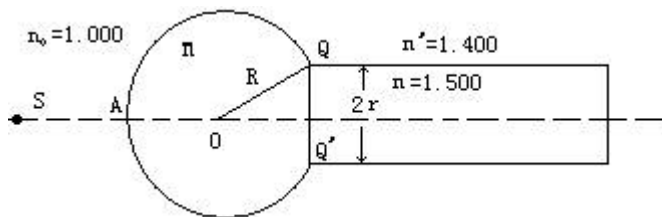


第 21 届全国中学生物理竞赛决赛试卷

一、(20 分) 有一光导纤维，光芯折射率 $n=1.500$ 的透明度极好的介质，其截面半径为 r ；光芯外面包层的折射率 $n=1.400$ 。有一半导体激光器 S ，位于光纤轴线的延长上，发出半角宽为 30° 的光束。为便于使此光束全部进入光纤，在光纤端面处烧结了一个其材料与光芯相同的、半径为 R 的球冠 QAQ' ，端面附近的结构如图所示（包层未画出）， S 可看作点光源，光纤放在空气中，空气的折射率 n_0 按 1.000 计算。

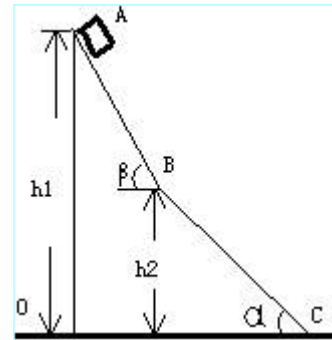


- 1、若要半导体激光器发出的光能够全部射到球冠上，则光源 S 离 A 的距离 x 应满足什么条件？
- 2、如果 $R=1.8r$ ，光源 S 与 A 的距离为 R ，入射与轴的夹角用 α 表示，则 α 角分别为 $\alpha_1=30^\circ$ 、 $\alpha_2=25^\circ$ 和 $\alpha_3=20^\circ$ 的三根光线能否经过全反射在光纤中传播？

二、(20 分) 试从相对论能量和动量的角度分析论证

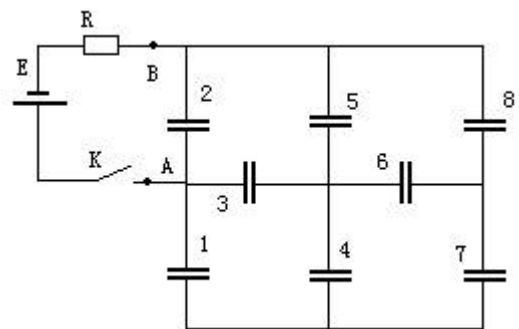
- 1、一个光子与真空中处于静止状态的自由电子碰撞时，光子的能量不可能完全被电子吸收。光子射到金属表面时，其能量有可能完全被吸收使电子逸出金属表面，产生光电效应。

三、(25) 如图所示, 一质量 $M=30.0\text{Kg}$ 的楔形木块 $OABC$ 静止在水平地面上, 其斜面段 AB 的倾角, BC 段的倾角 $\alpha=45^\circ$, AB 段与 BC 段连接处 (B) 为一非常短的光滑圆弧, 现将一质量的 $m=4.00\text{Kg}$ 小物块 (可视为质点), 放在斜面上离地面高 $h_1=2.80\text{m}$ 的 A 处, 然后放手, 令小物块从静止开始斜面下滑, 已知小物块与斜面之间无摩擦, 木块与地面间的最大静摩擦系数和滑动摩擦系数为 $\mu=6.00\times 10^{-2}$, B 处离桌面的高度 $h_2=2.00\text{m}$,

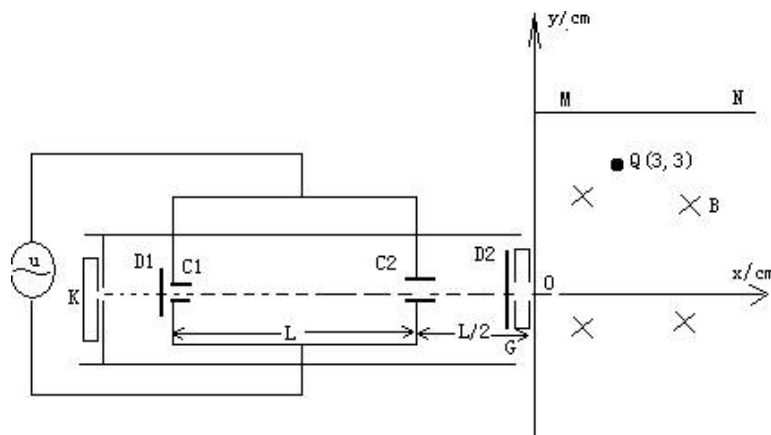


如果不计小物块经过处 B 时 ($\beta=60^\circ$) 物块及木块速度大小的改变, 求小物块从斜面上 A 处滑动到斜面底部 C 处整个过程中小物块对木块所做的功 (取重力加速度 $g=10.0\text{ms}^{-2}$)

四、(25 分) 由如图所示的电路, 其中 E 为内阻可以忽略的电源的电动势, R 为电阻的阻值; K 为开关; A 、 B 右边是如图所标的 8 个完全相同的容量均为 C 的理想电容器组成的电路, 问从合上 K 到各电容器充电完毕, 电阻 R 上发热消耗的能量是多少? (在解题时, 要求在图上标出你所设定的各个电容器极板上电荷的正负)



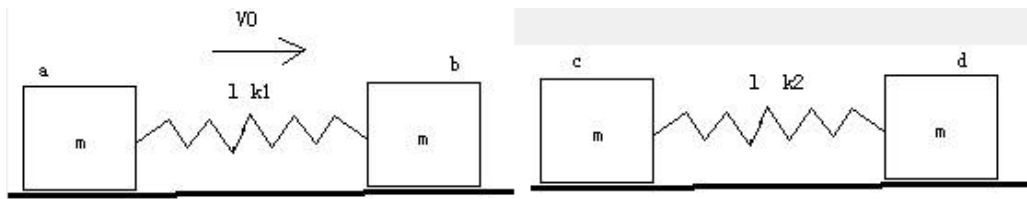
五、(25 分) 如图所示, K 为一带电粒子发生器, 从中可以不断地射出各种不同速率的带电粒子, 它们都带正电, 电量为 q , 质量为 m , 速度的方向都沿图中的虚线, D_1 、 D_2 为两块挡板, 可定时开启和关闭。 C_1 、 C_2 为两扇“门”, C_1 紧靠 D_1 , 两门之间的距离为 l , 两个门上都加上交变电压 $u=U_0 \sin(2\pi t/T)$, T 为交变电压的周期, 已知只有当上电压的值为零附近的无限短的时间内, 粒子才能通过该门, G 为能量增减器, 它紧靠挡板 D_2 , 到门 C_2 的距离为 $l/2$, 当带电粒子在 t 时刻通过 G 时, 粒子获得一定的能量 $\Delta E=E_0 \sin(2\pi t/T + \pi/4)$, 但速度的方向不变, 式中 $E_0=(2/4)ml^2/T^2$, 通过 G 的粒子从 O 点进入 G 右侧的匀强磁场区域, 磁场的磁感应强度大小为 B , 方向垂直面向里(整个装置都放在真空中)。在磁场区建立以 O 作为原点的如图所示的直角坐标系 oxy , MN 为磁场区域的边界, 它平行于 x 轴, 现在的 $t=0$ 时刻, 同时打开 D_1 与 D_2 , 让粒子进入 C_1 , 在时刻 $t=3T/4$, 关闭挡板 D_1 , 使粒子无法进入 C_1 , 在时刻 $t=10T/4$, 再关闭挡板 D_2 , 使粒子无法进入 G , 已知从 O 进入磁场中速度最大的粒子经过坐标为 $(3\text{cm}, 3\text{cm})$ 的 Q 点, 问: 假如要使从 O 进入磁场中速度最小的粒子能经过 Q 点, 则应将磁场边界 MN 在平面内 oxy 平移到什么位置。



六、(25分) 如图, a、b、c、d 是位于光滑水平桌面上的四个小物块, 它们的质量均为 m 。a、b 间有一自然长度为 l , 劲度系数为 k_1 的弹簧联结; c、d 之间有一自然长度为 l , 劲度系数为 k_2 的弹簧联结; 四个物块的中心在同一直线上。如果 b、c 发生碰撞, 碰撞是完全弹性的, 且碰撞时间极短, 开始时, 两个弹簧都处在自然长度状态, 物块 c、d 静止物块, a、b 以相同的速度 v_0 向右运动, 试定量论述

(1) 若 $k_1 = k_2$, 四个物块相对于桌面怎样运动?

(2) 若 $k_1 = 4k_2$, 四个物块相对于桌面怎样运动?



第 21 届全国中学生物理竞赛决赛试卷

参考答案及评分标准

一、

1. 当发射光束刚好都能射到球面上时, 光束的边缘光线应与球面相切, 如图 1 所示, T 为切点, 由几何关系可知

$$\sin 30^\circ = \frac{R}{SO}$$

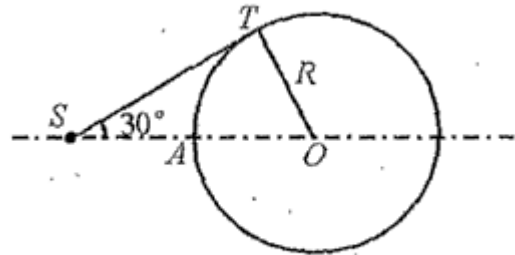


图 1

由此求得

$$\overline{SA} = R$$

若光源与 A 的距离大于 R , 则有部分光线不能达到球面. 全部光束能射到球冠上的条件是光源与 A 点的距离

$$x \leq R \quad (1)$$

2. $x = R$ 时雨轴成 α 角的入射光线的光路图如图 2 所示, 图中 B 点位于轴上, 用虚线画出的 QBQ' 与 QAQ' 构成一个球面. θ 和 θ' 分别表示入射角和折射角. 设折射线与球面交于 P' 点, 用 β 表示 OP' 与轴之间的夹角, 用 α' 表示折射线与轴之间的夹角.

