \left[\frac{T}{p_0 + \frac{F}{S}} \left(\frac{p_0}{T_0} + \frac{p_0}{T} \right) - 1 \right] \nu RT_0 = \frac{p_0 S T - (p_0 S + F) T_0 \nu R}{p_0}$$

综合式(2)、式(4)、式(5)，得到

$$(5) \quad V_0 = \frac{\nu RT_0}{p_0}$$

16. (23 届复赛) 有一带活塞的气缸, 如图 1.64 所示。缸内盛有一定质量的气体, 还有一可随轴转动的叶片, 转轴伸到气缸外, 外界可使轴和叶片一起转动, 叶片和轴以及气缸壁和活塞都是绝热的, 它们的热容量都不计。轴穿过气缸处不漏气。



图 1.64 内有叶片并带活塞的气缸示意图

如果叶片和轴不转动, 而令活塞缓慢移动, 则在这种过程中, 由实验测得, 气体的压强 p 和体积 V 遵从过程方程式

$$pV^\alpha = k$$

其中 α, k 均为常量, $\alpha > 1$ (其值已知)。可以由上式导出, 在此过程中外界对气体做的功为

$$W = \frac{k}{\alpha - 1} \left(\frac{1}{V_2^{\alpha-1}} - \frac{1}{V_1^{\alpha-1}} \right)$$

式中 V_2 和 V_1 分别表示末态和初态的体积。

如果保持活塞固定不动, 而使叶片以角速度 ω 做匀角速转动, 已知在这种过程中, 气体的压强的改变量 Δp 和经过的时间 Δt 遵从关系式

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\alpha - 1}{V} L \omega$$

式中 V 为气体的体积, L 表示气体对叶片阻力的力矩的大小。

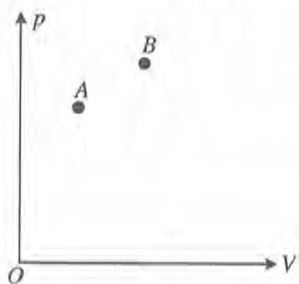


图 1.65 气体的状态图示

上面并没有说气体是理想气体, 现要求你不用理想气体的状态方程和理想气体的内能只与温度有关的知识, 求出图 1.65 中气体原来所处的状态 A 与另一已知状态 B 之间的内能之差 (结果要用状态 A, B 的压强 p_A, p_B 和体积 V_A, V_B 及常量 α 表示)。

【解】 内能是状态参量, 与过程无关。

根据题中所给条件, 由于气缸是绝热的, 除其体外, 其他部分的热容都忽略不计, 所以外界对系统所做的功全部用以增加气体内能。

可设系统从 A 开始, 经历两个过程到达 B :

第一过程, 叶片和轴不转动, 体积膨胀, 对外做功;

第二过程, 保持活塞不动, 气体体积不变, 叶片转动, 即外界对系统做功。

第一过程中, 气体的体积从 V_A 变为 V_B , 压强从 p_A 变为 p_1 , 外界对系统所做的功为

$$W_1 = \frac{k}{\alpha - 1} \left(\frac{1}{V_B^{\alpha-1}} - \frac{1}{V_A^{\alpha-1}} \right)$$

相应的压强变为

$$p_1 = p_A \left(\frac{V_A}{V_B} \right)^\alpha$$

第二过程中, 气体的体积叶片转动要克服阻力矩, 在时间 Δt 内外界对气体所做的功为

$$W_2 = L \Delta \theta = L \omega \Delta t$$

将题中所给公式代入, 得到

$$W_2 = \frac{\Delta p V_B}{\alpha - 1}$$

由于气体的压强从 p_1 变为 p_B , 因而 $\Delta p = p_B - p_1$, 即

右侧气体被绝热压缩,内能增加 ΔU_R ,即

$$\bar{Q} = W_L + \Delta U_L$$

第三过程,左侧吸热膨胀,对右侧气体做功 W_L ,内能增加 ΔU_L ,即

$$p_2 V_0 = \nu RT \quad (2)$$

于体积为原来的 2 倍,压强降为原来的一半,即 $p_2 = \frac{p_1}{2}$,状态方程为

第二过程,气体绝热自由膨胀,由于外界既不做功,也不传热,气体内能不变,温度不变。由

$$\nu c_V = \frac{T - T_0}{W} \quad (1)$$

可得

$$W = \Delta U = \nu c_V (T - T_0)$$

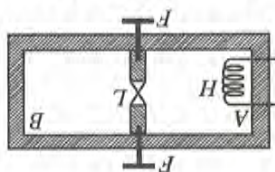
第一过程,气体被绝热压缩,体积变为 V_0 。设压强变为 p_1 。这一过程中对气体做功为

【解】设整个气缸的容积为 $2V_0$,气体的定容摩尔热容为 c_V ,气体的物质的量为 ν 。

积变为原来的 0.75 倍。求加热器传给气体的热量。

现开启小阀门 L ,经过足够长的时间,将它关闭。然后拔出销钉(让活塞可自由移动),并用电热器加热气体。加热完毕并经过一段段时间后,得知左室内气体的压强变为加热前的 1.5 倍,右室的体

图 1.66 气缸分成容积相等的两室



压缩气体的过程中,设对气体做功 W ,气体温度上升到 T 。

17. 在一具有绝热壁的刚性圆柱形封闭气缸内,有一装有小阀门 L 的绝热活塞。在气缸的

$$\Delta U = \frac{2(p_B V_B - p_A V_A)}{\alpha - 1}$$

因而得到

$$\frac{k}{k-1} p_A V_A^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} = p_B V_B^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}, \quad \frac{V_B^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}{k} = \frac{p_B V_B^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}{k} = p_B V_B^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \text{ 和 } p_A V_A^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} = p_B V_B^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} = p_B V_B$$

由于 $pV^\alpha = k$,所以在初态、末态时,分别有

$$= \frac{1}{k-1} \left(\frac{p_A V_A^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}{k} + p_B V_B - p_A V_A^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \right)$$

$$\Delta U = W_1 + W_2 = \frac{\alpha-1}{k} \left(\frac{1}{V_B^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} - \frac{1}{V_A^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} \right) + \frac{p_B - p_A}{V_B^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} V_B$$

按照热力学第一定律,内能的增量为

$$W_2 = \frac{(\alpha-1)}{k} (p_B - p_A) V_B = \frac{\alpha-1}{k} \left(\frac{p_B}{V_B^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} - \frac{p_A}{V_A^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} \right) V_B$$

$$W_L = \Delta U_R$$

过程结束时, $\nu_L = \nu_R = \frac{1}{2}\nu$, 两室气体压强相等, 为 $p = \frac{3}{2}p_2$, $V_R = \frac{3}{4}V_0$, $V_L = \frac{5}{4}V_0$ 。两室中气体的状态方程分别为

$$\left(\frac{3}{2}p_2\right)\left(\frac{5}{4}V_0\right) = \nu_L RT_L, \quad \left(\frac{3}{2}p_2\right)\left(\frac{3}{4}V_0\right) = \nu_R RT_R$$

结合式(2), 可求得 $T_L = \frac{15}{8}T$, $T_R = \frac{9}{8}T$ 。

最终加热器提供的热量变为两部分气体的内能, 利用式(1), 即得

$$Q = \Delta U_L + \Delta U_R = \frac{1}{2}\nu c_V [(T_L - T) + (T_R - T)] = \frac{1}{2}\nu c_V T = \frac{T}{2(T - T_0)} W$$

18. (24 届复赛) 如图 1.67 所示, 一容器左侧装有活门 K_1 , 右侧装有活塞 B , 一厚度可以忽略的隔板 M 将容器隔成 a 、 b 两室, M 上装有活门 K_2 。容器、隔板、活塞及活门都是绝热的。隔板和活塞可用销钉固定, 拔掉销钉即可在容器内左右平移, 移动时不受摩擦作用且不漏气。整个容器置于压强为 p_0 、温度为 T_0 的大气中。初始时将活塞 B 用销钉固定在图示的位置, 隔板 M 固定在容器 PQ 处, 使 a 、 b 两室体积都等于 V_0 ; K_1 、 K_2 关闭。初时, b 室真空, a 室装有一定量的空气(容器内外气体种类相同, 且均可视为理想气体), 其压强为 $4p_0/5$, 温度为 T_0 。已知 1 mol 空气温度升高 1 K 时内能的增量为 c_V , 普适气体常量为 R 。

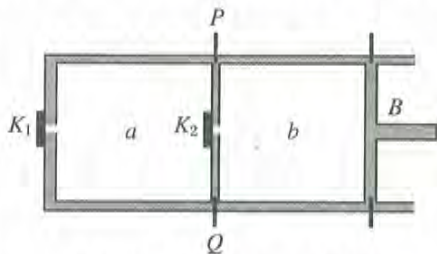


图 1.67 带活塞和活门的气缸

(1) 现在打开 K_1 , 待容器内外压强相等时迅速关闭 K_1 (假定此过程中处在容器内的气体与处在容器外的气体之间无热量交换), 求达到平衡时, a 室中气体的温度。

(2) 接着打开 K_2 , 待 a 、 b 两室中气体达到平衡后, 关闭 K_2 。拔掉所有销钉, 缓慢推动活塞 B 直至到达 PQ 位置。求在推动活塞过程中, 隔板对 a 室气体所做的功。已知在推动活塞过程中, 气体的压强 p 与体积 V 之间的关系为 $pV^{\frac{c_V+R}{c_V}} = \text{恒量}$ 。

【解】 (1) 在此过程中, 可以认为外部气体将 a 室中原有气体压缩, 直至其压强达到 p_0 时为止, 同时有一部分气体进入 a 室, 最后达到热平衡。

设初时 a 室中气体的物质的量为 ν_0 , 已知体积为 V_0 , 从外部进入的气体的物质的量为 $\Delta\nu$, 体积为 ΔV 。这一过程中, 外界所做的功为

$$W = p_0 \Delta V$$

由于初始时这两部分气体的温度相同, 结束时温度亦相同, 因而内能的增量为

$$\Delta U = (\nu_0 + \Delta\nu) c_V (T - T_0)$$

对于外部而言, 上述过程是绝热过程, 按热力学第一定律, $\Delta U = W$, 即

$$p_0 \Delta V = (\nu_0 + \Delta\nu) c_V (T - T_0) \quad (1)$$

分别写出初始时两部分气体的状态方程, 为

$$\frac{4}{5} p_0 V_0 = \nu_0 RT_0 \quad (2)$$

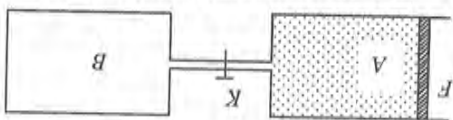


图 1.68 用绝热短细管连接两容器

19. (8 届决赛) 图 1.68 中, A 和 B 是两个圆筒形绝热容器, 中间用非常细的短管相连通, 短管中有导热性能良好的阀门 K。短管及阀门对外界也是绝热的, F 为一带柄的绝热活塞, 它与容器 A 的内表面紧密接触(不漏气), 但摩擦可忽略不计。开始时 K 关闭, F 处于 A 的左端。A 中有 n 摩尔理想气体, 温度是 T_0 , B 中为真空。现在向右推动

以及未态时的状态方程

$$p_0 \Delta V = \Delta \nu RT_0 \quad (3)$$

由式(2)、式(4)得到

$$p_0 V_0 = (\nu_0 + \Delta \nu) RT \quad (4)$$

由式(1)、式(3)得到

$$\frac{\nu_0 + \Delta \nu}{\nu_0} = \frac{4}{5} \frac{T}{T_0}$$

于是有

$$\frac{4}{5} \frac{T}{T_0} + \frac{c_V(T - T_0)}{RT_0} = 1$$

解得

$$T = \frac{5(c_V + R)}{5c_V + 4R} T_0$$

(2) 打开 K_2 后, a 室中的气体向 b 室中扩散, 用于 b 室原来是真空, 所以这一过程既不做功, 也不吸热, 因而气体的内能不变。对理想气体而言, 其温度不变, 仍为 T , 由于体积增大 1 倍, 达到平衡时, 压强变为 $p_0/2$ 。

推动活塞的过程中, 由于隔板可以自由运动, 因而两室中的压强是相等的, 体积也相等。对每一室中的气体, 体积由 V_0 变为 $V_0/2$ 。

按照题中所给条件, 此过程中 pV^{c_V+R} 保持不变。记 $\frac{c_V+R}{c_V} = \gamma$, 又根据状态方程, 可得到

$$pV^\gamma = p'V'^{\gamma-1} = \nu RTV'^{\gamma-1}$$

因而 $TV^{\gamma-1}$ 也是不变量, 即对于每一室中的气体, 有 $TV_0^{\gamma-1} = T' \left(\frac{V_0}{2} \right)^{\gamma-1}$, 即 $T' = 2^{\gamma-1} T$ 。

记 $\nu = \nu_0 + \Delta \nu$, 为容器中气体的总物质的量, 每一室中气体内能的增量

$$\Delta U' = \frac{\nu}{2} c_V (T' - T)$$

由于是绝热过程, 因而上述内能改变是由于隔板对 a 室气体所做的功, 即

$$W' = \Delta U' = \frac{\nu}{2} c_V (T' - T) = \frac{\nu}{2} c_V (2^{\gamma-1} T - T) = (2^{\gamma-1} - 1) c_V \frac{\nu}{2} T$$

由于 $p_0 V_0 = \nu RT$, 所以有

$$W' = (2^{\gamma-1} - 1) \frac{R}{c_V} p_0 V_0$$

F ,直到 A 中气体的体积和 B 的容积相等。在此过程中,已知对气体做功为 W ,气体温度变为 T_1 。这时将 K 稍打开一点点,使 A 中的气体缓慢地向 B 中扩散;同时让活塞 F 缓慢地前进,并保持 A 中活塞附近气体的压强近似于不变。在此过程中,气体最后温度是多少? 设活塞、阀门、容器的热容量皆可不计。

【解】 第一过程中, A 中气体被绝热压缩,设气体的定容摩尔热容为 c_V ,则外界做功为

$$W_1 = \Delta U_1 = nc_V(T_1 - T_0) \quad (1)$$

这时 A 和 B 的体积相等,设为 V_0 。

第二过程中,阀门打开之后,外界压强不变,对气体做功;气体被绝热压缩,直到 B 中气体的压强与外界压强相等。设最后 A 中气体的体积为 V_A ,整个容器中气体的温度为 T 。气体的状态方程分别为

$$pV_0 = nRT_1 \quad (2)$$

$$p(V_0 + V_A) = nRT \quad (3)$$

(1)×2-(3),可得

$$p(V_0 - V_A) = nR(2T_1 - T) \quad (4)$$

这一过程中,外界做功为

$$W = p(V_0 - V_A) = \Delta U_2 = nc_V(T - T_1) \quad (5)$$

由式(1)、式(5)消去 nc_V ,可得

$$p(V_0 - V_A) = \frac{W_1}{T_1 - T_0}(T - T_1) \quad (6)$$

再由式(4)、式(6),得到 $nR(2T_1 - T) = \frac{W_1}{T_1 - T_0}(T - T_1)$,即

$$T = \frac{W_1 + 2nR(T_1 - T_0)}{W_1 + nR(T_1 - T_0)} T_1$$

20. 一直立的气缸中装有 ν mol 单原子理想气体,气缸为一质量为 m ,面积为 A 的活塞所封闭。整个气缸和活塞都是绝热的,且位于真空室内。起初活塞被销钉夹持在某个位置,使气缸中气体的体积为 V_0 ,温度为 T_0 。拔去销钉后,活塞下落,最终活塞停止在某平衡位置。这时气缸中气体的体积为 V ,温度为 T 。已知单原子理想气体的摩尔热容量(使 1 mol 气体在体积不变情况下温度升高 1 K 所吸收的热量)为 $\frac{3}{2}R$ (R 为普适气体常量)。忽略活塞和气缸热容量以及它们之间的摩擦。试计算气体的最终温度 T 和体积 V ,将结果用 T_0 、 V_0 、 m 、 A 、 ν 、 R 和重力加速度 g 表示。

【解】 若系统经历定容过程,则从外界吸收的热量为 $Q = \nu c_V \Delta T$ 。

内能是热力学系统的状态参量,可以用状态参量表示。由于理想气体的内能只与温度有关,所以若这样的理想气体系统经历定容过程,外界不对系统做功,按热力学第一定律,系统内能的增量就等于系统从外界吸收的热量,即 $\Delta U = Q$,因而有

$$\Delta U = \nu c_V \Delta T \quad (1)$$

所以只要知道了理想气体系统的初末态温度,不管其经历怎样的过程,都可以用式(1)计算其内能的变化。

本题中,系统处于真空中与外界与热量交换,则活塞下落过程中重力势能全部转化为气体

(3) 氮气和氧气的摩尔质量分别为 $28 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ 和 $32 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, 气缸内氮气的物质的量为

$$\Delta U = \Delta \nu c_V T = -1.5 \times \frac{5}{2} R T = -9349 \text{ J}$$

(2) 氮气的状态没有改变, 氧气的内能改变为

$$\Delta U_s = -\bar{Q} - W = -8.24 \times 10^5 + 0.37 \times 10^5 \text{ J} = -7.87 \times 10^5 \text{ J}$$

系统内能改变量为

$$W = -p \Delta V = -\Delta \nu R T = 1.5 R T = 3739.5 \text{ J}$$

氧气耗尽导致的体积减小可表示为 $p \Delta V = \Delta \nu R T$, 则外界做功为

大气对系统做功。

反应过程是等温、等压过程, $T = 300 \text{ K}$, $p = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ 。由于气体消耗, 体积减小, 外界

【解】(1) 由于氧气(O_2)耗尽, 生成 $1 \text{ mol Fe}_2\text{O}_3$, 所以容器中氧气的数量为 $3/2 \text{ mol}$ 。

体常量, T 是热力学温度; 缸内钢丝棉等固态物质与缸内气体相比, 所占体积很小, 可忽略不计。

计算时, 缸内气体作理想气体处理; 1 mol 氧气、氮气的内能均认为是 $5RT/2$, R 为普适气

(3) 缸内氮气密度的改变量。

(2) 缸内气体内能的改变量;

(1) 系统内能的改变量;

$8.24 \times 10^5 \text{ J}$ 。试求在此过程中:

Fe_2O_3 后, 氧气耗尽。已知这个过程是在 $1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$, 300 K 的条件下进行, 系统放出热量

地活动, 是气缸内气压恒定为 $1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$; 缸内有非常缓慢的化学反应, 假定反应生成 1 mol

现有一气缸, 缸内充有空气, 并装有一些由极细钢丝组成的钢丝棉; 气缸内的活塞能无摩擦

不计。

21. 空气是混合气体, 其质量的百分比是: 氮气约 76.9% , 氧气约 23.1% , 其他组分可忽略

值, 是错误的, 因而最终的答案也是错误的。

注: 参考文献[1]的第66页中, 式(2)写作 $mg \frac{V - V_0}{V} = \nu c_V (T - T_0)$, 等式左端实际为负

$$V = \frac{\nu R A}{2mgV_0 + 3\nu R T_0 A} = \frac{5\nu R A}{2mgV_0 + 3\nu R T_0 A} = \frac{5\nu R A}{2V_0 + 3\nu R T_0 A} = \frac{5mg}{5mg}$$

代入式(3), 得

$$T = \frac{mgV_0 + \nu c_V T_0 A}{\nu(c_V + R)A} = \frac{mgV_0 + \nu \left(\frac{3R}{2} + R\right)A}{2mgV_0 + 3\nu R T_0 A} = \frac{5\nu R A}{2mgV_0 + 3\nu R T_0 A} = \frac{5\nu R A}{2mgV_0 + 3T_0} + \frac{5}{3T_0}$$

由式(2)、式(3), 可得 $\nu c_V (T - T_0)A = mgV_0 - \nu R T A$, 即

$$V = \frac{\nu R T}{p} = \frac{mg}{p} \quad (3)$$

设末态时气体的压强为 p , 则 $p = \frac{mg}{V}$, 于是体积为

$$\nu c_V (T - T_0) = mg \frac{V_0 - V}{V} \quad (2)$$

的内能。即

$$\nu_{N_2} = \frac{M_{N_2}}{\mu_{N_2}} = \frac{M_{O_2}}{\mu_{N_2}} \frac{76.9}{23.1} = \frac{\nu_{O_2} \mu_{O_2}}{\mu_{N_2}} \frac{76.9}{23.1} = \nu_{O_2} \frac{32}{28} \frac{76.9}{23.1} = 5.7 \text{ mol}$$

反应前后,氮气的体积都是气缸的容积。反应前氮气的分压为 $p_{N_2} = \frac{\nu_{N_2}}{\nu_{N_2} + \nu_{O_2}} p = 0.79p$ 。

氮气反应前后的状态方程分别为 $p_{N_2} V = \nu_{N_2} RT$ 和 $pV_{N_2} = \nu_{N_2} RT$ 。于是反应前后氮气密度的改变为

$$\begin{aligned} \Delta\rho &= \rho - \rho_0 = \frac{M_{N_2}}{V_{N_2}} - \frac{M_{N_2}}{V} = \frac{\mu_{N_2} p}{RT} - \frac{\mu_{N_2} p_{N_2}}{RT} = \frac{\mu_{N_2} p}{RT} \left(1 - \frac{p_{N_2}}{p} \right) \\ &= \frac{28 \times 10^{-3} \times 1.01 \times 10^5}{8.31 \times 300} (1 - 0.79) \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} = 0.238 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \end{aligned}$$

22. 已知每摩尔单原子分子理想气体温度升高 1 K 时,内能增加 $1.50R$ (R 为普适气体常量)。现有 $\left(\frac{2.00}{8.31}\right)$ mol 的单原子分子理想气体,经历 ABCDA 循环过程,在 p - V 图上是一个圆,如图 1.69 所示,图中横坐标表示气体容积 V ,纵坐标表示气体压强 p 。

(1) 试分析该循环过程中哪一点 H 气体温度最高,并求出该温度 T_H 。

(2) 气体从状态 C 到状态 D 过程中,内能增量、外界对气体做功、气体吸热各为多少?

(3) 是否可能设计一个过程,使 n mol 的单原子分子理想气体,从图 1.70 所示的初态 $A(p_A, V_A, T_A)$ 到终态 $B(p_B = p_A, V_B = V_A, T_B)$, 气体净吸收的热量刚好等于内能的增量?

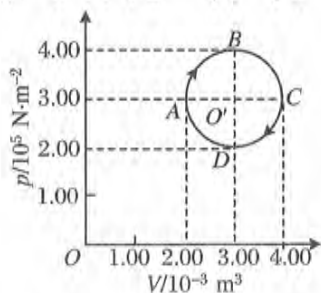


图 1.69 循环过程用圆表示

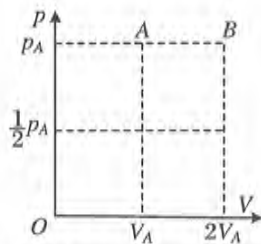


图 1.70 在图上设计一个吸热等于内能增量的过程

【解】 (1) 在 p - V 图上作等温线 $pV = \nu RT_H$, 该曲线与图中圆形循环曲线在最上部的切线是温度最高的点, 如图 1.71 所示。

在 p - V 图中, 等温线是双曲线, 该双曲线关于 I、III 象限的 45° 直线对称, 所以上述切点一定也在 45° 直线上。该切点的坐标值为

$$p_H = p_{O'} + \sin 45^\circ = \left(3 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$$

$$V_H = V_{O'} + \cos 45^\circ = \left(3 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

于是温度为

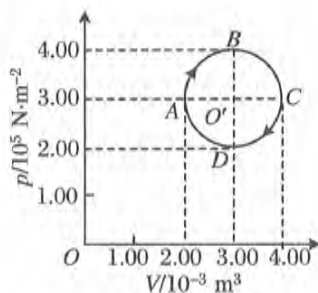
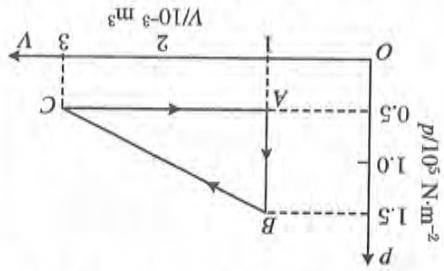


图 1.71 等温线与圆周相切

图 1.73 循环过程



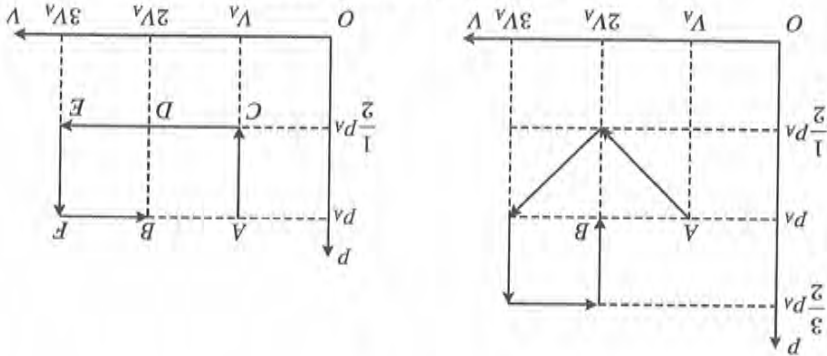
23. 0.1 mol 的理想气体, 经历如图 1.73 所示的循环过程, 由初态 A 等容升压到 B 态, 再沿 BC 直线膨胀到 C 态, 最后等压压缩到 A 态。

(1) 问此循环过程中, 气体所能达到的最高温度状态在何处?

(2) 求从 B 态至 C 态的过程中, 气体从外界吸收的热量是多少(不包括放出的)。

已知: 1 mol 这种理想气体的内能 $U = \frac{3}{2} RT$;
 $R = 8.31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, 为普适气体常量。

图 1.72 两个净吸热等于内能增量的热力学过程



过程都满足这一条件。

若体积增大表示外界对气体做负功, 体积减小表示外界对气体做正功。图 1.72 中所示的两个上 A→B 过程曲线下的面积等于 0 即可。这样的过程可以有多个。设计过程时需要注意到 (3) 过程中净吸收的热量刚好等于内能的增量, 则外界对气体做功为 0, 则只要在 p-V 图即对外放热 1121.5 J。

$$Q = \Delta U - W = -1121.5 \text{ J}$$

根据热力学第一定律, 气体吸热为

$$W = p_c(V_c - V_b) - 25\pi = 300 - 25\pi = 221.5 \text{ J}$$

所以 C→D 过程中外界对气体做功为

$$S = \pi(1 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2})(1 \times 10^{-3} \text{ m}^3) = 100\pi \text{ J}$$

外界做功等于 p-V 图上曲线下的面积, 图中整圆的面积为

$$\Delta U_{C \rightarrow D} = \nu R(T_D - T_C) = \nu 1.5R(T_D - T_C) = -900 \text{ J}$$

C→D 过程中其体内能的增量为

$$T_C = \frac{p_c V_c}{\nu R} = 600 \text{ K}, \quad T_D = \frac{p_D V_D}{\nu R} = 300 \text{ K}$$

(2) C、D 两点的温度可根据状态方程求得, 分别为

$$T_H = \frac{p_H V_H}{\nu R} = 687 \text{ K}$$

【解】 (1) 与上题相似,等温线与 BC 的切点为温度最高的点。直线的两点式方程为

$$\frac{p - p_c}{p_B - p_c} = \frac{V - V_c}{V_B - V_c}$$

得到在 p - V 图上 BC 的方程为

$$p = kV + c \quad (1)$$

其中 $k = -5 \times 10^7 \text{ Pa} \cdot \text{m}^{-3}$, $c = 2 \times 10^5 \text{ Pa}$ 。

等温方程为

$$pV = \nu RT_H \quad (2)$$

式(1)、式(2)联立,可得到

$$kV^2 + cV - \nu RT_H = 0$$

只有一个解的条件为 $c^2 + 4k\nu RT_H = 0$, 因而

$$T_H = -\frac{c^2}{4k\nu R} = 240.7 \text{ K}$$

(2) 热力学第一定律可写作 $Q = W + \Delta U$ 。 W 是气体对外所做的功,等于 $B \rightarrow C$ 曲线下的面积;而 ΔU 是其体内能的增量。

$B \rightarrow C$ 过程中,温度有一个最高点 T_H 。则刚开始,由于温度持续升高,其体内能增加, $\Delta U > 0$;而体积不断膨胀,对外做功, $W > 0$,因而 $Q > 0$,气体吸热。

经过温度最高点 T_H 之后,内能开始下降, $\Delta U < 0$;但对外做功依然持续, $W > 0$ 。若在某一小过程中, $W + \Delta U = 0$,则此后气体开始放热。

$dW = pdV$, $dU = nc_v dT$,根据状态方程 $pV = nRT$,可得

$$pdV + Vdp = nRdT$$

若 $nc_v dT = -pdV$,则 $c_v pdV + c_v Vdp = -RpdV$,即 $\frac{c_v + R}{c_v} \frac{dV}{V} = -\frac{dp}{p}$,该微分方程的解为 $\frac{c_v + R}{c_v} \ln V = -\ln p + C$,可化作 $pV^{\frac{c_v + R}{c_v}} = C'$,而 $c_v = \frac{3}{2}R$,所以有

$$pV^{\frac{5}{3}} = C' \quad (3)$$

即在 BC 线上,从满足式(3)的点开始,气体放热。这一点其实是绝热线与 BC 的交点。

对于本题,由于过程中压强和体积的关系遵循式(1),所以 $c_v pdV + c_v Vdp = -RpdV$ 可化为 $c_v pdV + c_v kVdV = -RpdV$,即 $(c_v + R)(kV + c) + c_v kV = 0$,解得 $V = \frac{5c}{8k}$ 。

在体积膨胀到此前的过程是吸热的。记该点为 M ,则

$$V_M = \frac{5c}{8k} = 2.5 \times 10^{-3} \text{ m}^3, \quad p_M = \frac{3c}{8} = 0.75 \times 10^5 \text{ Pa}$$

这一过程中,内能的增量为

$$\Delta U = \nu c_v (T_M - T_B) = \frac{c_v}{R} (p_M V_M - p_B V_B) = \frac{3}{2} (p_M V_M - p_B V_B)$$

对外界所做的功为

$$W = \frac{(p_B + p_M)(V_M - V_B)}{2}$$

所吸收的热量为

25. (10分预赛) 图 1.75 所示为一放在支架上的直立气缸, 其上部圆筒的体积为 V_m , 内有一质量为 m , 截面积为 $2S$ 的很薄的活塞 A。下部圆筒足够长, 内有一质量为 m , 截面积为

$$W = W_1 + W_2 = c_V \frac{p_1 V_1}{RT_1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{5}{2}} - 1 \right] T_1 + p_2 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{3}{2}} V_1 = 8.15 \times 10^4 \text{ J}$$

于是海水上升过程中对气体所做的功为

$$W_2 = p_2 V_2 = p_2 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{3}{2}} V_1$$

体所做的功为

第三过程中, 阀门 K_1 打开, 气体被全部压入工作室, 活塞附近气体压强不变, 则活塞对气

$$W_1 = \Delta U_1 = \nu c_V (T_2 - T_1) = c_V \frac{p_1 V_1}{RT_1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{5}{2}} - 1 \right] T_1$$

该过程中海水对气体所做的功等于气体内能的增量, 即

$$T_2 = \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} T_1 = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{3}{2}} T_1$$

系, 可得压缩后的体积为 $V_2 = \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{3}{2}} V_1$, 温度为

第二过程中, 气缸中的空气被绝热压缩, 直至压强达到 $p_2 = \sqrt{32} \times 10^5 \text{ Pa}$ 。按绝热过程关

$$\nu = \frac{RT_1}{p_1 V_1}$$

为 $T_1 = 280 \text{ K}$ 的空气。这部分气体的物质的量为

【解】 第一过程中, 活塞下降, 吸入压强为 $p_1 = 1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$, 体积为 $V_1 = 0.233 \text{ m}^3$, 温度 1 mol 理想气体温度升高 1 K 时, 内能改变为 $3R/2 (R = 8.31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$ 。

态绝热地改变到压强为 p_2 , 体积为 V_2 的状态过程中, 近似值遵循关系式 $p_1/p_2 = (V_2/V_1)^{5/3}$, 上升时所做功是多少? 已知空气从压强为 p_1 , 体积为 V_1 的状

变, 活塞的质量及活塞与筒壁间的摩擦忽略不计。问海水每次推动涡轮机工作。设打开 K_1 后, 活塞附近的压强近似保持空气, 直到气体全部被推入工作室为止, 同时工作室的空气推 $\sqrt{32} \times 10^5 \text{ Pa}$ 时, 阀门 K_1 才打开。 K_1 打开后, 活塞继续推动上升时, K_2 关闭, 海水推动活塞绝热压缩空气, 空气压强达到温度为 7°C 的空气 0.233 m^3 (空气可视为理想气体)。当海水缩后再推入工作室, 推动涡轮机带动发电机发电。当海水下降时, 阀门 K_1 关闭, K_2 打开, 设每次吸入压强为 $1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$, 空气能被吸进来, 压强能被吸进来, 压

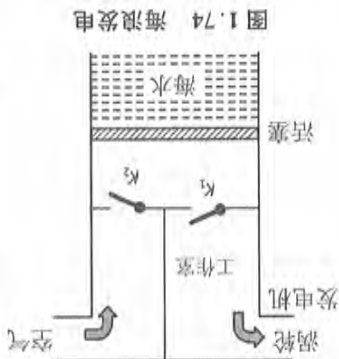


图 1.74 海浪发电

24. (11分复赛) 1964 年制成了世界上第一盏用海浪发电的航标灯, 它的气室示意图如

$$\bar{Q} = W + \Delta U = \frac{(p_B + p_M)(V_M - V_B)}{2} + \frac{3}{2}(p_M V_M - p_B V_B) = 225 \text{ J}$$

S 的活塞 B。两圆筒由一细而短的管道连通。活塞均可在各自的圆筒内无摩擦地上下滑动。活塞 A 的上方盛有 1 摩尔的理想气体, 活塞 A、B 之间盛有 2 摩尔的同种理想气体。达到平衡时, A 上方气体的温度为 T_0 , A、B 之间的气体的体积大于 V_m 。该理想气体每摩尔的内能 U 可用 $U = cT$ 来表示, c 为恒量, T 为热力学温度。设活塞、气缸壁、管道都是不导热的, 活塞 B 处的大气压强为 p_0 , 今通过上圆筒顶部的电热丝 L 对 A 上方气体缓慢加热, 若在整个过程中传递给 A 上方气体的热量为 Q_0 , 问:

- (1) 在达到平衡时, A 上方气体的温度 T_f 等于多少?
- (2) 在加热过程中, 活塞 B 对大气所做的功 W 等于多少?

【分析】 气缸是绝热的, 活塞可无摩擦自由滑动, 而外部大气压强恒定, 因而气缸下部中气体经历等压过程。在活塞 A 达到底部之前, 上部气缸中的气体经历的也是等压过程。如果过程结束之前, A 已到达底部, 则上部气体再经历一个等容过程。

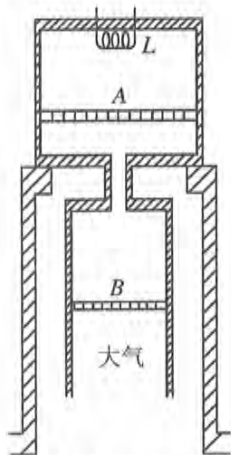


图 1.75 直立气缸

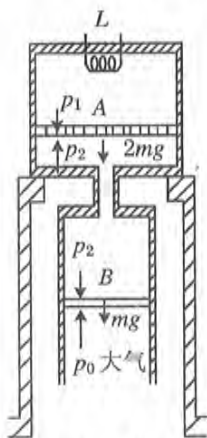


图 1.76 系统中的各个参数

【解】 如图 1.76 所示, 由于活塞 A、B 都可以无摩擦地滑动, 而活塞 B 之外是大气, 压强不变。因而上部筒中气体吸热膨胀, 对下筒中气体做功, 下筒中气体推动活塞 B, 对大气做功。下筒中气体的压强始终等于大气压 p_0 减去活塞因重力产生的压强 mg/S , 因而上部圆筒中的气体的压强也维持不变。

(1) 设上部圆筒中气体压强为 p_1 , 下部圆筒中气体压强为 p_2 , 根据力学平衡条件, 可得

$$p_2 = p_0 - \frac{mg}{S}, \quad p_1 = p_2 - \frac{2mg}{2S} = p_0 - \frac{2mg}{S}$$

初态时, 上下两部分气体的状态方程分别为

$$p_1 V_{10} = \nu_1 RT_0, \quad p_2 V_{20} = \nu_2 RT_0$$

其中 V_{10} 、 V_{20} 分别为各自气体的体积, $\nu_1 = \nu_2 = 1 \text{ mol}$ 。

设上部气体的体积变为 V_1 , $V_1 \leq V_m$ 。

若 $V_1 < V_m$, 则上部气体经历等压过程, 加热过程中活塞 A 对下筒做功为 $W_1 = p_1(V_1 - V_m)$ 。

活塞绝热, 上下两部分之间没有热量交换。

加热后上部气体的状态方程分别为 $p_1 V_1 = \nu_1 RT_f$, 则

$$W_1 = p_1(V_1 - V_{10}) = R(T_f - T_0)$$

上部气体内能增加为 $\Delta U_1 = c(T_f - T_0)$, 按热力学第一定律, 有

$$Q_0 = W_1 + \Delta U_1 = p_1(V_1 - V_{10}) + c(T_f - T_0) = R(T_f - T_0) + c(T_f - T_0)$$

解得

$$T_f = \frac{Q_0}{R + c} + T_0$$

若 $V_1 = V_m$, 则之后上部气体在温度达到 T_f 之后又经历等容过程, 这一过程所吸收的热量全部变为自身内能。

设当 $V_1 = V_m$, 温度为 T_1 , 可得 $T_1 = \frac{p_1 V_m}{R}$ 。上部气体吸热为 Q_1 , 则

【点评】加热过程缓慢,活塞移动很慢,其动能的变化可忽略,但由于活塞高度变化,系统重力势能改变。由于不知道气体的质量,忽略气体重力势能的变化。在上述分析过程中,由于是以气体的压强计算做功,所以活塞就不属于热力学体系,因而不需要计入活塞势能的变化。

$$Q_1 = p_1(V_m - V_{10}) + c(T_1 - T_0) = p_1 V_m - RT_0 + c\left(\frac{p_1}{V_m} - T_0\right) \\ = p_1 V_m \frac{c+R}{c+R} - (c+R)T_0 = \left[\left(p_0 - \frac{2mg}{S} \right) \frac{R}{V_m} - T_0 \right] (c+R) \\ \text{等容过程中, } \Delta U_1 = Q_0 - Q_1, \text{ 即}$$

$$c(T_f - T_1) = Q_0 - \left[\left(p_0 - \frac{2mg}{S} \right) \frac{R}{V_m} - T_0 \right] (c+R) \\ \text{最终的温度变为}$$

$$T_f = T_1 + \frac{1}{c} \left\{ Q_0 - \left[\left(p_0 - \frac{2mg}{S} \right) \frac{R}{V_m} - T_0 \right] (c+R) \right\}$$

(2) 若 $V_1 < V_m$, $T_f = \frac{Q_0}{R+c} + T_0$, 加热过程中 A 中体积膨胀为

$$V_1 - V_{10} = \frac{p_1}{R} (T_f - T_0) = \frac{p_0 - \frac{2mg}{S}}{R} \frac{Q_0}{R+c}$$

然而由于下筒气体压强不变,而活塞 A、B 又是绝热的,因此推动下筒中气体整体运动,而下筒中气体性质保持不变,活塞 B 推开大气的体积也为 $V_1 - V_{10}$, 且由于 p_2 保持不变,则下筒中气体对外做功为

$$W_2 = p_2(V_1 - V_{10}) = \left(p_0 - \frac{mg}{S} \right) \left[\frac{Q_0}{R} \frac{p_0 - \frac{2mg}{S}}{R+c} \right]$$

然而题中所要求的是活塞 B 对外做功,活塞克服大气压力做功,则

$$W_B = p_0(V_1 - V_{10}) = p_0 \left[\frac{Q_0}{R} \frac{p_0 - \frac{2mg}{S}}{R+c} \right]$$

若 $V_1 = V_m$, 上部气体体积的膨胀为 $V_m - V_{10} = V_m - V_{10} = V_m - \frac{p_1}{RT_0} = V_m - \frac{p_0 - \frac{2mg}{S}}{RT_0}$

下筒中气体对外做功为

$$W_2 = \left(p_0 - \frac{mg}{S} \right) \left[V_m - \frac{RT_0}{2mg} \left(p_0 - \frac{2mg}{S} \right) \right]$$

活塞 B 对外做功为

$$W_B = p_0 \left[V_m - \frac{RT_0}{2mg} \left(p_0 - \frac{2mg}{S} \right) \right]$$

26. (28届复赛) 如图 1.77 所示为圆柱形气缸, 气缸壁绝热, 气缸的右端有一小孔与大气相通, 大气的压强为 p_0 。用一热容量可忽略的导热隔板 N 和一绝热活塞 M 将气缸分为 A 、 B 、 C 三室, 隔板与气缸固连, 活塞相对气缸可以无摩擦地移动但不漏气。气缸的左端 A 室中有一电加热器 Ω 。已知在 A 、 B 室中均盛有 1 mol 同种理想气体, 电加热器加热前, 系统处于平衡状态, A 、 B 两室中气体的温度均为 T_0 , A 、 B 、 C 三室的体积均为 V_0 。现通过电加热器对 A 室中气体缓慢加热, 若提供的总热量为 Q_0 , 试求 B 室中气体的末态体积和 A 室中气体的末态温度(设 A 、 B 两室中气体 1 mol 的内能为 $U = 5RT/2$, 式中 R 为普适气体常量, T 为绝对温度)。

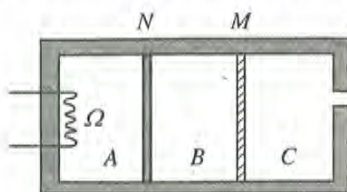


图 1.77 带活塞和隔板的容器

【解】 根据题设, 可知初始, A 、 B 两容器中气体的状态相同, 而 B 室的压强又与 C 室相同, C 室与大气相通, 所以 A 、 B 两室中气体初态的压强均等于大气压 p_0 。 A 、 B 两室中气体的状态方程分别为

$$p_0 V_0 = \nu_1 R T_0, \quad p_0 V_0 = \nu_2 R T_0$$

加热过程中, 由于隔板 N 导热, 所以 A 、 B 两室的温度始终相同。 A 室气体经历等容升温过程, 内能增加, 不对外做功; B 室中气体经历等压膨胀过程, 内能增加, 并对外做功。

B 室中气体膨胀, 推动活塞向右移动, 将会有两种可能的情况: 一是加热过程结束而活塞尚未到达 C 室右端, 或恰好到达 C 室右端; 另一种是活塞已到达 C 室右端而加热过程尚未结束。这两种情况要分别讨论。

末态, A 室气体的状态方程为 $p_A V_0 = \nu_1 R T$, A 室气体内能的增量为

$$\Delta U_1 = \nu_1 c (T - T_0)$$

B 室气体的状态方程为 $p_0 V_B = \nu_2 R T$ 。

第一种情况: $V_B \leq 2V_0$, 则 B 室中气体推动活塞 M 对外所做的功为

$$W_2 = p_0 (V_B - V_0) = \nu_2 R (T - T_0)$$

B 室气体内能的增量为

$$\Delta U_2 = \nu_2 c (T - T_0)$$

按热力学第一定律

$$Q_0 = \Delta U_1 + \Delta U_2 + W_2 = [(\nu_1 + \nu_2)c + \nu_2 R](T - T_0)$$

根据题中所给参数, $\nu_1 = \nu_2 = 1$, $c = \frac{5R}{2}$, 可得两室中气体末态温度为

$$T = T_0 + \frac{Q_0}{(\nu_1 + \nu_2)c + \nu_2 R} = T_0 + \frac{Q_0}{6R}$$

A 室中气体末态压强为

$$p_A = \frac{\nu_1 R T}{V_0} = \frac{\nu_1 R \left(T_0 + \frac{Q_0}{6R} \right)}{V_0} = \frac{\nu_1 R T_0}{V_0} + \frac{\nu_1 Q_0}{6R V_0} = p_0 + \frac{Q_0}{6R V_0}$$

B 室中气体末态体积为

$$V_B = \frac{\nu_2 R T}{p_0} = \frac{\nu_2 R T_0}{p_0} + \frac{\nu_2 Q_0}{6p_0} = V_0 + \frac{Q_0}{6p_0}$$

或者

【点评】理想气体状态方程为 $pV = \nu RT$, 其中只需 3 个确定的参量, 另一个参量就是确定的。本题中给出了 4 个确定的参量, 显然有些不妥。

$$T = \frac{4}{5} T_0 + \frac{Q_0}{5R}$$

温度为

$$Q_0 = (\nu_1 + \nu_2)c(T - T_0) + \nu_2 RT_0 = 5RT - 4RT_0$$

律为

这一过程中, 系统对外做功为 $W_2 = p_0(V_B - V_0) = p_0 V_0 = \nu_2 RT_0$, 所以热力学第一定律另一种情况: $Q_0 > 6RT_0$, 活塞运动停止后, 两室气体均等容升温, 仅有内能增加。

若活塞恰好到达 C 室右端, 则 $V_B = 2V_0$, 可得 $Q_0 = 6RT_0$ 。即在 $Q_0 \leq 6RT_0$ 的情况下, 过程结束时活塞尚未到达或恰好到达 C 室右端。

$$V_B = \frac{T}{T_0} V_0 = \left(1 + \frac{Q_0}{6RT_0}\right) V_0$$

27. (29 届复赛) 如图 1.78 所示, 刚性绝热容器 A 和 B 水平放置, 一根带有绝热阀门和多孔塞的绝热刚性细短管把容器 A、B 相互连通。初始时阀门

是关闭的, A 内装有某种理想气体, 温度为 T_1 ; B 内为真空。现将阀门打开, 气体缓慢通过多孔塞后进入容器 B 中。当容器 A 中气体的压强降到与初始时 A 中气体压强之比为 α 时, 重新关闭阀门。设最后留在容器 A 内的那部分气体与进入容器 B 中的气体之间始终无热量交换, 求容器 B 中气体质量与气体总质量之比。已知: 1 mol 理想气体的内能为 $u = CT$, 其中 C 是已知常量, T 为绝对温度; 一定质量的理想气体经历缓慢的绝热过程时, 其压强 p 与体积 V 满足过程方程 $pV^{C/\nu} = \text{常量}$, 其中 R 为普适气体常量。重力影响和连接管体积均忽略不计。

【解】将 A 中气体分为体积为 V_1 和 V_2 的两部分, 即 $V_A = V_1 + V_2$, 物质的量分别为 ν_1 和 ν_2 , 即 $\nu = \nu_1 + \nu_2$, 如图 1.79 所示。

阀门开启之前, 容器 A 中气体的状态方程为

$$p_1 V_A = \nu RT_1 \quad (1)$$

体积为 V_1 部分气体的状态方程为

$$p_1 V_1 = \nu_1 RT_1 \quad (2)$$

由式(1)、式(2), 可得

$$\frac{\nu_2}{\nu_1 + \nu_2} = \frac{V_2}{V_A - V_1} = \frac{V_2}{V_A} = 1 - \frac{V_1}{V_A} \quad (3)$$

设末态容器 A 中气体的温度为 T_A , 则 A 容器中气体的状态方程为

$$p_A V_A = \nu_1 RT_A \quad (4)$$

打开阀门后, V_2 部分进入容器 B, 而 V_1 部分仍留在容器 A 中, 由于这两部分之间没有热量交换, 所以 V_1 部分经历绝

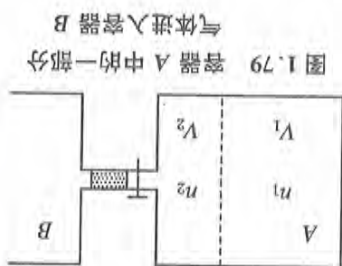


图 1.79 容器 A 中的一部分气体进入容器 B

热过程。记 $\gamma = \frac{C+R}{C}$, 则

$$p_1 V_1^\gamma = p_A V_A^\gamma \quad (5)$$

由于 $p_A = \alpha p_1$, 所以由式(5)可得

$$\frac{V_1^\gamma}{V_A^\gamma} = \frac{p_A}{p_1} = \alpha \quad (6)$$

将式(6)代入式(3), 可得到

$$\frac{\nu_2}{\nu} = \frac{\nu_2}{\nu_1 + \nu_2} = 1 - \alpha^{\frac{1}{\gamma}} = 1 - \alpha^{\frac{C}{C+R}} \quad (7)$$

而竞赛组织者所给出的试题答案为 $\frac{\nu_2}{\nu} = \frac{2 - \alpha^{\frac{R}{C+R}} - \alpha^{\frac{C}{C+R}}}{2 - \alpha - \alpha^{\frac{R}{C+R}}}$, 两者明显不同。

以下对竞赛组织者所给出的答案作一简单分析。首先将原始答案列在下面。

第 29 届全国中学生物理竞赛复赛试卷参考答案及评分标准:

设重新关闭阀门后容器 A 中气体的物质的量为 ν_1 , B 中气体的物质的量为 ν_2 , 则气体总物质的量为

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 \quad (1)$$

把两容器中的气体作为整体考虑, 设重新关闭阀门后容器 A 中气体温度为 T_1' , B 中气体温度为 T_2 , 重新关闭阀门之后与打开阀门之前气体内能的变化可表示为

$$\Delta U = \nu_1 C(T_1' - T_1) + \nu_2 C(T_2 - T_1) \quad (2)$$

由于容器是刚性绝热的, 按热力学第一定律有

$$\Delta U = 0 \quad (3)$$

令 V_1 表示容器 A 的体积, 初始时 A 中气体的压强为 p_1 , 关闭阀门后 A 中气体压强为 αp_1 , 由理想气体状态方程可知

$$\nu = \frac{p_1 V_1}{RT_1} \quad (4)$$

$$\nu_1 = \frac{(\alpha p_1) V_1}{RT_1'} \quad (5)$$

由以上各式可解得

$$T_2 = \frac{(1 - \alpha) T_1 T_1'}{T_1' - \alpha T_1}$$

由于进入容器 B 中的气体与仍留在容器 A 中的气体之间没有热量交换, 因而在阀门打开到重新关闭的过程中留在容器 A 中的那部分气体经历了一个绝热过程, 设这部分气体初始时体积为 V_{10} (压强为 p_1 时), 则有

$$p_1 V_{10}^{\frac{C+R}{C}} = (\alpha p_1) V_1^{\frac{C+R}{C}} \quad (6)$$

利用状态方程可得

$$\frac{p_1 V_{10}}{T_1} = \frac{(\alpha p_1) V_1}{T_1'} \quad (7)$$

由式(1)~(7)得, 阀门重新关闭后容器 B 中气体质量与气体总质量之比

$$\frac{\nu_2}{\nu} = \frac{2 - \alpha^{\frac{R}{C+R}} - \alpha^{\frac{C}{C+R}}}{2 - \alpha - \alpha^{\frac{R}{C+R}}} \quad (8)$$

设弹簧的形变为 x_0 ，而由于 $Mg + p_0 S - p_1 S = kx_0$ ，可得

$$p_1 L_1 S = \nu RT_1 \quad (1)$$

【解】初态气体的体积为 $V_1 = L_1 S$ ，状态方程为

的气缸壁是可以导热的，弹簧始终处于弹性限度范围之内。
缸内气体的热量。计算中重力加速度取 $g = 10.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ，并假设活塞是绝热的，铅柱与活塞开始一起向下运动到铅柱刚离开活塞的整个过程中，外界传给气
 $T_2 = 290 \text{ K}$ ，铅柱最终上升到活塞初始位置上方 $h = 7.80 \text{ cm}$ 高度。试求自
碰后铅柱在运动过程中某一时刻又与活塞分开，此时气缸内气体的温度
高处自由落下，与活塞发生完全非弹性碰撞，碰撞时间极短而可忽略。已知
 $S = 25.0 \text{ cm}^2$ 。现有一质量 $m = 3.00 \text{ kg}$ 的铅柱自活塞正上方 $H = 80.0 \text{ cm}$
柱长 $L_1 = 50.0 \text{ cm}$ 。而活塞上方大气压强 $p_0 = 1.00 \times 10^5 \text{ Pa}$ ，活塞的截面积
计。平衡时，测得气缸内气体温度为 $T_1 = 300 \text{ K}$ ，压强 $p_1 = 1.40 \times 10^5 \text{ Pa}$ ，气
底，如图 1.80 所示。活塞与气缸壁间的摩擦及弹簧的体积均可忽略不
与一倔强系数 $k = 300 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ 的轻质弹簧相连，弹簧的下端固定在气缸
 $3RT/2$ ，其中 R 为普适气体常量， T 为热力学温度。质量 $M = 7.00 \text{ kg}$ 的活
每摩尔这种气体的内能是 $E =$

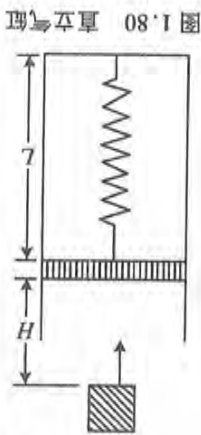


图 1.80 直立气缸

28. (13 届决赛) 直立的气缸内装有一定质量的理想气体。每摩尔这种气体的内能是 $E =$
实际上，由于这是一个气体向真空绝热膨胀的过程，整个系统既不对外做功，与外界也没有
热交换，系统内两部分气体之间也没有热交换。所以只要将气体分成两部分，并对仍留在原来
容器中的气体用状态方程和绝热过程方程进行分析即可。对于进入 B 中的气体，则不能运用
绝热过程的方程，因为这些气体是由 A 逐渐进入 B 中的。在这一过程中，两容器中的气体状态
不同，不处在平衡态，当然不能用同样的参量描述整体的状态。

由此足以证明所给出的答案是错误的。错误的原因是出题者列出了太多的无关公式，并且在
计算的过程中出现了错误。

于是应该得到

$$\frac{V_{10}}{V_1} = a \frac{c^2}{c^2 \kappa}$$

再由式(6)得到

$$\frac{\nu_1}{V_1} = \frac{\nu}{V_1}$$

于是有

$$\frac{T_1}{V_1} = \frac{a T_1}{V_1}$$

再由式(7)，得到

$$\frac{\nu_1}{T_1} = \frac{a T_1}{T_1}$$

【对参考答案的分析】由式(4)、式(5)，可得

$$x_0 = \frac{Mg + p_0 S - p_1 S}{k} = -0.1 \text{ m} \quad (2)$$

由于以重力方向为正,如图 1.81 所示,式(2)说明弹簧伸长了 0.1 m。

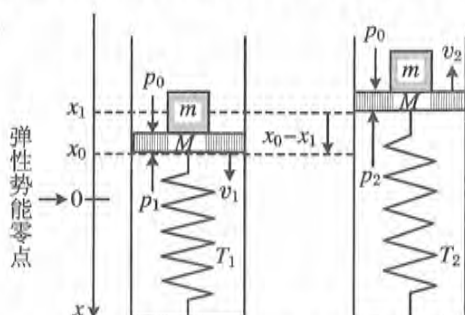


图 1.81 弹性势能与重力势能分析

铅柱落下与活塞碰撞,在碰撞前的瞬间,铅柱的动量为 $mv_0 = m\sqrt{2gH}$ 。由于碰撞过程极短,碰撞瞬间,重力、弹性力、气体压力的合力为 0,所以这些力的冲量可忽略,因而碰撞过程中动量守恒。设碰撞后瞬间,两者共同向下运动的速度为 v_1 ,则 $mv_0 = (M+m)v_1$,可得到

$$v_1 = \frac{mv_0}{M+m} = \frac{m\sqrt{2gH}}{M+m} \quad (3)$$

碰撞后,两者一起向下运动,弹簧和气体被压缩,到达极限位置后,又一同向上运动,由于弹簧伸长,活塞受向下的力逐渐增大,至某一位置,两者分开。分离之前,两者的加速度、速度相同;分离瞬间,铅柱只有重力加速度;而活塞所受向下的弹性力大于两侧气体的压力差(向上),因而活塞向下的加速度大于重力加速度。

所以分离时刻,弹性力与活塞两侧压力差相等,为 $f = (p_0 - p_2)S$,为了与前面结果一致,仍取向下为正方向。则弹簧的形变为

$$x_1 = \frac{(p_0 - p_2)S}{k} \quad (4)$$

此时气体的体积为 $V_2 = [L_1 - (x_1 - x_0)]S$,状态方程为

$$p_2(L_1 + x_0 - x_1)S = \nu RT_2 \quad (5)$$

结合式(1)、式(5),即得

$$p_2 = \frac{\nu RT_2}{(L_1 + x_0 - x_1)S} = \frac{p_1 L_1 T_2}{(L_1 + x_0 - x_1)T_1} \quad (6)$$

将式(6)代入式(4),整理后得到

$$kT_1 x_1^2 - [k(L_1 + x_0) + p_0 S]T_1 x_1 + [p_0(L_1 + x_0)T_1 - p_1 L_1 T_2]S = 0$$

代入已知参数 k, L_1, S, T_1, T_2 以及由式(2)所得的 x_0 ,上述方程变为

$$360x_1^2 - 444x_1 - 83 = 0$$

解得 $x_1 = -0.165 \text{ m}, 1.40 \text{ m}$,显然应当取 $x_1 = -0.165 \text{ m}$,即弹簧伸长了 0.165 m。

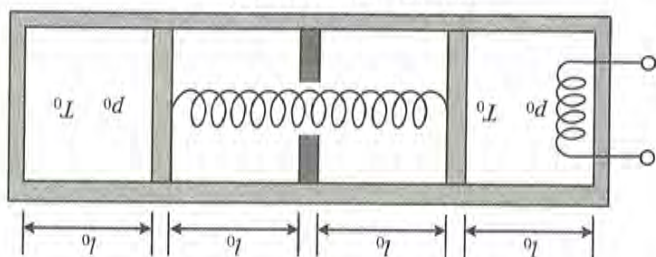
以下应用机械能和热力学第一定律进行讨论。

以活塞初始位置为重力势能零点。设铅柱与活塞刚脱离时速度为 v_2 ,则

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + mg(x_0 - x_1) = mgh'$$

【解】 加热过程中,左室中气体绝热膨胀,活塞右移,右室活塞也右移,右室中的气体绝热

图 1.82 两活塞以弹簧连接



气。计算过程各量均取 3 位有效数字。

吸热为 $Q = 1000 \text{ J}$, 左、右两室气体的温度和压强。设活塞与筒壁的摩擦可忽略不计, 且不漏的关系为 $E_0 = RT/(\alpha - 1)$, 式中 T 为气体的热力学温度, R 为普适气体常量。求当左室气体的 $7.40 \times 10^{-2} \text{ m}$; 理想气体的绝热过程遵循的规律为 $pV^\alpha = \text{恒量}$; 筒内每摩尔气体的内能与温度 $l_0 = 1.00 \times 10^{-1} \text{ m}$; 如果通过加热器对左室气体不断地徐徐加热, 弹簧长度的最大改变量 $l_m =$ 器未加热前两室气体均处于平衡, 温度均为 $T_0 = 300 \text{ K}$, 压强均为 p_0 ; 活塞的位置如图所示, 中分别盛有同种的理想气体, 左室中有一电加热器。已知: 大气压强 $p_0 = 1.00 \times 10^5 \text{ Pa}$; 电加热带孔的固定隔板, 筒壁上有开口, 与大气相通。整个装置的结构及尺寸如图。容器左、右端气室圆筒内有两个以弹簧相连的绝热活塞, 弹簧的劲度系数为 $k = 1.50 \times 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, 筒中部有一

$$Q = \Delta E + \Delta U, \quad \left(p_0 + \frac{mg}{S}\right)L_1 S = \nu RT_1$$

根据热力学第一定律, 可得

$$\Delta U = \frac{5}{2} p_1 L_1 S (T_2 - T_1)$$

气体内能的变化为 $\Delta U = \frac{5\nu R}{2} (T_2 - T_1)$, 而 $\nu = \frac{p_1 L_1 S}{RT_1}$, 所以有

$$W = p_0 S (x_0 - x_1)$$

活塞克服大气压做的功为

$$= \frac{1}{2} kx_1^2 - \frac{1}{2} kx_0^2 + (M + m)gh' - \frac{m^2 gH}{M + m}$$

$$- \frac{1}{2} (M + m) \frac{m^2}{(M + m)^2} 2gH$$

$$= \frac{1}{2} kx_1^2 - \frac{1}{2} kx_0^2 + (M + m)g(x_0 - x_1) + (M + m)g(h' + x_1 - x_0)$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} kx_1^2 + (M + m)g(x_0 - x_1) + \frac{1}{2} (M + m)v_2^2 - \frac{1}{2} kx_0^2 - \frac{1}{2} (M + m)v_1^2$$

从铅柱与活塞碰撞后一起向下运动的瞬间开始, 至两者刚刚分离, 系统机械能的变化为

$$\text{可得 } v_2^2 = 2g(h' + x_1 - x_0)。$$

压缩。在左活塞到达隔板之前,两室中气体的压强相等。有可能过程已结束而左活塞尚未到达隔板处,也有可能左活塞已到达隔板处而过程尚未结束。如果气体的性质已知,即题中的绝热常数 α 已知,则可以作出判断。但题中并未给出 α 的数值,所以无法判断。题中所述的弹簧长度的最大改变量是指左活塞到达隔板处弹簧的最大压缩量,那么出题者的用意就是过程尚未结束左活塞已到达隔板处,这时弹簧的压缩量是 l_m ,据此算出气体的绝热常数 α 。

初态时,两室气体状态相同,状态方程为

$$p_0 V_0 = \nu RT_0$$

左活塞到达隔板处,弹簧被压缩 l_m ,弹性力为 $F = kl_m$,两室中气体的压强变为

$$p_1 = p_0 + \frac{kl_m}{S} = 1.65 \times 10^5 \text{ Pa}$$

左右两室中气体的体积分别变为

$$V_1 = 2V_0, \quad V_2 = Sl_m$$

右室中气体的绝热方程为 $p_0 (2l_0 S)^\alpha = \left(p_0 + \frac{kl_m}{S}\right) (l_m S)^\alpha$,可算得

$$\alpha = \ln\left(1 + \frac{kl_m}{p_0 S}\right) / \ln \frac{2l_0}{l_m} = 1.67$$

设左活塞刚到达隔板时两室中气体的温度分别是 T_1 、 T_2 ,则气体的状态方程分别变为

$$\left(p_0 + \frac{kl_m}{S}\right) 2l_0 S = \nu RT_1, \quad \left(p_0 + \frac{kx}{S}\right) l_m S = \nu RT_2$$

结合初态时的状态方程,可算得

$$T_1 = 2T_0 \left(1 + \frac{kl_m}{p_0 S}\right) = 990 \text{ K}, \quad T_2 = \frac{l_m T_0}{l_0} \left(1 + \frac{kx}{p_0 S}\right) = 367 \text{ K}$$

这一过程中,弹簧被压缩,弹性势能增量为

$$\Delta E_1 = \frac{1}{2} kl_m^2 = 41 \text{ J}$$

有体积为 $l_m S$ 的大气被排出,所以活塞对大气做功为

$$W = p_0 l_m S = 126 \text{ J}$$

而两室中气体内能的增量为

$$\Delta U = \nu c [(T_1 - T_0) + (T_2 - T_0)] = \frac{p_0 l_0 S}{R} \frac{R}{\alpha - 1} (T_1 + T_2 - 2T_0) = 640 \text{ J}$$

按热力学第一定律,有

$$Q_1 = \Delta U + W + \Delta E_1 = 807 \text{ J}$$

这一阶段结束后,右室中气体的状态不再变化,左室气体等容膨胀。

$$Q - Q_1 = \Delta U_2 = \nu c (T'_1 - T_1)$$

算得温度为

$$T'_1 = T_1 + \frac{Q - Q_1}{\nu c} = 1.22 \times 10^3 \text{ K}$$

压强为

$$p'_1 = p_1 \frac{T'_1}{T_1} = 2.03 \times 10^5 \text{ Pa}$$

放热为
于是有

$$\Delta Q = Q_1 - Q_2 = W_1 - W_2 + E_2$$

$$Q_1 = W_1 - \Delta U$$

$$W_1 = (pS + mg)\Delta h_1 = nRT \left\{ 1 - \alpha \left[1 - \frac{(pS + mg)^2}{k(\alpha - 1)nRT} \right] \right\}$$

大气压和活塞的重力对气体做功为

$$\Delta h_1 = h_0 - h_1 = \frac{nRT}{pS + mg} - \frac{pS + mg}{nRT} \left[1 - \alpha \left[1 - \frac{(pS + mg)^2}{k(\alpha - 1)nRT} \right] \right]$$

活塞移动(高度改变)

$$h_1 = \frac{nRT'}{pS + mg} = \frac{pS + mg}{nRT'} \left[1 - \alpha \left[1 - \frac{(pS + mg)^2}{k(\alpha - 1)nRT} \right] \right]$$

左侧气缸中的气体等压压缩, 活塞高度变为

$$\text{放出的热量为 } Q_2 = W_2 - \Delta U - E_2$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} k(1 - \alpha)^2 h_0^2 = \frac{1}{2} k(1 - \alpha)^2 \left(\frac{pS + mg}{nRT} \right)^2$$

弹簧势能的增量为

$$W_2 = (pS + mg)(1 - \alpha)h_0 = (1 - \alpha)nRT$$

大气压和活塞的重力对气体做功为

$$T' = \alpha T \left[1 - \frac{k(\alpha - 1)nRT}{(pS + mg)^2} \right]$$

将式(1)代入式(2), 可解得

$$[pS + mg - k(\alpha - 1)h_0] \alpha h_0 = nRT'$$

(2)

状态方程为

$$p + \frac{mg - k(\alpha - 1)h_0}{S}$$

右侧气缸中气体压强减小, 活塞高度为 $h_2 = \alpha h_0$, 弹簧形变为 $x = (1 - \alpha)h_0$, 压强为

$$\Delta U = nc_V \Delta T$$

均为

设最后两气缸中气体温度降低到 T' , 内能的变化量

$$h_0 = \frac{pS + mg}{nRT} \quad (1)$$

【解】开始时, 两气缸中气体的状态相同, 活塞的高度为

气缸的气体体积是原来的 α 倍, 求两边气体放热之差。处于原长, 两气缸中的气体缓慢降低到某相同的温度, 右积是 S , 开始温度都是 T , 弹簧的劲度系数是 k , 开始弹簧

同样理想气体封闭在内直径相同的气缸内, 气缸的截面

30. (22届决赛) 如图 1.83 所示, 大气压强为 p , 质量都是 m 的活塞把物质的量都是 n

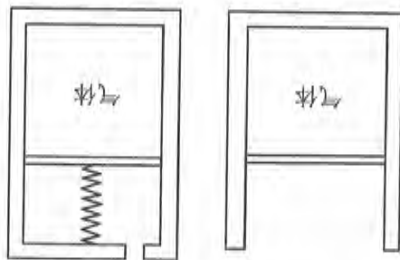


图 1.83 两个气缸

$$\begin{aligned}
 &= nRT \left\{ 1 - \alpha \left[1 - \frac{k(\alpha - 1)nRT}{(pS + mg)^2} \right] \right\} - (1 - \alpha)nRT - \frac{1}{2}k(1 - \alpha)^2 \left(\frac{nRT}{pS + mg} \right)^2 \\
 &= \left(\frac{nRT}{pS + mg} \right)^2 \left[k\alpha(\alpha - 1) - \frac{1}{2}k(1 - \alpha)^2 \right] \\
 &= k \left(\frac{nRT}{pS + mg} \right)^2 \left[\alpha(\alpha - 1) - \frac{1}{2}(1 - \alpha)^2 \right] \\
 &= \frac{k(\alpha^2 - 1)}{2} \left(\frac{nRT}{pS + mg} \right)^2
 \end{aligned}$$

31. (24 届决赛) 如图 1.84 所示, 在一个竖直放置的封闭的高为 H 、内壁横截面积为 S 的绝热气缸内, 有一质量为 m 的绝热活塞 A 把缸内分成上、下两部分。活塞可在缸内贴缸壁无摩擦地上下滑动。缸内顶部与 A 之间串联着两个劲度系数分别为 k_1 和 k_2 ($k_1 \neq k_2$) 的轻质弹簧, A 的上方为真空; A 的下方盛有一定质量的理想气体。已知系统处于平衡状态, A 所在处的高度(其下表面与缸内底部的距离)与两弹簧总共的压缩量相等, 皆为 $h_1 = H/4$ 。现给电炉丝 R 通电流对气体加热, 使 A 从高度 h_1 开始上升, 停止加热后系统达到平衡时活塞的高度为 $h_2 = 3H/4$ 。求此过程中气体吸收的热量 ΔQ 。已知当体积不变时, 每摩尔该气体温度每升高 1 K 吸收的热量为 $3R/2$, R 为普适气体常量。在整个过程中假设弹簧始终遵从胡克定律。

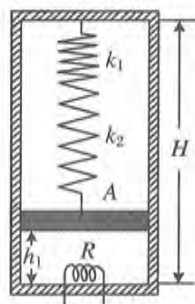


图 1.84 串联弹簧

【解】 轻质弹簧串联, 各处受力相等, 即 $f = k_1 \Delta x_1 = k_2 \Delta x_2$, 总的形变为

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = \frac{f}{k_1} + \frac{f}{k_2}$$

于是弹性系数(即劲度系数)为

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

弹簧的原长为 H , 初始时形变 $\frac{H}{4}$, 弹性力为 $f_1 = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \frac{H}{4}$; 过程结束时形变为 $\frac{3H}{4}$, 活塞上升 $\frac{H}{2}$, 弹性力为 $f_2 = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \frac{3H}{4}$ 。

过程中机械能的改变为

$$\Delta E = mg \frac{H}{2} + \frac{1}{2}k \left(\frac{3H}{4} \right)^2 - \frac{1}{2}k \left(\frac{H}{4} \right)^2 = mg \frac{H}{2} + \frac{kH^2}{4} = (2mg + kH) \frac{H}{4}$$

研究对象为气缸中的气体, 初态时, $p_1 = \frac{f_1 + mg}{S}$, $V_1 = \frac{HS}{4}$, 状态方程为

$$p_1 V_1 = \nu RT_1$$

末态时, $p_2 = \frac{f_2 + mg}{S}$, $V_2 = \frac{3HS}{4}$, 状态方程为

$$p_2 V_2 = \nu RT_2$$

已知气体的定容摩尔热容为 $c_V = \frac{3R}{2}$, 气体内能的增量为

$$\Delta U = \nu c_V (T_2 - T_1) = \frac{c_V}{R} (p_2 V_2 - p_1 V_1) = \frac{3}{2} \left(\frac{f_2 + mg}{S} \frac{3HS}{4} - \frac{f_1 + mg}{S} \frac{HS}{4} \right)$$

$$P = k \frac{(T_1 - T_2)^2}{T_2} \frac{l}{S} = 0.75 \times \frac{25^2}{5} \times \frac{268.2 \times 10^{-3}}{5} = 4.37 \text{ (kW)}$$

要维持室内温度不变,则 $H = Q$, 即 $P \frac{T_1 - T_2}{T_2} = k \frac{l}{T_1 - T_2} S$, 制冷机消耗的功率为

$$H = k \frac{l}{T_1 - T_2} S$$

而单位时间内通过窗玻璃向内传输的热量为

$$\dot{Q} = \eta P = P \frac{T_1 - T_2}{T_2}$$

室内抽走的热量为

【解】(1) 在理想情况下,若制冷机的功率为 P , 则制冷效率为 $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_2}$, 单位时间内从

0.50元。若该热泵仍然工作 12 h, 问这时的电费比上一间单层玻璃情形节省多少?
 (2) 若将上述玻璃板换为“双层玻璃板”, 两层玻璃的厚度均为 2.00 mm, 玻璃板之间夹有厚度 $l_0 = 0.50$ mm 的空气层, 假设空气的热导率 $k_0 = 0.025 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, 电费仍为每度

下该热泵工作 12 h 需要多少电费?

起的。已知该玻璃的热导率 $k = 0.75 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, 电费为每度 0.50 元。试求在理想情况(1) 假设该房间向外散热是由面向室外的面积 $S = 5.00 \text{ m}^2$ 、厚度 $l = 2.00$ mm 的玻璃板引

其中 k 称为热导率, 取决于导热层材料的性质。

$$H = k \frac{\Delta T}{l} S$$

热量为

度为 l , 面积为 S , 两侧温差的大小为 T , 则单位时间内通过导热层由高温处传导到低温处的热量从室内传递到室外。本题只考虑传导方式的传热, 它服从以下的规律: 设一块导热层, 其厚度为 $-5.00 \text{ }^\circ\text{C}$ 的情况下, 使某房间内的温度保持在 $20.00 \text{ }^\circ\text{C}$ 。由于室内温度高于室外, 故将有式中“=”对应于理论上的理想情况。某制冷机在冬天作为热泵使用(即取空调机), 在室外温

$$\frac{\dot{Q}}{W} \leq \frac{T_1 - T_2}{T_2}$$

温处吸取的热量 Q , 外界对制冷机做的功 W , 则有

知当制冷机工作在绝对温度为 T_1 的高温处和绝对温度为 T_2 的低温处之间时, 若制冷机从低做功所得到的能量一起送到高温处的机器; 它能使低温处的温度降低, 高温处的温度升高。已

32. (25 届决赛) 制冷机是通过外界对机器做功, 把从低温处吸取的热量连同外界对机器

$$\begin{aligned} &= \frac{3H}{4} (mg + kH) + \frac{H}{4} (2mg + kH) = \frac{H}{4} (5mg + 4kH) \\ &= \frac{5mgH}{4} + \frac{k_1 k_2 H^2}{k_1 + k_2} \end{aligned}$$

$$\dot{Q} = \Delta U + W$$

根据热力学第一定律, 将上述各量代入即可得到总热量 \dot{Q} , 即

$$= \frac{3}{2} \left[3 \left(k \frac{3H}{4} + mg \right) - \left(k \frac{H}{4} + mg \right) \right] \left[\frac{H}{4} + mg \right] = \frac{3H}{4} (mg + kH)$$

即每小时耗电 4.37 度。工作 τ 小时所需电费为

$$M = 0.5\tau P = 0.5 \times 12 \times 4.37 = 26.2 \text{ (元)}$$

(2) 窗玻璃为双层, 设中间空气层两侧的温度分别为 T'_1 和 T'_2 , 如图 1.85 所示, 则对每一层介质, 单位时间内从高温处向低温处传输的热量为

$$\begin{aligned} H &= k_1 \frac{T_1 - T'_1}{l_1} S = k_2 \frac{T'_1 - T'_2}{l_2} S = k_3 \frac{T'_2 - T_2}{l_3} S \\ &= k \frac{T_1 - T_2}{l_1 + l_2 + l_3} S \end{aligned}$$

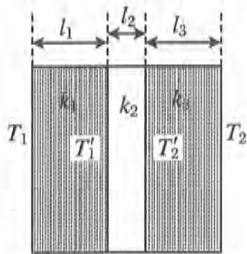


图 1.85 串联的隔热层

可得到 $T_1 - T'_1 = \frac{H l_1}{S k_1}$, $T'_1 - T'_2 = \frac{H l_2}{S k_2}$, $T'_2 - T_2 = \frac{H l_3}{S k_3}$, 三式相加, 有

$$T_1 - T_2 = \frac{H}{S} \left(\frac{l_1}{k_1} + \frac{l_2}{k_2} + \frac{l_3}{k_3} \right)$$

即单位时间传输过三层介质的热量为

$$H = \frac{T_1 - T_2}{\frac{l_1}{k_1} + \frac{l_2}{k_2} + \frac{l_3}{k_3}} S$$

如果将热传导定律写成 $H = \frac{T_1 - T_2}{l/k} S$, 并将 l/k 称作热阻, 则三个热阻串联, 总热阻为

$$\frac{l}{k} = \frac{l_1}{k_1} + \frac{l_2}{k_2} + \frac{l_3}{k_3}$$

对于本题的情形, $\frac{l}{k} + \frac{l_0}{k_0} + \frac{l}{k} = \frac{2l}{k} + \frac{l_0}{k_0}$, 于是热平衡时, $P' \frac{T_2}{T_1 - T_2} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{2l}{k} + \frac{l_0}{k_0}} S$, 制冷机消

耗的功率为

$$P' = \frac{(T_1 - T_2)^2}{T_2} \frac{S}{\frac{2l}{k} + \frac{l_0}{k_0}} = \frac{25^2}{268} \frac{5}{\left(\frac{2 \times 2}{0.75} + \frac{0.5}{0.025} \right) \times 10^{-3}} = 0.46 \text{ (kW)}$$

工作 τ 小时所需电费为

$$M = 0.5\tau P' = 0.5 \times 12 \times 0.46 = 2.82 \text{ (元)}$$

节省 23.4 元。

33. (26 届决赛) 热机和热泵利用物质热力学循环实现相反功能: 前者从高温处吸热, 将部分热量转化为功对外输出, 其余向低温处放出; 后者依靠外界输入功, 从低温处吸热, 连同外界做功转化成的热量一起排向高温处, 按热力学第二定律, 无论热机还是热泵, 若工作物质循环过程中只与温度为 T_1 、 T_2 的两个热源接触, 则吸收的热量 Q_1 、 Q_2 满足不等式 $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0$, 其中热量可正可负, 分别表示从热源吸热与向热源放热。

供暖设备原本以温度 T_0 的锅炉释放的热量向房间直接供暖, 使室内温度保持恒温 T_1 , 高于户外温度 T_2 。为提高能源利用率, 拟在利用原有能源的基础上采用上述机器改进供暖方案, 与直接供暖相比, 能耗下降的理论极限可达到多少?