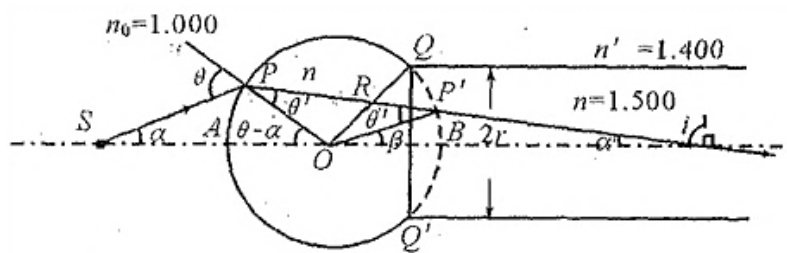


图 2

对 $\triangle OPS$, 由正弦定理可得

$$\frac{2R}{\sin \theta} = \frac{R}{\sin \alpha} \quad (2)$$

由折射定律得

$$\sin \theta = 1.5 \sin \theta' \quad (3)$$

由几何关系得

$$\beta = 2\theta' - \theta + \alpha \quad (4)$$

$$\alpha' = \theta - \alpha - \theta' \quad (5)$$

如果折射线的反向延长线与轴相交, 光路图如图 3 所示. 若对 α' 的正负号作出如下的规定: 折射线向靠近轴的方向偏折时, α' 取正值; 折射线的方向向远离轴的方向偏折时(即折射线的反向延长线与轴的交点在 A 点的左侧), α' 取负值, 则 (5) 式仍成立.

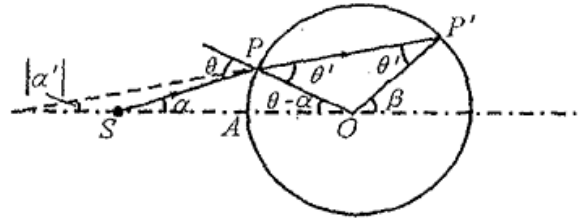


图 3

此外, 由几何关系可知, 折射线能进入光纤的条件是

$$|\beta| \leq \angle QOB \quad (6)$$

β 可能为负值, 这表示 P' 在轴线以下.

而 $\angle QOB = \arcsin \frac{r}{R}$

代入数据, 可知折射线能进入光纤的充要条件是

$$|\beta| \leq 33.75^\circ$$

下面分别讨论三条光纤的情况..

(i) $\alpha_1 = 30^\circ$ 时

a. 此入射光线的折射线能否进入光纤?

由 (2) 式得 $\sin \theta_1 = 2 \sin \alpha_1 = 1$, 得

$$\theta_1 = 90^\circ$$

代入 (3) 式得

$$\theta_1' = \arcsin \left(\frac{2}{3} \right) = 41.81^\circ$$

代入 (4) 式得

$$\beta_1 = 2\theta_1' - \theta_1 + \alpha_1 = 23.62^\circ \quad (7)$$

因为

$$\beta_1 < \angle QOB \quad (8)$$

故此折射线能进入光纤.

b.此折射线能否在光芯包层的界面上发生全反射?

设光纤内光线射至光芯与包层界面时发生全反射的临界角为 i_c , 则

$$i_c = \arcsin\left(\frac{1.400}{1.500}\right) = 68.96^\circ \quad (9)$$

因为 $i = 90^\circ - \alpha'$, 所以当 α' 满足下面条件时折射线即能被全反射:

$$\alpha' \leq 90^\circ - 68.96^\circ = 21.04^\circ \quad (10)$$

现在 $\alpha'_1 = \theta_1 - \alpha_1 - \theta'_1 = 18.19^\circ$, 满足 (10) 式的要求.故该光纤能经过全反射在光纤中传播.

(ii) $\alpha_2 = 25^\circ$ 时

由 (2) 式得 $\sin \theta_2 = 2 \sin \alpha_2 = 2 \sin 25^\circ$ $\theta_2 = 57.70^\circ$

$$\sin \theta'_2 = \frac{1}{1.5} \sin \theta_2 \quad \theta'_2 = 34.30^\circ$$

$$\beta_2 = 2\theta'_2 - \theta_2 + \alpha_2 = 35.90^\circ \quad (11)$$

由 (6) 式可知, 该折射线不能进入 QQ' 右面的光纤.

(iii) $\alpha_3 = 20^\circ$

由 (2) 式得 $\sin \theta_3 = 2 \sin \alpha_3 = 2 \sin 20^\circ$ $\theta_3 = 43.16^\circ$

$$\sin \theta'_3 = \frac{1}{1.5} \sin \theta_3 \quad \theta'_3 = 27.13^\circ$$

$$\beta_3 = 2\theta'_3 - \theta_3 + \alpha_3 = 31.10^\circ \quad (12)$$

由 (6) 式可知, 此折射线能进入 QQ' 右面的光纤.

此时

$$\alpha'_3 = \theta_3 - \alpha_3 + \theta'_3 = -3.97^\circ \quad (13)$$

负号表示折射线的延长线与轴相交于 A 点的左方, 它射至光纤的上半部的界面下, 如图 4

所示, $|\alpha'_3| < 21.04^\circ$, 所以此光纤可以经过全反射在光纤中传播.

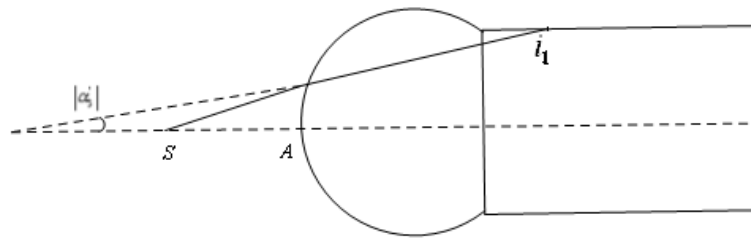


图4

二、

- 1、设电子处于静止状态时的质量为 m_0 ，光子的频率为 ν ，假定电子能完全吸收光子的能量，吸收光子后，电子以速度 v 运动，则这一过程应遵循动量守恒定律，有

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} \quad (1)$$

碰撞后系统的总能量为

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} \quad (2)$$

由 (1)、(2) 式消去 v ，得

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + h^2 \nu^2} \quad (3)$$

碰撞前电子与光子的总能量为

$$E_0 = h\nu + m_0 c^2 \quad (4)$$

由 (3)、(4) 式

$$E^2 - E_0^2 = (m_0^2 c^4 + h^2 \nu^2) - (h\nu + m_0 c^2)^2 = -2h\nu m_0 c^2 \neq 0 \quad (5)$$

这表明，所假设的过程不符合能量守恒定律，因此这一过程实际上不可能发生。

- 2、束缚在金属中的电子和射入金属的光子二者构成的系统在发生光电效应的过程中动量不守恒，只需考虑能量转换问题。设电子摆脱金属的束缚而逸出，需要对它做功至少为 W （逸出功），逸出金属表面后电子的速度为 v ，入射光子的能量为 $h\nu$ ，电子的静止质量为 m_0 ，若能产生光电效应，则有

$$h\nu \geq \left[\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} - m_0 c^2 \right] + W \quad (6)$$

逸出电子的速度 v 一般都比光速小很多，故有

$$\frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \quad (7)$$

忽略高阶小量, 只取(7)式中的前两项, 代入(6)式, 可得到

$$h\nu \geq \frac{1}{2} m_0 v^2 + W \quad (8)$$

可见, 只要 $h\nu \geq W$ (8) 式就能成立, 光电效应就能产生.

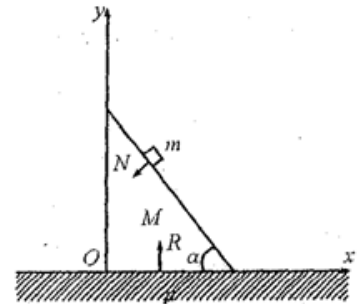
三、为方便起见, 我们先考虑小物块在斜面 BC 段上的运动, 取 Oxy 坐标如图所示, 令 a_x 、 a_y

分别表示小物块沿 x 方向和 y 方向加速度的大小, N 和 R 分别表示小物块与木块之间和木块与桌面之间的正压力的大小,

a_M 表示木块的加速度的大小, 小物块的运动方程为

$$ma_x = N \sin \alpha \quad (1)$$

$$ma_y = mg - N \cos \alpha \quad (2)$$



木块的运动方程

$$Ma_M = N \sin \alpha - \mu R \quad (3)$$

$$R = N \cos \alpha + Mg \quad (4)$$

小物块约束在斜面上运动, 有方程

$$\frac{a_x + a_M}{a_y} = \cot \alpha \quad (5)$$

由以上各式解得

$$N = \frac{(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) mg}{1 + (m/M) \sin^2 \alpha - \mu (m/M) \sin \alpha \cos \alpha} \quad (6)$$

此式对 AB 段同样成立, 只需将 α 换成 β 即可. 现在我们必须来判别木块能否运动, 判别的根据是方程(3). 若木块运动, 则由(3)式和(4)式应有

$$a_M = \frac{1}{M} (N \sin \alpha - \mu N \cos \alpha - \mu Mg) > 0 \quad (7)$$

否则木块不动, 小物块只做静止的木块上的下滑运动.