【解】可以采用热泵联合供暖方案;利用热泵从锅炉吸收热量,转化为功;此功驱动热泵,从户外吸热,向室外放热。
 为表述方便,热量均用绝对值表示。
 热泵的高温热源锅炉,低温热源可选室内或户外环境。以室外为例,设热泵从锅炉吸热 Q_0 ,向室外放热 Q_{10} ,则有

$$(1) \quad \frac{T_0}{Q_0} - \frac{Q_{10}}{T_0} \leq 0$$

热泵的高、低温热源分别为室内、户外环境。设热泵从户外吸热 Q_2 ,向室外放热 Q_{12} ,则有

$$(2) \quad -\frac{Q_{12}}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0$$

通过热泵、热泵联合工作,室内获得的总热量为

$$(3) \quad Q_1 = Q_{10} + Q_{12}$$

将式(1)与式(2)相加,得

$$(4) \quad \frac{Q_0}{T_0} + \frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1} \leq 0$$

若热泵以户外环境为低温热源,同理可得上式。

由能量守恒定律,有

$$(5) \quad Q_1 = Q_0 + Q_2$$

直接供暖时,给室内供热 Q_1 ,锅炉所释放的热量

$$(6) \quad Q'_0 = Q_1$$

联立式(4)、式(5),可得热泵联合供暖锅炉释放的热量

$$(7) \quad Q_0 \leq \frac{T_0(T_1 - T_2)}{T_1(T_0 - T_2)} Q_1$$

能耗下降率为

$$(8) \quad \frac{Q'_0 - Q_0}{Q'_0} \leq \frac{T_2(T_0 - T_1)}{T_1(T_0 - T_2)}$$

理论极限为上式取等号。

34. (27届决赛) 如图 1.86 所示,在一个质量为 M 、内部横截面积为 A 的竖直放置的绝热气缸中,用活塞封闭了一定量温度为 T_0 的理想气体。活塞也是绝热的,活塞质量以及活塞和气缸之间的摩擦力都可忽略不计。已知大气压强为 p_0 ,重力加速度为 g ,现将活塞缓慢上提,当活塞到达气缸开口处时,气缸刚好离开地面。已知理想气体在缓慢变化的绝热过程中 pV^γ 保持不变,其中 p 是气体的压强, V 是气体的体积, γ 是一常数。根据以上所述,可求得活塞到达气缸开口处时气体的温度为 T_1 。
 【解】提升活塞的过程中,气缸中的气体经历一个准静态绝热过程。气缸能够刚好离开地面,说明上提的力量恰等于气缸的重量(此处忽略了气体的重量),此时,活塞的力学平衡条件为

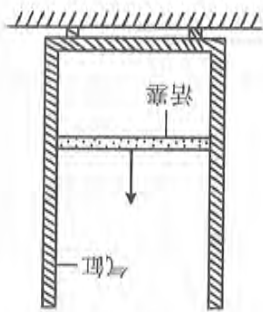


图 1.86 将气缸提起

$$Mg + pA = p_0$$

则据此可求得气缸内气体的压强为

$$p = p_0 - \frac{Mg}{A}$$

气缸中气体初末态的状态方程分别为 $p_0 V_0 = \nu RT_0$ 和 $pV = \nu RT$ 。

绝热过程中, $p_0 V_0^\gamma = pV^\gamma$, 可得到

$$V = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1}{\gamma}} V_0$$

因此有

$$pV = p^{1-\frac{1}{\gamma}} p_0^{\frac{1}{\gamma}} V_0 = nRT$$

可得到末态缸中气体的温度为

$$T = \frac{p^{1-\frac{1}{\gamma}} p_0^{\frac{1}{\gamma}}}{p_0} T_0 = \frac{p^{1-\frac{1}{\gamma}}}{p_0^{1-\frac{1}{\gamma}}} T_0 = \left(1 - \frac{Mg}{p_0 A}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} T_0$$

35. (26 届复赛) 火箭通过高速喷射燃气产生推力。设温度 T_1 、压强 p_1 的炽热高压气体在燃烧室内源源不断生成, 并通过管道由狭窄的喷气口排入气压 p_2 的环境。假设燃气可视为理想气体, 其摩尔质量为 μ , 每摩尔燃气的内能为 $u = c_v T$ (c_v 是常量, T 为燃气的绝对温度)。在快速流动过程中, 对管道内任意处的两个非常靠近的横截面间的气体, 可以认为它与周围没有热交换, 但其内部则达到平衡状态, 且有均匀的压强 p 、温度 T 和密度 ρ , 它们的数值随着流动而不断变化, 并满足绝热方程 $pV^{\frac{c_v+R}{c_v}} = C$ (恒量), 式中 R 为普适气体常量, 求喷气口处气体的温度与相对火箭的喷射速率。

【解】 对于本题, 可以这样理解: 燃烧室生成的气体温度为 T_1 、压强为 p_1 , 向喷口运动的过程中, 由于速度很高, 气体之间来不及热交换, 气体与外界也没有热交换, 即任何一部分气体所经历的都是绝热过程; 同时, 对于体积足够小的一团气体来说, 尽管其状态迅速变化, 但各部分的状态是一样的, 可视为均匀气体。由于气体不断地绝热膨胀, 内能变化; 同时其他气体对这一团气体做功, 使其产生运动, 具有动能。

这样一来, 问题就变得十分简单了。不妨取非常少的质量为 m 的一部分气体, 其物质的量为 $\nu = \frac{m}{\mu}$, 设 $\frac{c_v+R}{c_v} = \gamma$ 。由于经历准静态的绝热过程, $pV^\gamma = C$, 为恒量。按气体状态方程

$pV = \nu RT$, 所以 $p \left(\frac{\nu RT}{p}\right)^\gamma = C$, 即 $\frac{T^\gamma}{p^{\gamma-1}} = C (\nu R)^{-\gamma}$ 亦为恒量。

因而在喷口处气体的温度为

$$T_n = \left(\frac{p_n}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T_1$$

下面讨论做功的情况。在喷管中取极薄的一层气体, 如图 1.87 所示, 该层气体被靠近燃烧室一侧的其他气体推动, 同时它也推动靠近喷口一侧的气体。即左侧气体对这一层气体做

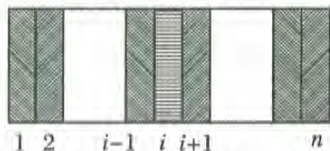


图 1.87 喷管中气体的移动过程

功, 这层气体又对其右侧气体做功。在管道中, 该层气体在移向喷孔的过程中, 状态在不断地变化着。若将管道分为许多薄层, 上述气体在经历第 i 层时, 状态为 p_i, V_i, T_i , 薄层的厚度为 l_i 。该气体从第 i 层移动到第 $i+1$ 层的过程中, 左侧气体对其做功为 $p_{i-1} S_{i-1} l_{i-1} = p_{i-1} V_{i-1}$

该层气体对右侧气体做功为

$$p_i S_i l_i = p_i V_i$$

则其他部分气体对该层气体做的总功为

$$W_i = p_{i-1} V_{i-1} - p_i V_i$$

同理, 该层气体从第 $i+1$ 层移动到第 $i+2$ 层的过程中, 其他气体对其做的总功为

$$W_{i+1} = p_i V_i - p_{i+1} V_{i+1}$$

因而上述两过程中, 其他气体对这部分气体做的总功为

$$W_i + W_{i+1} = p_{i-1} V_{i-1} - p_i V_i + p_i V_i - p_{i+1} V_{i+1} = p_{i-1} V_{i-1} - p_{i+1} V_{i+1}$$

以此类推, 这一层气体从燃烧室移动到喷口, 压强从 p_1 变为 p_n , 体积从 V_1 变为 V_n , 其他气体对其做的总功为

$$W = p_1 V_1 - p_n V_n$$

由于可将其视作理想气体, 因而

$$W = p_1 V_1 - p_n V_n = \nu R (T_1 - T_n) = \nu R \left[1 - \left(\frac{p_n}{p_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right] T_1$$

按热力学第一定律, 外界所做的功等于这层气体动能和内能的增量, 即

$$W = \Delta U + \Delta E_k$$

由于这团气体在燃烧室中的速度可认为等于 0, 因而

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

内能的增量为

$$\Delta U = \nu c_V (T_n - T_1) = \nu c_V \left[\left(\frac{p_n}{p_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right] T_1 = \nu c_V \left[\left(\frac{p_n}{p_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right] T_1$$

于是

$$\nu R \left[1 - \left(\frac{p_n}{p_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right] T_1 = \frac{1}{2} m v^2 + \nu c_V \left[\left(\frac{p_n}{p_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right] T_1$$

解得在喷口处的速度为

$$v = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} (c_V + R) \left[1 - \left(\frac{p_n}{p_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right] T_1}$$

而

$$\gamma - 1 = \frac{c_V + R}{c_V} - 1 = \frac{c_V}{R}, \quad \gamma - 1 = \frac{R/c_V}{R/c_V + R} = \frac{c_V + R}{R}$$

解得

$$v = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} (c_V + R) \left[1 - \left(\frac{p_n}{p_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right] T_1}$$

【点评】 本题的要点和难点在于得到外界对这一部分气体做功的公式 $W = p_1 V_1 - p_0 V_0$, 在大学中, 这一公式是在分析焦耳-汤姆孙实验时得到的。

36. (28 届决赛) 摩尔质量为 μ 的某种理想气体, 从左向右流过一内壁光滑的长直水平绝热导管, 导管内横截面的面积为 S , 1 摩尔绝对温度为 T 的该气体的内能为 $5RT/2$, 式中 R 为普适气体常量。

(1) 将一加热装置固定放置在管的中部, 以恒定功率 W 给气体加热, 如图 1.88(a) 所示。假设该装置对气流的阻力可以忽略, 当气流稳定后, 管中气体虽然在加热装置附近的状况不均匀, 但随着与加热装置距离的增加而逐渐趋于均匀。在加热装置左边均匀稳流区域中, 气体的压强为 p_0 , 温度为 T_0 , 向右流动的速度为 v_0 。已知加热装置右边均匀稳流区域中气体的压强为 p_1 , 试求该区域气体的温度 T_1 。

(2) 现将管中的加热装置换成一多孔塞, 如图 1.88(b) 所示。在气流稳定后, 多孔塞左边气体的温度和压强分别为 T_0 和 p_0 , 向右流动的速度为 v_0 ; 多孔塞右边气体的压强为 p_2 ($p_2 < p_0$)。假设气体在经过多孔塞的过程中与多孔塞没有任何形式的能量交换, 求多孔塞右边气体的流速 v_2 。

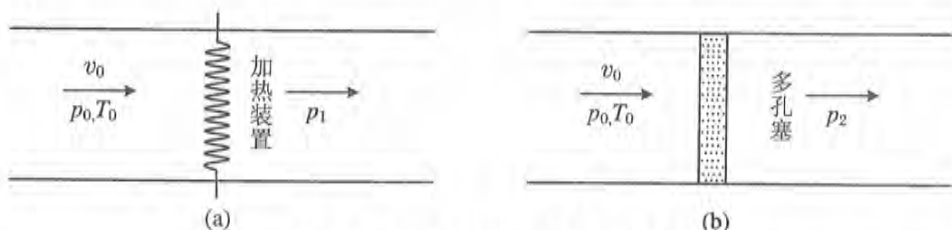


图 1.88 管道中的加热装置与多孔塞

【解】 (1) 在时间 Δt 内, 从左侧流过加热装置的气体体积为 $V_0 = Sv_0 \Delta t$, 这一部分气体在左侧的状态方程为

$$p_0 V_0 = nRT_0 = \frac{m}{\mu} RT_0$$

因而有

$$\Delta t = \frac{m}{\mu} \frac{RT_0}{p_0 Sv_0} \quad (1)$$

在加热装置右侧, 这部分气体的体积可表示为 $V_1 = Sv_1 \Delta t$, 状态方程为

$$p_1 V_1 = nRT_1 = \frac{m}{\mu} RT_1$$

因而有

$$v_1 = \frac{m}{\mu} \frac{RT_1}{p_1 S \Delta t} = \frac{p_0 T_1 v_0}{p_1 T_0} \quad (2)$$

从加热装置所吸收的热量为

$$Q = W \Delta t$$

这部分气体受其左侧气体推动, 并推动其右侧的气体, 在通过加热装置过程中所获得的净功为

$$\frac{\Delta T_e}{\Delta z} = -6.0 \times 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}$$

37. (23届决赛) 由于地球的自转及不同高度处的大气对太阳辐射吸收的差异, 静止的大气中不同高度处气体的温度、密度都是不同的。对于干燥的静止空气, 在离地面的高度小于 20 km 的大气层内, 大气温度 T_e 随高度的增大而降低, 已知其变化率

$$v_z = v_0 \left[-\frac{7}{2} \frac{RT_0}{\mu v_0^2} + \frac{1}{2} \sqrt{4 + \left(28 + \frac{8W}{p_0 S v_0} \right) \frac{RT_0}{\mu v_0^2}} + \left(\frac{7RT_0}{\mu v_0^2} \frac{p_z}{p_0} \right)^2 \right]$$

进而求得

$$v_z^2 + 7 \frac{RT_0}{p_z} \left(\frac{p_z}{p_0} \right) v_z - \left(1 + \frac{7RT_0}{\mu v_0^2} \right) v_0^2 = 0$$

气体动能的增量为 $\Delta E_k = \frac{1}{2} m (v_z^2 - v_0^2)$ 。将上述参数和表达式代入式(3), 可得到

$$\text{其他气体对这部分气体所做的净功为 } A = p_0 V_0 - p_z V_z \\ v_z = \frac{nRT_z}{p_0 T_0 v_0} = \frac{p_z S \Delta t}{p_0 T_0 v_0}$$

$\frac{\mu}{m} RT_z$ 。可求得

在多孔塞右侧, 这部分气体的体积可表示为 $V_z = S v_z \Delta t$, 状态方程为 $p_z V_z = nRT_z =$

$$\Delta t = \frac{m}{\mu} \frac{RT_0}{p_0 S v_0}$$

仍然设在时间 Δt 内, 从左侧流过加热装置的气体体积为 $V_0 = S v_0 \Delta t$ 。则依然有

$$A = \Delta U + \Delta E_k \quad (3)$$

(2) 换成多孔塞之后, 外界不再向气体提供热量, 热力学第一定律为

$$T_1 = \frac{p_1}{p_0} \left[\frac{1}{2} \sqrt{4 + \left(28 + \frac{8W}{p_0 S v_0} \right) \frac{RT_0}{\mu v_0^2}} + \left(\frac{7RT_0}{\mu v_0^2} \frac{p_1}{p_0} \right)^2 - \frac{7RT_0}{\mu v_0^2} \frac{p_1}{p_0} \right] T_0$$

解得

$$T_1^2 + \frac{7RT_0}{\mu v_0^2} \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^2 T_1 - \left(1 + \frac{7RT_0}{\mu v_0^2} + 2W \frac{RT_0}{p_0 S \mu v_0^2} \right) \left(\frac{p_1 T_0}{p_0 S v_0} \right)^2 = 0$$

将式(1)、式(2)代入, 整理得到

$$W \Delta t + \frac{\mu}{m} R (T_0 - T_1) = \frac{5R}{2} \frac{\mu}{m} (T_1 - T_0) + \frac{1}{2} m (v_1^2 - v_0^2)$$

按热力学第一定律 $\bar{Q} + A = \Delta U + \Delta E_k$, 可得

$$\Delta U = n \frac{5R}{2} (T_1 - T_0) = \frac{5R}{2} \frac{\mu}{m} (T_1 - T_0)$$

内能的增量为

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} m (v_1^2 - v_0^2)$$

这部分气体动能的增量为

$$A = p_0 V_0 - p_1 V_1 = \frac{\mu}{m} R (T_0 - T_1)$$

z 为竖直向上的坐标。

现考察大气层中的一质量一定的微小空气团(在确定它在空间的位置时可当作质点处理), 取其初始位置为坐标原点($z = 0$), 这时气团的温度 T 、密度 ρ 、压强 p 都分别与周围大气的温度 T_e 、密度 ρ_e 、压强 p_e 相等。由于某种原因, 该微气团发生向上的小位移。因为大气的压强随高度的增加而减小, 微气团在向上移动的过程中, 其体积要膨胀, 温度要变化(温度随高度变化可视为线性的)。由于过程进行得不是非常快, 微气团内气体的压强已来得及随时调整到与周围大气的压强相等, 但尚来不及与周围大气发生热交换, 因而可以把过程视为绝热过程。现假定大气可视为理想气体, 理想气体在绝热过程中, 其压强 p 与体积 V 满足绝热过程方程 $pV^\gamma = C$ 。式中 C 和 γ 都是常量, 但 γ 与气体种类有关, 对空气, $\gamma = 1.40$ 。已知空气的摩尔质量 $\mu = 0.029 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$, 普适气体常量 $R = 8.31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ 。试在上述条件下定量讨论微气团以后的运动。设重力加速度 $g = 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $z = 0$ 处大气的温度 $T_0 = 300 \text{ K}$ 。

【解】 设微气团中空气的质量为 m , 当其位移为 z 时, 气团的体积为 V , 气团内气体的密度为 ρ , 气团周围大气的密度为 ρ_e 。气团受到竖直向下的重力 $mg = V\rho g$ 和竖直向上的浮力 $V\rho_e g$ 作用, 若气团的加速度为 α , 则由牛顿第二定律有

$$m\alpha = -V\rho g + V\rho_e g = -V(\rho - \rho_e)g \quad (1)$$

或有

$$\alpha = -g \frac{\rho - \rho_e}{\rho} \quad (2)$$

根据理想气体状态方程

$$pV = \frac{m}{\mu}RT \quad (3)$$

可知气体的密度

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\mu p}{RT} \quad (4)$$

利用式(4), 注意到 $p = p_e$, 式(2)可化成

$$\alpha = -g \frac{T_e - T}{T_e} \quad (5)$$

周围大气在 z 处的温度 T_e 等于 $z = 0$ 处的温度 T_0 加从 0 到 z 温度的增量, 即

$$T_e = T_0 + \frac{\Delta T_e}{\Delta z} z \quad (6)$$

若气团中气体温度随高度的变化率为 $\frac{\Delta T}{\Delta z}$, 根据题意, 有

$$T = T_0 + \frac{\Delta T}{\Delta z} z \quad (7)$$

T_0 为气团位于初始位置时气团中气体的温度。根据题意 $T_0 = T_0$, 把式(6)、式(7)代入式(5)得

$$\alpha = -\frac{g}{T_e} \left(\frac{\Delta T_e}{\Delta z} - \frac{\Delta T}{\Delta z} \right) z \quad (8)$$

在式(8)中, 若 $\left(\frac{\Delta T_e}{\Delta z} - \frac{\Delta T}{\Delta z} \right) > 0$, 则加速度方向向下, 作用于气团的力有使气团回到初始位置的趋势, 这样, 大气层中的大气就处于稳定状态; 反之, 气团将远离其初始位置, 大气层中的大

气处在不稳定状态。因周围大气温度随高度的变化率 $\frac{\Delta T}{\Delta z}$ 是已知的,故只要知道气团中气体温

度随高度的变化率,便可对气团的运动作出判断。

大气的压强随高度的增加而减小,在高度为 z 和 $z + \Delta z$ 处的压强差

$$\Delta p_c = -\rho_c g \Delta z \quad (9)$$

式中 ρ_c 为 z 处的空气的密度,与温度、压强有关,由式(4)表示。式中负号表示高度增加时,大气压强是减小的。把式(4)代入式(9)得

$$\Delta p_c = -\frac{\mu p_c}{RT_c} g \Delta z \quad (10)$$

质量为 m 的气团在上升过程中,其压强将随周围大气的压强的减小而减小,体积要增大,

气团对周围空气做功。因为过程是绝热的,气团的内能要减少,因而温度要降低,温度、压强的变化应满足绝热过程的规律。试题给出的绝热过程方程是关于压强与体积间的关系,利用理想

气体状态方程,可把绝热过程方程表示为温度与压强间的关系。

由式(3)得

$$V = \frac{m}{RT} p \quad (11)$$

把式(11)代入

$$pV^\gamma = C$$

得

$$T = C_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{\mu}{mR} p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

(12)

当气团的压强由 p 变到 $p + \Delta p$ 时,气团的温度将由 T 变到 $T + \Delta T$ 。由式(12)

$$T + \Delta T = C_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{\mu}{mR} (p + \Delta p)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

利用二项式定理,忽略 Δp 的高次方项,并注意到式(12)得

$$T + \Delta T = C_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{\mu}{mR} \left[p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \frac{\gamma-1}{\gamma} p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}-1} (\Delta p) \right] = T + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{p}{T} \Delta p$$

故有

$$\Delta T = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{p}{T} \Delta p \quad (13)$$

根据题意, $p = p_c$, $\Delta p = \Delta p_c$, 由式(7)、式(10)和式(13)得

(14)

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{R}{T_0} \frac{T_0 + \left(\frac{\Delta T_c}{\Delta z} + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{R}{T_0} \right) z}{T_0} \approx -T_0$$

已知 $\frac{\Delta T_c}{\Delta z} = -6.0 \times 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}$, 代入有关数据可求得

$$\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{R}{T_0} = 9.8 \times 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}$$

当 z 不是很大时,有

$$T_0 + \left(\frac{\Delta T_c}{\Delta z} + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{R}{T_0} \right) z \approx T_0$$

故有

$$\frac{\Delta T}{\Delta z} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\mu g}{R} \quad (15)$$

代入题给的有关数据得

$$\frac{\Delta T}{\Delta z} = -9.8 \times 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}^{-1} \quad (16)$$

负号表示高度增加时,气团的温度要下降。可见 $\left(\frac{\Delta T_e}{\Delta z} - \frac{\Delta T}{\Delta z}\right) > 0$, 作用于气团的合力的方向与气团位移的方向相反, 指向气团的初始位置, 气团发生向上位移后, 将要回到初始位置。当 z 不是很大时, 式(8)中的 T_e 可以用 T_∞ 代替, 可知气团将在初始位置附近做简谐振动。振动的圆频率

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{T_\infty} \left(\frac{\Delta T_e}{\Delta z} - \frac{\Delta T}{\Delta z}\right)} \quad (17)$$

代入数据, 得

$$\omega = 1.1 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1} \quad (18)$$

38. (27 届决赛) 南极冰架崩裂形成一座巨型冰山, 随洋流漂近一个城市。有人设计了一个利用这座冰山来发电的方案, 具体过程为: (a) 先将环境中一定量的空气装入体积可变的容器, 在保持压强不变的条件下通过与冰山接触使容器内空气温度降至冰山温度; (b) 使容器脱离冰山, 保持其体积不变, 让容器中的冷空气从环境中吸收热量, 使其温度升至环境温度; (c) 在保持容器体积不变的情况下让空气从容器中喷出, 带动发电装置发电。如此重复, 直至整座冰山融化。已知环境温度 $T_a = 293 \text{ K}$, 冰山的温度为冰的熔点 $T_1 = 273 \text{ K}$, 可利用的冰山的的质量 $m = 1.0 \times 10^{11} \text{ kg}$, 为了估算可能获得的电能, 设计者做出的假设和利用的数据如下:

(1) 空气可视为理想气体。

(2) 冰的熔解热 $L = 3.34 \times 10^5 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$; 冰融化成温度为 T_1 的水之后即不再利用。

(3) 压强为 p 、体积为 V 的空气内能 $U = 2.5pV$ 。

(4) 容器与环境之间的热传导良好, 可以保证喷气过程中容器中空气温度不变。

(5) 喷气过程可分解为一连串小过程, 每次喷出的气体的体积都是 u , 且 u 远小于容器的体积。在每个小过程中, 喷管中的气体在内外压强差的作用下加速, 从而获得一定动能 ΔE , 从喷嘴喷出。不考虑喷出气体在加速过程中体积的改变, 并认为在喷气过程中容器内的气体压强仍是均匀的, 外压强为大气压。

(6) 假设可能获得的电能是 ΔE 总和的 45%。

(7) 当 $|x| \ll 1$ 时, $\ln(1+x) \approx x$ 。

试根据设计者的假设, 计算利用这座冰山可以获得的电能。

【解】 以 p_a 表示环境中大气的压强, 则初始时装入容器的空气的压强为 p_a , 温度为 T_a , 以 V_a 表示其体积。当容器与冰山接触, 达到平衡时, 容器中空气的温度为 T_1 , 体积减小为 V_0 , 根据题意, 空气经历的过程为等压过程, 故有

$$\frac{V_0}{T_1} = \frac{V_a}{T_a} \quad (1)$$

在这一过程中, 容器中空气内能的增加量为

$$\Delta U = 2.5p_a(V_0 - V_a) \quad (2)$$

对大气所做的功为

$$W = -p_a(V_0 - V_a) \quad (3)$$

若以 Q 表示此过程中冰山传给容器中空气的热量, 根据热力学第一定律有

$$Q = \Delta U - W \quad (4)$$

由以上四式得

$$Q = 3.5p_a V_a \frac{T_1 - T_a}{T_a} \quad (5)$$

式(5)给出的 Q 是负的, 表示在这一过程中, 实际上是容器中的空气把热量传给冰山。

容器中空气的温度降至冰山温度后, 又经过一等容升温过程, 即保持体积 V_0 不变, 温度从

T_1 升至环境温度 T_a , 并从周围环境吸热。若以 p_1 表示所考虑空气的压强, 则有

$$\frac{p_1}{T_a} = \frac{p_a}{T_1} \quad (6)$$

设喷管的体积为 u , 当喷管中的气体第一次被喷出时, 容器中空气的压强由 p_1 降到 p_2 ; 根

据题目给出的条件, 有

$$p_1(V_0 - u) = p_2 V_0, \quad (7)$$

即

$$p_2 = p_1 \frac{V_0 - u}{V_0} \quad (8)$$

喷出气体获得的动能

$$\Delta E_{k1} = (p_1 - p_a)u \quad (9)$$

当喷管中的空气第二次喷出后, 容器中空气压强由 p_2 降到 p_3 , 根据题给出的条件可得

$$p_3 = p_2 \frac{V_0 - u}{V_0} \quad (10)$$

喷出气体获得的动能

$$\Delta E_{k2} = (p_2 - p_a)u \quad (11)$$

当喷管中的空气第 N 次被喷出后, 容器内空气的压强由 p_N 降到 p_{N+1} , 根据题给出的条件

可得

$$p_{N+1} = p_N \frac{V_0 - u}{V_0} \quad (12)$$

喷出气体获得的动能

$$\Delta E_{kN} = (p_N - p_a)u \quad (13)$$

如果经过 N 次喷射后, 容器中空气的压强降到周围大气的压强, 即

$$p_{N+1} = p_a \quad (14)$$

这时喷气过程终止, 在整个喷气过程中, 喷出气体的总动能

$$E_k = \Delta E_{k1} + \Delta E_{k2} + \dots + \Delta E_{kN} \quad (15)$$

利用式(8)~(13), 式(15)可化成

$$E_k = p_1 u \left[1 + \left(\frac{V_0 - u}{V_0} \right) + \left(\frac{V_0 - u}{V_0} \right)^2 + \dots + \left(\frac{V_0 - u}{V_0} \right)^{N-1} \right] - N p_a u \quad (16)$$

式(16)等号右边第1项方括号内是 N 项的等比级数,故有

$$E_k = p_1 u \frac{1 - \left(\frac{V_0 - u}{V_0}\right)^N}{1 - \frac{V_0 - u}{V_0}} - N p_a u \quad (17)$$

又根据式(8)、式(10)、式(12)、式(14)可得

$$p_1 \left(\frac{V_0 - u}{V_0}\right)^N = p_a \quad (18)$$

对式(18)等式两边取自然对数得

$$N \ln\left(1 - \frac{u}{V_0}\right) = \ln \frac{p_a}{p_1} \quad (19)$$

因 $u \ll V_0$, 可利用近似公式 $\ln(1+x) \approx x$ 把式(19)进一步化简,即

$$N = \frac{V_0 \ln \frac{p_1}{p_a}}{u} \quad (20)$$

进而由式(17)、式(18)、式(20)得

$$E_k = (p_1 - p_a)V_0 - p_a V_0 \ln \frac{p_1}{p_a} \quad (21)$$

将式(1)、式(6)代入式(21),可得

$$E_k = p_a V_a \left(1 - \frac{T_1}{T_a} + \frac{T_1}{T_a} \ln \frac{T_1}{T_a}\right) \quad (22)$$

根据题意,这些动能可转化成的电能为

$$E = 0.45 p_a V_a \left(1 - \frac{T_1}{T_a} + \frac{T_1}{T_a} \ln \frac{T_1}{T_a}\right) \quad (23)$$

以上讨论表明,要获得电能 E , 冰山必须吸收 $-Q$ 的热量, 整座冰山化掉可吸收的总热量

$$Q_1 = mL \quad (24)$$

因此可产生的总电量为

$$E_1 = \frac{mL}{-Q} E \quad (25)$$

将式(5)和式(23)代入式(25),得

$$E_1 = \frac{9}{70} mL \frac{1 - \frac{T_1}{T_a} + \frac{T_1}{T_a} \ln \frac{T_1}{T_a}}{1 - \frac{T_1}{T_a}} \quad (26)$$

代入数据后有

$$E_1 = 1.5 \times 10^{14} \text{ J} \quad (27)$$

39. (29届决赛) 如图 1.89 所示, 一水平放置的刚性密闭气缸, 缸壁是绝热的, 活塞把气缸内空间分为两个体积相同的密闭室 A 和 B 。活塞由一层热容量很小(略去其影响)、导热良好的材料(与气缸壁有摩擦)和一薄层绝热材料(与气缸壁没有摩擦)压制而成, 绝热层在 A 室一侧。初始

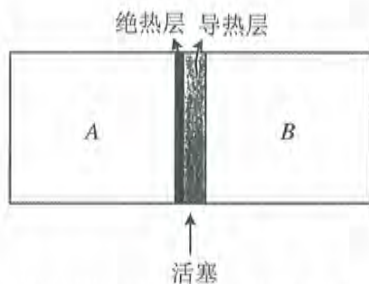


图 1.89 中间有活塞的密闭气缸

$T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{常量}$, 即 $\frac{T_0^\gamma p_0^{1-\gamma}}{T_A^\gamma p_A^{1-\gamma}} = \frac{T_0^\gamma p_0^{1-\gamma}}{T_A^\gamma p_A^{1-\gamma}}$, 于是利用式(7)得到 $T_A = \left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{1}{\gamma}} T_0$, 再由式

绝热过程的关系式 $pV^\gamma = \text{常量}$, 将体积用温度置换, 则 $pV^\gamma = p \left(\frac{p}{\nu RT}\right)^\gamma = (\nu R)^\gamma T^\gamma p^{1-\gamma}$, 即

$$\frac{p}{p_0} = \frac{5}{2} \quad (7)$$

即 $\frac{2pT_0}{p_0} = 4T_A + T_B$, 利用式(6), 有

$$2 \frac{p\nu_B RT_0}{p_0} = 4\nu_B RT_A + \nu_B RT_B$$

式(3)+式(4), 得到 $2pV_0 = 4\nu_B RT_A + \nu_B RT_B$, 该式与式(1)相除, 可得

$$4T_A + T_B = 5T_0 \quad (6)$$

由于 $\nu_A = 4\nu_B$, 可得 $4(T_0 - T_A) = T_B - T_0$, 即

$$W = -\Delta U_A = \nu_A C(T_0 - T_A) = \Delta U_B = \nu_B C(T_B - T_0) \quad (5)$$

B 室其体内能的增加, 即

为 B 室气体的内能。因而 A 室气体对 B 室气体所做的功, 等于 A 室气体内能的减少, 也等于量忽略不计, 活塞与 A 室和缸壁绝热, 与 B 室导热, 所以这部分热量被 B 室气体所吸收, 转化

活塞移动过程中, 对 B 室气体做功, 同时由于活塞的摩擦而产生热量。但由于活塞的热容

$$p(V_0 - \Delta V) = \nu_B RT_B \quad (4)$$

$$p(V_0 + \Delta V) = \nu_A RT_A \quad (3)$$

$$p_0 V_0 = \nu_B RT_0 \quad (2)$$

$$4p_0 V_0 = \nu_A RT_0 \quad (1)$$

初态和末态时, A, B 两室中气体的状态方程分别为

解, 可知 $T_B < T_0$ 。

B 室温度升高。设重新达到平衡时 A, B 两室的温度分别为 T_A, T_B 。由于过程中分子没有分

【解】(1) 由于 A 室压强是 B 室压强的 4 倍, 释放活塞, 活塞将向右移动, A 室温度降低,

分解了, 求这种分子发生分解的临界温度 T_d 。

(2) 对于具有上述特性的另一种气体, 若实验测得在上述过程结束时 $\alpha = 10.0\%$ 的分子

解, 求这种分子发生分解的临界温度 T_d 的可能值;

(1) 对于具有上述特性的某种气体, 若实验测得在上述过程结束时没有任何分子发生了分

膨胀时, $pV^\gamma = \text{常量}$, 其中 $\gamma = 4/3$ 。

为 $u = CT$ (C 是与气体的种类无关的常量)。已知当压强为 p 、体积为 V 的这种气体绝热缓慢

过程是可逆的, 分解 1 mol 分子所需能量 $\varphi = CT_0/10$, 1 mol 气体的内能与绝对温度 T 的关系

质的量与发生分解前气体总物质的量之比 α 满足关系 $\alpha = \beta(T - T_d)$, 其中 $\beta = 2.00T_0^{-1}$ 。分解

分子将发生分解, 一个多原子分子可以分解为另外两个相同的多原子分子。被分解的气体物

已知气缸中的气体具有如下特性: 在温度高于某个临界温度 $T_d (> T_0)$ 时, 部分多原子气

在平衡位置(此时活塞与缸壁间无静摩擦)。

压强 4 倍。现释放活塞, 活塞由于其导热部分与汽缸壁之间存在摩擦而运动缓慢, 最后停止

时, A 室和 B 室有绝对温度均为 T_0 的同种多原子分子理想气体, A 室气体压强是 B 室气体

(6) 可得

$$T_B = 5T_0 - 4T_A = \left[5 - \left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]T_0 = \left[5 - \left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{1}{4}}\right]T_0$$

$$T_d > T_B = \left[5 - \left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{1}{4}}\right]T_0$$

(2) 若 B 室中分子发生了分解, 说明 $T_B > T_d$, 分解的比例为 $\alpha = \beta(T_B - T_d)$, B 室中气体的物质的量变为 $\nu_B - \nu_B\alpha + 2\nu_B\alpha = (1 + \alpha)\nu_B$, 气体的状态方程为

$$p(V_0 - \Delta V) = (1 + \alpha)\nu_B RT_B \quad (8)$$

没有分解的分子数量为 $(1 - \alpha)\nu_B$ 。按题意, 温度越高, 分解得越多, 说明在不同的温度下都有分解发生, 而题中说明分解 1 mol 所需能量为 $\varphi = CT_0/10$, 只与初始温度有关, 而与发生分解的温度无关, 只能理解为分解发生在某个确定的温度, 而且上述能量是指从开始升温到分解完成所需的全部能量。由于一个分子分解为两个, 末态与初态相比, 是消失了初态分子, 多出了两个末态分子, 这些分子内能的增量为 $2\alpha\nu_B CT_B - \alpha\nu_B CT_0$ 。

这一过程中的热力学第一定律为

$$W = -\Delta U_A = n_A C(T_0 - T_A) = (1 - \alpha)\nu_B C(T_B - T_0) + \alpha\nu_B \varphi - \alpha\nu_B CT_0 + 2\alpha\nu_B CT_B$$

其中 $\varphi = CT_0/10$ 。经过整理 $4(T_0 - T_A) = (1 - \alpha)(T_B - T_0) + \alpha T_0/10 - \alpha T_0 + 2\alpha T_B$, 得到

$$\left(5 - \frac{\alpha}{10}\right)T_0 = (1 + \alpha)T_B + 4T_A \quad (9)$$

再利用式(3)、式(8), 可得 $2\frac{p\nu_B RT_0}{p_0} = 4\nu_B RT_A + (1 + \alpha)\nu_B RT_B$, 即

$$\frac{2pT_0}{p_0} = 4T_A + (1 + \alpha)T_B \quad (10)$$

将式(9)代入式(10), 得到 $\left(5 - \frac{\alpha}{10}\right) = \frac{2p}{p_0}$, 利用 A 室中绝热过程关系 $\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T_A}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$, 有

$\left(5 - \frac{\alpha}{10}\right) = 2\left(\frac{T_A}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$, 最后算得 $T_A = \left[\frac{1}{2}\left(5 - \frac{\alpha}{10}\right)\right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}T_0$, 代入式(9), 最终得到

$$\begin{aligned} T_B &= \frac{1}{1 + \alpha} \left\{ \left(5 - \frac{\alpha}{10}\right) - 4 \left[\frac{1}{2} \left(5 - \frac{\alpha}{10}\right) \right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right\} T_0 \\ &= \frac{5 - \frac{\alpha}{10}}{2(1 + \alpha)} \left[2 - 8 \left[\frac{2}{5 - \frac{\alpha}{10}} \right]^{\frac{3}{4}} \right] T_0 \end{aligned}$$

第2部分 光学

光学 1 几何光学的实验定律：光线的传播、反射和折射

1. (22属预兼) 内表面只反射而不吸收光的圆筒内有一半径为 R 的黑球, 距球心为 $2R$ 处有一点光源 S , 球心 O 和光源 S 皆在圆筒轴线上, 如图 2.1 所示. 若使点光源向右半边发出的光最后全被黑球吸收, 则筒的内半径 r 最大为多少?

【分析】光源向右发出的光线, 一部分直接射向黑球而被吸收, 另一部分被圆筒内壁反射, 只要反射光线射向黑球, 亦被吸收. 对于这部分光线, 可利用反射定律求解.

【解】如图 2.2 所示, 只有与球面相切的光线在圆筒上的入射点恰位于球心正上方和正下方的左边时, 才能使向右的光线全部被黑球吸收, 即

$$\frac{R}{r} = \frac{2R}{\sqrt{r^2 + (2R)^2}}$$

于是 $r = \frac{2}{\sqrt{3}}R$.

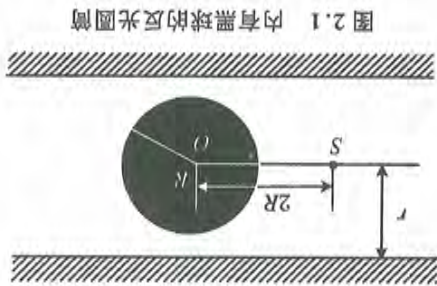


图 2.1 内有黑球的反光圆筒

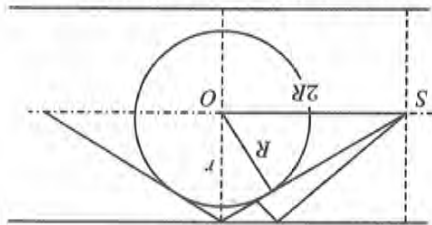


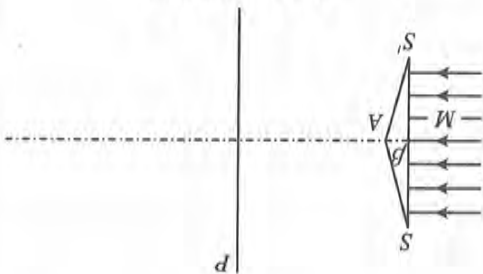
图 2.2 向右发出经反射的光线被吸收

2. (10属预兼) 一圆锥透镜如图 2.3 所示, S, S' 为锥面, M 为底面, 通过锥顶 A 垂直于底面的直线为光轴. 平行光垂直入射于底面. 现在把一垂直于光轴的平面屏 P 从透镜顶点 A 向右方移动. 设不计光的干涉与衍射.

(1) 用示意图画出在屏上看到的图像. 当屏远移时图像怎样变化?

(2) 设圆锥底面半径为 R , 锥面母线与底面的

图 2.3 圆锥透镜



夹角为 β (β 的范围为 $3^\circ \sim 5^\circ$), 透镜材料的折射率为 n 。令屏离锥顶 A 的距离为 x , 求出为描述图像变化需给出的屏的几个特殊位置。

【分析】 图 2.3 为过圆锥轴线的平面, 光线在圆锥底面和侧面发生折射, 出射光发生偏折, 投射到屏上。将图绕轴线旋转, 即可得到屏上光斑的图像。

【解】 (1) 题图所示为系统的一个过轴线的剖面, 该剖面等效于一个等腰三棱镜。每一条入射光线, 在底面处, 入射角与折射角均为 0, 但在侧面发生折射, 如图 2.4 所示。

在侧面处, 光线的入射角为 β , 设在侧面的折射角为 i' , 由折射定律, 可得 $\sin i' = n \sin \beta$ 。出射光线相对于入射光线的偏转角为 $\delta = i' - \beta$ 。由于 $i' > \beta$, 光线向轴线偏折, 形成一圆锥光束。光束的特征如图 2.5 所示, 先是圆锥形的会聚光线束, 之后成为圆锥形的空心的发散光束。经上下两母线的光束会出现重叠, 在重叠区域, 不考虑干涉衍射的情况下, 光强是不重叠区域光强的 2 倍。即屏上是一个亮的圆斑嵌套在不太亮的圆斑中。随着距离的增加, 外部圆斑先减小, 再增大, 内部圆斑先增大, 后减小。在某一处, 两圆斑的外缘重合, 这是光束最小处。再至某处, 圆斑成为一个圆环, 中间是暗的, 随距离增大, 圆环内外径同步线性增大, 但内外径之差保持不变。

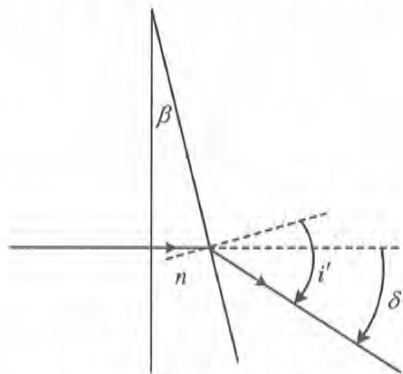


图 2.4 光线的折射

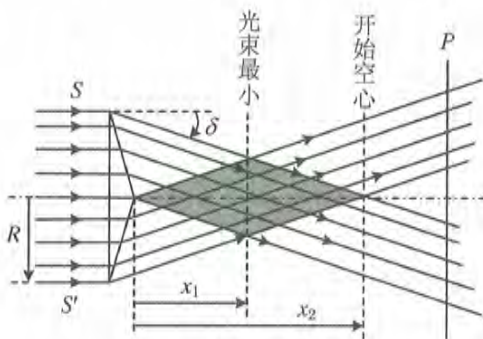


图 2.5 光束截面的变化

(2) 由于角度 β 很小, 于是折射角 $i' \approx n\beta$ 。从圆锥棱镜出射的光线相对于入射光线的偏转角为 δ , δ 也是出射光线与光轴的夹角, $\delta = i' - \beta = (n - 1)\beta$ 。

光束最小的位置是最外边缘光线与中心处另一方向光线相交处。若忽略圆锥的高度 h , 该处到锥顶的距离为

$$x_1 \approx \frac{R}{2} \cot \delta \approx \frac{R}{2(n-1)\beta}$$

开始出现空心的位置为

$$x_2 \approx R \cot \delta \approx \frac{R}{(n-1)\beta}$$

3. (第 7 届预赛) 如图 2.6 所示, 一半径为 R_1 的不透明黑球外面包着一半径为 R_2 的同心透明介质球层, $R_1/R_2 = 2/3$, 球层介质的材料折射率 $n = 1.35$ 。球层外表面的右半部分(图中 ABC 球面)为磨砂面。现用平行光从

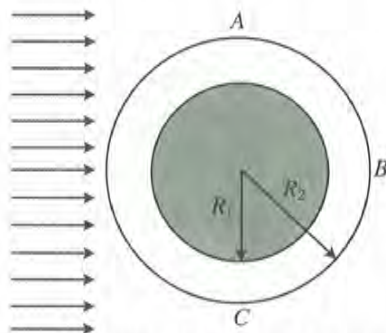


图 2.6 黑球外部包裹透明介质球层

因而,当 $n = 3/2$ 时,右侧球面被照明的部分是一圈亮线。而当 $n \geq 3/2$ 时,从 A 点折射进来的光线被内球遮挡,所以被照明区域消失。

4. (第 3 届预赛) 虹和霓是太阳光射入大气中的水珠时经折射、反射和色散产生的光学现象。虹的外圈是红色的,内圈是紫色的,霓的外圈是紫色的,内圈是红色的。虹是太阳光在水珠中经过 _____ 次折射和 _____ 次全反射形成的。霓是太阳光在水珠中经 _____ 次折射和 _____ 次全反射形成的。

【解】 如图 2.8 所示,虹是太阳光在水珠上经过 2 次折射和 1 次反射形成的。光在折射过程中出现色散,因而人可以看到彩色的光带。由于红光与水平线的夹角比蓝光大,所以看到的彩虹是红色在外环,蓝色在内环。

而霓是太阳光在水珠上经过 2 次折射和 2 次反射形成的,如图 2.9 所示。由于水珠对光的反射率较小,所以霓比虹要暗得多,只有在空气清澈的条件下才能观察到。同时,由于从水珠射出时,霓的散射与虹相反,所以看到红色在内环,蓝色在外环。

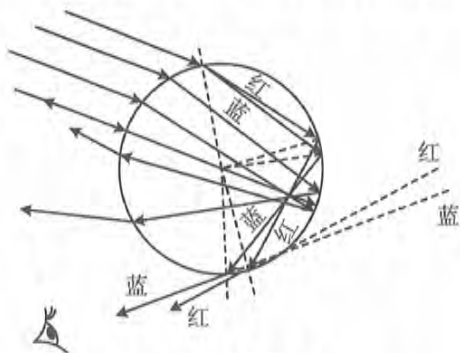


图 2.8 虹的形成

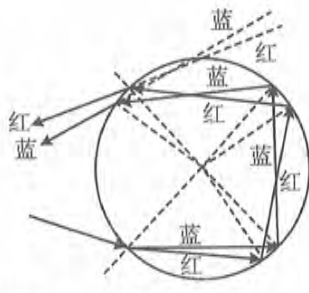


图 2.9 霓的形成

射到地球上的太阳光是平行光束,这样的光束被球形水珠折射、反射后,射向不同的方向,如图 2.10 所示。因而,经过一个水珠的光线中,只有特殊方向的光线能够进入我们的眼睛。

而且,由于阳光来自同一方向,因而,能够将光线反射进入我们眼睛的水珠分布在一个弧形上,如图 2.11 所示,所以我们看到的虹和霓都是弧形的。

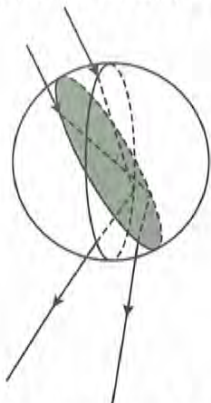


图 2.10 进入一个水珠的光线
从不同方向射出

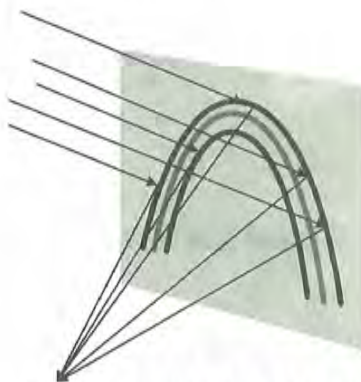


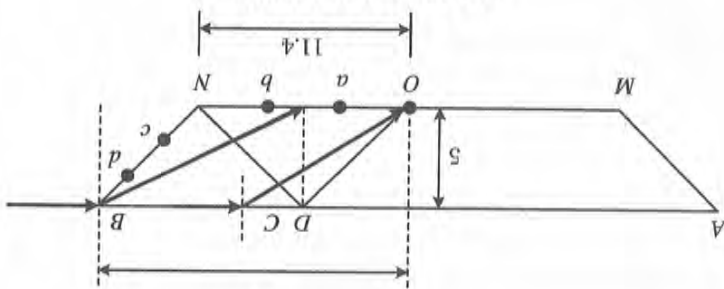
图 2.11 将光线射入眼睛的水珠
在空中的分布

显然, a, b 发出的光线不能通过全反射到达 O 点。而 c, d 发出的光线可以通过全反射到

$$i_0 = \arctan \frac{5.4}{5} = 48.74^\circ \sim 45^\circ$$

(2) 从池底外边缘 N 发出的光线, 经水面反射到达 O 点, 入射角应当是

图 2.13 进入水中的光线



$$\theta = 2i_c = \arcsin \frac{3}{4}$$

角只有射进入水中的, 光线 OC 与竖直线的夹角为全反射临界角。这时潜水员能看到整个天空, 但视去, 所看到的并不是最大范围的蓝天。

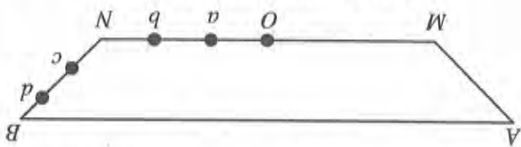
显然, 从水面的外缘 B 点沿水平方向入射的光线不能到达 O 点, 即潜水员向水池外缘望

$$i_c = \arcsin \frac{3}{4} = 48.59^\circ \sim 50^\circ$$

【解】(1) 水-空气界面的全反射临界角为

【分析】光线从空气进入水中, 由于折射, 方向改变, 所以潜水员在池底看到的是一幅截然不同的天空景象。

图 2.12 水池中的各个观察点



(2) 四个发光点 a, b, c, d 中, 其发出的光能通过全反射到达潜水员眼睛的是_____。

(1) 潜水员仰视时看到的蓝天图像对他的眼睛所张的视角为_____;

5. (26 属预赛) 图 2.12 所示为某一圆形水池的示意图(竖直面)。AB 为池中水面的直

径, MN 为水池底面的直径, O 为圆形池底的圆心。已知 ON 为 11.4 m, AM, BN 为斜坡, 池中水深 5.00 m, 水的折射率为 $4/3$ 。水的透明度极好, 不考虑水的吸收。图中 a, b, c, d 为四个发光点, 仰视水面的最大范围的直径为 AB 。在池底中心处有一凹槽, 一潜水员仰卧其中, 他的眼睛位于

6. (13届预赛) 如图 2.14 所示为一个盛有折射率为 n 的液体的槽, 槽的中部扣着一个对称屋脊形的薄壁透明罩 ADB , 顶角为 2φ , 罩内为空气, 整个罩子浸没在液体中. 槽底 AB 的中点处有一亮点 C , 试求出: 位于液面上方图示平面内的眼睛从侧面观察可看到亮点的条件 (液槽有足够的宽度, 罩壁极薄, 可不计它对光线产生折射的影响).

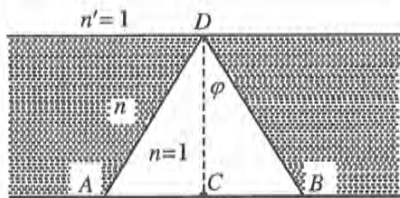


图 2.14 液体中的透明罩

【分析】 光线在透明罩和液面处都有可能发生全反射。

【解】 在水-空气界面处, 只有小于全反射临界角的光线才能射出水面, 这就是本题的限制条件. 将此处入射角记为 δ .

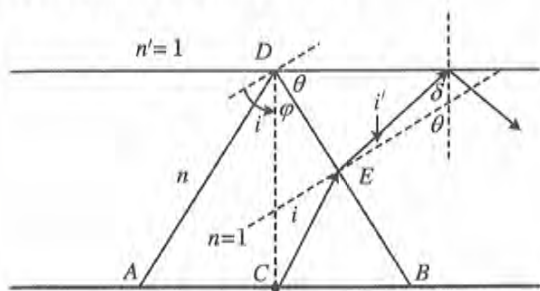


图 2.15 在透明罩及水面处的折射

如图 2.15 所示, 由于水面相对于透明罩的侧面转过角度 $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$, 因而可以看出在透明罩上, 折射角为

$$i' = \theta - \delta = \frac{\pi}{2} - (\varphi + \delta)$$

记 C 点发出的光线在透明罩侧面的入射角为 i , 由折射定律 $\sin i = n \sin i'$. 由于要求 $\delta \leq i_c = \arcsin \frac{1}{n}$, 因而必须 $i' \geq \frac{\pi}{2} - (\varphi +$

$i_c)$, 则

$$\sin i = n \sin i' \geq n \sin \left[\frac{\pi}{2} - (\varphi + i_c) \right] = n \cos(\varphi + i_c)$$

入射点越靠近 D , 入射角越大, 入射角最大时, 入射光线沿 CD 方向, 此时入射角为

$$i = \frac{\pi}{2} - 2\varphi + \varphi = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

因而要求 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos \varphi \geq n \cos(\varphi + i_c)$, 将该式进行以下整理:

$$\cos \varphi \geq n(\cos \varphi \cos i_c - \sin \varphi \sin i_c)$$

$$n \cos i_c - n \tan \varphi \sin i_c = n \cos i_c - \tan \varphi \leq 1$$

$$n \cos i_c = \sqrt{n^2 - n^2 \sin^2 i_c} = \sqrt{n^2 - 1}$$

最后得到 $\tan \varphi \geq \sqrt{n^2 - 1} - 1$.

7. (28届决赛) 如图 2.16 所示, 一个三棱镜 ABC 的顶角 α 小于 90° . 假设光线在纸面内以任意入射角入射到 AB 面上的 D 点, 经一次折射后, 又入射到 AC 面上, 且能在 AC 面上发生全反射. 已知光线在 AC 面上发生全反射的临界角为 θ ($\theta < 45^\circ$), AC 边足够长. 试求下列两种情形下分别求三棱镜顶角 α 的取值范围:

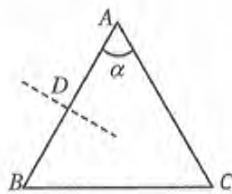


图 2.16 三棱镜及其侧面的法线

8. (20届复赛) 如图 2.19 所示, 一半径为 R 、折射率为 n 的玻璃半球, 放在空气中, 平面中央半径为 h_0 的区域被涂黑。一平行光束垂直入射到此平面上, 正好覆盖整个表面。Ox

$$\theta \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} - \theta$$

综合式(2)、式(3), 可得

- (3) $\theta + \alpha \leq 90^\circ$
- 但是, 当折射角 i'_1 增大时, 如果折射光线与 AC 面平行, 则不能射到 AC 面上。因而要求 $i'_1 + 90^\circ + \alpha \leq 180^\circ$ 。而最大的折射角为 θ , 所以有
- (2) $i_2 = \alpha \geq \theta$

此时 $i'_1 = 0$, 因而

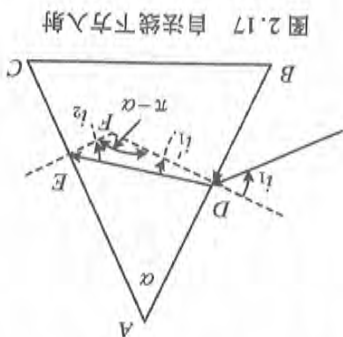


图 2.17 自法线下方入射

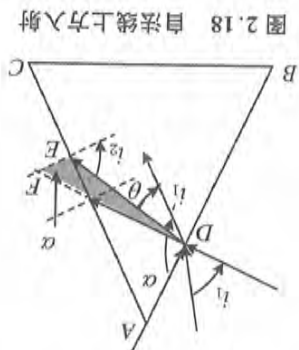


图 2.18 自法线上方入射

由于 i_1 越小, i'_1 也越小, i_2 越小, 所以在 $i_1 = 0^\circ$ 的条件下进行讨论即可。

$$i_2 = \angle DFE + i'_1 = \alpha + i'_1 \geq \theta$$

镜外部 AC 面一侧。这种情形下, $\angle DFE = \alpha$ 。 i_2 为 $\triangle DEF$ 的外角, 于是有

(2) 如图 2.18 所示, 当光线仅从 AB 面上法线的上方入射, 两侧面法线的交点 F 一定在棱

此时 $i'_1 = \theta$, 由式(1)得到 $\alpha - \theta \geq \theta$, 所以有 $\alpha \geq 2\theta$ 。

90°的条件下进行讨论即可。

由于 i_1 越小, i'_1 也越小, i_2 越大, 按题目要求, 光线在 AC 面总能发生全反射, 所以在 $i_1 =$

$$(1) \quad i_2 = \alpha - i'_1 \geq \theta$$

$\triangle DEF$ 中, 由于 $\angle DFE + i_1 + i_2 = 180^\circ$, 所以有 $i_1 + i_2 = \alpha$ 。即

四边形 $AEPD$ 中, D 点、E 点的顶角均为 90° , 则 $\angle DFE + \alpha = 180^\circ$ 。

的法线交于 F, F 点一定在棱镜内部。

(1) 如图 2.17 所示, 当光线仅从 AB 面上法线的下方入射, AB 过 D 的法线与 AC 过 E 点

面 AC 的入射点为 E, 入射角为 i_2 。

【解】 设 D 点处光线的入射角和折射角分别为 i_1 和 i'_1 , 自 D 点射入棱镜的光线在另一侧

在 AB 边的任意位置。

形, 利用该四边形可求出相应的角度之间的关系, 注意到 AC 边足够长, 所以 D 点实际上可取

【分析】 光线分别在棱镜的两侧面上折射和反射, 两侧面的法线在其中可构成一个四边

(2) 如果光线仅从 AB 面上法线的上方入射。

(1) 如果光线仅从 AB 面上法线的下方入射;

为以球心 O 为原点, 与平面垂直的坐标轴。通过计算, 求出坐标轴 Ox 上玻璃半球右边有光线通过的各点(有光线段)和无光线通过的各点(无光线段)的分界点的坐标。

【分析】 半径为球面的法线, 球内光线与半径的夹角即为光线在球面处的入射角。入射角大于全反射临界角的光线不能从球面射出。

【解】 如图 2.20 所示, 越靠近轴线的入射光线, 在球面上的入射角越小, 其折射光线与轴线的交点越远。而入射光线在到轴一定距离处, 其入射角大于全反射临界角, 其折射光线与轴的交点最近。

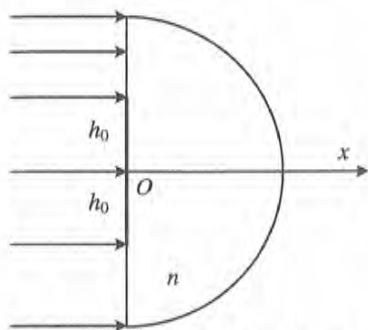


图 2.19 平面一侧中央被涂黑的玻璃半球

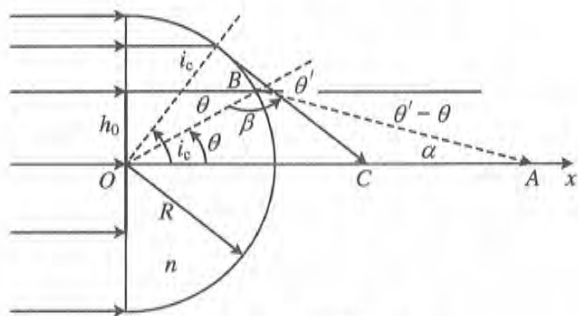


图 2.20 光线的折射

记发生全反射时, 折射光线与 x 轴的交点为 C 。

$$OC = \frac{R}{\cos i_c} = \frac{nR}{\sqrt{n^2 - n^2 \sin^2 i_c}} = \frac{nR}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

到轴线距离 h_0 的入射光线, 入射角记为 θ , 折射角记为 θ' , 则

$$\sin \theta = \frac{h_0}{R}, \quad \sin \theta' = n \sin \theta = \frac{nh_0}{R}$$

如图中所示, 有

$$\beta = \pi - \theta', \quad \alpha = \theta' - \theta$$

于是有

$$OA = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} R = \frac{\sin(\pi - \theta')}{\sin(\theta' - \theta)} R = \frac{\cos \theta'}{\sin(\theta' - \theta)} R$$

$$\frac{\cos \theta'}{\sin(\theta' - \theta)} = \frac{\cos \theta'}{\sin \theta' \cos \theta + \cos \theta' \sin \theta} = \frac{1}{\tan \theta' \cos \theta + \sin \theta}$$

$$\cos \theta' = \sqrt{1 - \sin^2 \theta'} = \sqrt{1 - \left(\frac{nh_0}{R}\right)^2} = \frac{1}{R} \sqrt{R^2 - (nh_0)^2}$$

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{h_0}{R}\right)^2} = \frac{1}{R} \sqrt{R^2 - h_0^2}$$

$$\tan \theta' = \frac{\frac{nh_0}{R}}{\frac{1}{R} \sqrt{R^2 - (nh_0)^2}} = \frac{nh_0}{\sqrt{R^2 - (nh_0)^2}}$$

$$\frac{1}{\tan \theta' \cos \theta + \sin \theta} = \frac{1}{\frac{1}{R} \sqrt{R^2 - h_0^2} \frac{nh_0}{\sqrt{R^2 - (nh_0)^2}} + \frac{h_0}{R}} = \frac{R}{\frac{nh_0 \sqrt{R^2 - h_0^2}}{\sqrt{R^2 - (nh_0)^2}} + h_0}$$

(2) 从图 2.22 中可以看出,上半部分圆弧的张角为 $i_c + i'$, 下半部分圆弧的张角 $i_c - i'$, 所

$$d_{\max} = \frac{4R}{3}, \quad d_{\min} = \frac{4R}{3}$$

即

$$d = y_1 + y_2 = \frac{2Rn \sin i_c}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} = \frac{\sqrt{1.5^2 - \sin^2 i}}{2R}$$

得到

$$\text{利用 } \cos i' = \sqrt{1 - \sin^2 i'} = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - n^2 \sin^2 i'} = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - \sin^2 i}$$

$$\text{分入射光范围 } y_2 = R \frac{\sin i_c}{\sin i_c} = R \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - i'\right)}{\sin i_c}$$

$$\text{半部分入射光范围 } y_1 = R \frac{\sin i_c}{\sin i_c} = R \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + i'\right)}{\sin i_c}, \text{ 能够出射的平面下半部}$$

角满足折射定律 $\sin i' = \frac{3}{2} \sin i$ 。根据图 2.22, 能够出射的平面上

(1) 全反射临界角为 $i_c = \arcsin \frac{3}{2}$, 光线进入圆柱后的折射

【解】 内部的光线如在圆柱面发生全反射, 则不能出射。

侧是圆柱面。

【分析】 此题与前一题相似, 只是入射光线的角度可以变化, 另一

【分析】 此题与前一题相似, 只是入射光线的角度可以变化, 另一

【分析】 此题与前一题相似, 只是入射光线的角度可以变化, 另一

【分析】 此题与前一题相似, 只是入射光线的角度可以变化, 另一

(1) 当平行入射光的入射角 i 从 0° 到 90° 变化时, 试求 d 的最大值

和最小值。

(2) 在如图 2.21 所示的平面内, 求出射光束与柱面相交的圆弧对

O 点张角 θ 与入射角 i 的关系, 并在掠入射时上述圆弧的位置。

【分析】 此题与前一题相似, 只是入射光线的角度可以变化, 另一

【分析】 此题与前一题相似, 只是入射光线的角度可以变化, 另一

【分析】 此题与前一题相似, 只是入射光线的角度可以变化, 另一

【分析】 此题与前一题相似, 只是入射光线的角度可以变化, 另一

【分析】 此题与前一题相似, 只是入射光线的角度可以变化, 另一

【分析】 此题与前一题相似, 只是入射光线的角度可以变化, 另一

【分析】 此题与前一题相似, 只是入射光线的角度可以变化, 另一

【分析】 此题与前一题相似, 只是入射光线的角度可以变化, 另一

【分析】 此题与前一题相似, 只是入射光线的角度可以变化, 另一

【分析】 此题与前一题相似, 只是入射光线的角度可以变化, 另一

【分析】 此题与前一题相似, 只是入射光线的角度可以变化, 另一

【分析】 此题与前一题相似, 只是入射光线的角度可以变化, 另一

【分析】 此题与前一题相似, 只是入射光线的角度可以变化, 另一

【分析】 此题与前一题相似, 只是入射光线的角度可以变化, 另一

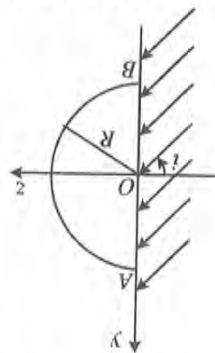
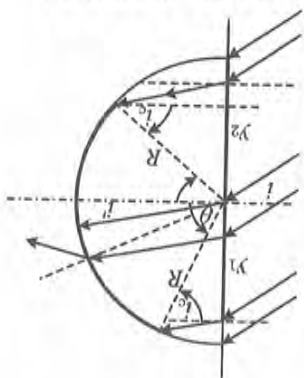


图 2.21 射向半圆柱体平

图 2.22 光在圆柱面上



的全反射

$$OA = \frac{R \sqrt{R^2 - (nh_0)^2}}{nh_0 \sqrt{R^2 - h_0^2} + h_0 \sqrt{R^2 - (nh_0)^2}} = \frac{\sqrt{R^2 - (nh_0)^2} [n \sqrt{R^2 - h_0^2} - \sqrt{R^2 - (nh_0)^2}]}{\sqrt{R^2 - (nh_0)^2} [n \sqrt{R^2 - h_0^2} - \sqrt{R^2 - (nh_0)^2}]} = \frac{h_0 (n^2 - 1)}{h_0 (n^2 - 1)}$$

以总的张角为

$$\theta = i_c + i' + i_c - i' = 2i_c$$

掠入射时, $i = \frac{\pi}{2}$, $i' = i_c$, 被照亮圆弧只在上半部分。

10. (11 届预赛) 有一半导体砷化镓发光管, 它发出波长为 $0.9 \mu\text{m}$ 的红外光, 发光区为直径 AB 等于 3 mm 的圆盘, 发光面上覆盖一折射率 $n = 3.4$ 的半球形介质, 如图 2.23 所示, 问: 要使发光区发出的全部光线在球面上都不发生全反射, 介质半球的半径 R 至少应该多大?

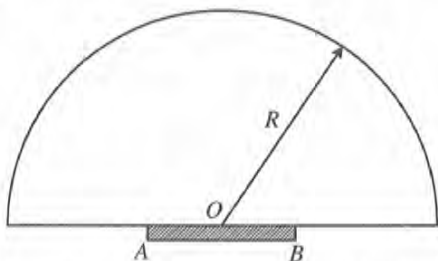


图 2.23 发光圆盘位于半球底部

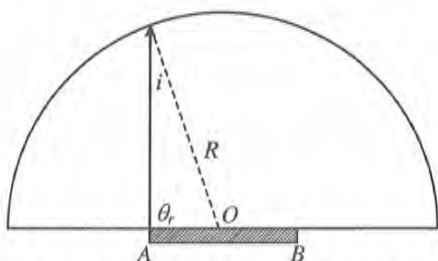


图 2.24 光线在球面上的入射角半球底部

【分析】光源为圆盘形, 上面每一点都可以沿各个方向发出光线。因而要通过比较判断出不同位置发出光线在球面上入射角的相对大小。

【解】设发光圆盘的半径为 r 。如图 2.24 所示, 易知在球面上同一点, 圆盘边缘发出的光线的入射角是最大的。

由于 $\sin i = \frac{r}{R} \sin \theta$, 当 $\theta = \pi/2$ 时, 入射角 i 最大。 $\sin i_{\max} = \frac{r}{R}$ 。而全反射临界角满足的条件为 $\sin i_c = \frac{1}{n}$, 则 $\frac{r}{R} \leq \frac{1}{n}$, 即 $R_{\min} = nr = 10.2 \text{ mm}$ 。

11. (第 1 届预赛) 光导纤维能够长距离地传输光信号是利用_____现象。每根光导纤维的折射率沿半径方向的分布是_____。

【解】光导纤维(简称光纤)是利用光的全反射性质传输光信号的。

在可见光波段, 光从折射率较大的媒质(即光密媒质)射向折射率较小的媒质(简称光疏媒质), 在入射角大于全反射临界角的情况下才能发生全反射。所以光纤的轴线处折射率较小, 靠外部分折射率较大。

实际的光纤, 依其折射率沿径向的分布, 可分为两类。

一类是阶跃型的, 这类光纤由两层介质构成, 如图 2.25 所示。内部是纤芯, 外部是包膜。由于纤芯是均匀媒质, 光线在其中沿直线传播, 在纤芯与包膜的界面处折射率突变, 发生全反射。



图 2.25 阶跃型光纤

注：据参考文献[1]的第102页，本题中 $n_1 = 1.5, n_2 = 1.4$ ，由此算得 $i_{\max} = 32.6^\circ$ 。
 $i_{\max} = \arcsin \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = 30.0^\circ$

端面处，入射角的取值范围为 $i = 0 \sim i_{\max}$ ，而

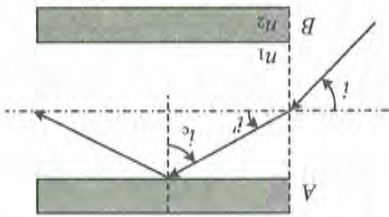
$$\sin i_{\max} = n_1 \sin i' = n_1 \cos i_c = \sqrt{n_1^2 - n_2^2 \sin^2 i_c} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2 \sin^2 i_c} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2 \frac{n_1^2}{n_2^2}} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

而在端面处的折射角 $i' = \frac{\pi}{2} - i_c$ ，因而可根据折射定律得到最大的入射角为

图 2.28 在光纤端面处的入射光线



图 2.29 光纤界面处全反射的条件

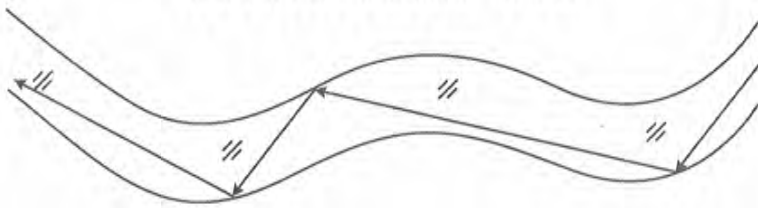


【解】如图 2.29 所示，在光纤内外层的界面处，全反射临界角为 $i_c = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$ 。

【分析】光纤内芯为光密媒质，外层为光疏媒质，在内外两层媒质的界面处，光线的入射角大于全反射临界角 i_c 即可发生全反射，根据 i_c 可推算出端面处入射角 i 的范围。

12. (第 7 届预赛) 光纤纤维是利用全反射传导光信号的装置，图 2.28 所示为一光纤纤维。AB 为其端面，纤维内芯材料的折射率 $n_1 = 1.3$ ，外层材料的折射率 $n_2 = 1.2$ ，在如图所示的情况下，试求入射角 i 在什么范围内的光线都可在此纤维内传递。

图 2.27 光线在弯曲光纤中的全反射



光纤的纤芯是用玻璃拉制的纤维，由于很细，所以是可以弯曲的，如图 2.27 所示。

图 2.26 梯度型光纤



另一类是梯度型的，折射率沿径向逐渐减小，如图 2.26 所示，由于媒质的折射率是渐变的，光线在其中沿曲线传播，愈远离轴线，入射角和折射角愈大，当角度达到某一值时，光线折返回光纤内部。

13. (2 届预赛) 如图 2.30 所示为一根直的 1 km 长的玻璃光学纤维, 其两端是平面且与轴线垂直。一束激光 L 以对纤维轴 AA' 成一个可变的角 θ 射入纤维。玻璃对这种激光的折射率为 1.50。若 θ 取值在 $0 \sim 5^\circ$ 的范围内, 试计算激光沿纤维传导所需的最长和最短时间之差。

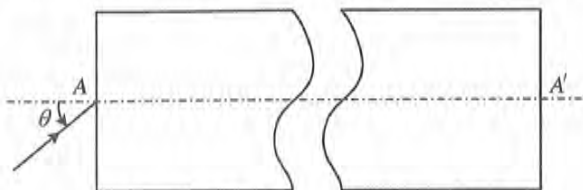


图 2.30 光线以入射角 θ 通过端面射入光纤

【分析】 可根据光线在其中的光程计算出传播所用的时间。

【解】 以 θ 从端面入射的光线, 在纤芯中的折射角 θ' 满足 $\sin \theta = n \sin \theta'$ 。

如图 2.31 所示, 若光纤纤芯的半径为 r , 则光线每一个周期所传过的路程为

$$L(\theta) = \frac{4r}{\sin \theta'} = \frac{4nr}{\sin \theta}$$

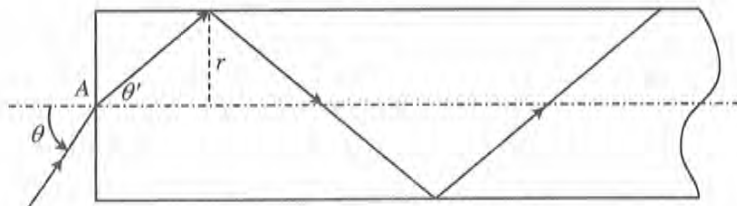


图 2.31 光线在光纤内部的传播

这段路程所对应的光纤轴线长度为

$$L(0) = L(\theta') \cos \theta' = \frac{4r \cos \theta'}{\sin \theta'} = \frac{4r \sqrt{n^2 - n^2 \sin^2 \theta'}}{n \sin \theta'} = \frac{4r \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{\sin \theta}$$

时间差为

$$\Delta T = \frac{L(\theta) - L(0)}{v} = \frac{4nr(n - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta})}{c \sin \theta}$$

传过长度为 1 000 km 的光纤的时间差为

$$\Delta t = \Delta T \frac{1\,000 \times 10^3}{L(0)} = \frac{4 \times 10^6 n (n - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta})}{4c \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} = 8.46 \times 10^{-9} \text{ s}$$

14. (16 届决赛) 在光导纤维制造过程中, 由于拉伸速度不均匀, 会使拉出的光纤偏离均匀的圆柱体, 而呈圆锥状。现把一段长为 L 、折射率为 $n (= 1.5)$ 的光纤简化为细长圆锥体的一部分, 其顶角很小, 两端截面的半径分别为 R_1 和 R_2 , R_1 略大于 R_2 。图 2.32 是过光纤轴线的剖面图。

(1) 若将该光纤置于空气中, 求在图示平面内从大头入射并能从小头出射的光线的最大入射角。

(2) 计算以最大入射角入射的光线在光纤中反射的次数。

【分析】 在光纤内部, 光线要满足全反射的条件, 并且不能由于反射而折返。射向另一端

光线第二次在向对面的反射,若以第一反射面 A_1B_1 为基准作第二反射面 AB 的镜像 A_2B_2 ,则等效于第一次入射光线的延长线在镜像 A_2B_2 的反射……依此类推,光线在两相对面之间连续反射的过程,就可以通过循环作两个面的镜像,并用一条与第一次入射线平行的直线代替多次反射的光线。若共经过了 m 次反射,则作 m 次镜像即可。

如果将 AB 、 A_1B_1 、 A_2B_2 等延长,则它们将相交于同一点 O ,由于光纤很细,两个端面很小,图中 $AA_1A_2\cdots A_m$ 和 $BB_1B_2\cdots B_m$ 近似为以 O 为圆心的圆弧,相应的半径分别为

$$r_A = \frac{mR_1}{2m\delta} = \frac{R_1}{2\delta}, \quad r_B = \frac{mR_2}{2m\delta} = \frac{R_2}{2\delta}$$

设光线在两端面的入射点分别为 C 和 D ,按光纤的性质,要求

$$\theta_m \geq i_c, \quad i_0 < i_c$$

其中 i_c 为全反射临界角。

则根据图 2.35,在 $\triangle COD$ 中应用正弦定理,可得

$$\sin i' = \frac{OD}{OC} \sin i_0 = \frac{r_A}{r_B} \sin i_0 = \frac{R_1}{R_2} \sin i_0$$

当 $i_0 = i_c$,可得最大的 i' ,由此可得左端面最大的入射角 i_{\max} ,即

$$\sin i_{\max} = n \sin i' = \frac{nR_1}{R_2} \sin i_c$$

而 $n \sin i_c = 1$,所以 $i_{\max} = \arcsin \frac{R_1}{R_2}$ 。

而由图 2.36 可得到 $\theta_m - \delta + i_0 = \frac{\pi}{2}$,所以有

$$\theta_m = \frac{\pi}{2} - i_0 + \delta$$

当 $i_0 = i_c$, $\theta_m = \frac{\pi}{2} - i_c + \delta$,由于 $i_c = \arcsin \frac{1}{1.5} = 41.8^\circ$,而 δ 是一个很小的角度,所以一定可以满足 $\theta_m > i_c$ 。

以最大角度入射时,反射的次数为

$$m = 1 + \frac{\theta_1 - \theta_m}{2\delta}$$

而 $\theta_1 = \frac{\pi}{2} - i' + \delta$,所以

$$\theta_1 - \theta_m = i_c - i' = \arcsin \frac{1}{n} - \arcsin \frac{R_1 \sin i_c}{R_2} = \arcsin \frac{1}{n} - \arcsin \frac{R_1}{nR_2}$$

由此可算得

$$m = 1 + \frac{\arcsin \frac{1}{n} - \arcsin \frac{R_1}{nR_2}}{R_1 - R_2} L$$

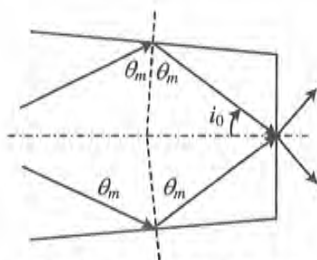


图 2.36 端面处的角度关系

15. (17 届复赛) 普通光纤是一种可传输光的圆柱形细丝,由具有圆形截面的纤芯 A 和包层 B 组成, B 的折射率小于 A 的折射率,光纤的端面与圆柱体的轴垂直,由一端面射入的光在很长的光纤中传播时,在纤芯 A 和包层 B 的分界面上发生多次全反射。现在利用普通光纤测量流体 F 的折射率,实验方法如下:让光纤的一端(出射端)浸在流体 F 中,令与光纤轴平行的

(2) 这时说明光纤的参数都不可用, 则只好用已知的外部介质的参数进行推算。

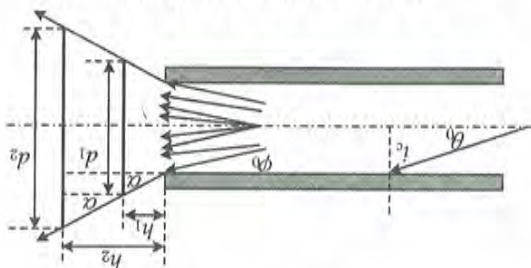
$$n_F = \frac{n_A \sin \varphi_0}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}{\tan \alpha} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{d_2 - d_1}{h_2 - h_1}\right)^2}}{\frac{d_2 - d_1}{h_2 - h_1}} = \frac{\sqrt{(h_2 - h_1)^2 - (d_2 - d_1)^2}}{d_2 - d_1}$$

$$n_F = \frac{n_A \sin \varphi_0}{\sin \alpha} = \frac{n_A \sin \varphi_0 \sqrt{(h_2 - h_1)^2 - (d_2 - d_1)^2}}{d_2 - d_1}$$

由折射定律 $n_A \sin \varphi_0 = n_F \sin \alpha$, 可得

$$\varphi_0, \text{ 折射角记为 } \alpha, \text{ 则 } \tan \alpha = \frac{d_2 - d_1}{h_2 - h_1}.$$

图 2.39 光线在光纤中的路径



题中已知在入射端面, 光纤中边缘光线和轴的夹角为 α_0 , 若 $\alpha_0 < \theta_0$, 则光线在光纤中与轴的最大夹角为 α_0 ; 若 $\alpha_0 > \theta_0$, 光线在光纤中与轴的最大夹角为 θ_0 。所以, 取两者中较小的, 记为 φ_0 。从图 2.39 中可以看出, 从光纤的另一端面的边缘出射的光线, 入射角为

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} - i_c = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{n_A}{n_B}$$

这样的光线与光轴的夹角为

$$\text{应大于 } i_c = \arcsin \frac{n_A}{n_B}$$

【解】(1) 能够在光纤中远距离传播的光线, 要在纤芯壁上满足全反射条件, 即其入射角

图 2.37 光线从端面进入光纤

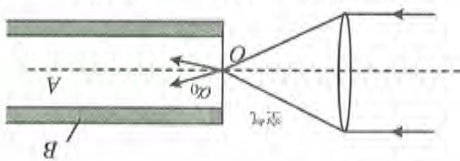
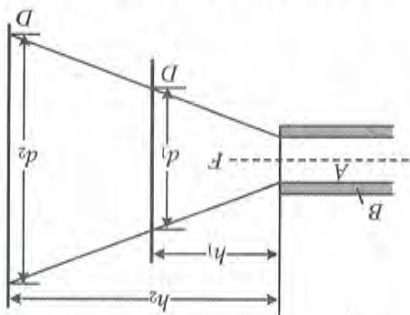


图 2.38 从光纤另一端面出射的光线



(2) 若 n_A, n_B 和 α_0 均为未知量, 如何通过进一步的实验以测出 n_F 的值?

(1) 若已知 A 和 B 的折射率分别为 n_A 与 n_B , 求被测流体 F 的折射率 n_F 的表达式。

单色平行光束经凸透镜折射后会聚在光纤入射端面的中心 O, 经端面折射进入光纤, 在光纤中传播。由 O 点出发的光束为圆锥形, 已知其边缘光线和轴的夹角为 α_0 , 如图 2.37 所示。最后光从另一端面出射进入流体 F。在距出射端面 h_1 处放置一垂直于光纤轴的毛玻璃屏 D, 在 D 上出现一圆形光斑, 测出其直径为 d_1 , 然后移动光屏 D 至距光纤出射端面 h_2 处, 再测出圆形光斑的直径 d_2 , 如图 2.38 所示。

例如,可以将光纤的出射端面置于空气中,用题中的方法测量不同距离处的两个光斑,就可得出光纤在空气中的折射角。设该折射角为 α_1 ,则有

$$n_A \sin \varphi_0 = n_0 \sin \alpha_1$$

于是有

$$n_F = \frac{n_0 \sin \alpha_1}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha_1 \sqrt{(h_2 - h_1)^2 - (d_2 - d_1)^2}}{d_2 - d_1}$$

16. (21 届决赛) 有一光导纤维,光芯为折射率 $n = 1.500$ 的透明度极好的介质,其截面半径为 r ;光芯外面包层的折射率 $n' = 1.400$ 。有一半导体激光器 S ,位于光纤轴线的延长上,发出半角宽为 30° 的光束。为便于使此光束全部进入光纤,在光纤端面处烧结了一个其材料与光芯相同的、半径为 R 的球冠 QAQ' ,端面附近的结构如图 2.40 所示(包层未画出), S 可看作点光源,光纤放在空气中,空气的折射率 n_0 按 1.000 计算。

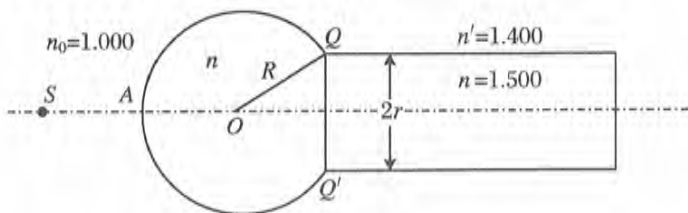


图 2.40 光纤的端面为一球冠

(1) 若要半导体激光器发出的光能够全部射到球冠上,则光源 S 离 A 的距离 x 应满足什么条件?

(2) 如果 $R = 1.8r$,光源 S 与 A 的距离为 R ,入射光线与轴的夹角用 α 表示,则 α 角分别为 $\alpha_1 = 30^\circ$ 、 $\alpha_2 = 25^\circ$ 和 $\alpha_3 = 20^\circ$ 的三根光线能否经过全反射在光纤中传播?

【解】 (1) 如图 2.41 所示,若光源发出的光线与球冠相切,则 $\overline{SO} = \frac{R}{\sin \varphi}$ 。 S 到 A 点的距离为

$$x = \overline{SA} = \frac{R}{\sin \varphi} - R = R \left(\frac{1}{\sin 30^\circ} - 1 \right) = 2R$$

(2) 如图 2.42 所示,与光纤轴线夹角为 α ,在球冠上 M 点入射,设入射角为 θ 。在 $\triangle SMO$ 中,根据正弦定理可得到

$$\sin \theta = \frac{2R}{R} \sin \alpha = 2 \sin \alpha$$

若该光线在球冠上的折射角为 ω ,则 $n \sin \omega = \sin \theta = 2 \sin \alpha$ 。

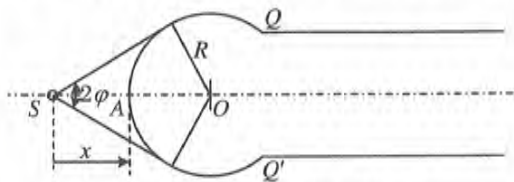


图 2.41 与球冠相切的光线

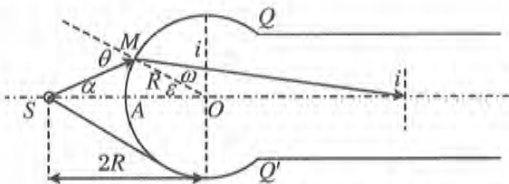


图 2.42 折射进入球冠的光线

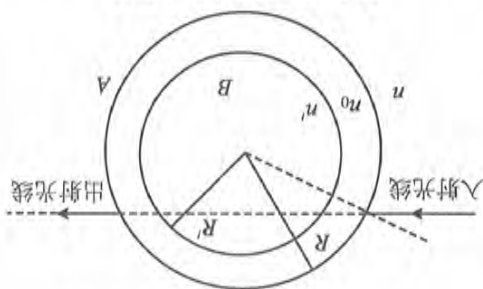


图 2.43 气泡中的介质球

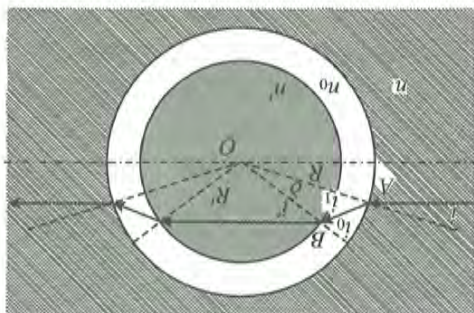


图 2.44 光线的径迹

$$n \sin i = n_0 \sin i_1, \quad n_0 \sin i_0 = n' \sin i'$$

【解】(1) 如图 2.44 所示, 取任意一条光线, 记球心为 O , 设该光线在两个界面处的入射点分别为 A, B , 在 A 点的入射角和折射角分别为 i 和 i_1 ; 在 B 点的入射角和折射角分别为 i_0 和 i' 。在 A, B 两点, 折射定律为

【分析】由于球面的对称性是最高的, 所以出射光线与入射光线都是左右对称的。在本题图中, 内球中的光线是水平方向的。

比是多少?

何入射角和折射角的数值都不大于 0.1 rad , 则符合此条件的入射光束占外球面上光束的百分

(2) 如果两球面间的介质不是气体而是一种透明液体(其折射率仍用 n_0 表示), 并要求任

2.43 所示, 求介质 B 的折射率 n' 和球 B 的半径 R' 必须满足的关系式。

(1) 如果任意一条在介质 A 中射向气泡表面的入射光线在通过各介质界面时的入射角和折射角都满足 $\sin \theta \approx \theta$ 的条件, 且该光线再进入介质 A 时能沿原入射光线的方向前进, 如图

17. (19 届决赛) 在折射率为 n 的介质 A 中有一半径为 R 的球形气泡, 气体的折射率为 n_0 , 现在在气泡中再放一个与气泡同心的由透明介质 B 构成的球, 并令一均匀平行光束射向

$$\text{全反射临界角为 } \sin i_c = \frac{n'}{n}$$

$$\sin i = \cos(\theta - \alpha + \omega)$$

$$i = \frac{\pi}{2} - \varepsilon + \omega = \frac{\pi}{2} - (\theta - \alpha) + \omega$$

这条光线在纤芯与包膜界面的入射角为 i , 则

在 $\triangle AOB$ 中, $\sin \angle OAB = \sin i_1 = \frac{n \sin i}{n_0}$, $\sin i_0 = \sin \angle OBA = \frac{BO}{AO} \sin \angle OAB$, 所以在 $\triangle AOB$ 中, $\sin \angle OAB = \sin \angle OBA = \frac{BO}{AO} \sin \angle OAB$, 所以

$$R' = BO = R \frac{\sin \angle OAB}{\sin i_0} = R \frac{n \sin i}{n_0 \sin i_0} = R \frac{n \sin i}{n_0 \sin i_0} = R \frac{n \sin i}{n_0 \sin i_0} \approx R \frac{n i}{n_0 i_0}$$

角度很小时, 折射定律为 $n i = n_0 i_1, n_0 i_0 = n' i'$ 。因而有

$$i = \frac{n' - n_0}{n' + n_0} i'$$

$$i_1 = i + i_0 - i'$$

记 $\angle AOB = \delta$, 则在 $\triangle AOB$ 中, 有关系 $\delta = i_0 - i_1$, 所以 $i' = i + i_0 - i_1$, 即

即得

$$R' = R \frac{n(n' - n_0)}{n'(n - n_0)}$$

(2) 第一种情形, $n > n_0$, 球面间的光线向上偏折, 就是图 2.44 所示的情形, 则相关的角中, i_0 最大, 则只要 $i_0 = 0.1 \text{ rad}$ 即可。而

$$i = \frac{n_0(n' - n_0)}{n'(n - n_0)} i_0$$

因而满足条件的光束在外球面上的截面的半径为 Ri , 占射到外球面上的光束的比例为

$$\frac{(Ri)^2}{R^2} = \left[\frac{n_0(n' - n_0)}{n'(n - n_0)} i_0 \right]^2 = 0.01 \left[\frac{n_0(n' - n_0)}{n'(n - n_0)} \right]^2$$

第二种情形, $n < n_0$, 球面间的光线向下偏折, 如图 2.45 所示。

此时 i' 为最大的角, 则只要 $i' = 0.1 \text{ rad}$ 即可。

而

$$i = \frac{n' - n_0}{n - n_0} i'$$

所以满足条件的光束占射到外球面上的光束的比例为

$$\frac{(Ri)^2}{R^2} = \left(\frac{n' - n_0}{n - n_0} i' \right)^2 = 0.01 \left(\frac{n' - n_0}{n - n_0} \right)^2$$

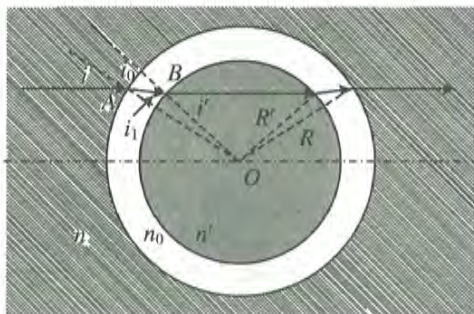


图 2.45 $n < n_0$ 时光线的径迹

18. (9 届预赛) 设有一块透明光学材料, 由折射率略有不同的许多相互平行、厚度为 $d = 0.1 \text{ mm}$ 的薄层密接构成。图 2.46 表示与各薄层垂直的一个截面, AB 为此材料的端面, 与薄层界面垂直。 OO' 表示截面的中心线。各薄层的折射率 n_k 的数值为 $n_k = n_0 - k\nu$, 其中 $n_0 = 1.4142$, $\nu = 0.0025$ 。今有一光线 PO 以入射角 $\theta_0 = 30^\circ$ 射向 O 点。求此光线在材料内能够达到的离 OO' 最远的距离。

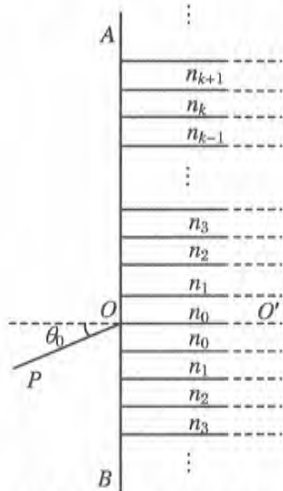


图 2.46 折射率不同的多层介质

【解】 光线在进入媒质时, 折射角为

$$\theta'_0 = \arcsin\left(\frac{\sin 30^\circ}{1.4142}\right) = \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}} = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4}$$

在第一个分界面处, 入射角为

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{2} - \theta'_0 = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin \alpha_0 = \cos\left(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{4}\right)}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{7}{8}}$$

之后的折射定律为

$$n_0 \sin \alpha_0 = n_1 \sin \alpha_1 = \dots = n_k \sin \alpha_k = \dots$$

直至出现全反射, 然后向下折射。由于出现全反射的条件是

图 2.48 将 A 分层, 设每一层中是均匀的媒质

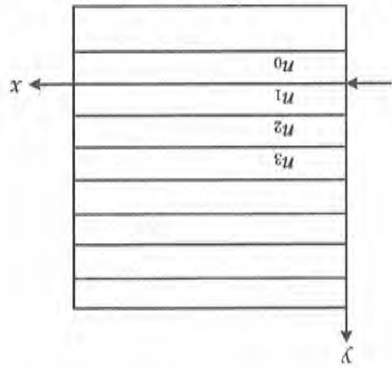
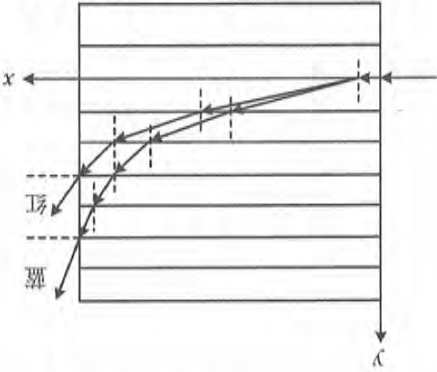
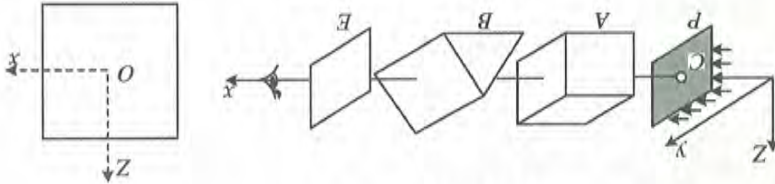


图 2.49 光线在 A 中的偏折与色散



【分析】在玻璃立方体 A 的内部, 由于折射率沿 y 的正方向逐渐增大, 为了便于分析, 可将其分为一系列垂直于 y 方向的薄层, 并认为每一层中的折射率相等, 第 i 层的折射率为 n_i , 如图 2.48 所示。这样一来, 各层的法线沿 y 方向。光线在 A 的表面处正入射, 入射角为 0, 折射角亦为 0。但是, 进入 A 的内部, 对于分层的媒质, 由于法线沿 y 方向, 所以入射角为 90° 。设刚刚进入 A 中的光线, 处于 0、1 两层的界面处。即对于射层, 入射角 $i_0 = 90^\circ$ 。根据折射定律 $n_0 \sin i_0 = n_1 \sin i_1$, 可得 $\sin i_1 = n_0/n_1$ 。由于 $\sin i_1 \leq 1$, 所以光线只能向折射率增大的一侧传播。在传播过程中, $n_0 \sin i_0 = n_1 \sin i_1 = \dots = n_i \sin i_i = \dots$, 由于媒质的折射率逐渐增大, 所以, 光线与法线之间的夹角逐渐减小, 光线传播的路径如图 2.49 所示。

图 2.47 折射光具组



19. (3 届预赛) 如图 2.47 所示, 一束平行白光沿 x 方向通过屏 P 上小孔 C 后, 射向玻璃立方体 A。设 A 的折射率在 y 方向上随着 y 值的增加而线性增大; 但在与 y 轴垂直的平面内均匀。从 A 射出的光线经过折射率均匀的玻璃三棱镜 B 后, 照到与 x 轴垂直的观察屏 (毛玻璃) E 上。试在右图中定性的画出所看到的 E 上的图像。

$$n_k = n_0 - kv = 1.4142 - 0.0025k$$

$$n_0 \sin \alpha_0 = n_1 \sin \alpha_1 = \dots = n_{k-1} \sin \alpha_{k-1} = n_k$$

$$k = \frac{1.4142 - n_0 \sin \alpha_0}{0.0025} = 400\sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7}{2}} \right) = 36.5$$

$$(k+1)d = 38 \times 0.1 = 3.8 \text{ (mm)}$$

说明在进入 $k=37$ 层后发生全反射, 则最远距离为

解得

当每层的厚度趋于无限小时,由分段折射表示的光线就变成了一条光滑的曲线。

同时,光在媒质中还有色散,在每一层中,短波部分的折射率较大,而长波部分的折射率较小,所以短波成分的光线与法线间的夹角比长波成分要小。

所以,如果玻璃立方体沿 x 方向的厚度不是很大,光线可以从另一侧面射出,射出的光线由于色散而成为沿 y 方向的彩色光带,波长较短的蓝光在 y 值较大的区域。

这样的直线型的彩色光带射入三棱镜 B ,从另一侧面出射,蓝光的偏转角较大,因而蓝色光从更靠近棱镜底部的位置出射,形成一条弯曲的彩色光带,继续传播,投射到毛玻璃 E 上。

毛玻璃的表面是粗糙的,射到毛玻璃上的光被漫反射,可以在各个角度上方便地观察到。所以观察者在毛玻璃上可以看到一条沿 y 方向扩展、并向 $-z$ 方向弯曲的彩色光带。

【解】 根据上述分析, E 上的图像如图 2.50 所示。

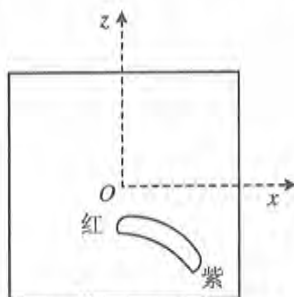


图 2.50 接收屏上的图像

光学 2 几何光学的成像定理

几何光学的成像定理及其符号约定

符号约定是每次成像过程中关于物距、像距、物高、像高以及光线角度正负的约定。这种约定是个人的偏好和习惯,无关优劣。但是符号约定不同,成像公式的形式也不同。

1. 对每个成像元件,可以用成像定理确定物像关系

1.1 单个折射球面、单个反射球面、单个薄透镜是成像元件。

1.2 每个成像元件将光线所在的空间分为物方和像方。对于成像元件来说,入射光线所在的空间是物方,出射光线所在的空间是像方。

1.3 理想的成像元件能够将物方的同心光束变换为像方的同心光束,所以每个成像元件都能实现成像。

1.4 实际的成像元件能够对傍轴光束实现成像。

1.5 对光具组采用逐次成像法进行处理,物首先经第一个元件成像,第一个元件的像是第二个成像元件的物,再经第二个元件成像,……依此类推。若第二原件到第一原件的距离为 d_{21} ,则第二次的物距 s_2 与第一次的像距 s'_1 之间的关系为 $s_2 = d_{21} - s'_1$,……依此类推。

1.6 厚透镜是由两个折射球面构成的光具组。

2. 不同类型成像元件的成像公式及像的横向放大率

2.1 单个折射球面

$$\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n' - n}{r} \quad \text{或} \quad \frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1$$

$$f = \frac{nr}{n' - n}, \quad f' = \frac{n'r}{n' - n}$$

其中, s 、 s' 分别为物距、像距, n 、 n' 分别为物方媒质、像方媒质的折射率, r 为球面的曲率半径,

图 2.51 立体图

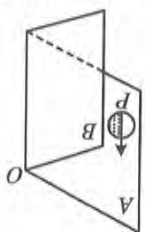
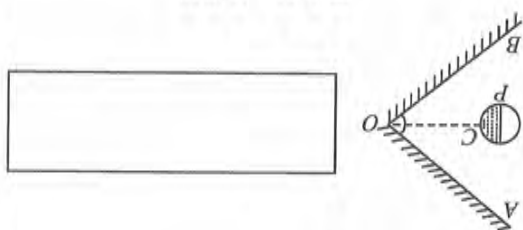


图 2.52 俯视图



1. (11 题预兼) 要在一张照片上同时拍摄物体正面和几个不同侧面的像, 可以在物体的后面放两个直立的大平面镜 AO 和 BO , 使物体和它对两个平面镜所成的像都摄入照相机, 如图 2.51 所示。图中带箭头的圆圈 P 代表一个人的头部, 白色半圆代表人的脸部, 此人正面对着照相机的镜头; 有斜线的半圆代表脑后的头发; 箭头表示头顶上的帽子。图 2.52 为俯视图, 若两平面镜的夹角 $\angle AOB = 72^\circ$, 设人头的中心恰好位于角平分线 OC 上, 且照相机到人的距离远大于人到平面镜的距离。

- 3.1 关于球面的曲率半径: 向物方的凸球面半径为正, 凹球面半径为负。
- 3.2 关于物距、像距: 实物、实像的距离为正; 虚物、虚像的距离为负。
- 3.3 关于光线的角度: 从光轴或球面的法线算起, 逆时针方向为正; 顺时针方向为负。
- 3.4 关于物、像的高度: 向上为正, 向下为负。

3. 上述物像公式和横向放大率基于以下的符号约定

其中 r_1, r_2 分别在朝向物方、像方的球面的曲率半径, n_L 为透镜材料的折射率。

$$\beta = -\frac{ns'}{n''}$$

像的横向放大率为

$$f = \frac{r_1}{n_L - n} + \frac{r_2}{n' - n_L} = \frac{1}{n}, \quad f' = \frac{r_1}{n_L - n} + \frac{r_2}{n' - n_L} = \frac{1}{n'}$$

$$\frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = \frac{n_L - n}{r_1} + \frac{n' - n_L}{r_2} \quad \text{或} \quad \frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = 1$$

2.3 单个薄透镜

$$\beta = -\frac{s'}{s}$$

像的横向放大率为

$$f = f' = -\frac{r}{2}$$

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = -\frac{1}{r} \quad \text{或} \quad \frac{1}{f'} + \frac{1}{f} = 1$$

2.2 单个反射球面

$$\beta = -\frac{ns'}{n''}$$

像的横向放大率为

f, f' 分别为物方、像方焦距, 下同。

(1) 试画出 P 的所有的像的位置并用空白和斜线分别表示人脸和头发, 以表明各个像的方位。

(2) 在图 2.52 右边的方框中画出照片上得到的所有的像(分别用空白和斜线表示人脸和头发, 用箭头表示头顶上的帽子)。

【分析】 物经平面镜反射在对称位置成一等大虚像。被反射的光线射向其他反射镜, 也将反射成像。可以将这样的问题用逐次成像法处理, 即将第一次所成的像作为第二次成像时的物, 就能搞清楚每一次的成像和最终的像。

【解】 如图 2.53 所示, P 经过镜 M_1 反射成像 1, 经过镜 M_2 反射成像 2。但是, 镜 M_1 的反射光线射到 M_2 上, 又可反射成像, 相当于将像 1 作为 M_2 的物, 因而成像 3。同样可得像 2 经镜 M_1 所成的像 4。这样, 光线可以在两镜之间来回反射无穷多次, 并成无穷多个像。但是, 由于两镜间的夹角为 72° , 像的位置出现重合, 则包括物在内, 共在一周的 5 个等分点上有像。

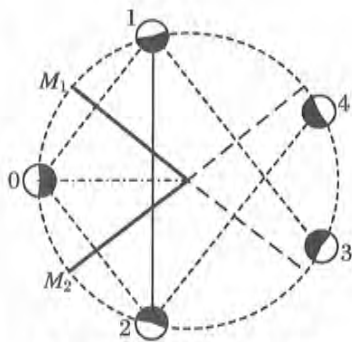


图 2.53 经反射镜多次成像

用照相机拍摄所得到的, 是上述 5 个物像在一个平面上的投影, 如图 2.54 所示。

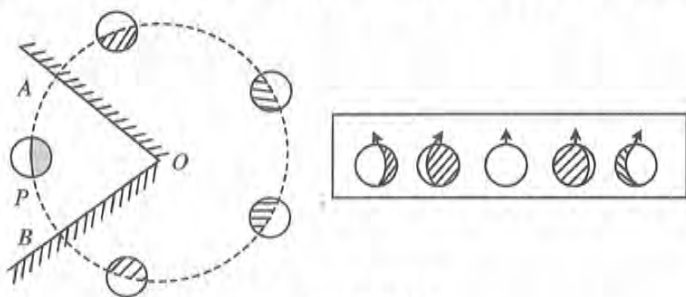


图 2.54 最终的像

2. (5 届预赛) 图 2.55 中所示是一潜望镜壳体的侧视图。MN 为光线的入口。在上方 AB 处已放置一块与纸面垂直的平面镜, 它与与纸面垂直的竖直面之间的夹角为 45° 。眼睛在观察孔 S 处观察, 在 CD (与竖直面的夹角也是 45°) 处放置一块平面镜, 今要使观察到的视场不受 CD 处的平面镜的限制, 则平面镜 CD 至少要多大的线度才行? 要求直接在图上用作图法画出即可, 但要说明作图的步骤。

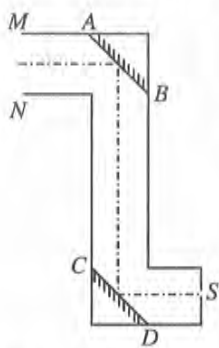


图 2.55 潜望镜的镜筒及其中的反射镜

【分析】 眼睛在 S 处, 要想使视场不受 CD 的限制, 则通过孔径 MN 的光线最终都可以到达 S, 即 MN 处于 S 的视场中即可。可以用逐次成像作出 MN 依次经两平面镜的像, 然后根据该像与 S 的关系作出判断。由于光路是可逆的, 物像是共轭的, 所以也可以用 S 依次经 CD 和 AB 所成的像进行判断。

【解】 方法 1, MN 依次经平面镜 AB、CD 反射成像, 如图 2.56 所示。

平面反射成像,物像是关于反射面对称的,形状如图 2.61 所示。
首先,物经透镜成倒立的实像,该实像作为平面镜的虚物,经平面镜反射后,成在像平面上。

【解】本题中,A上的字经透镜L在像平面P上成实像。

【分析】物平面A经透镜L成一倒立实像平面,实像平面与P关于平面镜M对称。

3. (10届预赛)一光学系统如图 2.59 所示,A为物平面,垂直于光轴,L为会聚透镜,M为与光轴成 45° 角的平面镜,P为像面,垂直于经平面镜反射后的光轴。图 2.60 为同一光学系统的透视图。设物为A面上的一个“上”字,试在图 2.60 中实像面P上画出像的形状。

(4) C_1D_1 即为平面镜CD的最小线度。

(3) 用直线将 M_1 点和 N_1 点分别与 S_1 点连接,连线与CD的交点分别为 C_1 和 D_1 。

(2) S经平面镜CD反射成虚像于 S_1 。

(1) MN经平面镜AB反射成虚像于 M_1N_1 。

作图步骤:

图 2.56 方法 1

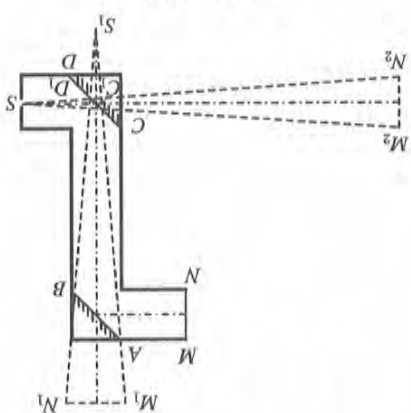


图 2.57 方法 2

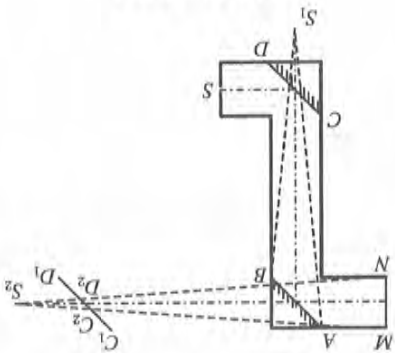
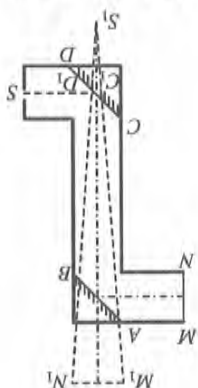


图 2.58 方法 3



方法 3, MN 经平面镜 AB 反射成虚像, S 经平面镜 CD 反射成虚像,如图 2.58 所示。

(4) C_2D_2 即为平面镜CD的最小线度。

(3) 用直线将 M 点和 N 点分别与 S_2 点连接,连线与 C_1D_1 的交点分别为 C_2 、 D_2 。

(2) 将 S_1 作为平面镜 AB 的实物,反射成虚像于 S_2 。CD 经 AB 反射成虚像于 C_1D_1 。

(1) S 经平面镜 CD 反射成虚像于 S_1 。

作图步骤:

方法 2, S 依次经平面镜 CD、AB 反射成虚像,如图 2.57 所示。

(4) C_1D_1 即为平面镜CD的最小线度。

交点分别为 C_1 和 D_1 。

(3) 用直线将 M_2 点和 N_2 点分别与 S 点连接,则视场在 SM_2 和 SN_2 之内。连线与 CD 的

(2) 将 M_1N_1 作为平面镜 CD 的实物,反射成虚像于 M_2N_2 。

(1) MN 经平面镜 AB 反射成虚像于 M_1N_1 。

作图步骤:

4. (15 届预赛) 已知透镜主光轴 OO' , 发光点 A , A 经过透镜所成的像 A' , 以及两个互相垂直且几何尺寸、位置都已给定的平面镜 M_1 和 M_2 , 如图 2.62 所示。

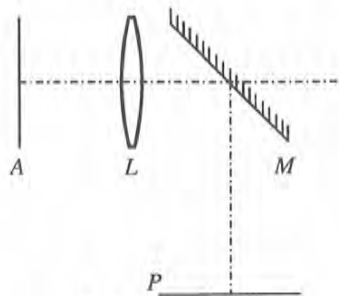


图 2.59 光学系统

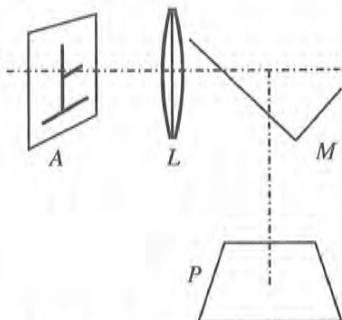


图 2.60 物平面上有一“上”字

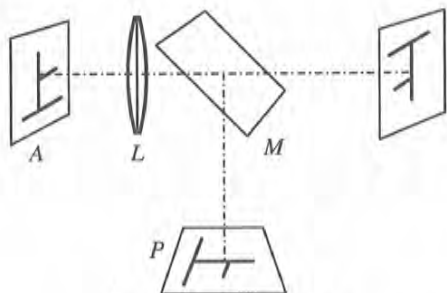


图 2.61 成像的结果

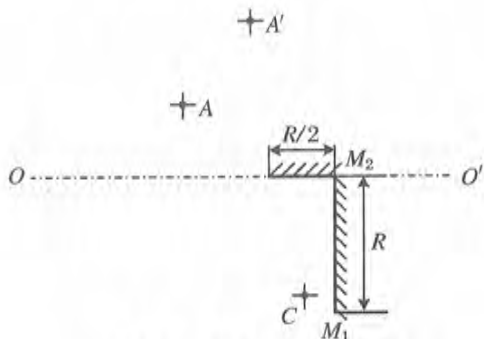


图 2.62 物于像的相对位置

(1) 在题中给定的图上, 用作图法画出透镜的位置和大小及焦点的位置, 已知透镜的直径为 $2R$ 。

(2) 图中的物点 C 对整个光学系统成几个实像? 几个虚像?

(3) 在题中给定的图上, 再画出 C 点所成实像的光路图。

【解】 (1) 本题中并没有说明透镜的正负, 也没有说明像 A' 的虚实, 但根据透镜成像的特点可以作出合理的推断。

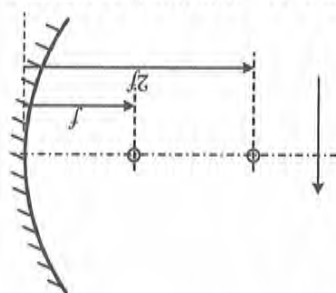
事实上, 由于像比物远离主光轴, 且与物在主光轴的同一侧, 相当于实物成一个正立放大的像, 所以只可能是正透镜成虚像。

由于成像光线中, 通过光心的光线方向不变, 所以通过物点和像点的直线与光轴的交点就是透镜的光心。

如图 2.63 所示, 通过光心的垂轴平面是透镜的主平面, 从物点 A 向主平面作垂线, 垂足与像点 A' 的连线经过焦点, 即上述直线与光轴的交点就是透镜的焦点 F 。另一侧焦点 F' 可根据对称性确定。

(2) 物点 C 经平面镜 M_1 、 M_2 各成一个虚像, 分别为 C'_1 和 C'_2 , 如图 2.63; 直接经过透镜成一个实像 C' , C'_1 经透镜又可成一实像 C'' 。由于受到平面镜 M_2 尺度和透镜孔径的限制, C'_2 不能再经过透镜成像。

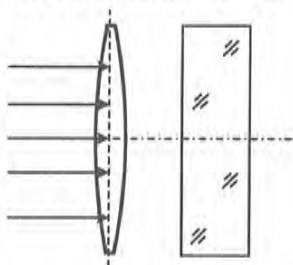
图 2.64 物体从远处移向凹面镜



A. 向左移
B. 向右移

C. 不变

图 2.65 光线经凸透镜后
再经一玻璃砖



6. 如图 2.65 所示,在一凸透镜左侧放一块厚的矩形玻璃砖,当平行光从透镜右边射来时,其聚焦位置较无此玻璃砖时()。

因而在题目所述过程中,像总是小于物,像总是倒立的,答案为 E。

立实像;物距越小,像距越大,横向放大率也就越大;物在 $2f$ 处,成一个等大小的倒立实像。

【解】凹透镜是一种正镜,其焦距 f 为正值,成像的特征与凸透镜类似。物距大于 f ,成倒

C. 只有(2)、(4)正确 D. 只有(3)、(4)正确

A. 只有(3)正确 B. 只有(1)、(2)正确

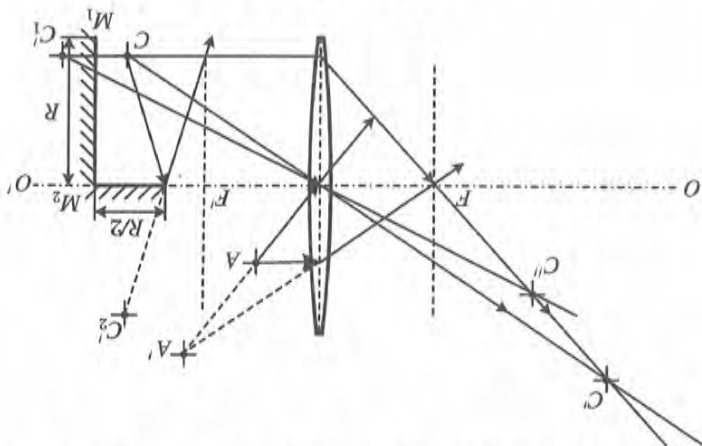
(3) 像的大小总是小于物;(4) 像总是正立的;(5) 像总是倒立的。

(1) 像的大小总是不断增加;(2) 像的大小总是大于物;

哪些是正确的?()

5. (1 属预赛) 有一物体 AB 如图 2.64 所示,从远处移向凹面镜到 $2f$ 处过程中,下列情况

图 2.63 作图结果



(3) C 点的虚像 C_1' , 可作为透镜的实物,进行成像,两个实像的作图过程示于图 2.63 中。

【解】 由图 2.66 可见,由于本来向透镜焦点会聚的光被玻璃砖折射,所以聚焦位置将向左移动。答案为 A。

7. (1 届预赛) 如图 2.67 所示,凸透镜 L 的主轴与 x 轴重合,光心 O 就是坐标原点。凸透镜的焦距为 10 cm 。有一平面镜 M 放在 $y = -2\text{ cm}, x > 0$ 的位置,眼睛从平面镜反射的光中看到发光点 A 的像位于 A_2 处, A_2 的坐标见图。

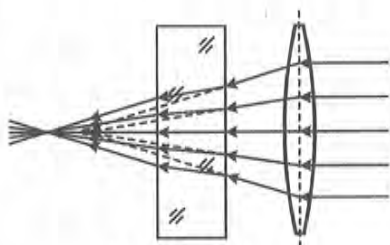


图 2.66 光线会聚

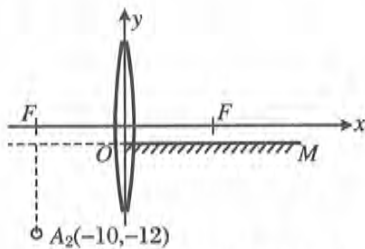


图 2.67 凸透镜与平面镜组成的光学系统

- (1) 求出此发光点 A 的位置。
- (2) 写出用作图法确定 A 的位置的步骤并作图。

【解】 (1) 题中给出的是眼睛从平面镜中所看到的像点 A_2 的位置,据此可得到平面镜的物点 A_1 的位置,在 $(-10, 8)$ 处。

A_1 是物点 A 经过透镜所成的像,由于 A_1 在透镜的像方,因而一定是虚像,按照成像定理的符号约定,像距为 $s' = -10\text{ cm}$,到透镜光轴的距离 $y' = 8\text{ cm}$ 。由此得到物距为

$$s = \frac{s'f}{s' - f} = \frac{-10 \times 10}{-10 - 10} = 5\text{ (cm)}$$

再根据横向放大率,得到物点 A 到光轴的距离为

$$y = -\frac{s}{s'}y' = -\frac{5 \times 8}{-10} = 4\text{ (cm)}$$

物点的位置为 $A(5, 4)$ 。

(2) 作图法的步骤为(见图 2.68):

① 作 A_2 关于平面镜的轴对称点 A_1 。

② 由于 A_1 是虚像,是透镜像方发散光线反向延长线的会聚点。过 A_1 和透镜的像方焦点作直线,该光线与透镜的主平面交于 B 点,其物方光线与光轴平行,为 CB ; 再过 A_1 和光心 O 作直线, A_1O 和 CB 的交点即为物点 A 。

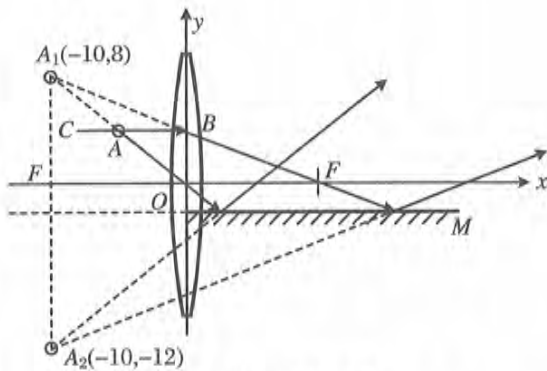


图 2.68 作图过程

8. (2 届预赛) 如图 2.69 所示的光学系统中,会聚透镜 L_1 和 L_2 共轴,其焦距分别为 f_1 和 f_2 ,直径分别为 D 和 $D/2$,彼此相距 $2(f_1 + f_2)$ 。物 AB 与主轴垂直,长度为 D ,其中心

图 2.72 边缘物点能够会聚到像平面上的光束

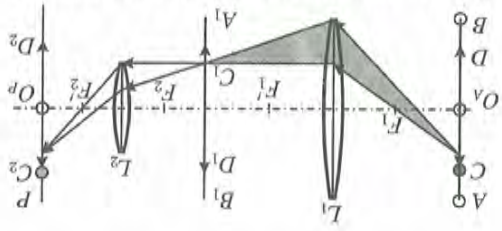


图 2.73 确定插入的透镜位置

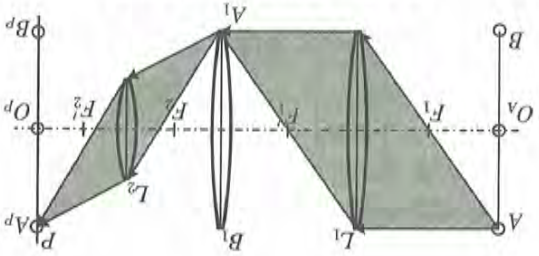


图 2.70 物上不同位置发出的光线

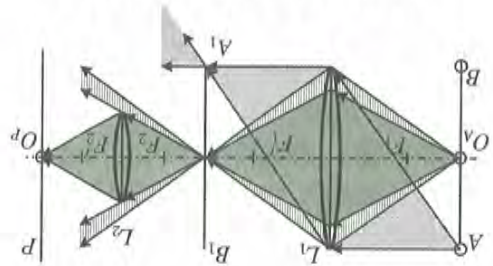
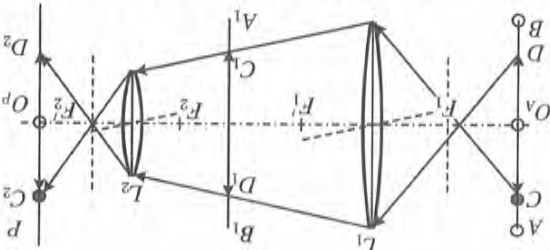
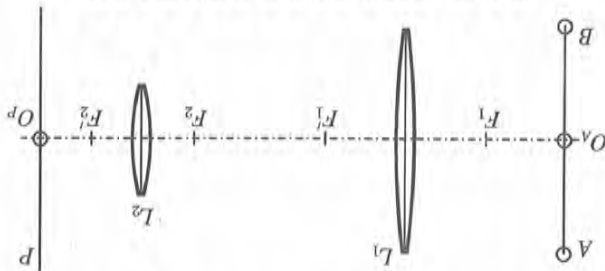


图 2.71 确定物上能够成像的区域



【解】(1) 涉及光具组成像的情形, 只有逐次通过各个成像元件的光线才能够成像。由于受到透镜通光孔径的限制, 物 AB 边缘部分发出的光线不能通过 L_2 成像, 如图 2.70 所示。可以根据通过两透镜边缘的光线确定能够在 P 上成像的物的范围 CD, 如图 2.71 所示。确定与通过透镜边缘光线共轭的光线, 需要利用焦平面。即使 CD 范围内的物点, 由于只有一定角度范围内的光线才能参与成像, 因而这部分像的亮度比中央部分低得多, 如图 2.72 所示。

图 2.69 孔径分别为 D 和 D/2 的两个透镜



O_A 位于主轴上, 离 L_1 的距离为 $2f_1$, 屏 P 垂直于主轴, 置于 L_2 右侧, O_P 是 O_A 经 L_1 和 L_2 所成的像点。这时在屏上只出现物 AB 中央部分的像。

(1) 画出此情况的光路图, 用它来解释此现象。

(2) 如果不改变 AB、 L_1 、 L_2 和屏 P 的位置, 能否在此光学系统中加一个会聚透镜 L, 使得 AB 全物都在 P 上成像? 如不能请说明理由。如能请说明应放在何处, 直径至少要多大? 焦距 f 应如何选定?

为了使得物上边缘处 A 点的光线可以通过 L , 则 L 的边缘至少应当在 A 经过 L_1 所成的像点 A_1 处, 即 L 的孔径至少要与物一样大, 等于 D 。

为了使得物上边缘处 A 点的光线通过 L 的会聚能够全部通过 L , 则 L_1 的上、下边缘通过 L 应当分别成像于 L_2 的下、上边缘, 于是 L 的焦距应当满足以下条件

$$\frac{1}{2f_1} + \frac{1}{2f_2} = \frac{1}{f}$$

即 $f = \frac{2f_1 f_2}{f_1 + f_2}$ 。

9. (15 届复赛) 如图 2.74 所示, L_1 和 L_2 为两个共轴的薄凸透镜, OO' 为其主轴, L_1 的焦距 $f_1 = 10 \text{ cm}$, 口径(直径)为 $d_1 = 4.0 \text{ cm}$, L_2 的焦距 $f_2 = 5.0 \text{ cm}$, 口径(直径)为 $d_2 = 2.0 \text{ cm}$ 。两镜相距 $a = 30 \text{ cm}$ 。 AB 为一与透镜共轴的直径为 $d = 2.0 \text{ cm}$ 的均匀发光圆盘, 它有清晰的边缘, 把它放在 L_1 左侧 20 cm 处, 它在 L_2 右侧垂直于 OO' 的光屏 P 上成像。

(1) 求光屏应放在何处。

(2) 现发现光屏上的像的中间部分较亮, 边缘部分较暗。为了使像的边缘部分也能和中间部分一样亮, 但又不改变像的位置和大小, 可以在 OO' 上插放一个共轴的薄透镜 L_3 。求 L_3 应放在何处? 口径(直径)至少要多大? 焦距应是多少?

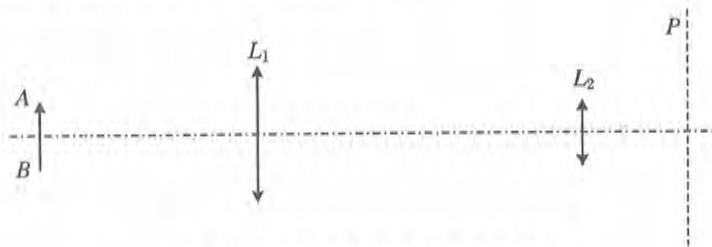


图 2.74 不同口径的透镜组成光具组

【分析】 本题与前一题相似, 用同样的方法求解即可。

【解】 本题要解决的不仅是成像问题, 还要解决成像光束的发散角。

(1) 由于物到 L_1 的距离是 2 倍焦距, 而两透镜间距是焦距之和的 2 倍, 所以两次都成等大小的倒立实像, 接收屏 P 应放在 L_2 像方 2 倍焦距处。

(2) 如图 2.75(为便于观察, 作者将物像及透镜的横向都按比例放大), 尽管物上各点发出

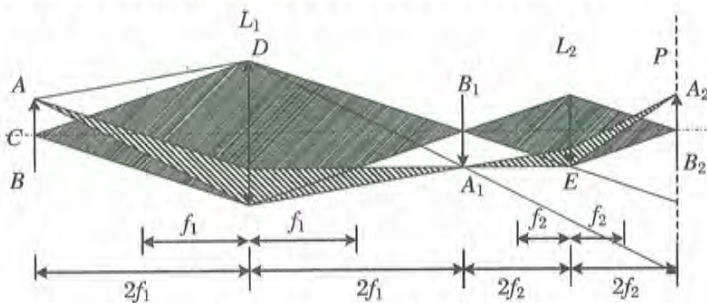


图 2.75 通过 L_2 的光线束

12. (20届预赛) 两个薄透镜 L_1 和 L_2 共轴放置, 如图 2.76 所示。已知 L_1 的焦距 $f_1 = f$, L_2 的焦距 $f_2 = -f$, 两透镜间距离也是 f 。小物体位于物面 P 上, 物距 $u_1 = 3f$ 。
- (1) 小物体经这两个透镜所成的像在 L_2 的_____边, 到 L_2 的距离为_____。是_____(虚或实)、_____(正或倒), 放大率为_____。
- (2) 现在把两透镜位置调换, 若还要给定的原物体在原物处成像, 两透镜作为整体应沿光轴向_____边移动距离_____。这个新的像是_____(虚或实)、_____(正或倒), 放大率为_____。

对于物到玻璃板的距离更近, 因而屏要向左侧移动。

若玻璃板放在透镜与屏之间, 则透镜的像作为玻璃板的虚物, 经过玻璃板之后所成的像, 相屏应向右侧移动。

若玻璃板放在光源与透镜之间, 光源先经过平板成像, 该像是虚像, 相对于物向玻璃板移动了一段距离。玻璃板的像作为透镜的物, 与之前相比, 仍是实物, 但物距减小, 所以, 像距增大, 屏应向右侧移动。

【解】 原来的情况下, 在像方距透镜 $2f$ 处的屏上有一个实像。

在光源与透镜之间时, 屏应向_____移动; 当玻璃板放在透镜与屏之间时, 屏应向_____移动。

11. (6届预赛) 一个焦距为 f 的会聚透镜, 在其左侧的主光轴上离透镜 $2f$ 处有一小光源, 在右侧屏上观察到此光源的清晰的像。现在光源与透镜的位置保持不变而在光路中插入一厚度为 d ($d < f$) 的玻璃平板(平板与光轴垂直), 若还要在屏上得到光源清晰的像, 则当玻璃板放在光源与透镜之间时, 屏应向_____移动; 当玻璃板放在透镜与屏之间时, 屏应向_____移动。

【解】 实物的物距小于正镜的焦距时, 不能成实像, 因而在屏幕上看不到像。这是所成的虚像, 对于凹面镜来说, 是一个正立、放大的虚像。物到焦点的距离越近, 像距越大, 像也越大。本题中, 物越靠近凹面镜, 像比物体大得越少。

靠近凹镜, 像比物体大得越_____。

10. (3届预赛) 物体沿主轴向凹镜移动, 当移至焦点以内时, 无论把屏放在什么位置, 屏上都得不到物体的像, 但是镜前的观察者可以看到镜后有正立的像, 像的尺度比物体大。物体越靠近凹镜, 像比物体大得越_____。

$$f_3 = \frac{2f_1 \times 2f_2}{2f_1 + 2f_2} = \frac{2f_1 f_2}{f_1 + f_2} = \frac{20}{3} \text{ cm}$$

缘, 即能够使图中 L_1 的边缘 D 点成像于 L_2 的边缘上 E 点。则其焦距为

其次, 要使经过 L_2 的光线全部经过 L_1 的边缘, 必须使经过 L_1 的边缘的光线至少会聚到 L_2 的边缘, 即 L_2 的孔径至少不能比中间像小, 则孔径至少是 2.0 cm 。

增加 L_3 后, 要能够使不经过 L_2 的光线全部经过 L_2 , 这就对其孔径和焦距有要求。2 倍焦距处。

过程来说, 只能是物距为 0, 像距也为 0, 则 L_3 只能放在中间像 $A_1 B_1$ 的位置, 即两透镜之间的

如果要增加一个透镜 L_3 , 必须做到不能改变最终像的位置, 要做到这一点, 对于 L_3 的成像从 A 点发出的光束, 只有图中画出的, 一小部分能被会聚到 P 上, 大部分光线并不经过 L_2 。本相等, 但 L_2 则不然。从物上中心点 C 发出的光束, 凡是通过 L_1 的, 都可被会聚到 P 上, 而的光线都可以在 P 上成实像, 但透镜对不同的物点有不同的光瞳。 L_1 对 AB 上各点的光瞳基

【分析】用逐次成像法可以处理这类透镜组成像的问题。在第(2)题中,利用光路可逆进行处理。

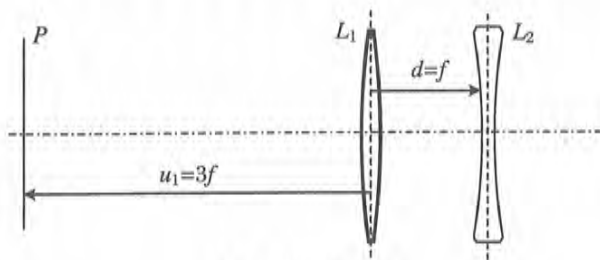


图 2.76 光具组

【解】(1)物经 L_1 成像,像距为 $s'_1 = \frac{u_1 f_1}{u_1 - f_1} = \frac{3ff}{3f - f} = \frac{3f}{2}$, 是实像。

上述实像对于 L_2 是虚物,物距为 $s_2 = d - s'_1 = -\frac{f}{2}$, 再经 L_2 成像,像距为 $s'_2 = \frac{s_2 f_2}{s_2 - f_2} = \frac{(-f/2)(-f)}{(-f/2) - (-f)} = f$, 是实像,在 L_2 右边,横向放大率为 $\gamma = \left(-\frac{s'_1}{s_1}\right)\left(-\frac{s'_2}{s_2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)(+2) = -1$, 是 1 倍的倒立实像。

(2) 在本题(1)中,由于实物成实像,将两个透镜的位置对调,若将物像的位置也对调,则成像的条件依然保持不变。

这种情形下,物到凹透镜 L_2 的距离是 f 。只要将透镜组整体向左移动 $2f$ 即可。所成依然是倒立实像,横向放大率为 $+1$ 。

当然也可以按以下方法从头计算。

此时物像之间的距离为 $5f$, 设物到 L_2 的距离为 s_1 , 则第一次成像的像距为

$$s'_1 = \frac{s_1 f_2}{s_1 - f_2} = \frac{-s_1 f}{s_1 + f}$$

第二次成像的物距为 $s_2 = d - s'_1 = f + \frac{s_1 f}{s_1 + f}$ 。

第二次成像的像距为 $s'_2 = \frac{s_2 f_1}{s_2 - f_1} = \frac{\left(f + \frac{s_1 f}{s_1 + f}\right)f}{f + \frac{s_1 f}{s_1 + f} - f} = \frac{f(s_1 + f) + s_1 f}{s_1} = \frac{f(2s_1 + f)}{s_1}$ 。

物像之间的距离为 $5f = s_1 + d + s'_2 = s_1 + f + \frac{f(2s_1 + f)}{s_1}$, 整理得 $s_1^2 - 2fs_1 + f^2 = 0$ 。

解得 $s_1 = f$ 。

光具组整体向左移动 $2f$ 。

将 $s_1 = f$ 代入前面各式,可得到 $s'_1 = \frac{-s_1 f}{s_1 + f} = -\frac{f}{2}$, $s_2 = \frac{3f}{2}$, $s'_2 = 3f$, 最后所成为实像。横

向放大率为 $\gamma = \left(-\frac{s'_1}{s_1}\right)\left(-\frac{s'_2}{s_2}\right) = \left(+\frac{1}{2}\right)(-2) = -1$, 仍然是 1 倍的倒立实像。

仍是虚像,在杯口下方,到杯口的距离约为16 cm。由于平面成像的横向放大率为+1,所以总的横向放大率为2.5。虽然两种情形下横向放大率相差不大,但注酒后,像到眼睛的距离变为

$$s'_2 = -\frac{d-s''}{n''} = -\frac{d+13.3}{1.34} = -15.9 \text{ cm}$$

取 $d = 8 \text{ cm}$, 于是得到

$$\frac{1}{s'_2} + \frac{1}{n''} = \frac{1}{1-n''}$$

(2)

由于是平面成像,物像公式为

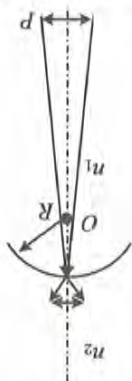
$$s_2 = d - s''$$

为 d , 则这次成像的物距为

可以将前面所成的像作为这次成像的物,而光线是从酒射向空气,所以物方为酒。设酒的深度

进入酒中的光线还要再经过酒与空气的界面折射,这是平面折射成像。

图 2.78 成像情况



$$s_2 = -\frac{n''}{n} s = +2.5$$

$= -13.3 \text{ cm}$ 。这是一个虚像,横向放大率为

如向杯中注酒,像方折射率为 $n'' = 1.34$, 这种情况下,可算得像距为 s''

看到。

这是一个放大的实像,几乎就在杯口处。若眼睛也在杯口处,则该像到眼睛的距离太小,而且由于经过细长的杯脚,光束的发散角很小,所以不能被

$$s'_1 = -\frac{n'}{n} s = -2.0$$

率为

由于像距为正值,说明是一个实像,位于杯底球面的上方。横向放大

空气,折射率 $n' = 1$, 据此算得 $s' = 8.0 \text{ cm}$ 。

按照成像定理的符号约定, $R = -1.50 \text{ cm}$, $s = 6.3 \text{ cm}$, $n = 1.56$ 。若杯子是空的,则像方为

其中 s 为物距, s' 为像距, R 为球面半径, n, n' 分别为物方、像方介质的折射率。

(1)

$$\frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = \frac{n'}{R}$$

关系为

玻璃,物距为杯脚底部的 P 到球面顶点 O 的距离。这是单球面折射成像,物像



图 2.77 高脚杯

【解】

物在杯脚底部,经杯底的球面折射成像,如图 2.78 所示,则物方为

现象。

分别讨论像方是空气和水时,像的大小、位置和虚实,即能解释题中所涉及

【分析】若从杯口向下看去,所见是杯脚底部的物经杯底球面所成的像。

1.56, 酒的折射率 $n_2 = 1.34$ 。试通过分析计算与论证解释这一现象。

再在杯口处向杯底方向观看,将看到画片,将看到画片上的景物。已知玻璃的折射率 $n_1 =$

未斟酒时,若在杯口处向杯底方向观看,看不出画片上的景物,但如果斟了酒,

8.0 cm。在杯脚底中心处 P 点紧贴一张画片, P 点距 O 点 6.3 cm。这种酒杯

点 O 下方玻璃中的 C 点,球面的半径 $R = 1.50 \text{ cm}$, O 到杯口平面的距离为

13. (21 属预赛) 有一种高脚酒杯,如图 2.77 所示。杯内底面为一凸起的球面,球心在顶

16 cm,且虚像光束的发散角变大了,所以很容易被看到。

14. (25 届预赛) 如图 2.79 所示,一细长的圆柱形均匀玻璃棒,其一个端面是平面(垂直于轴线),另一个端面是球面,球心位于轴线上。现有一很细的光束沿平行于轴线方向且很靠近轴线入射。当光从平面端面射入棒内时,光线从另一端面射出后与轴线的交点到球面的距离为 a ;当光线从球形端面射入棒内时,光线在棒内与轴线的交点到球面的距离为 b 。试近似地求出玻璃的折射率 n 。

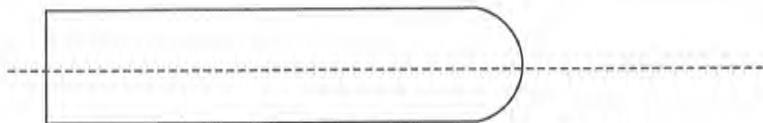


图 2.79 一端平面、另一端球面的细长玻璃棒

【分析】 平行光从一个端面入射,会聚于该端面的焦点处,然后再通过另一端面,这是两个折射面逐次成像的问题。

【解】 这是近轴光线连续两次经单球面折射成像的问题。

对平面一端而言,其物方与像方的焦点都在无穷远处。对球面一端而言,空气一侧的焦距为 $f' = \frac{-r}{1-n}$,玻璃一侧的焦距为 $f = \frac{-nr}{1-n}$ 。

平行光线从平面一端入射,进入玻璃棒中仍为平行光,经球面一端,会聚于球面的右焦点,即

$$a = f' = \frac{r}{n-1}$$

平行光线从球面一端入射,进入玻璃棒中会聚于球面的左焦点,由于棒很长,所以左焦点在棒内。再经平面出射,成为发散光束,即

$$b = f = \frac{nr}{n-1}$$

可得 $n = \frac{b}{a}$ 。

15. (29 届预赛) 图 2.80 中 L 为一薄凸透镜, ab 为一发光圆面,二者共轴, S 为与 L 平行放置的屏,已知这时 ab 可在屏上成清晰的像,现将透镜切除一半,只保留主轴以上的一半透镜,这时 ab 在 S 上的像()。

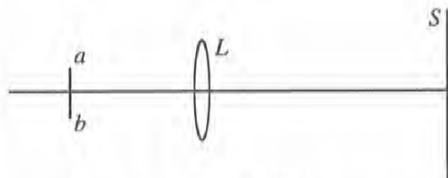


图 2.80 成像情况

- A. 尺寸不变,亮度不变
- B. 尺寸不变,亮度降低
- C. 只剩半个圆,亮度不变
- D. 只剩半个圆,亮度降低

【解】 即使只有半个透镜,也一样可以成完整的像,但是,由于通过透镜的通量减少了一半,因而屏上每一点的光强降低。所以答案应当是 B。

如图 2.84 所示,将此像作为平面的物,经平面折射成像。在这次成像中,物距为

$$s'_{B2} = \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{s_{B2}} \right)^{-1} = \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{r + ns_B} \right)^{-1} = \frac{r(r + ns_B)}{r + 2ns_B}$$

像距为

$$s_{B2} = r - s'_{B1} = r + ns_B$$

如图 2.83 所示,将此像作为球面的物,经球面反射成像。在这次成像中,物距为

$$s'_{B1} = -ns_B$$

像方的折射率。若折射面是平面,则 $r = \infty$, 则 $s' = -\frac{r}{n}s$ 。所以 B 端的平面折射像的像距为

物先经平面折射成像,球面折射的物像公式为 $\frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = n' - n$, 其中 n 和 n' 分别为物方和

以下讨论球面的反射像。

$$s'_{A1} = -s_A$$

大小的正立虚像。则 A 端的平面反射像 A_1 的像距为

射面是平面,则 $r = \infty$, 所以有 $s' = -s$, 按照成像定理的符号约定,这是一个在对称位置上的等

球面反射的物像公式为 $\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = -\frac{2}{r}$, 其中 s, s' 和 r 分别为物距、像距和球面半径。若反

首先确定平面反射所成的像。

重合。

不妨假设最终成像的情况如图 2.82 所示, A 端的平面反射像 A_1 与 B 端的球面反射像 B_2

中球面反射所成的像实际上是物先经平面折射,再经球面反射,再经球面折射而成。

【解】观察者在半球的左侧,看到的是两个反射像,分别由平面反射和球面反射形成。其

反射所成的像。

本题中,玻璃半球较厚,不能作为薄透镜,所以只能用逐次成像法依次计算出各个面折射或

成的像即可。

只需要考虑经平面的反射光所成的像和经平面折射进入半球经球面反射再经平面折射的光所

强度比第一次反射光的强度低得多。眼睛所看到的像,其成像光线都是射向平面左侧的,因而

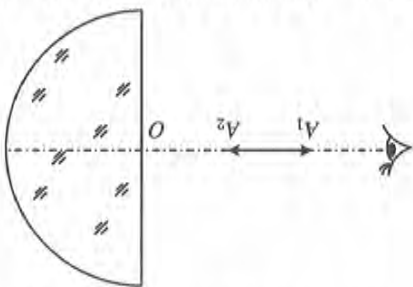
的像。虽然理论上光线在两个表面之间多次反射,但是由于反射率很低,所以第二次反射光的

【分析】射向玻璃表面的光线,除了折射之外,还有少量被反射,反射光也能够成不很明亮

的折射率 n (计算时只考虑近轴光线)。

$a_2 = 0.020 \text{ m}$ 。试利用以上数据求出构成此半球的玻璃

图 2.81 玻璃半球及其前面的条形发光体



在一起,此时条形发光体的近端 A_2 距球心 O 的距离为
条形发光体的位置,使得它的两个像恰好头尾相接,接
前后移动时,这两个像也在主轴上随着移动。现在调整
还有亮度更弱的像,不必考虑),当条形发光体在主轴上
示,可以看到条形发光体的两个不很亮的像(此外可能
入眼在主轴附近对着平面部分向半球望去,如图 2.81 所
 A_1, A_2 离球心 O 较近),其长度为 $l = 0.020 \text{ m}$ 。若
的直线为其主轴,在主轴上沿主轴放置一细条形发光体
16. (4 届预赛) 有一半径为 $R = 0.128 \text{ m}$ 的玻璃半球,过球心 O 并与其平面部分相垂直

$$s_{B3} = r - s'_{B2} = r - \frac{r(r + ns_B)}{r + 2ns_B}$$

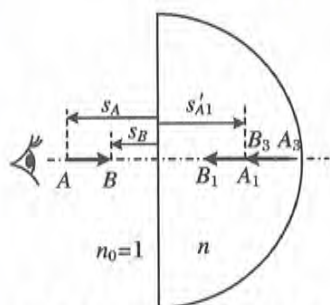


图 2.82 两个头尾相接的像

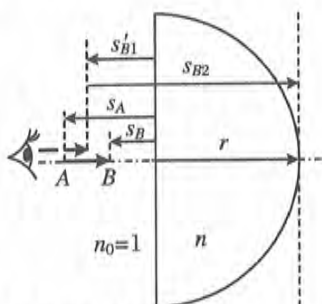


图 2.83 B 端经平面折射成像

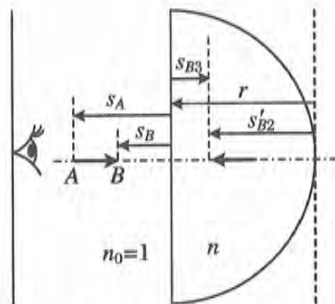


图 2.84 B 端再经球面反射成像

物像公式为 $\frac{1}{s_3} + \frac{n}{s_3} = 0$, 所以像距为

$$s'_{B3} = -\frac{s_{B3}}{n} = -\frac{r - \frac{r(r + ns_B)}{r + 2ns_B}}{n} = -\frac{nrs_B}{n(r + 2ns_B)} = -\frac{rs_B}{r + 2ns_B}$$

按题意, 最后, 平面的反射像与球面的反射像头尾相接, 由于 s'_{A1} 和 s'_{B3} 都是从同一个平面算起的距离, 所以应当有

$$s'_{A1} = s'_{B3}$$

即

$$-s_A = -\frac{rs_B}{r + 2ns_B}$$

解得

$$n = \frac{R}{2s_B} \left(\frac{s_B}{s_A} - 1 \right)$$

由于 $s_B < s_A$, 所以会有 $n < 0$, 这是不可能的。所以最后应当是球面像在平面像的左侧, 即 A_3 与 B_1 重合, 如图 2.85 所示。

对于这样的情况, 当然不需要从头计算一遍, 而只需要将前面计算结果中 A 与 B 两点的数数据互换即可, 即用 s_B 替换 s_A , 用 s_A 替换 s_B , 因而可以得到

$$-s_B = -\frac{rs_A}{r + 2ns_A}$$

解得

$$n = \frac{R}{2s_A} \left(\frac{s_A}{s_B} - 1 \right) = \frac{128}{2 \times 40} \left(\frac{40}{20} - 1 \right) = 1.6$$

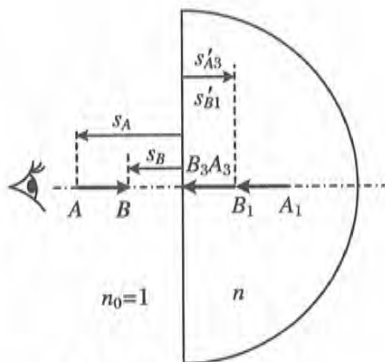


图 2.85 最终成像情况

17. (27 届预赛) 假设把地球大气等效于一个具有一定厚度和折射率均匀的透光气体球壳, 其折射率取 $n = 1.00028$, 把地球看作圆球。当太阳在地球某处正上方时, 该处的观察者看太阳时的视角比太阳对观察者所在处的张角相差多少? 已知太阳的半径 $R_s = 6.69 \times 10^8 \text{ m}$, 日

作以下恒等变换

$$\frac{y'}{y} = n - f_1 \text{ 和 } \frac{y'}{y} = \frac{f_1}{v - f_2}, \text{ 即 } \frac{f_1}{n - f_1} = \frac{v - f_2}{f_2}$$

记物、像的高度分别为 y, y' , 根据图 2.87 中的相似三角形, 可得比例式

还包括垂轴物平面得像平面也是垂轴的。

与光轴的交点。据此可以作出物 PQ 经透镜所成的像 $P'Q'$, 如图 2.87 所示。这样作图的依据

【解】(1) 按照定义, 焦点是与光轴平行的光线经透镜折射后的会聚点, 也就是这些光线

又求出透镜的物像关系, 并进一步确定焦距与折射率之间的关系。

【分析】本题是要求根据焦点的定

关系?

(3) f_1, f_2, n_1, n_2 四者之间有何

应的出射线与主轴的夹角 θ_2 为多大?

已知它与透镜主轴的夹角为 θ_1 , 则与之相

(2) 若有一傍轴光线射向透镜中心,

f_1, f_2 四者之间的关系式。

(1) 试求出此时物距 u 、像距 v 、焦距

束起会聚作用, 在其左右两侧介质和折射率及焦点的位置如图 2.86 所示。

F_2 和透镜中心的距离不相等, 其值分别为 f_1 和 f_2 。现有一薄透镜 L , 已知此凸透镜对平行光

两侧的介质不同, 其折射率分别为 n_1 和 n_2 , 则透镜两侧仍各有一焦点(设为 F_1 和 F_2), 但 F_1 、

18. (19 届预赛) 薄凸透镜放在空气中, 两侧焦点和透镜中心的距离相等。如果此薄透镜

$$\Delta\theta = \theta_0 - \theta = \frac{2R_s}{r_E} - \frac{2R_s}{nr_E} = \frac{2R_s}{r_E} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 2.49 \times 10^{-6}$$

两者相差

$$\theta_0 = \frac{2R_s}{r_E}$$

而太阳本身对观察者的张角为

$$\theta = \frac{\gamma 2R_s}{nr_E} = \frac{2R_s}{nr_E}$$

太阳的像对观察者的张角为

$$\gamma = -\frac{s'}{ns} = 1$$

可解得像到球壳的距离为 $s' = -nr_E$, 横向放大率为

$$\frac{n}{s'} + \frac{1}{r_E} = 0$$

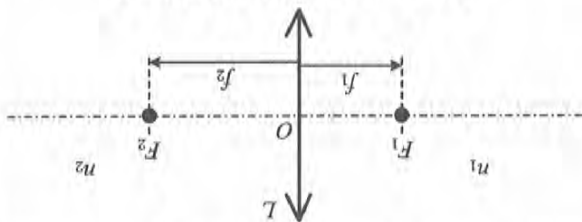
距为 $s = r_E$, 设像距为 s' 。经大气折射成像, 按照单折射球面的物像公式, 有

的光线发散角很小, 对于这些光线来说, 可将上述球壳视作平面, 即 $R = \infty$ 。太阳到该球面的物

【解】将地球的大气层等效为一个均匀透明球壳, 其外半径设为 R 。由于进入观察者眼睛

地距离 $r_E = 1.50 \times 10^{11} \text{ m}$ 。

图 2.86 两侧折射率不等的薄透镜



$$\frac{u}{f_1} - 1 = \frac{1}{\frac{\nu}{f_2} - 1}, \quad \frac{\nu}{f_2} + \frac{u}{f_1} = \frac{u}{f_1} \frac{\nu}{f_2}, \quad \nu f_1 + u f_2 = u \nu$$

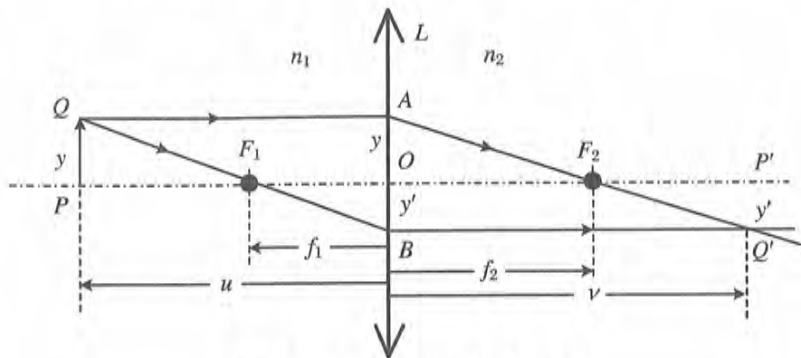


图 2.87 垂轴小物经透镜所成的像

最后得到

$$\frac{f_1}{u} + \frac{f_2}{\nu} = 1 \quad (1)$$

这就是薄透镜成像的高斯公式。

(2) 透镜中心两侧的球面可近似看作是相互平行的平面,如图 2.88 所示。

光线在两侧面发生折射,设透镜的折射率为 n ,按折射定律,有

$$n_1 \sin \theta_1 = n \sin \theta, \quad n \sin \theta = n_2 \sin \theta_2$$

考虑到透镜很薄,可忽略出射点相对于入射点的移动,如图 2.89 所示,则有

$$\theta_2 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1\right) \quad (2)$$

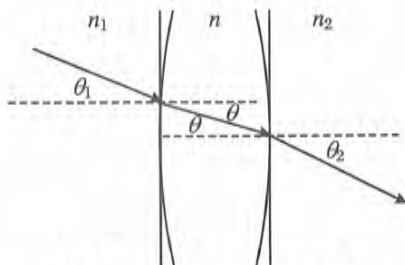


图 2.88 经过透镜中心的光线

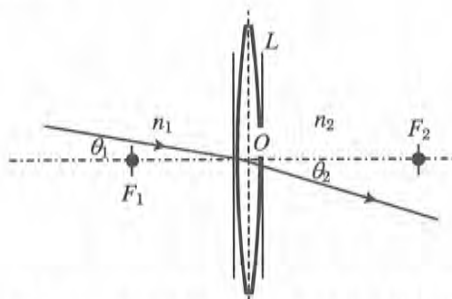


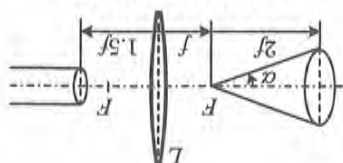
图 2.89 忽略透镜的厚度,经过中心的光线

(3) 如图 2.90 所示,作一对通过透镜光芯的共轭光线,相应的入射角和折射角分别为 θ_1 和 θ_2 。从图 $\triangle OPQ$ 和 $\triangle OP'Q'$ 中,可得

$$\frac{y}{y'} = \frac{u \tan \theta_1}{\nu \tan \theta_2} \quad (3)$$

又由于 $\triangle F_1 PQ \sim \triangle F_1 OB$, $\triangle F_2 OA \sim \triangle F_2 P'Q'$, 可得 $\frac{y}{y'} = \frac{f_2}{\nu - f_2}$, 并将其化为

图 2.92 圆锥体的像



如图 2.92 所示。

$$r' = \frac{s_1'}{s_1} r = \frac{1}{2} r$$

圆柱,其底面半径为

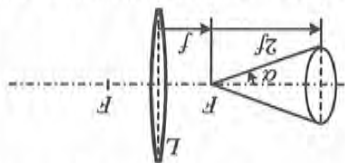
圆锥的母线成为与光轴平行的直线,即圆锥的像是半无限长的

【解】根据高斯公式,圆锥底面成像于 $s_1' = \frac{3f^2}{3f-f} = \frac{3f}{2}$ 处,而其顶点成像于无穷远处,则圆

可确定像的全貌。

图 2.91 凸透镜物方的圆锥发光体

【分析】发光面上的各点都经过透镜成像,由于物距不同,像的横向放大率也不同,因而对有一定纵向分布的物,像的形状与物的形状并非相似形。但是,由于直线的像仍是直线,所以只要确定圆锥顶点的位置以及底面的位置和大小即



示,圆锥的中心轴线与主光轴重合,锥的顶点位于焦点 F,锥高等于 $2f$,锥的母线与中心轴线的夹角等于 α 。求圆锥面的像。

19. (6 届预赛) 在焦距为 f 的会聚薄透镜 L 的主光轴上放置一发光圆锥面,如图 2.91 所

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2}$$

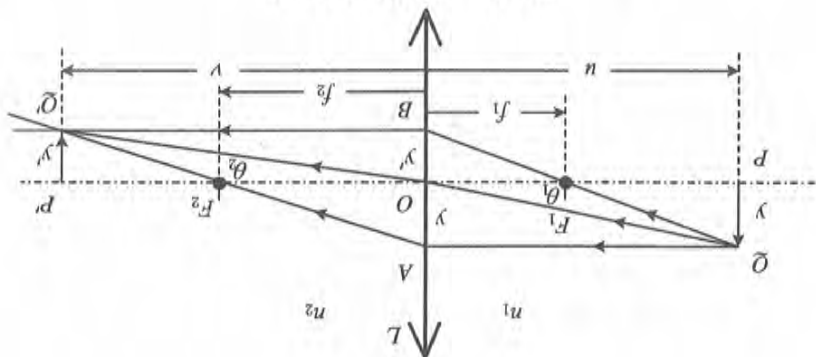
由于是傍轴光线, θ_1, θ_2 较小, $\tan \theta_1 \approx \theta_1 \approx \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = n_2$, 于是有

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\frac{n \tan \theta_1}{v \tan \theta_2}, \text{ 即}$$

从式(1)可以解出 $\frac{v}{n} = \frac{v-f_2}{f_1}$, 代入式(4), 并利用式(3)的结果, 得到 $\frac{y'}{y} = \frac{f_2}{f_1} \frac{v-f_2}{v} = \frac{f_2}{f_1} \frac{v}{v-f_2} = \frac{f_2 v}{f_1 v - f_2}$

图 2.90 透镜中的共轭光线



$$\frac{y'}{y} = \frac{f_2}{f_1} \frac{v}{v-f_2}$$

(4)

20. (5 届预赛) 想用两个薄凸透镜, 最后在物体所在处形成一个与物体大小相等的倒立的虚像。已知靠近物体的那个透镜的焦距为 f_1 , 物体与此透镜的距离为 s_1 。试求第二个透镜的焦距为 f_2 , 以及它与第一个透镜间的距离 L 。

【解】 用逐次成像法处理这类问题。

物经第一个透镜成像, 设像距为 s'_1 , 由高斯公式, 可得

$$s'_1 = \frac{s_1 f_1}{s_1 - f_1} \quad (1)$$

两透镜间距为 L , 第一透镜的像作为第二透镜的物, 物距为

$$s_2 = L - s'_1 = L - \frac{s_1 f_1}{s_1 - f_1} \quad (2)$$

第二次成像的像距为

$$s'_2 = \frac{s_2 f_2}{s_2 - f_2} = \frac{\left(L - \frac{s_1 f_1}{s_1 - f_1}\right) f_2}{L - \frac{s_1 f_1}{s_1 - f_1} - f_2} \quad (3)$$

该像与物在同一位置, 是虚像, 按照成像定理的符号约定, 有

$$-s'_2 = s_1 + L \quad (4)$$

是与物等大小的倒立的像, 总的横向放大率为

$$\gamma = \gamma_1 \gamma_2 = \left(-\frac{s'_1}{s_1}\right) \left(-\frac{s'_2}{s_2}\right) = -\frac{f_1}{s_1 - f_1} \frac{s_1 + L}{L - \frac{s_1 f_1}{s_1 - f_1}} = -1 \quad (5)$$

由式(5)可得到 $\frac{f_1(s_1 + L)}{L(s_1 - f_1) - s_1 f_1} = 1$, 解出

$$L = \frac{2s_1 f_1}{s_1 - 2f_1} \quad (6)$$

将式(3)、式(6)代入式(4), 可得

$$-\frac{\left(\frac{2s_1 f_1}{s_1 - 2f_1} - \frac{s_1 f_1}{s_1 - f_1}\right) f_2}{\frac{2s_1 f_1}{s_1 - 2f_1} - \frac{s_1 f_1}{s_1 - f_1} - f_2} = s_1 + \frac{2s_1 f_1}{s_1 - 2f_1}$$

整理得到

$$\begin{aligned} & -\frac{2s_1 f_1 (s_1 - f_1) - s_1 f_1 (s_1 - 2f_1)}{2s_1 f_1 (s_1 - f_1) - s_1 f_1 (s_1 - 2f_1) - f_2 (s_1 - f_1) (s_1 - 2f_1)} f_2 \\ & = \frac{s_1^2}{s_1 - 2f_1} - \frac{f_1 f_2}{s_1^2 f_1 - f_2 (s_1^2 - 3s_1 f_1 + 2f_1^2)} = \frac{1}{s_1 - 2f_1} \end{aligned}$$

解得

$$f_2 = \frac{s_1^2 f_1}{(s_1^2 - 3s_1 f_1 + 2f_1^2) - f_1 (s_1 - 2f_1)} = \frac{s_1^2}{4(s_1 - f_1)}$$

【点评】 本题中, 若仅仅要求在物的位置成虚像, 则对任意焦距的凸透镜, 只要置于适当的位置, 总是可以做到的。然而, 如果进一步要求虚像与物是等大小的, 则不仅第二个透镜要有特

由此可得

$$\delta = (i_1 - i_2) + (i_4 - i_3) = (i_1 + i_4) - (i_2 + i_3) = 2i_1 - \alpha$$

于是偏转角的大小为

由于 $i_1 = i_4$, 而 $\sin i_1 = n \sin i_2, n \sin i_3 = \sin i_4$, 所以有 $i_2 = i_3 = \frac{\alpha}{2}$ 。

的四边形中, 顶角 α 的对角为 $\pi - \alpha$, 于是 $i_2 + i_3 = \alpha = \frac{\pi}{3}$ 。

平行光束经过棱镜的折射后, 仍是平行光束。图 2.95 中, 在由两侧面的法线与两侧面构成

图 2.95 三棱镜中光线之间的角度关系

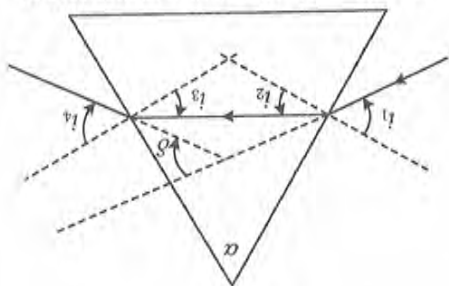
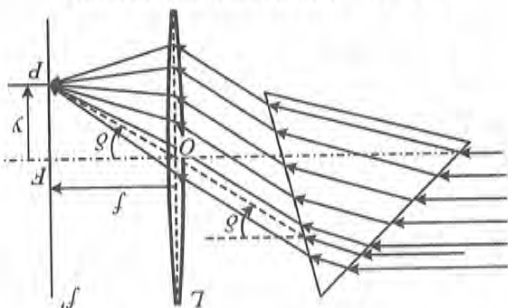


图 2.94 光线经过三棱镜后发生偏转



i_2, i_3, i_4 , 从棱镜出射的光线与向棱镜入射的光线之间的夹角为 δ (δ 被称为偏转角)。

如图 2.95 所示, 记棱镜的顶角为 α , 光线在棱镜两个侧面上的入射角、折射角依次为 i_1 ,

以下再根据平行光束的偏转讨论光线在棱镜两侧面的折射。

$$\delta = \arctan \frac{y}{f} = \arctan \frac{30}{30\sqrt{3}} = \arctan \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$$

面上的会聚点为 P , 焦平面是与光轴垂直的平面, 在直角 $\triangle OFP$ 中, 可得

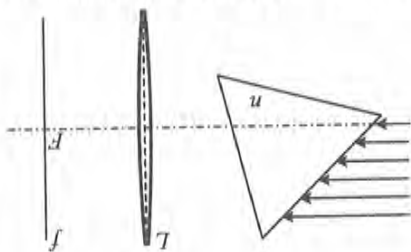
向不变, 可据此确定平行光束与光轴的夹角, 如图 2.94 所示, 设透镜光心为 O , 平行光束在焦平

平行光束经过透镜后, 将会聚到透镜像方焦平面上的某一点。由于经过透镜光心的光线方

平行光束的方向。

【解】 首先根据透镜成像的情况确定自棱镜出射的

图 2.93 三棱镜与凸透镜构成的光具组像点。



光。平行光经透镜后, 在透镜的焦平面上会聚成一个

【分析】 平行光经三棱镜两次折射后, 依然是平行

之值。

一像点。据此求三棱镜材料对此单色光的折射率 n

出射角相等时, 在透镜的焦面上距焦点 $y = 30 \text{ cm}$ 处形成

所示。缓缓转动三棱镜, 当入射光的人射角和出射光的

与透镜的主轴平行。现于透镜前方放一正三棱镜, 如图

21. (12 届预赛) 图 2.93 中 L 为焦距 $f = 30\sqrt{3} \text{ cm}$ 的凸透镜。有一单色平行光束, 其方向

定的位置和焦距, 还要求物到第一个透镜的距离与其焦距满足一定的关系, 即要求 $s_1 > 2f_1$ 。

$$i_L = \frac{\alpha + \delta}{2}$$

于是由折射定律可得

$$n = \frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{\sin \frac{\alpha + \delta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

22. (14 届预赛) 在焦距为 20.00 cm 的薄凸透镜的主轴上离透镜中心 30.00 cm 处有一小发光点 S , 一个厚度可以忽略的光楔 C (顶点 α 很小的三棱镜) 放在发光点与透镜之间, 垂直于主轴, 与透镜的距离为 2.00 cm, 如图 2.96 所示。设光楔的折射率 $n = 1.5$, 楔角 $\alpha = 0.028 \text{ rad}$ 。在透镜的另一侧离透镜中心 46.52 cm 处放一平面镜 M , 其反射面向着透镜并垂直于主轴。问最后形成的发光点的位置在何处? (只讨论近轴光线, 小角度近似适用, 在分析过程中应作出必要的光路图。)

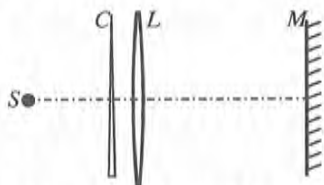


图 2.96 光楔与透镜构成的光学系统

【分析】 光楔是很薄的三棱镜, 光线经光楔的两个平面的折射, 可以视作成像过程进行处理。

【解】 本题中, 物点 S 首先依次经光楔、透镜、平面镜成像, 被平面镜反射后, 再依次经透镜、光楔成像, 共有 5 次成像过程。以下依次分别计算。

(1) 物 S 经光楔 C 成像。

所谓光楔, 就是顶角很小的玻璃三棱镜。物经过其两个侧面依次成像, 可以用逐次成像法算出像的位置。

如图 2.97 所示, 记物到光楔左侧面的距离为 s 。自物点向光楔左侧面作垂线, 该垂线就是物经左侧平面成像的基准, 即第一次折射所成的像在该垂线上。

平面折射的物像公式为 $\frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = 0$, 式中 s, s' 分别为物距、像距, n, n' 分别为物方、像方的折射率。依据图 2.98, 左侧面成像, 物方折射率为 1, 像方折射率为 n , 所以像距为

$$s'_1 = -ns$$

显然所成为虚像, 这个虚像处于第二折射面的物方, 因而是光楔左侧面的实物。

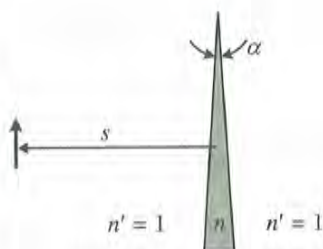


图 2.97 光楔成像

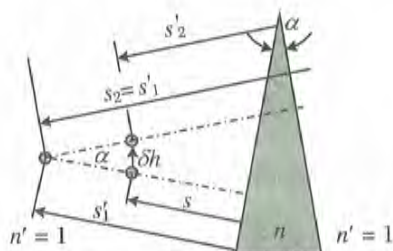


图 2.98 不平行平面的逐次成像

平面镜到透镜的距离为 $d' = 46.52 \text{ cm}$, 所以, 对平面镜 M , 物距为

(3) 透镜的像作为物, 经平面镜 M 反射成像。

在轴线之下。

$$y'_2 = \gamma y_1 = -\frac{s'_2}{s_2} y_1 = -0.784 \text{ cm}$$

像点到轴线的距离为可依据成像过程中的横向放大率进行计算, 得到

$$s'_2 = \frac{s_2 f}{s_2 - f} = 60.00 \text{ cm}$$

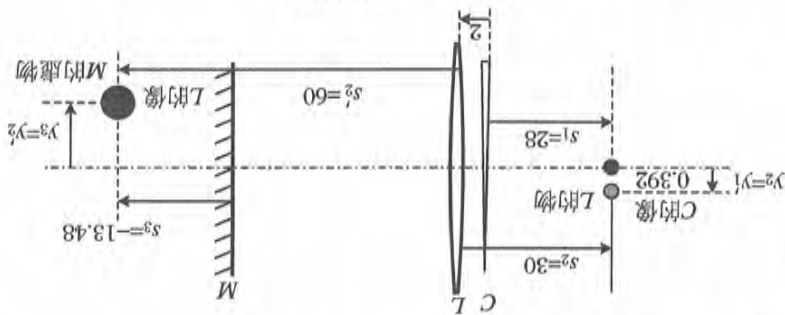
如图 2.99 所示。根据透镜的高斯公式 $\frac{s}{f} + \frac{s'}{f} = 1$, 本题中, $f = 20.00 \text{ cm}$, 算得像距为

$$s_2 = d - s'_1 = 2.00 - (-28.00) \text{ cm} = 30.00 \text{ cm}$$

光楔到透镜的距离 $d = 2.00 \text{ cm}$, 对透镜 L , 物距为

(2) 光楔的像作为物, 经透镜 L 成像。

图 2.99 向右逐次成像



在轴线之上, 如图 2.99 所示。

$$y'_1 = (n - 1) a s_1 = 0.392 \text{ cm}$$

该像到轴的横向距离为

$$s'_1 = -s_1 = -28.00 \text{ cm}$$

本题中, 对光楔 C , 物距为 $s_1 = 28.00 \text{ cm}$, S 经光楔 C 后成虚像, 在其物方 (即左侧), 像距为

物经光楔所成的像可利用式(1)、式(2)确定。

$$\delta h = (ns - s) a = (n - 1) a s \quad (2)$$

移动的距离为

面不平行, 故最后的像会向楔尖方向稍稍移动, 根据图中三角形的边角关系, 可算得向楔尖方向忽略光楔的厚度, 则最终的像与物到光楔的距离相同。但是由于图 2.99 可见, 由于光楔两侧

$$s'_2 = -\frac{s_2}{n} = -\frac{s'_1}{-ns} = -\frac{s}{n} = -s \quad (1)$$

像方折射率为 1, 所以像距为

由于光楔很薄, $d \approx 0$, 所以第二次成像的物距就是 $s_2 = ns$ 。右侧面成像, 物方折射率为 n ,

$$s_2 = d - s'_1$$

第二次成的像在这一垂线上。若垂线所经过的光楔厚度为 d 。则对右侧面的物距为

将左侧面的像作为右侧面的物进行第二次成像。自第一次所成的像向光楔右侧面作垂线,

$$s_3 = d' - s_2' = 46.52 - 60.00 \text{ cm} = -13.48 \text{ cm}$$

平面镜反射所成的像在相对于镜面对称的位置,因而像距为

$$s_3' = -s_3 = 13.48 \text{ cm}$$

这是一个正立的横向放大率为 1 的虚像,所以该像到轴线距离仍为 $y_3' = -0.784 \text{ cm}$ 。在轴线的下方。如图 2.100 所示。

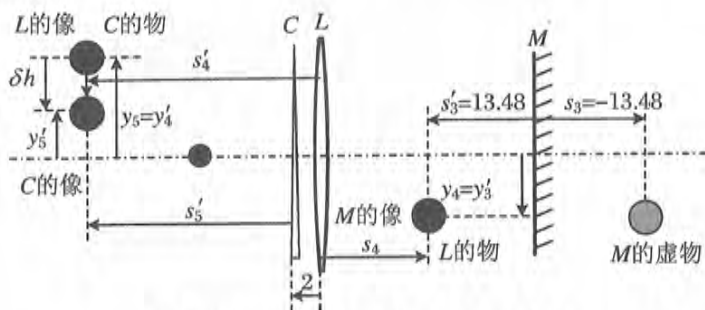


图 2.100 经平面镜反射,向左逐次成像

(4) 经平面镜反射 M 回来的光线,经透镜 L 成像,即平面镜 M 的像作为透镜 L 的物对于透镜 L ,物距为

$$s_4 = d' - (-s_3') = 33.04 \text{ cm}$$

像距为

$$s_4' = \frac{s_4 f}{s_4 - f} = 50.67 \text{ cm}$$

这是一个实像,到轴线的距离为

$$y_4' = \gamma_4 y_4 = -\frac{s_4'}{s_4} y_3' = 1.20 \text{ cm}$$

在轴线的上方。

(5) 经过透镜 L 的光线,再经过光楔发生偏折。即透镜 L 的像,作为光楔的物进行成像。透镜的实像是光楔的虚物,对于光楔 C ,物距为

$$s_5 = d - s_4' = 2.00 - 50.67 \text{ cm} = -48.67 \text{ cm}$$

像距为

$$s_5' = -s_5 = 48.67 \text{ cm}$$

这是一个实像,在光楔的左侧。

竖直方向的偏移为

$$\delta h = (n - 1) \alpha s_5 = -0.68 \text{ cm}$$

相对于物,向光楔的底部偏移 0.68 cm,因而到轴线的距离为

$$y_5' = y_5 + \delta h = 1.20 - 0.68 \text{ cm} = 0.52 \text{ cm}$$

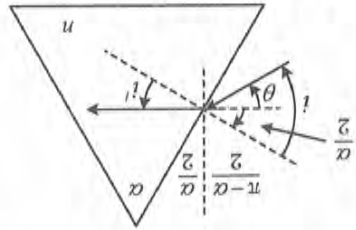
在轴线上方 0.52 cm。

【点评】 本题只要将 5 次成像过程分析清楚即可,不仅要计算每次成像的位置,同时要根据横向放大率确定像点到轴线的距离。

23. (19 届预赛) 图 2.101 中,三棱镜的顶角 α 为 60° ,在三棱镜两侧对称位置上放置焦距

24. (17 届预赛) 有一水平放置的平行平面玻璃板 H , 厚 3.0 cm , 折射率 $n = 1.5$ 。在其下表面下 2.0 cm 处有一小物 S ; 在玻璃板上有一薄凸透镜 L , 其焦距 $f = 30\text{ cm}$, 透镜的主轴与玻璃板面垂直; S 位于透镜的主轴上, 如图 2.104 所示。若透镜上方的观察者顺着主轴方向观

图 2.103 光线在棱镜中的偏转



$$n = \frac{\sin i'}{\sin i} = \frac{\sin\left(\theta + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\sin(25.5^\circ + 30^\circ)}{\sin 30^\circ} = 1.65$$

$\frac{\alpha}{2}$, 而折射角为 $i' = \frac{\alpha}{2}$ 。所以棱镜材料的折射率为

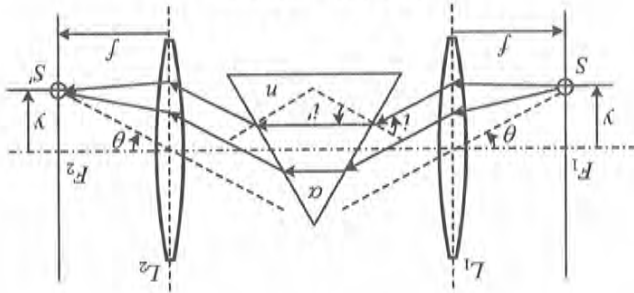
由图 2.103 可看出, 光线在棱镜侧面的入射角为 $i = \theta +$

$$\theta = \arctan \frac{f}{y} = \arctan \frac{30.0}{14.3} = 25.5^\circ$$

质, 可得

与前面的第 21 题相似, 记经过透镜的平行光线束与光轴的夹角为 θ , 则根据焦平面的性

图 2.102 成像过程



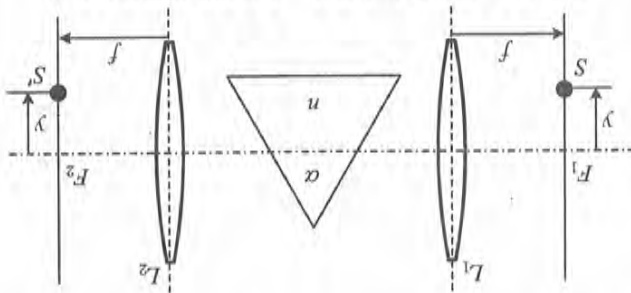
称的。

【解】成像的情况如图 2.102 所示, 由于物像是对称的, 所以任意一条光线也是对

称的。经 L_2 后, 会聚于 L_2 的像方焦平面上。

【分析】由于物位于 L_1 的前焦面上, 所以经 L_1 后为平行光束, 棱镜使平行光束偏转, 再

图 2.101 两透镜与中间的一个三棱镜构成的光具组



折射率。

均为 $f = 30.0\text{ cm}$ 的两个完全相同的凸透镜 L_1 和 L_2 。若在 L_1 的前焦面上距主轴下方 $y = 14.3\text{ cm}$ 处放一单色点光源 S , 已知其像 S' 与 S 对该光学系统是左右对称的。试求该三棱镜的

察到 S 的像就在 S 处,问透镜与玻璃板上表面的距离为多少?