当小物块在 BC 段上运动时, $\alpha = 45^\circ$, 由(6)、(7)两式, 代入有关数据得

$$N = 28.2N \quad (8)$$

$$a_M = 2.50 \times 10^{-2} m \cdot s^{-2} > 0 \quad (9)$$

当小物块在 AB 段上运动时, 上面(6)、(7)两式应用 $\beta = 60^\circ$ 代替 $\alpha = 45^\circ$, 用 N' 代替 N , 用 a'_M 代替 a_M , 由(6)、(7)两式, 代入有关数据得

$$N' = 20.1N \quad (8')$$

$$a'_M = -3.90 \times 10^{-2} m \cdot s^{-2} < 0 \quad (9')$$

以上结果说明, 小物块从 A 到 B 的过程中, 木块没有移动; 从 B 到 C 的过程中, 木块是运动的. 所以, 小物块对木块做的功为

$$W = N \sin \alpha \cdot s \quad (10)$$

s 为木块移动的距离,

$$s = \frac{1}{2} a_M t^2 \quad (11)$$

t 可以从小物块自 B 点到 C 点沿竖直方向的运动过程中求得, 由(2)式及(8)式

$$a_y = g - \frac{N}{m} \cos \alpha = 5.01 m \cdot s^{-2}$$

由运动学公式

$$h_2 = v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \quad (12)$$

v_{0y} 为小物块在刚过 B 点时的速度 v_0 沿竖直方向的分量, v_0 可从能量守恒求得, 即

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = m g (h_1 - h_2) \quad (13)$$

所以
$$v_0 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)} = 4 m \cdot s^{-2} \quad (14)$$

$$v_{0y} = v_0 \cos \alpha$$

将(14)式代入(12)式, 解得

$$t = \frac{-v_{0y} \pm \sqrt{v_{0y}^2 + 2a_y h_2}}{a_y}$$

取正号, 并代入数据, 得

$$t = 0.492s$$

代入(11)式, 并注意到(9)式

$$s = \frac{1}{2} a_M t^2 = 3.01 \times 10^{-3} m \quad (15)$$

代入 (10) 式, 得

$$W = N \cdot \sin \alpha \cdot s = 6.00 \times 10^{-2} J \quad (16)$$

四、

A、B 右边 8 个电容器组成的电路 (图 1) 可视为一个等效电容 C_{AB} , 整个电路图可化简为图 2. 下面首先计算等效电容 C_{AB} .

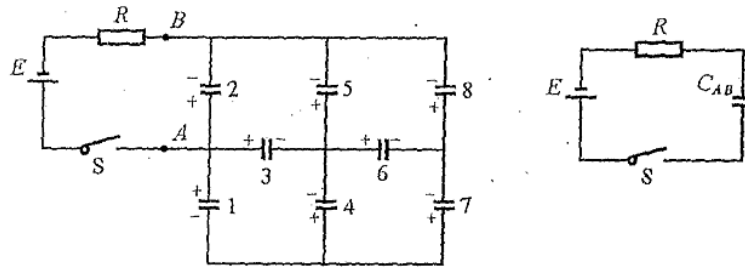


图 1

图 2

设合上 S 到充电完毕的过程中, 从 A、B 两点充入 A、B 右边电路的电量为 Q , A 正 B 负.

设第 i 个电容器所充的电量为 q_i , 各电容器极板上电荷的正负如图 1 所示.

根据各节点的电荷守恒可列出下列 4 个独立方程:

$$q_1 + q_2 + q_3 = Q \quad (1)$$

$$-q_1 + q_4 + q_7 = 0 \quad (2)$$

$$-q_3 - q_4 + q_5 + q_6 = 0 \quad (3)$$

$$-q_6 - q_7 + q_8 = 0 \quad (4)$$

下面再列出回路电压方程, 例如 $\frac{q_1}{C} + \frac{q_4}{C} - \frac{q_3}{C} = 0$ 等等, 得

$$q_1 + q_4 - q_3 = 0 \quad (5)$$

$$q_4 + q_6 - q_7 = 0 \quad (6)$$

$$q_2 - q_3 - q_5 = 0 \quad (7)$$

$$q_5 - q_6 - q_8 = 0 \quad (8)$$

因电容 2 两端的电压与等效电容 C_{AB} 两端的电压都等于 E , 故有

$$E = \frac{q_2}{C} \quad (9)$$

$$E = \frac{Q}{C_{AB}} \quad (10)$$

由方程 (1) ~ (8), 可解得

$$q_2 = \frac{8}{15}Q \quad (11)$$

由 (9)、(10)、(11) 式, 得

$$C_{AB} = \frac{15}{8}C \quad (12)$$

因在图 2 的电路中, 在整个充电的过程中通过电路的电量为 Q , 故电源对外所做的功为

$$W_0 = EQ \quad (13)$$

等效电容器中的贮能

$$W_1 = \frac{1}{2}QE \quad (14)$$

根据能量守恒定律, 电阻发热消耗的能量

$$W_2 = W_0 - W_1 \quad (15)$$

由以上有关各式, 得

$$W_2 = \frac{15}{16}E^2C \quad (16)$$

五、

1、讨论进入磁场区域的粒子的速度

在 $t=0$ 的时刻打开 D_1 , 由 $u = U_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ 可知, 此时 C_1 的电压 $u=0$, 各种不同速率

的粒子都能通过 C_1 . 如果通过 C_1 的粒子到达 C_2 的时刻为 $t=T/2$ 或 $T/2$ 的整数倍, 则此时 C_2

的电压恰好为零, 这些粒子又能通过 C_2 , 故通过 C_1 的粒子若能通过 C_2 , 其速度 v_n 应满足条

件

$$\frac{l}{v_n} = n\frac{T}{2} \quad n=1, 2, \dots \quad (1)$$

由此可得在 $t=0$ 时刻通过 C_1 后又能通过 C_2 的这些粒子的速度为

$$v_n = \frac{2l}{nT} \quad n=1, 2, \dots \quad (2)$$

速度为 v_n 的粒子由 C_1 到 C_2 经历时间

$$\Delta t_{n1} = \frac{1}{2}nT \quad (3)$$

由 C_2 到 G 经历的时间

$$\Delta t_{n2} = \frac{l}{2v_n} \quad (4)$$

由此可得粒子到 G 的时刻

$$t_n = \Delta t_{n1} + \Delta t_{n2} \approx \frac{3}{4}nT \quad (5)$$

因为当 $t = 10T/4$ 时, D_2 关闭, 故只有当

$$t_n \leq \frac{10}{4}T \quad (6)$$

粒子才能通过 G 并进入磁场区域, 根据 (5)、(6) 式, 注意到 n 为整数, 可知 n 的最大值为

$$n_{\max} = 3 \quad (7)$$

这些粒子进入磁场时的能量为

$$E_n = \frac{1}{2}mv_n^2 + E_0 \sin \left[\frac{2\pi}{T} \left(\frac{3n}{4}T \right) + \frac{\pi}{4} \right] \quad (8)$$

$$n = 1, 2, 3$$

这些粒子的能量分别为

$$E_1 \approx \frac{7}{4} \frac{ml^2}{T^2} \quad E_2 = \frac{1}{4} \frac{ml^2}{T^2} \quad E_3 = \frac{17}{36} \frac{ml^2}{T^2} \quad (9)$$

在 $t = T/2$ 时刻 C_1 的电压 $u = 0$, 各种不同速率的粒子又能通过 C_1 . 对速率 v_n' 满足条件

$$\frac{l}{v_n'} = \frac{n}{2}T \quad n = 1, 2, \dots \quad (10)$$

的粒子又能通过 C_2 . 这些粒子的速率为

$$v_n' = \frac{2l}{nT} \quad n = 1, 2, \dots \quad (11)$$

由 C_1 到 C_2 经历的时间和由 C_2 到 G 经历的时间分别为

$$\Delta t_{n1}' = \frac{n}{2}T \quad \Delta t_{n2}' = \frac{n}{4}T \quad (12)$$

到达 G 的时刻

$$t'_n = \frac{T}{2} + \Delta t'_{n1} + \Delta t'_{n2} = \frac{3n+2}{4}T \quad (13)$$

因为在 $t = 10T/4$ 时 D_2 关闭, 故有

$$t'_n \leq \frac{10}{4}T \quad (14)$$

由 (13) 和 (14) 式, 注意到 n 为整数, 得

$$n_{\max} = 2 \quad (15)$$

这些粒子进入磁场时具有的能量为

$$E'_n = \frac{1}{2}mv_2'^2 + E_0 \sin \left[\left(\frac{2\pi}{T} \frac{3n+2}{4} \right) T + \frac{\pi}{4} \right] \quad (16)$$

$$n = 1, 2$$

进入磁场的粒子的能量分别为

$$E'_1 = \frac{9}{4} \frac{ml^2}{T^2} \quad E'_2 = \frac{3}{4} \frac{ml^2}{T^2} \quad (17)$$