【分析】 光线经过玻璃平板,要在上下两个面上发生折射。可以将这两次折射过程看作是成像过程。物 S 经玻璃平板所成的像,作为透镜的物,再经透镜成像。题中已知透镜像的位置,据此可确定玻璃平板与透镜的间距。

【解】 首先讨论物经玻璃平板成像的过程。

如图 2.105 所示,设玻璃厚度为 d ,记空气和玻璃的折射率分别为 n_1 和 n_2 ,物到玻璃平板第一个侧面的距离为 s 。经该平面成像,物距 $s_1 = s$ 。

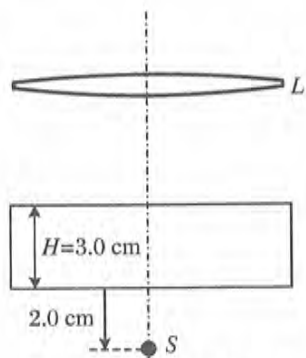


图 2.104 透镜与玻璃平板构成的光具组

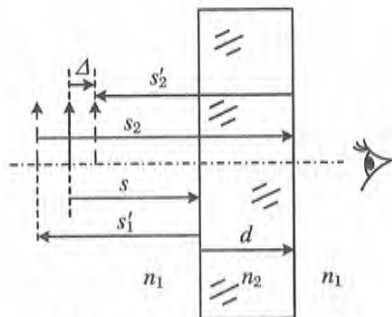


图 2.105 玻璃平板的逐次成像

平面的曲率半径 $r = \infty$,则折射平面的物像公式为 $\frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = 0$ 。

第一次折射成像,像距为

$$s_1' = -\frac{n's}{n} = -\frac{n_2 s_1}{n_1}$$

这是一个虚像,横向放大率为 $+1$ 。

该虚像作为第二个折射平面的物,到第二折射面物距为

$$s_2 = d - s_1' = d + \frac{n_1}{n_2} s_1$$

第二次成像,像距为

$$s_2' = -\frac{n_1 s_2}{n_2} = -\left(s_1 + \frac{n_1}{n_2} d\right)$$

仍为虚像,横向放大率依然为 $+1$ 。

注意到 s_2' 是从第二面算起的像距,而 s_1 是从第一面算起的物距,则最终的像相对于原物的距离为(以像在物的右方为正)

$$\Delta = s_2' + (s_1 + d) = -\left(s_1 + \frac{n_1}{n_2} d\right) + s_1 + d = \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right) d = \left(1 - \frac{1}{n}\right) d$$

即像在原物的右方,比物更靠近玻璃。

以下处理本题的成像问题。

对于本题,平行平板成像,像相对于物 S 向上的移动距离为

$$\Delta = \left(1 - \frac{1}{n}\right) d = 1.0 \text{ cm}$$

【解】(1) 本题中,三棱镜用于分光,透镜一是将入射光变为平行光入射到棱镜上,二是将从棱镜出射的平行光会聚到观察屏上。眼睛通过放大镜直接观察色散之后的光谱线。所以光

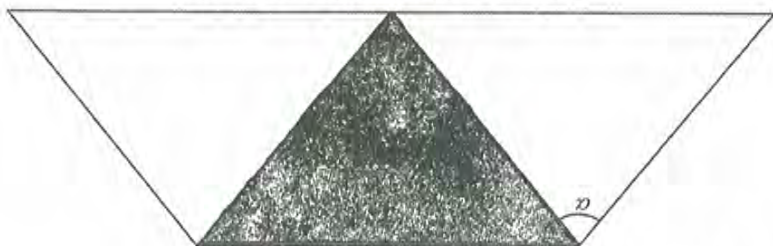
图 2.108 在此绘出各个光学元件的相对位置



(1) 试在图 2.108 中绘出圆筒内诸光学元件相对位置的示意图并说出各元件的作用。
 (2) 试论证三块棱镜各应由何种玻璃制成并求出三棱镜的顶角 α 的数值。

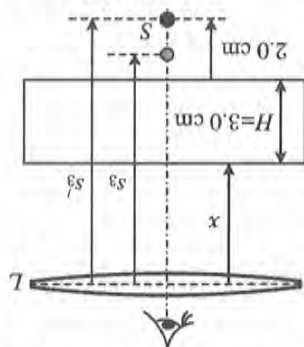
已知:当光源是钠光源时,它的黄色谱线(波长为 589.3 nm,称为 D 线)位于圆筒轴与观察屏相交处。制作棱镜所用的玻璃,一种为冕牌玻璃,它对钠 D 线的折射率 $n_D = 1.5170$;另一种为火石玻璃,它对钠 D 线的折射率 $n'_D = 1.7200$ 。

图 2.107 由组合棱镜构成的分光元件



25. (23 届复赛) 有一种被称为直视分光镜的光谱学仪器。筒内有:三个焦距分别为 f_1, f_2 和 f_3 的透镜 $L_1, L_2, L_3, f_1 = f_2 > f_3$; 观察屏 P, 它是一块带有刻度的玻璃片; 由三块形状相同的等腰棱镜构成的分光元件(如图 2.107 所示), 棱镜分别用折射率不同的玻璃制成, 两侧棱镜的材质相同, 中间棱镜则与它们不同, 棱镜底面与圆筒轴平行。圆筒的一端有一与圆筒轴垂直的狭缝, 它与圆筒轴的交点为 S, 缝平行于棱镜的底面。当有狭缝的一端对准筒外的光源时, 位于圆筒另一端的人眼可观察到屏上的光谱。

图 2.106 玻璃平板的像作为透镜的物



即经平板后,在下表面之下 1 cm 处成虚像。
 如图 2.106 所示,设透镜到平板上表面的距离为 x ,对透镜,前面所成的像是实物,物距为 $s_3 = 4 + x$,而经透镜所成的像是虚像,像距为 $s_3' = -(5 + x)$,由高斯公式

$$\frac{1}{4+x} + \frac{1}{-(5+x)} = \frac{1}{30}$$

得到

$$x^2 + 9x - 10 = 0$$

解得

$$x = 1, -10 \text{ (cm)}$$

显然只有 $x = 1 \text{ cm}$ 。

路配置如图 2.109 所示。

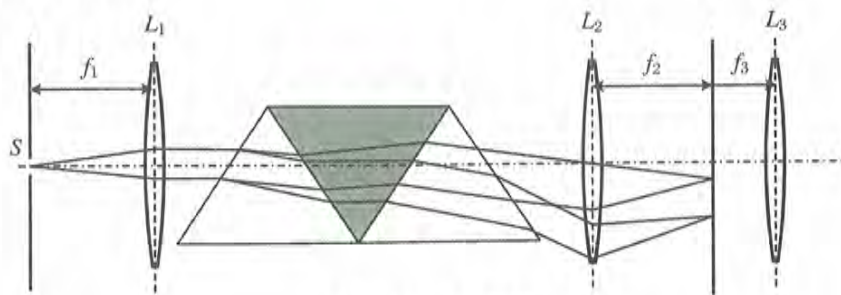


图 2.109 光路配置

(2) 由配置图可以看出,出射的 D 线一定沿光轴方向。而入射光线也沿光轴方向,所以光线的折射与传播是对称的,如图 2.110 所示。

可见在中间棱镜的界面处,内部的角度小于外部的角度,所以中间棱镜的折射率高,应当选用火石玻璃,两侧的棱镜应当选用冕牌玻璃。

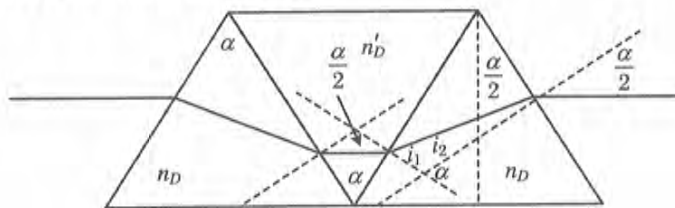


图 2.110 光线在各个界面上的折射

由图 2.110 可见, $n'_D \sin \frac{\alpha}{2} = n_D \sin i_1$, $n_D \sin i_2 = \sin \frac{\alpha}{2}$, 而 $i_1 + i_2 = \alpha$, 且

$$\begin{aligned} n_D \sin(\alpha - i_1) &= n_D (\sin \alpha \cos i_1 - \cos \alpha \sin i_1) = \sqrt{n_D^2 - n_D^2 \sin^2 i_1} \sin \alpha - n_D \sin i_1 \cos \alpha \\ &= \sqrt{n_D^2 - n_D'^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \sin \alpha - n_D' \sin \alpha \cos \alpha = \sin \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

$$2n_D' \cos \frac{\alpha}{2} \left(\sqrt{\frac{n_D^2}{n_D'^2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} - \cos \alpha \right) = 1$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{4n_D'^2 - (n_D + 1)^2}{4(n_D'^2 - n_D)}$$

可求得 $\alpha = 123.6^\circ$ 。

26. (28 届预赛) 近年来,由于“微结构材料”的发展,对具有负折射率的人工材料的光学性质及其应用的研究,一直受人关注。对折射率为 n 的正常介质,光线从真空射入介质时,入射角和折射角满足折射定律公式,入射光线和折射光线分布在界面法线的两侧;若介质的折射率为负,即 $n < 0$,这时入射角和折射角仍满足折射定律公式,但入射光线与折射光线分布在界面法线的同一侧。现考虑由共轴的两个薄凸透镜 L_1 和 L_2 构成的光学系统,两透镜的光心分别为 O_1 和 O_2 ,它们之间的距离为 s 。若要求与主光轴成很小夹角的光线从 O_1 入射后能够从 O_2 出射,并且出射光线与入射光线平行,则可以在 O_1 和 O_2 之间放一块具有负折射率的介质

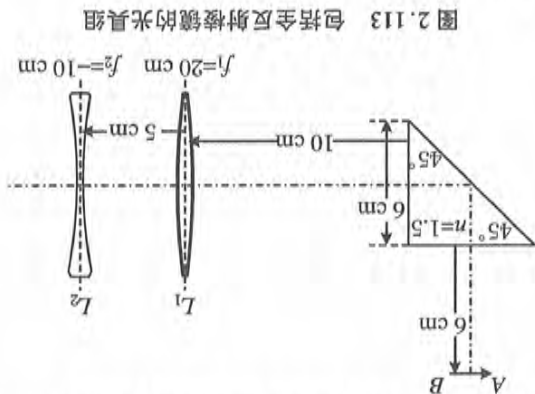


图 2.113 包括全反射棱镜的光具组

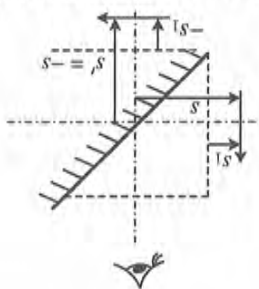


图 2.114 平面镜反射成像

27. (13届复赛) 长度为 4 mm 的物体 AB 由图 2.113 所示的光学系统成像。光学系统由一个直角棱镜、一个会聚透镜和一个发散透镜组成, 各有关参数和几何尺寸均标示于图上。求:

(1) 像的位置;

(2) 像的大小, 并作图说明是实像还是虚像, 是正立的还是倒立的。

【分析】 棱镜作为成像元件, 要经历三次成像过程, 水平面折射→斜面反射→竖直面折射。

【解】 (1) 先讨论物经三棱镜成像的情况

尽管全反射三棱镜可用作反射成像元件, 但其成像情况不同于平面镜。如图 2.114 所示, 物经平面镜反射, 在对称的位置成一个虚像。

而在介质表面的折射定律为

$$\sin i = n \sin i'$$

(2)

由于入射角、折射角均是小角, 所以上两式分别变为 $i = ni'$, $si = (i + i')d$, 于是有

$$d = \frac{ns}{n+1} = \frac{3s}{5}$$

图 2.111 透镜之间的负折射率介质

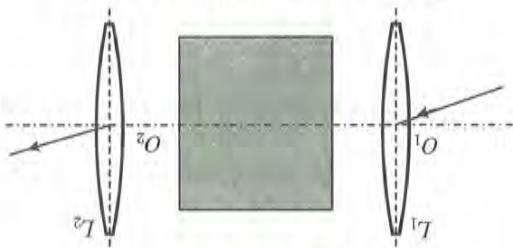
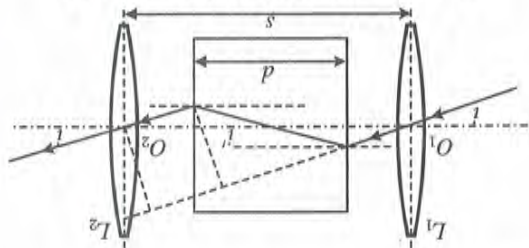


图 2.112 光线在负折射率介质中的折射



$$\sin i = \frac{\sin(i + i')d}{\cos i'}$$

(1)

绝对值表示, 根据题中所给条件, 可得

【解】 光线通过透镜光芯以及在介质中折射的情况如图 2.112 所示。角度和折射率均以

平板, 介质平板的中心位于 OO' 的中点, 板的两个平行的侧面与主光轴垂直, 如 2.111 所示。若介质的折射率 $n = -1.5$, 则介质的厚度即垂直于主光轴的两个平行侧面之间的距离 d

光线经过三棱镜的过程,先是经平面折射,然后经平面反射,最后再经平面折射。

可用逐次成像计算棱镜的像。

如图 2.115 所示,对三棱镜,第一次成像是竖直平面折射,设物到竖直面的距离为 s_1 ,经平面折射后,像距为 $s'_1 = -ns$,这是虚像,在竖直面的左侧。

第二次成像,是反射面成像。将第一次折射所成的像作为斜面(反射面)的物。由于斜面与竖直面不平行,为了确定相对位置,可以将竖直面的镜像作出,这是一个过竖直面与斜面交点的水平面,以此水平面作为成像的基准,反射所成的像到此基准的距离为 $s_2 = -s'_1$,在基准的下方。

第三次成像,是反射面的像作为水平面的物折射成像。如图 2.116 所示,物距为

$$s_3 = d + s'_2 = d + ns_1$$

像距为 $s'_3 = -\frac{s_3}{n} = -\frac{d - ns_1}{n} = -\left(s_1 + \frac{d}{n}\right)$,这是一个虚像,在水平面下方。

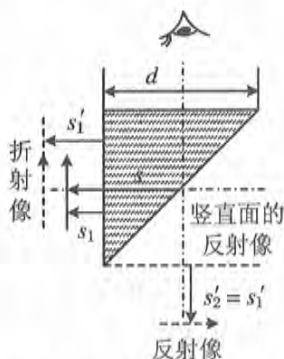


图 2.115 棱镜竖直面折射与斜面反射成像

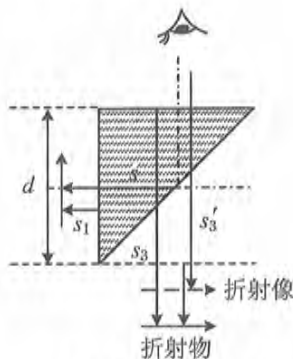


图 2.116 棱镜水平面折射成像

由于每一次都是平面成像,所以横向放大率都是 +1。

对于本题的情况,可以算出经棱镜的各个面三次成像后,最终的像到出射平面(即题中棱镜的竖直面)的距离为

$$s'_3 = -\frac{d + s_1}{n} = -\left(6 + \frac{6}{1.5}\right) = -10 \text{ (cm)}$$

是虚像, A 端向上,在竖直面左侧。

之后依次经两透镜成像。

第四次成像,物距 $s_4 = 20 \text{ cm}$,而 $f_1 = 20 \text{ cm}$,经 L_1 后成像在无穷远处。

第五次成像,会聚于 L_2 的像方焦平面处,像距 $s'_5 = -10 \text{ cm}$,为虚像。

(2) 再计算横向放大率

经棱镜后所成的像 A 端向上,与原物等大小。以该像为基准,讨论经透镜逐次成像后的横向放大率。对于 L_1 ,出射光为平行光束,相当于成实像于无穷远处,即像距 $s'_4 = +\infty$;对于 L_2 ,相当于虚物在无穷远处,因而物距 $s_5 = -\infty$,如图 2.117 所示。于是透镜组的横向放大率为

$$\beta = \left(-\frac{s'_4}{s_4}\right)\left(-\frac{s'_5}{s_5}\right) = \left(-\frac{+\infty}{20}\right)\left(-\frac{-10}{-\infty}\right) = +\frac{1}{2}$$

这是一个实像，在球面镜的球心一侧。

$$s'_2 = \frac{s_2 f}{s_2 - f} = 48 \text{ cm}$$

像距为

第二次，球面反射，透镜的像作为球面镜的物，物距为 $s_2 = 0 - s'_1 = 0 - (-16) \text{ cm} = 16 \text{ cm}$ ，解得 $s'_1 = -16 \text{ cm}$ ，这是一个虚像，在物方。

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{s'_1} = \frac{1}{48}$$

共三次成像过程。第一次，透镜成像，有

$$\text{镀银后所形成的球面反射镜的焦距 } f = \frac{r}{2} = \frac{f_0}{4} = 12 \text{ cm}。$$

所以球面半径 $r = (n - 1)f_0 = f_0/2 = 24 \text{ cm}$ 。

$$\frac{1}{f_0} + \frac{1}{n} = \frac{1}{-r}$$

即有

平行光入射，物距为 $s = \infty$ ，像距 $s' = f$ ，注意到对物方而言是凹球面。根据单球面的物像公式，

由于正入射的平行光在平面处不折射，会聚点就是球面的像方焦点，对于球面而言，相当于

首先计算球面的半径。

逐次成像法求解该问题。

空气中的平凸透镜与凹球面镜的组合。光就经历了透镜、球面镜、透镜三次成像过程，可以用

透镜 48 cm 处。不妨考虑平行光自平面一侧入射。这样，对于球面镀银的情形，可以将其视作

空气中的薄透镜物方像方的焦距相等，本题中，无论平行光从哪一侧入射，都将会聚到距离

【解】 此题与 17 届预赛光学题相似。

所成像的位置。

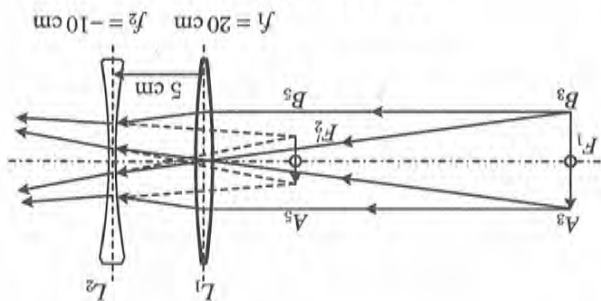
$f_0 = 48 \text{ cm}$ 处，透镜的折射率 $n = 1.5$ 。若将此透镜的凸面镀银，物置于平面前 12 cm 处，求最后

28. (18 届预赛) 一束平行光沿薄平凸透镜的主光轴入射，经透镜折射后，会聚于距离透镜

对透镜即可。

实际上，平面反射、折射时，都是成横向放大率为 +1 的虚像，因而讨论横向放大率时，只针

图 2.117 透镜组的成像



是正立的缩小的虚像。

第三次,物距 $s_3 = 0 - s'_2 = -48 \text{ cm}$,像距为

$$s'_3 = \frac{s_3 f_0}{s_3 - f_0} = 24 \text{ cm}$$

这是一个实像,与入射光在同一侧。

另一种解法是将上述组合作为一个元件。由于是薄透镜与球面镜的组合,三个光学元件的光芯是重合的,间距为 0,所以整个组合的光焦度就等于各个元件的光焦度之和。注意到每个元件都在空气中,所以有

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi' + \Phi_0 = \frac{1}{f_0} + \frac{1}{f'} + \frac{1}{f_0} = \left(\frac{2}{48} + \frac{1}{12} \right) \text{ cm}^{-1} = \frac{1}{8} \text{ cm}^{-1}$$

焦距为 $f = \frac{1}{\Phi} = 8 \text{ cm}$,等效于一个凹面镜。

因而最终的像距为

$$s' = \frac{sf}{s - f} = \frac{12 \times 8}{12 - 8} \text{ cm} = 24 \text{ cm}$$

读者也许会觉得上述处理方法有些问题,反射膜明明是直接镀在球面上的,反射膜与玻璃表面之间并没有空气,应当是“折射平面+反射球面+折射平面”的组合。那么为何可以将整个系统看作是置于空气中的“透镜+凹面镜+透镜”组合呢?

其实,这个疑问可以从两方面解释。

一方面,厚度几乎为 0 的一层薄空气,对成像并不起任何作用,所以将其“填充”在透镜与反射镜之间,对成像结果没有影响。

另一方面,可以证明:将系统作为“折射平面+反射球面+折射平面”的组合进行处理,结果完全相同。

对本题,则有以下过程与结果。

第一次,物自空气经平面向玻璃折射成像。像距为

$$s'_1 = -ns = -18 \text{ cm}$$

第二次,在玻璃中经球面反射成像。对凹面镜,物距为 $s_2 = 0 - s'_1 = [0 - (-18)] \text{ cm} = 18 \text{ cm}$,像距为

$$s'_2 = \frac{s_2 f}{s_2 - f} = 36 \text{ cm}$$

第三次,自玻璃经平面向空气折射成像。物距 $s_3 = 0 - s'_2 = -36 \text{ cm}$,像距为

$$s'_3 = -\frac{s_3}{n} = 24 \text{ cm}$$

与前面的结果一致。

从一般性角度分析,不妨设透镜两个球面的曲率半径分别为 r_1, r_2 ,半径为 r_2 的一侧涂有反射膜。则光线从半径为 r 的球面一侧入射时,三个面的光焦度分别是

$$\Phi_1 = \frac{n-1}{r_1}, \quad \Phi_2 = -\frac{2n}{r_2}, \quad \Phi_3 = \frac{1-n}{-r_1}$$

整个组合的光焦度为

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = \frac{n-1}{r_1} - \frac{2n}{r_2} + \frac{1-n}{-r_1} = \frac{2(n-1)}{r_1} - \frac{2n}{r_2}$$

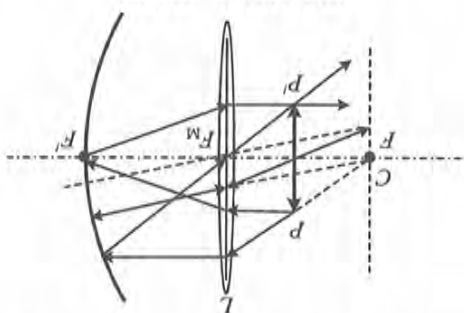


图 2.119(a) 凹面镜

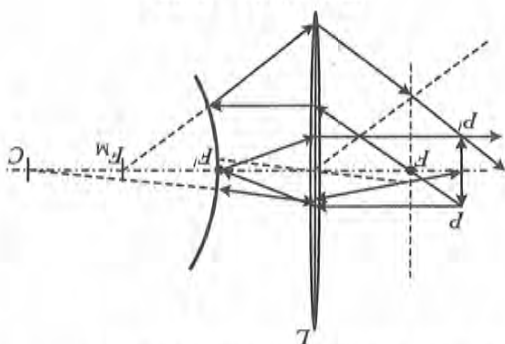


图 2.119(b) 凸面镜

小的实像。作图过程中利用了焦平面,可方便地确定任意入射光折射、反射后的方向。

(3) 成像作图法如图 2.119(a)和图 2.119(b)所示,可见都是在物所在的位置成等大

$$(2) -1; -1.$$

$$(1) s = \frac{-f(f-R)}{R}; s' = \frac{R}{f(f+R)}.$$

【解】这是一个自准直光学系统,光线向球面的中心会聚,所以填空结果为:

置成像。这就相当于物经透镜所成的像在球面镜的球心处。

【分析】轴上物点的光线经过透镜后,沿着反射镜的法线入射,才能折返后在原来物的位

评分,不要求写出作图理由和说明,但须用已知量标出各个像在光轴上的具体位置。

学系统逐次成的像及成像光路图。(要求将凹面镜和凸面镜分别画在两张图上。评分时只按图

(3) 若球面镜的半径大小 $R = 2f$,试按作图法的规范要求,画出第(2)小题中短杆对上述光

最后的大小与物的大小之比对凹面镜等于_____;对凸面镜等于_____。

(2) 若将一短细杆垂直于光轴放置,杆的下端位于 P 点,则此细杆经上述光学系统所成的

到透镜的距离等于_____。

(1) 若球面镜为凹面镜,则 P 点到透镜的距离等于_____;若球面镜为凸面镜,则 P 点

作图。

下面第(1)小题和第(2)小题中填空,在第(3)小题中

的傍轴光线经此光学系统后,恰好成像在 P 点。试在

在透镜 L 左侧光轴上有限远处有一发光点 P ,它发出

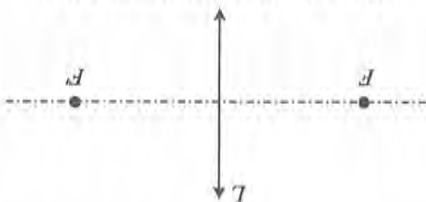
于 F' 处),透镜和球面镜组成一轴对称的光学系统。

处放置一曲率半径大小为 R 的球面反射镜(其顶点位

f 的薄凸透镜(F 与 F' 为其焦点)。在透镜右侧焦点 F'

29. (24 届预赛) 如图 2.118 所示, L 是一焦距为

图 2.118 凸透镜及其两侧的焦点



所以,读者今后遇到此类问题,可以放心地用上述方法进行处理。

对于本题, $f = \frac{1}{\Phi} = \frac{1}{\left(0 - \frac{2n}{-r}\right)^{-1} - \frac{2n}{r}} = \frac{1}{\frac{2n}{r} - \frac{2n}{r}} = 8 \text{ cm}$,与前述结果完全相同。

$$f = \frac{1}{\Phi} = \left[\frac{2(n-1)}{r_1} - \frac{2n}{r_2} \right]^{-1}$$

焦距为

30. (1) 图 2.120 所示为一凹球面镜, 球心为 C , 内盛透明液体, 已知 C 离液面高度 CE 为 40.0 cm, 主轴 CO 上有一物 A , 物离液面高度 AE 恰好为 30.0 cm 时, 物 A 的实像和物重合。实验时光阑直径很小, 可以保证符合傍轴光线的条件。试求该透明液体折射率 n 。

(2) 体温计横截面如图 2.121 所示, 已知细水银柱 A 离圆柱面顶点 O 的距离为 $2R$, R 为该圆柱面半径。 C 为圆柱面中心轴位置。玻璃的折射率 $n = 3/2$, E 代表人眼。求图示横截面内人眼所见水银柱像的位置、虚实、正倒和放大倍数。

【分析】 第一个问题满足自准直成像的条件。第二个问题中, 虽然体温计的表面为圆柱面, 但是由于人眼的瞳孔很小, 可认为通过图示横截面的光线进入眼睛成像, 这一截面也可以看作是球面的截面, 所以可以用球面折射成像的方法处理。

【解】 (1) 由于像与物在相同的位置, 说明反射球面的光线是沿着其半径射入射出的, 即球面的物像都在其球心 C 处。

而球面的物是液体平面折射所成的像, 对于液面, 物距 $s = \overline{AE}$, 忽略液体的厚度, 像距 $s' = -\overline{CE}$, 根据平面折射的物像公式 $\frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = 0$, 可得

$$n' = -\frac{ns'}{s} = -\frac{1 \times (-40)}{30} = \frac{4}{3}$$

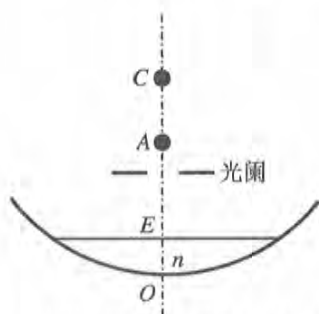


图 2.120 盛有透明液体的凹面镜

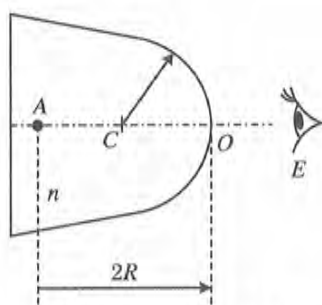


图 2.121 体温计的横截面

(2) 利用球面折射的物像公式 $\frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r}$, 本题中, 物距 $s = 2R$, 球面曲率半径 $r = -R$, 可得 $\frac{1}{s'} = \frac{1-n}{-R} - \frac{n}{2R}$, 算得

$$s' = \frac{2R}{n-2} = -4R$$

这是一个虚像, 横向放大率

$$\gamma = -\frac{ns'}{n's} = +3$$

是正立的。

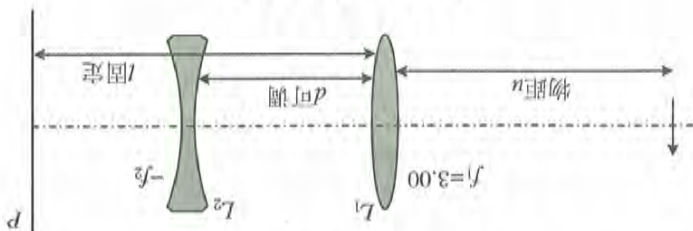
31. (11 届复赛) 照相机镜头 L 前 2.28 m 处的物体被清晰地成像在镜头后面 12.0 cm 处的照相胶片 P 上。今将一折射率为 1.50、厚 $AB = 0.90$ cm、两面平行的玻璃平板插入镜头与胶片之间, 玻璃平板与光轴垂直, 位置如图 2.122 所示。设照相机镜头可看作一个简单薄凸透镜,

(1) 物先经过 L_1 成像, 根据高斯公式 $\frac{1}{n} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f_1}$ 得到

可以改变。

【解】 本题类似于照相机的成像问题, 有两个间距可调的透镜组成的一个透镜组, 其焦距

图 2.123 成像光具组



求的物体都能在 P 上成实像, 则 L_2 的焦距 f_2 应满足什么条件及相应的 d 的调节范围。

(3) 如果要采用一个焦距确定的 L_2 , 通过调节 d 的数字使物距满足上面第(2)小题的要

有何限制?

(2) 是否只要 f_2 和 d 取值适当, 不管物体在什么地方都能在 P 上成像? 如不能, 则对物距

(1) 如果 $f_2 = 3.00$ cm, 物体从无穷远处移到 $u_1 = 100.0$ cm 处, 则 L_2 移动的距离为多少?

通过调节 d 使无穷远处的物或近处的物都能在底片上成像, 问:

给定 $f_1 = 3.00$ cm, P 与 L_1 之间的距离 $l = 4.50$ cm. L_1 与 L_2 之间的距离 d 是可调的。要求

薄透镜 L_2 为发散透镜, 焦距为 $-f_2$ 。成像面 P 处放有照相底片, L_1 和 P 的位置固定不动, 现

32. (14 届复赛) 一光学系统的结构如图 2.123 所示, 薄透镜 L_1 为会聚透镜, 焦距为 f_1 ;

$$s = \frac{s'f}{s' - f} = \frac{11.7 \times 11.4}{11.7 - 11.4} \text{ cm} = 444.6 \text{ cm}$$

物距为

$$f = \frac{ss'}{s + s'} = \frac{228 \times 12.0}{228 + 12.0} \text{ cm} = 11.4 \text{ cm}$$

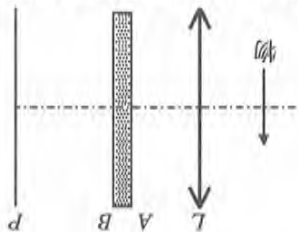
而根据没有玻璃平板时透镜成像的参数, 可算得透镜的焦距为

$$s' = 12.0 - 0.3 \text{ cm} = 11.7 \text{ cm}$$

(2) 为了使像仍在 P 上, 则透镜的像应当位于 P 左侧 0.3 cm 处。由此算得像距为

即像在 P 右侧 0.3 cm 处。

图 2.122 镜头后插一玻璃板



光线为近轴光线。

【解】 (1) 物经玻璃平板所成的像, 相对于物向像方的移动

体仍清晰地成像于胶片上, 则物体应放在何处?

(2) 如果保持镜头、玻璃板、胶片三者间距不变, 并要求物

(1) 求插入玻璃板后, 像的新位置;

$$\Delta = d \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 0.3 \text{ cm}$$

$$s'_1 = \frac{uf_1}{u - f_1}$$

$$u = +\infty, \quad s'_1 = 3 \text{ cm}; \quad u = 100.0 \text{ cm}, \quad s'_1 = \frac{300}{97} \text{ cm}$$

再经 L_2 成像, 对 L_2 , 焦距 $f_2 = -3.00 \text{ cm}$, 物距 $s_2 = d - s'_1$, 由于要求在 P 上成实像, 所以像距必须 $s'_2 = l - d > 0$ 。

根据高斯公式 $\frac{1}{d - s'_1} + \frac{1}{l - d} = \frac{1}{f_2}$ 计算限制条件。公式化为

$$d^2 - (l + s'_1)d + (l - f_2)s'_1 + lf_2 = 0$$

代入参数得

$$d^2 - (4.50 + s'_1)d + 7.50s'_1 - 13.50 = 0$$

$$d = \frac{4.50 + s'_1 \pm \sqrt{(4.50 + s'_1)^2 - 4(7.50s'_1 - 13.50)}}{2}$$

当 $s'_1 = 3.00 \text{ cm}$ 时, $d = 1.50 \text{ cm}$ 或 6.00 cm , 由于 d 的调节范围最大只有 4.50 cm , 显然 $d = 1.50 \text{ cm}$ 。

当 $s'_1 = \frac{300}{97} \text{ cm}$ 时, $d = 1.62 \text{ cm}$ 或 5.97 cm , 显然 $d = 1.62 \text{ cm}$ 。

L_2 从 1.50 cm 移动到 1.62 cm , 向屏幕移动 0.12 cm 。

(2) 由于要在屏幕上成实像, 而 L_2 是负透镜, 只有虚物才能成实像。由 $\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s'_2} = \frac{1}{f_2}$ 得到

$s'_2 = \frac{s_2 f_2}{s_2 - f_2}$, $s_2 < 0, f_2 < 0$, 要使 $s'_2 > 0$, 必须 $s_2 > f_2$, 即 $|s_2| < |f_2|$, L_1 的像在 L_2 物方焦点内

侧。而所成的实像, $s'_2 = \frac{f_2}{1 - f_2/s_2}$ 。当 $1 < \frac{f_2}{s_2} < 2$ 时, $s'_2 > -f_2$, 实像在物方焦点外侧, $\frac{f_2}{s_2} > 2$ 时,

$0 < s'_2 < -f_2$, 实像在物方焦点内侧。但像一定在虚物的外侧。所以虚物不能处于屏幕外侧, 即 L_1 成像时, 最大的像距为 4.5 cm 。由此算得最小的物距为

$$s_{\min} = \frac{s'_{1\max} f_1}{s'_{1\max} - f_1} = 9 \text{ cm}$$

(3) 由于实像一定处于虚物的外侧, 而虚物又必须处于焦点的内侧。

最远的虚物, 物距为 -4.5 cm , 这样的虚物在 P 上, 要使经 L_2 的实像也在屏幕上, 只有物距为 0 , 此时 L_2 要紧贴屏幕, 对其焦距并无要求。

若物稍远一些, 虚物在 P 的内侧, 这时物、像间距离较小, 焦距可以较大。虚物在 3 cm 处时, 物像间距离最大, $s_2 + s'_2 = 1.5$ 。对这时的情况进行计算, 根据 $\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s'_2} = \frac{1}{f_2}$, 可得

$$f_2 = \frac{s_2 s'_2}{s_2 + s'_2}$$

本题中的可变参量有两个, 物距改变, 引起 s_2 改变, 又可使 d 改变, s_2 和 s'_2 也同时改变, 若设 $s_2 + s'_2 = D$, 则 $0 < s_2 + s'_2 = D < 1.5 \text{ cm}$, $0 < s'_2 < 4.5 \text{ cm}$, 所以可讨论式

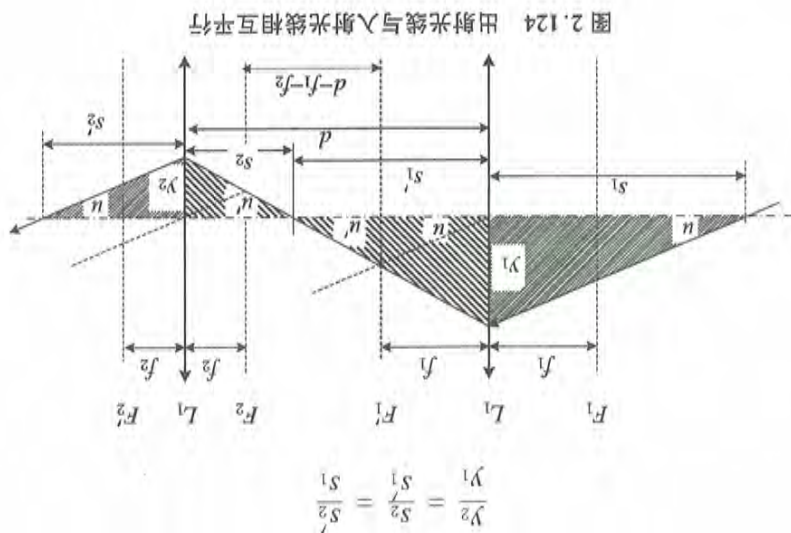
$$f_2 = \frac{s'_2(D - s'_2)}{D}, \quad f_2 = \frac{s'_2(1.5 - s'_2)}{1.5}$$

要使 $f_2 < 0$, s'_2 的最小值为 1.5 cm , 所以 s'_2 只能在 $1.5 \sim 4.5 \text{ cm}$ 间取值, 此时 f_2 的值

而利用两次成像的高斯公式,可得

$$\frac{s_2'}{s_2} \frac{s_1'}{s_1} = 1$$

进一步化为



得到

利用图 2.124,从中可以看出,光线与光轴的交点就是共轭的物像点,由两对相似三角形可
 的一对共轭光线相互平行。

【解】(1) 本题其实就是求出光具组的节点。所谓节点是光轴上的一对共轭点,经过节点
 (2) 根据所得结果,分别画出各种可能条件下的光路示意图。
 (1) 若要求入射光线和与之对应的出射光线相互平行,问该入射光线应满足什么条件?

光具座上。

33. (16 届复赛) 两个焦距分别是 f_1 和 f_2 的薄透镜 L_1 和 L_2 , 相距为 d , 被共轴地安置在

$$n = \frac{s_1' f_1}{s_1 f_1} = \frac{1 - \frac{f_1}{s_1'}}{f_1} \cdot \frac{1 - \frac{f_1}{s_1}}{f_1} = \frac{1 - \frac{f_1}{l}}{f_1} = \frac{9 \text{ cm}}{f_1}$$

L_2 与 L_1 间隔 d 小于 3 cm。即要求 $l < s_1'$, 而

在选定 f_2 虚物在 P 左侧时, $s_2' + s_2 > 0$, 当物很远时, 经 L_1 所成的像在 3 cm 处, 此时, 要使

$$|f_2|_{\min} = 3 \text{ cm}$$

$|s_2|$ 最大为 3 cm, 根据 $s_2' = \frac{1 - f_2/s_2}{f_2}$, 其焦距也必须大于 3 cm, 即

距最大是 $|f_2|_{\max} = 4.5 \text{ cm}$, 而远处物体经 L_1 后, 像距为 3 cm, 此时使 L_2 紧靠 L_1 , 虚物的物距

一般情况下, $0 < s_2 + s_2' = D < 1.5 \text{ cm}$, $0 < s_2' < 4.5 \text{ cm}$, 算得 $f_2 = \frac{s_2'(D - s_2')}{D}$, 因而 L_2 的焦

为 $-9 \sim 0 \text{ cm}$ 。

$$\frac{s'_1}{s_1} = \frac{f_1}{s_1 - f_1}$$

$$s_2 = d - s'_1 = d - \frac{s_1 f_1}{s_1 - f_1}$$

$$\frac{s'_2}{s_2} = \frac{f_2}{d - \frac{s_1 f_1}{s_1 - f_1} - f_2} = \frac{f_2(s_1 - f_1)}{(d - f_2)(s_1 - f_1) - s_1 f_1}$$

最后可得到

$$\frac{f_1}{s_1 - f_1} \frac{f_2(s_1 - f_1)}{(d - f_2)(s_1 - f_1) - s_1 f_1} = 1$$

$$f_1 f_2 = d s_1 - d f_1 - s_1 f_2 + f_1 f_2 - s_1 f_1$$

解得

$$s_1 = \frac{d f_1}{d - (f_2 + f_1)}$$

同理有

$$s'_2 = \frac{d f_2}{d - (f_2 + f_1)}$$

(2) 若 $d > f_2 + f_1$, 就是图 2.124 所示的情形。

若 $d = f_2 + f_1$, 只有与光轴平行的光线才满足条件, 如图 2.125 所示。

若 $d < f_2 + f_1$, $s_1 < 0$, 节点在 L_1 右侧, 对 L_1 等效于虚物成像, 光路如图 2.126 所示。

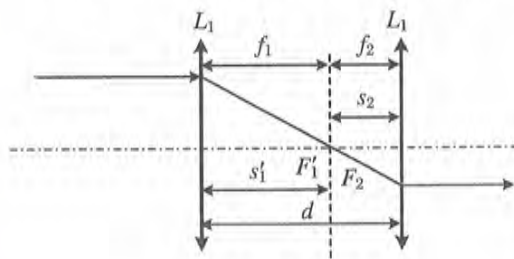


图 2.125 $d = f_2 + f_1$

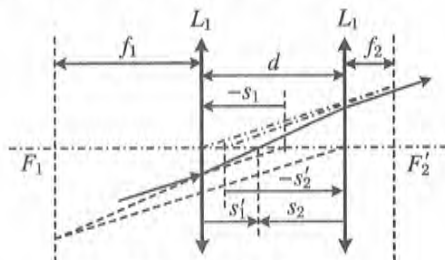


图 2.126 $d < f_2 + f_1$

34. (18 届复赛) 有一放在空气中的玻璃棒, 折射率 $n = 1.5$, 中心轴线长 $L = 45 \text{ cm}$, 一端是半径为 $R_1 = 10 \text{ cm}$ 的凸球面。

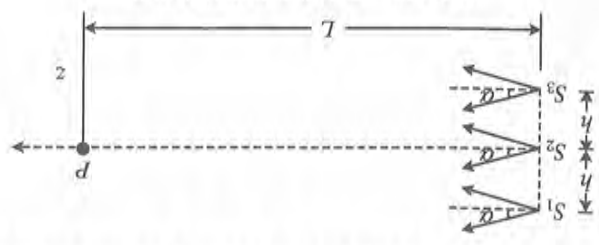
(1) 要使玻璃棒的作用相当于一架理想的天文望远镜(使主光轴上无限远处物成像于主光轴上无限远处的望远系统), 取中心轴线为主光轴, 玻璃棒另一端应磨成什么样的球面?

(2) 对于这个玻璃棒, 由无限远物点射来的平行入射光束与玻璃棒的主光轴成小角度 φ_1 时, 从棒射出的平行光束与主光轴成小角度 φ_2 , 求 φ_2/φ_1 (此比值等于此玻璃棒望远系统的视角放大率)。

【解】 (1) 第一面的像方焦点与第二面的物方焦点重合, 则满足望远系统的条件, 如图 2.127 所示。

- (1) 求出组合透镜中每个透镜光芯的位置。
 (2) 说明对三个透镜应如何加工和组装,并求出有关数据。

图 2.128 三个排列起来的点光源



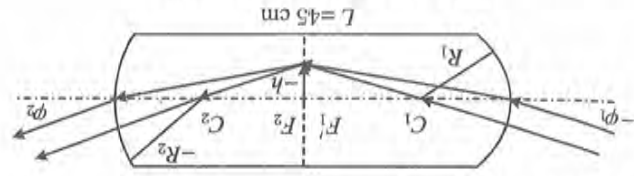
如图 2.128 所示, S_1, S_2, S_3 是等距离 (h) 地排列在一直线上的三个点光源, 各自向垂直于它们的连线的同一方向发出半顶角为 $\alpha = \arctan(1/4)$ 的圆锥形光束。请使用三个完全相同的、焦距为 $f = 1.50h$ 、半径为 $r = 0.75h$ 的圆形薄凸透镜, 经加工、组装成一个三者在同一平面内的组合透镜, 使三束光都能全部投射到这个组合透镜上, 且经透镜折射后的光线能全部会聚于 z 轴 (以 S_2 为起点, 垂直于三个点光源连线, 与光束中心线方向相同的射线) 上距离 S_2 为 $L = 12.0h$ 处的 P 点。(加工时可对透镜进行外形的改变, 但不能改变透镜焦距)。

35. (21 届复赛) 目前, 大功率半导体激光器的主要结构形式是由许多发光区等距离地排列在一条直线上的长条状, 通常称为激光二极管条。但这样的半导体激光器发出的是很多束发散光束, 光能分布很不集中, 不利于传输和应用。为了解决这个问题, 需要根据具体应用的要求, 对光束进行必需的变换 (或称整形)。如果能把一个半导体激光二极管条发出的光变换成一束很细的平行光束, 对半导体激光的传输和应用将是非常有意义的。为此, 有人提出了先把多束发散光会聚到一点, 再变换为平行光的方案, 其基本原理可通过如下所述的简化了的情况来说明。

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} \approx \frac{f_1 - R_1}{f_2 + R_2} = \frac{20}{10} = 2$$

由于 $\varphi_1 \approx \frac{f_1 - R_1}{h}, \varphi_2 \approx \frac{f_2 - (-R_2)}{h}$, 则得到

图 2.127 端面为球面的玻璃棒



(2) 因为两侧折射率不等, 通过光芯的光线也发生折射; 沿法线 (直径) 入射的光线方向不变; 无穷远处物体成像于像方焦平面处。

$$R_2 = -5 \text{ cm}$$

由于 $f'_1 = \frac{\Phi_1}{n} = \frac{n-1}{n} = 30 \text{ cm}, f_2 = \frac{\Phi_2}{n} = \frac{1-n}{n} = 15 \text{ cm}$, 解得

【解】 因为物像之间的轴向距离相等,所以对三个透镜来说,物距、像距分别相等。但横向位置不同,所以三透镜光轴应当错开,可利用横向放大率确定两侧透镜的轴线位置,如图 2.129 所示。

(1) 由于 $s' + s = 12h$, $f = 1.5h$, 根据 $\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$, 可算得 $s = 3(2 \pm \sqrt{2})h$ 。

当物距较大时,距光源较远,不同光源发出的光将射到同一个透镜上,这样就不能是其会聚到同一点,所以采用小的物距,使每束光只射到一个透镜上,即取

$$s = 3(2 - \sqrt{2})h = 1.76h$$

设 S_1 到其透镜轴线的距离为 y , 所成的像到其透镜轴线的距离为 y' , 由于横向放大率

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} = \frac{3(2 + \sqrt{2})}{3(2 - \sqrt{2})} = 3 + 2\sqrt{2}$$

而 $y' + y = h$, 所以可得

$$y = \frac{h}{4 + 2\sqrt{2}} = 0.15h$$

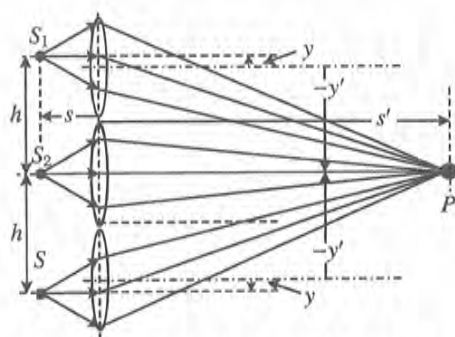


图 2.129 三个透镜将光束会聚到一点

在 S_1 下 $0.15h$ 处,即在中心轴线上 $0.85h$ 处。下边的透镜对称配置。

(2) 在透镜平面处,光斑的大小为

$$\Phi = 2s \tan \alpha = \frac{3(2 - \sqrt{2})}{2} h = 0.88h$$

而相邻光源间距离为 h , 说明在此处光束没有重叠。而上下两透镜的光轴偏离光源轴线 $0.15h$, 则上下两透镜的半径至少为 $0.15h + 0.44h = 0.59h$, 但靠近中间光轴的部分要切割掉一部分, 以免进入中间的光斑区域。

比较好的组合方式是每个透镜的边缘都比光斑的边缘略大一些, 同时切割之后相邻透镜的接触部分长度相等, 这样黏接起来很牢固, 图 2.130 所示是一种切割与组装方法。

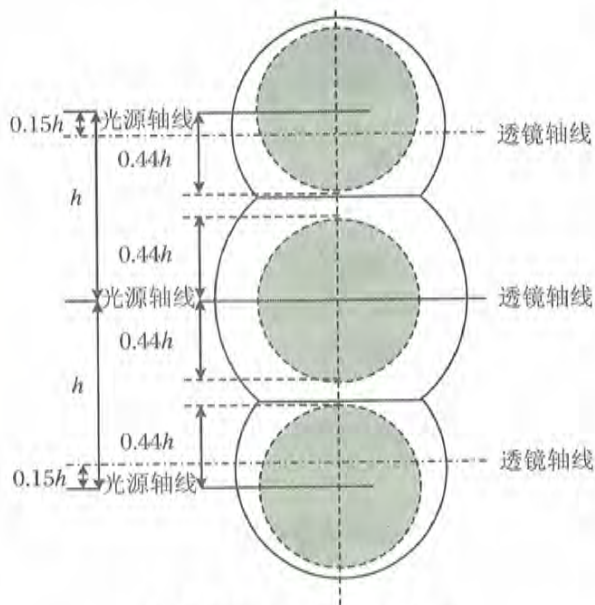


图 2.130 透镜的切割与组装

36. (26 届复赛) 内半径为 R 的直立圆柱器皿内盛水银, 绕圆柱轴线匀速旋转(水银不溢, 皿底不露), 稳定后的液面为旋转抛物面。若取坐标原点在抛物面的最低点, 纵坐标轴 z 与圆柱器皿的轴线重合, 横坐标轴 r 与 z 轴垂直, 则液面的方程为 $z = \frac{\omega^2}{2g} r^2$, 式中 ω 为旋转角速度, g

该像对眼睛的张角为

$$y'_1 = y \frac{-s'_1}{-s'_1 - f} = -\frac{yf}{s - f}$$

像的大小为

$$s'_1 = \frac{sf}{s - f}$$

设眼睛到抛物面顶点的距离为 s , 眼睛的大小为 y , 则抛物面成像的像距为 s'_1 , 以下讨论成像问题。

这就是平面与抛物面顶点间的距离。

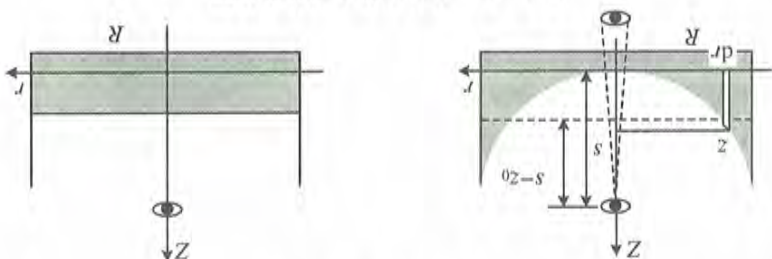
$$z_0 = \frac{V}{\pi R^2} = \frac{\pi R^2}{4g}$$

当抛物面成为平面时, 这些水银所形成的圆柱的高为

$$V = \int_0^R 2\pi z r dr = \int_0^R 2\pi \frac{\omega^2}{2g} r^3 dr = \frac{\pi \omega^2 R^4}{4g}$$

上述水银的体积为

图 2.131 转动和静止时的水银面



$$dV = z dS = 2\pi r dr$$

$dS = 2\pi r dr$ 。则该圆筒壁的体积为

取一半径为 r 的薄壁圆筒, 筒壁的高为 $z = \frac{\omega^2}{2g} r^2$, 圆筒的底面积为 $S = \pi r^2$, 则薄壁的底面积为 $dS = 2\pi r dr$ 。对于过抛物面顶点的平面之上的水银的体积, 可以采用积分方法计算。如图 2.131 所示,

$$f = \frac{8}{2\omega^2}$$

抛物面的焦点就是球面成像的焦点, 由于抛物线的方程为 $z = \frac{\omega^2}{2g} r^2$, 可知其焦距为

后, 看到的像的大小都相同, 不是指像的大小相同, 而是像对眼睛的视角相同。
的物像公式; 其次, 要确定平面与抛物面顶点间的距离, 也就是要计算抛物面下水银的体积; 最
【解】 本题有三个关键点: 首先, 要明白大的抛物面的近轴部分近似于球面, 可用球面反射
银面最低点的距离。

后, 发现与稳定旋转时相比, 看到的眼睛的像的大小、正倒都无变化。求人眼位置至稳定旋转水
观察者的眼睛位于抛物面最低点正上方某处, 保持位置不变, 然后使容器停转, 待液面静止
为重力加速度 (当代已使用大面积的此类旋转水银液面作反射式天文望远镜)。

$$\varphi_1 = \frac{y'_1}{s - s'_1} = -\frac{yf}{(s - s'_1)(s - f)}$$

眼睛到平面的距离为 $s_2 = s - z_0$, 经平面成像距为 $s'_2 = -(s - z_0)$, 像的大小仍为 y , 则对眼睛的张角为

$$\varphi_2 = \frac{s'_2}{s_2 - s'_2} = \frac{y}{2(s - z_0)}$$

由于 $\varphi_1 = \varphi_2$, 所以 $\frac{yf}{(s - s'_1)(s - f)} = \frac{y}{2(s - z_0)}$, 即 $-(2s - 2z_0)f = s^2 - 2sf$. 计算得到

$$s = \sqrt{2fz_0} = \sqrt{2 \times \frac{g}{2\omega^2} \frac{\omega^2 R^2}{4g}} = \frac{R}{2}$$

【点评】 作者在评阅考卷时发现, 几乎所有的考生都用积分方法计算抛物面下圆筒内水银的体积, 但几乎没有考生能够算对, 原因都是积分的体积元选错了, 他们选取绕轴形成的扇形作体积元, 这当然是没有道理的。至于标准答案中所给的计算体积的方法, 尽管简洁, 但几乎没有考生采用。这真是辜负了出题者的良苦用心。

37. (27 届复赛) 正午时太阳的入射光与水平面的夹角 $\theta = 45^\circ$ 。有一座房子朝南的墙上有一个直径 $W = 10 \text{ cm}$ 的圆窗, 窗口中心距地面的高度为 H , 如图 2.132 所示。试设计一套采光装置, 使得正午时刻太阳光能进入窗口, 并要求进入的光为充满窗口、垂直墙面、且光强是进入采光装置前 2 倍的平行光。可供选用的光学器件如下: 一个平面镜, 两个凸透镜, 两个凹透镜; 平面镜的反射率为 80%, 透镜的透射率 70%, 忽略透镜表面对光的反射。要求从这些器件中选用最少的器件组成采光装置。试画出你所设计的采光装置中所选器件的位置及该装置的光路图, 并求出所选器件的最小尺寸和透镜焦距应满足的条件。

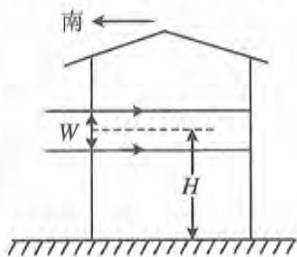


图 2.132 房屋的窗户

【解】 平行光通过某一截面的光功率(也叫光通量或能流)正比于截面面积。光强也被称作能流密度, 是指单位面积的光功率或能流。平行光束中各点的光强相等, 如果在不损失能量的前提下设法将一束平行光的截面减小为原来的一半, 则光强增为原来的两倍。

截面积为 S 的望远镜结构可以是入射的平行光束仍以平行方式出射, 改变光束截面大小的方式有很多种, 其中长短焦距的凸透镜组合与长焦距凸透镜与短焦距凹透镜组合是常见的方式, 如图 2.133 所示。

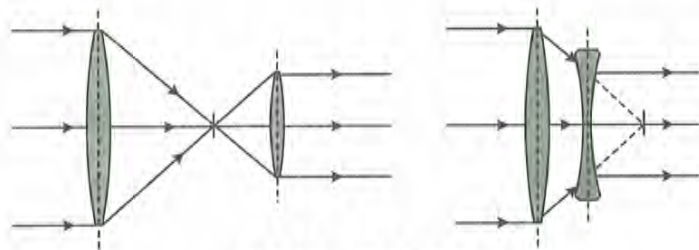
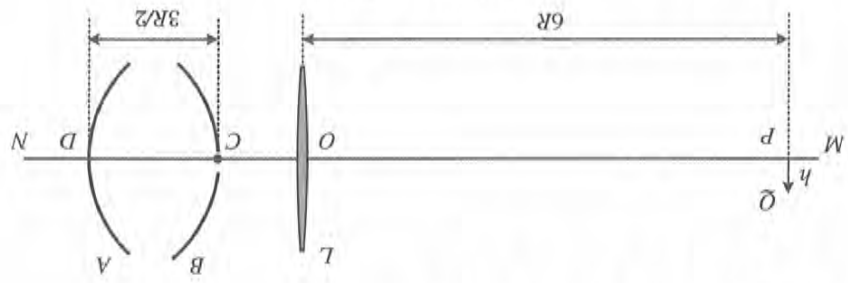


图 2.133 望远镜光路

(1) 像 I 与透镜 L 的距离等于_____；
 (2) 形成像 I 的光线经 A 反射，直接通过小孔后经 L 所成的像 I₁ 与透镜 L 的距离等

图 2.136 光具组



38. (28 届复赛) 如图 2.136 所示, L 是一焦距为 2R 的薄凸透镜, MN 为其主光轴。在 L 的右侧与它共轴地放置两个半径皆为 R 的很薄的球面镜 A 和 B。每个球面镜的凹面和凸面都是能反光的镜面。A、B 顶点间的距离 3R/2。在 B 的顶点 C 处开一个透光的小圆孔(圆心为 C), 圆孔的直径为 h。现于凸透镜 L 左方距 L 为 6R 处放一与主轴垂直的高度也为 h ($h \ll R$) 的细短杆 PQ (P 点在主轴上)。PQ 发出的光经 L 后, 其中一部分穿过 B 上的小圆孔正好成像在球面镜 A 的顶点 D 处, 形成物 PQ 的像 I。则:

图 2.134 配置 1

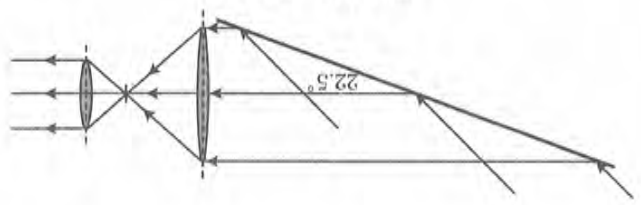
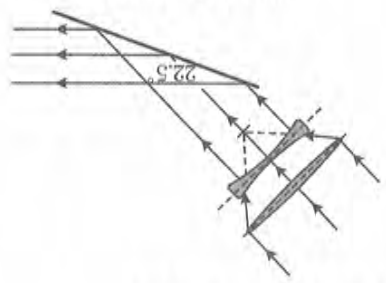


图 2.135 配置 2



配置方式见图 2.134 和图 2.135; 需要注意的是, 使光束中心与窗口中心对齐。射镜可任意形状, 只要比大孔径透镜投影的椭圆面积大就行。

要求 $I = 2I_0$, 则 $S_0 = \frac{2S}{0.448} = 2.11^2 S$, 即大孔径透镜的直径为 $2.11 \times W = 21.1 \text{ cm}$ 。反

$$S_0 = \frac{IS}{\eta I_0}$$

得到

$$\eta I_0 S_0 = IS$$

记为 S, 这也就是小孔径透镜的面积。记大孔径透镜的面积为 S_0 , 则
 光经过三个光学元件后, 光通量变为原来的 $\eta = 80\% \times 80\% \times 70\% = 44.8\%$ 。若窗口面积
 平方向夹角成 22.5° 即可。
 由于还要将 45° 入射光改为水平方向平行光, 因而还要用到平面反射镜, 将反射镜面与水

(3) 形成像 I 的光线经 A 反射,再经 B 反射,再经 A 反射,最后通过 L 成像为 I_2 ,将 I_2 的有关信息填在下表中:

I_2 与 L 的距离	I_2 在 L 左方还是右方	I_2 的大小	I_2 是正立还是倒立	I_2 是实像还是虚像

(4) 物 PQ 发出的光经 L 后未进入 B 上小圆孔 C 的那部分光最后通过 L 成像为 I_3 ,将 I_3 的有关信息填在下表中:

I_3 与 L 的距离	I_3 在 L 左方还是右方	I_3 的大小	I_3 是正立还是倒立	I_3 是实像还是虚像

【解】 (1) 透镜 L 成像,像距为

$$s'_1 = \frac{s_1 f_1}{s_1 - f_1} = \frac{6R \times 2R}{6R - 2R} = 3R$$

由此得到球面镜 B 与透镜 L 的距离 $d_1 = 3R/2$ 。

(2) 由于像 I 位于球面镜 A 的顶点处,与球面镜 A 的距离为 0,经 A 反射,在原处成像,再经 L 成像,像 I_1 与物 PQ 重合,到 L 的距离为 $6R$ 。

(3) 球面镜作为凹面镜,焦距均为 $\frac{R}{2}$;作为凸面镜,焦距均为 $-\frac{R}{2}$ 。

若 A 的像经 B 反射成像,物距为 $s_3 = \frac{3R}{2}$,像距为

$$s'_3 = \frac{s_3 f_B}{s_3 - f_B} = \frac{\frac{3R}{2} \times \frac{R}{2}}{\frac{3R}{2} - \frac{R}{2}} = \frac{3R}{4}$$

是实像,在 B 右侧。此像作为 A 的物,物距 $s_4 = \frac{3R}{2} - \frac{3R}{4} = \frac{3R}{4}$,经 A 成像,像距

$$s'_4 = \frac{s_4 f_A}{s_4 - f_A} = \frac{\frac{3R}{4} \times \frac{R}{2}}{\frac{3R}{4} - \frac{R}{2}} = \frac{3R}{2}$$

是实像,在 A 左侧。此像作为透镜 L 的物,物距为 $s_5 = \frac{3R}{2}$,经 L 成像,像距

$$s'_5 = \frac{s_5 f_1}{s_5 - f_1} = \frac{\frac{3R}{2} \times 2R}{\frac{3R}{2} - 2R} = -6R$$

是虚像,在 L 右侧。横向放大率为

$$\gamma = \left(-\frac{3R}{6R}\right)(+1)\left(-\frac{3R/4}{3R/2}\right)\left(-\frac{3R/2}{3R/4}\right)\left(-\frac{-6R}{3R/2}\right) = -2$$

是倒立的。

(4) I 作为凸面镜 B 的虚物,物距为 $s_2 = -\frac{3R}{2}$,经该凸面镜成像,像距

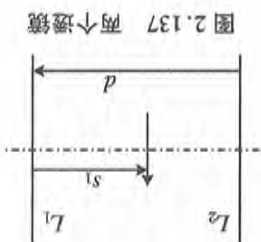


图 2.137 两个透镜

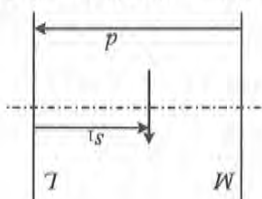


图 2.138 一个透镜与一个反射镜

左被反射, 反射镜的虚像再经透镜成像, 此像对透镜的物距为 $s_2 = d + d - s_1 = 2d - s_1$, 横向放大率 $\beta_1 = -\frac{f}{s_1 - f}$; 向右成像, 横向放大率 $\beta_1 = -\frac{f}{s_1 - f}$; 向

第二种情况, 透镜与反射镜系统, 如图 2.138 所示。若取 +, 则有 $s_1 = \frac{df_1}{f_1 + f_2}$, 是固定值, 不合题意; 若取 -, 则有 $f_1 = f_2, d = 2f_1$, 物距可取任

$$\frac{f_1}{f_2} = \pm \frac{s_1 - f_1}{(d - s_1) - f_2}$$

按题意, 两个最后的像大小相同, 即 $\beta_1 = \pm \beta_2$, 于是得到

$$\beta_1 = -\frac{f_1}{s_1 - f_1}, \beta_2 = -\frac{f_2}{(d - s_1) - f_2}$$

设两镜间距为 d , 物到 L_1 距离为 s_1 , 则两像的横向放大率分别为

【解】 第一种情况, 两透镜系统, 分别向右、向左成像, 如图 2.137 所示。

个由透镜直接成像, 另一个既可能是另一个透镜直接成像, 也可能经反射镜后再经透镜成像。

【分析】 因为像是有限多个, 所以不可能两个都是反射镜。又因为最后有两个像, 必定一

的光学系统能满足上面的要求, 什么样的光学系统不能满足上面的要求。

所成的像是有限多个, 且两个最后的像大小相同。试通过对各种可能情况的分析, 论证什么样

平面反射镜。一个小物垂直于主轴。已知当小物位于两元件之间的任何位置时, 由这光学系统

39. (17 届决赛) 两个光学元件共轴放置, 位置固定不动, 每个光学元件都可能是薄透镜或

是倒立的。

$$\gamma = \left(-\frac{3R}{6R}\right) \left(-\frac{3R/4}{-3R/2}\right) \left(-\frac{18R}{9R/4}\right) = -2$$

是实像, 在 L 左侧。横向放大率为

$$s'_3 = \frac{s_3 f_1}{9R \times 2R} = \frac{s_3 - f_1}{9R - 2R} = 18R$$

是虚像, 在 B 右侧。此像作为透镜 L 的物, 物距为 $s_3 = \frac{3R}{2} + \frac{4}{3R} = \frac{9R}{4}$, 经透镜 L 成像, 像距为

$$s'_2 = \frac{s_2(-f_2)}{\frac{3R}{2} \times \frac{R}{2}} = \frac{-\frac{2}{3R} + \frac{2}{R}}{\frac{3R}{2} \times \frac{R}{2}} = -\frac{4}{3R}$$

大率 $\beta_2 = -\frac{f}{2d - s_1 - f}$ 。于是有

$$2d - s_1 - f = \pm (s_1 - f)$$

该方程有两个解： $s_1 = d$ 或 $d = f$ 。其中 $s_1 = d$ 不合题意；当 $d = f$ ，物距可取任意值。

40. (15 届决赛) 焦距 f 的数值均相同的三个薄透镜 L_1 、 L_2 和 L_3 ，依次为凸透镜、凹透镜与凸透镜，它们构成一个共轴光学系统，相邻透镜间的距离均为 d ，各透镜的光心分别为 O_1 、 O_2 和 O_3 ，如图 2.139 所示。在透镜 L_1 的左方，位于主轴上的物点 P 经此光学系统最终成像于透镜 L_2 右方的 Q 点。若距离 $\overline{PO_2} = \overline{O_2Q}$ ，则物点 P 与透镜 L_1 的距离应为多少？

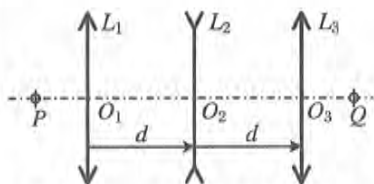


图 2.139 三透镜系统物像对称

【分析】 本题中，光学系统是左右对称的，物像也是左右对称的，则只能是中间透镜 L_2 成像时，物和像是左右对称的。

【解】 L_1 的像是 L_2 的物，而 L_2 的像是 L_3 的物，由于 L_1 和 L_3 是相同的透镜，物、像都是实的，到透镜的距离也相同，所以可以判断： L_2 成像时，物距与像距相等。

根据高斯公式 $\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$ ，可得 $s' = s = 2f$ ，即物像都在 2 倍焦距处。对于凹透镜，焦距为负值，就是虚物成虚像。而 L_2 的物是 L_1 的像，所以 L_1 的像距为 $s'_1 = d + 2f$ ，物距为

$$s_1 = \frac{s'_1 f}{s'_1 - f_1} = \frac{(d + 2f)f}{d + 2f - f} = \frac{(d + 2f)f}{d + f}$$

还有另外一种情况，当而 L_2 的物距和像距都为 0 时，也成立。此时， $s'_1 = d$ ，物距为

$$s_1 = \frac{s'_1 f}{s'_1 - f_1} = \frac{df}{d - f}$$

只有当 $d > f$ 时才有这一情况。

41. (18 届决赛) 有一薄透镜如图 2.140 所示， S_1 面是旋转椭球面（椭圆绕长轴旋转而成的曲面），其焦点为 F_1 和 F_2 ， S_2 面是球面，其球心 C 与 F_2 重合，已知此透镜放在空气中时能使从无穷远处位于椭球长轴的物点射来的全部入射光线（不限于傍轴光线）会聚于一个像点上，椭圆的偏心率为 e 。

(1) 求此透镜材料的折射率 n （要论证）；

(2) 如果将此透镜置于折射率为 n' 的介质中，并能达到上述的同样要求椭圆应满足什么条件？

【分析】 经椭球面折射的光线沿着球面的法线方向射向球心 C ，才能满足要求，即经过旋转椭球面折射的光线，都要射向其焦点 F_2 。

【解】 (1) 设入射光线在椭球面上的入射点为 M ，入射角为 i ，如图 2.141 所示，在则 S_1 面上的折射可用折射定律表示为 $n_0 \sin i = n \sin i'$ ，其中 $n_0 = 1$ 。

椭球面法线经过椭球的中心 O ，根据椭圆的性质， MF_1 、 MF_2 与 MO 的夹角相等，都是折射角 i' 。在图中的两个三角形中，由正弦定理可得

于 Q 点。

设光线在球面 S_2 上的 M 点的入射角和折射角分别为 i, i' , 折射光线反向延长后与光轴交

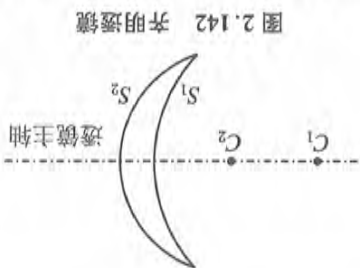


图 2.142 齐明透镜

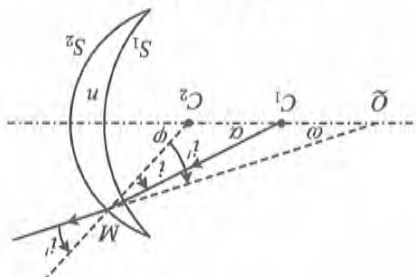


图 2.143 齐明点

后方向不变,射到球面 S_2 上的 M 点,如图 2.143 所示。

由于物点在球面 S_1 的球心是 C_1 处,从 C_1 发出的光线沿球面 S_1 的法线射向 S_1 ,进入透镜

【解】用折射定律求解。

这是显微镜中的一个齐明透镜。

【分析】本题也是要求对非傍轴光线成像,但与上题不同,这一透镜的两个表面都是球面,

束,经透镜折射后,所有的出射光线均相交于一点 Q ,且 $QC_2 = nR_2$ 。

球心间的距离 $C_1C_2 = \frac{R_2}{n}$ 。在使用时被观察的物体处于处 C_2 , 试证明:从物体射向此透镜的光

42. 显微镜物镜组中常配有一如图 2.142 所示的透镜,它的表面是球面,左表面 S_1 面的球心是 C_1 和半径为 R_1 , 右表面 S_2 面的球心是 C_2 , 半径为 R_2 , 透镜玻璃对空气的折射率为 n , 两

$$\frac{2a}{2c} = \frac{1}{n} = \frac{e}{n'}$$

(2) 如果将此透镜置于折射率为 n' 的介质中,则椭圆应满足的条件为

设椭圆的半长轴为 a , $OF_2 = c$, 则上式就是 $\frac{2a}{2c} = \frac{1}{n} = n$ 。

$$\frac{F_1M + F_2M}{OF_1 + OF_2} = \frac{\sin i'}{\sin i} = n$$

由以上两式可得到

图 2.140 薄透镜

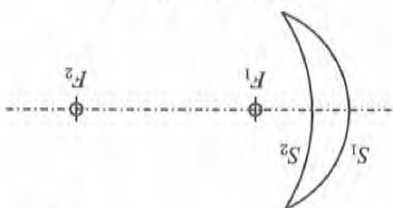
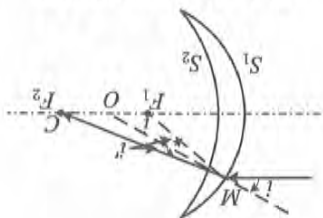


图 2.141 平行光束会聚



$$\frac{F_1M}{\sin i'} = \frac{OF_1}{\sin i}, \quad \frac{F_2M}{\sin i} = \frac{OF_2}{\sin i'}$$

在 $\triangle C_1MC_2$ 中,由正弦定理,可得 $\overline{C_1C_2} = \overline{MC_2} \frac{\sin i}{\sin \alpha} = R_2 \frac{\sin i}{\sin \alpha}$,由于 $\overline{C_1C_2} = \frac{R_2}{n}$,所以有

$$\frac{R_2}{n} = R_2 \frac{\sin i}{\sin \alpha}, \text{即得 } \sin \alpha = n \sin i.$$

根据折射定律 $\sin i' = n \sin i$,所以 $i' = \alpha$ 。

在 $\triangle QMC_2$ 中, $\omega = \varphi - i'$,因而可得 $\omega = i$ 。

在 $\triangle QMC_2$ 中,由正弦定理,可得

$$\overline{QC_2} = \overline{MC_2} \frac{\sin i'}{\sin \omega} = R_2 \frac{\sin i'}{\sin i} = nR_2$$

43. 凸透镜 L_1 与凹透镜 L_2 共轴放置, L_1 左侧媒质的折射率为 n , L_2 和右侧媒质的折射率也是为 n , 两透镜之间媒质的折射率为 n_0 , 且 $n < n_0$. F_1 是 L_1 的物方焦点, F_2' 是 L_2 的像方焦点, 有一物点 S 位于 L_1 的物方焦平面上, 如图 2.144 所示。

(1) 画出傍轴光束成像光路的示意图, 求出像点 S' 的位置, 简述作图依据。

(2) 若物方焦距 $f_1 = 20$ cm, 像方焦距 $f_2' = 10$ cm, 物点 S 离主光轴的距离为 2 cm, 问像点 S' 离主光轴的距离是多少?