由于在 $t = 3T/4$ 时 D_1 已关闭, 以后无粒子再能进入 C_1 . 由 (9)、(17) 式可知, 进入磁场的粒

子的能量的最大值为 E'_1 , 对应的速度 V'_1 最大, 由 $E'_1 = \frac{1}{2}MV_1'^2$, 得

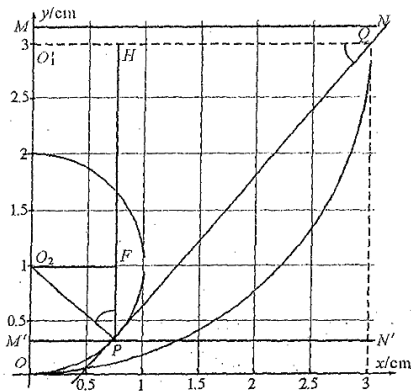
$$V'_1 = \sqrt{\frac{9}{2}} \frac{l}{T} \quad (18)$$

进入磁场的粒子的能量的最小值为 E'_2 , 对应的速度 V_2 最小, 同理得

$$V_2 = \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{l}{T} \quad (19)$$

2、确定磁场边界

如图所示, 在磁场区建立的直角坐标系中, 已知从 O 进入



磁场速度最大的粒子经过坐标为 $(3\text{cm}, 3\text{cm})$ 的 Q 点, 由 (18)、(19) 式知: 进入磁场的粒子最大的速度 V_1 是最小的速度 V_2 的 3 倍, 此两粒子进入磁场后它们的圆轨迹半径 R_1 和 R_2 , 有关系

$$R_1 = 3R_2$$

因速度为 V_1 的粒子的圆轨迹过坐标原点 O , 且与 x 轴相切, 又过 Q 点, 由此可求得

$$R_1 = 3\text{cm}$$

其圆心 O_1 的坐标为 $(0\text{cm}, 3\text{cm})$, 故知速度最小粒子的圆轨道半径

$$R_2 = 1\text{cm}$$

O_2 应在坐标为 $(0\text{cm}, 1\text{cm})$ 处, 其轨道圆方程为

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1 \quad (20)$$

过 Q 点作此圆的切线, 设切点 P 的坐标为 (x_p, y_p) , 若此粒子在 P 点以速度 V_2 进入无磁场区域, 则它将沿直线 PQ 到达 Q 点. P 点一定在磁场区域的边界上.

现在求 P 点的坐标. 因 O_2P 垂直于 PQ , 由 P 点作 O_1Q 的垂线交于 H 点, 由 O_2 点作 PH 的垂线交于 F 点. ΔO_2PF 与 ΔPQH 相似, 因而有

$$\frac{\overline{O_2F}}{\overline{PF}} = \frac{\overline{PH}}{\overline{HQ}} \quad (21)$$

即

$$\frac{x_p}{(1-y_p)} = \frac{(3-y_p)}{(3-x_p)} \quad (22)$$

得 $x_p^2 + y_p^2 - 4y_p = 3x_p - 3$

经配方得

$$x_p^2 + (y_p - 1)^2 - 2y_p - 1 = 3x_p - 3$$

因 P 点坐标 (x_p, y_p) 是满足 (20) 式, 故得

$$\begin{aligned} -2y_p &= 3x_p - 3 \\ y_p &= \frac{3}{2}(1-x_p) \end{aligned} \quad (23)$$

代入 (20) 式, 可求得 P 点的 y 坐标为

$$y_p = 0.354\text{cm} \quad (24)$$

因此, 只要将磁场的区域边界 MN 平行下移到过 P 点, 即图中的 $M'N'$, 速度 v_2 的粒子在 P 点穿出磁场, 它将沿轨迹圆的切线方向到达 Q 点.

六、

在 a 、 b 两物块向右运动的过程中, b 与 c 第一次相遇并发生碰撞, 在碰撞的极短时间内, 两根弹簧的长度都来不及发生变化, 处在原长度状态, 故 a 、 d 的运动未变化. 由于 b 、 c 质量相等, 碰撞是完全弹性的, 故刚碰撞后, b 的速度为零, c 的速度为 v_0 , 方向向右. 碰撞刚碰完时, a 的速度为 v_0 , 方向向右, b 的速度为零. a 与 b 构成的系统的质心 M_1 (位于弹簧的中点处) 的速度为 $v_0/2$, 方向向右; c 的速度为 v_0 , 方向向右, d 的速度为零. c 与 d 构成的系统的质心 M_2 (位于弹簧的中点处) 的速度为 $v_0/2$, 方向亦向右.

以 M_1 为坐标原点, 建立跟随质心一起以 $v_0/2$ 的速度向右运动的坐标系, 其 X' 轴与四物块中心的连线相重合 (称此坐标系为质心坐标系), 以 b 与 c 发生第一次碰撞的时刻作为时间的起点 ($t=0$), 则在此质心坐标系中, 连结 a 、 b 的弹簧的中点是固定不动的, a 、 b 构成的系统可以看作是两个“弹簧一端固定, 弹簧的自然长度为 $l/2$, 劲度系数为 $2k_1$ 的弹簧振子”,

同样, c、d 构成的系统亦可看成两个弹簧振子, 弹簧的自然长度均为 $l/2$, 劲度系数均为 $2k_2$.

若以 x'_a 、 x'_b 、 x'_c 、 x'_d 分别代表 a、b、c、d 各物块离开各自平衡位置的位移, 则有

$$x'_a = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$x'_b = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_2)$$

式中

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2k_1}{m}}$$

A_1 、 φ_1 、 φ_2 为待定常量.

$$x'_c = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_3)$$

$$x'_d = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_4)$$

式中

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2k_2}{m}}$$

A_2 、 φ_3 、 φ_4 为待定常量

在 $t=0$ 时刻, 相对质心坐标系有

$$x'_{a0} = 0 \quad v'_{a0} = \frac{v_0}{2}$$

$$x'_{b0} = 0 \quad v'_{b0} = -\frac{v_0}{2}$$

$$x'_{c0} = 0 \quad v'_{c0} = \frac{v_0}{2}$$

$$x'_{d0} = 0 \quad v'_{d0} = -\frac{v_0}{2}$$

此为初始条件.

利用参考圆方法, 可求得四个小物块相对质心坐标系的速度分别为

$$v'_a = -A_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$v'_b = -A_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_2)$$

$$v'_c = -A_2 \omega_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_3)$$

$$v'_d = -A_2 \omega_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_4)$$

由位移、速度的表示式和初始条件可求得

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{v_0}{2\omega_1} & \varphi_1 &= -\frac{\pi}{2} & \varphi_2 &= \frac{\pi}{2} \\
 A_2 &= \frac{v_0}{2\omega_2} & \varphi_3 &= -\frac{\pi}{2} & \varphi_4 &= \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

由此可得

$$\left. \begin{aligned}
 x'_a &= \frac{v_0}{2\omega_1} \sin \omega_1 t \\
 x'_b &= -\frac{v_0}{2\omega_1} \sin \omega_1 t \\
 x'_c &= \frac{v_0}{2\omega_2} \sin \omega_2 t \\
 x'_d &= -\frac{v_0}{2\omega_2} \sin \omega_2 t
 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned}
 x'_a &= \frac{v_0}{2} \cos \omega_1 t \\
 v'_b &= -\frac{v_0}{2} \cos \omega_1 t \\
 v'_c &= \frac{v_0}{2} \cos \omega_2 t \\
 v'_d &= -\frac{v_0}{2} \cos \omega_2 t
 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

四物块在质心坐标系中的坐标分别为

$$\left. \begin{aligned}
 X'_a &= -\frac{l}{2} + \frac{v_0}{2\omega_1} \sin \omega_1 t \\
 X'_b &= \frac{l}{2} - \frac{v_0}{2\omega_1} \sin \omega_1 t \\
 X'_c &= \frac{l}{2} + \frac{v_0}{2\omega_2} \sin \omega_2 t \\
 X'_d &= \frac{3l}{2} - \frac{v_0}{2\omega_2} \sin \omega_2 t
 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

建立相对桌面静止的坐标系，其原点与第一次碰撞刚碰完时 ab 系统的质心 M_1 重合， X 轴与 X' 轴重合，则相对桌面坐标系，四物块的坐标分别为

$$\left. \begin{aligned} X_a &= \frac{1}{2}v_0t + \frac{v_0}{2\omega_1}\sin\omega_1t - \frac{l}{2} \\ X_b &= \frac{1}{2}v_0t - \frac{v_0}{2\omega_1}\sin\omega_1t + \frac{l}{2} \\ X_c &= \frac{1}{2}v_0t + \frac{v_0}{2\omega_2}\sin\omega_2t + \frac{l}{2} \\ X_d &= \frac{1}{2}v_0t - \frac{v_0}{2\omega_2}\sin\omega_2t + \frac{3l}{2} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

相对桌面坐标系, 各物块的速度

$$\left. \begin{aligned} v_a &= \frac{v_0}{2} + \frac{v_0}{2}\cos\omega_1t \\ v_b &= \frac{v_0}{2} - \frac{v_0}{2}\cos\omega_1t \\ v_c &= \frac{v_0}{2} + \frac{v_0}{2}\cos\omega_2t \\ v_d &= \frac{v_0}{2} - \frac{v_0}{2}\cos\omega_2t \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