【分析】 若透镜两侧媒质的折射率不相等, 则其物方和像方焦距亦不相等。根据图中给出的 L_2 的像方焦距和物方焦距, 可确定折射率 n 与 n_0 之比。

【解】 (1) 若透镜两侧媒质的折射率不相等, 其焦距与光焦度的关系为

$$f = \frac{n}{\Phi}, \quad f' = \frac{n'}{\Phi}$$

本题中, 图中已给出 L_2 的像方焦距 f_2' 和物方焦距 f_2 , 由于 $\frac{n_0}{n} = \frac{f_2}{f_2'}$, 因而可知 $\frac{f_1'}{f_1} = \frac{f_2}{f_2'}$ 。

作图 2.145 步骤如下:

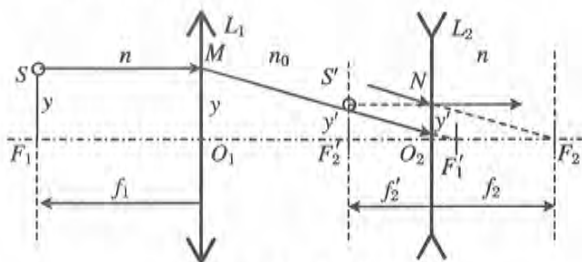


图 2.145 成像作图

(I) 根据比例关系画出与 L_1 的像方焦距对应的线段 f_1' , 在光轴上标出 L_1 的像方焦点 F_1' , 过 F_1' 的垂直平面即为 L_1 的像方焦平面。

(II) 作一条自 S 发出的平行于光轴光线 SM , 该光线经 L_1 折射后通过 F_1' , 为光线 MF_1' 。

(III) 作一条与 MF_1' 平行的经过 L_2 物方焦点 F_2 的辅助光线 NF_2 , NF_2 经 L_2 的折射后与光轴平行, 其反向延长线与 L_2 的像方焦平面相交于 S' 。由于相互平行的光线入射光线经透镜后会聚于像方焦平面上同一点, 所以 S' 就是 MF_1' 经 L_2 折射后与其像方焦平面, 也就是最终的像点。

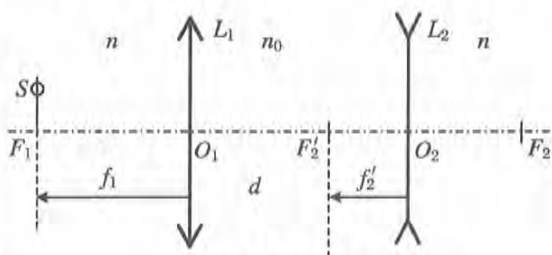


图 2.144 透镜组

由式(5),可得

$$s_1 = \frac{f_1(2f_2 - d)}{f_1 + f_2 - d}$$

(5)

$$\frac{f_1 f_2}{(d - f_2)(s_1 - f_1) - s_1 f_1} = -1$$

即

$$\left(-\frac{s_1'}{s_1}\right)\left(-\frac{s_2'}{s_2}\right) = \frac{f_1}{s_1 - f_1} \frac{f_2}{(d - f_2)(s_1 - f_1) - s_1 f_1} = \frac{f_1 f_2}{(d - f_2)(s_1 - f_1) - s_1 f_1}$$

总的横向放大率为

(4)

$$\frac{d(s_1 - f_1) - s_1 f_1}{f_2} = -(s_1 + d)$$

按题意,最终的像与原物在同一位置,则 $s_2' = -(s_1 + d)$,即

(3)

$$s_2' = \frac{s_2 f_2}{d(s_1 - f_1) - s_1 f_1} = \frac{s_2 - f_2}{d(s_1 - f_1) - s_1 f_1} f_2$$

第二次成像的像距为

(2)

$$s_2 = d - s_1' = d - \frac{s_1 f_1}{d(s_1 - f_1) - s_1 f_1} = d - \frac{s_1 - f_1}{s_1 - f_1} = d$$

用逐次成像法,第二个透镜成像的物距为

(1)

$$s_1' = \frac{s_1 f_1}{s_1 - f_1}$$

根据高斯公式 $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$, 得到第一次成像的像距为

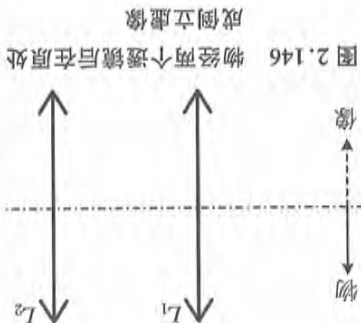


图 2.146 物经两个透镜后在原处成倒立虚像

离为 s_1 。

【解】 设两透镜之间的距离为 d , 物到第一个透镜的距

离为 s_1 。

横向放大率确定光具组的配置。

【分析】 最终的像一定是虚像。可以根据物像关系和

透镜的位置。

像,如图 2.146 所示,试求出满足上述要求的配置方案中各

则可使一垂直于光轴的小物体在原位置成一等大、倒立的

像,如图 2.146 所示,试求出满足上述要求的配置方案中各

像,如图 2.146 所示,试求出满足上述要求的配置方案中各

像,如图 2.146 所示,试求出满足上述要求的配置方案中各

像,如图 2.146 所示,试求出满足上述要求的配置方案中各

像,如图 2.146 所示,试求出满足上述要求的配置方案中各

像,如图 2.146 所示,试求出满足上述要求的配置方案中各

像,如图 2.146 所示,试求出满足上述要求的配置方案中各

像,如图 2.146 所示,试求出满足上述要求的配置方案中各

像,如图 2.146 所示,试求出满足上述要求的配置方案中各

像,如图 2.146 所示,试求出满足上述要求的配置方案中各

像,如图 2.146 所示,试求出满足上述要求的配置方案中各

像,如图 2.146 所示,试求出满足上述要求的配置方案中各

像,如图 2.146 所示,试求出满足上述要求的配置方案中各

像,如图 2.146 所示,试求出满足上述要求的配置方案中各

像,如图 2.146 所示,试求出满足上述要求的配置方案中各

像,如图 2.146 所示,试求出满足上述要求的配置方案中各

可见,这是一个虚像。

(2) 由于 $\triangle O_1 M F_1' \sim \triangle O_2 N F_2'$, 可得 $\frac{NO_2'}{MO_1'} = \frac{O_2 F_2'}{O_1 F_1'}$, 于是有

$$y' = \overline{S F_2'} = \overline{NO_2'} = \frac{O_2 F_2'}{O_1 F_1'} \overline{MO_1'} = \frac{f_2'}{f_1'} \overline{S F_1'} = \frac{f_2'}{f_1'} \frac{n_0}{n} f_1 = \frac{n_0}{n} \frac{f_2'}{f_1} y = 1 \text{ cm}$$

【点评】 本题也可以利用通过光心的光线作图,在傍轴条件下,两侧光线的角度(相对于光

轴)与折射率成正比。但是,由于将角度按比例放大要难一些,误差也较大,所以用线段的比例

作图更合适。

作图更合适。

若将 $s'_2 = -(s_1 + d)$ 代入 $\frac{s'_2}{s_2}$, 得到 $\frac{-(s_1 + d)(s_1 - f_1)}{d(s_1 - f_1) - s_1 f_1}$, 则横向放大率也可以表示为

$$\frac{-f_1(s_1 + d)}{d(s_1 - f_1) - s_1 f_1} = -1$$

解得 $s_1 = \frac{2f_1 d}{d - 2f_1}$ 。

根据前式, 得

$$\frac{2f_1 d}{d - 2f_1} = \frac{f_1(2f_2 - d)}{f_1 + f_2 - d}$$

可得 $d^2 = 4f_1 f_2$, 即 $d = 2\sqrt{f_1 f_2}$ 。

进而得到 $s_1 = \frac{2f_1 \sqrt{f_1}}{\sqrt{f_2} - \sqrt{f_1}}$, 要求 $f_1 > f_2$ 。

45. 有两薄凸透镜, 最后在物体所在处成一个与物体大小相等的倒立虚像。已知靠近物体的那个透镜的焦距为 f_1 , 物体与此透镜的距离为 u_1 , 试求第二个透镜的焦距 f_2 以及它与第一个透镜的距离 L 。

【分析】 这一题与上题相似。

【解】 根据上题的结果, $u_1 = \frac{2f_1 \sqrt{f_1}}{\sqrt{f_2} - \sqrt{f_1}}$, 可得

$$f_2 = \left[\frac{2f_1 \sqrt{f_1}}{u_1} + \sqrt{f_1} \right]^2 = f_1 \left(\frac{2f_1}{u_1} + 1 \right)^2$$

进一步求得 $L = 2\sqrt{f_1 f_2} = 2f_1 \left(\frac{2f_1}{u_1} + 1 \right)$ 。

46. (24 届决赛) 如图 2.147 所示, 一半径为 R 、折射率为 n_g 的透明球体置于折射率 $n_0 = 1$ 的空气中, 其球心位于图中光轴的 O 处, 左、右球面与光轴的交点为 O_1 与 O_2 。球体右半球面为一球面反射镜, 组成球形反射器。光轴上 O_1 点左侧有一发光物点 P , P 点到球面顶点 O_1 的距离为 s 。由 P 点发出的光线满足傍轴条件, 不考虑在折射面上发生的反射。

(1) 问发光物点 P 经此反射器, 最后的像点位于何处?

(2) 当 P 点沿光轴以大小为 v 的速度由左向右匀速运动时, 试问最后的像点将以怎样的速度运动? 并说明当球体的折射率 n_g 取何值时像点亦做匀速运动。

【分析】 由于光线满足傍轴条件, 可以用成像定理处理该问题。

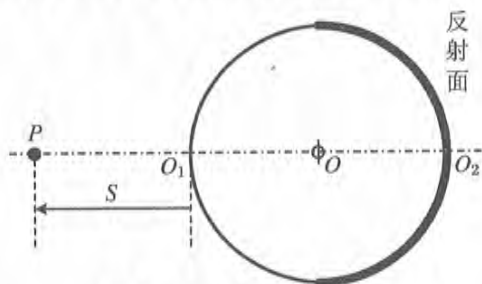
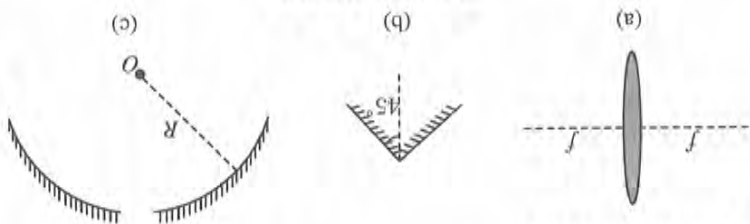


图 2.147 带反射面的球体

利用上述光学器件设计一光学系统,使得一束很细的实心圆柱入射激光转化成一束空心的

图 2.148 光学元件



镜(中间有圆孔),如图 2.148 所示。

的激光。给定如下光学器件:焦距为 f 的凸透镜,圆锥角为 45° 的锥面反射镜,半径为 R 的球面

产生空心激光束的基本做法是利用光学系统将一束实心的圆柱形激光转换成一束空心

子冷却等方面得到了广泛的应用,正逐渐成为一门新兴的学科分支。

实现对纳米粒子、生物细胞等微小粒子的精确操控。空心激光技术目前在生物学、激光加工、原

特征,它可以把某些微小粒子约束在激光束的中心部位,作为激光导管、激光镊子、光学扳手等,

47. (27 届决赛) 空心激光束是一种在传播方向上中心光强为零的圆筒形光束。由于这一

$$v'_3 = -\frac{(4-n_g)^2}{n_g^2}v$$

若要使像点做匀速运动,则 $4-2n_g=0$, 即 $n_g=2$, 速度为

物点匀速沿轴线向右运动,则像点向右运动,速度逐渐减小,是非匀速运动。

$$v'_3 = -\frac{(4-n_g)^2-4(4-2n_g)}{(4-n_g)^2}r^2v = -\frac{[(4-2n_g)s + (4-n_g)r]^2}{n_g^2r^2}v$$

则相应的速度关系为

$$\Delta s'_3 = -\frac{[(4-2n_g)s + (4-n_g)r]^2}{(4-n_g)[(4-2n_g)s + (4-n_g)r] - (4-2n_g)[(4-n_g)s + 4r]}r\Delta s$$

(2) 在式(1)中,当物距 s 变化,像距 s'_3 亦相应变化,变化关系为

该像距从左侧球面算起,若像在球面左侧,则为正值。

$$s'_3 = -\frac{(4-n_g)s + (4-n_g)r}{(4-n_g)s + 4r}$$

(1)

第三次成像,球面折射,物距为 $s_3=2r-s'_2$, 由物像公式 $\frac{s_3}{n_g} + \frac{s'_3}{2r-s'_2} = \frac{1}{1-n_g}$, 解得

$$s'_2 = \frac{(n_g-2)sr-2r^2}{n_g s-3s-3r}$$

第二次成像,球面反射,物距为 $s_2=2r-s'_1$, 由物像公式 $\frac{s_2}{n_g} + \frac{s'_2}{2r-s'_1} = \frac{1}{2}$, 解得

$$s'_1 = \frac{n_g r s}{(n_g-1)s-r}$$

【解】(1) 第一次成像,球面折射,物像公式为 $\frac{s'_1}{n_g} + \frac{s}{1-n_g} = \frac{1}{r}$, 解得像距为

出射激光,且空腔为圆柱形,半径为 r 。请回答如下问题:

(1) 画出该光学系统的光路图。

(2) 求该光学系统中锥面镜顶点到球面镜球心的距离 x 。

【分析】 若平行激光束沿圆锥面反射镜的轴线入射,则反射光成为与圆锥轴线垂直的平行光束,凹面镜可以将这样的光束会聚,再通过透镜可以使其成为空心的平行光束。

【解】 由于激光束很细,可以用光线表示,按图 2.149 的配置,即可获得空心圆柱光束。

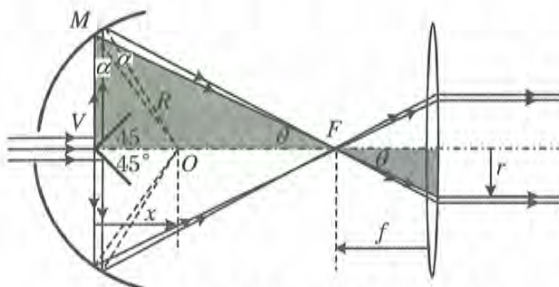


图 2.149 获得空心圆柱光束的光路配置

在图 2.149 中,球面上的反射角与入射角相等,均为 α , $2\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$, $\theta = \arctan \frac{r}{f}$ 。由此可确定 $x = R \sin \alpha$ 。

48. (4 届预赛) 如图 2.150 所示,某人的眼睛在 E 处通过放大镜 L 观察标尺 M , F_1 和 F_2 为 L 的焦点。他既能通过 L 看到 M 上的一部分刻度,又能直接从镜外看到部分刻度,试在题图上用作图法求出他看不到的 M 上的刻度值的范围。在作图时用①、②...标明你画的光线,并写出作图步骤。

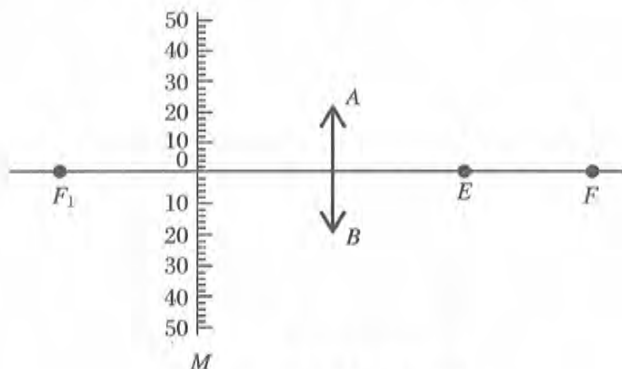


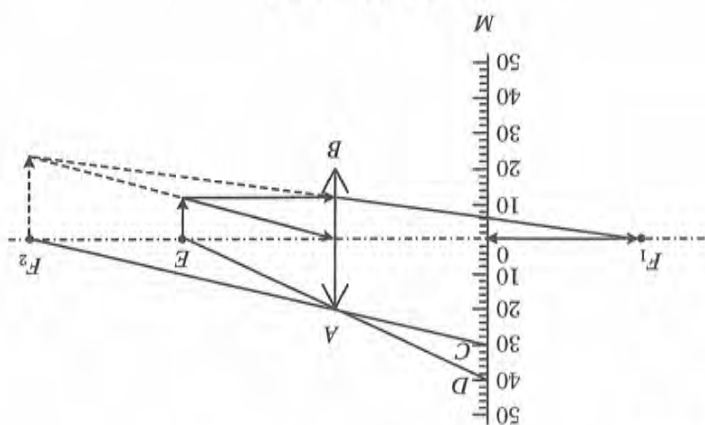
图 2.150 通过透镜观察标尺

【解】 本题中,标尺上某些区域发出的光线,可不经透镜直接进入观察者的眼睛,这些区域当然可以被看到。另有一些区域所发出的光线,经过透镜折射后也可以进入观察者的眼睛,也能被看到。还有一些区域,所发出的光线,经透镜折射后,不能进入观察者的眼睛,这属于不可见的区域。

每一个具体的成像问题,都可以用多种作图法求解。

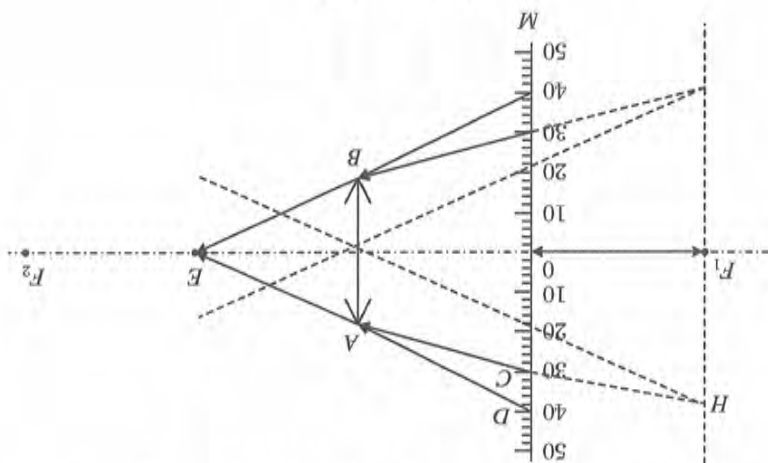
若高中阶段的读者不熟悉焦平面的概念,则可以用物像法解决这个问题。同样利用物像共轭

图 2.152 方法 2



方法 2, 见图 2.152。

图 2.151 方法 1



(7) 在光轴的另一侧, 有对称的不能被看到的区域($-40 \sim -30$)。

之间不能被看到。

(6) E 点发出的光线不能到达 CD 之间的区域, 则标尺上 CD 之间不能被看到, 即 $30 \sim 40$

(5) 将 EA 直接延长与标尺交于 D 点, D 点以上区域可以被眼睛直接看到。

C 的区域能够通过透镜看到。

(4) AH 与标尺的交点 C 就是从 E 点发出的光线能够到达的在标尺的最上位置, 即光轴到

(3) 由于平行光线经透镜后都会聚于焦平面上的同一点, 所以光线 EA 的共轭光线为 AH。

(2) 过透镜光心作与 AB 平行的光线, 该光线与过 F_1 的焦平面交于 H 点。

(1) 从 E 点向透镜的边缘 A 引一条光线 EA。

方法 1, 见图 2.151。

根据光的可逆性, 所以从 E 点所发出的光线能够覆盖到的区域, 就是可见的区域。

的原理,作出眼睛经透镜所成的像,然后进行判断。

(1) 在 E 处作一傍轴小物,求出改物经透镜所成的像。可见, E 点的像在焦点 F_2 处。

(2) 从标尺看眼睛,除了不经透镜可直接看到的区域之外,在一些区域看到的是眼睛经透镜所成的像。将 F_2 与 A 用直线连接,所连的直线与标尺交于 C 点,则 C 点之上的部分不能通过透镜看到 E 。

(3) 标尺上可不通过透镜直接看到眼睛的区域在 D 点以上。

(4) CD 之间的区域看不到眼睛,眼睛也看不到标尺。

当然还有其他方法。

49. (16 届预赛) 一平凸透镜焦距为 f ,其平面上镀了银,现在其凸面一侧距它 $2f$ 处,垂直于主轴放置一高为 H 的物,其下端在透镜的主轴上,如图 2.153 所示。

(1) 用作图法画出物经镀银透镜所成的像,并标明该像是虚、是实。

(2) 用计算法求出此像的位置和大小。

【解】 (1) 题中的成像过程可以这样理解,如图 2.154 所示:

(i) 物经平凸透镜成实像 A 于像方 $2f$ 处。

(ii) 透镜的像 A 作为平面镜的物,是虚物。

该虚物经平面镜成实像 B ,在平面镜的像方 $2f$ 处。

(iii) 平面镜的像 B 作为透镜的物,是虚物。该虚物经透镜成实像 C ,在透镜左侧。

作图中,第三步可利用的光线是从物射向透镜光心的光线,该光线在透镜中方向不变,被平面镜反射,所以出射光线与入射光线关于光轴对称;另一光线是垂直于平面镜的反射光线,由于该光线与光轴平行,所以经透镜后射向焦点 F 。上述两光线的交点就是最终像的位置 C 。

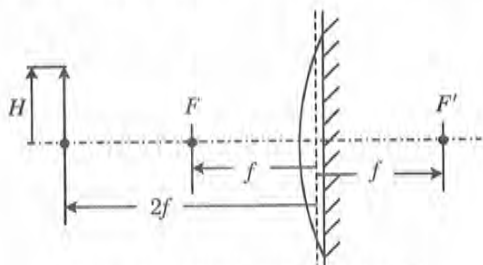


图 2.153 镀有反射膜和平凸透镜

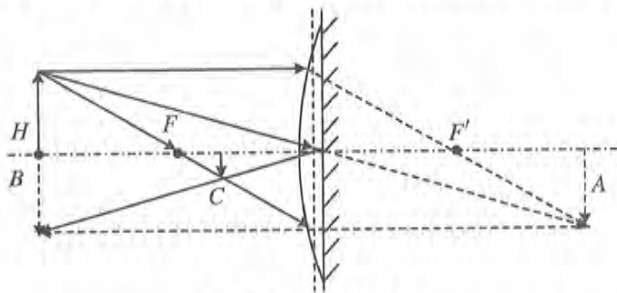


图 2.154 作图结果

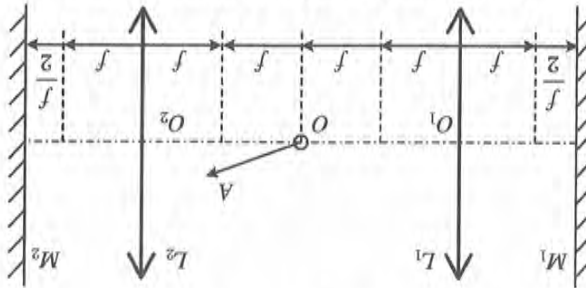
当然,也可根据平凸透镜和平面镜的特点,利用两条特殊的光线直接得到最终的像,经过透镜焦点的光线,经折射后与光轴平行,由于出射界面是平面,所以在透镜中上述光线就与光轴平行,与平面镜垂直,反射后,将原路返回。另一条光线就是射向透镜光心的光线。作图过程如图 2.155 所示。

(2) 前面已经描述了逐次成像的过程,最后一次经透镜成像时,物距为 $s_3 = -2f$,于是像距为

【解】(1) 方法 1, 逐次作出共轭光线, 如图 2.157 所示。
 (I) 过透镜 L_2 的光心作 OA 的平行线, 该光线经过方向不变, 与 OA 的折射光线相交于 L_2 右方焦平面上的同一点, 由此作出 OA 的像方光线 BC ;
 (II) BC 经平面镜 M_2 , 对称地反射, 反射光线为 CD ;
 (III) 过 L_2 的光心作 CD 的平行线, 该光线与 L_2 左侧焦平面的交点即是 CD 经 L_2 折射后

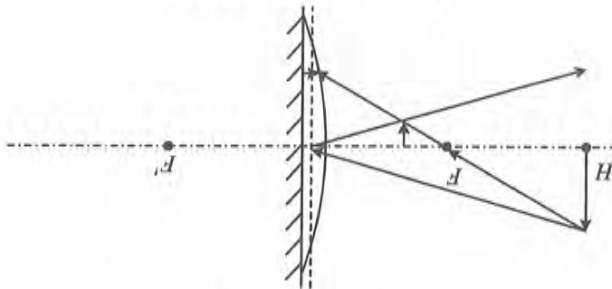
【分析】可以利用焦平面的性质作出光线经各个元件后的共轭光线, 也可以作出物点经各个元件的像, 以确定光线的方向。

图 2.156 两透镜与两反射镜构成的光学系统



50. 焦距都为 f 的两个凸透镜 L_1, L_2 与两个圆形平面反射镜 M_1, M_2 放置如图 2.156 所示。两透镜共轴, 透镜的主光轴与两平面镜垂直, 并通过两平面镜的中心, 四镜的直径相同, 在主光轴上有一点光源 O 。
 (1) 画出光源向右的一条光线 OA 在此光学系统中的光路。
 (2) 分别说出由光源向右发出的光线和由光源向左发出的光线各在哪些位置 (O 点除外) 形成光源 O 的能看到的像, 哪些是实像? 哪些是虚像?
 (3) 现在用不透明板的下半部 (包括透镜中心) 都遮住, 说出这时像有什么变化。

图 2.155 另一种作图方法



$$s'_3 = \frac{s_3 f}{s_3 - f} = \frac{-2ff}{-2f - f} = \frac{2}{3}f$$

$$\gamma = (-1)(+1) \left(-\frac{2f/3}{-2f} \right) = -\frac{1}{3}$$

横向放大率为

即像高为 $H/3$, 是倒立的。

的光线与该焦平面的交点,据此作出光线 DE ;

(IV) 用相同的方法作出光线 DE 经 L_1 的折射光线 EG , EG 经 M_1 的反射光线 GH , GH 经 L_1 的折射光线 HI , 由于光学系统的特殊性, HI 一定经过物点 O ;

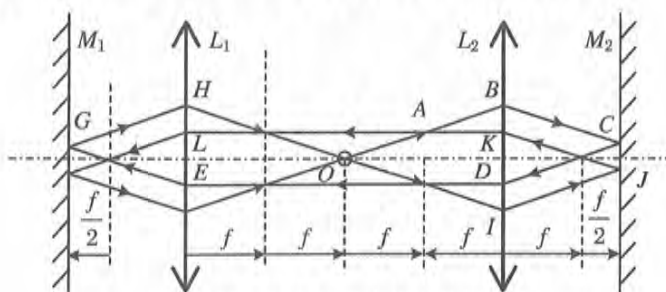


图 2.157 方法 1, 逐次作出共轭光线

(V) HI 经 L_2 之后成为 IJ , IJ 经 M_2 反射后成为 JK , JK 经 L_2 之后成为与光轴平行的 KL , 再依次经 L_1 、 M_1 、 L_1 之后, 又射向 O ;

(VI) 之后再不断的循环。

方法 2, 利用各个元件所成的像点, 逐次作出对应的光线, 如图 2.158。

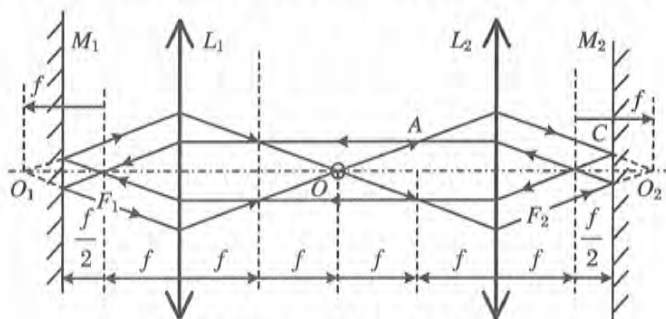


图 2.158 方法 2, 逐次作出像

(I) O 点经透镜 L_2 所成的实像点为 O_2 , 在 L_2 右侧 $2f$ 处;

(II) O_2 作为平面镜 M_2 的虚物, 成实像于 L_2 的右焦点 F_2' 处;

(III) F_2' 处的实像, 经 L_2 成为平行光束, 再经 L_1 , 成实像于 L_1 的左焦点 F_1 处;

(IV) F_1 处的实像, 作为面镜 M_1 的实物, 成虚像 O_1 于 M_1 左侧 $f/2$ 处;

(V) O_1 作为 L_1 的实物, 在 L_1 的 2 倍焦距处, 经 L_1 成实像于 O 点;

(VI) 之后进行不断的循环;

(VII) 按次序将上述各个像点用光线连接即可。

51. (2 届预赛) 200 度远视眼镜片的焦距是_____。

【解】 眼镜的度数与光焦度对应。焦距 f 与光焦度 Φ 之间的关系是

$$f = \frac{n}{\Phi}$$

其中 n 为物方或像方媒质的折射率。

光焦度的国际标准单位是屈光度, 其量纲为 m^{-1} 。而眼镜的度数是其屈光度乘以 100。所

53. (29届决赛) 如图 2.162(a) 所示的光学系统是由平行光管、载物台和望远镜组成。已知望远镜物镜 L_0 的焦距为 16.00 cm。在 L_0 的焦平面 P 处, 放置带十字叉丝线的分划板和亮

镜作为物镜、焦距为 f_1 的透镜作为目镜即可。
 的正立像, 则物镜焦距尽量大, 目镜焦距尽量小, 而且要选择凹透镜。所以选择焦距为 f_1 的透
 像。若物镜和目镜的焦距分别为 f_0 和 f_1 , 则望远镜的角放大率为 $M = -\frac{f_0}{f_1}$, 为了获得尽量大
 (2) 望远镜的物镜成一个实像, 该实像落在目镜的物方焦平面内附近, 经目镜成一个虚
 (III) 眼镜的度数是光焦度, 300 度的老花镜, 其光焦度为 3 m^{-1} , 因而其焦距为 0.33 m。

图 2.160 近处物在老花眼中成像图

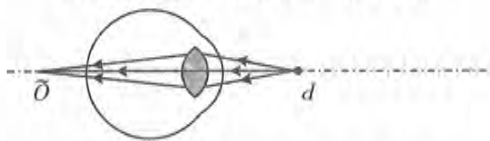
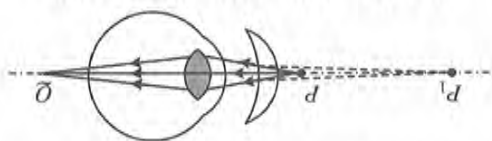


图 2.161 佩戴远视镜后的老花眼成像



比物要大, 因而通过眼睛所成的像, 像距变短, 可以落在视网膜上, 如图 2.161 所示。
 (II) 老花镜是一个凸透镜, 戴上老花镜后, 近处的物体成一个虚像, 该虚像到眼睛的距离
 视网膜上是一幅模糊的图像。

【解】(1) 老花眼就是远视眼, 看不清近处的物体。原因是由于眼睛的调节机能退
 化, 使其像方焦距不能足够短, 因而近处物所成的像落在视网膜之后, 如图 2.160 所示, 因而在
 选焦距为 _____ 的透镜作为目镜。

望远镜, 要求能看到放大倍数尽可能大的正立的像, 则应选焦距为 _____ 的透镜作为物镜, 应
 f_4 。已知 $f_1 > f_2 > f_3 > |f_4|$ 。如果要在这四个透镜中选取两个透镜, 组成一架最简单的单筒
 (2) 有两个凸透镜, 它们的焦距分别为 f_1 和 f_2 , 还有两个凹透镜, 它们的焦距分别为 f_3 和

图 2.159 老花眼



(III) 300 度的老花镜的焦距 $f =$ _____ m。

2.159(b) 中画出 P 通过老花镜和眼睛成像的光路示意图。

(II) 戴了一副 300 度的老花镜后, 老爷爷就能看清楚放在明视距离处的物体 P , 试在图
 睛成像的光路示意图。

(I) 一物体 P 放在明视距离处, 老爷爷看不清楚。试在图 2.159(a) 中画出此时 P 通过眼
 52. (23届预赛) (1) 老爷爷的眼睛是老花眼。

$$f = \frac{\Phi}{n} = \frac{1}{2} \text{ m} = 0.500 \text{ m} = 50.0 \text{ cm}$$

以 200 度的眼镜, 相应的光焦度是 2 屈光度, 在空气中的焦距则是

十字物,如图 2.162(b)所示。在载物台上放置双面平行的平面镜 M ,通过望远镜的目镜 L_c 。观察时,能同时清楚地看到分划板上的十字叉丝线和十字物经过 L_c 折射、 M 反射、再经 L_o 折射后在分划板上所成的十字像,十字像位于 A 点,与上十字叉丝线的距离为 5.2 mm 。绕载物台转轴(沿竖直方向)转动载物台,使平面镜转 180° ,此时十字像位于 B 点,与上十字叉丝线的距离为 18.8 mm 。根据以上情况和数据可计算出,此时望远镜光轴与水平面的夹角为 _____ rad;据此结果,调节望远镜,使其光轴与载物台的转轴垂直。

平行光管是由十字缝 S 和凸透镜 L 组成。去掉光学系统中的平面镜 M ,并用钠光灯照亮 S 。沿水平方向移动 S ,当 S 到平行光管中的透镜 L 距离为 8.25 cm 时,通过望远镜目镜能清楚地看到十字缝的像恰好成在分划板中心十字叉丝线上,由此可以推知, L 的焦距等于 _____ cm 。

将载物台平面调至与载物台的转轴垂直,在载物台上放置长、宽、高均为 3.00 cm 、折射率为 1.52 的分束棱镜 $abcd$ (分束棱镜是由两块直角三棱镜密接而成,接触面既能透光又能反光)和待测凹球面镜 O , O 到 L 的距离为 15.00 cm ,并保证分束棱镜的 ab 面与图 2.162(c)中的 XX' 轴垂直、凹球面镜的光轴与图 2.162(c)中的 XX' 轴重合;再将望远镜绕载物台的中心轴转 90° ,如图 2.162(c)所示。向右移动 S ,当 S 移动的距离为 3.75 cm 时,通过望远镜目镜刚好能看清楚十字缝 S 的成像在分划板中心十字叉丝线上。试求凹球面镜的曲率半径。

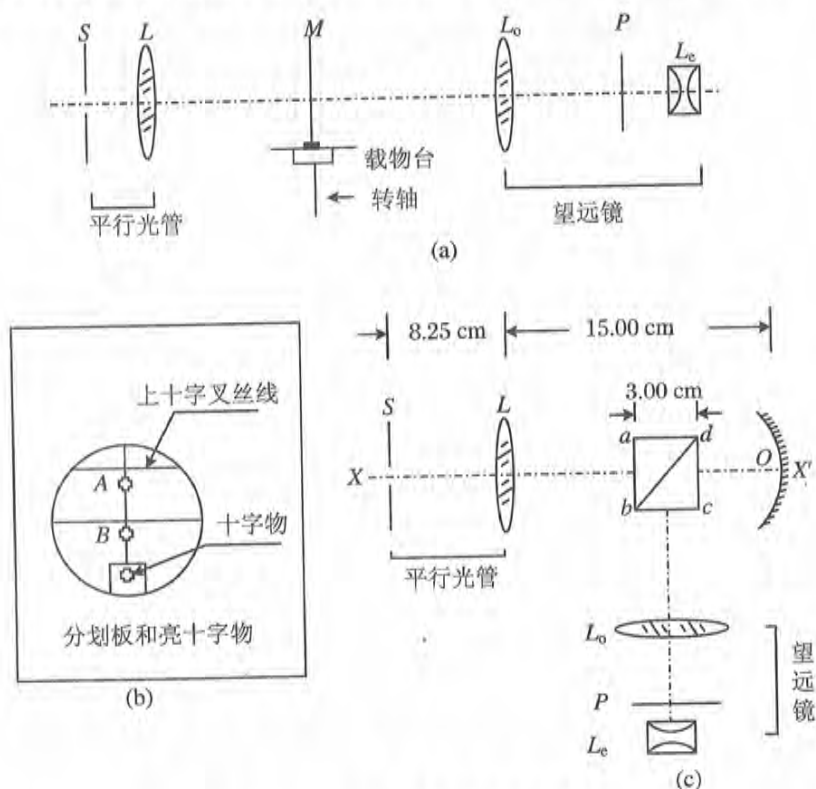


图 2.162 光学装置及其元件图示

【分析】 本题的文字和配图较多,考生应当仔细阅读并将问题归类。首先确定这是一个望远镜成像的问题;其次要清楚分束棱镜的特点和作用,最后用逐次成像法计算凹面镜的焦距和半径。

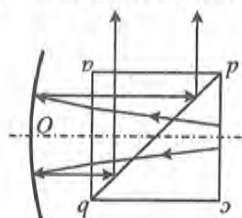


图 2.164 经凹面镜反射的光束行的光束, 因而向右通过分束透镜 $abcd$ 的光束下射出。第三步操作的结果, 说明凹面镜的反射光是与其光轴平

经凹面镜反射的光线, 向左射入分束透镜, 被界面 ab 反射, 向

$$f = 8.25 \text{ cm.}$$

通过望远镜能清晰地看到 S 上十字的缝, 且十字的缝的像在视场中心, 说明射向望远镜的是与光轴平行的光束, 则此时 S 上的十字缝一定位于透镜 L 的焦平面处, 由此可得 L 的焦距为

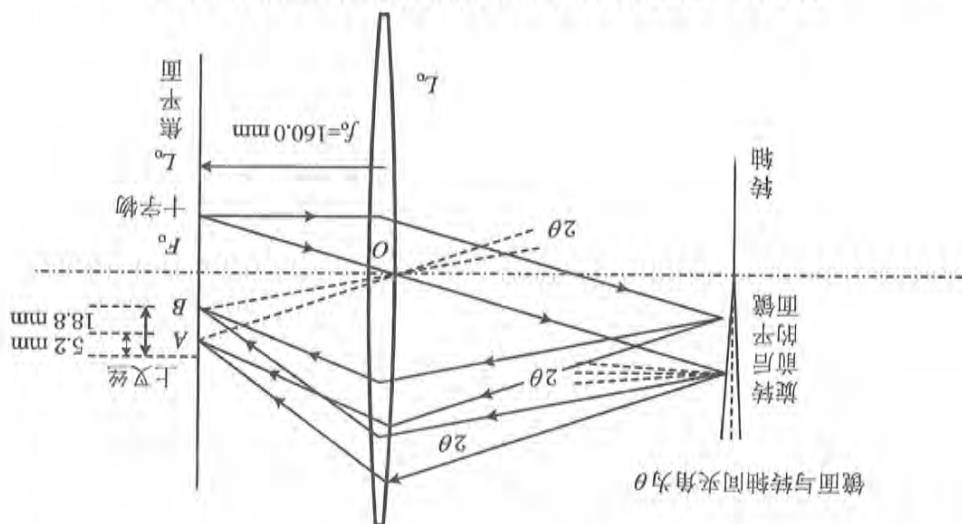
$$\theta = \frac{1}{AB} \frac{OF_0}{2} = \frac{1}{13.6} \frac{160.0}{2} \text{ rad} = 0.0425 \text{ rad}$$

$$\text{又 } AB = (18.8 - 5.2) \text{ mm} = 13.6 \text{ mm}, OF_0 = f_0 = 160.0 \text{ mm}, \text{ 所以有}$$

2.163 中, 记 L_0 的光心为 O , 像方焦点为 F_0 , 则直线 OA 与 OB 之间的夹角也是 2θ 。

设平面镜的镜面与载物台转轴之间的夹角为 θ , 则旋转前后, M 的反射光相差 2θ 角。图

图 2.163 平面镜的镜面与载物台转轴不平行所形成的两个像



一向要回答的应当是平面镜与载物台转轴之间的夹角。平行, 这当然是由于平面镜的镜面与载物台转轴不平行而造成的, 如图 2.163 所示。所以第一位置。之所以旋转载物台前后有两个不同位置的像, 是由于旋转前后平面镜的两个反射面是相互平行的, 则亮十字的成像光线方向就不会改变, 因而旋转载物台前后的两个像就会在同其实这是错误的说法。只要保持望远镜光轴方向不变, 而且平面镜旋转前后的两个反射面而经 L_0 后成两个不同的像。

载物台的转轴不垂直, 导致平面镜 M 随载物台旋转 180° 后, 两个反射面的反射光线不平行, 因按题中的说法, 载物台的转轴是竖直的, 而望远镜的光轴不是水平的, 这样望远镜的光轴与经 L_0 成像于 L_0 的像方焦平面上。

亮十字发出的光线经 L_0 后成为平行光束, 射向平面镜 M , 经 M 反射后, 仍是平行光束, 再经物镜 L_0 成像。

【解】 望远镜物镜焦平面上的亮十字物, 发出的光线先经物镜 L_0 , 再被平面镜 M 反射, 又

一定会聚于凹面镜的焦点处。

如图 2.165 所示,对透镜 L , S 成像是 S' , 物距为 $s = (8.25 - 3.75) \text{ cm} = 4.50 \text{ cm}$, 因而像距为

$$s' = \frac{sf}{s-f} = -9.90 \text{ cm}$$

再经分束棱镜之后,像点向右移动至 F , 移动的距离

$$\Delta = \left(1 - \frac{1}{n}\right)d = \left(1 - \frac{1}{1.52}\right) \times 3.00 \text{ cm} = 1.03 \text{ cm}$$

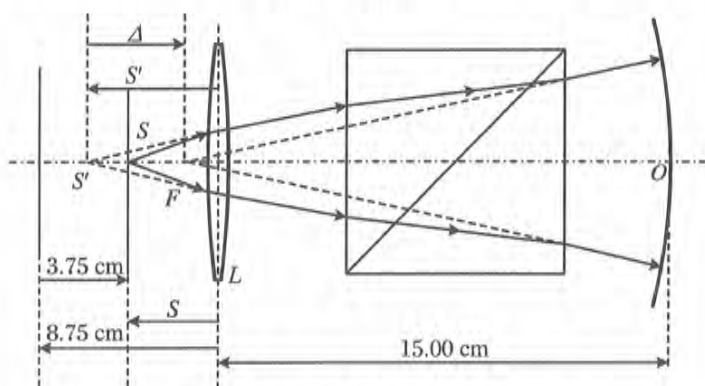


图 2.165 透镜与分束棱镜的成像

则 $\overline{FO} = s' - \Delta + 15.00 = (9.90 - 1.03 + 15.00) \text{ cm} = 23.87 \text{ cm}$, 这就是凹面镜的焦距, 即

$$f_o = 23.87 \text{ cm}$$

而凹面镜的曲率半径为

$$r_o = 2f_o = 47.74 \text{ cm}$$

54. (29 届复赛) 图 2.166 中 L_1 为一薄凸透镜, Q 为高等于 2.00 cm 与光轴垂直放置的线状物, 已知 Q 经 L_1 成一实像, 像距为 40.0 cm 。现于 L_1 的右方依次放置薄凹透镜 L_2 、 L_3 和薄凸透镜 L_4 以及屏 P , 它们之间的距离如图所示, 所有的透镜都共轴, 屏与光轴垂直, L_2 、 L_3 焦距的大小均为 15.0 cm 。已知物 Q 经上述四个透镜最后在屏上成倒立的实像, 像高为 0.500 cm 。

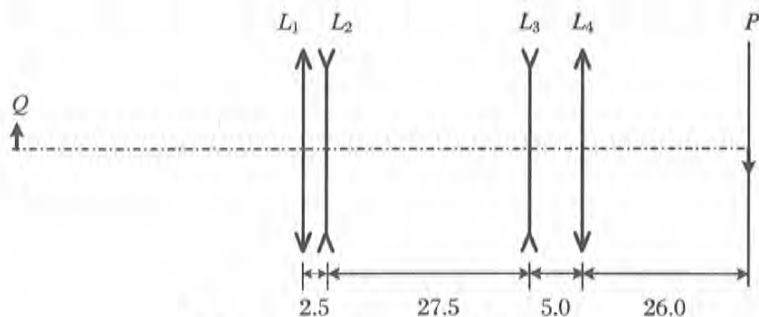


图 2.166 由 4 个薄透镜构成的光具组

(1) L_1 焦距的大小为 _____ cm , L_4 焦距的大小为 _____ cm 。

对于 L_2 , 物距和像距分别表示为

$$s_2 = d_{21} - 40.0 \quad (2)$$

(2)

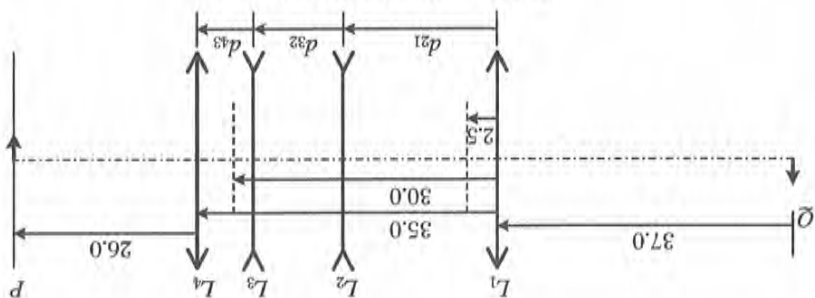
$$\frac{s'_2}{s_2} \frac{s'_3}{s_3} = -0.54 \quad (1)$$

(1)

所以有

$$\left(-\frac{s'_1}{s_1}\right)\left(-\frac{s'_2}{s_2}\right)\left(-\frac{s'_3}{s_3}\right)\left(-\frac{s'_4}{s_4}\right) = \left(-\frac{s'_4}{s_4}\right)\left(-\frac{s'_3}{s_3}\right)\left(-\frac{s'_2}{s_2}\right)\left(-\frac{s'_1}{s_1}\right) = \left(-\frac{40}{36.98}\right)\left(-\frac{s'_2}{s_2}\right)\left(-\frac{s'_3}{s_3}\right)\left(-\frac{s'_1}{s_1}\right) = -\frac{1.82}{2}$$

图 2.167 L_2, L_3 移动之后



变,为

和 P 位置不变,所以第一次成像、第四次成像均与移动前相同。而这时总的横向放大率改变,为

(2) 如图 2.167 移动之后, L_2, L_3 之间的距离变为 $d_{32} = 30.0 - d_{21} - d_{43}$ 。由于 Q, L_1, L_4

$$f_1 = \frac{s_1 s'_1}{s_1 + s'_1} = 19.22 \text{ cm}$$

解得 $s_1 = 36.98 \text{ cm}$, 于是得到

$$\left(-\frac{s'_1}{s_1}\right)\left(-\frac{s'_2}{s_2}\right)\left(-\frac{s'_3}{s_3}\right)\left(-\frac{s'_4}{s_4}\right) = \left(-\frac{s'_4}{s_4}\right)\left(-\frac{s'_3}{s_3}\right)\left(-\frac{s'_2}{s_2}\right)\left(-\frac{s'_1}{s_1}\right) = \left(-\frac{40}{36.98}\right)\left(-\frac{s'_2}{s_2}\right)\left(-\frac{s'_3}{s_3}\right)\left(-\frac{s'_1}{s_1}\right) = -\frac{1.82}{2}$$

横向放大率为

$$f_4 = \frac{s_4 s'_4}{s_4 + s'_4} = 10.16 \text{ cm}$$

对于 L_4 , 物距 $s_4 = d_{43} - s'_3 = (5.0 + 11.67) \text{ cm} = 16.67 \text{ cm}$, 像距为 $s'_4 = 26.0 \text{ cm}$, 焦距

对于 L_3 , 物距 $s_3 = d_{32} - s'_2 = (27.5 + 25.0) \text{ cm} = 52.5 \text{ cm}$, 像距为 $s'_3 = \frac{s_3 f_3}{s_3 - f_3} = -11.67 \text{ cm}$ 。

对于 L_2 , 物距 $s_2 = d_{21} - s'_1 = (2.5 - 40.0) \text{ cm} = -37.5 \text{ cm}$, 像距为 $s'_2 = \frac{s_2 f_2}{s_2 - f_2} = -25.0 \text{ cm}$ 。

对于 L_1 , 像距为 $s'_1 = 40 \text{ cm}$ 。

【解】(1) 已知 $f_2 = f_3 = -15 \text{ cm}$, 这种条件下, 逐次成像过程示如下表是:

的透镜。在某些透镜位置变动后, 仍可按上述方法进行一些计算。

【分析】题中已告知初始条件下的一些参数, 可根据物像公式和横向放大率确定未知

高为 1.82 cm , 此时 L_1 和 L_2 的距离为 $\underline{\hspace{2cm}}$ cm , L_2 和 L_3 的距离为 $\underline{\hspace{2cm}}$ cm 。

(2) 现保持 Q, L_1, L_4 和 P 位置不变, 而沿光轴平移 L_2, L_3 , 最后在屏上成倒立的实像, 像

$$s'_2 = \frac{s_2 f_2}{s_2 - f_2} = \frac{-15.0 s_2}{s_2 + 15.0} = \frac{15.0(40.0 - d_{21})}{d_{21} - 25.0} \quad (3)$$

对于 L_3 , 像距和物距分别表示为

$$s'_3 = d_{43} - 16.67 \quad (4)$$

$$s_3 = \frac{-15.0 s'_3}{s'_3 + 15.0} = \frac{15.0(16.67 - d_{43})}{d_{43} - 1.67} \quad (5)$$

将式(2)~(4)代入式(1), 得到 $\frac{15}{d_{21} - 25.0} \frac{16.67 - d_{43} - 15.0}{15.0} = -0.54$, 由此解得

$$d_{43} = 11.83 - 0.54 d_{21} \quad (6)$$

而由于 $s_3 = 35.0 - d_{21} - d_{43} - s'_2$, 将式(3)、式(5)代入, 得到

$$\frac{15.0(16.67 - d_{43})}{d_{43} - 1.67} + \frac{15.0(40.0 - d_{21})}{d_{21} - 25.0} = 35.0 - d_{21} - d_{43} \quad (7)$$

再将式(6)代入式(7), 解得

$$d_{21} = 20.3 \text{ cm}, \quad d_{43} = 4.2 \text{ cm}$$

光学 3 波动光学与光的量子性

1. (1 届预赛) 有些照相机和测量仪的镜头看上去是淡紫色的, 这是因为镜头表面镀有一层透明物质的薄膜, 它的作用是_____。

【解】 为了减小镜头表面对光的反射, 增加光的透射率, 其表面往往蒸镀光学薄膜, 利用干涉的原理起到增透的作用。这种增透膜可大大增加可见波段的光的透射率。由于不可能对所有波段的光波都增透, 所以有些膜对长波部分显著增透, 因而镜头的反射光中蓝光紫光成分较多, 看上去镜头呈淡紫色, 这种膜被称作“蓝膜”; 而有些膜对短波部分显著增透, 反射光中红光成分较多, 看上去呈红色, 这种膜被称作“红膜”。

2. (1 届预赛) 列举激光的两个特性: (1) _____; (2) _____。举出激光的两种用途: (1) _____; (2) _____。

【解】 激光具有极好的单色性、方向性、相干性, 还具有很高的强度; 激光可用于光通信、信息的储存和读取、制作全息图、测距、诱发核聚变、精密加工、医疗、武器, 等等。

3. (2 届预赛) 一束在空气中波长为 $0.65 \mu\text{m}$ 的光, 人眼看是红色; 当它射入折射率为 1.33 的水中, 人眼在水中看时, 看到的颜色是_____, 理由是_____。

【解】 光在不同的媒质中传播时, 其波长改变而频率不变。眼睛对光的响应取决于光的频率, 因而在水中看到的仍然是红色。

4. (1 届预赛) 晴朗的天空呈蔚蓝色的原因是_____。

【解】 光通过不均匀的媒质时, 会发生散射。可见光的散射分两类: 在颗粒较小的媒质中,

7. (5 届预赛) 在一块平行板的玻璃片 A 上, 放一曲率半径 R 很大的平凸透镜 B, 如图 2.169 所示, 在 A、B 之间形成一劈形空气膜。当平行光束垂直射向平凸透镜时, 将呈现干涉条纹。请推导出干涉暗条纹半径 r 与 R 和入射光波长 λ 的关系。当在空气膜中充满水, 干涉条

距离相比要小得多, 所以由此引起的变化几乎观察不出来。
 (2) 若观察屏与中心线不垂直, 则线的上下两部分到双缝的距离将不同, 一侧的条纹间距会变大, 另一侧会变小。但是, 当角度偏差较小时, 由于这样引起的距离变化与观察屏到双缝的距离相比要小得多, 所以由此引起的变化几乎观察不出来。

(1) 若缝光源 S 偏离中心线, 则在双缝之前两列光就有光程差, 因而在 O' 点的光程差不等于 0, 与调节精确时相比, 屏上的干涉条纹整体移动, 但条纹间距不变。

实际的装置中, L 通常是米的量级, 而 d 通常是 1 mm 左右, 两者相差较大。

$$\Delta x = \frac{d}{L} \lambda$$

其中 L 为双缝屏到接收屏的距离, d 为两缝的间距, λ 为光的波长。因而相邻条纹的间隔为

$$x_j = j \frac{d}{L} \lambda$$

对于已精确调整的干涉装置, 接收屏上第 j 级亮条纹相对于 O' 点的移位为

有关。

【解】 杨氏双缝干涉花样与系统的配置

上条纹间距 (回答变大、变小或不变)。

确定置成一个小角度, 则与调节精确时相比, 屏

(2) 如果观察屏 E (垂直于图面) 与它的正

(回答变大、变小或不变)。

节精确时相比, 观察屏 E 上条纹间距

置向中线 OO' 的一侧偏离了一个小距离, 则与调

(1) 如果光源前狭缝 S (看作线光源) 的位

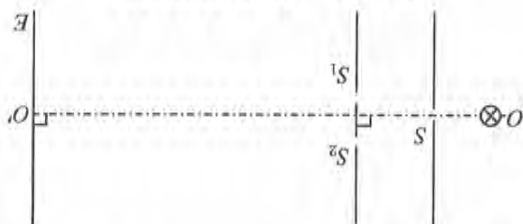


图 2.168 双缝干涉实验装置

6. (5 届预赛) 用单色光作如图 2.168 所示的双缝干涉实验时, 位置的调节很难做得完全精确。

太阳发出白光。

【解】 在清澈的大气中, 光的散射主要是瑞利散射, 即散射光的强度与波长的 4 次方成反比, 蓝光由于散射而偏离原来的入射方向。日落时分, 太阳在地平面附近, 到达地面的阳光经过的大气层最厚, 因而散射也最强烈, 沿直线到达地面的日光中, 蓝光由于散射而减弱, 而波长较长的红色成分相对较多, 因而落日呈红色的。而正午时分, 太阳位于正上方的天空中, 到达地面的阳光所经过的大气层最薄, 蓝光被散射的不是很多, 因而其中各种波长的成分均衡, 所以看起来

5. (2 届预赛) 落日为什么是红的?

散射光的强度与波长的 4 次方成反比, 这是瑞利散射(也称分子散射); 在颗粒较大的媒质中, 不同波长的光有相同的散射, 这是米-德拜散射。晴朗的天空中, 尘埃很少, 主要是空气分子的瑞利散射, 对蓝光散射要强得多, 因而在正对太阳之外的区域中, 呈现蔚蓝色。

纹变密还是变疏? 为什么?

【解】 这是牛顿环的干涉装置。

观察反射光在空气膜上表面的干涉, 一列在球面(玻璃-空气界面)被反射, 没有半波损失; 而另一列在平面(空气玻璃界面)被反射, 有半波损失。于是亮条纹产生的条件为 $\Delta L = 2h \pm \lambda/2 = j\lambda$, ΔL 为光程差, 即 $2h = j\lambda \pm \lambda/2$ 。设球面半径为 R , 在空气膜厚度为 h 处干涉条纹的半径为 r , 如图 2.170 所示, 由相交弦定理, 则有 $h(2R - h) = r^2$, $2Rh - h^2 = r^2$ 。由于 $R \gg h$, $h = r^2/2R$, 牛顿环半径为

$$r_j = \sqrt{(j + 1/2)\lambda R} \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

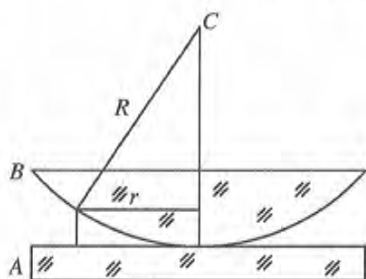


图 2.169 平凸透镜之间的空气膜的干涉

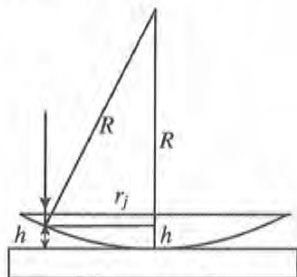


图 2.170 空气膜的厚度

对于透射光在空气膜下表面的干涉, 一列直接透过, 另一列在平面和球面间反射后透过, 由于两次反射, 无半波损失。这种情况下, 光程差为 $\Delta L = 2h = j\lambda$, 透射光牛顿环的半径为

$$r_j = \sqrt{j\lambda R} \quad (j = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

当在空气膜中充满水, 则对相同厚度的薄膜, 其光程变大, 两列光之间的光程差也变大, 因而光程差相差 1 个波长的条纹水平方向间隔会减小, 导致干涉条纹变密。

8. (26 届预赛) 传统的雷达天线依靠转动天线来搜索空中各个方向的目标, 这严重影响了搜索的速度。现代的“雷达”是“相位控制阵列雷达”, 它是由数以万计的只有几厘米或更小的天线按一定的顺序排列成的天线阵, 小天线发出相干的电磁波, 其初相位可通过电子计算机调节, 从而可改变空间干涉极强的方位, 这就起了快速扫描搜索空中各个方向目标的作用。对下面的简单模型的研究, 有助于了解改变相干波的初相位差对空间干涉极强方位的影响。

图 2.171 中, a, b 为相邻两个小天线, 间距为 d , 发出波长为 λ 的相干电磁波。Ox 轴通过 a, b 的中点且垂直于 a, b 的连线。若已知当 a, b 发出的电磁波在 a, b 处的初相位相同即相位差为 0 时, 将在与 x 轴成 θ 角 (θ 很小) 方向的远处形成干涉极强, 现设法改变 a, b 发出的电磁波的初相位, 使 b 的初相位比 a 的落后一个小量 φ , 结果, 原来相干极强的方向将从 θ 变为 θ' , 则 $\theta - \theta'$ 等于_____。

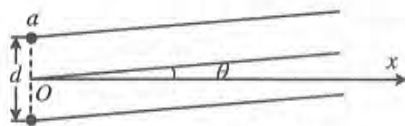


图 2.171 相控阵雷达

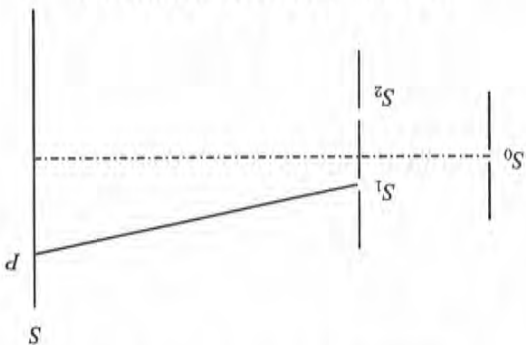
【解】 相控阵雷达发出的是射频波, 与光波不同, 但其原理则可以用光的干涉进行类比分析。

如图 2.171 所示, 每个天线都可以沿各个方向发射雷达波, 但由于目标在很远处, 所以这些雷达波只有在远处干涉相长, 才能有很大的强度, 反射回来的波也会较强。因而相控阵雷达实

【解】杨氏双缝干涉实验,屏上 P 点出现亮条纹的条件是从双狭缝到 P 的光程差为波长的整数倍。因而本题中 P 点到缝 S_2 光程 $r_2 = r_1 + j\lambda$, j 是整数。

屏 S 上相邻亮纹(或暗纹)的间隔是 $\Delta x = \frac{d}{L}\lambda$, 其中 L 是观察屏到双缝屏的距离, d 是双狭

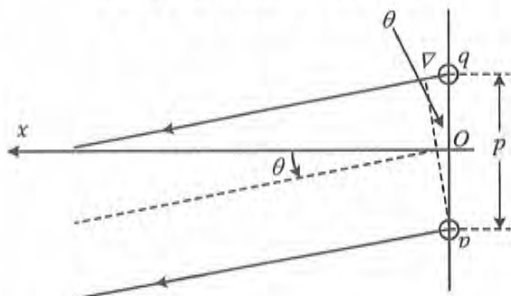
图 2.173 用双缝干涉测量光的波长



9. (27 届预赛) 图 2.173 为“用双缝干涉测量光的波长”实验装置的示意图。图中 S_0 为狭缝, S_1, S_2 为双狭缝, S 为观察屏。当用单色光(以 λ 表示其波长)从左方照射狭缝 S_0 时, 由双狭缝 S_1, S_2 射出的光是相干光, 可在观察屏 S 上出现明暗相间的干涉条纹。若屏 S 上的 P 点是某一暗条纹的中心, 已知 P 点到缝 S_1 的距离为 r_1 , 则 P 点到缝 S_2 的距离 $r_2 =$ _____。为求出波长 λ , 实验中应测量的物理量是 _____。若实验装置中单缝、双狭缝和屏的位置都不变, 只是入射光第一次为红光, 第二次为蓝光, 则第二次观察到的干涉条纹与第一次相比, 不同之处除了条纹的颜色外, 还有 _____。

因而题中 $\theta - \theta' = -\delta\theta = \frac{2\pi d}{\lambda}\varphi$ 。

图 2.172 两列波之间的光程差



$$\varphi = \varphi_0 + \frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda}$$

其中 φ_0 为相邻两天线波列之间的初相位差。则出现干涉极大值的条件为

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda} = 2j\pi$$

因而, 通过调节 φ_0 , 即可改变最大干涉强度波列的方向 θ 。若 b 的相位落后一个小量, 则 θ 将会增大一个小量, 两者间关系为

$$\delta\theta = -\frac{2\pi d}{\lambda}\delta\varphi_0$$

相位差为

$$\Delta = d \sin \theta$$

图 2.172 中, 自 a 向 b 方向的波列作垂线, 则这两列波之间的光程差就是

实际上是利用相互平行的波列相长干涉的原理工作的。

缝之间的距离,即 $\lambda = \Delta x \frac{d}{L}$ 。所以实验中应测量的物理量是 Δx 、 L 和 d 。

观察屏上相邻条纹的间隔与波长成正比,所以蓝光的干涉条纹间隔比红光要小。而太阳本身对观察者的张角为 $\theta_0 = \frac{2R_s}{r_E}$,两者相差

$$\Delta\theta = \theta_0 - \theta = \frac{2R_s}{r_E} - \frac{2R_s}{nr_E} = \frac{2R_s}{r_E} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 2.49 \times 10^{-6}$$

10. (24 届复赛) 图 2.174 所示为杨氏双缝干涉实验的示意图,取纸面为 yz 平面。 y 、 z 轴的方向如图所示。线光源 S 通过 z 轴,双缝 S_1 、 S_2 对称分布在 z 轴两侧,它们以及屏 P 都垂直于纸面。双缝间的距离为 d ,光源 S 到双缝的距离为 l ,双缝到屏的距离为 D , $d \ll D$, $d \ll l$ 。

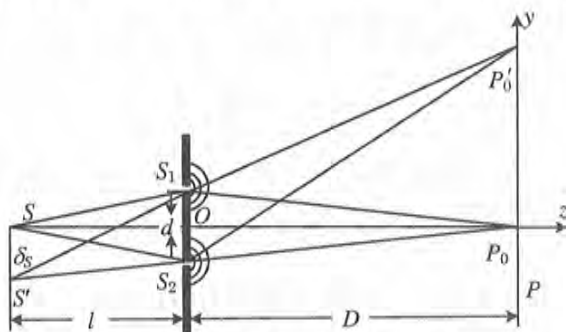


图 2.174 杨氏双缝干涉装置

(1) 从 z 轴上的线光源 S 出发经 S_1 、 S_2 不同路径到 P_0 点的光程差为零,相干的结果产生一亮纹,称为零级亮纹。为了研究有一定宽度的扩展光源对于干涉条纹清晰度的影响,我们研究位于轴外的线光源 S' 形成的另一套干涉条纹, S' 位于垂直于 z 轴的方向上且与 S 平行,两者相距 δ_s ,则由线光源 S' 出发分别经 S_1 、 S_2 产生的零级亮纹 P'_0 , P'_0 与 P_0 的距离 $\delta_y =$ _____。

(2) 当光源是宽度为 ω 的扩展光源时,可将扩展光源看作由一系列连续的、彼此独立的、非相干的线光源组成。这样,各线光源对应的干涉条纹将彼此错开,在屏上看到的将是这些干涉条纹的光强相加的结果,干涉条纹图像将趋于模糊,条纹的清晰度下降。假设扩展光源各处发出的光强相同、波长皆为 λ 。当 ω 增大导致零级亮纹的亮暗将完全不可分辨,则此时光源的宽度 $\omega =$ _____。

(3) 在天文观测中,可用上述干涉原理来测量星体的微小角直径。遥远星体上每一点发出的光到达地球处都可视为平行光,从星体相对的两边缘点发来的两组平行光之间的夹角 θ 就是星体的角直径。遥远星体的角直径很小,为测量如此微小的角直径,迈克尔逊设计了测量干涉仪,其装置简化为图 2.175 所示。 M_1 、 M_2 、 M_3 、 M_4 是四个平面反射镜,它们两两平行,对称放置,与入射光(a 、 a')方向成 45° 角。 S_1 和 S_2 是一对小孔,它们之间的距离是 d 。 M_1 和 M_2 可以同步对称调节来改变其中心间的距离 h 。双孔屏到观察屏之间的距离是 D 。 a 、 a' 和 b 、 b' 分别是星体上相对着的两边缘点发来的平行光束。设光线 a 、 a' 垂直双孔屏和像屏,星光的波长是 λ ,试导出星体上角直径 θ 的计算式。

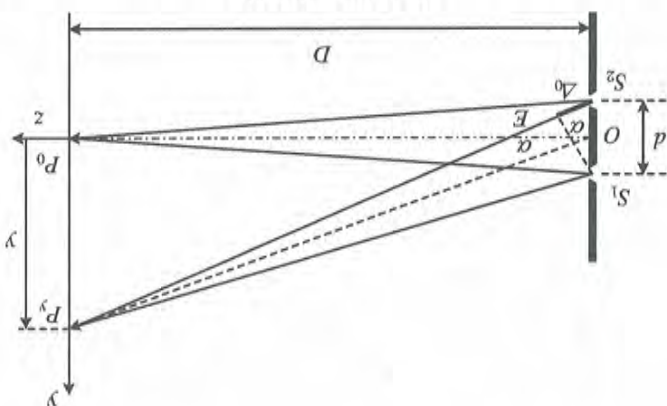
而从 S' 到双缝 S_1, S_2 的光程差(双缝前光程差)可用相似方法得到,为

$$\Delta_0 = \frac{\delta_y}{D}d$$

S_1, S_2 到接收屏上一点 P_0' 的光程差(双缝后光程差)为

如图 2.177 所示,设扩展光源上一点光源 S' 到轴线的距离为 δ_s , 满足傍轴条件时,从双缝

图 2.176 光程差



这就是双缝之后所产生的光程差。

$$\Delta_0 = S_2 S_1 \sin \alpha = d \sin \alpha \approx d \alpha \approx d \frac{y}{D}$$

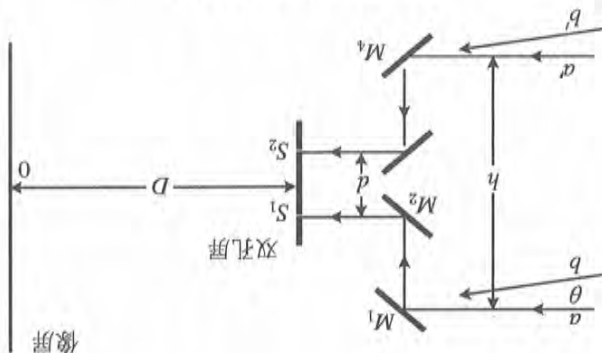
连接 OP_y , 则 $S_1 E$ 与 $S_1 S_2$ 之间的夹角近似等于 OP_y 与轴线的夹角 α , 因而可得

$$\text{程差 } \Delta_0 = P_y S_2 - P_y S_1 \approx S_2 E.$$

由于 $P_y E \geq S_1 E, P_y S_1 \geq S_1 E$, 所以 $\Delta S_1 P_y E$ 的顶角很小, 即 $S_2 P_y$ 也几乎垂直于 $S_1 P_y$, 因而光

如图 2.176 所示,对于从双缝 S_1, S_2 到屏上 P_y 点的两条路径,从 S_1 向 $S_2 P_y$ 作垂线 $S_1 E$,

图 2.175 测恒星张角装置



如下方式计算。

【解】(1) 在满足傍轴条件的杨氏双缝干涉装置中,两缝发出的光波之间的光程差可以按

会遇到数学困难,为简化讨论,本题拟将扩展光源作宽度为 ω 的矩形光源处理。

注:将星体作圆形扩展光源处理时,研究扩展光源的线度对于干涉条纹图像清晰度的影响

$$\Delta_1 = -\frac{\delta_s d}{l}$$

于是从 S' 到 P'_0 的总光程差为

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_0 = -\frac{\delta_s d}{l} + \frac{\delta_y d}{D} = -\left(\frac{\delta_s}{l} - \frac{\delta_y}{D}\right)d$$

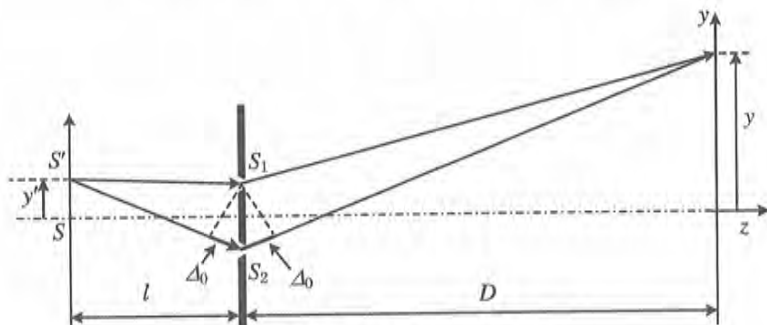


图 2.177 缝前和缝后的光程差

0 级亮纹 $\Delta = 0$, 在屏上的位置, 即 P'_0 与 P_0 的距离为

$$\delta_y = \frac{D\delta_s}{l}$$

(2) 采用扩展光源, 光源上各点是不相干的, 每一点在屏上形成各自的干涉条纹, 这些干涉条纹的强度再进行叠加, 就形成总的干涉花样, 这是非相干叠加的过程。

对于有一定宽度的光源, 其上某一点 y' 发出的光波, 经双缝分为振幅为 A 的两列光波, 这两列光波到达屏上的 y 处, 在 y 处的光程差

$$\Delta = \left(\frac{y}{D} + \frac{y'}{l}\right)d$$

相应的干涉光强可表示为

$$i(y) = A^2 + A^2 + 2A^2 \cos \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = 2A^2 \left[1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{y}{D} + \frac{y'}{l} \right) d \right]$$

若单位宽度光源所形成的干涉强度以上式表示, 则宽度为 dy' 的光源的干涉强度为

$$di(y) = \left(A^2 + A^2 + 2A^2 \cos \frac{2\pi}{\lambda} \Delta \right) dy' = 2A^2 \left[1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{y}{D} + \frac{y'}{l} \right) d \right] dy'$$

屏上的总强度是各个发光点所形成的干涉光强的强度直接相加, 则

$$\begin{aligned} I(y) &= \int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} di(y) = \int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} 2A^2 \left[1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{y}{D} + \frac{y'}{l} \right) d \right] dy' \\ &= 2A^2 \left\{ \omega + \int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} \left[\cos \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{y}{D} + \frac{y'}{l} \right) d \right] dy' \right\} \\ &= 2A^2 \left\{ \omega + \frac{\lambda l}{2\pi d} \left[\sin \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{y}{D} + \frac{\omega}{l} \right) d - \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{y}{D} - \frac{\omega}{l} \right) d \right] \right\} \\ &= 2A^2 \left(\omega + \frac{\lambda l}{\pi d} \cos \frac{2\pi}{\lambda} \frac{y d}{D} \sin \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\omega d}{2l} \right) \end{aligned}$$

屏上亮纹最大光强为 $I_{\max} = 2A^2 \left(\omega + \frac{\lambda l}{\pi d} \sin \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\omega d}{2l} \right)$ 。

其中 h 为普朗克常量, p 为电子的动量。

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

电子具有波动性,其德布罗意波长为

个光斑。光斑越大,分辨率越低。这就是成像分辨的衍射极限。

这就是圆孔衍射的艾里斑。由于衍射,成像的分辨率受到限制。物上的一个点,所成的像是一

$$\Delta\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

【解】 波长为 λ 光波通过直径为 D 的孔径,所产生的衍射斑的半角宽度为

11. (2 分预赛) 电子显微镜比普通显微镜更能分辨物体的细节,这是由于

$$\theta = \frac{\omega}{\lambda} = \frac{\lambda}{h}$$

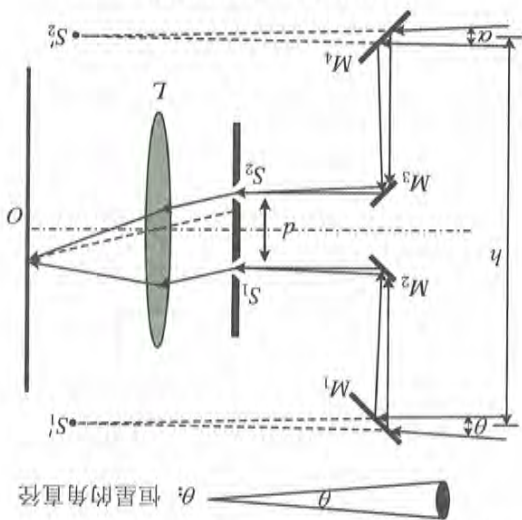
恒星的角直径为

$$\omega = \frac{h}{\lambda}$$

离 h 就是等效的双缝间隔。因而由于光源宽度所造成的干涉条纹消失的条件为

由于狭缝 S_1 和 S_2 经反射镜后分别成像于 S'_1 和 S'_2 , 所以对恒星而言, S'_1 、 S'_2 之间的距

图 2.178 测量干涉仪



(3) 这样的装置就是所谓的迈克尔孙测量干涉仪,如图 2.178 所示。

即得 $\omega = \frac{p}{h}$ 。

$$\sin \frac{2\pi \omega d}{\lambda} = 0$$

两者相等时,条纹消失,不可分辨,此时

$$\text{屏上亮纹最小光强为 } I_{\min} = 2A^2 \left(\omega - \frac{\pi d}{\lambda} \sin \frac{2\pi \omega d}{\lambda} \right)$$

若电子经过电压为 V 的电场加速,其动量可表示为

$$p = \sqrt{2mE_k} = \sqrt{2meV}$$

电子显微镜中的电子通过加速电场,可以获得很高的动量,因而具有比可见光短得多的波长,所以其艾里斑要小得多,因而具有更高的分辨率。

12. 由阴极 K 发射的电子(质量为 m , 电荷量为 e , 设其初速度为 0)经加速极 A 加速后垂直射向一开有两条平行缝的屏,电子自狭缝射出后打到一荧光屏上,如图 2.179 所示。由于电子具有波动性,荧光屏将出现明暗相间的条纹。设加速极 A 与阴极 K 之间的电压为 U ,两平行缝间的距离为 d ,试问:

(1) 在整个装置的轴线与荧光屏的交点 O 处,将出现暗条纹还是亮条纹?

(2) 设位于轴线外侧的第一条亮条纹出现在 θ 角处,写出 θ 的表达式(以 m 、 e 、 d 、 U 及其他有关常量表示)。

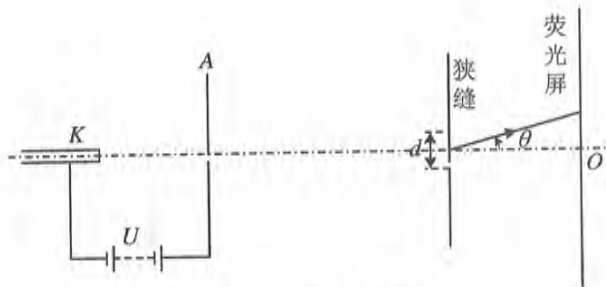


图 2.179 电子束的双缝干涉

【解】 (1) 电子具有波粒二象性,因而通过双缝后可以像光一样进行干涉。经上下狭缝的两束电子到达 O 点所经历的光程相等,因而相位也相等,此处为亮条纹。

(2) 设屏到双缝的距离为 D , θ 角处为第一根亮条纹的位置,到 O 点的距离为 $x = \frac{D}{d}\lambda$, 则

$$\theta = \frac{x}{D} = \frac{\lambda}{d}$$

而电子的德布罗意波长为

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}} = \frac{h}{\sqrt{2meU}}$$

于是 $\theta = \frac{h}{d\sqrt{2meU}}$ 。

13. 如图 2.180 所示,薄透镜的焦距 $f = 10$ cm,其光芯为 O , 主轴为 MN 。现将透镜对半切开,剖面通过主轴并与纸面垂直。

(1) 将切开的两半透镜各沿垂直于剖面的方向拉开,使剖面与 MN 的距离均为 0.1 mm, 移开后的空隙用不透光的物质填充组成干涉装置,如图 2.181 所示,其中 P 为单色点光源($\lambda = 550$ nm),

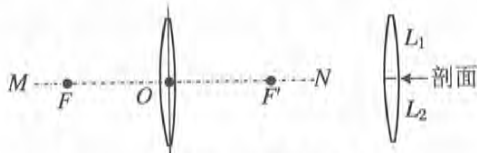


图 2.180 将透镜对切

【分析】 将一列光波分为两部分,则这两部分就是相干的。相遇后就能进行干涉。本题中按第一种方式构成的干涉装置,被称作比累对切透镜;按第二种方式构成的干涉装置,被称作梅斯林对切透镜。

【解】 (1) 光源发出的每一列波,经两个半透镜后分为两列,或者,光源 P 经过两个半透镜

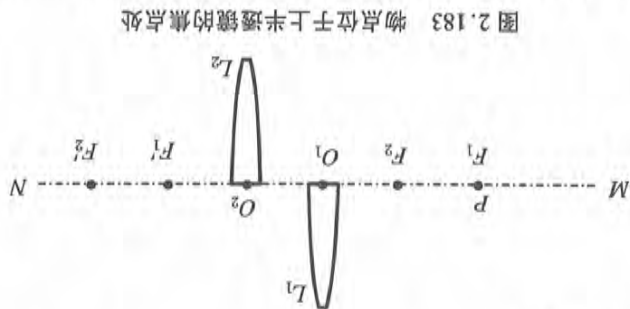


图 2.183 物点位于上半透镜的焦点处

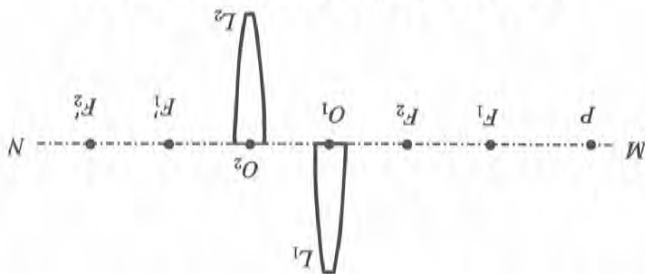
所示,试回答第(2)问中的各题。

(3) 在本题第(2)问中的情况下,使点光源沿主轴移到半透镜 L_1 的焦点 F_1 处,如图 2.183 (III) 在交叠区域放一观察屏 E ,该屏与 MN 垂直,画出屏上呈现的干涉条纹的形状。

(II) 用斜线标出相干光束交叠区域。

(I) 用作图法画出干涉光路图。

图 2.182 透镜对切后相互错开,构成干涉装置



P 为单色光源,位于半透镜 L_1 的焦点 F_1 外。

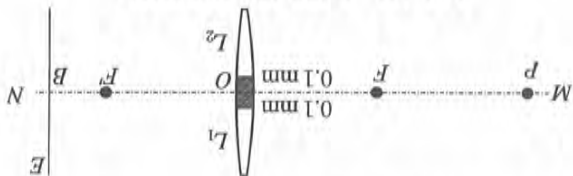
(2) 将切开的两半透镜沿主轴 MN 方向移开一小段距离,构成干涉装置,如图 2.182 所示。

(III) 如屏 E 向右移动,干涉条纹的间距将怎样变化?

(II) 算出屏 E 上呈现的干涉条纹间距。

(I) 用作图法画出干涉光路图。

图 2.181 透镜对切后的干涉装置



$\overline{PO} = 20 \text{ cm}$, E 为垂直于 MN 的屏,屏与光心的距离 $\overline{OB} = 40 \text{ cm}$ 。

后分别形成两个像光源,用高斯公式算得像距为

$$s' = \frac{sf}{s-f} = 20 \text{ cm}$$

用横向放大率公式算得像点到中心轴线的距离为

$$h' = 0.1 - \frac{s'}{s} \times (-0.1) \text{ mm} = 0.2 \text{ mm}$$

可知两个实像光源到透镜的距离均为 20 cm,到轴线的距离均为 0.2 mm。

在向像点会聚的两列光波的重叠区域,将产生干涉,如图 2.184 所示。

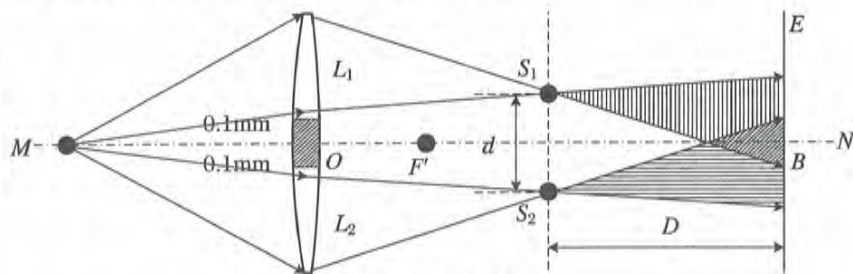


图 2.184 干涉区域

对于屏幕来说,这就等效于杨氏的双孔干涉,由于系统满足傍轴条件, $d = 2h' = 0.4 \text{ mm}$, $D = \overline{OB} = 40 \text{ cm}$,于是干涉条纹的间隔为

$$\Delta x = \frac{D\lambda}{d} = \frac{400}{0.4} \times 550 \times 10^{-6} \text{ mm} = 0.55 \text{ mm}$$

(2) 光源发出的每一列波,经两个半透镜后分为两列,通过计算各自的像点,可确定两列光波的特点。

不妨设光源到第一个半透镜 L_1 的距离为 s ,两透镜间的距离为 d ,则两个像距分别为

$$s'_1 = \frac{sf}{s-f}, \quad s'_2 = \frac{(s+d)f}{s+d-f}$$

由于 s'_2 是从 L_2 算起,所以像点 S_2 到 L_1 的距离为

$$s'_{21} = s'_2 + d$$

于是有两个相干的像光源 S_1 、 S_2 。在两列波的重叠区域产生干涉,如图 2.185 所示。

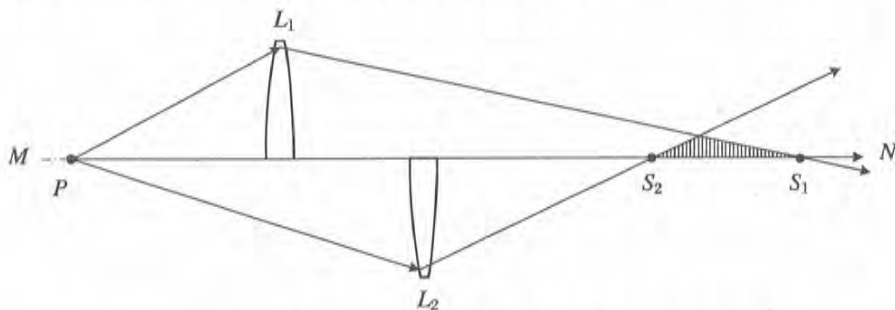


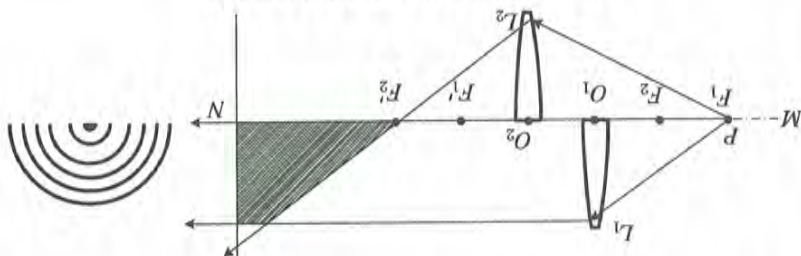
图 2.185 梅斯林对切透镜的干涉

可以将 S_1 、 S_2 视作两个相干的像光源,但这两个光源实际上是有差别的。在接收屏上看

- (1) 切去部分的宽度 a 是多少?
 (2) 为获得最多的干涉条纹, 屏幕应离透镜多远?