1、 $k_1 = k_2$ 时

设两个弹簧的劲度系数都是 k , 则有

$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}} = \omega_0 \quad (6)$$

第一次碰撞后 a、b、c、d 相对桌面坐标系的位置和速度可由 (4) 式与 (5) 式求得

$$\left. \begin{aligned} X_a &= \frac{1}{2}v_0t + \frac{v_0}{2\omega_0}\sin\omega_0t - \frac{l}{2} \\ X_b &= \frac{1}{2}v_0t - \frac{v_0}{2\omega_0}\sin\omega_0t + \frac{l}{2} \\ X_c &= \frac{1}{2}v_0t + \frac{v_0}{2\omega_0}\sin\omega_0t + \frac{l}{2} \\ X_d &= \frac{1}{2}v_0t - \frac{v_0}{2\omega_0}\sin\omega_0t + \frac{3l}{2} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} v_a &= \frac{v_0}{2} + \frac{v_0}{2}\cos\omega_0t \\ v_b &= \frac{v_0}{2} - \frac{v_0}{2}\cos\omega_0t \\ v_c &= \frac{v_0}{2} + \frac{v_0}{2}\cos\omega_0t \\ v_d &= \frac{v_0}{2} - \frac{v_0}{2}\cos\omega_0t \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

如果在以后的运动中, b、c 又可能相遇, 即第二次相遇, 则应有

$$X_b = X_c$$

由 (7) 式, 得

$$\sin \omega_0 t = 0 \quad (9)$$

t 不等于零的最小正数解满足

$$\omega_0 t = \pi \quad (10)$$

b、c 相遇时对质心系的速度由 (2) 式、(9) 式得

$$v_b'(\text{遇}) = \frac{v_0}{2}$$

$$v_c'(\text{遇}) = -\frac{v_0}{2}$$

b、c 相遇时, b 的速度向右, c 的速度向左, b、c 发生第二次碰撞, 刚碰后速度交换, 有

$$v_b'(\text{后}) = -\frac{v_0}{2}$$

$$v_c'(\text{后}) = \frac{v_0}{2}$$

b、c 第二次相遇时, a、b、c、d 四物块离开各自平衡位置的位移可由 (10) 式及 (1) 式求出, 即

$$x_a' = 0$$

$$x_b' = 0$$

$$x_c' = 0$$

$$x_d' = 0$$

表示弹簧都处于自然状态, 无形变.

第二次碰撞刚碰完时, a、b、c、d 相对桌面坐标系的速度

$$\left. \begin{aligned} v_a &= \frac{v_0}{2} - \frac{v_0}{2} = 0 \\ v_b &= \frac{v_0}{2} - \frac{v_0}{2} = 0 \\ v_c &= \frac{v_0}{2} + \frac{v_0}{2} = v_0 \\ v_d &= \frac{v_0}{2} + \frac{v_0}{2} = v_0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

即第二次碰撞刚碰完时, a、b 速度为零, 弹簧处在自然状态, 故以后 a、b 静止在各自的平衡位置; c、d 亦处在各自的平衡位置, 并以相同的速度 v_0 向右运动, 以后一直匀速运动下

去, 不再振动, 也不会再发生碰撞.

2、 $k_1 = 4k_2$ 时

因 $k_1 = 4k_2$, 故有

$$\omega_1 = 2\omega_2 = \sqrt{\frac{2k_1}{m}} = \sqrt{\frac{8k_2}{m}} \quad (12)$$

第一次碰撞后, a、b、c、d 相对桌面坐标系的位置和速度由 (4) 式和 (5) 式可求得

$$\left. \begin{aligned} X_a &= \frac{1}{2}v_0t + \frac{v_0}{2\omega_1}\sin\omega_1t - \frac{l}{2} \\ X_b &= \frac{1}{2}v_0t - \frac{v_0}{2\omega_1}\sin\omega_1t + \frac{l}{2} \\ X_c &= \frac{1}{2}v_0t + \frac{v_0}{\omega_1}\sin\frac{\omega_1t}{2} + \frac{l}{2} \\ X_d &= \frac{1}{2}v_0t - \frac{v_0}{\omega_1}\sin\frac{\omega_1t}{2} + \frac{3l}{2} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} v_a &= \frac{v_0}{2} + \frac{v_0}{2}\cos\omega_1t \\ v_b &= \frac{v_0}{2} - \frac{v_0}{2}\cos\omega_1t \\ v_c &= \frac{v_0}{2} + \frac{v_0}{2}\cos\frac{\omega_1t}{2} \\ v_d &= \frac{v_0}{2} - \frac{v_0}{2}\cos\frac{\omega_1t}{2} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

如果在以后的运动过程中 b 与 c 会相遇, 则有

$$X_b = X_c$$

由 (13) 式有

$$-\frac{1}{2}\sin\omega_1t = \sin\left(\frac{\omega_1t}{2}\right)$$

因 $\omega_1 = 2\omega_2$, 得

$$\sin\omega_2t(\cos\omega_2t + 1) = 0 \quad (15)$$

其解为

$$\omega_2t = n\pi \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (16)$$

其中使 t 为异于零的最小正数解满足

$$\omega_2 t = \pi \quad (17)$$

及

$$\omega_1 t = 2\pi \quad (18)$$

b、c 相遇时相对质心系的速度由 (2) 式及 (16) 式得

$$v'_b(\text{遇}) = -\frac{v_0}{2}$$

$$v'_c(\text{遇}) = -\frac{v_0}{2}$$

因 b、c 相遇时, 速度的大小相等, 方向都向左, 表明 b、c 相遇而不发生碰撞, 即无第二次碰撞. 由 (17)、(18) 式及 (1) 式可求得 b、c 第二次相遇时, 四物块相对各自平衡位置的位移

$$x'_a = 0$$

$$x'_b = 0$$

$$x'_c = 0$$

$$x'_d = 0$$

即两个弹簧都处在自然长度. 这时四个物块相对于桌面参考系的速度分别为

$$\left. \begin{aligned} v_a &= \frac{v_0}{2} + \frac{v_0}{2} = v_0 \\ v_b &= \frac{v_0}{2} - \frac{v_0}{2} = 0 \\ v_c &= \frac{v_0}{2} - \frac{v_0}{2} = 0 \\ v_d &= \frac{v_0}{2} + \frac{v_0}{2} = v_0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

由于在此时 a 向右运动, 而 b 静止, 故弹簧将被压缩, b 加速, a 减速; 由于 c 静止, d 运动, 故弹簧将被拉长, c 加速, d 减速; 弹簧振子又开始振动.

由 (16) 式, 当

$$\omega_2 t = 2\pi$$

$$\omega_1 t = 4\pi$$

b、c 两木块又相遇, 由 (2) 式可求得相遇时, b、c 相对质心坐标系的速度为

$$v'_b(\text{遇}) = -\frac{v_0}{2}$$

$$v'_c(\text{遇}) = \frac{v_0}{2}$$

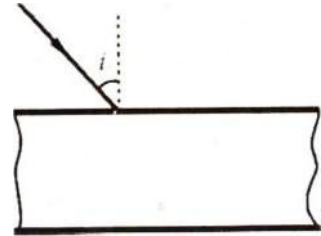
因相遇时, b 向左运动, c 向右运动, 速度大小相等, 故 b、c 相遇而不发生碰撞. 此时四物块相对于桌面坐标系的速度为

$$\left. \begin{array}{l} v_a = v_0 \\ v_b = 0 \\ v_c = v_0 \\ v_d = 0 \end{array} \right\} \quad (20)$$

在随后的时间里, a、b 构成的系统的质心 M_1 以速度 $\frac{1}{2}v_0$ 向右做匀速直线运动, a、b 相对于 M_1 做简谐运动, 振动的圆频率 ω_1 . c、d 构成的系统的质心 M_2 亦以速度 $\frac{1}{2}v_0$ 向右做匀速直线运动, c、d 相对于 M_2 做简谐运动, 振动的圆频率 ω_2 . b、c 两物块每隔 $\frac{\pi}{\omega_2}$ 的一段时间相遇一次, 但都是上述两种情况之一, 只相遇而不碰撞.

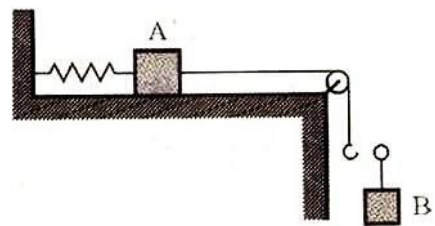
第 22 届全国中学生物理竞赛决赛试题

一、如图所示, 一细光束由空气中射到一透明平行平板的上表面, 经折射后由平板下表面射出. 此细光束由两种不同频率的单色光①和②构成. 用 i 表示入射角, 用 n_1 和 n_2 分别表示平板对①和②的折射率, 且已知 $n_1 > n_2$.

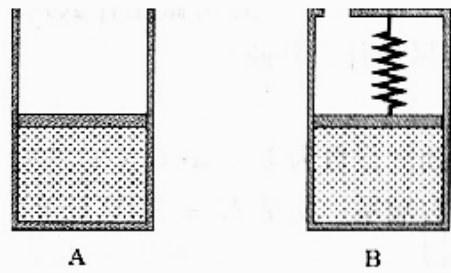


1. 试分析讨论哪种单色光在穿过平板的过程中所用的时间较短.
2. 若 $n_1 = 1.55, n_2 = 1.52$ 可做出什么判断? 若 $n_1 = 1.40, n_2 = 1.38$, 又可做出什么判断?

二、如图所示, 劲度系数为 $k = 40.0 \text{ N/m}$ 的轻质水平弹簧的左端固定在壁上, 右端系一质量 $M = 3.00 \text{ kg}$ 的小物块 A, A 的右边系一轻细线, 细线绕过轻质光滑的定滑轮后与轻挂链相连. 物块 A 放在足够长的水平桌面上, 它与桌面间的静摩擦因数 $\mu_0 = 0.200$, 而动摩擦因数 $\mu = 0.180$. 滑轮以左的轻绳处于水平静止状态, 弹簧的长度为自然长度. 现将一质量 $m = 2.00 \text{ kg}$ 的物块 B 轻轻地挂在钩上, 然后放手. 求此后整个过程中克服摩擦力所做的功和经历的时间. 取 $g = 10 \text{ m/s}^2$.