14. 将焦距 $f = 20\text{ cm}$ 的薄凸透镜从正中切去宽度为 a 的小部分, 见图 2.188(a), 再将剩下的两半粘接在一起, 构成一个“黏合透镜”, 见图 2.188(b), 图中 $D = 2\text{ cm}$ 。在黏合透镜一侧的中心轴线上距透镜 20 cm 处, 置一波长 $\lambda = 500\text{ nm}$ 的单色点光源 S , 另一侧, 垂直于中心轴放置屏幕, 见图 2.188(c)。屏幕上出现干涉条纹, 条纹间距 $\Delta x = 0.2\text{ mm}$ 。试问:

图 2.187 平行光与球面波的干涉花样



2.187所示。

- (3) 由于 P 在 L_1 的焦点上, 经 L_1 的光波为平面波, 所以干涉的区域和条纹的形状如图

$$l_2 - (\Delta - l_1) = \sqrt{\Delta_2^2 + r^2} + \sqrt{\Delta_1^2 + r^2} + \Delta = \lambda$$

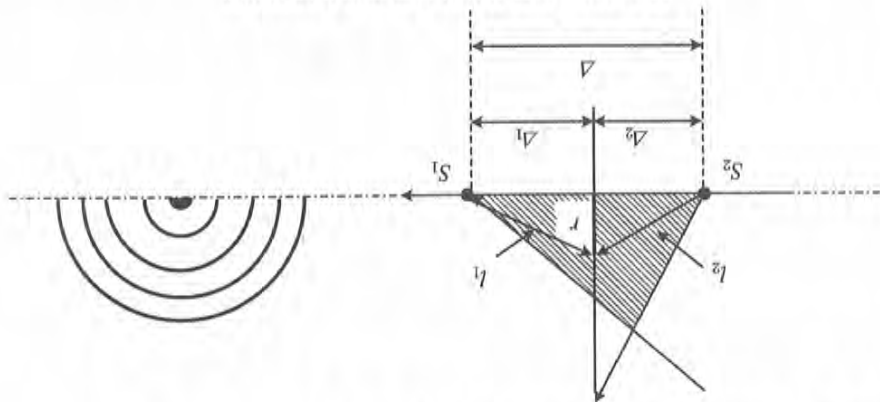
分别为 $l_1 = \sqrt{\Delta_1^2 + r^2}$ 和 $l_2 = \sqrt{\Delta_2^2 + r^2}$, 亮纹的条件为

若接收屏到 S_1 的距离为 Δ_1 , 到 S_2 的距离为 Δ_2 , 则接收屏上距光轴 r 处, 到两像点的距离

列波的相位相等, 所以轴上是亮纹。

沿光轴分别经过 L_1, L_2 的光波, 光程差为 $\Delta = S_2S_1$, 而从物点到像点的所有光线, 光程是相等的, 所以 S_1, S_2 两个像点之间的光程差就是 S_2S_1 , 相位差就是 $\frac{\lambda}{2\pi} S_2S_1$ 。由于光轴上各点, 两

图 2.186 光程差的计算及干涉条纹的形状



如果要确定干涉条纹的细节, 可以进行以下的计算, 如图 2.186 所示。

纹是以轴线为中心的亮暗交替的同心圆环。

来, 光是从 S_2 发出的, 但却是向 S_1 会聚的。与两个点光源相应的是球面波, 所以屏上的干涉条

【分析】 本题与上题中的比累对切透镜相同。

【解】 (1) 由于物点在透镜的焦平面上, 所以经过透镜后成为平行光束(平面波), 如图 2.189 所示, 是平面波的干涉。

由于上半透镜 L_1 的光轴在装置中心线的下方, 所以经过 L_1 的光波向下偏折; 而下半透镜 L_2 的光轴在装置中心线的上方, 所以经过 L_2 的光波向上偏折。两轴线的距离为 a 。而经过光芯的光线方向不变, 由此可知在傍轴近似下, 两列波与中心线的夹角均为

$$\alpha = \frac{a}{2f}$$

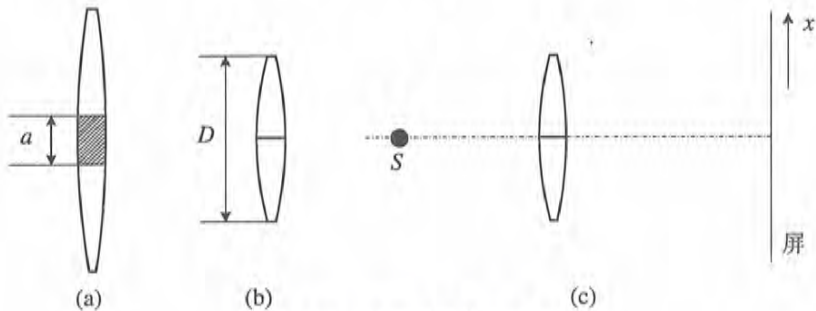


图 2.188 对切透镜的干涉装置

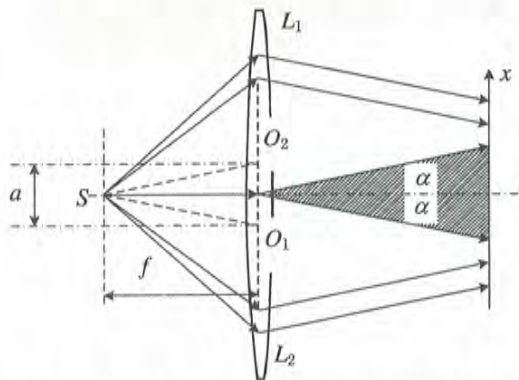


图 2.189 经过对切透镜后, 两列平面波的干涉

取中心线为 z 轴, 则经过 L_1 的光波, 其波矢为

$$k_1 = k(-\sin \alpha e_x + \cos \alpha e_z)$$

经过 L_2 的光波, 其波矢为

$$k_2 = k(\sin \alpha e_x + \cos \alpha e_z)$$

由于两列波在接收屏的中心处光程相等, 相位相同, 不妨设两列平面波在中心处的相位均为 0。则在接收屏上某一点的位矢为 $r = xe_x + ye_y$, 于是上述两列波在该点的相位分别为

$$\varphi_1 = k_1 \cdot r = k(-\sin \alpha e_x + \cos \alpha e_z) \cdot (xe_x + ye_y) = -kx \sin \alpha$$

$$\varphi_2 = k_2 \cdot r = k(\sin \alpha e_x + \cos \alpha e_z) \cdot (xe_x + ye_y) = kx \sin \alpha$$

相位差为

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2kx \sin \alpha = 2 \times \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \alpha = \frac{4\pi}{\lambda} x \sin \alpha$$

$$\Delta l = \frac{s}{s+s'} D = \left(1 + \frac{s'}{s}\right) D$$

的参数,每个光斑的直径为

一个光斑,光斑的大小可利用光线、孔平面、像平面、像平面所构成的相似三角形进行计算。按图上所标

针孔成像可用图 2.191 进行说明。物上一点发出的光线,经小孔后在成像屏幕上散开成为

由于面积大小,不能像透镜一样成像。小眼的成像,类似于针孔成像。

按题中的说法,小眼顶部有一个透光的圆形集光装置,叫角膜镜。角膜镜尽管是球形的,但

的只是物体上的一小部分,各个小眼的像组合起来,就是物体的全貌。

【解】复眼中的每一个小眼独自成像。由于“管中窥豹,只见一斑”,所以每个小眼所看到

mm,则蜜蜂小眼角膜的最佳直径 d 约为(请给出 2 位有效数字)_____。

(像素);所有小眼的影像点就拼成了一个完整的像。若将复眼看作球面圆锥,球面半径 $r = 1.5$

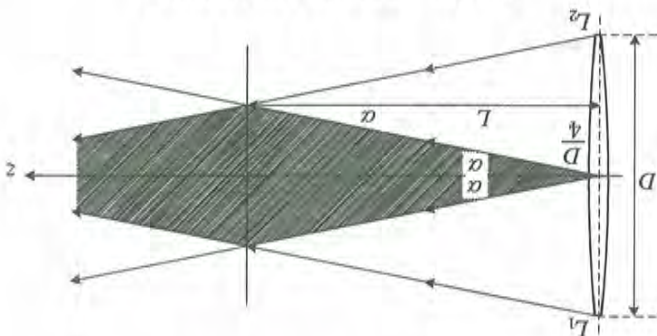
的感光细胞上(入射进入一个小眼的光线不会透过锥壁进入其他小眼),从而造成一个“影像点”

形集光装置,叫角膜镜;下面连着圆锥形的透明晶体,使得外部入射的光线会聚到圆锥顶点连接

构成的复眼,小眼一个个密集排在眼睛的整个表面上,小眼构造很精巧,顶部有一个透光的圆

15. (26 届决赛) 某种蜜蜂的眼睛能够看到平均波长为 500 nm 的光,它是由 5 000 个小眼

图 2.190 确定干涉条纹最多的位置



$$L = \frac{D}{4\alpha} = \frac{fD}{2a} = 400 \text{ cm}$$

纹。此时屏幕到透镜的距离为

(2) 由图 2.190 可见,两列光波有一个重叠最大的区域,屏幕在该处,可获得最多的干涉条

$$a = \frac{\Delta x}{f\lambda} = \frac{200 \times 500 \times 10^{-6}}{0.2} \text{ mm} = 0.5 \text{ mm}$$

所以切去部分的宽度为

$$\Delta x = \frac{f\lambda}{a}$$

亮条纹的间距为

$$x_j = \frac{f\lambda}{2\sin\alpha} \approx \frac{f\lambda}{2a} = \frac{a}{f\lambda}$$

亮条纹的条件为 $\Delta\varphi = 2j\pi$, 即 $\frac{4\pi}{\lambda} x_j \sin\alpha = 2j\pi$ 。第 j 级亮纹的位置为

当物距很大时, $s' \ll s$, 因而有 $\Delta l \approx D$, 即每个像斑的大小与针孔的大小相当。而每个像斑对针孔中心的张角为 $\Delta\theta_0 = \frac{D}{s'}$ 。对于本题中的小眼, 几何像斑的张角为

$$\Delta\theta_0 = \frac{d}{r}$$

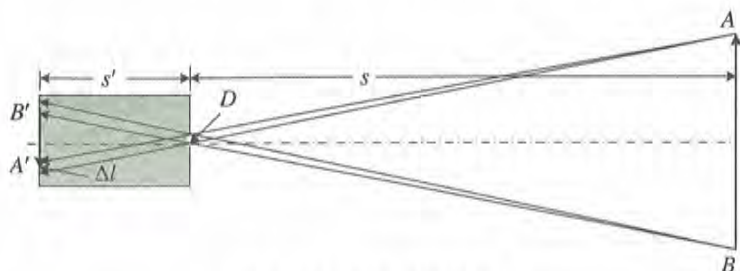


图 2.191 针孔成像的原理

由于小眼的孔径很小, 衍射效应不可忽略。光在小眼中的衍射可用夫琅禾费圆孔衍射加以模拟, 衍射的中央主极大是艾里斑, 艾里斑的半角宽度, 即艾里斑边缘(衍射光强为 0)与中心(衍射光强最大)到孔中心连线的夹角为

$$\Delta\theta = 1.22 \frac{\lambda}{d}$$

上述半角宽度其实也近似等于艾里斑的半值宽度。所谓半值, 是指强度降为最大值的一半。由于艾里斑边缘强度比中心处弱得多, 所以只有靠近中央强度较强的部分才能引起视觉响应。因而, 通常用半值宽度表示艾里斑的有效大小。

由上两式可见, 孔径越小, 几何斑越小, 像越清晰, 但这样却导致衍射斑越大, 像反而越模糊。所以只有两者相等时, 才能达到最清晰, 即

$$\frac{d}{r} = 1.22 \frac{\lambda}{d}$$

因此得到

$$d = \sqrt{1.22r\lambda} = \sqrt{1.22 \times 1.5 \times 0.5 \times 10^{-3}} = 0.30 \text{ (mm)}$$

当然, 还有另一种计算方法。总的像斑是几何斑与衍射斑的叠加, 则光斑的最大张角为

$$\Delta\theta' = \Delta\theta_0 + \Delta\theta = \frac{d}{r} + 1.22 \frac{\lambda}{d}$$

该像斑取最小值的条件为 $\frac{1}{r} - 1.22 \frac{\lambda}{d^2} = 0$, 同样有 $d = \sqrt{1.22r\lambda}$ 。

16. (20 届决赛) 一近视患者不戴眼镜时, 能看清的物体都在距眼睛 $a = 20 \text{ cm}$ 以内。他发现, 如果在眼前靠近眼睛处放一带小圆孔的卡片, 通过小圆孔不戴眼镜看远处物体时也能看得清晰些。

(1) 若小圆孔的直径为 D , 试根据几何光学的原理求出当近视眼直视远处的一个点物时, 在眼睛的视网膜上产生的光斑的直径。

(2) 再考虑小圆孔的衍射效应, 求小圆孔直径最恰当的大小。计算时可取可见光的平均波

$$D = \frac{a}{b} = \frac{b - f}{f} = \frac{a + b}{ab}$$

结果。远处的物点,发出的光束近似是平行光束,会聚到眼睛的像方焦点处,但由于视网膜在焦点左方,因而散成一个光斑。由图 2.194 可见光斑的直径为

题目中只给出了 a 的数值,而没有明确说明 b 和 f 哪个是已知量,所以只好利用上面任一

$$f = \frac{ab}{a+b}$$

或根据物最近时的物距算出眼睛的最大焦距,即

$$b = \frac{af}{a-f}$$

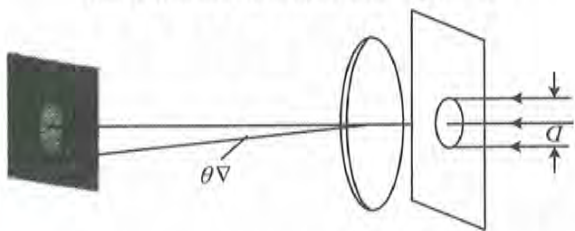
距算出最长的眼轴,即

【分析】将眼睛作为一个凸透镜进行考虑。
【解】(1) 眼睛只能看清近处的物体,说明眼轴过短,不能进一步调节。可根据最远的物

图 2.192 圆孔衍射花样



图 2.193 圆孔衍射中央亮斑的半角宽度



式中 λ 是所选用的光的波长,此圆斑就是有小圆孔时观察到的物点的“像”,如图 2.193 所示。由上式可见, D 越大,像斑就越小,点物的像就越接近一个点,物体的像就越清晰;反之, D 越小,像斑就越大,点物的衍射像斑就越大,物体的像就越不清晰。如果观察屏不在焦点处而在焦点附近,屏上将出现类似的衍射图样,其中中央亮斑对透镜中心的张角 $\Delta\theta$ 可近似地用上式计算。

$$\Delta\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

论计算得到

斑弱得多,观察时可以不予考虑。中央圆斑的半径对透镜中心的张角 $\Delta\theta$ 的大小与 D 有关。明亮的圆斑,圆斑外周是一组亮度逐渐减弱的亮暗相同的同心圆环,由于这些圆环亮度比中央圆孔,则将发生光的衍射,在焦点处像屏上将出现如图 2.192 所示的衍射图样,其中中央是一个小圆孔,平行光束将会聚于透镜的焦点上,这就是像。如果在透镜前放一直径为 D 的小圆孔,则在几何光学中,从远处物点射向透镜的、平行于光轴的平行光束将会聚于透镜的焦点上,这就是像。如果在透镜前放一直径为 D 的小圆孔,则将发生光的衍射,在焦点处像屏上将出现如图 2.192 所示的衍射图样,其中中央是一个明

距离为 b 。

【提示】(1) 人眼是一个结构比较复杂的光学系统,在本题中,可将人眼简化成一个焦距 f 可调的薄透镜和一个可成像的视网膜,透镜的边缘为瞳孔,两侧介质均为空气,视网膜与透镜的

长为 600 nm。

(2) 几何像斑对瞳孔中心的张角为 $\Delta\theta_0 = \frac{d}{b} = \frac{D}{a}$, 而衍射斑的张角为 $\Delta\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$ 。

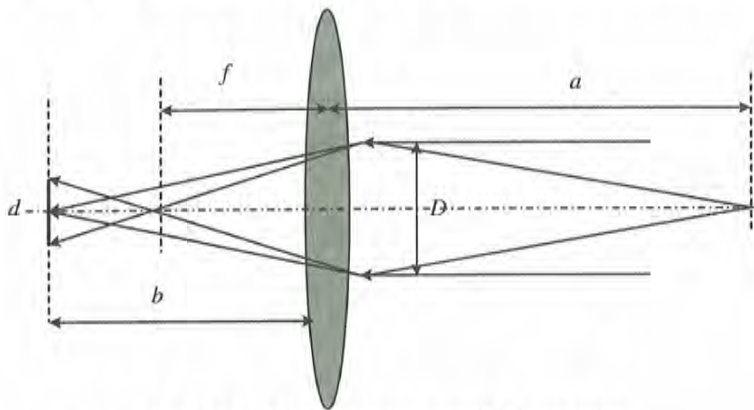


图 2.194 经过小孔的光线在视网膜上的光斑

由于圆孔的孔径变化时,衍射斑与几何斑变化的趋势恰相反,所以上述两张角相等时,像最清晰,于是有

$$\frac{D}{a} = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

得到

$$D = \sqrt{2.44a\lambda} = \sqrt{2.44 \times 200 \times 0.6 \times 10^{-3}} = 0.54 \text{ (mm)}$$

【点评】 几何像斑是一个光强分布均匀的亮斑,中心处与边缘处光强几乎相等。而衍射斑则不然,衍射斑边缘处光强比中心处弱得多。尽管衍射的半角宽度为题中所给的 $\Delta\theta$,但实际上其有效的角宽度就是 $\Delta\theta$,而不是 $2\Delta\theta$ 。

17. (1届预赛) 全息照相底片和普通照相底片在摄影冲洗后其底片上图像的不同点是_____。

【解】 全息照相底片是干涉花样,反映的是干涉强度的分布;而普通照相底片则是物的形象色彩亮度的记录。

18. (22届决赛) 一玻璃砖上下表面平行,一束光含有两种不同频率的单色成分,以某角度由真空射入玻璃砖,砖对两种光的折射率为 n 和 N 。试在以下两种情况下讨论两种光的传播时间:

- (1) $n = 1.38, N = 1.40$; (2) $n = 1.52, N = 1.54$ 。

【解】 如图 2.195 所示,设光的入射角、折射角分别为 i, i' , 光线在玻璃砖传过的距离为

$$L = \frac{d}{\cos i'} = \frac{d}{\sqrt{1 - \sin^2 i'}} = \frac{nd}{\sqrt{n^2 - n^2 \sin^2 i'}} = \frac{nd}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}$$

所用的时间为

$$\Delta t = \frac{nL}{c} = \frac{n^2 d}{c \sqrt{n^2 - \sin^2 i}}$$

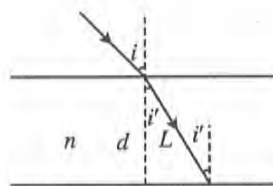
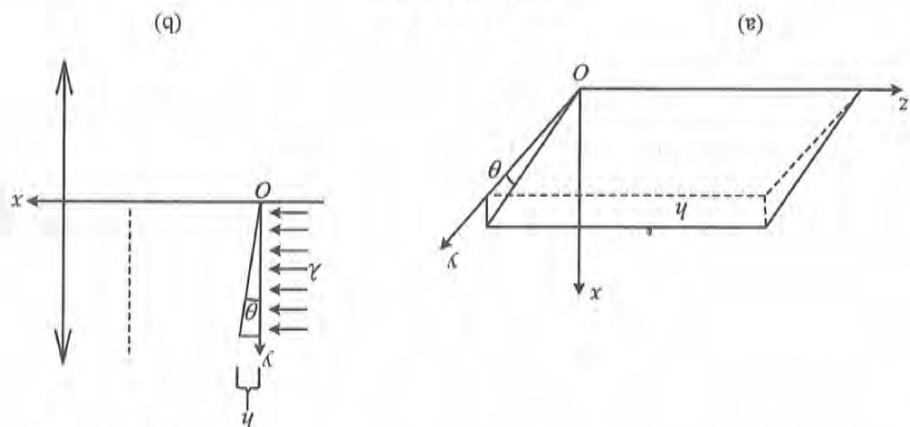


图 2.195 玻璃砖中的光线

图 2.196 坐标系



19. (30 届复赛) 一斜劈形透明介质劈尖, 尖角为 θ , 高为 h 。今以尖角顶点为坐标原点, 建立坐标系如图 2.196(a) 所示; 劈尖斜面实际上是由一系列微小台阶组成的, 在图 2.196(a) 中看来, 每一个小台阶的前侧面与 xz 平面平行, 上表面与 yz 平面平行。劈尖介质的折射率 n 随 x 而变化, $n(x) = 1 + bx$, 其中常数 $b > 0$ 。一束波长为 λ 的单色平行光沿 x 轴正方向照射劈尖; 劈尖后放置一薄凸透镜, 在劈尖与薄凸透镜之间放一挡板, 在挡板上刻有一系列与 z 方向平行、沿 y 方向排列的透光狭缝, 如图 2.196(b) 所示。入射光的波面(即与平行入射光线垂直的平面)、劈尖底面、挡板平面都与 x 轴垂直, 透镜主光轴为 x 轴。要求通过各狭缝的透射光彼此在透镜焦点处得到加强而形成亮纹。已知第一条狭缝位于 $y = 0$ 处, 物和像之间各光线的光程相等。

$$(2) \text{ 算得 } \frac{nN}{\sqrt{N^2 + n^2}} = \frac{1.52 \times 1.54}{\sqrt{1.54^2 + 1.52^2}} = 1.08, \text{ 所以总是折射率大的成分耗时较长。}$$

$$(1) \text{ 算得 } \sin i_0 = \frac{nN}{\sqrt{N^2 + n^2}} = \frac{1.38 \times 1.40}{\sqrt{1.40^2 + 1.38^2}} = 0.983, \text{ 即 } i_0 = 79.4^\circ.$$

若 $n^2 \sqrt{N^2 - \sin^2 i} > N^2 \sqrt{n^2 - \sin^2 i}$, 则可得 $i > i_0$, 即此时折射率小的成分(通常是长波成分)耗时较长。反之, $i < i_0$, 折射率大的成分(通常是短波成分)耗时较长。

$$\sin i_0 = \frac{\sqrt{N^4 n^2 - N^2 n^4}}{\sqrt{N^4 - n^4}} = nN \sqrt{\frac{N^2 - n^2}{N^4 - n^4}} = \frac{\sqrt{N^2 + n^2}}{nN}$$

这时, $n^2 \sqrt{N^2 - \sin^2 i_0} = N^2 \sqrt{n^2 - \sin^2 i_0}$, 从中解得

首先讨论时间相等的情形。

尽管在玻璃砖中光速较低, 但通过玻璃砖的时间有可能比折射率小的成分短。本题中, 折射率较大的光, 由于折射角较小, 在玻璃砖中传播的距离较小。所以, 这一成分可通过比较两种成分在玻璃砖中的光程比较传播时间。

$$\frac{\Delta T}{\Delta l} = \frac{N^2 \sqrt{n^2 - \sin^2 i}}{n^2 \sqrt{N^2 - \sin^2 i}}$$

两种成分所用时间的比值为

- (1) 求其余各狭缝的 y 坐标;
 (2) 试说明各狭缝彼此等距排列能否仍然满足上述要求。

【解】 本题中,入射平行光(实际上是平面光波)的等相位面(即波面)本来与传播方向垂直,即是图中 2.196(b)的 yz 平面,但经过劈尖后,等相位面不再与 yz 平面平行,因而在挡板处,通过不同狭缝的光具有不同的相位。这些仍沿光轴方向的光波经透镜后向透镜的右侧焦点会聚。只有相位相等或相差 2π ,才能相干叠加形成亮纹。

(1) 设想用一系列等间隔的、与 x 轴垂直的平面将劈尖分为 N 个极薄的切片,如图 2.197 所示,每个切片的厚度为 $\Delta x = \frac{h}{N}$ 。各个切片之间的折射率不等,但每个切片内部的折射率相等,从左侧数起第 i 个切片的折射率记作 n_i 。

$$n_i = 1 + bx_i = 1 + \frac{i}{N}bh$$

挡板上第 m 条缝的 y 坐标记为 y_m , y_m 处劈尖的厚度为

$$x_m = y_m \tan \theta$$

沿 x 方向通过此处光波,经过 $p = \frac{x_m}{\Delta x} = \frac{Ny_m \tan \theta}{h}$ 个切片,光程为

$$\begin{aligned} L_m &= n_1 \Delta x + n_2 \Delta x + \cdots + n_p \Delta x = \left(\sum_{i=1}^p n_i \right) \Delta x = \left(\sum_{i=1}^p 1 + \frac{i}{N}bh \right) \Delta x \\ &= \left(1 + \frac{p+1}{2} \frac{bh}{N} \right) p \Delta x = \left(1 + \frac{p+1}{2} \frac{bh}{N} \right) x_m \end{aligned}$$

与沿光轴传播的光波相比,光程差为

$$\Delta L_m = L_m - x_m = \frac{p+1}{2} \frac{bh}{N} x_m = \frac{Ny_m \tan \theta}{h} + 1 \frac{bh}{2} y_m \tan \theta$$

当切片的厚度 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $N \rightarrow \infty$, 于是有

$$\Delta L_m = \frac{Ny_m \tan \theta}{2h} \frac{bh}{N} y_m \tan \theta = \frac{b}{2} (y_m \tan \theta)^2$$

熟悉积分的考生可以直接算得光程差为

$$\Delta L = \int_0^{x_m} n dx - x_m = \int_0^{x_m} (1 + bx) dx - x_m = x_m + \frac{b}{2} x_m^2 - x_m = \frac{b}{2} x_m^2 = \frac{b}{2} (y_m \tan \theta)^2$$

由于从挡板处经透镜到其像方焦点,各列光波的光程相等,于是像方焦点处为亮纹的条件是 $\Delta L_m = (m-1)\lambda$, 即得

$$y_m = \frac{1}{\tan \theta} \sqrt{\frac{2(m-1)\lambda}{b}} \quad (1)$$

(2) 从式(1)可看出,当 $\sqrt{m-1}$ 依次取正整数 $1, 2, 3, \dots$ 时,各缝等间距。所以,只让挡板上的第 $1, 5, 10, \dots$ 狭缝打开,而其余狭缝遮挡即可。

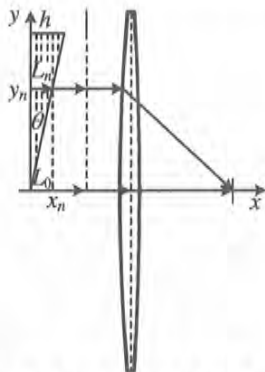
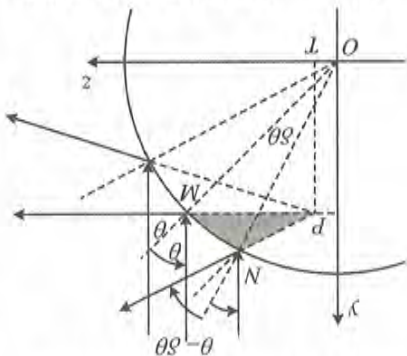


图 2.197 光程的计算

20. (30 届决赛) 亚毫米细丝直径的双光束干涉测量装置如图 2.198(a) 所示, 其中 M_1 、

图 2.199 细丝上表面反射光的虚像



足傍轴条件,因而可作适当的近似。
 等效于从上述虚像处射出。这是一个与杨氏双孔相似的干涉装置。根据题中所给条件,装置满
 反射后被相机记录。被细丝上、下表面反射的两束光,各自成一个虚像。投射到观察屏的光束,
【解】本题中,一束激光经分束器后,成为相干的两束,分别入射到细丝的上、下表面,经

(2) 求细丝的直径 d 。

光才能到达屏上的傍轴干涉区域。求经细丝上下两个表面的反射光束所成的虚像的位置。
 像的位置。(注:当 $x \sim 0$ 时, $\sin x \sim x, \cos x \sim 0$), 可以认为在细丝表面上只有以 45° 左右入射
 角附近的细光束经细丝反射到屏上,上、下两侧反射光束分别形成两个虚像。试求这两个虚
 (1) 由于细丝到观察屏的距离远大于观察屏的尺寸,因而上下两侧入射光只有 45° 入射

图 2.198(a) 干涉装置

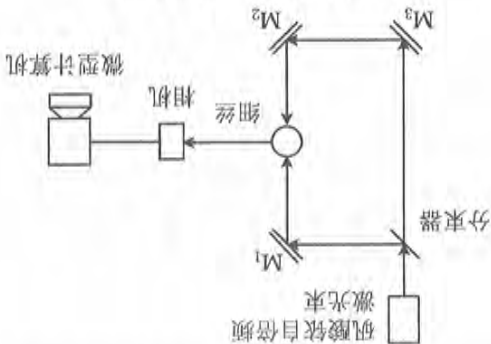
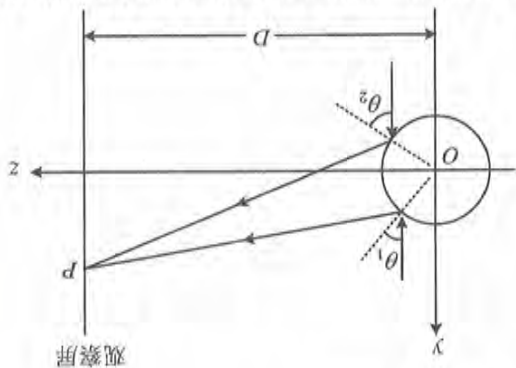


图 2.198(b) 细丝表面反射光束在观察屏上的干涉



M_2, M_3 为全反射镜,相机为 CCD(电荷耦合装置)相机。来自钕酸钡自倍频激光器的激光束被
 分束器分成两束,一束经全反射镜 M_1 反射后从上侧面入射到细丝上;另一束经全反射镜 M_2 和 M_3
 相续反射后从下侧面入射到细丝上。图 2.198(b) 给出了两条反射光线产生干涉的光路,其中
 出)沿细丝直径,指向纸面内, y 轴与入射到细丝上的光线平行(y 轴的正向向上), z 轴指向观
 察屏并与其垂直。已知光波长为 λ , 屏上干涉条纹的间距为 a 。由于 D 远大于细丝直径和观察
 屏的尺寸,可假设投射到屏上的只有非常接近平行于 z 轴的细光束。

(1) 图 2.199 给出了光束在细丝上表面反射的情形。
 细光束的入射角在 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 附近。记细丝表面 M 处法线
 OM 与 y 轴夹角为 θ , N 在 M 附近, N 处法线 ON 与 y 轴
 夹角为 $\theta - \delta\theta$, 即 ON 与 OM 间夹角为 $\delta\theta$ 。反射光线的反向
 延长线交于 P 点,即是 P 反射光束的虚像点。
 在等腰三角形 OMN 中, $\angle ONM = \angle OMN = \frac{\pi}{2} -$
 $\frac{\delta\theta}{2}$, 于是有

$$\angle PNM = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\delta\theta}{2} \right) + \theta - \delta\theta = \frac{\pi}{2} + \theta - \frac{3\delta\theta}{2}$$

$$\angle PMN = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\delta\theta}{2}\right) - \theta = \frac{\pi}{2} - \theta - \frac{\delta\theta}{2}$$

在 $\triangle PNM$ 中,可求得

$$\angle NPM = \pi - \angle PNM - \angle PMN = 2\delta\theta$$

而 $\overline{MN} = r\delta\theta$, r 为细丝的半径。根据正弦定理,得到

$$\overline{MP} = \overline{MN} \frac{\sin \angle PNM}{\sin \angle NPM} = r\delta\theta \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta - \frac{3\delta\theta}{2}\right)}{\sin(2\delta\theta)} = r\delta\theta \frac{\cos\left(\theta - \frac{3\delta\theta}{2}\right)}{\sin(2\delta\theta)}$$

而 $\cos(\theta - 3\delta\theta/2) = \cos\theta\cos(3\delta\theta/2) + \sin\theta\sin(3\delta\theta/2) \approx \cos\theta + 3\sin\theta\delta\theta/2$,有

$$\overline{MP} \approx r\delta\theta \frac{\cos\theta + 3\sin\theta\delta\theta/2}{2\delta\theta} = \frac{r}{2} \left(\cos\theta + \frac{3\delta\theta\sin\theta}{2}\right) \approx \frac{r}{2} \cos\theta$$

又因为 $\overline{QP} = \overline{MQ} - \overline{MP} = r\sin\theta - \frac{r}{2}\cos\theta$,注意 $\theta = \frac{\pi}{4}$,于是虚像点 P 的坐标为

$$\begin{cases} y_1 = r\cos\theta = \frac{d}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ z_1 = r\sin\theta - \frac{r}{2}\cos\theta = \frac{d}{4} \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

用同样的方法,可得下表面反射光的虚像坐标为

$$\begin{cases} y_2 = -\frac{\sqrt{2}d}{4} \\ z_2 = \frac{\sqrt{2}d}{8} \end{cases}$$

(2) 如图 2.200 为等效的干涉装置,两虚像到观察屏的距离为 $L = D - z_1 = D - \frac{\sqrt{2}d}{8} \approx D$,

两虚像之间的距离为 $h = y_1 - y_2 = \frac{\sqrt{2}d}{2}$ 。于是干涉条纹的间隔为

$$a = \frac{L\lambda}{h} = \frac{\sqrt{2}D\lambda}{d}$$

求得

$$d = \frac{\sqrt{2}D\lambda}{a}$$

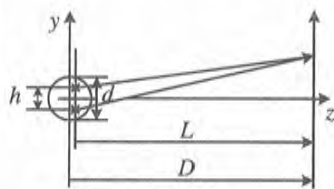


图 2.200 等效的干涉装置

第3部分 近代物理学

近代物理 1 相对论与量子论

1. (3届预赛) 1961年,有人从高度 $H=22.5\text{ m}$ 的大楼上向地面发射频率为 ν_0 的 γ 光子,并在地面测量接收到的 γ 光子的频率 ν ,测得的 ν 与 ν_0 不同,与理论预计一致。试从理论上求出 $(\nu - \nu_0)/\nu$ 的值。

【解】按相对论,粒子的能量为 $E = mc^2$,其中 $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$,是粒子的运动质量。

$$m = \frac{h\nu}{c^2}$$

光子的能量为 $E = h\nu$,所以也可以定义光子的质量。按上述关系,光子的质量为

在引力场中,光子由于具有质量,也就具有引力势能。在地面附近,其引力势能就是重力势能。所以,本题中,光子从高处射向地面,重力势能转化为动能,即

$$h\nu_0 + mgH = h\nu$$

可得

$$\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} = \frac{h\nu - h\nu_0}{h\nu_0} = \frac{mgH}{h\nu_0} = \frac{mgH}{hc^2} = \frac{gH}{c^2} = 2.5 \times 10^{-15}$$

2. (29届预赛) 已知:光子有质量,但无静止质量,在重力场中也有重力势能,若从地面上某处将一束频率为 ν 的光射向其正上方相距为 d 的空间站, d 远小于地球半径,令空间站接收到的光的频率为 ν' ,则差 $\nu' - \nu =$ _____,已知地球表面附近的重力加速度为 g 。

【解】本题与上题相似,由于在地面附近,重力加速度为常量,能量守恒关系式为

$$h\nu = h\nu' + mgd$$

$$\text{解得 } \nu' - \nu = -\frac{mgd}{hc^2}.$$

3. 有一个电子,已知它的德布罗意波(物质波)是波长为 λ 、向 x 的正方向传播的平面波,它的动量 p_x 等于多少? 它的坐标 x 如何?

【解】按照德布罗意关系,物质波动量波长之间的关系为

$$p = \frac{h}{c}$$

其中 h 为普朗克常量。

动量完全确定的粒子,等效于严格的单色波。而严格的单色波在空间是无限长的波列,因而上述电子的位置完全无法确定。这就是海森堡的不确定关系,即 $\Delta x \Delta p_x \geq \frac{h}{2}$ 。

4. (27 届决赛) (本题答案保留 2 位有效数字) 在电子显微镜中,电子束取代了光束被用来“照射”被观测物。要想分辨 $1.0 \times 10^{-10} \text{ m}$ (即原子尺度) 的结构,则电子的物质波波长不能大于此尺度。据此推测电子的速度至少需被加速到_____。如果要进一步分辨 $1.0 \times 10^{-12} \text{ m}$ 尺度的结构,则电子的速度至少需被加速到_____,且为使电子达到这一速度,所需的加速电压为_____。已知电子的静止质量 $m_0 = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$, 电子的电量 $e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$, 普朗克常量 $h = 6.7 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, 光速 $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。

【解】 电子的能量为 $E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$, 其中 m_0 为电子的静止质量, p 为电子的动量。电子的能量也可以表示为 $E = E_k + E_0$, 其中 $E_0 = m_0 c^2$, 为电子的静止能量, 而 E_k 为电子的动能。于是电子的动能与动量之间的关系也可表示为 $(E_k + E_0)^2 = p^2 c^2 + E_0^2$ 。从中解得

$$p^2 c^2 = E_k^2 + 2E_k E_0 \quad (1)$$

电子由于在电场中被加速而获得动能,若加速电压为 U , 则

$$E_k = eU$$

式(1)变为

$$(eU)^2 + 2m_0 c^2 eU - p^2 c^2 = 0 \quad (2)$$

解得 $eU = \frac{-2m_0 c^2 \pm \sqrt{(2m_0 c^2)^2 + 4p^2 c^2}}{2} = -m_0 c^2 \pm \sqrt{(m_0 c^2)^2 + p^2 c^2}$, 取正号, 得

$$eU = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + p^2 c^2} - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left[\sqrt{1 + \frac{p^2 c^2}{(m_0 c^2)^2}} - 1 \right] \quad (3)$$

而电子的德布罗意波长与动量的关系为 $\lambda = \frac{h}{p}$, 于是式(3)为

$$eU = m_0 c^2 \left[\sqrt{1 + \frac{h^2 c^2}{(m_0 c^2)^2} \frac{1}{\lambda^2}} - 1 \right] \quad (4)$$

若用原子常用的单位制, $m_0 c^2 = 511 \text{ keV}$, $hc = 1.24 \text{ nm} \cdot \text{keV}$, 则

$$\frac{h^2 c^2}{(m_0 c^2)^2} = 5.9 \times 10^{-6} \text{ nm}^2$$

所以波长若以 nm 表示, 当波长较长时, $\frac{h^2 c^2}{(m_0 c^2)^2} \frac{1}{\lambda^2} \ll 1$, 则近似有

$$\begin{aligned} eU &\approx m_0 c^2 \left[1 + \frac{h^2 c^2}{(m_0 c^2)^2} \frac{1}{2\lambda^2} - 1 \right] \\ &= m_0 c^2 \frac{h^2 c^2}{(m_0 c^2)^2} \frac{1}{2\lambda^2} = \frac{511 \times 5.9 \times 10^{-6}}{2\lambda^2} = \frac{1.5 \times 10^{-3}}{\lambda^2} \text{ keV} \end{aligned}$$

所以, 若 $\lambda = 1.0 \times 10^{-10} \text{ m} = 0.10 \text{ nm}$, $\frac{h^2 c^2}{(m_0 c^2)^2} \frac{1}{\lambda^2} = 5.9 \times 10^{-4}$, 可采用上述近似。加速电压 U

质子过程中的能量守恒,可算得当时的温度为

每个质子和反质子的能量均为 $E_p = M_p c^2$, 每个光子的平均能量为 $\bar{\epsilon} = \frac{3RT}{N_A}$, 根据光子转化为

$$\gamma + \gamma \rightarrow p + \bar{p}$$

【解】 光子产生质子的过程可以表示为

5. 在热力学温度 T 时,电磁场的光子平均能量约为 $3RT/N_A$, R 为普适气体常量, N_A 为阿伏伽德罗常数。假设在宇宙演化的初期,光子间的碰撞能够产生质子、反质子(即一对光子经过碰撞而转变成一个质子和一个反质子)。试估计当时温度(2位有效数字)。

一般情况下,若 $\frac{pc^2}{m_0 c^2} < 10^2$, 则 $\left(\frac{pc}{m_0 c^2}\right)^2 < 10^{-4}$, 不考虑相对论效应是合理的。

用经典动能 $\frac{p^2}{2m_0}$ 表示。否则,就应当考虑相对论效应。

所以,如果 $pc \ll m_0 c^2$, 则上述公式中从第二项起,都比第一项小得多,这时粒子的动能可

其中 $\frac{p^2}{2m_0}$ 就是粒子的经典动能。

$$= m_0 c^2 \left[1 + \frac{2m_0^2 c^2}{p^2} - \frac{1}{8} \left(\frac{m_0^2 c^2}{p^2} \right)^2 + \dots - 1 \right] = \frac{2m_0}{p^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{m_0^2 c^2}{p^2} \right)^2 \frac{p^2}{2m_0} + \dots$$

$$E_k = E - E_0 = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} - m_0 c^2 = m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}} - m_0 c^2$$

粒子的动能为

用经典的表达式。这一问题可以按以下方式处理。

【点评】 经常令学生困扰的一个问题是在什么情况下要考虑相对论效应,在什么情况下可

$$v = c \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2} = 0.92c$$

根据相对论 $E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, 可得

$$E = E_k + E_0 = (511 + 831) \text{ keV} = 1342 \text{ keV}$$

电子的动能为 $E_k = eU = 831 \text{ keV}$, 总能量为

即加速电压为 $U = 831 \text{ kV}$ 。

$$eU = m_0 c^2 \left[\sqrt{1 + \frac{h^2 c^2}{(m_0 c^2)^2} \lambda^2} - 1 \right] = 511 \times (\sqrt{1 + 5.9} - 1) \text{ keV} = 831 \text{ keV}$$

不能采用上述近似公式,于是

若 $\lambda = 1.0 \times 10^{-12} \text{ m} = 1.0 \times 10^{-3} \text{ nm}$, 由于波长很短, $\frac{h^2 c^2}{(m_0 c^2)^2} \lambda^2 = \frac{5.9 \times 10^{-5}}{(1.0 \times 10^{-3})^2} = 5.9$,

$$v_e = \sqrt{\frac{2eU}{m_0}} = \sqrt{\frac{2 \times 0.15 \text{ keV}}{511 \text{ keV}}} c = 0.024c$$

$= \frac{1.5 \times 10^{-3}}{0.1^2} \text{ keV} = 0.15 \text{ keV}$ 。由于这时可以不考虑相对论效应, $\frac{1}{2} m_0 v_e^2 = eU$, 电子的速度为

$$T = \frac{N_A M_p c^2}{3R} = 3.7 \times 10^{12} \text{ K}$$

6. (13 届预赛) 一台二氧化碳气体激光器发出的激光功率为 $P = 1000 \text{ W}$, 射出的光束截面积为 $A = 1.00 \text{ mm}^2$, 试问:

(1) 当该光束垂直入射到一物体平面上时, 可能产生的光压的最大值为多少?

(2) 这束光垂直射到温度 T 为 273 K , 厚度 d 为 2.00 cm 的铁板上, 如果有 80% 的光束能量被激光所照射到的那一部分铁板所吸收, 并使其融化成与光束等截面积的直圆柱孔, 这需要多少时间?

已知, 对于波长为 λ 的光束, 其每一个光子的动量为 $k = h/\lambda$, 式中 h 为普朗克常量, 铁的有关参数为: 热容量 $C = 26.6 \text{ J} \cdot (\text{mol} \cdot \text{K})^{-1}$, 密度 $\rho = 7.90 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, 熔点 $T_M = 1798 \text{ K}$, 熔解热 $L_M = 1.49 \times 10^4 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$, 摩尔质量 $\mu = 56 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ 。

【解】 光子具有动量, 光子在界面上反射的过程中, 方向变化, 动量改变, 这是两者之间有相互作用的冲量的结果。由于反射光的频率不变, 所以反射光子与界面是完全弹性碰撞。单个光子施于界面的冲量为

$$i = 2p = \frac{2h}{\lambda} = \frac{2h\nu}{c} \quad (1)$$

设激光光束中光子的体积密度为 n , 如果光束截面为 A , 则如图 3.1 所示, dt 时间内通过该截面的光子数为 $dN = ncAdt$ 。每个光子的能量为 $\epsilon = h\nu$, 则 dt 时间内激光器所输出的能量为 $dW = \epsilon dN = nh\nu c A dt$, 激光的输出功率为

$$P = \frac{dW}{dt} = nh\nu c A \quad (2)$$

即光束中单位体积中的光子数为

$$n = \frac{1}{h\nu c} \frac{P}{A} \quad (3)$$

式中 $\frac{P}{A}$ 是单位时间内通过单位截面的能量, 就是光束的功率密度, 也就是光强。

dt 时间内, dN 个光子与界面碰撞, 若 100% 被反射, 这些光子施于界面的冲量为

$$dI = i dN = 2nh\nu A dt$$

界面所受到的冲力为

$$F = \frac{dI}{dt} = 2nh\nu A \quad (4)$$

界面的压强为

$$L = \frac{F}{A} = 2nh\nu = \frac{2}{c} \frac{P}{A} = 6.67 \text{ Pa}$$

这就是入射光子全部被反射时, 界面所受到的最大压强。

(2) 若光被吸收, 光子的能量转化为介质的内能, 使其升温融化。若光的吸收率为 η , 则 τ 时间内, 介质获得的能量(热量)为

$$Q = \eta P \tau$$

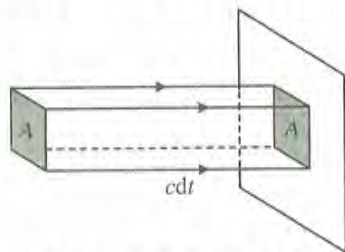


图 3.1 dt 时间内通过截面的光束的体积

i 和 i' , 则 $\sin i = \frac{r}{l}$, $n_0 = 1$, 根据折射定律, 可得

但方向不同, 所以动量变化。首先计算光子动量的改变。如图 3.3 所示, 设光线在左侧球面上的入射角和折射角分别为

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{c}$$

子动量的大小均为

【解】按照德布罗意物质波的公式, 动量与波长之间的关系为 $p = \frac{h}{\lambda}$, 出射光子与入射光

变, 意味着光子的动量改变, 这是光子与介质球相互作用的结果。

【分析】光有波粒二象性, 激光束是光子的束流, 而光子具有动量, 折射引起光子方向改

图 3.2 细激光束通过透明小球

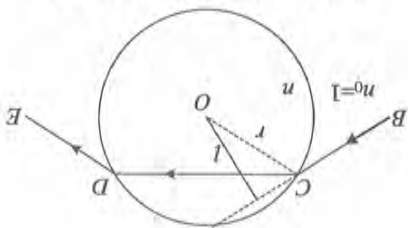
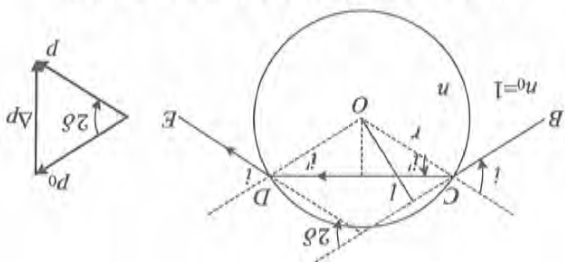


图 3.3 光束方向的变化及光子动量的改变



8. (17 届预赛) 如图 3.2 所示, 在真空中有一个折射率为 n ($n > n_0$, n_0 为真空的折射率), 半径为 r 的质地均匀的小球, 频率为 ν 的细激光束在真空中沿直线 BC 传播, 直线 BC 与小球心 O 的距离为 l ($l < r$), 光束于小球体表面的 C 点经折射进入小球(小球成为光传播的媒质), 并于小球表面的 D 点又经折射进入真空。设激光束的频率在上述两次折射后保持不

变。求在两次折射过程中激光束中一个光子对小球作用的平均力的大小。

$$F = PS = \frac{2lS}{c} = \frac{2 \times 1.37 \times 10^6 \times 1.0 \times 10^8}{3 \times 10^8} N = 9.1 \times 10^5 N$$

于是可以算得光帆所受压力为

就是该处太阳辐射的功率密度, 也就是光强。则参照上题的分析, 光强 $I = \frac{A}{P}$, 光压 $P = \frac{c}{2l}$,

【解】题中所给数据是单位时间内通过垂直于太阳辐射方向的单位面积的辐射能量, 也

光帆对太阳光能全部反射(不吸收), 则光帆所受光的压力约等于 $\times 10^3 \text{ J} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$, 设平面光帆的面积为 $1.0 \times 10^6 \text{ m}^2$, 且其平面垂直于太阳辐射方向, 又设均距离)处, 已知该处单位时间内通过垂直于太阳辐射方向的单位面积的辐射能量 $E = 1.37$ 压, 可使太空船在太空中飞行。设想一光帆某时刻位于距离太阳为 1 天文单位(即日地间的平

7. (28 届预赛) 光帆是装置在太空船上的一个面积很大但很轻的帆, 利用太阳光对帆的光

$$\tau = \frac{Q}{\eta P} = \frac{Addp}{\eta P} [C(T_M - T) + L_M] = 0.192 \text{ s}$$

生成一个圆洞所需的时间为

$$\sin i' = n \sin i = \frac{nl}{r}$$

光线的偏转角 $2\delta = 2(i - i')$, 动量的改变量

$$\Delta p = 2p_0 \sin \delta = \frac{2h\nu \sin \delta}{c}$$

光子在球中经历的时间, 也就是光子与小球相互作用的时间为

$$\Delta t = \frac{CD}{v} = \frac{2nr \cos i'}{c} = \frac{2nr \sqrt{1 - \sin^2 i'}}{c} = \frac{2r \sqrt{n^2 - n^2 \sin^2 i'}}{c} = \frac{2r \sqrt{n^2 - \sin^2 i}}{c}$$

光子所受到的冲量为 $I = F\Delta t = \Delta p$ 。

于是一个光子所受到的作用力为

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\frac{2h\nu \sin \delta}{c}}{\frac{2r \sqrt{n^2 - \sin^2 i}}{c}} = \frac{h\nu \sin \delta}{r \sqrt{n^2 - \sin^2 i}}$$

利用变换关系 $\cos i = \sqrt{1 - \sin^2 i}$, $\cos i' = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}{n}$, $\sin i' = \frac{\sin i}{n}$, 得到

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \sin(i - i') = \sin i \cos i' - \cos i \sin i' = \frac{\sin i \sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \sin i \sqrt{1 - \sin^2 i}}{n} \\ &= \frac{l}{nr} \left[\sqrt{n^2 - \left(\frac{l}{r}\right)^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{l}{r}\right)^2} \right] = \frac{l}{nr^2} (\sqrt{n^2 r^2 - l^2} - \sqrt{r^2 - l^2}) \end{aligned}$$

则

$$F = \frac{h\nu}{r} \frac{\frac{l}{nr^2} (\sqrt{n^2 r^2 - l^2} - \sqrt{r^2 - l^2})}{\frac{1}{r} \sqrt{n^2 r^2 - l^2}} = \frac{lh\nu}{nr^2} \left(1 - \sqrt{\frac{r^2 - l^2}{n^2 r^2 - l^2}} \right)$$

9. (12届决赛) 一理想的凸透镜, 它容许入射光完全透过, 此透镜直径 $D = 10 \text{ cm}$, 焦距 $f = 15 \text{ cm}$, 水平放置, 四束激光竖直方向对称地入射到透镜靠边缘处。已知四束激光总功率为 $P = 1.2 \text{ W}$, 求激光对透镜之作用力。已知光子动量 $p = E/c$, 其中 E 为光子能量, c 为光速。

【分析】与透镜光轴平行的激光束, 经过透镜后会聚到其焦点上, 光束的方向改变, 光子的动量改变, 这是透镜给予光子冲量的结果。

【解】如图 3.4 所示, 经过透镜后, 光束的方向与光轴之间的夹角为

$$\theta = \arctan \frac{D}{2f}$$

光子沿 z 方向的动量变为

$$p_z = p \cos \theta = \frac{h\nu}{c} \frac{f}{\sqrt{f^2 + (D/2)^2}} = \frac{h\nu}{c} \frac{2f}{\sqrt{4f^2 + D^2}}$$

由于四束激光对称分布, 所以与 z 垂直的方向上, 动量相互抵消, 作用力沿 z 方向。

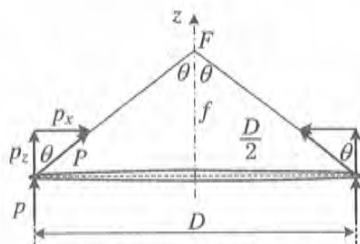


图 3.4 光子动量的变化

激光的功率可表示为

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\Delta n h \nu}{\Delta t}$$

其中 Δn 为 Δt 时间内通过透镜的光子数。

每个光子在 z 方向的动量改变量为 $p_z - p$, 施于透镜的冲量为 $i = p - p_z$, 方向沿 $+z$ 。作

用力为

$$F = \frac{\Delta n i}{\Delta t} = \frac{P}{h\nu} p (1 - \cos \theta) = \frac{c}{P} \left[1 - \frac{\sqrt{4f^2 + D^2}}{2f} \right]$$

10. 爱因斯坦的“等效原理”指出,在不十分大的空间范围和时间间隔内,惯性系中引力作用下的物理规律与没有引力但有适当加速度的非惯性系中的物理规律是相同的。现在研究以下问题。

(1) 试从光量子的观点(即把光子看作能量为 $h\nu$ 的粒子)出发,讨论在地面附近的重力场中,由地面向离地面的距离为 L 处的接收器发射频率为 ν_0 的激光与接收器接收到的频率 ν 之

间的关系。

(2) 假设地球对物体没有引力作用,现在以加速度 a 沿直线做匀加速运动的箱子中做一假

想实验。在箱尾和箱头处分别安装一适当的激光发射器和激光接收器,两者间的距离为 L , 现

接收器所到的激光周期 T_0 。

(3) 要使上述两个问题所得到的结论是完全等价的。则第(2)小题中的箱子的加速度的大

小和方向应如何?

【解】(1) 参考第1题和第2题,由于 $h\nu_0 = h\nu + \frac{h\nu}{c} gL$, 可得

$$(1) \quad \nu = \frac{1 + \frac{gL}{c^2}}{\nu_0}$$

(2) 对于与箱子一起运动的观察者来说,由于接收器相对于光源是静止的,所以接收到的

光波的周期与发射出的光波的周期是一样的。但对于地面的观察者来说,箱子是一个非惯性

系,接收器收到光波的时刻比发射器发出该列光波的时刻要滞后,因而对同一列光波而言,接收

器的速度与发射器的速度不相同,所以接收器测量到的光波的频率(周期)与发射器所发出的光

波的频率(周期)有所不同。严格来说,非惯性系中的运动要采用广义相对论处理,但按等效原

理,可以在题设的情形中利用惯性系中的规律对其进行分析和处理。

对地面的观察者来说,光速为 c , 但光相对于接收器的速度并不是 c 。

设观察者看到 0 时刻箱子开始运动,此时发射器位于 $x=0$ 的位置,接收器位于 $x=L$ 的位

置。发射器发出的光波周期为 T_0 , 则波列上两个相邻波峰发射的时刻可分别设为 $t_1=0$ 和

$t_2 = T_0$ 。

于是,如图 3.5 所示,上述两波峰到达接收器的时刻 t_3 和 t_4 分别满足条件

$$(2) \quad ct_3 = L + \frac{1}{2}at_3^2$$

$$\frac{1}{2}at_2^2 + c(t_4 - t_2) = L + \frac{1}{2}at_4^2 \quad (3)$$

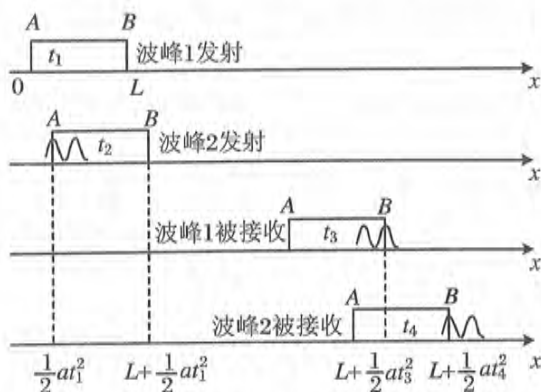


图 3.5 两个相邻波峰发射与接收的时刻和位置

由式(2)可解得 $t_3 = \frac{2c \pm \sqrt{4c^2 - 8aL}}{2a}$ 。由于箱子的速度不可能超过光速,所以实际上只有一个解有实际的意义,所以

$$t_3 = \frac{2c - \sqrt{4c^2 - 8aL}}{2a} = \frac{c - \sqrt{c^2 - 2aL}}{a} \quad (4)$$

式(3)可化为 $at_4^2 - 2ct_4 + 2L + 2ct_2 - at_2^2 = 0$,解为

$$t_4 = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - a(2L + 2ct_2 - at_2^2)}}{a}$$

同样取“-”号,得到

$$t_4 = \frac{c - \sqrt{c^2 - a(2L + 2ct_2 - at_2^2)}}{a} \quad (5)$$

地面上的观察者看到两个相邻波峰通过接收器的时间间隔,也就是接收器处光波的周期为

$$\begin{aligned} T = t_4 - t_3 &= \frac{c - \sqrt{c^2 - a(2L + 2ct_2 - at_2^2)}}{a} - \frac{c - \sqrt{c^2 - 2aL}}{a} \\ &= \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - \frac{2L}{a}} - \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - \frac{2L}{a} - \frac{2ct_2}{a} + t_2^2} = \frac{c}{a} \left(\sqrt{1 - \frac{2aL}{c^2}} - \sqrt{1 - \frac{2aL}{c^2} - \frac{2at_2}{c} + \frac{a^2 t_2^2}{c^2}} \right) \\ &\approx \frac{c}{a} \left(\sqrt{1 - \frac{2aL}{c^2}} - \sqrt{1 - \frac{2aL}{c^2} - \frac{2at_2}{c}} \right) = \frac{c}{a} \sqrt{1 - \frac{2aL}{c^2}} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2at_2}{1 - \frac{2aL}{c^2}}} \right] \\ &\approx \frac{c}{a} \left(1 - \frac{aL}{c^2} \right) \frac{\frac{at_2}{c}}{1 - \frac{2aL}{c^2}} \approx \frac{c}{a} \left(1 - \frac{aL}{c^2} \right) \frac{at_2}{c} \left(1 + \frac{2aL}{c^2} \right) = \left(1 - \frac{aL}{c^2} \right) \left(1 + \frac{2aL}{c^2} \right) t_2 \\ &= \left[1 + \frac{aL}{c^2} - 2 \left(\frac{aL}{c^2} \right)^2 \right] t_2 \approx \left(1 + \frac{aL}{c^2} \right) t_2 \end{aligned}$$

即

$$\text{解得 } \lambda_2 = \frac{c}{\nu_2} = 3.8 \times 10^{-7} \text{ m.}$$

-1.43 V。

即 $\nu_2 = \nu_1 + \frac{e(U_{m1} - U_{m2})}{h}$ 。其中, $U_{m1} = -0.71 \text{ V}$, $\nu_1 = 3 \times 10^{16} / (4.91 \times 10^{-7}) \text{ Hz}$, $U_{m2} =$

$$h(\nu_1 - \nu_2) = e(U_{m2} - U_{m1})$$

【解】如上题所述,遏止电压与入射光子频率的关系为 $h\nu = h\nu_0 - eU_m$, 于是有

普朗克常量 $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ 。

12. (11届预赛) 一光电管阴极对于波长 $\lambda = 4.91 \times 10^{-7} \text{ m}$ 的入射光, 发射光电子的遏止电压为 0.71 V , 当入射光的波长为多少时, 其遏止电压变为 1.43 V ? (电子电量 $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$,

图 3.6 频率与电压

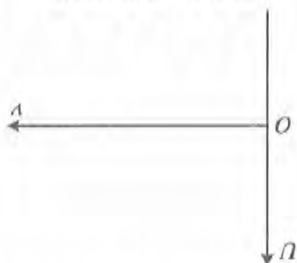
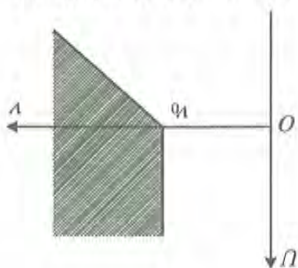


图 3.7 产生光电流的区域



在 $\nu > \nu_0$ 且两极间电压大于 U_m 的区域中都会出现光电流, 如图 3.7 所示。

$$U_m = -\frac{e}{h}(\nu - \nu_0)$$

所以有

$$h\nu = h\nu_0 - eU_m$$

光电效应实验中, 在两极间加上电压, 则当反向电压使光电流截止时, $eU_m = -E_k$, 于是

题中的极限频率为使电子透出金属表面的人射光的最小频率, 则 $W = h\nu_0$ 。

$$h\nu = W + E_k$$

对它的束缚 W 后从金属表面逸出, 并具有一定的动能 E_k 。三者之间的关系为

【解】按照爱因斯坦对光电效应的解释, 金属中的电子吸收能量为 $h\nu$ 的光子, 并克服金属区域(用斜线表示)。

11. (10届预赛) 图 3.6 中纵坐标为光电效应实验中所加电压(U), 横坐标为光子的频率(ν), 若某金属的极限频率为 ν_0 , 普朗克常量为 h , 电子电量为 e , 试在图中画出能产生光电流的

即箱子以竖直向上的加速度 g 运动即可。

(3) 将式(6)中的周期换用频率表示, 则 $\nu_0 = \left(1 + \frac{aL}{c^2}\right)\nu$, 即 $\nu = \frac{\nu_0}{1 + \frac{aL}{c^2}}$ 。与式(1)比较, $a = g$ 。

$$(6) \quad T = \left(1 + \frac{aL}{c^2}\right)T_0$$

13. (25 届预赛) 光子不仅具有能量, 而且还具有动量, 频率为 ν 的光子的能量为 $h\nu$, 动量 $h\nu/c$, 式中 h 为普朗克常量, c 为光速。光子射到物体表面时将产生压力作用, 这就是光压。设想有一宇宙尘埃, 可视为一半径 $R = 10.0 \text{ cm}$ 的小球, 其材料与地球的不同, 它到太阳的距离与地球到太阳的距离相等。试计算太阳辐射对此尘埃作用力的大小与太阳对它万有引力大小的比值。假定太阳辐射射到尘埃时被尘埃全部吸收。已知: 地球绕太阳的运动可视为圆周运动, 太阳辐射在单位时间内射到位于地球轨道处的、垂直于太阳光线方向的单位面积上的辐射能 $S = 1.37 \times 10^3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$, 地球到太阳中心的距离 $r_{sc} = 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$, 地球表面附近的重力加速度 $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, 地球半径 $R_e = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$, 万有引力常量 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ 。

【分析】 本题既要用到光学知识, 也要用到力学知识。

【解】 记单位时间内射到小球表面的光子数为 n , 则小球所受到的太阳辐射的功率密度, 也就是太阳辐射在单位时间内射到位于地球轨道处的、垂直于太阳光线方向的单位面积上的辐射能 $S = \frac{nh\nu}{\pi R^2}$, 如图 3.8 所示。

每个光子的动量为 $p = \frac{h\nu}{c}$, 光子全部被吸收, 所以小球所受的作用力为

$$F = np = \frac{nh\nu}{c} = \frac{nh\nu}{\pi R^2} \frac{\pi R^2}{c} = \frac{\pi R^2}{c} S$$

设该小球的质量为 m , 地球的质量为 m_e , 两者的密度均为 ρ , 则

$$g' = G \frac{m}{R^2} = \frac{4\pi R G \rho}{3} = \frac{R}{R_e} G \frac{m_e}{R_e^2} = g \frac{R}{R_e}$$

即

$$Gm = g \frac{R^3}{R_e}$$

地球绕太阳运动的周期为 $T = \frac{2\pi r_{sc}}{v_e} = \frac{2\pi r_{sc}}{\sqrt{GM/r_{sc}}}$, 太阳的质量可表示为 $M = \frac{4\pi^2 r_{sc}^3}{GT^2}$, 小球所受太阳的万有引力为

$$f = G \frac{Mm}{r_{sc}^2} = g \frac{R^3}{R_e} \frac{4\pi^2 r_{sc}}{GT^2}$$

于是两者之比为

$$\frac{F}{f} = \frac{\frac{\pi R^2}{c} S}{g \frac{R^3}{R_e} \frac{4\pi^2 r_{sc}}{GT^2}} = 1.0 \times 10^{-6}$$

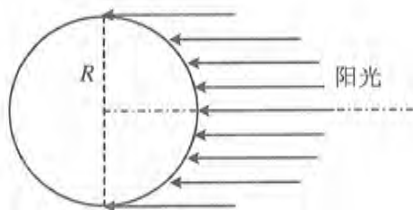


图 3.8 小球所受太阳的辐射

14. (19 届复赛) 在相对于实验室静止的平面直角坐标系 S 中, 有一个光子, 沿 x 轴正方向射向一个静止于坐标原点 O 的电子。在 y 轴方向探测到一个散射光子。已知电子的静止质量为 m_0 , 光速为 c , 入射光子的能量与散射光子的能量之差等于电子静止能量的 $1/10$ 。

(1) 试求电子运动速度大小 v ; 电子运动的方向与 x 轴的夹角 θ ; 电子运动到离原点距离为 L_0 (作为已知量) 的 A 点所经历的时间 Δt 。

$$t' = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{t}$$

而在地面参照系中,相应的时间

$$t = 2.0 \times 10^{-6} \times \ln \frac{5}{100} \text{ s}$$

经历的时间为

【解】根据放射性衰变的规律 $t = \tau \ln \frac{N(0)}{N(t)}$, 可算出在 μ 子自身的参照系中到达地面所

地磁场对 μ 子运动的影响。若能达到地面的 μ 子数为原来的 5%, 试估算 μ 子产生处相对于地面的高度 h 。不考虑重力和时刻剩余的粒子数为 $N(t)$, 则有 $N(t) = N(0)e^{-t/\tau}$, 式中 τ 为相对该惯性系粒子的平均寿命。下运动并衰变。根据放射性衰变定律, 相对给定惯性参考系, 若 $t = 0$ 时刻的粒子数为 $N(0)$, t 射线与大气在高空某处发生核反应产生一批 μ 子, 以 $v = 0.99c$ 的速度 (c 为真空中的光速) 向

15. (21 届复赛) μ 子在相对自身静止的惯性参考系中的平均寿命 $\tau_0 \approx 2.0 \times 10^{-6} \text{ s}$ 。宇宙

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = L_0 \sqrt{1 - \frac{21}{121}} = \frac{10}{11} L_0$$

(2) 根据洛伦兹变换, 在观察者看来, OA 的长度为

$$\Delta t = \frac{L_0}{v} = \frac{11L_0}{\sqrt{21}c}$$

散射电子运动到 A 点所经历的时间为

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{v_x}{v'} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{v}{v'} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{1}{10} \right)$$

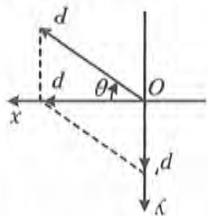
电子运动方向与 x 轴夹角为

$$v = c \sqrt{1 - \left[\frac{m_0 c^2}{m_0 c^2 + h(\nu - \nu')} \right]^2} = c \sqrt{1 - \left(\frac{10}{11} \right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{11} c$$

其中 $h(\nu - \nu') = \frac{1}{10} m_0 c^2$, $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ 。由此解得电子的速度为

$$\left\{ \begin{aligned} h\nu + m_0 c^2 &= h\nu' + mc^2 \\ \frac{c}{h\nu'} &= m v_y \\ \frac{c}{h\nu} &= m v_x \end{aligned} \right.$$

图 3.9 散射的动量



恒, 即

【解】(1) 如图 3.9 所示, 散射过程中, 系统的动量守恒、能量守恒、能量守

恒, 即

【分析】将光作为粒子, 光子具有能量和动量。其能量为 $h\nu$, 动量为 $\frac{h\nu}{c}$ 。光子在与其他粒

子散射的过程中, 遵循基本的守恒律, 即能量守恒、动量守恒。

(2) 在电子以(1)中的速度 v 开始运动时, 一观察者 S' 相对于坐标系 S 也以速度 v 沿 S 中

电子运动的方向运动(即 S' 相对于电子静止), 试求 S' 测出的 OA 的长度。

因而高度为

$$h = vt' = 1.26 \times 10^4 \text{ m}$$

16. (20 届决赛) 设地球是一个半径为 6370 km 的球体。在赤道上空离地面 1 千多公里处和赤道共面的圆与赤道形成的环形区域内, 地磁场可看作是均匀的, 其磁感强度为 $B = 3.20 \times 10^{-6} \text{ T}$ 。某种带电宇宙射线粒子, 其静质量为 $m_0 = 6.68 \times 10^{-27} \text{ kg}$, 其电荷量为 $q = 3.20 \times 10^{-19} \text{ C}$, 在地球赤道上空的均匀地磁场中围绕地心做半径为 $R = 7370 \text{ km}$ 的圆周运动。

已知在相对论中只要作用于粒子的力 F 的方向始终与粒子运动的速度 v 的方向垂直, 则运动粒子的质量 m 和加速度 a 与力 F 的关系仍为 $F = ma$, 但式中的质量 m 为粒子的相对论质量。问:

(1) 该粒子的动能为多大?

(2) 该粒子在圆形轨道上运动时与一个不带电的静质量为 $m_2 = 4m_0$ 的静止粒子发生碰撞, 并被其吸收形成一个复合粒子, 试求复合粒子的静质量 m_1 。

【解】 该粒子所受的洛伦兹力为 $F = qvB$, 绕地心做匀速圆周运动, 则 $\frac{mv^2}{R} = qvB$, 而质量

为 $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, 所以有 $\frac{m_0 v}{qBR} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ 。解得

$$v = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{m_0 c}{qBR}\right)^2}} = 2.9 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

动能为

$$T = mc^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right] = 1.74 \times 10^{-9} \text{ J}$$

(2) 带电粒子的能量为 $E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, 动量为 $p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ 。

不带电粒子静止能量为 $E_{20} = m_2 c^2 = 4m_0 c^2$, 初始动量为 0。复合后, 设复合粒子的静止质量为 m_1 , 动量为 p_1 , 速度为 v_1 , 则 $p_1 = \frac{4m_0 v_1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}$ 。

两粒子复合过程中, 能量守恒, 动量也守恒, 即

$$4m_0 c^2 + \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{m_1 c^2}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} \quad (1)$$

$$\frac{4m_0 v_1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (2)$$

由式(2)解得

$$v_1 = \frac{v}{1 + 4\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 1.43 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

由式(1)解得

(2) 在地面参考系中,车厢的长度为 $l_1 = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$,于是可得

$$t' = \frac{x'_A - x'_0}{v} = \frac{x_A \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - Rl}{v}$$

而在车厢参考系中,初始时刻挡板到光源的距离为 $x'_A = x_A \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ 。则有

时将光束挡住,则一定有 $\tan \Delta\theta_0 = \frac{x_0}{R} = \frac{r}{R}l$ 。

挡板相对于车厢以速度 $-v$ 沿 x 轴方向运动,因而其半径不变,若挡板到光源的距离为 x_0

(1) 在车厢参考系中,由于光源和圆孔都是静止的,上述发散角为 $\tan \Delta\theta_0 = \frac{l}{R}$ 。

图 3.11 光束的发散角

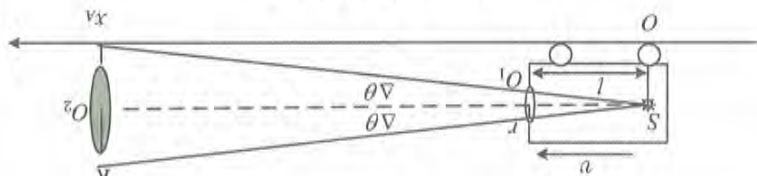


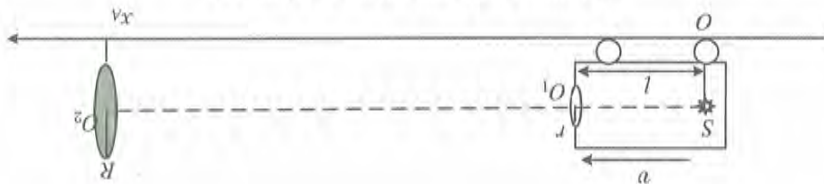
图 3.11 所示。

【解】点光源 S 发出的光束,由于受到车厢壁上圆孔的限制,而具有确定的发散角 $2\Delta\theta$,如

(2) 地面参考系中(所测出的)刚出现这种情况的时刻。

(1) 车厢参考系中(所测出的)刚出现这种情况的时刻。

图 3.10 高速运动中点光源发出光束



17. (22届复赛) 封闭的车厢中有一点光源 S ,在距光源 l 处有一半径为 r 的圆孔,其圆心为 O_1 ,光源一直在发光,并通过圆孔射出。车厢以高速 v 沿固定在水平地面上的 x 轴正方向匀速运动,如图 3.10 所示。某一时刻,点光源 S 恰位于 x 轴的原点 O 的正上方,取此时时刻作为车厢参考系与地面参考系的时间零点。在地面参考系中坐标为 x_A 处放一半径为 R ($R > r$) 的不透光的圆形挡板,板面与圆孔所在的平面都与 x 轴垂直。板的圆心 O_2 、 S 、 O_1 都等高,起始时刻经圆孔射出的光束会有部分从挡板周围射到挡板后面的大屏幕(图中未画出)上。由于车厢在运动,将会出现挡板将光束完全遮住,即没有光射到屏上的情况。不考虑光的衍射。试求:

$$m_1 = m_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left(4 + \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) = 46.4 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$t = \frac{x_A - x_0}{v} = \frac{x_A - \frac{R}{r}l\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{v}$$

18. (23 届复赛) 串列静电加速器是加速质子、重离子进行核物理基础研究以及核技术应用研究的设备,图 3.12 是其构造示意图。 S 是产生负离子的装置,称为离子源;中间部分 N 为充有氮气的管道,通过高压装置 H 使其对地有 $5.00 \times 10^6 \text{ V}$ 的高压。现将氢气通入离子源 S , S 的作用是使氢分子变为氢原子,并使氢原子黏附上一个电子,成为带有一个电子电量的氢负离子。氢负离子(其初速度为 0)在静电场的作用下,形成高速运动的氢负离子束流,氢负离子束射入管道 N 后将与氮气分子发生相互作用,这种作用可使大部分的氢负离子失去黏附在它们上面的多余的电子而成为氢原子,又可能进一步剥离掉氢原子的电子使它成为质子。已知氮气与带电粒子的相互作用不会改变粒子的速度。质子在电场的作用下由 N 飞向串列静电加速器的终端靶子 T 。试在考虑相对论效应的情况下,求质子到达 T 时的速度 v 。

已知:电子电荷量 $q = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$,质子的静止质量 $m_0 = 1.673 \times 10^{-27} \text{ kg}$ 。

【解】 在 SN 段,负离子被加速;在 NT 段,正离子被加速。由于电子的质量远小于质子的质量,此处忽略。到达 T 的质子的能量增加为 $2qV$,其中 V 为 H 相对于地的电势。

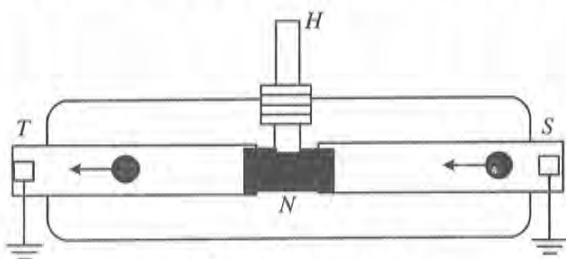


图 3.12 串列静电加速器

按照相对论力学,上述过程中能量的变化可表示为

$$mc^2 = m_0c^2 + 2qV$$

而 $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ 。于是可得质子的速度为

$$v = 4.34 \times 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

19. (26 届复赛) 两惯性系 S' 与 S 初始时刻完全重合,前者相对后者沿 x 轴正向以速度 v 高速运动。作为光源的自由质点静止于 S' 系中,以恒定功率 P 向四周辐射(各向同性)光子。在 S 系中观察,辐射偏向于光源前部(即所谓的前灯效应)。

(1) 在 S 系中观察, S' 系中向前的那一半辐射将集中于光源前部以 x 轴为轴线的圆锥内。求该圆锥的半顶角 α 。已知相对论速度变换关系为

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v / c^2}$$

式中 u_x 与 u'_x 分别为 S 与 S' 系中测得的速度 x 分量, c 为光速。

$$P_1 = \frac{\Delta M}{\Delta t} c^2 = \left[\frac{\Delta M_0}{\Delta t'} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\frac{c^2}{v^2}} \right] \left[\frac{\Delta t'}{c^2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right] = P$$

所以

$$\Delta M = \frac{\Delta M_0}{\Delta t'} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\frac{c^2}{v^2}}, \quad \Delta t = \frac{\Delta t'}{c^2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

而在 S 系中,光源运动, $M = \frac{M_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, 于是辐射功率为 $P_1 = \frac{\Delta M}{\Delta t} c^2$ 。由于变换关系为

$$P = \frac{\Delta E'}{\Delta t'} = \frac{\Delta M_0}{\Delta t'} c^2$$

在 S' 系中,光源静止,于是辐射功率为

(2) 辐射的能量来自于光源,按照爱因斯坦质能关系,光源能量的变化为 $\Delta E = \Delta M c^2$ 。

即 $\alpha = \arccos \frac{c}{v}$ 。

$$\cos \theta = \frac{\cos \frac{\pi}{2} + \frac{v}{c}}{\frac{c}{v} + \frac{1 + \frac{c}{v} \cos \frac{\pi}{2}}{c}} = \frac{v}{c}$$

在 S' 系中向前辐射的一半光子,与 x 轴的最大夹角为 $\theta'_{\max} = \frac{\pi}{2}$, 该角在 S 系中的大小为

据此同样可得到上述结果。

$$c \cos \theta = \frac{c \cos \theta' + v}{1 + \frac{c \cos \theta'}{v}}$$

由题目中所给的速度变换公式,可得不同参考系中 x 方向光速的变换关系为

$$= \frac{\sqrt{2 \frac{c}{v} \cos \theta' + \frac{c^2}{v^2} + 1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta'}}{\cos \theta' + \frac{c}{v}} = \frac{\sqrt{\frac{c^2}{v^2} \cos^2 \theta' + 2 \frac{c}{v} \cos \theta' + 1}}{\cos \theta' + \frac{c}{v}} = \frac{1 + \frac{c}{v} \cos \theta'}{\cos \theta' + \frac{c}{v}}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{c \cos \theta' + v}{\sqrt{\left[\frac{c \cos \theta' + v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right]^2 + (c \sin \theta')^2}}$$

设这列光在 S 系中与 x 轴的夹角为 θ , 则有

$$x = \frac{ct' \cos \theta' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y = ct' \sin \theta', \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} ct' \cos \theta'}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

($ct' \cos \theta', ct' \sin \theta'$), 在 S 系中,该点的位置为

向有所不同。如果在 S' 系中在 xy 平面内沿与 x 轴成 θ' 角方向的光,经过任意时间 t' 后,到达点

【解】(1) 在所有的惯性系中,光速是不变的,但是,同一列光,在不同的参考系中观察,方

(2) 求 S 系中测得的单位时间内光源辐射的全部光子的总动量与总能量。

在 S' 系中,光源静止,因而动量和动量的变化均为 0,全部光子的总动量亦为 0。

而在 S 系中,光源的动量为 $p_1 = Mv$ 。单位时间内辐射出的全部光子的总动量为

$$\frac{\Delta p_1}{\Delta t} = \frac{\Delta Mv}{\Delta t'} = \frac{\Delta M_0 c^2}{\Delta t} \frac{v}{c^2} = P \frac{v}{c^2}$$

20. (26 届复赛) (1) 设想光子能量为 E 的单色光垂直入射到质量为 M 、以速度 v 沿光入射方向运动的理想反射镜(无吸收)上,试用光子与镜子碰撞的观点确定反射光的光子能量 E' 。

可取以下近似: $\frac{E}{Mc^2} \ll \frac{v}{c} \ll 1$, 其中 c 为光速。

(2) 若在上述问题中单色光的强度为 Φ , 试求反射光的强度 Φ' (可以近似认为光子撞击镜子后,镜子的速度仍为 v)。光的强度定义为单位时间内通过垂直于光传播方向单位面积的光子的能量。

【解】 (1) 光子与反射镜正碰,碰撞前后,速度方向都沿同一条直线,如图 3.13 所示。镜子运动速度较低,可用经典能量进行计算,碰撞前后只有动能改变。碰撞过程中,能量守恒,动量也守恒,即

$$E + \frac{Mv^2}{2} = E' + \frac{Mv'^2}{2}$$

$$\frac{E}{c} + Mv = -\frac{E'}{c} + Mv'$$

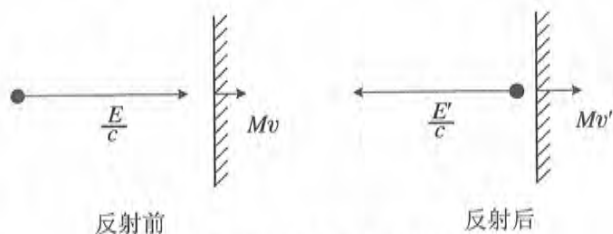


图 3.13 反射前后的动量

两式中消去 v' , 可得 $\frac{2(E-E')}{M} + v^2 = \left(\frac{E+E'}{Mc} + v\right)^2$, 整理后得到

$$(E' + E)^2 + 2Mc(c+v)(E' + E) = 4Mc^2 E$$

将上式左端配方, 并做计算、整理, 得

$$(E' + E)^2 + 2Mc(c+v)(E' + E) + M^2 c^2 (c+v)^2$$

$$= 4Mc^2 E + M^2 c^2 (c+v)^2 [(E' + E) + Mc(c+v)]^2$$

$$= 4Mc^2 E + M^2 c^2 (c+v)^2$$

$$E' + E + Mc(c+v) = \sqrt{4Mc^2 E + M^2 c^2 (c+v)^2}$$

$$E' + E = Mc(c+v) \left[\sqrt{1 + \frac{4E}{M(c+v)^2}} - 1 \right]$$

其中 $\sqrt{1 + \frac{4E}{M(c+v)^2}} - 1 \approx 1 + \frac{2E}{M(c+v)^2} - 1 = \frac{2E}{M(c+v)^2}$, 因而

$$E' + E = \frac{2cE}{c+v}$$

【解】(1) 设在一个相对于碰撞前自由电子静止的坐标系中, 一个光子被此电子完全吸收的结果, 则说明上述过程实际上不可能发生。

【分析】微观体系中的相互作用也应当遵循能量守恒和动量守恒定律, 所以, 假设一个光子被一个电子完全吸收, 则可以写出相应的守恒关系式, 如果求解此关系式得到了没有物理意义的结果, 则说明上述过程实际上不可能发生。

21. (21 届决赛) 试从相对论能量和动量的角度分析论证:
 (1) 一个光子与真空中处于静止状态的自由电子碰撞时, 光子的能量不可能完全被电子吸收。
 (2) 光子射到金属表面时, 其能量有可能完全被吸收并使电子逸出金属表面, 产生光电效应。

$$\Phi' = n'cE' = ncE \frac{c-v}{c+v} = \frac{(c-v)^2}{(c+v)^2} \Phi$$

反射光的光强为

$$N' = \frac{\Delta v'}{v'} = \frac{n(c-v)A}{(c+v)A} = n \frac{c-v}{c+v}$$

其中单位体积的光子数为

$$\Delta v' = (c+v)A$$

上述体积中的光子, 前端先被反射, 并以速度 c 返回。当后端被反射时, 镜面已经向前运动了 v , 两端面间的距离为 $c+v$, 则单位时间内射入镜面的光束, 被反射后, 体积变为

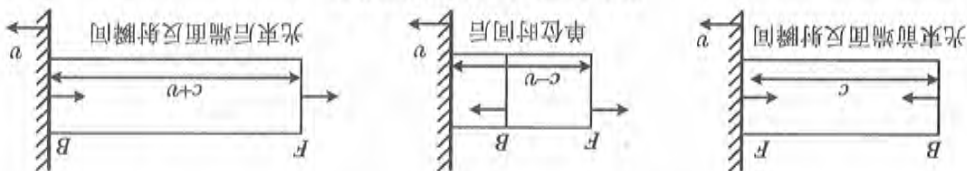
$$\Delta N = n\Delta v = n(c-v)A$$

单位时间内射入镜面的光子数为

$$\Delta V = (c-v)A$$

的速度为 $c-v$, 则单位时间内射入镜面的光束体积为

图 3.14 反射前后的光束体积



如图 3.14 所示, 由于反光镜沿光束入射方向以速度 v 运动, 从静止参考系看, 光束相对于镜面

$$\Phi = \frac{ncAE}{A} = ncE$$

取一截面积为 A 的光束, 设其中单位体积中光子数为 n , 则光的强度可表示为

$$E' = E \left(\frac{1+v/c}{2} - 1 \right) \approx E \left(2 - \frac{2v}{c} - 1 \right) = E \left(1 - \frac{2v}{c} \right)$$

考虑到 $v \ll c$, 上述结果也可表示为

$$E' = E \left(\frac{1+v/c}{2} - 1 \right) = E \frac{1-v/c}{1+v/c} = E \frac{c-v}{c+v}$$

解得

收,则能量守恒和动量守恒定律可以写作

$$h\omega + m_0 c^2 = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1)$$

$$\frac{h\omega}{c} = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2)$$

其中 m_0 、 m 分别为自由电子的静止质量和运动质量,而两者关系为

$$m = m_0 / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

将式(2)代入式(1),得到

$$\frac{m_0 cv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3)$$

整理后,得到

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{c - v}{c} \quad (4)$$

两端平方后,变为

$$v^2 - cv = 0 \quad (5)$$

结果为吸收光子后,电子的速度 $v = 0$ 或 $v = c$,而这两个结果都没有物理意义,所以一个自由电子不可能完全吸收一个光子。

(2) 光电效应过程中,能量守恒、动量守恒的关系分别为

$$h\omega + m_0 c^2 = W + \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (6)$$

$$\frac{h\omega}{c} = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (7)$$

将式(7)代入式(6),可得到 $\frac{m_0 cv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + m_0 c^2 = W + \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$,整理后得到 $1 - \frac{W}{m_0 c^2} = \frac{c - v}{\sqrt{c^2 - v^2}}$,

进一步化为 $\sqrt{c - v} = 0$ 和 $1 - \frac{W}{m_0 c^2} = \sqrt{\frac{c - v}{c + v}}$, $v = c$ 不可能,后一个等式两端平方后,可解得

$$v = \frac{1 - \left(1 - \frac{W}{m_0 c^2}\right)^2}{1 + \left(1 - \frac{W}{m_0 c^2}\right)^2} c \quad (8)$$

W 总是比 $m_0 c^2$ 小,所以式(8)是一个合理的解。

22. (27 届复赛) 已知粒子 2 和粒子 1 的静止质量都是 m_0 ,粒子 2 静止,粒子 1 以速度 v_0 与粒子 1 发生弹性碰撞。

由于式(6)总是正数,所以

$$(6) \quad \cos \theta = \frac{(\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1)}{\gamma_1 \gamma_2} \frac{v_1 v_2}{c^2}$$

将式(5)代入式(4),有

$$(5) \quad \gamma_0^2 + 1 - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2) = 2\gamma_1 \gamma_2 - 2(\gamma_1 + \gamma_2) + 2$$

将式(1)化为 $\gamma_0 = \gamma_1 + \gamma_2 - 1$, 两端平方, 得 $\gamma_0^2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + 2\gamma_1 \gamma_2 + \gamma_2^2 + 1 - 2(\gamma_1 + \gamma_2)$, 整理后得到

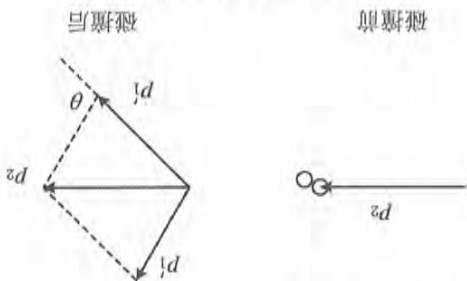
$$(4) \quad \cos \theta = \frac{2\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_0^2 + 1 - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)} \frac{v_1 v_2}{c^2}$$

式(2)可化为 $c^2 \gamma_0^2 - c^2 = c^2 \gamma_1^2 - c^2 + c^2 \gamma_2^2 - c^2 + 2v_1 v_2 \gamma_1 \gamma_2 \cos \theta$, 整理后得到

$$(3) \quad v^2 \gamma^2 = c^2 \gamma^2 - c^2$$

由于 $c^2 + v^2 \gamma^2 = c^2 + \frac{v^2}{c^2 - v^2} + \frac{1 - v^2/c^2}{c^2 - v^2/c^2} = \frac{c^2 - v^2 + v^2}{c^2 - v^2/c^2} = \frac{1 - v^2/c^2}{c^2 - v^2/c^2} = c^2 \gamma^2$, 所以有

图 3.15 碰撞前后系统的动量



$$(2) \quad \gamma_0 + 1 = \gamma_1 + \gamma_2$$

恒, 动量守恒, 即 $E_1 + E_2 = E_1' + E_2'$, $p_1^2 + p_2^2 = p_1'^2 + p_2'^2 + 2p_1' p_2' \cos \theta$. 可写作

设碰撞后粒子 1 和粒子 2 的速度方向之间的夹角为 θ , 如图 3.15 所示, 碰撞前后能量守

$$p_1' = \frac{m_0 v_1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} = \gamma_1 m_0 v_1, \quad p_2' = \frac{m_0 v_2}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} = \gamma_2 m_0 v_2$$

$$p_1 = 0, \quad p_2 = \frac{m_0 v_0}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} = \gamma_0 m_0 v_0$$

$$E_1' = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} = \gamma_1 m_0 c^2, \quad E_2' = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} = \gamma_2 m_0 c^2$$

$$E_1 = m_0 c^2, \quad E_2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} = \gamma_0 m_0 c^2$$

【解】(1) 考虑相对论效应, 碰撞前后各粒子的能量、动量分别是

(2) 若碰撞是正碰, 考虑相对论效应, 试求碰后两粒子的速度。

是钝角? 若不考虑相对论效应结果又如何?