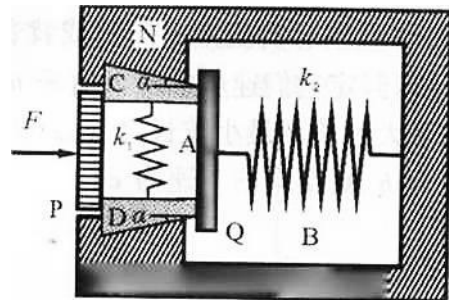
三、如图所示, A 、 B 是两个内径相同的圆柱形气缸, 竖直放置在大气中, 大气压强为 p_0 . 质量都是 m 的活塞分别把都是 $nmol$ 的同种理想气体封闭在气缸内, 气缸横截面的面积为 S . 气缸 B 的活塞与一处在竖直状态的劲度系数为 k 的轻质弹簧相连, 弹簧的上端固定. 初始时, 两



气缸中气体的温度都是 T_1 , 活塞都处在平衡状态, 弹簧既未压缩亦未拉长. 现让两气缸中的气体都缓慢降温至同一温度, 已知此时 B 中气体的体积为其初始体积的 a 倍, 试求在此降温过程中气缸 A 中气体传出的热量 Q_A 与气缸 B 中气体传出的热量 Q_B 之差.

四、缓冲器是用来减少车辆间冲击作用的一种装置, 下图所示是一种常用的摩擦缓冲器的断面简化示意图. 图中 N 是缓冲器的弹簧盒. C 和 D 是两块完全相同的、截面为梯形的楔块, 两楔块上、下对称放置, 左、右端分别与垫板 P 、 Q 相接触, 楔块的斜面与水平面的夹角均为 a . A 是劲度系数为 k_1 的弹簧, 两端分别与 C 、 D 固连.

B 是劲度系数为 k_2 的弹簧, 一端与 Q 固连, 另一端与弹簧盒的壁固连. 楔块 C 、 D 与各接触面之间均可滑动, 动摩擦因数均为 μ .



工程上用吸收率来表示缓冲器性能的优劣. 测定吸收率时, 将缓冲器的右侧固定, 左侧用实验车由左向右撞击垫板 P . 在压缩阶段, 在冲击力 F 作用下, 缓冲器的弹簧被压缩至最紧(但未超过弹性限度)时, 加在 P 上的外力 F 做功 W ; 在弹簧恢复的过程中, 缓冲器反抗外力做功 W' . 定义吸收率为 $\eta = 1 - W/W'$, 吸收率越大, 则缓冲器性能越好.

已知某一种摩擦缓冲器的参数为 $k_1 = 1.2 \times 10^7 \text{ N/m}$, $k_2 = 1.5 \times 10^6 \text{ N/m}$, $\mu = 0.25$, $a = 22^\circ$. 由于技术上的需要, 各弹簧在组装时就已处于压缩状态, A 的压缩量为 $x_{10} = 1.0 \times 10^{-3} \text{ m}$. B 的压缩量为 $x_{20} = 4.0 \times 10^{-2} \text{ m}$. 弹簧 B 可以在外力作用下再压缩的最大量为 $\Delta x_m = 6.3 \times 10^{-2} \text{ m}$. 若弹簧、楔块和垫板的质量均可视为零, 试计算该缓冲器的吸收率.

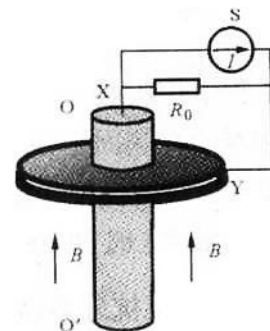
五、设某原子核处于基态时的静止质量为 m_0 ，处于激发态时其能量与基态能量之差为 ΔE ，且受激原子核处于自由状态。

1. 假设处于激发态的原子核原先静止，在发射一个光子后回到基态，试求其发射光子的波长 λ_0 。

2. 由于无规则热运动，大量处于激发态的原子核原先不是静止的，可以沿任何方向运动，且速度的大小也是无规则的，可具有任何值。现只考察那些相对实验室是向着或背着仪器做直线运动的激发态原子核，假定它们速度的最大值是 u ，试求这些受激核所发射光子的最大波长和最小波长之差 $\Delta\lambda$ 与 λ_0 之比。

已知普朗克常量为 h ，真空中的光速为 c 。

六、如图所示， OO' 为一固定不动的半径为 a_1 的圆柱形金属轴，其电阻可忽略，一个内半径为 a_1 ，外半径为 a_2 、厚度为 $h (\ll a_1)$ 的匀质环形导体圆盘套在 OO' 上，与 OO' 接触良好，并可绕 OO' 转动。盘上距盘心 r 处的电阻率与 r 成正比，即 $\rho = \rho_0 r$ ， ρ_0 为常量。整个环形圆盘处在与环面垂直的恒定匀强磁场中，磁感应强度的大小为 B 。图中的电源 s 是一个不论负载如何变化，均能提供恒定不变的电流 I 的电源（称为恒流源）， R_0 是跨接在电源两端的固定电阻的阻值。电源的一端接在固定金属轴上端面的中心 x 处，另一端与环形电刷 Y 相连。环形电刷包围在圆盘的外缘，当圆盘绕金属轴转动时与盘保持良好接触。此装置可看作一“圆盘电动机”。当电源接通后，若它不带任何负载，称为空载状态，空载达到稳定时圆盘的转动角速度用 ω_0 表示；带有负载（图中未画出）时，圆盘转动达到稳定时的角速度用 ω 表示，不计一切摩擦，问



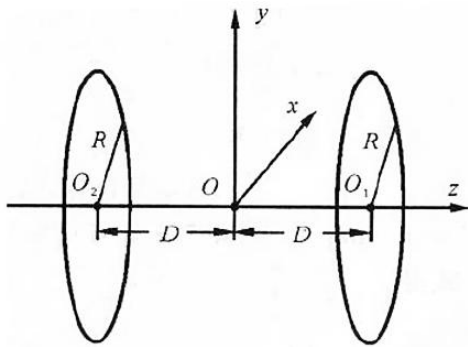
1. 当电动机输出机械功率 P 最大时， ω 与 ω_0 之比等于多少？

2. 在 1 的情况下，圆盘的发热功率为多少？

七、如图所示, 两个半径都为 R 带电荷都为 $Q(>0)$ 的均匀带电细圆环, 环的圆心位于 z 轴上, 环面与 z 轴垂直, 坐标原点 O 到两圆环的圆心 O_1 和 O_2 的距离相等, 用 D 表示此距离 (其大小可变, 即可取任意值)。

1. 一质量为 m 、电荷为 $q(>0)$ 的带电粒子, 从 $z = -\infty$ 处沿 O_2 轴正方向射向两个圆环, 已知该粒子刚好能穿过两个圆环. 试通过定性及半定量的分析, 画出该粒子的动能 E_k 随 z 变化的图线, 并求出与所画图线相应的 D 所满足的条件.

2. 若该粒子初始时位于坐标原点 $z = 0$ 处, 现给粒子一沿 z 轴方向的速度(大小不限), 试尽可能详细讨论粒子可能做怎样的运动. 不计重力的作用.

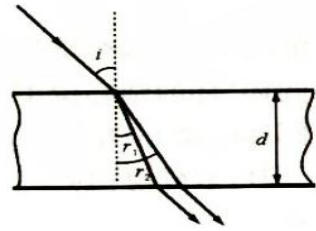


第 22 届全国中学生物理竞赛参考解答及评分标准

一、

1. 令 d 表示平板的厚度, v_1 和 v_2 分别表示①和②在平板中的速度的大小, r_1 和 r_2 分别表示它们的折射角, t_1 和 t_2 分别表示它们穿过平板所用的时间, 则有

$$\begin{aligned}
 t_1 &= \frac{d}{v_1 \cos r_1} \\
 t_2 &= \frac{d}{v_2 \cos r_2}
 \end{aligned}
 \quad (1)$$



用 c 表示光在真空中的速度 (近似等于光在空气中的速度), 有

$$n_1 = \frac{c}{v_1} \quad n_2 = \frac{c}{v_2} \quad (2)$$

由折射定律有

$$\sin i = n_1 \sin r_1 \quad \sin i = n_2 \sin r_2 \quad (3)$$

由(1)、(2)、(3)式得

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{\sin i}{n_2}\right)^2}}{n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\sin i}{n_1}\right)^2}} \quad (4)$$

当 $n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{\sin i}{n_2}\right)^2} < n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\sin i}{n_1}\right)^2}$ 时, $t_1 < t_2$

$n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{\sin i}{n_2}\right)^2} > n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\sin i}{n_1}\right)^2}$ 时, $t_1 > t_2$

$n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{\sin i}{n_2}\right)^2} = n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\sin i}{n_1}\right)^2}$ 时, $t_1 = t_2$

化简后得: 当

$$\sin i > \frac{n_1 n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \quad (5)$$

时, $t_1 < t_2$, 单色光①所用的时间较短; 当

$$\sin i < \frac{n_1 n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \quad (6)$$

时, $t_1 > t_2$, 单色光②所用的时间较短; 当

$$\sin i = \frac{n_1 n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \quad (7)$$

时, $t_1 = t_2$, 两种单色光所用的时间相等.

2. 当 $n_1 = 1.55, n_2 = 1.52$ 时可得

$$\frac{n_1 n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \approx 1.085 > 1$$

因 $\sin i$ 最大为 1, 由(5)式、(6)式可知, 一定是单色光②所用的时间较短, 不管入射角是多大.

当 $n_1 = 1.40, n_2 = 1.38$ 时可得

$$\frac{n_1 n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \approx 0.983 < 1$$

由(5)、(6)式可知, 当入射角 i 较大时, 单色光①所用的时间较短; 当入射角 i 较小时, 单色

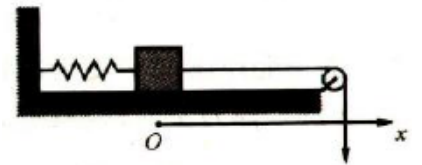
光②所用的时间较短. 因为 $\frac{n_1 n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} < 1$, 故存在某一入射角 i' 可使 $\sin i' = \frac{n_1 n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}$, 当

入射光以此入射角入射时, 由(7)式可知单色光①、②在平板中经历的时间相同.

二、

取一水平向右的坐标轴 O_x , 原点 O 与小物块 A 的初始位置重合,

如图所示. 挂上 B 刚释放 B 时, 弹簧尚未被拉长, 弹力为零. 现把 A 和 B 作为一个系统, 在处理系统的运动时, 可把 A 、 B 看作位于同一水平直线上, 作用于 B 的重力 mg 看作是水平向右的外力. 根据题给的数据可



知, 系统受到的向右的力 mg 大于最大摩擦力 μMg , 所以 A 、 B 一起加速运动. 当 A 的坐标为 x 时, 系统的加速度为 a , 则有

$$mg - \mu Mg - kx = (m + M)a \quad (1)$$

当 $a = 0$ 时, 作用在 A 和 B 组成的系统的合力为零, 系统处于平衡状态. 平衡时, A 的坐标 x_1

可由(1)式及题给的数据求得

$$x_1 = \frac{mg - \mu Mg}{k} = 0.365m \quad (2)$$

此时系统虽达到平衡, 但具有速度, 故 A 将继续向右运动直到速度变为零. 在系统从开始运动到速度变为零的过程中, 因为 mg 、 μMg 皆为恒力, 而弹力为线性恢复力, 所以系统的运动是以 $x = x_1$ 为平衡位置的简谐振动, 振动周期

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m+M}{k}} = 2.22s \quad (3)$$

振幅为 x_1 . 从开始运动到速度变为零所经历的时间

$$t_1 = \frac{1}{2}T = 1.11s \quad (4)$$

从 A 开始向右运动到系统的速度为零, A 移动的距离为 $2x_1$, 弹簧的伸长量亦为 $2x_1$, 此时系统 AB 受的弹力和 mg 的合力为 $2kx_1 - mg$, 由题给的数据可知

$$2kx_1 - mg > \mu_0 Mg \quad (5)$$

因此系统不能停住, A 开始向左做加速运动. 在向左运动的过程中, 当 A 的坐标为 x 时, 设系统加速度为 a , 有

$$kx - mg - \mu Mg = (m+M)a \quad (6)$$

当加速度为零时, 系统平衡, 由(6)式可求得平衡时 A 的坐标

$$x_2 = \frac{mg + \mu Mg}{k} = 0.635m \quad (7)$$

A 在 $x = x_2$ 处时, 因系统具有向左的速度而继续向左运动, 直到速度变为零. 系统从静止开始向左运动直到速度又变为零的运动是以 $x = x_2$ 为平衡位置的简谐振动, 周期仍为 T , 振幅为 $2x_1 - x_2$, 经历时间

$$t_2 = \frac{1}{2}T = 1.11s \quad (8)$$

当 AB 的速度变为零时, A 的坐标

$$x' = x_2 - (2x_1 - x_2) = 2x_2 - 2x_1 = 0.54m \quad (9)$$

x' 也就是此时弹簧的伸长量. 因为此时

$$kx' - mg = 1.6N \quad (10)$$

$$\mu_0 mg = 6N \quad (11)$$

可见

$$kx' - mg < \mu_0 Mg \quad (12)$$

所以 A 只能停在 $x = x'$ 处, 系统静止.

从释放 B 到系统最后处于静止状态的整个过程中, A 运动的总路程为

$$s = 2x_1 + 2(2x_1 - x_2) = 6x_1 - 2x_2 \quad (13)$$

克服摩擦力做的总功

$$W_\mu = \mu Mgs \quad (14)$$

代入有关数据得

$$W_\mu = 4.97J \quad (15)$$

从开始到最后停止所经历时间为

$$t = t_1 + t_2 = 2.22s \quad (16)$$

三、

当温度缓慢下降时, 根据题给的条件, 可以判定 B 中气体的体积将变小, 末态的体积应小于初态的体积, 试题给出的 α 是小于 1 的.

由于 A 、 B 两气缸中的气体是同种、同摩尔数的理想气体, 初态的温度相等, 末态的温度也相等, 故它们内能的改变相同. 根据热力学第一定律可知, A 、 B 中的气体放出的热量 Q_A 与 Q_B 之差应等于外界对它们做的功 W_A 与 W_B 之差, 即有

$$Q_A - Q_B = W_A - W_B \quad (1)$$

对气缸 B 中的气体, 当温度缓慢下降时, 活塞缓慢下移, 可以认为活塞时时处于平衡状态. 当活塞向下移动一段距离 x 时, B 中气体的压强

$$p_B = p_0 + \frac{mg}{S} - k \frac{x}{S} \quad (2)$$

在 B 中气体的体积由初始值 V_B 变到末态值 αV_B 的过程中, 活塞向下移动的距离

$$x = \frac{1 - \alpha}{S} V_B \quad (3)$$

大气压力 $p_0 S$ 和重力 mg 是恒力, 弹簧的拉力 kx 与活塞下移的距离成正比, 在此过程中外界对气体做的功

$$W_B = (p_0 S + mg)x - \frac{1}{2} kx^2 \quad (4)$$

由理想气体状态方程, 当 B 中气体处在初态时有

$$(p_0 + \frac{mg}{S})V_B = nRT_1 \quad (5)$$

由(3)、(4)、(5)式得

$$W_B = (1-\alpha)nRT_1 - \frac{1}{2}k \frac{(1-\alpha)^2}{S^2} \left(\frac{nRT_1}{p_0 + \frac{mg}{S}}\right)^2 \quad (6)$$

对于 A 中的气体, 当温度缓慢下降时, 气体的压强

$$p_A = p_0 + \frac{mg}{S} \quad (7)$$

p_A 是恒量, 气体经历的是等压过程. 若用 V_{A1} 、 V_{A2} 分别表示 A 中气体初态和末态的体积, 则

外界对 A 中气体做的功

$$W_A = p_A(V_{A1} - V_{A2}) \quad (8)$$

因

$$p_A V_{A1} = nRT_1 \quad (9)$$

若末态的温度为 T_2 , 则

$$p_A V_{A2} = nRT_2 \quad (10)$$

因为 A 、 B 中气体初态的压强相等, 温度亦相同, 气体的摩尔数又相等, 故有

$$V_{A1} = V_B \quad (11)$$

又已知 A 、 B 中气体末态的温度也相同, B 中气体末态的状态方程

$$(p_0 + \frac{mg}{S} - \frac{k}{S}x)\alpha V_B = nRT_2 \quad (12)$$

由(7)~(12)式得

$$W_A = (1-\alpha)nRT_1 + k \frac{(1-\alpha)}{S^2} \alpha \left(\frac{nRT_1}{p_0 + \frac{mg}{S}}\right)^2 \quad (13)$$

把(6)、(13)式代入(1)式得

$$Q_A - Q_B = \frac{k}{2}(1-\alpha^2) \left(\frac{nRT_1}{p_0 S + mg}\right)^2 \quad (14)$$

四、

在压缩阶段, 垫板 P 受到外力 F 的作用, 楔块 C 、 D 向右运动而压缩弹簧 A 和 B , 在某一时刻, 楔块 C 的受力情况如图1(a)所示. 图中 F_A 、 F_P 、 F_Q 和 F_N 分别表示 A 、 P 、 Q 、 N 对 C 的压力的大小, f_N 、 f_P 、 f_Q 分别表示 N 、 P 和 Q 作用在 C 上的滑动摩擦力的大小, 方向如图所示. 以 Δx_1 和 Δx_2 分别表示这一时刻弹簧 A 和 B 比未冲击时所增加的压缩量, 则有

$$F_A = k_1(x_{10} + \Delta x_1) \quad (1)$$

$$F_Q = \frac{1}{2}k_2(x_{20} + \Delta x_2) \quad (2)$$

$$F_P = \frac{1}{2}F \quad (3)$$

$$f_P = \mu F_P \quad (4)$$

$$f_Q = \mu F_Q \quad (5)$$

$$f_N = \mu F_N \quad (6)$$

$$\tan \alpha = \frac{\Delta x_1}{2\Delta x_2} \quad (7)$$

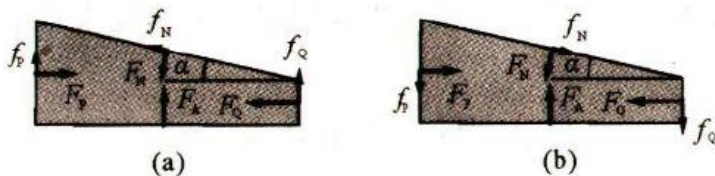


图 1

因为题中已假设 P 、 Q 、 C 、 D 、 A 、 B 的质量均可视为零, 而加速度又不可能为无限大, 故图中作用于楔块 C 的 7 个力的合力必为零. 沿水平和竖直方向分别有

$$F_P - F_Q - f_N \cos \alpha - F_N \sin \alpha = 0 \quad (8)$$

$$F_A - F_N \cos \alpha + f_P + f_Q + f_N \sin \alpha = 0 \quad (9)$$

由以上各式可得

$$F = \frac{2k_1 x_{10} (\tan \alpha + \mu) + k_2 x_{20} (1 + \mu^2)}{1 - \mu^2 - 2\mu \tan \alpha} + \frac{4k_1 \tan \alpha (\tan \alpha + \mu) + k_2 (1 + \mu^2)}{1 - \mu^2 - 2\mu \tan \alpha} \Delta x_2 \quad (10)$$