(1) 若碰撞是斜碰, 考虑相对论效应。试论证: 碰后两粒子速度方向的夹角是锐角、直角还

$$\theta < \frac{\pi}{2}$$

如不考虑相对论效应,弹性碰撞前后的动能关系为

$$\frac{1}{2} m_0 v_0^2 = \frac{1}{2} m_0 v_1^2 + \frac{1}{2} m_0 v_2^2 \quad (7)$$

由式(7)可见碰撞后,粒子的速度与入射粒子的速度间有关系 $v_0^2 = v_1^2 + v_2^2$,即构成直角三角形,且 $v_1 \perp v_2$,两者之间的夹角为 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 。

(2) 若碰撞是正碰,则碰撞前后速度共线,动量守恒的表达式为

$$v_0 \gamma_0 = v_1 \gamma_1 + v_2 \gamma_2 \quad (8)$$

变为 $v_2 \gamma_2 = v_0 \gamma_0 - v_1 \gamma_1$,两端平方, $v_2^2 \gamma_2^2 = v_0^2 \gamma_0^2 + v_1^2 \gamma_1^2 - 2v_0 v_1 \gamma_0 \gamma_1$,利用式(3),得

$$\gamma_2^2 = \gamma_1^2 + \gamma_0^2 - 1 - \frac{2v_0 v_1}{c^2} \gamma_0 \gamma_1 \quad (9)$$

将式(1)变为 $\gamma_2 = \gamma_0 + 1 - \gamma_1$,两端平方,得

$$\gamma_2^2 = \gamma_0^2 + \gamma_1^2 + 1 - 2\gamma_1 \gamma_0 + 2\gamma_0 - 2\gamma_1 \quad (10)$$

结合式(9)、式(10),得 $\gamma_0^2 + \gamma_1^2 + 2 - 2\gamma_1 \gamma_0 + 2\gamma_0 - 2\gamma_1 = \gamma_1^2 + \gamma_0^2 - \frac{2v_0 v_1}{c^2} \gamma_0 \gamma_1$ 。整理为

$$\frac{v_0 \gamma_0}{c^2} v_1 \gamma_1 + 1 + \gamma_0 - (1 + \gamma_0) \gamma_1 = 0$$

利用 $v_1 \gamma_1 = c \sqrt{\gamma_1^2 - 1}$,将上式化为 $\frac{v_0 \gamma_0}{c} \sqrt{\gamma_1^2 - 1} - (1 + \gamma_0)(\gamma_1 - 1) = 0$,即

$$\frac{v_0 \gamma_0}{c} \sqrt{\gamma_1^2 - 1} = (1 + \gamma_0)(\gamma_1 - 1) \quad (11)$$

方程(11)可化为 $\sqrt{\gamma_1 - 1} = 0$ 和 $c(\gamma_0 + 1)\sqrt{\gamma_1 - 1} - v_0 \gamma_0 \sqrt{\gamma_1 + 1} = 0$ 。

其中的一个解为 $\gamma_1 = 1$,即

$$v_1 = 0$$

另一个解需讨论 $c(\gamma_0 + 1)\sqrt{\gamma_1 - 1} - v_0 \gamma_0 \sqrt{\gamma_1 + 1} = 0$ 。将其变形为

$$c(\gamma_0 + 1) \sqrt{\gamma_1 - 1} = v_0 \gamma_0 \sqrt{\gamma_1 + 1}$$

并两端平方,得到 $c^2 (\gamma_0 + 1)^2 (\gamma_1 - 1) = v_0^2 \gamma_0^2 (\gamma_1 + 1)$,利用式(3),有

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{c^2 (\gamma_0 + 1)^2 + v_0^2 \gamma_0^2}{c^2 (\gamma_0 + 1)^2 - v_0^2 \gamma_0^2} = \frac{c^2 (\gamma_0 + 1)^2 + c^2 \gamma_0^2 - c^2}{c^2 (\gamma_0 + 1)^2 - c^2 \gamma_0^2 + c^2} = \frac{\gamma_0^2 + 2\gamma_0 + 1 + \gamma_0^2 - 1}{\gamma_0^2 + 2\gamma_0 + 1 - \gamma_0^2 + 1} \\ &= \frac{\gamma_0^2 + \gamma_0}{\gamma_0 + 1} = \gamma_0 \end{aligned}$$

即

$$v_1 = v_0$$

$v_1 = 0$ 不是一个合理的解,因而取 $v_1 = v_0$ 。将此结果带入式(8),得

$$v_2 = 0$$

这一现象与非相对论条件下的弹性碰撞相一致。

23. (24 届决赛) 已知钠原子从激发态(记作 $P_{3/2}$)跃迁到基态(记作 $S_{1/2}$)所发出的光谱线波长 $\lambda_0 = 588.9965 \text{ nm}$ 。现有一团钠原子气,其中的钠原子做无规的热运动(钠原子的运动不

共振吸收前后,钠原子速度矢量的变化为人射光子的动量,可根据图 3.17 得到,即

$$n(45^\circ) = \frac{c}{\lambda} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \lambda_0 - 1 \right) = 8\,278.026 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$n(30^\circ) = \frac{c}{\lambda} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \lambda_0 - 1 \right) = 6\,758.980 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

把 $\frac{\lambda_0}{\lambda} - 1 = 1.9525 \times 10^{-5}$ 代入上式得

$$n = \frac{c}{\lambda} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} - 1 \right) \cos \theta \quad (3)$$

其中 $\frac{hc}{\lambda}$ 为光子的质量,显然 $\frac{hc}{\lambda} \ll M$, 所以

$$n = \left[\frac{2Mc}{h\nu} - \frac{c(\nu - \nu_0)}{\nu} \right] / \cos \theta$$

$$M^2 u^2 + 2Mh(\nu - \nu_0) = \left(\frac{c}{h\nu} \right)^2 + (Mu)^2 - 2 \frac{c}{h\nu} Mu \cos \theta$$

由式(1)得 $M^2 v^2 = M^2 u^2 + 2Mh(\nu - \nu_0)$, 代入式(2), 得到

$$(Mv)^2 = \left(\frac{hc}{\lambda} \right)^2 + (Mu)^2 - 2 \frac{c}{h\nu} Mu \cos \theta \quad (2)$$

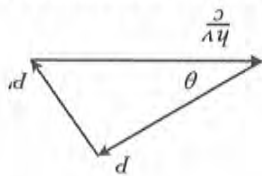
$$h\nu + \frac{1}{2} Mu^2 = h\nu_0 + \frac{1}{2} Mv^2 \quad (1)$$

由于钠原子的运动速度较低,所以可以采用经典的能量和动量表达式,即

$$h\nu + \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = h\nu_0 + \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$= \left(\frac{hc}{\lambda} \right)^2 + \left(\frac{Mu}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right)^2 - 2 \frac{hc}{\lambda} \frac{Mu}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \cos \theta$$

图 3.17 共振吸收过程中
的动量守恒



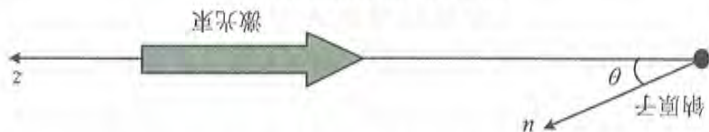
所示,即

若实现共振吸收,原子-光子系统动量守恒、能量守恒,如图 3.17

量为 $E = \frac{hc}{\lambda}$, 动量为 $p = \frac{h}{\lambda}$ 。

【解】钠原子激发态与基态的能级差为 $\Delta E = \frac{hc}{\lambda_0}$, 激光光子的能

图 3.16 激光束照射钠原子



必考虑相对论效应), 被一束沿 z 轴负方向传播的波长为 $\lambda = 589.0080 \text{ nm}$ 的激光照射。以 θ 表示钠原子运动方向与 z 轴正方向之间的夹角, 如图 3.16 所示。问在 $30^\circ < \theta < 45^\circ$ 角度区间内钠原子中速率 u 在什么范围内能产生共振吸收, 从 $S_{1/2}$ 态激发到 $P_{3/2}$ 态? 并求共振吸收前后钠原子速度(矢量)变化的大小。已知钠原子质量为 $M = 3.79 \times 10^{-26} \text{ kg}$, 普朗克常量 $h = 6.626\,069 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, 真空中的光速 $c = 2.997\,925 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。

$$|v - u| = \frac{h}{M\lambda}$$

将参数代入, 即得

$$|v - u| = \frac{h}{M\lambda} = 2.97 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

24. (28 届决赛) 朱棣文等三位科学家因成功实现中性原子的磁光俘获而获得了 1997 年诺贝尔物理学奖。对以下问题的研究有助于理解磁光俘获的机理(注意: 本问题所涉及的原子的物理特性参数, 实际上都是在对大量原子或同一原子的多次同类过程进行平均的意义上加以理解的)。

(1) 已知处于基态的某静止原子对频率为 ν_0 的光子发生共振吸收, 并跃迁到它的第一激发态, 如图 3.18(a) 所示。然而, 由于热运动, 原子都处于运动中。假设某原子以速率 v_0 运动, 现用一束激光迎头射向该原子, 问恰能使该原子发生共振吸收的激光频率 ν 为多少? 经过共振吸收, 该原子的速率改变了多少? ($h\nu_0 \ll mc^2$, m 是原子质量, $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ 。)

(2) 原子的共振吸收是瞬时的, 但跃迁到激发态的原子一般不会立即回到基态, 而会在激发态滞留一段时间, 这段时间称为该能级的平均寿命。已知所考察原子的第一激发态的平均寿命为 τ 。若该原子能对迎头射来的激光接连发生共振吸收, 且原子一旦回到基态, 便立即发生共振吸收, 如此不断重复, 试求该原子在接连两次刚要发生共振吸收时刻之间的平均加速度。注意: 原子从激发态回到基态向各个方向发射光子的机会均等, 由于碰撞频率极高, 因而由此而引起原子动量改变的平均效果为零。

(3) 设所考察的原子以初速度 v_0 沿 z 轴正向运动, 一激光束沿 z 轴负向迎头射向该原子, 使它发生共振吸收。在激光频率保持不变的条件下, 为了使该原子能通过一次接着一次的共振吸收而减速至零, 为此可让该原子通过一非均匀磁场 $B(z)$, 实现原子的磁光俘获, 如图 3.18(c) 所示。由于处于磁场中的原子与该磁场会发生相互作用, 从而改变原子的激发态能量, 如图 3.18(b) 所示。当磁感应强度为 B 时, 原来能量为 E 的能级将变为 $E + \Delta E$, 其中 $\Delta E = \mu B$, μ 是已知常量。试求磁感应强度 B 随 z 变化的关系式。

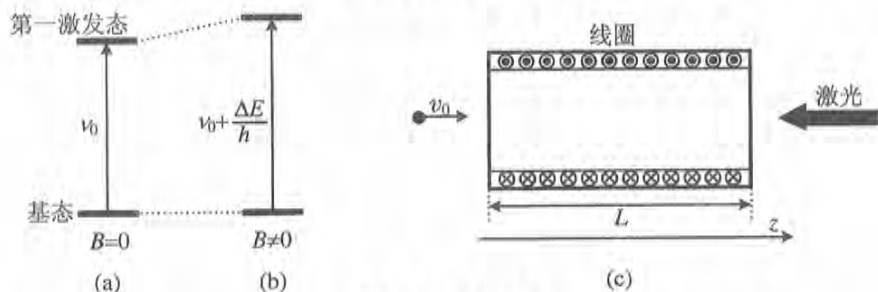


图 3.18 共振吸收

(4) 设质量为 $m = 1.0 \times 10^{-26} \text{ kg}$ 的锂原子初速度 $v_0 = 1.2 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 静止时的共振吸收频率为 $\nu_0 = 4.5 \times 10^{14} \text{ Hz}$, 第一激发态的平均寿命 $\tau = 5.3 \times 10^{-8} \text{ s}$ 。为使所考察的原子按(3)中所描述的过程减速为零, 原子通过的磁场区域应有多长?

【解】 (1) 光子与原子迎头碰撞发生共振吸收, 动量守恒、能量守恒。参考上题, 有

$$(1) \quad h\nu + \frac{1}{2}mv_0^2 = h\nu_0 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$(2) \quad mv_0 - \frac{h\nu}{c} = mv$$

从两式中消去速度 v , 可得

$$2\frac{v_0}{c} = 2\frac{v_0 - \nu}{c} + \frac{h\nu}{mc^2}$$

由于 $\frac{h\nu}{mc^2} \ll 1$, 可得

$$(3) \quad \nu = \frac{v_0}{1 + \frac{v}{c}}$$

吸收后原子速度的变化

$$(4) \quad v - v_0 = -\frac{h\nu_0}{mc} \left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

(2) 根据(1)中的结果, 两次共振吸收之间的平均加速度为

$$a = \frac{\tau}{|v - v_0|} = \frac{\tau}{h\nu_0} mc^2 \left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

(3) 磁场中原子的激发态能级变为 $E + \Delta E = h\nu_0 + \mu B$, 静止原子的相应共振吸收频率变为 $\nu_1 = \nu_0 + \frac{\mu B}{h}$

运动时的吸收频率亦相应变化, 为

$$(5) \quad \nu = \frac{\nu_0 + \frac{\mu B}{h}}{\nu_1} = \frac{1 + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v_1}{c}}$$

为使原子能与单一频率的光子实现共振, 则要求式(5)依然满足。由于原子具有平均的加速度 a , 则在 z 处的速度为

$$(6) \quad v = \sqrt{v_0^2 - 2az}$$

结合式(3)、式(5)、式(6), 得到

$$\frac{1 + \frac{v}{c}}{\nu_0 + \frac{\mu B}{h}} = \frac{1 + \frac{v_0}{c}}{\nu_0 + \frac{\mu B}{h}}$$

解得

$$B = \frac{h\nu_0}{\mu} \frac{\sqrt{v_0^2 - 2az} - v_0}{c + v_0}$$

(4) 由式(6), 原子速度为 0 时, $v_0^2 - 2az = 0$, 据此求得

$$z = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2h\nu_0} \frac{mc^2 \left(1 + \frac{v}{c}\right)}{v_0^2 m c^2} \approx \frac{v_0^2 m c^2}{2h\nu_0} = 0.38 \text{ m}$$

25. (29 届复赛) 如图 3.19 所示, 竖直固定平行放置的两条相同长直导线 1 和 2 相距为 a (a 远小于长直导线的长度), 两导线中通有方向和大小都相同的稳恒电流, 电流方向向上。导线中正离子都是静止的, 每单位长度导线中正离子的电荷量为 λ ; 形成电流的导电电子以速度 v_0 沿导线向下匀速运动, 每单位长度导线中导电电子的电荷量为 $-\lambda$ 。已知: 单位长度电荷量为 η 的无限长均匀带电直导线在距其距离为 r 处产生的电场的强度大小为 $E = k_e \frac{2\eta}{r}$, 其中 k_e 是常量; 当无限长直导线通有稳恒电流 I 时, 电流在距导线距离为 r 处产生磁场的磁感应强度大小为 $B = k_m \frac{2I}{r}$, 其中 k_m 是常量。试利用狭义相对论中的长度收缩公式求常量 k_e 和 k_m 的比值。

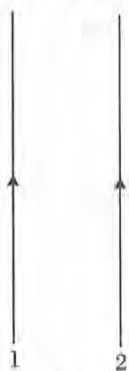


图 3.19 平行直导线

提示: 忽略重力; 正离子和电子的电荷量与惯性参照系的选取无关; 真空中光速为 c 。

【分析】 导线中的自由电子(即题中所谓导电电子)相对于正离子运动, 在另一根导线中的正离子看来, 由于相对论长度收缩效应, 导电电子电荷分布密度改变, 正离子所受运动电子的作用力比静止电子作用力要大。同理, 正离子所感受到的磁场也要大一些。

【解】 讨论导线 1 所受到导线 2 的作用力。

记相对于正离子静止的参考系为 S , 相对于导电电子静止的参考系为 S' 。则 S' 相对于 S 以速度 v_0 向下匀速运动。

(1) 于 S 中观察正离子所受到的作用力。在 S 系中, 导线 2 中单位长度内的电荷量为 $\lambda - \lambda = 0$, 即处处电荷量为 0, 所以不对导线 1 中的正离子产生电场力。同样也不对导线 1 中的正离子产生磁场力。

(2) 于 S 中观察导电电子所受到的作用力。导线 1 中的导电电子同样也不受到电场力和磁场力的作用。

(3) 于 S' 系中观察导电电子所受到的作用力。在 S' 系中, 导线 2 中的导电电子静止, 导线 2 中的正离子运动。

若在 S 系中, 在导线 2 中一些导电电子占据长度为 l 的区域, 其中负电荷量为

$$q_- = -\lambda l$$

于 S' 系中观察, 上述区域的长度为 l'_- 。但 S' 系中, 导电电子是静止的, 根据相对论, l 的长度比 l'_- 短, 于 S 系上述区域的长度为

$$l'_- = l / \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}} = l / \sqrt{1 - \beta^2}$$

S' 系中导线 2 单位长度内导电电子的电荷量为

$$\eta'_- = \frac{q_-}{l'_-} = \frac{-\lambda l}{l / \sqrt{1 - \beta^2}} = -\lambda \sqrt{1 - \beta^2}$$

若在 S 系中, 在导线 2 中一些正离子占据长度为 l 的区域, 其中正电荷量为

$$q_+ = \lambda l$$

在 S' 系中, 正离子以速度 v_0 运动, 这一区域的长度会变短, 为

$$l'_+ = l \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}} = l \sqrt{1 - \beta^2}$$

导线 2 中单位长度内正离子的电量为

$$\eta'_+ = \frac{q}{l} = \frac{\lambda l}{\lambda} = \frac{l}{\lambda} \sqrt{1-\beta^2} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\lambda}$$

所以,导线 2 中单位长度内的电量为

$$\eta' = \eta'_- + \eta'_+ = -\lambda \sqrt{1-\beta^2} + \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\lambda} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta^2 \lambda}$$

在导线 1 处所产生的电场强度为

$$E' = k_e \frac{2\eta'}{2} = k_e \frac{r}{2} \frac{\beta^2 \lambda}{\beta^2 \lambda} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta^2}$$

电场 E' 方向如图 3.20 所示。

导线 1 中每个导电电子所受到的电场力为

$$F'_e = -eE' = -k_e \frac{2e}{2} \frac{r}{2} \frac{\beta^2 \lambda}{\beta^2 \lambda} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta^2}$$

导线 2 中导电电子静止,而正离子运动,所形成的电流强度为

$$I' = \eta^+ v_0 = \frac{\lambda v_0}{\beta^2}$$

在导线 1 处所产生的磁感应强度为

$$B' = k_m \frac{2I'}{2} = k_m \frac{r}{2} \frac{\lambda v_0}{\beta^2} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta^2}$$

磁场 B' 方向如图 3.20 所示。

而导线 1 中导电电子静止,所以受到磁场力为 0。

(4) 于 S' 系中观察正离子所受到的作用力。

设导线 1 中每个正离子所带电荷量为 q , 每个正离子所受到的电场力为

$$F'_+ = qE' = k_e \frac{2q}{2} \frac{r}{2} \frac{\beta^2 \lambda}{\beta^2 \lambda} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta^2}$$

F'_+ 的方向如图 3.21 所示。

图 3.20 S' 系中导线 1 处的电场和磁场

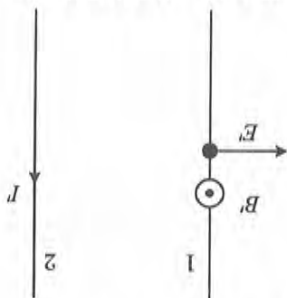
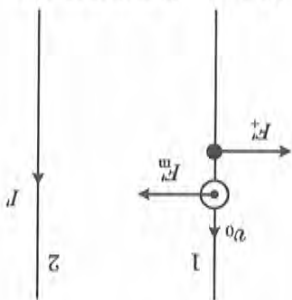


图 3.21 S' 系中导线 1 中正离子所受力



导线 1 中正离子以速度 v_0 向上运动,在磁场中所受洛伦兹力为

$$F'_m = k_m \frac{2q}{2} \frac{\lambda v_0^2}{\lambda v_0^2} \frac{r}{2} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta^2 \lambda} = k_e \frac{2q}{2} \frac{r}{2} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta^2 \lambda}$$

F'_m 的方向如图 3.21 所示。

由于正离子做匀速直线运动, 因而 $F'_+ = F'_m$, 所以有

$$\frac{k_e}{k_m} = \frac{\beta^2}{v_0^2} = c^2$$

26. (25 届决赛) 根据广义相对论, 光线在星体的引力场中会发生弯曲, 在包含引力中心的平面内是一条在引力中心附近微弯的曲线。它距离引力中心最近的点称为光线的近星点。通过近星点与引力中心的直线是光线的对称轴。若在光线所在平面内选择引力中心为平面极坐标 (r, φ) 的原点, 选取光线的对称轴为坐标极轴, 则光线方程(光子的轨迹方程)为

$$r = \frac{GM/c^2}{a \cos \varphi + a^2(1 + \sin^2 \varphi)}$$

其中 G 是万有引力常量, M 是星体质量, c 是光速, a 是绝对值远小于 1 的参数。现在假设离地球 80.0 光年处有一星体, 在它 与地球连线的中点处有一白矮星。如果经过该白矮星两侧的星光对地球上的观测者所张的视角是 1.80×10^{-7} rad, 试问此白矮星的质量是多少 kg? 已知 $G = 6.673 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ 。

【解】 从恒星发出的光线, 由于白矮星的引力而出现弯曲, 偏离直线传播。光线的方程为

$$r = \frac{GM/c^2}{a \cos \varphi + a^2(1 + \sin^2 \varphi)}$$

如图 3.22 所示, 在近星点, $\varphi = 0, r_{\min} = \frac{GM/c^2}{a + a^2}$ 。

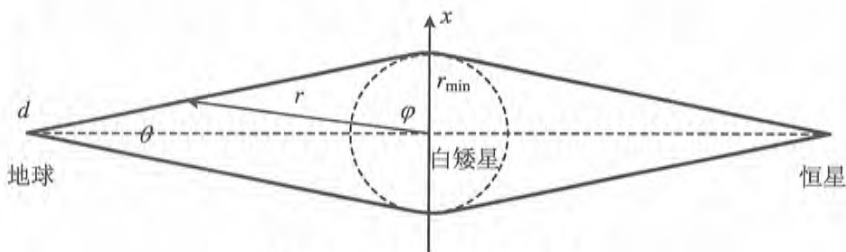


图 3.22 光线在引力场中弯曲

由于 $a \ll 1$, 所以 $a^2 \ll a$, 上式化为 $r_{\min} = \frac{GM/c^2}{a}$ 。

地球上的观测者, $\varphi = \frac{\pi}{2}, d = \frac{GM/c^2}{2a^2}$, 即 $a = \sqrt{\frac{GM/c^2}{2d}}$ 。

光线的张角为

$$\Delta\theta = \frac{2r_{\min}}{d} = \frac{2GM/c^2}{d \sqrt{\frac{GM/c^2}{2d}}} = \frac{2\sqrt{2GM}}{\sqrt{dc}}$$

白矮星的质量为

$$M = \frac{\Delta\theta^2 dc^2}{8G} = 2.07 \times 10^{30} \text{ kg}$$

27. (25 届决赛) 卫星的运动可由地面观测来确定; 而知道了卫星的运动, 又可以用它来确定空间飞行器或地面上物体的运动。这都涉及时间和空间坐标的测定。为简化分析和计算, 不考虑地球的自转和公转, 把它当作惯性系。

(1) 先来考虑卫星运动的测定。设不考虑相对论效应。在卫星上装有发射电波的装置和高精度的原子钟。假设从卫星上每次发出的电波信号, 都包含该信号发出的时刻这一信息。

(I) 地面观测系统(包含若干个观测站)可利用从电波中接收到的这一信息, 并根据自己所处的已知位置和自己的时钟来确定卫星每一时刻的位置, 从而测定卫星的运动。这种测量系统至少需要包含几个地面观测站? 列出可以确定卫星位置的方程。

(II) 设有两个观测站 D_1, D_2 , 分别位于同一经线上北纬 θ 和南纬 θ (单位: °) 处。若它们同时收到时间 τ 之前卫星发出的电波信号。(I) 试求出发出电波时刻卫星距地面的最大高度 H 是多少 km? (II) 若 $\Delta\theta = \pm 1.0'$, 定出的 H 有多大误差? (III) 若 $\Delta\tau = \pm 0.010 \mu\text{s}$, 定出的 H 有多大误差? 假设地球为半径 $R = 6.38 \times 10^3 \text{ km}$ 的球体, 光速 $c = 2.998 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 地面处的重力加速度 $g = 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 。

(3) 再来考虑根据参照卫星的运动来测定一个物体的运动。设不考虑相对论效应, 假设从卫星持续发出的电波信号包含卫星运动状态的信息, 即每个信号发出的时刻及该时刻卫星所处的位置。再假设被观测物体上有一台卫星信号接收器(设其上没有时钟), 从而可获知这些信息。为了利用这种信息来确定物体的运动状态, 即物体接收到卫星信号时物体当时所处的位置以及当时的时刻, 一般来说物体至少需要同时接收到几个不同卫星发来的信号电波? 列出确定当时物体的位置和该时刻的方程。

(4) 根据狭义相对论, 运动的钟比静止的钟慢。根据广义相对论, 钟在引力场中变慢。现在来考虑在上述测量中相对论的这两种效应。已知天上卫星的钟与地面观测站的钟零点已经在对准。假设卫星在离地面 $h = 2.00 \times 10^4 \text{ km}$ 的圆形轨道上运行, 地球半径 R 、光速 c 和地面重力加速度 g 取第(2)小题中给的值。

(I) 根据狭义相对论, 试估算地上的钟经过 24 h 后它的示数与卫星上的钟的示数差多少? 设在处理这一问题时, 可以把匀速直线运动中时钟走慢的公式用于匀速圆周运动。

(II) 根据广义相对论, 钟在引力场中变慢的因子是 $(1 - 2\varphi/c^2)^{1/2}$, φ 是钟所在位置的引力势(即引力势能与受引力作用的物体质量之比; 取无限远处引力势为零)的大小。试问地上的钟 24 h 后, 卫星上的钟的示数与地上的钟的示数差多少?

【解】(1) (I) 选择一个坐标系来测定卫星的运动, 就是测定每一时刻卫星的位置坐标 x, y, z 。设卫星在 t 时刻发出的信号电波到达第 i 个地面站的时刻为 t_i 。因为卫星信号电波以光速 c 传播, 于是可以写出

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 = c^2(t - t_i)^2 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1)$$

式中 x_i, y_i, z_i 是第 i 个地面站的位置坐标, 是已知的; t_i 也可以由地面站的时钟来测定; t 由卫星信号电波给出, 也是已知的。所以, 方程(1)中有三个未知数 x, y, z , 要有三个相互独立的方程, 也就是说, 至少需要包含三个地面站, 三个方程对应于式(1)中 $i = 1, 2, 3$ 的情况。

(II)(i) 如图 3.23 所示,以地心 O 和两个观测站 D_1 、 D_2 的位置为顶点所构成的三角形是等腰三角形,腰长为 R 。根据题意,可知卫星发出信号电波时距离两个观测站的距离相等,都是

$$L = c\tau \quad (2)$$

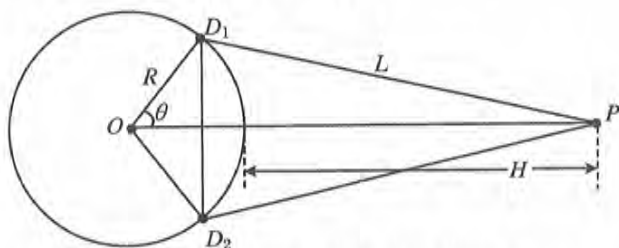


图 3.23 地心和两个观测站构成的三角形

当卫星 P 处于上述三角形所在的平面内时,距离地面的高度最大,即 H 。以 θ 表示 D_1 、 D_2 所处的纬度,由余弦定理可知

$$L^2 = R^2 + (H + R)^2 - 2R(H + R)\cos\theta \quad (3)$$

由式(2)、式(3)得

$$H = \sqrt{(c\tau)^2 - (R\sin\theta)^2} - R(1 - \cos\theta) \quad (4)$$

式(4)也可据图直接写出。

(ii) 按题意,如果纬度有很小的误差 $\Delta\theta$,则由式(3)可知,将引起 H 发生误差 ΔH 。这时有

$$L^2 = R^2 + (H + \Delta H + R)^2 - 2R(H + \Delta H + R)\cos(\theta + \Delta\theta) \quad (5)$$

将式(5)展开,因 $\Delta\theta$ 很小,从而 ΔH 也很小,可略去高次项,再与式(3)相减,得

$$\Delta H = -\frac{R(R + H)\sin\theta\Delta\theta}{H + (1 - \cos\theta)R} \quad (6)$$

其中 H 由式(4)给出。

(iii) 如果时间 τ 有 $\Delta\tau$ 的误差,则 L 有误差

$$\Delta L = c\Delta\tau \quad (7)$$

由式(3)可知,这将引起 H 产生误差 ΔH 。这时有

$$(L + \Delta L)^2 = R^2 + (H + \Delta H + R)^2 - 2R(H + \Delta H + R)\cos\theta \quad (8)$$

由式(7)、式(8)和式(3),略去高次项,可得

$$\Delta H = \frac{c^2\tau\Delta\tau}{H + R(1 - \cos\theta)} \quad (9)$$

其中 H 由式(4)给出。

(2)(i) 在式(4)中代入数据,算得 $H = 2.8 \times 10^4$ km。(ii) 在式(6)中代入数据,算得 $\Delta H = \pm 25$ m。(iii) 在式(9)中代入数据,算得 $\Delta H = \pm 3.0$ m。

(3) 选择一个坐标系,设被测物体待定位置的坐标为 x, y, z ,待定时刻为 t ,第 i 个卫星在 t_i 时刻的坐标为 x_i, y_i, z_i 。卫星信号电波以光速传播,可以写出

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 = c^2(t - t_i)^2 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (10)$$

由于方程(1)有四个未知数 t, x, y, z ,需要四个独立方程才有确定的解,故需同时接收至

少四个不同卫星的信号。确定当时物体的位置和该时刻所需要的是式(10)中 $i=1, 2, 3, 4$ 所对应的四个独立方程。

(4) (I) 由于卫星上钟的变慢因子为 $[1 - (v/c)^2]^{1/2}$ ，地上的钟的示数 T 与卫星上的钟的示数 t 之差为

$$T - t = T - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} T = \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\right] T \quad (11)$$

这里 v 是卫星相对地面的速度，可由下列方程定出

$$\frac{v^2}{GM} = \frac{r}{r^2} \quad (12)$$

其中 G 是万有引力常量， M 是地球质量， r 是轨道半径。式(11)给出

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{g}{R}} R = \sqrt{\frac{g}{R+h}} R$$

其中 R 是地球半径， h 是卫星离地面的高度， $g = GM/R^2$ 是地面重力加速度；代入数值有 $v = 3.89 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ 。于是 $(v/c)^2 \approx 1.68 \times 10^{-10}$ ，这是很小的数。所以

$$\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2$$

最后，可以算出 24 h 的时差

$$T - t \approx \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 T = \frac{1}{2} \frac{gR^2}{c^2(R+h)} T = 7.3 \mu\text{s} \quad (13)$$

(II) 卫星上的钟的示数 t 与无限远惯性系中的钟的示数 T_0 之差

$$t - T_0 = \sqrt{1 - 2\frac{\varphi}{c^2}} T_0 - T_0 = \left(\sqrt{1 - 2\frac{\varphi}{c^2}} - 1\right) T_0 \quad (14)$$

卫星上的钟所处的重力势能的大小为

$$\varphi = \frac{GM}{R+h} = \frac{R^2}{R+h} g \quad (15)$$

所以 $\frac{\varphi}{c^2} = \frac{gR^2}{c^2(R+h)}$ 。

代入数值有 $\varphi/c^2 = 1.68 \times 10^{-10}$ ，这是很小的数。式(14)近似为

$$t - T_0 \approx -\frac{\varphi}{c^2} T_0 \quad (16)$$

类似地，地上的钟的示数 T 与无限远惯性系的钟的示数之差

$$T - T_0 = \sqrt{1 - 2\frac{\varphi_E}{c^2}} T_0 - T_0 = \left(\sqrt{1 - 2\frac{\varphi_E}{c^2}} - 1\right) T_0 \quad (17)$$

地上的钟所处的重力势能的大小为

$$\varphi_E = \frac{GM}{R} = gR \quad (18)$$

所以 $\frac{\varphi_E}{c^2} = \frac{gR}{c^2}$ 。

代入数值有 $\varphi_E/c^2 = 6.96 \times 10^{-10}$ ，这是很小的数。与上面的情形类似，式(17)近似为

$$T - T_0 \approx -\frac{\varphi_E}{c^2} T_0 \quad (19)$$

式(16)、式(19)两式相减,即得卫星上的钟的示数与地面上的钟的示数之差

$$t - T \approx -\frac{\varphi - \varphi_E}{c^2} T_0 \quad (20)$$

从式(19)中解出 T_0 ,并代入式(20)得

$$t - T \approx -\frac{\varphi - \varphi_E}{c^2} \left(1 - \frac{\varphi_E}{c^2}\right) T \approx -\frac{\varphi - \varphi_E}{c^2} T = \frac{gR}{c^2} \frac{h}{R+h} T \quad (21)$$

注意,题目中的 24 h 是指地面的钟走过的时间 T 。最后,算出 24 h 卫星上的钟的示数与地面上的钟的示数之差

$$t - T = 46 \mu\text{s} \quad (22)$$

28. (23 届决赛) 在高能物理中,实验证明,在实验室参考系中,一个运动的质子与一个静止的质子相碰时,碰后可能再产生一个质子和一个反质子,即总共存在三个质子和一个反质子。试求发生这一情况时,碰前那个运动质子的能量(对实验室参考系)的最小值(即阈值)是多少。

已知质子和反质子的静止质量都是 $m_0 = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ 。不考虑粒子间的静电作用。

【分析】 在讨论本题之前,先看一下相对论能量和动量的普遍关系式,即

$$(mc^2)^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4 \quad (1)$$

式中, c 为光在真空中的速度; m 为粒子的质量; p 为其动量; m_0 为静止质量。

关系式(1)可由能量

$$E = mc^2$$

和动量

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

导出, v 为粒子的速度。

$$E^2 - c^2 p^2 = \frac{m_0^2 c^4}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} - c^2 \frac{m_0^2 v^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = m_0^2 c^4 \frac{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = m_0^2 c^4$$

故 $E^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4$, 由此关系式可知,对每一个粒子,其能量的平方与 p^2 呈线性关系。

【解】 从实验室参考系来看,碰前系统的总动量等于运动的那个质子的动量,设其方向沿 x 轴正方向,碰撞前后系统的总动量守恒、总能量守恒。若要碰后能存在三个质子和一个反质子且总能量为最小值,则可论证这四个粒子的动量必定相等。

(1) 先讨论碰后四个粒子的动量都沿 x 轴正方向的情况。

令 p_1, p_2, p_3, p_4 分别表示它们动量的大小,这四个动量中,若有任何两个不相等,如 $p_1 \neq p_2$, 设 $p_1 < p_2$, 则若将 p_1 增加 Δp ($\Delta p < p_2 - p_1$) 而将 p_2 减少 Δp (这时总动量不变), 则有

$$(p_1 + \Delta p)^2 - p_1^2 = 2p_1 \Delta p + (\Delta p)^2$$

$$p_2^2 - (p_2 - \Delta p)^2 = 2p_2 \Delta p - (\Delta p)^2$$

这样一来,第一个粒子能量的平方增加了 $c^2[2p_1 \Delta p + (\Delta p)^2]$, 而第二个粒子能量的平方减少了 $c^2[2p_2 \Delta p - (\Delta p)^2]$, 两个粒子能量平方的净增量为

$$c^2[2p_1 \Delta p + (\Delta p)^2] - c^2[2p_2 \Delta p - (\Delta p)^2] = c^2[2\Delta p(p_1 - p_2 + \Delta p)]$$

其中 $\beta = \frac{v}{c}$, c 为真空中的光速。

$$v_r = \frac{2\beta c}{1 + \beta^2}$$

和王同学之间的相对速率为

29. (30 届决赛) 相对于站立在地面的李同学, 张同学以相对论速率 v 向右运动, 王同学以相对论速率 v 向左运动。当张同学和王同学相遇时, 三位同学把各自时钟的读数调整到零。当张同学和王同学之间的距离为 L 时(在地面参考系中观察), 张同学拍一下手。已知张同学

代人数据得

$$(8) \quad mc^2 = 7m_0c^2$$

由式(5)、式(6)、式(7)可得

$$(7) \quad (m'c^2)^2 = c^2 \left(\frac{p}{4} \right)^2 + m_0^2 c^4$$

对四个粒子中任一粒子, 由相对论能量和动量关系有

$$(6) \quad (mc^2)^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4$$

对碰前那个运动的质子, 由相对论能量和动量关系有

$$(5) \quad mc^2 + m_0c^2 = 4m'c^2$$

子的质量, 由式(3)得

再由式(1)可知, 碰后四个粒子的能量从而质量必相等。以 m' 表示碰后四个粒子中每个粒

$$(4) \quad p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{p}{4}$$

由上面论述可知

$$(3) \quad mc^2 + m_0c^2 = m_1c^2 + m_2c^2 + m_3c^2 + m_4c^2$$

$$(2) \quad p = p_1 + p_2 + p_3 + p_4$$

子的质量为 m_1, m_2, m_3 和 m_4 , 根据动量守恒和能量守恒, 有

设碰前运动质子的动量为 p , 质量为 m , 碰后四个粒子的动量为 p_1, p_2, p_3 和 p_4 , 四个粒

和动量关系式可知, 碰后四个粒子的动量必相等。

总结以上可见, 要想碰后四个粒子的总能量最小, 根据总动量守恒、能量守恒及相对论能量

了, 也就是说, 这时的能量也不是最小值。

分解, 沿 x 轴方向总动量守恒; 垂直于 x 轴方向的动量互相抵消, 但它们却使粒子的能量增大

(3) 若四个粒子的动量的方向不在同一直线上, 这时将它们沿 x 轴方向和垂直于 x 轴方向

动的, 则总能量必不是最小值。

能量必然大于 p_1 沿 x 轴正方向运动时的能量。也就是说, 只要四个粒子中有沿 x 轴负方向运

轴正方向运动的另一粒子的动量增加了 p_1 , 因为能量的平方与 p^2 呈线性关系, 所以这时的总

(2) 若四个粒子中, 有一个粒子其动量 p_1 沿 x 轴的负方向, 因为总动量守恒, 则必有沿 x

p_2 时对应的总能量并不是最小值。由此可判断, 四个粒子的动量必相等。

因已设 $p_1 < p_2$, 且 $\Delta p < p_2 - p_1$, 所以净增量是负的, 总能量将减少。这就是说, 设 $p_1 \neq$

(1) 求张同学拍手时其随身所携带的时钟的读数。

(2) 从王同学自身的参考系看,在张同学拍手这一事件发生的时刻,王同学也拍一下手。从张同学自身的参考系看,在王同学拍手这一事件发生的时刻,张同学第二次拍一下手。从王同学自身的参考系看,在张同学第二次拍手这一事件发生的时刻,王同学第二次拍一下手。照此继续下去,求当张同学第 n 次拍手时,地面参考系中张、王同学间的距离。

(3) 从李同学自身静止的参考系看,张同学和王同学依次拍手的时刻为多少? 并指出这些时刻的顺序。

【解】 为了表述简洁,以下分别用 A 、 B 、 C 表示李同学、张同学、王同学。按题意, A 的参考系为地面。

(1) 地面参考系中, A (李同学)系中, B 、 C 间距为 L 的时刻是

$$t_{A,1} = \frac{L}{2v} \quad (1)$$

在 A 看来,运动的时钟变慢了,因而, B (张同学)第一次拍手这一事件发生时, A 系、 B 系中所经历的时间有以下关系

$$t_{A,1} - 0 = \frac{t_{B,1} - 0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2)$$

其中, $t_{A,1} - 0$ 是 A 系(静止参考系)中的时间, $t_{B,1} - 0$ 是 B 系(运动参考系)中相应的时间,计时均从各自的零时刻开始。

因而, B 第一次拍手时其随身所携带的时钟的读数(时刻)为

$$t_{B,1} = \frac{L}{2v} \sqrt{1 - \beta^2} \quad (3)$$

也就是说,在 A 看来,“ B 、 C 间距为 L ”和“ B 第一次拍手”这两个事件是同一时刻 $t_{A,1}$ 发生的,但 A 意识到了 B 系的时刻 $t_{B,1}$ 与自己是不同的。

(2) 在 C (王同学)看来, B 以速度 v_r 运动,因而 B 的时钟也变慢了。记 $\beta_r = \frac{v_r}{c} = \frac{2\beta}{1 + \beta^2}$ 。在 C 系中, C 第一次拍手的时刻,两参考系所经历的时间有以下关系

$$t_{C,1} - 0 = \frac{t_{B,1} - 0}{\sqrt{1 - \beta_r^2}}$$

而

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta_r^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\beta}{1 + \beta^2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{(1 + \beta^2)^2 - (2\beta)^2}{(1 + \beta^2)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{(1 - \beta^2)^2}{(1 + \beta^2)^2}}} = \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}$$

所以

$$t_{C,1} = \frac{t_{B,1}}{\sqrt{1 - \beta_r^2}} = t_{B,1} \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2} \quad (4)$$

也就是说,尽管 C 认为自己与 B 同时拍手,但他也意识到自己时钟的时刻 $t_{C,1}$ 与 B 时钟的时刻 $t_{B,1}$ 是不同的。

同样,在 B 看来, C 系中的时钟也变慢了,因而 C 第一次拍手(B 第二次拍手)时,两参考系所经历的时间有以下关系 $t_{B,2} - 0 = (t_{C,1} - 0) \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}$,利用式(4),即得

(2) 求逆康普顿散射能够发生的条件;

(3) 如果入射光子能量为 2.00 eV , 电子能量为 $1.00 \times 10^6 \text{ eV}$, 求散射后光子的能量。

已知 $m_e = 0.511 \times 10^6 \text{ eV}/c^2$, 计算中有必要时可利用近似: 如果 $|x| \ll 1$, 有 $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$ 。

【解】 康普顿散射是光子与自由电子之间的散射, 两者之间有能量交换。散射过程中, 电子光子体系能量守恒、动量守恒。可以在实验室参考系中解决, 这是处理这类问题的一般方法。

康普顿散射公式 $\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta)$ 是在假设电子静止的条件下得到的, 光子的波长由 λ 变为 λ' , 散射方向与入射方向之间的夹角为 θ 。事实上, 由于光速是不变的, 无论散射前电子相对于实验室坐标系是否静止, 在电子看来, 入射光子的速度都是 c 。因而, 求解本题可以将参考系定在电子上, 这样就可以直接利用康普顿散射公式进行讨论。但是要注意, 由于多普勒效应, 在运动的电子看来, 光子的频率与实验室参考系中不同。

(1) 用两种方法求出散射电子的能量。

【解法 1】 在实验室参考系中, 散射前后电子的能量分别为 E_e 和 E'_e 。

根据关系式 $E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4$, 散射前后电子的动量分别为

$$p = \frac{\sqrt{E_e^2 - m_0^2 c^4}}{c}, \quad p' = \frac{\sqrt{E'_e{}^2 - m_0^2 c^4}}{c}$$

光子的动量分别为 $p_\gamma = \frac{h\nu}{c} = \frac{E_\gamma}{c}$, $p'_\gamma = \frac{h\nu'}{c} = \frac{E'_\gamma}{c}$ 。

散射前后, 能量守恒、动量守恒。如图 3.24 所示, 设散射后光子与散射前电子速度方向的夹角为 θ , 则

$$\begin{cases} E_e + E_\gamma = E'_e + E'_\gamma & (1) \\ \left(\frac{\sqrt{E'_e{}^2 - m_0^2 c^4}}{c} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{E_e^2 - m_0^2 c^4}}{c} - \frac{E_\gamma}{c} \right)^2 + \left(\frac{E'_\gamma}{c} \right)^2 - 2 \left(\frac{\sqrt{E_e^2 - m_0^2 c^4}}{c} - \frac{E_\gamma}{c} \right) \frac{E'_\gamma}{c} \cos \theta & (2) \end{cases}$$

式(1)化作 $E'_e = E_e + E_\gamma - E'_\gamma$, 两端平方得

$$E'_e{}^2 = E_e^2 + E_\gamma^2 + E'_\gamma{}^2 + 2E_e E_\gamma - 2E_e E'_\gamma - 2E_\gamma E'_\gamma \quad (3)$$

式(2)整理为

$$E'_e{}^2 = E_e^2 + E_\gamma^2 + E'_\gamma{}^2 - 2E_\gamma \sqrt{E_e^2 - m_0^2 c^4} - 2(\sqrt{E_e^2 - m_0^2 c^4} - E_\gamma) E'_\gamma \cos \theta \quad (4)$$

式(3)、式(4)联立, 可求得

$$E'_\gamma = \frac{E_e + \sqrt{E_e^2 - m_0^2 c^4}}{E_e + E_\gamma - (\sqrt{E_e^2 - m_0^2 c^4} - E_\gamma) \cos \theta} E_\gamma \quad (5)$$

【解法 2】 设在实验室参考系中, 散射前后, 光子的频率分别为 ν 、 ν' , 电子的速度分别为

$$\nu, \nu', \text{ 则 } E_\gamma = h\nu, \text{ 记 } \beta = \frac{v}{c}, E_e = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

在相对于散射前电子静止的参考系中, 光子沿 $-x$ 方向射向电子, 如图 3.25 所示, 则在该参考系中, 入射光子的频率为

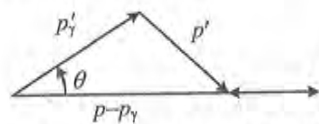


图 3.24 散射过程中动量守恒

需要注意的是,在实验室参考系中,散射光子与 x 轴的夹角不等于 θ' 。式(9)与式(5)是一

$$(9) \quad E'_y = h\nu' = \frac{E_c + \sqrt{E_c^2 - m_e c^2}}{E_c + \sqrt{E_c^2 - m_e c^2}} E_y = \frac{E_c + E_y - \sqrt{E_c^2 - m_e c^2} + E_y \cos \theta'}{E_c + \sqrt{E_c^2 - m_e c^2}} E_y$$

散射后光子的能量为

$$(8) \quad \nu' = \frac{E_c \nu (1 + \beta)}{E_c (1 - \beta) + h\nu (1 + \cos \theta')} = \frac{(E_c - \sqrt{E_c^2 - m_e c^2}) + h\nu (1 + \cos \theta')}{\nu (E_c + \sqrt{E_c^2 - m_e c^2})}$$

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{m_e c^2}{E_c}} = \frac{\sqrt{E_c^2 - m_e c^2}}{E_c}, \text{ 则}$$

$$\text{而 } m_e c^2 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} (1 + \beta) = E_c (1 + \beta), m_e c^2 \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} = \frac{m_e c^2 (1 - \beta)}{\sqrt{1 - \beta^2}} = E_c (1 - \beta),$$

$$= \frac{m_e c^2 \nu + h\nu \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} (1 + \cos \theta)}{1 + \beta} = \frac{m_e c^2 \nu \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}}{1 + \beta} = \frac{m_e c^2 \nu \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}}{m_e c^2 \nu \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}}$$

$$\nu' = \nu_2 = \frac{\sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}}{1 + \beta} \nu = \frac{m_e c^2 \nu_1 (1 + \cos \theta')}{m_e c^2 \nu_1} \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$$

$$\nu' = \nu_2 = \frac{1 + \beta \cos \theta}{1 + \beta} \nu$$

在实验室中,光源向 x 方向运动,沿 θ 方向散射光子的频率为

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta + \beta}{1 + \beta \cos \theta}$$

在实验室参考系中,光子的方向为 θ , θ' 与 θ' 之间的关系为

$$(7) \quad \nu_2 = \frac{c}{\lambda_2} = \frac{c}{\frac{c}{\nu_1} + \frac{h}{m_0 c} (1 + \cos \theta')} = \frac{c}{\frac{c}{\nu_1 m_0 c^2} + \frac{h \nu_1 (1 + \cos \theta')}{m_0 c^2}}$$

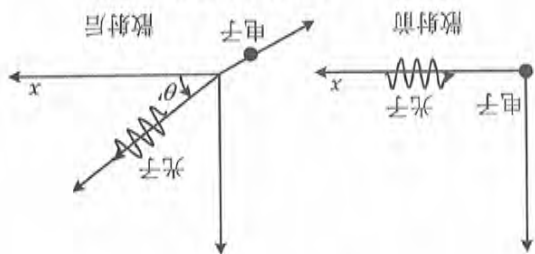
频率为

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \frac{h}{m_0 c} (1 + \cos \theta')$$

角为 $\pi - \theta'$, 按康普顿公式,散射光子的波长为

光子与电子对头碰撞并被散射,设光子散射方向与 x 方向之间的夹角为 θ' , 则光子的散射

图 3.25 在散射前电子参考系中



$$(6) \quad \nu_1 = \nu \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$$

样的。

(2) 发生逆康普顿效应, 要求 $E'_\gamma > E_\gamma$, 由式(6)可得

$$E_e + \sqrt{E_e^2 - m_0^2 c^4} > E_e + E_\gamma - (\sqrt{E_e^2 - m_0^2 c^4} - E_\gamma) \cos \theta$$

即

$$\sqrt{E_e^2 - m_0^2 c^4} > E_\gamma \quad (10)$$

(3) 由于 $E_\gamma \ll m_0 c^2, E_\gamma \ll E_e$, 一方面, 散射后的电子, 其动量变化极小, 几乎仍沿着原来的方向前进, 因而光子的方向角 $\theta \approx 0$; 另一方面, $\sqrt{E_e^2 - m_0^2 c^4} = E_e \sqrt{1 - m_0^2 c^4 / E_e^2} \approx E_e - m_0^2 c^4 / 2E_e$, 式(9)变为

$$\begin{aligned} E'_\gamma &\approx \frac{E_e + \sqrt{E_e^2 - m_0^2 c^4}}{E_e - \sqrt{E_e^2 - m_0^2 c^4} + 2E_\gamma} E_\gamma \approx \frac{2E_e - m_0^2 c^4 / (2E_e)}{m_0^2 c^4 / (2E_e) + 2E_\gamma} E_\gamma \approx \frac{2E_e E_\gamma}{m_0^2 c^4 / (2E_e) + 2E_\gamma} \\ &= 29.7 \times 10^6 \text{ eV} \end{aligned}$$

近代物理 2 原子的结构

1. (9 届预赛) 氢原子基态电子云分布的正确图形是图 3.26 中四个图中的_____图。

【解】 所谓电子云, 其实就是原子中电子在空间分布几率的图形化表示。本题中以点的疏密表示电子空间分布几率的相对大小。

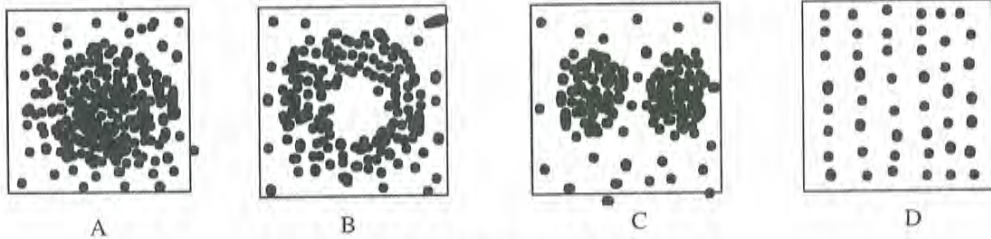


图 3.26 基态氢原子的电子云

原子中电子的分布几率是根据电子的波函数得到的。球坐标系中, 基态氢原子中电子的波函数为

$$\Psi_{100}(r, \theta, \varphi) = Y_{00}(\theta, \varphi) R_{10}(r) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \times 2 \left(\frac{Z}{a_1} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{Zr}{a_1}}$$

式中角标的数字是量子数, 用以表示电子(即原子)的状态, 基态时, 量子数为 1, 0, 0。r 为电子到原子核的距离, a_1 是第一玻尔半径。而电子的几率密度, 即在单位体积中出现的几率是波函数的模(波函数通常以复数表示)的平方。即上述电子在空间的几率密度为

$$P_{100} = |\Psi_{100}(r, \theta, \varphi)|^2 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{Z}{a_1} \right)^3 e^{-\frac{2Zr}{a_1}}$$

从式中不难看出, 离核越近的区域, 电子出现的几率越大, 即电子云的密度越高。这是毫无疑问的。

$$E_n = -\frac{hcR_H}{n^2}$$

而氢原子能级为

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

【解】根据里德伯方程,氢原子发出的光谱线的波数为

原子基态($n=1$)的能量为 $E_1 = -13.6\text{eV} = -2.18 \times 10^{-18}\text{J}$, 普朗克常量为 $h = 6.63 \times 10^{-34}\text{J} \cdot \text{s}$ 。试计算这是氢原子中电子从哪一个能级向哪一个能级(用量子数 n 表示)跃迁时发出的? 已知氢

3. (20 届预赛) 一个氢放电管发光,在其光谱中测得一条谱线的波长为 $4.86 \times 10^{-7}\text{m}$ 。

13.6/12 eV = 1.05 eV。

帕邢系是式(1)中 $m=3$ 的跃迁,最长波长谱线对应最小的光子能量, $n=4$,则光子能量为
巴耳末系是式(1)中 $m=2$ 的跃迁,最短波长的谱线所对应的光子能量 $13.6/4\text{eV} = 3.4\text{eV}$ 。
赖曼系是式(1)中 $m=1$ 的跃迁,所以最短波长谱线对应最大的光子能量,为 13.6eV 。
由于基态的电离能为 13.6eV ,所以 $hcR_H = 13.6\text{eV}$ 。

$$E_n = -\frac{hcR_H}{n^2}$$

也可以用以下公式表示氢原子的能级

$$\epsilon = hc\tilde{\nu} = \frac{hc}{\lambda} = hcR_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (1)$$

【解】用里德伯方程表示氢原子光谱线所对应的光子能量,即
帕邢系最短波长的谱线所对应的光子能量是 $\underline{\hspace{2cm}}\text{eV}$ 。
巴耳末系最短波长的谱线所对应的光子能量是 $\underline{\hspace{2cm}}\text{eV}$;
答:赖曼系最短波长的谱线所对应的光子能量是 $\underline{\hspace{2cm}}\text{eV}$;

能是 13.6eV)

2. (11 届预赛) 氢原子光谱中,赖曼系(由各激发态跃进到基态所发射的各光谱线组成的谱线系)、巴耳末系及帕邢系各系的最短波长的谱线所对应的光子能量是多少?(氢原子的电离

物理概念所引起的,而是由于题目不准确所造成的。

【点评】不少书籍中特别指出 A 是正确的答案,笔者对此难以认可。在没有明确说明所给出的图示到底是二维还是三维的情况下,做任何讨论都是没有意义的。对本题,绝不是由于以若认为这是二维图,则 B 应当是正确的答案。

由于题中并没有说明所画的是三维图,也很难让人相信本题中画在纸面上的是三维图,所是越靠近核密度越大,计算表明,在等于第一玻尔半径的球壳处,电子沿径向的密度最大。体积,半径小的球壳的厚度比半径大的球壳大得多。这样一来,在二维图中,电子云的密度并不径向的几率密度。由于基态波函数是球对称的,所以在球壳中几率密度相同。同样的单位与几率密度成正比。若是二维图,那就是三维图在平面上的投影,电子云所表示的就是电子沿空间各处所占的区域都是一样的,因而可以直接根据上述几率密度加以图示,即电子云的密度但是,同样的电子云,在三维图和二维图中的表示却不尽相同。若是三维图示,单位体积在

$$R_H = -\frac{n^2 E_n}{hc}$$

根据题中所给条件,可算得 $R_H = 1.10 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$ 。

由于谱线处于可见光波段,所以一定属于巴耳末线系,即上式中 $m = 2$,所以

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{m^2} - \frac{\tilde{\nu}}{R_H} = \frac{1}{m^2} - \frac{1}{\lambda R_H} = \frac{1}{4^2}$$

即上述谱线是从第 4 能级向第 2 能级的跃迁时发出的。

4. (21 届预赛) 填空

- (1) a. 原子大小的数量级为 _____ m。
- b. 原子核大小的数量级为 _____ m。
- c. 氢原子的质量约为 _____ kg。
- d. 一个可见光光子的能量的数量级为 _____ J。
- e. 在标准状态下, 1 cm^3 气体中的分子数约为 _____。

(普朗克常量 $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, 阿伏伽德罗常量 $N_A = 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$)

(2) 已知某个平面镜反射的光能量为入射光能量的 80%。试判断下列说法是否正确,并简述理由。

- a. 反射光子数为入射光子数的 80%。
- b. 每个反射光子的能量是入射光子能量的 80%。

【解】 (1) a. 原子的大小的数量级约为 10^{-10} m , 也就是 \AA 。

b. 原子核大小的数量级约为 10^{-14} m , 也就是 10 fm 。

c. 氢原子的质量约为 $4u = 4 \times 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg} = 6.68 \times 10^{-27} \text{ kg}$ 。

d. 一个可见光光子的能量(波长按 500 nm 计算)约为 $2.5 \text{ eV} = 4 \times 10^{-19} \text{ J}$ 。

e. 按理想气体的状态方程, 单位体积中的分子数为 $n = \frac{P_0}{kT}$, 其中 $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$,

为玻尔兹曼常量。在标准状态下, $p_0 = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$, $T = 273 \text{ K}$, 算得 $n = 2.7 \times 10^{25} \text{ m}^{-3} = 2.7 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$, 即 1 cm^3 气体中的分子数约为 2.7×10^{19} 个。

(2) 反射光的波长或频率与入射光相比几乎没有变化, 所以每个被反射的光子的能量几乎不变。因而上述反射镜反射光子数为入射光子数的 80%。

5. (22 届预赛) 处在激发态的氢原子向能量较低的状态跃迁时会发出一系列不同频率的光, 称为氢光谱。氢光谱线的波长 λ 可以用下面的巴耳末-里德伯公式来表示

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

n, k 分别表示氢原子跃迁前后所处状态的量子数。 $k = 1, 2, 3, \dots$, 对于每一个 k , 有 $n = k + 1, k + 2, k + 3, \dots$, R 称为里德伯常量, 是一个已知量。对于 $k = 1$ 的一系列谱线其波长处在紫外线区, 称为赖曼系; $k = 2$ 的一系列谱线其波长处在可见光区, 称为巴耳末系。

用氢原子发出的光照射某种金属进行光电效应实验, 当用赖曼系波长最长的光照射时, 遏止电压的大小为 U_1 ; 当用巴耳末系波长最短的光照射时, 遏止电压的大小为 U_2 。已知电子电量的大小为 e , 真空中的光速为 c , 试求: 普朗克常量和该种金属的逸出功。

【解】氢原子跃迁所发出光子的能量为

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = hcR \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n^2} \right)$$

赖曼系波长最长的光子能量为 $\varepsilon_1 = hcR \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3hcR}{4}$ ；巴耳末系波长最短的光子能量

$$\text{为 } \varepsilon_2 = hcR \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{hcR}{4}。$$

光电效应过程中的能量关系可表示为 $\varepsilon = W + eU$ ，因而

$$W = \frac{3hcR}{4} - eU_1 = \frac{hcR}{4} - eU_2$$

从中解得 $hcR = 2e(U_1 - U_2)$ ，所以有

$$h = \frac{2e}{Rc}(U_1 - U_2)$$

$$W = \frac{3}{2}e(U_1 - U_2) - eU_1 = \frac{e}{2}(U_1 - 3U_2)$$

6. (23届预赛) 一对正、负电子可形成一种寿命比较短的称为电子偶素的新粒子。电子偶素中的正电子与负电子都以速率 v 绕它们连线的中点做圆周运动，假定玻尔关于氢原子的理论可用于电子偶素，电子的质量 m 、速率 v 和正、负电子间的距离 r 的乘积也满足量子化条件，即

$$mrv = n \frac{h}{2\pi}$$

式中 n 称为量子数，可取整数值 1, 2, 3, …； h 为普朗克常量。试求电子偶素处在各定态时的 r 和能量以及第一激发态与基态能量之差。

【解】一对分别带正负电荷的粒子之间通过库仑相互作用形成某种稳定的结构，若对这一类问题进行一般性的讨论，就是玻尔的单电子原子模型。

可以用两种方法解决这类问题。

第一种方法，假设原子核静止不动，电子绕核做匀速圆周运动。库仑力为向心力，即

$$\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{m_e v^2}{r}$$

电子绕核运动，要遵循角动量量子化条件，即

$$P_\phi = mvr_n = n \frac{h}{2\pi} = nh$$

由式(1)得

$$m_e v^2 r_n = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}$$

由式(2)得

$$m_e v^2 r_n^2 = (nh)^2$$

式(4)÷式(3)，得到

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 (nh)^2}{m_e Z e^2}$$

(5)

(4)

(3)

(2)

(1)

若记 $a_1 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} = 0.529166 \times 10^{-10} \text{ m}$, 这就是第一玻尔半径, 则

$$r_n = \frac{n^2}{Z} a_1$$

体系的能量为电子的动能与库仑势能之和。由式(1)有 $\frac{m_e v^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$, 所以

$$E = E_p + E_k = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{1}{2} m_e v^2 = -\frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

将式(5)代入上式, 即有

$$E_n = -\frac{2\pi^2 m_e e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \frac{Z^2}{n^2} \quad (6)$$

但由于原子核的质量 M 不可能无限大, 所以原子核不可能静止不动, 所以实际的情况是电子与核都绕其质心转动。按照力学的方法, 对于这种情况, 在质心系中, 只要将上述各式中电子的质量 m_e 以约化质量 $\mu = \frac{Mm_e}{M+m_e}$ 代替即可。于是电子与核之间的距离为

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 (nh)^2}{m_e Ze^2} \left(1 + \frac{m_e}{M}\right) \quad (7)$$

原子的能级为

$$E_n = -\frac{2\pi^2 m_e e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \frac{Z^2}{n^2} \frac{1}{1 + m_e/M} \quad (8)$$

第二种方法, 直接采用质心坐标系讨论。

质心在两体的连线上, 电子和原子核之间的相互作用力也沿着上述连线并始终指向质心。

设电子、原子核到质心的距离分别为 l_1 、 l_2 , 并记 $r = l_1 + l_2$, 则库仑力为 $F = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, 且有 $l_1 =$

$$\frac{Mr}{M+m_e}, l_2 = \frac{m_e r}{M+m_e}$$

电子与原子核做匀速圆周运动的角速度为 ω , 则

$$\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = m_e l_1 \omega^2$$

从上式可得 $\frac{Mm_e}{M+m_e} r \omega^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, 即

$$\omega^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 \mu r^3} \quad (9)$$

原子的角动量为

$$P_\varphi = m_e l_1 v_1 + M l_2 v_2 = (m_e l_1^2 + M l_2^2) \omega = \left[m_e \left(\frac{M}{M+m_e} \right)^2 + M \left(\frac{m_e}{M+m_e} \right)^2 \right] r^2 \omega$$

即

$$P_\varphi = \frac{Mm_e}{M+m_e} r^2 \omega$$

角动量子化的条件为 $\frac{Mm_e}{M+m_e} r^2 \omega = n \hbar$, 即有

$$\omega = \frac{n \hbar}{\mu r^2} \quad (10)$$

8. (18 复赛) 有两个处于基态的氢原子 A、B, B 静止, A 以速度 v_0 与之发生碰撞。已知: 碰撞后二者的速度 v_A 和 v_B 在一条直线上, 碰撞过程中部分动能有可能被某一氢原子吸收, 从而该原子由基态跃迁到激发态, 然后, 此原子向低能级跃迁, 并发出光子。如欲碰后发出一个光子, 试论证: 速度 v_0 至少需要多大(以 $m \cdot s^{-1}$ 表示)?

$$E_3 - E_2 = \frac{hc}{\lambda_1} - \frac{hc}{\lambda_2} = 1.59 \text{ eV}$$

【解】按题中所给条件 $\frac{hc}{\lambda_1} = E_1 - E_2$, $\frac{hc}{\lambda_2} = E_1 - E_3$, 于是有

差为 $\frac{hc}{\lambda_1} - \frac{hc}{\lambda_2}$ eV。常量 h 与光速 c 的乘积 $hc = 1.24 \times 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{eV}$ 。由此可知 Ne 的激发态能级 E_3 与 E_2 的能级谱线是 Ne 原子从能级 E_1 向能级较低的激发态能级(用 E_3 表示)跃迁时发生的。已知普朗克级(用 E_1 表示)向能级较低的激发态能级(用 E_2 表示)跃迁时发生的; 波长为 $3.39 \times 10^{-6} \text{ m}$ 的级(用 E_1 表示)产生的波长为 $6.33 \times 10^{-7} \text{ m}$ 的谱线是 Ne 原子从激发态能级(用 E_1 表示)跃迁时发生的; 波长为 $3.39 \times 10^{-6} \text{ m}$ 的谱线是 Ne 原子从激发态能级(用 E_1 表示)向能级较低的激发态能级(用 E_2 表示)跃迁时发生的。已知普朗克常量 h 与光速 c 的乘积 $hc = 1.24 \times 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{eV}$ 。由此可知 Ne 的激发态能级 E_3 与 E_2 的能级差为 $\frac{hc}{\lambda_1} - \frac{hc}{\lambda_2}$ eV。

$$E_2 - E_1 = \frac{4}{6.8} \text{ eV} = 1.7 \text{ eV}$$

第一激发态与基态能量差

$$E_n = -\frac{\pi^2 m_e e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 h^2 n^2} = -\frac{13.6}{2n^2} = -\frac{6.8}{n^2} \text{ eV}$$

偶素能级

$$r_n = \frac{8\pi\epsilon_0 (nh)^2}{m_e e^2} = 2n^2 a_1$$

则只要将玻尔模型中的质量以上述约化质量代替, 公式的形式不变。于是有轨道半径

$$\mu = \frac{m}{2}$$

对于本题, 在质心坐标系中, 电子偶素的约化质量为

与式(8)相同。

$$E_n = -\frac{1}{2} \frac{Zc^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{2\pi^2 \mu e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 h^2 n^2} = -\frac{2\pi^2 m_e e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 h^2 n^2} \frac{1}{1 + m_e/M}$$

于是有

$$\frac{2}{\omega^2} (m_e l_1^2 + M l_2^2) = \frac{\omega}{2} \frac{M m_e}{M + m_e} r^2 = \frac{1}{2} \frac{Zc^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

其中 $m_e l_1^2 + M l_2^2 = \left[m_e \left(\frac{M}{M + m_e} \right)^2 + M \left(\frac{m_e}{M + m_e} \right)^2 \right] r^2 = \frac{M m_e}{M + m_e} r^2$, 利用式(9), 则

$$E = -\frac{Zc^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{1}{2} m_e v_1^2 + \frac{1}{2} M v_2^2 = -\frac{Zc^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\omega}{2} (m_e l_1^2 + M l_2^2)$$

与式(7)相同。而整个体系的能量为

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 (nh)^2}{\mu m_e Zc^2} = \frac{4\pi\epsilon_0 (nh)^2}{m_e Zc^2} \left(1 + \frac{M}{m_e} \right)$$

由式(9)、式(10), 可得

已知:电子电量 $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$, 质子质量为 $m_p = 1.673 \times 10^{-27} \text{ kg}$, 电子质量为 $m_e = 0.911 \times 10^{-31} \text{ kg}$, 氢原子的基态能量为 $E_1 = -13.58 \text{ eV}$ 。

【解】碰撞后, B 原子被激发, 之后跃迁发出一个光子。这一过程中, 整个体系的能量守恒、动量守恒, 即

$$E_{A0} + E_{B0} = E_A + E_B + E_\varphi$$

$$p = p_A + p_B + p_\varphi$$

其中下标 φ 表示光子。

严格来说, 应当在相对论条件下进行讨论。但是考虑到氢原子的激发态的能量仅仅比基态高出几个电子伏特, 相应地, 原子的动能也就是几个电子伏特。而相对论条件下氢原子的静止能量高于 900 MeV 。所以可以判断原子的速度较低, 可以不考虑相对论效应, 即原子的能量可以用经典动能表示。又考虑到只有对心碰撞的条件下 B 原子才能获得最大的动能。所以将动量守恒以标量式表示即可。上述能量、动量的方程为

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_A^2}{2} + \frac{mv_B^2}{2} + h\nu \quad (1)$$

$$mv = mv_A + mv_B + \frac{h\nu}{c} \quad (2)$$

氢原子从第一激发态(最低的激发态)跃迁所发出光子的能量为 $13.6 \text{ eV}/4 = 3.4 \text{ eV}$, 光子的动量相对于原子的动量要小得多, 所以计算时, 式(2)中光子的动量可忽略。由式(2)得到

$$v_A = v - v_B$$

代入式(1), 有 $\frac{mv^2}{2} = \frac{mv^2}{2} - mvv_B + mv_B^2 + h\nu$, 解得

$$v = v_B + \frac{h\nu}{mv_B} \quad (3)$$

式(3)取最小值的条件为

$$v_B = \sqrt{\frac{h\nu}{m}}$$

相应地有

$$v = 2\sqrt{\frac{h\nu}{m}}$$

代入参数, $h\nu = 3.4 \text{ eV}$, $m = \frac{938 \text{ MeV}}{c^2}$, 得到

$$v = 2\sqrt{\frac{h\nu}{m}} = 0.12 \times 10^{-3} c = 3.6 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

【点评】需要指出的是, 跃迁不需要时间, 即碰撞的同时, 发生 B 原子被激发并跃迁发光, 所以不能将此过程分离为两原子碰撞, 依据能量守恒、动量守恒计算两原子碰撞后的动能, 再讨论激发与跃迁。

9. (13 届决赛) 已知基态 He^+ 的电离能为 $E = 54.4 \text{ eV}$ 。

(1) 为使处于基态的 He^+ 进入激发态, 入射光子所需的最小能量应为多少?

(2) He^+ 从上述最低激发态跃迁返回基态时, 如考虑到该离子的反冲, 则与不考虑反冲相

比,它所发射的光子波长变化的百分比有多大? (离子 He⁺ 的能级 E_n 与 n 的关系和氢原子能级公式类似。电子电荷取 1.60 × 10⁻¹⁹ C,质子和中子质量均取 1.67 × 10⁻²⁷ kg。在计算中,可采用合理的近似。)

【解】(1) 题中所说 He⁺ 的电离能为 E = 54.4 eV,是指按照玻尔模型,基态 He⁺ 的能级为

$$E_1 = -\frac{Z^2 \times 13.6}{n^2} = -\frac{2^2 \times 13.6}{1^2} \text{ eV}$$

则 He⁺ 的能级为

$$E_n = -\frac{Z^2 \times 13.6}{n^2} = -\frac{54.4}{n^2} \text{ eV}$$

第一激发态 (n = 2) 与基态 (n = 1) 的能量差为

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^2}\right) \times 54.4 \text{ eV} = 40.8 \text{ eV}$$

光子被离子吸收过程中,能量守恒,动量守恒,即 E₀ + E_φ = E, 0 = p + p_φ。其中 E₀ 为静止基态离子的能量, E 为激发态离子的能量。

不考虑相对论效应,设离子的反冲动量为 p, 则能量守恒与动量守恒关系分别为

$$(1) \quad h\nu = \Delta E + \frac{p^2}{2m}$$

$$(2) \quad \frac{h\nu}{c} = p$$

将式(2)代入式(1)中,得到

$$\frac{(h\nu)^2}{2mc^2} - h\nu + \Delta E = 0$$

方程的解为 $h\nu = mc^2 \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2\Delta E}{mc^2}}\right)$ 。取“-”号,得到

$$h\nu = mc^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2\Delta E}{mc^2}}\right) \approx mc^2 \left[1 - \left(1 - \frac{\Delta E}{mc^2}\right)\right] = \Delta E = 40.8 \text{ eV}$$

(2) 从激发态向基态跃迁,若不考虑反冲,则 $h\nu = \Delta E = 40.8 \text{ eV}$ 。

若考虑反冲,则能量守恒、动量守恒,即

$$\Delta E = h\nu' + \frac{p^2}{2m}$$

$$0 = \frac{h\nu'}{c} + p$$

可得 $\Delta E = \frac{(h\nu')^2}{2mc^2} + h\nu'$, 即 $\frac{(h\nu')^2}{2mc^2} + h\nu' - \Delta E = 0$, 解为 $h\nu' = mc^2 \left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{2\Delta E}{mc^2}}\right)$ 。取

“+”号,有

$$h\nu' = mc^2 \left(\sqrt{1 + \frac{2\Delta E}{mc^2}} - 1\right)$$

其中 $mc^2 = 4 \times 939 \text{ MeV}$, $\frac{2\Delta E}{mc^2} = 2.17 \times 10^{-8}$, 算得 $h\nu' = 40.75 \text{ eV}$ 。

波长变化的百分比为

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda}{c} \Delta\left(\frac{1}{\nu}\right) = \nu \frac{\Delta\nu}{\nu^2} = \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{h\Delta\nu}{h\nu} = \frac{h\nu - h\nu'}{h\nu} = 0.12\%$$

10. (22 届决赛) 原子核基态的静止质量为 m , 激发态的能量比基态高 E 。

(1) 一个静止的激发态原子核发射一个光子跃迁回基态, 求发光的波长。

(2) 由于热运动, 原子核一般不处于静止状态, 仅考虑相对观察点沿连线方向运动的原子核, 其速率最大为 v , 求发光的最大波长与最小波长之差。

真空光速记为 c , 普朗克常量 h 。

【解】 (1) 原子核也有一系列的激发态能级。原子核的衰变, 就是其在一系列能级之间跃迁, 并放出相应的粒子射线, 如 α 射线、 β 射线、 γ 射线, 等等。由于核能级的间隔很大, 所以跃迁(衰变)发出的粒子具有很高的能量。这种情况下, 应当考虑相对论效应。

本题中, 原子核跃迁放出一个 γ 光子, 考虑到能量守恒、动量守恒, 则跃迁前后, 有

$$m'c^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + h\nu$$

$$0 = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \frac{h\nu}{c}$$

其中 m' 为激发态静止原子核的质量, $m'c^2 = mc^2 + E$, E 为激发态相对于基态的能量差。

或者记跃迁后原子核的动量为 p , 则上面两式可写作

$$mc^2 + E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} + h\nu \quad (1)$$

$$p = \frac{h\nu}{c} \quad (2)$$

将式(2)代入式(1), 得到 $mc^2 + E = \sqrt{(h\nu)^2 + m^2c^4} + h\nu$, 整理为

$$mc^2 + E - h\nu = \sqrt{(h\nu)^2 + m^2c^4}$$

两边平方, 得 $(mc^2)^2 + E^2 + (h\nu)^2 + 2Emc^2 - 2Eh\nu - 2mc^2h\nu = (h\nu)^2 + m^2c^4$, 整理后得

$$h\nu = \frac{E^2 + 2Emc^2}{2E + 2mc^2} = \frac{E}{2} \left(1 + \frac{mc^2}{E + mc^2} \right) = \frac{E}{2} \left[1 + \frac{1}{1 + \frac{E}{mc^2}} \right]$$

若考虑到 $E \ll mc^2$, $h\nu \approx \frac{E}{2} \left(1 + 1 - \frac{E}{mc^2} \right) = E \left(1 - \frac{E}{2mc^2} \right)$, 则波长为

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{E \left(1 - \frac{E}{2mc^2} \right)} \approx \frac{hc}{E} \left(1 + \frac{E}{2mc^2} \right)$$

(2) 发出的光子向着观察者运动, 才能被观测到, 所以这种情况下, 光子的速度与原子核的速度共线。能量守恒、动量守恒可写作

$$\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} + E = \sqrt{p'^2c^2 + m^2c^4} + h\nu \quad (3)$$

$$p = p' + \frac{h\nu}{c} \quad (4)$$

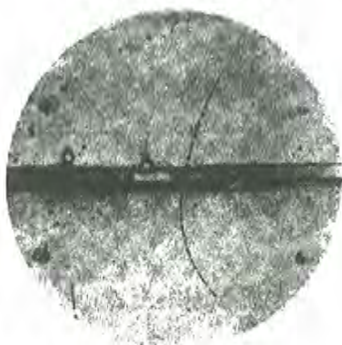
取朝向观察者速度为正, p, p' 均可取正负。

其中由于表达式 $\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$ 、 $\sqrt{p'^2c^2 + m^2c^4}$ 给计算带来不便, 先做近似, 将其简化为

$$\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} = mc^2 \sqrt{1 + \left(\frac{p}{mc} \right)^2} \approx mc^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{p}{mc} \right)^2 \right] = mc^2 + \frac{p^2}{2m}$$

$$\sqrt{p'^2c^2 + m^2c^4} \approx mc^2 + \frac{p'^2}{2m}$$

图 3.27 电子径迹



迹在纸面内,图的中间是一块与纸面垂直的铅板,外加恒定匀

(2) 图 3.27 是某种粒子穿过云室留下的径迹的照片。径

$= 1.44 \text{ eV} \cdot \text{nm}$, k 是静电力常量, e 是基本电荷量。

$hc = 197.3 \text{ MeV} \cdot \text{fm} = 197.3 \text{ eV} \cdot \text{nm}$, $ke^2 = 1.44 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$

已知电子质量 $m = 0.511 \text{ MeV}/c^2$, c 是光速,组合常量

电离能 E^+ , 并与实验测得的氢原子一级电离能相比较。

和假设,求出电子运动轨道的半径 r_0 、基态能量 E_0 以及一级

设两个电子总处于通过氢核的一条直径的两端。试用此模型

述玻尔模型的基础上考虑电子之间的相互作用,进一步假

(II) 实验测得的氢原子一级电离能是 24.6 eV 。若在上

中一个电子移到无限远所需要的能量。

(I) 如果忽略电子间的相互作用,氢原子的一级电离能是多少 eV? 一级电离能是指把其

的圆上运动,半径相同,角动量均为 h ($h = h/(2\pi)$),其中 h 是普朗克常量。

11. (25 届决赛) (1) 假设对氢原子基态采用玻尔模型,认为每个电子都在以氢核为中心

对于本题这一问,也可以直接用相对论多普勒效应求解。

$$\Delta\lambda = \frac{c\sqrt{1-v^2/c^2}}{2v} = \frac{\sqrt{c^2-v^2}}{2v}$$

由于 $\Delta\lambda = \Delta\nu = \frac{4pc\left(1 + \frac{mc^2}{E}\right)}{2mc^2\left(1 + \frac{mc^2}{E}\right)} = \frac{2p}{mc}$, 而 $p = \frac{mv\sqrt{1-v^2/c^2}}{c}$, 所以

$$\Delta(h\nu) = 4pc\left(1 + \frac{mc^2}{E}\right)$$

长。两者能量之差为

核动量为负最大时,波长最短;核动量为正最大时,光子能量最小,波长最

$$\approx 2(mc^2 - pc)\left[1 + \frac{E}{mc^2}\left(1 + \frac{2pc}{mc^2}\right)\right] \approx 2(mc^2 - pc)\left(1 + \frac{mc^2}{E}\right)$$

$$\approx 2(mc^2 - pc)\left[1 + \frac{mc^2 E}{(mc^2)^2 - 2mc^2 pc}\right] = 2(mc^2 - pc)\left(1 + \frac{mc^2}{E} \frac{1 - 2pc/mc^2}{1}\right)$$

$$h\nu \approx (mc^2 - pc) + (mc^2 - pc)\left[1 + \frac{mc^2 E}{(mc^2 - pc)^2}\right] = 2(mc^2 - pc)\left[1 + \frac{mc^2 E}{(mc^2 - pc)^2}\right]$$

考虑到原子核的动能、光子的能量都比核的静止能量小得多,则可做以下近似

$$h\nu = (mc^2 - pc) + \sqrt{(mc^2 - pc)^2 + 2mc^2 E}$$

解得 $h\nu = (mc^2 - pc) \pm \sqrt{(mc^2 - pc)^2 + 2mc^2 E}$, 显然应当取“+”号,即

$$(h\nu)^2 + 2(mc^2 - pc)h\nu - 2mc^2 E = 0$$

由式(4)得 $p' = p - \frac{c}{h\nu}$, 将其代入式(5), 得到

$$\frac{p^2}{2m} + E = \frac{p'^2}{2m} + h\nu$$

(5)

其实就是用静止能量与非相对论动能之和表示原子核的能量。式(3)简化为

强磁场的方向垂直纸面向里。假设粒子电荷的大小是一个基本电荷量 e , $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$, 铅板下部径迹的曲率半径 $r_d = 210 \text{ mm}$, 铅板上部径迹的曲率半径 $r_u = 76.0 \text{ mm}$, 铅板内的径迹与铅板法线成 $\theta = 15.0^\circ$, 铅板厚度 $d = 6.00 \text{ mm}$, 磁感应强度 $B = 1.00 \text{ T}$, 粒子质量 $m = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg} = 0.511 \text{ MeV}/c^2$ 。不考虑云室中气体对粒子的阻力。

(I) 写出粒子运动的方向和电荷的正负。

(II) 试问铅板在粒子穿过期间所受的力平均为多少 N?

(III) 假设射向铅板的不是一个粒子, 而是从加速器引出的流量为 $j = 5.00 \times 10^{18} \cdot \text{s}^{-1}$ 的脉冲粒子束, 一个脉冲持续时间为 $\tau = 2.50 \text{ ns}$ 。试问铅板在此脉冲粒子束穿过期间所受的力平均为多少 N? 铅板在此期间吸收的热量又是多少 J?

【解】(1) (I) 若忽略电子间的相互作用, 氦原子的总能量是两个电子单独与相互作用的能量之和。按玻尔理论, 基态时能量为

$$E_1 = -\frac{4hcR}{1^2} - \frac{4hcR}{1^2} = -8hcR$$

将一个电子电离后, 离子中的能量为

$$E_1^+ = -\frac{4hcR}{1^2} = -4hcR$$

所以一级电离能为

$$\Delta E = E_1^+ - E_1 = 4hcR = 4 \times 13.6 \text{ eV} = 54.4 \text{ eV}$$

这一问也可以从基本的力学定律出发进行讨论。

氦原子中有两个电子, 一级电离能 E^+ 是把其中一个电子移到无限远处所需要的能量, 满足 $\text{He} + E^+ \rightarrow \text{He}^+ + e^-$ 。为了得到氦原子的一级电离能 E^+ , 需要求出一个电子电离以后氦离子体系的能量 E^* 。这是一个电子围绕氦核运动的体系, 下面给出两种解法。

【解法 1】在力学方程

$$\frac{2ke^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

中, r 是轨道半径, v 是电子速度。对基态, 用玻尔量子化条件(角动量为 \hbar)可以解出

$$r_0 = \hbar^2 / 2ke^2 m \quad (1)$$

于是氦离子能量

$$E^* = \frac{p_0^2}{2m} - \frac{2ke^2}{r_0} = -\frac{2k^2 e^4 m}{\hbar^2} \quad (2)$$

其中 p_0 为基态电子动量的大小, 代入数值得

$$E^* = -\frac{2(ke^2)^2 mc^2}{(hc)^2} \approx -54.4 \text{ eV} \quad (3)$$

由于不计电子间的相互作用, 氦原子基态的能量 E_0 是该值的 2 倍, 即

$$E_0 = 2E^* \approx -108.8 \text{ eV} \quad (4)$$

氦离子能量 E^* 与氦原子基态能量 E_0 之差就是氦原子的一级电离能

$$E^+ = E^* - E_0 = -E^* \approx 54.4 \text{ eV} \quad (5)$$

【解法 2】氦离子能量

$$E^* = \frac{p^2}{2m} - \frac{2ke^2}{r}$$

其中 q 是粒子电荷, v 是粒子速度的大小, p 是粒子动量的大小, $\Delta\phi$ 是粒子在 Δt 时间内转过

$$(1) \quad qBv = \left| \frac{\Delta p}{\Delta t} \right| = p \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{p}{r}$$

作用下的运动轨迹就是曲率半径为一定值的圆弧;可以写出其运动方程

电粒子动量的大小,只改变其方向。若不考虑云室中气体对粒子的阻力,带电粒子在恒定磁场

(II) 如题图所示,粒子的运动速度 v 与磁场方向垂直,洛伦兹力在纸面内;磁力不改变荷

(2) (I) 粒子从下部射向并穿过铅板向上运动,其电荷为正。

分别与式(7),式(6)相同。

$$E_0 = -\frac{49k^2e^4m}{16h^2}, \quad r_0 = \frac{7ke^2m}{4h^2}$$

当上式等号右边第一项为零时,能量最小。由此可知,基态能量与半径分别为

$$E = \frac{h^2}{m} \left(\frac{1}{r} - \frac{7ke^2m}{4h^2} \right)^2 - \frac{49k^2e^4m}{16h^2}$$

可以化成

$$E = 2 \left(\frac{p^2}{2m} - \frac{2ke^2}{r} + \frac{ke^2}{2r} \right) + \frac{h^2}{mr^2} - \frac{7ke^2}{2r}$$

【解法 2】 氢原子能量

这仍比实验测得的氢原子一级电离能 24.6 eV 高出 4.4 eV。

$$(9) \quad E^* = E^* - E_0 \approx 29.0 \text{ eV}$$

所以,氢原子的一级电离能

$$r_0 = \frac{4(hc)^2}{7ke^2mc^2} \approx 0.0302 \text{ nm}$$

$$(8) \quad E_0 = -\frac{49(k^2e^2)^2mc^2}{16(hc)^2} \approx -83.4 \text{ eV}$$

代入数值算得

$$(7) \quad E_0 = 2 \left(\frac{p_0^2}{2m} - \frac{2ke^2}{r_0} + \frac{ke^2}{2r_0} \right) - \frac{49k^2e^4m}{16h^2}$$

于是氢原子基态能量

$$(6) \quad r_0 = 4h^2/7ke^2m$$

和基态量子化条件 $mv = h$, 可以解出半径

$$mv^2 = \frac{2ke^2}{r} - \frac{ke^2}{2r} = \frac{4r^2}{7ke^2}$$

【解法 1】 利用力学方程

(II) 下面,同样给出求氢原子基态能量 E_0 和半径 r_0 的两种解法。

分别与式(1)、式(2)相同。

$$r_0 = \frac{h^2}{2ke^2m}, \quad E^* = -\frac{2k^2e^4m}{h^2}$$

因基态的能量最小,式(4)等号右边的第一项为零,所以半径和能量分别为

$$E^* = \frac{2mv^2}{h^2} - \frac{2ke^2}{r} = \frac{2m}{h^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{2ke^2m}{h^2} \right)^2 - \frac{2k^2e^4m}{h^2}$$

把基态的角动量关系 $rp = h$ 代入,式(3)可以改写成

的角度, r 是轨迹曲率半径。于是有

$$p = qBr \quad (2)$$

按题意, $q = e$, 用 p_d 和 p_u 分别表示粒子射入铅板和自铅板射出时动量的大小, 并在式(1)中代入有关数据, 可以算得

$$p_d = 63.0 \text{ MeV}/c, \quad p_u = 22.8 \text{ MeV}/c \quad (3)$$

注意到当 $pc \gg mc^2$ 时应使用狭义相对论, 从

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (4)$$

中可以得到

$$v = \frac{c}{\sqrt{1 + (mc/p)^2}} \quad (5)$$

用 v_d 和 v_u 分别表示粒子进入和离开铅板时的速度大小。把式(2)以及 $m = 0.511 \text{ MeV}/c^2$ 代入式(3), 可得

$$v_d \approx c, \quad v_u \approx c \quad (6)$$

于是, 粒子穿过铅板的平均速度 $\bar{v} = (1/2)(v_d + v_u) \approx c$ 。用 Δt 表示粒子穿过铅板的时间, 则有

$$\bar{v} \cos \theta \Delta t = d \quad (7)$$

再用 Δp_{du} 表示粒子穿过铅板动量改变量的大小, 铅板所受到的平均力的大小

$$f = \frac{\Delta p_{du}}{\Delta t} = \frac{p_d - p_u}{d/(v \cos \theta)} \approx \frac{(p_d - p_u) c \cos \theta}{d} \quad (8)$$

代入有关数值得

$$f \approx 1.04 \times 10^{-9} \text{ N} \quad (9)$$

(III) 一个粒子穿过铅板的时间

$$\Delta t = \frac{d}{\bar{v} \cos \theta} \approx \frac{d}{c \cos \theta} \approx 2.07 \times 10^{-11} \text{ s} = 0.0207 \text{ ns} \quad (10)$$

比粒子束流的脉冲周期 $\tau = 2.50 \text{ ns}$ 小得多。铅板在此脉冲粒子束穿过期间所受的力的平均大小

$$F \approx (p_d - p_u) j \quad (11)$$

代入数据得

$$F = 0.107 \text{ N} \quad (12)$$

运用式(4), 可把粒子能量写成

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (13)$$

所以粒子穿过铅板前后的能量分别为

$$E_d = \sqrt{p_d^2 c^2 + m^2 c^4} = 63.0 \text{ MeV}, \quad E_u = \sqrt{p_u^2 c^2 + m^2 c^4} = 22.8 \text{ MeV} \quad (14)$$

于是, 铅板在脉冲粒子束穿过期间所吸收的热量

$$Q = (E_d - E_u) j \tau \quad (15)$$

代入数据得

$$Q = 8.04 \times 10^{-2} \text{ J} \quad (16)$$

$$1 \text{ \AA} = \frac{h^2}{m_e k_e e^2} = 0.529 \text{ \AA} \times 10^{-10} \text{ m}$$

于是有

$$r_n = n \text{ \AA}, \quad v_n = \frac{1}{n} \frac{\text{\AA}}{\text{Tau}}, \quad E_n = -\frac{1}{2n^2} \text{Eau}$$

单位,则上述公式分别变为

若规定电子质量为质量单位, $h (h = h/2\pi)$ 为角动量单位, 质子电荷量的 $\sqrt{k_e}$ 倍为电荷量

$$r_n = \frac{(nh)^2}{m_e k_e e^2}, \quad v_n = \frac{nh}{k_e e^2}, \quad E_n = -\frac{2h^2}{m_e k_e e^4} n^2$$

设电子绕核做匀速圆周运动, 可得到

$$P_p = m_e v_n r_n = nh$$

角动量子化的条件为

$$F = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = k_e \frac{e^2}{r^2}$$

【解】在玻尔模型中, 电子所受的静电力, 即库仑力为

耳的换算关系。结果用 k_e, m_e, e 和 h 等常量表示。

13. (29 届决赛) 在处理微观物理问题时, 经常接触到诸如电子质量 m_e 、质子电荷量 e 及普朗克常量 h 等基本物理常量。在国际单位制中, 这些物理常量的数值都很小, 给相关的数值计算带来不便。为了方便起见, 在微观物理领域引入所谓“原子单位制”, 规定电子质量为质量单位, $h (h = h/(2\pi))$ 为角动量单位, 质子电荷量的 $\sqrt{k_e}$ 倍为电荷量单位, 其中常数 k_e 和国际单位制中的静电力常量取值相同。按如上定义规定了质量、电荷量和角动量的基本单位后, 在“原子单位制”中其他物理量的单位可用相关物理公式导出。如果在“原子单位制”下, 长度、时间和能量的单位用符号 \AA 、 Tau 和 Eau 表示, 试从玻尔氢原子模型推出三者分别与米、秒和焦耳的换算关系。

所以答案为 A。

18. 76 eV。

这样的能量被 L 壳层的另一个电子吸收, 并成为俄歇电子, 其能量为 $(22.78 - 4.02) \text{ eV} =$ 电子从 L 壳层跃迁填补 K 壳层的空位, 释放的能量为 $(26.8 - 4.02) \text{ eV} = 22.78 \text{ eV}$ 。

【解】本题涉及的是 X 射线的发射机理和俄歇电子产生的过程。

- A. $(26.8 - 4.02 - 4.02) \text{ keV}$ B. $(40.00 - 26.8 - 4.02) \text{ keV}$
 C. $(26.8 - 4.02) \text{ keV}$ D. $(40.00 - 26.8 + 4.02) \text{ keV}$

4.02 keV, 则射出的俄歇电子的动能等于()。

12. (28 届预赛) 多电子原子核外电子的分布形成若干壳层, K 壳层离核最近, L 壳层次之, M 壳层更次之……每一壳层中可容纳的电子数是一定的, 当一个壳层中的电子填满后, 余下的电子将分布到次外的壳层。当原子的内壳层中出现空穴时, 较外壳层中的电子将跃迁至空穴, 并以发射光子(X光)的形式释放出多余的能量, 但亦有一定的概率将跃迁中放出的能量传给另一个电子, 使此电子电离, 这称为俄歇(Auger)效应, 这样电离出来的电子叫俄歇电子。现用一能量为 40.00 keV 的光子照射 Cd(镉)原子, 击出 Cd 原子中 K 层一个电子, 使该壳层出现空穴, 已知该 K 层电子的电离能为 26.8 keV。随后, Cd 原子的 L 层中一个电子跃迁到 K 层, 而由于俄歇效应, L 层中的另一个电子从 Cd 原子射出, 已知这两个电子的电离能皆为

$$1\text{Tau} = \frac{1\text{Lau}}{v_1} = \frac{\hbar^2/m_e k_e e^2}{k_e e^2/\hbar} = \frac{\hbar^3}{m_e k_e^2 e^4} = 2.41883 \times 10^{-17} \text{ s}$$

$$1\text{Eau} = -2E_1 = \frac{m_e k_e^2 e^4}{\hbar^2} = 2 \times 13.6 \times 1.60 \times 10^{-19} \text{ J} = 43.52 \times 10^{-19} \text{ J}$$

14. (26 届决赛) (1) 在经典的氢原子模型中, 电子围绕原子核做圆周运动, 电子的向心力来自于核电场的作用。可是, 经典的电磁理论表明电子做加速运动会发射电磁波, 其发射功率可表示为(拉莫尔公式): $P = \frac{e^2 a^2}{6\pi c^3 \epsilon_0}$, 其中 a 为电子的加速度, c 为真空光速, $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$, 电子电荷量绝对值 $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ 。若不考虑相对论效应, 试估计在经典模型中氢原子的寿命 τ (实验测得氢原子的结合能是 $E_H = 13.6 \text{ eV}$, 电子的静止质量 $m_0 = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$)。

(2) 带电粒子加速后发射的电磁波也有重要的应用价值。当代科学研究中应用广泛的同步辐射即是由以接近光速运动的电子在磁场中做曲线运动改变运动方向时所产生的电磁辐射, 电子存储环是同步辐射光源装置的核心, 存储环中的电子束团通过偏转磁铁等装置产生高性能的同步辐射光。上海光源是近年来建成的第三代同步辐射光源, 它的部分工作参数如下: 环内电子能量 $E = 3.50 \text{ GeV}$, 电子束团流强 $I = 300 \text{ mA}$, 周长 $L = 432 \text{ m}$, 单元数(装有偏转磁铁的弯道数量) $N = 20$, 偏转磁铁磁场的磁感应强度 $B = 1.27 \text{ T}$ 。试计算该设备平均每个光口的辐射总功率 P_0 。(在电子接近光速时, 若动量不变, 牛顿第二定律仍然成立, 但拉莫尔公式不再适用, 相应的公式变化为 $P = \frac{e^2 a^2 \gamma^4}{6\pi c^3 \epsilon_0}$, 其中 $\gamma = \frac{E}{m_0 c^2}$, E 为电子总能量, $m_0 c^2$ 为电子的静止能量。)

(3) 由于存储环内的电子的速度接近光速, 所以同步辐射是一个沿电子轨道的切线方向的光锥, 光锥的半顶角为 $1/\gamma$, 由此可见电子的能量越高, 方向性越好。试计算: 上述设备在辐射方向上某点接受到的单个电子产生的辐射持续时间 ΔT (本题结果请均以 3 位有效数字表示)。

【解】 (1) 根据经典的电子运动模型, 设电子绕核做圆周运动, 则加速度为

$$a = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2 m}$$

则电子发射电磁波的功率为

$$P = \frac{e^2 a^2}{6\pi c^3 \epsilon_0} = \frac{2e^6}{3(4\pi\epsilon_0)^3 m^2 c^3 r^4}$$

而电子在核的库仑场中的总能量(动能与势能之和, 设无穷远处为 0 势能面)为

$$E = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

dt 时间内能量的变化为 $dE = -Pdt$, 能量变化引起电子轨道半径变化, 两者之间的关系为 $dE = \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$, 由此可得 $Pdt = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$, 即

$$\frac{2e^6}{3(4\pi\epsilon_0)^3 m^2 c^3 r^4} dt = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

整理得到

(3) 如图 3.28 所示,某点先被光束的下边缘照射,当电子沿轨道运动,光束相应转动,最后该点被光束的上边缘照射。设光束的顶角为 $\theta = 2/\gamma$,则这一过程中,电子在圆轨道上转过的圆

在直道部分并不辐射能量。

量为 $\Delta E = P\Delta t$,其实这是不对的。因为电子只有在偏转时(即经过偏转磁铁时)才辐射能量,

注:有人计算出电子在储存环内运动一周所需的时间为 $\Delta t = \frac{L}{c}$,认为电子转一周辐射的能

$$P_0 = nP = \frac{IL}{ec} \frac{e^4 c F^2 B^2}{6\pi\epsilon_0 (m_0 c^2)^4} = \frac{e^3 I L F^2 B^2}{6\pi\epsilon_0 (m_0 c^2)^4}$$

则每个电子束团在光口的辐射功率为

$$n = \frac{IL}{ec}$$

设每个束团中的电子数为 n ,则电流强度为 $I = ne \frac{L}{c}$,即

$$P = \frac{e^2 a^2 \gamma^4}{6\pi c^3 \epsilon_0} = \frac{e^2 E^4}{6\pi c^3 \epsilon_0 (m_0 c^2)^4} \left(\frac{ec^2 B}{E} \right)^4 = \frac{e^4 c F^2 B^2}{6\pi\epsilon_0 (m_0 c^2)^4}$$

则电子的辐射功率为

$$a = \frac{c^2}{R} = \frac{ec^2 B}{E} = 1.14 \times 10^{16} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

加速度为

$$R = \frac{mc^2}{ecB} = \frac{E}{ecB} = 7.87 \text{ m}$$

偏转时,轨道半径为

$$f = ecB = \frac{mc^2}{R}$$

电子在磁场中的洛伦兹力作用下运动,由于动量大小不变,牛顿定律依然成立,即有

算得电子的速度 $v = (1 - 1 \times 10^{-8})c \approx c$ 。

由于电子的能量为 $E = 3 \text{ GeV}$,由 $E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{0.511 \text{ MeV}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 3 \times 10^3 \text{ MeV}$ 可

辐射而损失的能量,所以,电子束团稳定地运动,辐射功率保持不变。

直线运动。上述辐射只发生在弯道上。事实上,储存环中的电子在不断地被加速,以补偿由于

使电子在洛伦兹力的作用下做圆周运动,在离开磁场区域之后,即在两个偏转磁铁之间,电子做

同步辐射装置的储存环,是由一段段的直道和弯道组成的封闭回路。每个偏转磁铁的磁场

$$P = \frac{e^2 a^2 \gamma^4}{6\pi c^3 \epsilon_0} = \frac{e^2 a^2 E^4}{6\pi c^3 \epsilon_0 (m_0 c^2)^4}$$

(2) 在同步辐射装置的储存环中,每个电子的辐射功率为

$\Delta t = 1.56 \times 10^{-11} \text{ s}$,这就是该原子的寿命。

根据所给参数,可知初始时电子的轨道半径为第一玻尔半径, $r_0 = 0.53 \times 10^{-10} \text{ m}^{-1}$ 。算得

$$\Delta t = \frac{1}{4} \frac{(4\pi\epsilon_0)^2 m^2 c^3}{e^4} r_0^3$$

电子轨道半径从初始值变为 0 所经历的时间为

$$dt = -\frac{3}{4} \frac{(4\pi\epsilon_0)^2 m^2 c^3 r^2}{e^4} dr$$

心角也是 θ 。电子转过这一角度所需的时间为

$$\Delta t_1 = \frac{\theta}{\omega} = \frac{2/\gamma}{v/R} = \frac{2R}{\gamma v}$$

角度很小,这一段圆弧可近似看作直线。由于光束下边缘照射该点时,电子到该点的距离减小了 $R\theta$,因而光传播到该点的时间也变短,所以该点被照射的时间为

$$\tau = \Delta t_1 - \frac{\theta R}{c} = \frac{2R}{\gamma v} - \frac{2R}{\gamma c} = \frac{2R}{\gamma v} \left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

记 $\frac{v}{c} = \beta$, 则 $\tau = \frac{2R}{\beta c} (1 - \beta) \sqrt{1 - \beta^2}$ 。

又由于 $\gamma = \frac{mc^2}{m_0 c^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, 且 $v \approx c$, 则 $\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2}$ 。于是有

$$\tau = \frac{2R}{\beta c} (1 - \beta) \sqrt{1 - \beta^2} \approx \frac{2R}{c} \frac{1}{2\gamma^2} \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\gamma^3} \frac{R}{c} = 9.51 \times 10^{-20} \text{ s}$$

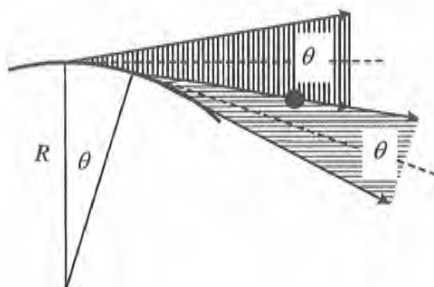


图 3.28 光束照射某点的过程

15. (26 届复赛) 惰性气体分子为单原子分子,在自由原子情形下,其电子电荷分布是球对称的。负电荷中心与原子核重合。但如两个原子接近,则彼此能因静电作用产生极化(正负电荷中心不重合),从而导致有相互作用力,这称为范德瓦尔斯相互作用。下面我们采用一种简化模型来研究此问题。

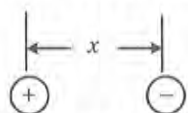


图 3.29 原子中的正负电荷中心

当负电中心与原子核不重合时,若以 x 表示负电中心相对正电荷(原子核)的位移,当 x 为正时,负电中心在正电荷的右侧,当 x 为负时,负电中心在正电荷的左侧,如图 3.29 所示。这时,原子核的正电荷对核外负电荷的作用力 f 相当于一个劲度系数为 k 的弹簧的弹性力,即 $f = -kx$,力的方向指向原子核,核外负电荷的质量全部集中在负电中心,此原子可用一弹簧振子来模拟。

今有两个相同的惰性气体原子,它们的原子核固定,相距为 R ,原子核正电荷的电荷量为 q ,核外负电荷的质量为 m 。因原子间的静电相互作用,负电中心相对各自原子核的位移分别为 x_1 和 x_2 ,且 $|x_1|$ 和 $|x_2|$ 都远小于 R ,如图 3.30 所示。此时每个原子的负电荷除受到自己核的正电荷作用外,还受到另一原子的正、负电荷的作用。

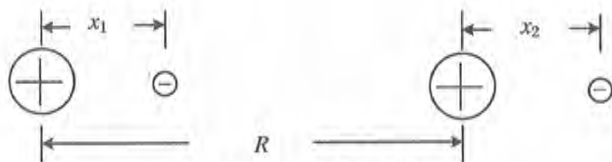


图 3.30 两个惰性气体原子

众所周知,孤立谐振子的能量 $E = mv^2/2 + kx^2/2$ 是守恒的,式中 v 为质量 m 的振子运动的速度, x 为振子相对平衡位置的位移。量子力学证明,在绝对零度时,谐振子的能量为 $h\omega/2$,称为零点振动能, $h = h/(2\pi)$, h 为普朗克常量, $\omega = \sqrt{k/m}$ 为振子的固有角频率。试计算在绝

两个孤立惰性气体原子在绝对零度的能量分别表示为 E_{10} 和 E_{20} , 有

$$E_0 = \frac{1}{2} h(\omega_1 + \omega_2) \quad (12)$$

在绝对零度, 零点能为

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k_c q^2 / R^3}{m}} \quad (11)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k - 2k_c q^2 / R^3}{m}} \quad (10)$$

式(5)表明体系的能量相当于两个独立谐振子的能量和, 而这两个振子的固有角频率分别为

$$y_2 = (x_1 - x_2) / \sqrt{2} \quad (9)$$

$$y_1 = (x_1 + x_2) / \sqrt{2} \quad (8)$$

$$u_2 = (v_1 - v_2) / \sqrt{2} \quad (7)$$

$$u_1 = (v_1 + v_2) / \sqrt{2} \quad (6)$$

式中, 有

$$E = \frac{1}{2} m u_1^2 + \frac{1}{2} \left(k - \frac{2k_c q^2}{R^3} \right) y_1^2 + \frac{1}{2} m u_2^2 + \frac{1}{2} \left(k + \frac{2k_c q^2}{R^3} \right) y_2^2 \quad (5)$$

注意到 $a^2 + b^2 = \frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{2}$ 和 $2ab = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{2}$, 可将式(4)改写为

$$E = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 - \frac{2k_c q^2}{R^3} x_1 x_2 \quad (4)$$

因此体系总能量可近似表为

$$U = -\frac{2k_c q^2 x_1 x_2}{R^3} \quad (3)$$

$(1+x)^{-1} \approx 1-x+x^2$, 可将式(2)化为

$$\text{因 } R+x_1-x_2 = R \left(1 + \frac{x_1-x_2}{R} \right), R+x_1 = R \left(1 + \frac{x_1}{R} \right), R-x_2 = R \left(1 - \frac{x_2}{R} \right), \text{ 利用}$$

其中 k_c 为静电力常量。有

$$U = k_c q^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R+x_1-x_2} - \frac{1}{R+x_1} - \frac{1}{R-x_2} \right) \quad (2)$$

式中 U 为静电相互作用能, 有

$$E = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 + \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 + U \quad (1)$$

【解】两个相距 R 的惰性气体原子组成体系的能量包括以下几部分: 每个原子的正、负电荷的动能, 每个原子的负电中心因受各自原子核“弹性力”作用的弹性势能, 一个原子的正、负电荷与另一原子的正、负电荷的静电相互作用能。以 v_1 和 v_2 分别表示两个原子的负电中心

振动速度, x_1 和 x_2 分别表示两个原子的负电中心相对各自原子核的位移, 则体系的能量

对零度时上述两个有范德瓦尔斯相互作用的惰性气体原子构成的体系的能量, 与两个相距足够远的(可视为孤立的、没有范德瓦尔斯相互作用的)惰性气体原子的能量差, 并从结果判定范德瓦尔斯相互作用是吸引还是排斥。可利用当 $|x| \ll 1$ 时的近似式 $(1+x)^{1/2} \approx 1+x/2-x^2/8$, $(1+x)^{-1} \approx 1-x+x^2$ 。

$$E_{10} = E_{20} = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \quad (13)$$

式中,有

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (14)$$

为孤立振子的固有角频率。由此得绝对零度时,所考察的两个惰性气体原子组成的体系的能量与两个孤立惰性气体原子能量和的差为

$$\Delta E = E_0 - (E_{10} + E_{20}) \quad (15)$$

利用 $(1+x)^{1/2} \approx 1 + x/2 - x^2/8$, 可得

$$\Delta E = \frac{\hbar}{2} \frac{k^2 q^4}{k^{3/2} m^{1/2} R^6} \quad (16)$$

$\Delta E < 0$, 表明范德瓦尔斯相互作用为相互吸引。

近代物理 3 核物理与基本粒子

1. (2届预赛) 正电子与负电子相碰湮没时,放出的能量约为_____。

【解】 一个电子的静止能量为 $m_e c^2 = 0.511 \text{ MeV}$, 所以一对正负电子湮灭, 会放出约 1 MeV 的能量。

2. (2届预赛) 在大气和有生命的植物中, 大约每 10^{12} 个碳原子中有一个 ^{14}C 原子, 其半衰期为 $\tau = 5700$ 年, 其余的均为稳定的 ^{12}C 原子。在考古工作中, 常常通过测定古物中 ^{14}C 的含量来推算这一古物年代。如果在实验中测出: 有一古木炭样品, 在 m 克的碳原子中, 在 Δt (年) 时间内有 Δn 个 ^{14}C 原子发生衰变。设烧成木炭的树是在 T 年前死亡的, 试列出能求出 T 的有关方程式(不要求解方程)。

【解】 生物死亡后, 新陈代谢过程停止, 其遗骸中稳定的 ^{12}C 原子含量不再变化, 而 ^{14}C 原子则持续发生衰变, 衰变服从指数规律, 即 $N = N_0 e^{-\lambda t}$, 半衰期为 $\tau = \frac{1}{\lambda} \ln 2$ 。

根据题中所给的条件, 可得

$$\Delta n = N e^{-\lambda T} (1 - e^{-\lambda \Delta t})$$

m 克样品中 ^{14}C 原子的含量为

$$N = \frac{m N_A \times 10^{-12}}{12}$$

由上述方程即可解出 T 。

3. (5届预赛) 1979年, 七颗人造卫星同时接收到来自远方的中子星发射的 γ 射线, 经分析确认, 这些 γ 光子是由电子-正电子湮没时放出的, 即 $e + e^+ \rightarrow n\gamma$, 其中 n 表示光子的数目。已知电子、正电子的静止质量 $m_0 = 8.2 \times 10^{-14} \text{ J}/c^2$ 。静止质量为 m_0 的粒子, 其能量 E 和动量 p 满足 $E^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4$ 。式中 c 表示光速, 普朗克常量 $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ 。

了电子。在此之前,有许多人观测到了上述偏转效应,但是由于无法进行精确的测量,而失去了英国物理学家 J.J. 汤姆孙通过测量阴极射线在磁场中的偏转,得到了其荷质比,从而发现流,从而发现了中子。

查德威克采用不同的方法,精确地测定了这种射线的性质之后,认为射线是一种有质量的粒子同观点,并根据实验结果认为这种 γ 射线光子的能量约为 50 MeV。在卡文迪许实验室工作的德国物理学家波特最先观察到这种射线,认为是 γ 射线;法国科学家约里奥·居里夫妇也持相同观点,英国的查德威克根据被 α 粒子从金属铍中打出的中性射线的性质发现了中子。在此之前,先在曼彻斯特大学工作,后在卡文迪许实验室工作并担任卡文迪许实验室的教授。

于新西兰,大学毕业在英国剑桥大学卡文迪许实验室学习,毕业后先在加拿大任教,后回到英国,卢瑟福根据 α 粒子被金属箔散射的实验结果提出了原子的核式结构模型,卢瑟福出生 (2) 卢瑟福根据 α 粒子被金属箔散射的实验结果提出了原子的核式结构模型,卢瑟福出生

【解】(1) 我国当年所建成的是正负电子对撞机。发生对撞的是正电子和电子。和,在实验上,证实此结论的物理学家是。发现电子的物理学家是;指出弱相互作用下宇称不守恒的物理学家是和 (2) 提出原子的核式结构模型的物理学家是;发现中子的物理学家是;

4. (6 属预赛) (1) 1988 年 10 月,我国基本建成了对撞机,在此机中发生对撞的粒子是和。

$$\nu = \frac{m_0 c^2}{h} = 7.7 \times 10^{19} \text{ Hz}$$

光子频率为

$$2h\nu = 2m_0 c^2$$

(2) 若电子、正电子的动量为零, $n=2$, 则两个光子动量方向相反。由能量守恒, 则所以等式不可能成立。

$$\begin{aligned} & \text{由于 } \sqrt{p_+^2 + m_0^2 c^2} > p_+, \sqrt{p_-^2 + m_0^2 c^2} > p_-, \text{ 所以} \\ & \sqrt{p_+^2 + m_0^2 c^2} + \sqrt{p_-^2 + m_0^2 c^2} > p_+ + p_- \\ & \sqrt{p_+^2 c^2 + m_0^2 c^4} + \sqrt{p_-^2 c^2 + m_0^2 c^4} = m_0^2 c^2 + \sqrt{p_+^2 + m_0^2 c^2} + \sqrt{p_-^2 + m_0^2 c^2} \\ & p_+^2 c^2 + m_0^2 c^4 + p_-^2 c^2 + m_0^2 c^4 + 2\sqrt{p_+^2 c^2 + m_0^2 c^4} \sqrt{p_-^2 c^2 + m_0^2 c^4} = (h\nu)^2 \\ & p_+^2 c^2 + p_-^2 c^2 + 2p_+ p_- c^2 \cos \theta = (h\nu)^2 \\ & p_+^2 + p_-^2 + 2p_+ p_- \cos \theta = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 \\ & \sqrt{p_+^2 c^2 + m_0^2 c^4} + \sqrt{p_-^2 c^2 + m_0^2 c^4} = h\nu \end{aligned}$$

即

$$E_+ + E_- = h\nu, \quad p_+ + p_- = p$$

设电子的动量分别为 p_+ 、 p_- 。光子的动量为 p , 则由守恒律, 可得

则动量不守恒。

【解】(1) 设 $n=1$ 。若两电子均静止, 其动量为 0, 而湮灭成一个光子, 由于光子有动量, (2) 若电子、正电子的动量为零, $n=2$, 求 γ 光子的频率。 (1) 试证明 $n \neq 1$ 。

发现电子会。

中国物理学家杨振宁和李政道首先指出弱相互作用下宇称是不守恒的,当时他们在美国任教,但仍是中国国籍。后来,另一位华人女物理学家吴健雄从实验上证实了这一结论。

5. (9届预赛) 1991年11月9日在欧洲14国的欧洲联合环形装置上,成功地实现了一项有重大意义的试验,它是关于_____的试验。

【解】 这是首次在环形聚变反应堆上实现核聚变反应。

6. (11届预赛) 太阳中能量来源的一种途径是4个质子和2个电子结合成一个 α 粒子,并释放能量,若质子质量 $m_p = 1.007\ 277\ \text{u}$, 电子质量 $m_e = 0.000\ 549\ \text{u}$, α 粒子的质量 $m_\alpha = 4.001\ 50\ \text{u}$, 则上述核反应所释放的能量为多少 eV(其中 u 是原子质量单位, 已知 $1\ \text{u} = 1.66 \times 10^{-27}\ \text{kg}$)?

【解】 利用爱因斯坦质能关系 $E = mc^2$, 可得

$$\Delta E = 4m_p + 2m_e - m_\alpha = (4 \times 1.007\ 277 + 2 \times 0.000\ 549 - 4.001\ 50) \times 1.66 \times 10^{-27} c^2$$

一个原子质量单位对应的能量是 931 MeV, 所以有

$$\Delta E = 0.002\ 870\ 6 \times 1.66 \times 10^{-27} c^2 = 26.7\ \text{MeV}$$

7. (12届预赛) 镭 226 的半衰期是 1600 年。如已知现在地球上镭 226 的总量, 能否据此确定 4800 年前地球上镭 226 的总量? 为什么?

【解】 放射性衰变的公式为

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

其中 λ 是一个原子核单位时间内发生衰变的几率, λ 的量纲是 1/[时间], 被称作衰变常数。

半衰期是原子核减少到原有数量一半所需要的时间, 通常记为 $T_{1/2}$ 。根据上式, 可以得到

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda T_{1/2}}, \text{ 于是有 } T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda}。$$

地球上的镭 226 有一部分是 4800 年前本来就有的, 但是还有一部分是后来其他的核素通过衰变而产生的, 例如有一个衰变链: (不稳定核素) $^{238}\text{U} \rightarrow ^{234}\text{Th} \rightarrow ^{234}\text{U} \rightarrow ^{234}\text{Pa} \rightarrow ^{230}\text{Th} \rightarrow ^{226}\text{Ra} \rightarrow ^{222}\text{Rn} \rightarrow \dots \rightarrow ^{206}\text{Pb}$ (稳定核素), 这一衰变链被称作铀系。

所以不能根据现在地球上镭 226 的总量, 来确定 4800 年前地球上镭 226 的总量。

8. (12届预赛) 已知太阳每秒辐射出 $3.8 \times 10^{26}\ \text{J}$ 的能量。问:

(1) 太阳每秒钟损失多少吨质量?

(2) 假设太阳放射出的能量是由于“燃烧氢”的核反应 $4\text{H} \rightarrow \text{He} + 2e^- + 2\nu$ 提供, 这一核反应放出 28 MeV(百万电子伏特)的能量。式中 e^- 为电子, ν 为中微子。中微子是一种质量远小于电子质量、穿透力极强的中性粒子。试计算地球上在与太阳垂直的每平方米面积上每秒有多少中微子(ν)到达。

(3) 假设原始的太阳全部由 H 和电子组成, 且仅有 10% 的 H 可供“燃烧”, 试估算太阳的寿命。

已知: 太阳质量 $m_s = 2.0 \times 10^{30}\ \text{kg}$; 质子质量 $m_p = 1.7 \times 10^{-27}\ \text{kg}$; 日地距离 $R = 1.5 \times 10^{11}\ \text{m}$;

经过 n 次碰撞, 动能变为 $E'_k = \left(\frac{m_c - m_n}{m_c + m_n}\right)^{2n} E_k = \left(\frac{11}{13}\right)^{2n} E_k$, 即

$$\text{动能变为 } E'_k = \frac{m_n v'^2}{2} = \left(\frac{m_c - m_n}{m_c + m_n}\right)^2 E_0.$$

中子碰撞后反向, $v' = -\frac{m_c - m_n}{m_c + m_n} v$ 。

$$v' = \frac{m_n \pm \sqrt{m_n^2 + (m_c + m_n)(m_c - m_n)}}{m_n \pm m_c} v$$

从两式中可得到 $(m_c + m_n)v'^2 - 2m_n v v' - (m_c - m_n)v^2 = 0$, 解得

$$\begin{aligned} m_n v &= m_c v_c + m_n v' \\ \frac{1}{2} m_n v^2 &= \frac{1}{2} m_c v_c^2 + \frac{1}{2} m_n v'^2 \end{aligned}$$

【解】 碰撞过程中动能守恒、动量守恒, 即

MeV 的快中子需要与静止的碳原子碰撞多少次, 才能减速成为 0.025 eV 的热中子?

9. (18 届预赛) 在用铀 235 作燃料的核反应堆中, 铀 235 核吸收一个动能约为 0.025 eV 的热中子(慢中子)后, 可发生裂变反应, 放出能量和 2~3 个快中子, 而快中子不利于铀 235 的裂变。为了使裂变反应继续下去, 需要将反应中放出的快中子减速。有一种减速的方法是使用石墨(碳 12)作减速剂。设中子与碳原子的碰撞是对心弹性碰撞, 问一个动能为 $E_0 = 1.75$

以 10% 的质量并没有全部消失。

【点评】 需要注意的是, 第(3)问不能根据太阳燃烧的 10% 质量计算这一过程所释放的能量, 即不能将 $\Delta E = 10\% m_s c^2 = 6 \times 10^{45} \text{ J}$ 作为燃烧释放的总能量。因为燃烧产物中有 ${}^4\text{He}$, 所

$$\tau = \frac{1.3 \times 10^{45} \text{ J}}{3.8 \times 10^{26} \text{ J/s}} = 3.4 \times 10^{17} \text{ s} = 1.1 \times 10^{10} \text{ a}$$

由于只燃烧 10%, 所以可以近似地认为这一段时间内燃烧的速率不变, 太阳的寿命为

$$\Delta E = \Delta N \times 28/4 \text{ MeV} = 8.2 \times 10^{63} \text{ eV} = 1.3 \times 10^{45} \text{ J}$$

所释放的总能量为

$$\Delta N = 10\% m_s / m_p = 1.2 \times 10^{57}$$

(3) 原始太阳全部由 ${}^1\text{H}$ 和电子组成, 其中 10% 的 ${}^1\text{H}$ 可以被燃烧, 被燃烧的 ${}^1\text{H}$ 数量为

$$N = \frac{2n}{4\pi R^2} = 6.0 \times 10^{14} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

地球所在处, 单位时间内通过单位面积的中微子数量为

共放出 $2n$ 个中微子。

$$n = \frac{3.8 \times 10^{26}}{28 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ s}^{-1}} = 8.5 \times 10^{27} \text{ s}^{-1}$$

(2) 这一反应过程的能量为 28 MeV, 相当于太阳上单位时间内反应的次数为

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{c^2 \Delta t}{\Delta E} = 4.2 \times 10^9 \text{ kg} = 4.2 \times 10^6 \text{ t}$$

【解】 (1) 太阳每秒钟损失的质量为

电子电量 $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ 。

$$n = \frac{\ln \frac{E_k}{E_0}}{2 \ln \frac{m_c - m_n}{m_c + m_n}} = 54$$

10. (18 届预赛) 一个由日本和印度物理学家组成的工作小组作了如下实验:

将 $6 \times 10^4 \text{ kg}$ 铁放在很深的矿井中, 以完全隔断宇宙射线的影响, 在铁旁和铁中有很多很多探测器, 只要铁核中有核子(质子或中子)发生衰变, 这个事件总能被记录下来。

实验从 1980 年冬开始到 1982 年夏结束, 历时 1.5 年, 一共记录了三个核子的衰变。

已知 N 个平均寿命为 τ 的粒子经过 t 时间后的数目为 $N = N_0 e^{-t/\tau}$ 个, 根据以上事实, 试估算出核子的平均寿命。

已知核子质量 $m = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$, 当 $0 < x \ll 1$ 时, $e^x \approx 1 + x$ 。

【解】 衰变规律为 $N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$, 若核子数为 N , dt 时间内核子数的变化为 dN , 即有 $-dN$ 个核子发生了衰变, 也可以表示为 $dN = -\frac{N}{\tau} dt$, 即

$$\tau = -\frac{N}{dN} dt$$

本题中, 讨论的是铁核中质子或中子发生的衰变, 样品中核子的总数为

$$N = \frac{6 \times 10^4 \text{ kg}}{1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}} = 3.6 \times 10^{31}$$

$dN = -3, dt = 1.5 \text{ a}$ 。则可算得

$$\tau = -\frac{3.6 \times 10^{31}}{-3} \times 1.5 \text{ a} = 1.8 \times 10^{31} \text{ a}$$

11. (24 届预赛) (1) 2006 年诺贝尔物理学奖授予美国科学家约翰·马瑟和乔治·斯穆特, 以表彰他们发现了宇宙微波背景辐射的黑体辐射形式和各向异性。这一发现为有关宇宙起源的_____理论提供了进一步的支持, 使宇宙学进入了“精确研究”时代。

(2) 恒星演化到了后期, 某些恒星在其内部核燃料耗尽时, 会发生强烈的爆发, 在短短的几天中, 亮度陡增千万倍甚至上亿倍。我国《宋史》第五十六卷中对当时观测到的上述现象作了详细记载。2006 年 5 月是我国发现此现象一千周年, 为此在杭州召开了有关的国际学术研讨会。天文学上把演化到这一阶段的恒星称为_____, 恒星演变到这一阶段, 预示着一颗恒星的终结。此后, 它可能成为_____或_____。

【解】 (1) 实验上所测量到的宇宙微波背景辐射与黑体辐射有相同的规律, 因而可以认为这是来自于一个黑体空腔的辐射。说明宇宙是有确定边界的空腔。这一结果支持了宇宙大爆炸的理论。

(2) 题中所说的演化到这一阶段的恒星是超新星。之后, 它可以成为中子星或黑洞。

12. (25 届预赛) 为了估算水库中水的体积, 可取一瓶无毒的放射性同位素的水溶液, 测得瓶内溶液每分钟衰变 6×10^7 次, 已知这种同位素的半衰期为 2 天。现将这瓶溶液倒入水库, 8 天后可以认为溶液已均匀分布在水库中, 这时取 1.0 m^3 水库中的水样, 测得水样每分钟衰变

式中 $mv\left(\frac{r_0}{2}\right)$ 为一个粒子的动量 mv 与其轨道半径 $\frac{r_0}{2}$ 的乘积, n 为量子数, $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

$$2mv\left(\frac{r_0}{2}\right) = n \frac{h}{2\pi} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

正、反夸克粒子满足量子化条件, 即用玻尔理论确定系统处于基态中正、反顶夸克之间的距离 r_0 。已知处于束缚态的态设想为正反顶夸克在彼此间的吸引力作用下绕它们连线的中点做匀速圆周运动。如能构成 $k = 0.319 \times 10^{-25} \text{ J} \cdot \text{m}$ 。为估算正、反顶夸克能否构成一个处在束缚状态的系统, 可把束缚状态之间的距离, $a_s = 0.12$ 是强相互作用耦合常数, k 是与单位制有关的常数, 在国际单位制中 $\frac{4as}{3r}$, 式中 r 是正、反顶夸克

(1) 正、反顶夸克之间的强相互作用势能可写为 $U(r) = -k \frac{4as}{3r}$, 这是近十几年来粒子物理研究最重要的实验进展之一。对撞机 TEVATRON 的实验中, 观察到了顶夸克, 测得它的静止质量 $m_1 = 1.75 \times 10^{11} \text{ eV}/c^2 = 3.1 \times 10^{-25} \text{ kg}$, 寿命 $\tau = 0.4 \times 10^{-24} \text{ s}$ 。

14. (17 届复赛) 1995 年, 美国费米国家实验室 CDF 实验组和 DO 实验组在质子反质子

$$E_B = \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2} m_a v_a^2 m_B = \frac{m_a}{m_B} E_a = \frac{m_a(m_A - m_B - m_a)c^2}{m_a + m_B}$$

B 的反冲动能为

$$E_a = \frac{m_B E_a}{m_B(m_A - m_B - m_a)c^2} = \frac{m_a + m_B}{m_a + m_B}$$

由式(1)、式(2)可以解得 $E_d = \left(1 + \frac{m_a}{m_B}\right) E_a$, 即得 α 粒子的动能为

$$E_d = E_a + E_B = (m_A - m_B - m_a)c^2$$

记衰变能为

$$m_B v_B = m_a v_a$$

(2) 动量关系为

其中 E_a, E_B 分别为衰变所放出的 α 粒子、剩余核的动能。

(1) $m_A c^2 = m_B c^2 + m_a c^2 + E_a + E_B$

【解】 α 衰变的过程可表示为 ${}^A_Z X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2} Y + \alpha$, 其中的能量关系为

衰后原子核 B 和 α 粒子的动能。

13. (26 届预赛) 一静止的原子核 A 发生 α 衰变后变成原子核 B, 已知原子核 A、原子核 B 和 α 粒子的质量分别为 m_A, m_B 和 m_α , 光速为 c (不考虑质量与速度有关的相对论效应), 求衰

$$\frac{7.5 \times 10^6}{20} = 3.75 \times 10^5 (\text{m}^3)$$

而 1.0 m^3 的水样, 每分钟衰变 20 次, 则总库容为

$$\frac{6 \times 10^7}{8} = 7.5 \times 10^6$$

为原来的 $1/8$, 整个水库中, 每分钟衰变的次数为

【解】 放射性衰变的规律为 $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ 。若半衰期为 2 天, 则 8 天后, 物质的数量变

20 次。由此可知水库中水的体积约为 $\frac{\text{m}^3}{8}$ 。

为普朗克常量。

(2) 试求正、反顶夸克在上述设想的基态中做匀速圆周运动的周期 T 。你认为正、反顶夸克的这种束缚态能存在吗?

【解】 (1) 正、反顶夸克之间的强相互作用势能为 $U(r) = -k \frac{4a_s}{3r}$, 形式上与库仑势能 $-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ 相似, 所以它们所构成的系统与玻尔氢原子模型相似, 可以用玻尔理论的结果进行分析。

不妨先假设其中一个粒子静止不动, 另一个粒子绕其做匀速圆周运动, 玻尔理论中电子绕核运动的半径公式为 $r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 (n\hbar)^2}{m_e Ze^2}$, 将其中 $4\pi\epsilon_0$ 以 $\frac{3}{k}$ 置换, Ze^2 以 $4a_s$ 置换, 则有

$$r_n = \frac{3(n\hbar)^2}{4km_1 a_s}$$

再变换到质心系中, 将式中 m_1 换为约化质量 $\frac{m_1}{2}$, 即有

$$r_n = \frac{3(n\hbar)^2}{2km_1 a_s}$$

基态时, 有

$$r_1 = \frac{3\hbar^2}{2km_1 a_s} = 1.4 \times 10^{-17} \text{ m}$$

(2) 玻尔理论中, 电子绕核运动的速度为

$$v^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r_n}$$

将其中 $4\pi\epsilon_0$ 以 $\frac{3}{k}$ 置换, Ze^2 以 $4a_s$ 置换, m_e 以 $\frac{m_1}{2}$ 置换, 得到

$$v^2 = \frac{8ka_s}{3m_1} \frac{2km_1 a_s}{3(n\hbar)^2} = \frac{16k^2 a_s^2}{9(n\hbar)^2}$$

即

$$v_n = \frac{4ka_s}{3n\hbar}$$

运动的周期为

$$T = \frac{9\pi(n\hbar)^3}{4m_1 (ka_s)^2}$$

基态时, 有

$$T = \frac{9\pi\hbar^3}{4m_1 k^2 a_s^2} = 1.8 \times 10^{-24} \text{ s}$$

由此可得 $\tau/T = 0.2$ 。

因正反顶夸克的寿命只有它们组成的束缚系统的周期的 1/5, 故正反顶夸克的束缚态通常是不存在的。

15. (24 届复赛) 2007 年是我国著名物理学家、曾任浙江大学物理系主任的王淦昌先生诞辰一百周年。王先生早在 1941 年就发表论文, 提出了一种探测中微子的方案: ${}^7\text{Be}$ 原子核可以

整个反应过程中能量守恒,即

$$(8)$$

$$E_{\eta} = \sqrt{m_{\eta}^2 c^4 + p_{\eta}^2 c^2}$$

根据相对论力学关系 $E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$, 中微子的能量为

$$(7)$$

$$p_{\eta} = \frac{1}{c} (\sqrt{2m_{Li} c^2 E_R - p_{\gamma} c} - p_{\gamma} c) = \frac{1}{c} (\sqrt{2m_{Li} c^2 E_R - h\nu} - h\nu) = 0.38 \text{ MeV}/c$$

代入有关数据得

$$(6)$$

$$p_{\eta} = \sqrt{2m_{Li} E_R - p_{\gamma}}$$

由式(4)、式(5)可得

$$(5)$$

$$E_R = \frac{p_{Li}^2}{2m_{Li}}$$

止能量 $m_{Li} c^2 = 6533.84 \text{ MeV}$, 所以锂核的动能可以采用经典的表达式, 即

$$(4)$$

$$p_{Li} = p_{\eta} + p_{\gamma}$$

一个质子的静止能量为 938 MeV , 而锂核的反冲能的最大值为 $E_R = 56.6 \text{ eV}$, 远小于其静

由于锂核动能最大时, 锂核、 γ 光子、中微子运动方向共线, 以下用标量式表示, 即式(3)为

$$(3)$$

$$p_{Li} = -(p_{\gamma} + p_{\eta})$$

由式(3)可见, 当 p_{γ} 与 p_{η} 同向时, p_{Li} 取最大值, 这时由于锂核的动量最大, 动能也最大。

$$(2)$$

$$p_{Li}^* = p_{Li} + p_{\gamma}$$

由式(1)、式(2)得

p_{Li} 表示反应后反冲锂核 ${}^7\text{Li}$ 的动量, p_{γ} 表示 γ 光子的动量, 则由动量守恒, 有

在第二个反应 $({}^7\text{Li})^* \rightarrow {}^7\text{Li} + \gamma$ 中, 激发态锂核放出一个 γ 光子, 又一次获得反冲。若用

等, 方向相反。

由于反应前整个系统的动量为 0, 所以反应后激发态锂核的动量与中微子的动量大小相

$$(1)$$

$$p_{Li}^* + p_{\eta} = 0$$

的动量守恒。用 p_{Li}^* 表示激发态锂核 $({}^7\text{Li})^*$ 的动量, p_{η} 表示中微子 η 的动量, 则有

在第一个反应 ${}^7\text{Be} + e \rightarrow ({}^7\text{Li})^* + \eta$ 中, 由于放出中微子, 锂核获得反冲, 反应前后整个系统

【解】 根据题意, ${}^7\text{Be}$ 核和 K 层电子的动量都为零。

和静止质量 m_{η} 各为多少?

程中, ${}^7\text{Be}$ 核是静止的, K 层电子的动能也可忽略不计。试由以上数据, 算出中微子的动能 p_{η}

量的数据为 $m_{Li} c^2 = 6533.84 \text{ MeV}$; $m_{Be} c^2 = 6534.19 \text{ MeV}$; $m_e c^2 = 0.51 \text{ MeV}$ 。设在第一个过

的动能) 的最大值 $E_R = 56.6 \text{ eV}$, γ 光子的能量 $h\nu = 0.48 \text{ MeV}$ 。已知有关原子核和电子静止能

现用王淦昌的方案来估算中微子的质量和动量。若实验中测得锂核 $({}^7\text{Li})$ 反冲能量(即 ${}^7\text{Li}$

发现轻子的美国物理学家佩尔(M. L. Perl)分享了 1995 年诺贝尔物理学奖。

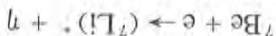
实了中微子的存在。1953 年美国物理学家戴维斯(F. Reines)在实验中首次发现了中微子, 莱因斯与

的存在, 1942 年起, 美国物理学家艾伦(R. Davis)等人根据王淦昌方案先后进行了实验, 初步证

由于中微子本身很难直接观测, 能通过对上述过程相关物理量的测量, 就可以确定中微子



而 $({}^7\text{Li})^*$ 又可以放出光子 γ 而回到基态 ${}^7\text{Li}$, 即



俘获原子的 K 层电子而成为 ${}^7\text{Li}$ 的激发态 $({}^7\text{Li})^*$, 并放出中微子(当时写作 η), 即

$$m_{\text{Be}}c^2 + m_e c^2 = m_{\text{Li}}c^2 + E_R + h\nu + E_\gamma \quad (9)$$

由式(8)、式(9)得

$$m_\gamma c^2 = [(m_{\text{Be}}c^2 + m_e c^2 - m_{\text{Li}}c^2 - E_R - h\nu)^2 - p_\gamma^2 c^2]^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

由式(7)和已知数据得

$$m_\gamma \approx 0.00 \text{ MeV}/c^2 \quad (11)$$

由式(11)可知,所算出的中微子静止质量的数值在题给数据的误差范围之内,故不能确定中微子的静止质量。如果有,其质量一定小于 $0.1 \text{ MeV}/c^2$ 。

16. (25 届复赛) 质子数与中子数互换的核互为镜像核,例如 ${}^3\text{He}$ 是 ${}^3\text{H}$ 的镜像核,同样 ${}^3\text{H}$ 是 ${}^3\text{He}$ 的镜像核。已知 ${}^3\text{H}$ 和 ${}^3\text{He}$ 原子的质量分别是 $m_{{}^3\text{H}} = 3.016\,050 \text{ u}$ 和 $m_{{}^3\text{He}} = 3.016\,029 \text{ u}$, 中子和质子质量分别是 $m_n = 1.008\,665 \text{ u}$ 和 $m_p = 1.007\,825 \text{ u}$, $1 \text{ u} = \frac{931.5}{c^2} \text{ MeV}$, 式中 c 为光速, 静电力常量 $k = \frac{1.44}{e^2} \text{ MeV} \cdot \text{fm}$, 式中 e 为电子的电荷量。

(1) 试计算 ${}^3\text{H}$ 和 ${}^3\text{He}$ 的结合能之差为多少 MeV。

(2) 已知核子间相互作用的“核力”与电荷几乎没有关系, 又知质子和中子的半径近似相等, 试说明上面所求的结合能差主要是由什么原因造成的, 并由此结合能之差来估计核子半径 r_N 。

(3) 实验表明, 核子可以被近似地看成是半径 r_N 恒定的球体; 核子数 A 较大的原子核可以近似地被看成是半径为 R 的球体。根据这两点, 试用一个简单模型找出 R 与 A 的关系式; 利用本题第(2)问所求得的 r_N 的估计值求出此关系式中的系数; 用所求得的关系式计算 ${}^{208}\text{Pb}$ 核的半径 R_{Pb} 。

【解】 (1) 根据爱因斯坦质能关系, ${}^3\text{H}$ 和 ${}^3\text{He}$ 的结合能分别为

$$B_1 = (2m_n + m_p - m_{{}^3\text{H}})c^2, \quad \Delta B_2 = (m_n + 2m_p - m_{{}^3\text{He}})c^2$$

两者结合能之差为

$$\Delta B = B_1 - B_2 = (m_n - m_p - m_{{}^3\text{H}} + m_{{}^3\text{He}})c^2$$

代入数据, 可得

$$\Delta B = 0.763 \text{ MeV} \quad (1)$$

(2) ${}^3\text{He}$ 的两个质子之间有库仑排斥能, 而 ${}^3\text{H}$ 没有。所以 ${}^3\text{H}$ 与 ${}^3\text{He}$ 的结合能差主要来自它们的库仑能差。依题意, 质子的半径为 r_N , 则 ${}^3\text{He}$ 核中两个质子间的库仑排斥能为

$$E_C = \frac{e^2}{(4\pi\epsilon_0)2r_N}$$

若这个库仑能等于上述结合能差, $E_C = \Delta B$, 则有

$$r_N = \frac{e^2}{2(4\pi\epsilon_0)\Delta B} \quad (2)$$

代入数据, 可得

$$r_N = 0.944 \text{ fm}$$

(3) 将每个核子看作是半径为 r_N 的球体, 核子密排构成原子核, 在原子核中每个核子所占据的空间是球的外切立方体, 其体积为 $(2r_N)^3$ 。所以, 核子数为 A 的原子核的体积应当为

$$V' = A(2r_N)^3 = 8Ar_N^3$$

$$(3) \quad \left(\frac{m_n^2 + m_n m_{3\text{He}}}{m_n^2 + m_n m_{3\text{He}}} v_n^2 - 2 \frac{m_p m_n}{m_p m_n} v_p v_n + \left(\frac{m_p^2 - m_p m_{3\text{He}}}{m_p^2 - m_p m_{3\text{He}}} \right) v_p^2 - 2Q = 0 \right)$$

由式(1)、式(2)可得

$$(2) \quad \frac{1}{2} m_p v_p^2 = \frac{1}{2} m_{3\text{He}} v_{3\text{He}}^2 + \frac{1}{2} m_n v_n^2 - Q$$

$$(1) \quad m_p v_p = m_{3\text{He}} v_{3\text{He}} + m_n v_n$$

考虑相对论效应,根据动量守恒和能量守恒恒有

设质子的入射速度大小为 v_p , 反应后 ${}^3\text{He}$ 的速度大小为 $v_{3\text{He}}$, 中子的速度大小为 v_n 。不考

前后各粒子都沿同一直线运动。

(2) 粒子对心碰撞时,被碰撞的粒子可获得最大能量,所以,为了求入射质子动能,设反应

代入数据得 $Q = -0.764 \text{ MeV}$, 说明这是吸能反应。

式中 c 为光速。

$$Q = [(m_p + m_{3\text{H}}) - (m_{3\text{He}} + m_n)]c^2$$

【解】(1) 按照爱因斯坦质能关系,本题中的反应能为

位有效数字。)。

$3.015501 \text{ u}, m_{3\text{He}} = 3.014932 \text{ u}$ 。u 是原子质量单位,1u 对应的能量为 931.5 MeV 。结果取 3

(已知 ${}^1_1\text{p}, {}^1_0\text{n}, {}^3_2\text{He}$ 核的静止质量分别为: $m_p = 1.007276 \text{ u}, m_n = 1.008665 \text{ u}, m_{3\text{H}} =$

射方向成 60.0° 角,则该中子的动能 T_n 为多少?

(3) 已知在该反应中入射质子的动能为 1.21 MeV , 若所产生中子的出射方向与质子的入

射粒子的最小动能(相对实验室参考系)。

(2) 在该核反应中,若 ${}^3\text{H}$ 静止,入射质子的动能 T_{in} 为多少? 阈值是使该反应能够发生的

(1) 它是吸能反应还是放能反应,反应能 Q 为多少?

小于光速。试问:

17. (28 届复赛) 有一核反应其反应式为 ${}^1_1\text{p} + {}^3_1\text{H} = {}^3_2\text{He} + {}^1_0\text{n}$, 反应中所有粒子的速度均远

不同,这就是所谓的核力。

之间的关系确实如式(3),这就说明核子之间的相互作用力是一种短程力,与静电力的性质完全

半径,所以不可能有类似于式(3)的核半径与核质量之间的关系。而实验表明,核半径与核质量

【点评】若核中质子之间主要是静电相互作用力,则质子之间的距离一定大于核子的

$$R_{\text{ps}} = 6.93 \text{ fm}$$

对于 ${}^{208}\text{Pb}$, $A = 208$, 其原子核的半径为

其中 $r_0 = \left(\frac{6}{\pi}\right)^{1/3} r_N$ 。根据式(1)、式(2)的结果,可算得 $r_0 = 1.17 \text{ fm}$ 。

$$(3) \quad R = \left(\frac{6}{\pi}\right)^{1/3} r_N A^{1/3} = r_0 A^{1/3}$$

使 $V' = V$ 由上述两式可得 R 和 A 的关系为

$$V = \frac{4\pi}{3} R^3$$

当核子数 A 较大时,原子核近似为一半径为 R 的球形,体积为

$$\text{记 } a = \frac{m_n^2 + m_{3\text{He}} m_n}{m_{3\text{He}}}, b = -2 \frac{m_p m_n}{m_{3\text{He}}} v_p, c = \frac{m_p^2 - m_p m_{3\text{He}}}{m_{3\text{He}}} v_p^2 - 2Q, \text{式(3)可表示为}$$

$$a v_n^2 + b v_n + c = 0 \quad (4)$$

式(4)有解的条件是

$$b^2 - 4ac \geq 0 \quad (5)$$

由于 $c = \frac{m_p^2 - m_p m_{3\text{He}}}{m_{3\text{He}}} v_p^2 - 2Q$, 所以 c 可能大于零, 亦可能小于零。

若 $c < 0$, 则式(5)总成立, 式(4)一定有解, 反应一定能发生。

若 $c > 0$, 则由式(5)可得到

$$\frac{1}{2} m_p v_p^2 \geq - \frac{m_n + m_{3\text{He}}}{m_n + m_{3\text{He}} - m_p} Q \quad (6)$$

即只有当入射质子的动能满足式(6)时, 式(4)才有解, 反应才能发生, 所以入射质子的最小动能, 即阈能为

$$T_{\text{th}} = - \left(1 + \frac{m_p}{m_n + m_{3\text{He}} - m_p} \right) Q \quad (7)$$

由于 $m_n \approx m_p, m_n - m_p \ll m_{3\text{He}}$, 式(7)可简化为

$$T_{\text{th}} = - \left(1 + \frac{m_p}{m_{3\text{H}}} \right) Q \quad (8)$$

代入有关数据得

$$T_{\text{th}} = 1.02 \text{ MeV} \quad (9)$$

(3) 由动量守恒和能量守恒有

$$m_p v_p = m_{3\text{He}} v_{3\text{He}} + m_n v_n \quad (10)$$

$$\frac{1}{2} m_p v_p^2 = \frac{1}{2} m_{3\text{He}} v_{3\text{He}}^2 + \frac{1}{2} m_n v_n^2 - Q \quad (11)$$

以 θ 表示反应中产生的中子速度方向与入射质子速度方向的夹角, 如图 3.31 所示。

根据余弦定理, 有

$$(m_{3\text{He}} v_{3\text{He}})^2 = (m_n v_n)^2 + (m_p v_p)^2 - 2m_n m_p v_n v_p \cos \theta \quad (12)$$

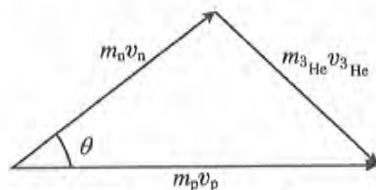


图 3.31 粒子的动量

令 $T_p = \frac{1}{2} m_p v_p^2, T_n = \frac{1}{2} m_n v_n^2, T_{3\text{He}} = \frac{1}{2} m_{3\text{He}} v_{3\text{He}}^2$, 代入

式(11)、式(12), 得

$$-Q = T_p - T_{3\text{He}} - T_n \quad (13)$$

$$2m_{3\text{He}} T_{3\text{He}} = 2m_n T_n + 2m_p T_p - 2\sqrt{2m_n T_n} \cdot \sqrt{2m_p T_p} \cos \theta \quad (14)$$

在式(13)、式(14)中, 消去 $T_{3\text{He}}$ 后, 得

$$T_n - 2 \frac{\sqrt{m_n m_p T_p}}{m_{3\text{He}} + m_n} \cos \theta \cdot \sqrt{T_n} - \frac{(m_{3\text{He}} - m_p) T_p + Q m_{3\text{He}}}{m_{3\text{He}} + m_n} = 0 \quad (15)$$

令 $S = \frac{\sqrt{m_n m_p T_p}}{m_{3\text{He}} + m_n} \cos \theta, R = \frac{(m_{3\text{He}} - m_p) T_p + Q m_{3\text{He}}}{m_{3\text{He}} + m_n}$, 得

【解法2】在牛顿力学中可以证明,质点系的总动能可以表示为质点系的总质量以质心速度运动的动能即所谓质心动能与各质点相对质心运动的动能之和。若质点系不受外力作用,则质点系的动量守恒,质心速度不变,故质心动能亦恒定不变;如果质点系内部的相互作用导致质点系机械能的变化,则可变化的机械能只能是各质点相对质心运动的动能。在本题中,如果质子p与³H发生反应后,生成的中子n和³He相对质心都静止,则质子p与³H相对质心运动的动能之和全部转化成反应能,反应后系统的动能只有质心的动能,在这种情况下,转化成其他形式能量的机械能最多,入射质子的动能最小,这最小动能便是阈能。所以入射质子的阈能等于

$$T_{th} = 1.02 \text{ MeV} \quad (6)$$

代人有关数据得

$$T_{th} = \left(1 + \frac{m_p}{m_{3H}}\right) |Q| \quad (5)$$

在忽略 $|Q|^2$ 项的情况下,式(4)可简化为

$$\frac{1}{1} = \frac{m_n + m_{3He} - m_p}{1} = \frac{m_{3H} \left(1 + \frac{m_{3H}}{|Q|c^2}\right)}{1} = \frac{1}{m_{3H}} \left(1 - \frac{m_{3H}}{|Q|c^2}\right)$$

有

$$\frac{|Q|}{m_{3H}c^2} \ll 1$$

利用第(1)问中的式(1),并注意到

$$T_{th} = \left(1 + \frac{m_n + m_{3He} - m_p}{m_p}\right) |Q| \quad (4)$$

所以阈能为

$$\frac{1}{2} m_p v_p^2 = \frac{m_n + m_{3He} - m_p}{m_n + m_{3He}} |Q| \quad (3)$$

由式(1)、式(2)可得

$$\frac{1}{2} m_p v_p^2 = \frac{1}{2} (m_{3He} + m_n) v^2 \quad (2)$$

$$m_p v_p = (m_{3He} + m_n) v \quad (1)$$

子的人射速度大小为 v_p ,反应后³He和中子的速度大小为 v ,根据动量守恒和能量守恒有最多,若所损失的机械能正好等于反应能,则入射质子的动能最小,这最小动能便是阈能。设质后³He和中子的速度相同,即黏在一起运动(完全非弹性碰撞),则在碰撞过程中损失的机械能【解法1】为了研究阈能,只考虑碰撞前后各粒子都沿同一直线运动的情况。若碰撞

附:第(2)问的其他解法

$$T_n = 0.132 \text{ MeV} \quad (18)$$

将具体数据代人,有

$$\sqrt{T_n} = S + \sqrt{S^2 + R} \quad (17)$$

物理意义的解为

根据题给的人射质子的动能和第(1)问求得得反应能 Q 的值,可知 $R > 0$,故式(16)的符合

$$T_n - 2S\sqrt{T_n} - R = 0 \quad (16)$$

系统质心的动能与反应能之和。

以 v'_p 和 v'_{H} 分别表示质子 p 和 ${}^3\text{H}$ 相对质心的速度, 有

$$|Q| = \frac{1}{2} m_p v'^2_p + \frac{1}{2} m_{\text{H}} v'^2_{\text{H}} \quad (1)$$

因系统质心的速度

$$v_c = \frac{m_p v_p}{m_p + m_{\text{H}}} \quad (2)$$

而

$$v'_p = v_p - v_c = \frac{m_{\text{H}} v_p}{m_p + m_{\text{H}}} \quad (3)$$

$$v'_{\text{H}} = 0 = v_c = -\frac{m_p v_p}{m_p + m_{\text{H}}} \quad (4)$$

由式(1)、式(3)、式(4)得

$$|Q| = \frac{m_{\text{H}}}{m_p + m_{\text{H}}} \frac{1}{2} m_p v_p^2 \quad (5)$$

在牛顿力学中, 系统的总质量是恒定不变的, 这就导致系统质心的动能在反应前后恒定不变的结论, 但在本题中, 损失掉的机械能导致系统总质量的变化, 使反应前系统的总质量与反应后系统的总质量不相等, 即 $m_p + m_{\text{H}} \neq m_n + m_{\text{He}}$ 。如果仍沿用牛顿力学的结论, 对一个孤立系统, 其质心速度是不会改变的, 故反应后质心的动能应为

$$E_c = \frac{1}{2} (m_n + m_{\text{He}}) v_c^2 = \frac{1}{2} (m_p + m_{\text{H}}) v_c^2 + \frac{1}{2} \frac{|Q|}{c^2} v_c^2$$

而

$$\frac{1}{2} \frac{|Q|}{c^2} v_c^2 = \frac{1}{2} \frac{|Q|}{c^2} \cdot \frac{m_p^2 v_p^2}{(m_p + m_{\text{H}})^2} = \frac{|Q|}{c^2} \cdot \frac{m_p}{m_p + m_{\text{H}}} \cdot \frac{|Q|}{m_{\text{H}}}$$

由此可见, 在忽略 $|Q|^2$ 的条件下, 有

$$\frac{1}{2} (m_n + m_{\text{He}}) v_c^2 = \frac{1}{2} (m_p + m_{\text{H}}) v_c^2$$

而入射质子的阈能

$$T_{\text{th}} = \frac{1}{2} (m_p + m_{\text{H}}) v_c^2 + |Q| \quad (6)$$

由式(2)、式(5)、式(6)得

$$T_{\text{th}} = \left(1 + \frac{m_p}{m_{\text{H}}}\right) |Q| \quad (7)$$

代入有关数据得

$$T_{\text{th}} = 1.02 \text{ MeV} \quad (8)$$

【解法 3】 考虑反应前后各粒子都沿同一直线运动的情况, 若入射质子与静止的 ${}^3\text{H}$ 发生完全非弹性碰撞, 即反应后产生的中子和 ${}^3\text{He}$ 以相同的速度运动, 则入射质子的动能就是阈能。以 m_{10} 表示质子的静止质量, m_{20} 表示 ${}^3\text{H}$ 的静止质量, m_{30} 表示中子的静止质量, m_{40} 表示 ${}^3\text{He}$

的静止质量, 设质子的入射速度大小为 v_p , 反应后 ${}^3\text{He}$ 和中子的速度大小都为 v , 根据动量守

恒和能量守恒, 有

$$(1) \quad m_1 v_p = (m_{30} + m_{40}) v$$

$$(2) \quad m_1 c^2 + m_{20} c^2 = \frac{(m_{30} + m_{40}) c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

式中 m_1 是质子的动质量。由式(1)、式(2)得

$$(3) \quad v = \frac{m_1 v_p}{m_1 + m_{20}}$$

把式(3)代入式(1), 经整理得

$$(4) \quad (m_1 + m_{20})^2 c^2 - m_1^2 v_p^2 = (m_{30} + m_{40})^2 c^2$$

$$\text{由 } m_1 = \frac{m_{10}}{\sqrt{1 - \frac{v_p^2}{c^2}}} \text{ 可得}$$

$$(5) \quad m_1^2 - m_{10}^2 = \frac{m_{10}^2 v_p^2}{c^2}$$

若入射质子的阈能为 E_{th} , 有

$$(6) \quad m_1 c^2 = m_{10} c^2 + E_{th}$$

由式(4)、式(6)、式(7)可得

$$(7) \quad E_{th} = \frac{2m_{20}}{(m_{30} + m_{40})^2 - (m_{10} + m_{20})^2}$$

利用题给条件并引入反应能, 得

$$(8) \quad E_{th} = \frac{2m_{3H}}{m_p + m_{3H} + m_n + m_{3He}} |\bar{Q}|$$

或有

$$(9) \quad E_{th} = \frac{2m_{3H}}{|\bar{Q}| + 2(m_p + m_{3H})} |\bar{Q}| \approx \frac{2m_{3H}}{m_p + m_{3H}} |\bar{Q}|$$

代人有关数据得

$$(10) \quad T_{th} = 1.02 \text{ MeV}$$

18. (29 届预赛) 铀 ${}^{238}_{92}\text{U}$ 是放射性元素, 若衰变时依次放出 $\alpha, \beta, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \beta, \beta, \alpha,$

β, β, α 粒子, 最终形成稳定的核 ${}^X\text{Pb}$, 则其中 $X = \underline{\hspace{2cm}}, Y = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
【解】这是铀系, 最后所形成的稳定核是 ${}^{206}_{82}\text{Pb}, X = 82, Y = 206$ 。

参 考 文 献

- [1] 全国中学生物理竞赛委员会常委会. 全国中学生物理竞赛 1~20 届试题解析: 热学、光学与近代物理分册[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006.

中学物理奥赛辅导

- | | |
|----------------------|-----|
| 热学·光学·近代物理学 | 崔宏滨 |
| 物理竞赛模型精编 | 江四喜 |
| 物理竞赛解题方法漫谈 | 江四喜 |
| 物理竞赛真题解析：热学·光学·近代物理学 | 崔宏滨 |
| 物理竞赛真题解析：力学 | 崔宏滨 |
| 物理竞赛真题解析：电磁学 | 崔宏滨 |

选题编辑 肖向兵
责任编辑 薛文涛
封面设计 页 子

定价：29.90 元

ISBN 978-7-312-03351-3



9 787312 033513 >