在恢复阶段, 楔块向左运动, 所受的摩擦力的方向与压缩阶段相反, 其受力情况如图1(b)

所示, 这时有

$$F_P - F_Q + f_{N\cos\alpha} - F_{N\sin\alpha} = 0 \quad (11)$$

$$F_A - F_{N\cos\alpha} - f_P - f_Q - f_{N\sin\alpha} = 0 \quad (12)$$

由(1)~(7)式和(11)、(12)式, 并将(3)式中的外力 F 改用 F' 表示, 可得

$$F' = \frac{2k_1x_{10}(\tan\alpha - \mu) + k_2x_{20}(1 + \mu^2)}{1 - \mu^2 + 2\mu\tan\alpha} + \frac{4k_1\tan\alpha(\tan\alpha - \mu) + k_2(1 + \mu^2)}{1 - \mu^2 + 2\mu\tan\alpha} \Delta x_2 \quad (13)$$

在 k_1 、 k_2 、 α 、 μ 和 x_{10} 、 x_{20} 已确定的情况下, (10)和(13)式中的第一项和第二项 Δx_2 的系数均为常量, 这表明 F 或 F' 与 Δx_2 成线性关系. 可以把 F (或 F') 看成是由一个恒力 F_0 (或 F_0') 和一个与 Δx_2 成正比的变力 $K\Delta x_2$ (或 $K'\Delta x_2$) 叠加而成的, 即

$$F = F_0 + K\Delta x_2 \quad (14)$$

$$F' = F_0' + K'\Delta x_2 \quad (15)$$

式中

$$F_0 = \frac{2k_1x_{10}(\tan\alpha + \mu) + k_2x_{20}(1 + \mu^2)}{1 - \mu^2 - 2\mu\tan\alpha} \quad (16)$$

$$F_0' = \frac{2k_1x_{10}(\tan\alpha - \mu) + k_2x_{20}(1 + \mu^2)}{1 - \mu^2 + 2\mu\tan\alpha} \quad (17)$$

$$K = \frac{4k_1\tan\alpha(\tan\alpha + \mu) + k_2(1 + \mu^2)}{1 - \mu^2 - 2\mu\tan\alpha} \Delta x_2 \quad (18)$$

$$K' = \frac{4k_1\tan\alpha(\tan\alpha - \mu) + k_2(1 + \mu^2)}{1 - \mu^2 + 2\mu\tan\alpha} \Delta x_2 \quad (19)$$

在 Δx_2 由零增加到 Δx_m 的过程中, 力 F 做的功为

$$W = F_0\Delta x_m + \frac{1}{2}K(\Delta x_m)^2 \quad (20)$$

在 Δx_2 由 Δx_m 减小到零的过程中, 力 F' 做的功为

$$W' = F_0'\Delta x_m + \frac{1}{2}K'(\Delta x_m)^2 \quad (21)$$

由(20)、(21)式及吸收率的定义可得

$$\eta = \frac{W - W'}{W} = 1 - \frac{W'}{W} = 1 - \frac{2F_0' + K'\Delta x_m}{2F_0 + K\Delta x_m} \quad (22)$$

注意到(16)~(19)式, 代入有关数据, 可算出

$$\eta = 0.74 = 74\% \quad (23)$$

五、

1. 激发态核的能量为

$$E = m_0c^2 + \Delta E \quad (1)$$

在发射光子的过程中系统动量守恒, 用 p 表示发射光子后核的动量, ν_0 表示光子的频率,

取光子运动方向为正方向, 有

$$0 = p + \frac{h\nu_0}{c} \quad (2)$$

基态核因反冲具有的动量为

$$p = -\frac{h\nu_0}{c} \quad (3)$$

因发射过程中的能量守恒, 有

$$m_0c^2 + \Delta E = mc^2 + h\nu_0 \quad (4)$$

式中 m 表示基态核的动质量. 若用 v 表示基态核因反冲具有的速度, 则基态核的动量和动质量可表示成

$$p = mv \quad (5)$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (6)$$

由 (3) ~ (6) 各式可得

$$h\nu_0 = \frac{\Delta E(2m_0c^2 + \Delta E)}{2(m_0c^2 + \Delta E)} \quad (7)$$

因
$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} \quad (8)$$

故得
$$\lambda_0 = \frac{2hc(m_0c^2 + \Delta E)}{\Delta E(2m_0c^2 + \Delta E)} \quad (9)$$

2. 考虑激发态核向着仪器运动的情况. 对于以最大速度 u 向仪器运动的激发态核, 若用 p_1 表示光子后核的动量, 用 ν_1 表示光子的频率, 则由动量守恒有

$$\frac{\left(m_0 + \frac{\Delta E}{c^2}\right)u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = p_1 + \frac{hv_1}{c} \quad (10)$$

由能量守恒

$$\frac{\left(m_0 + \frac{\Delta E}{c^2}\right)c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = m_1c^2 + hv_1 \quad (11)$$

其中 m_1 表示基态核的动质量. 若用 v_1 表示基态核的速度, 则有

$$p_1 = m_1v_1 \quad (12)$$

$$m_1 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \quad (13)$$

由 (9) ~ (13) 式可得

$$hv_1 = hv_0 \sqrt{\frac{c+u}{c-u}} \quad (14)$$

注意到 (8) 式, 有

$$\lambda_1 = \lambda_0 \sqrt{\frac{c-u}{c+u}} \quad (15)$$

由 (15) 式可看出, 向着仪器运动且速度小于 u 的激发态核, 它们发出的光子的波长比 λ_1 大,

速度大小分布在零与 u 之间的激发态核发出的光子的波长分布在 λ_0 与 λ_1 之间.

再考虑激发态背离仪器运动的情况. 对于以最大速度 u 背离仪器运动的激发态核, 用类似于上面的讨论有

$$-\frac{\left(m_0 + \frac{\Delta E}{c^2}\right)u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = p_2 + \frac{hv_2}{c} \quad (16)$$

$$\frac{\left(m_0 + \frac{\Delta E}{c^2}\right)c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = m_2c^2 + hv_2 \quad (17)$$

式中 p_2 为发射光子后基态核的动量, v_2 为光子的频率, m_2 为基态核的动质量. 若基态核的速

度为 v_2 , 则有

$$p_2 = m_2 v_2 \quad (18)$$

$$m_2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} \quad (19)$$

由 (16) ~ (19) 各式解得

$$h\nu_2 = h\nu_0 \sqrt{\frac{c-u}{c+u}} \quad (20)$$

注意到 (8) 式, 得

$$\lambda_2 = \lambda_0 \sqrt{\frac{c+u}{c-u}} \quad (21)$$

由 (21) 式可以看出, 背离仪器运动且速度小于 u 的激发态核, 它们发出的光子的波长都比 λ_2 小. 速度大小分布在 u 与零之间的激发态核发出的光子的波长分布在 λ_2 与 λ_0 之间. 由此可知

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_0 \left(\sqrt{\frac{c+u}{c-u}} - \sqrt{\frac{c-u}{c+u}} \right) \quad (22)$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{2u}{\sqrt{c^2 - u^2}} \quad (23)$$

六、

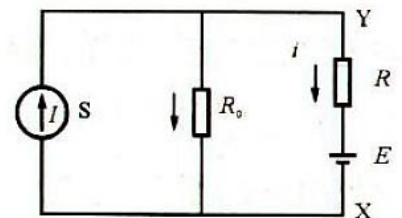
1. 接通电路后, 恒流源提供恒定的电流 I 的一部分流经 R_0 。另一部分流经圆盘. 环形电刷、柱形金属轴决定了盘中的电流沿着盘的半径. 盘中因有沿着半径的电流而受磁场力矩作用, 磁力矩使盘克服负载所加的机械力矩而做加速转动. 当圆盘在磁场中转动时, 由于电磁感应, 盘中出现感应电动势 (反电动势), 其等效电路如图所示. 图中 R 为圆盘的, E 为感应电动势, i 为通过圆盘的总电流. 圆盘所在支路的电路方程为

$$(I - i)R_0 - E = iR$$

或

$$IR_0 - E = i(R_0 + R) \quad (1)$$

随着圆盘角速度的增大, 感应电动势 E 亦增大, 由 (1) 式可知通过圆盘的电流 i 将变小. 当



电流小到某一值时,磁场的磁力矩与负载的机械力矩平衡,转动达到稳定,盘做匀角速转动.此时的角速度就是有负载时达到稳定状态的角速度 ω .如果没有机械负载,即处在空载状态,由于负载力矩为零,故达到稳定时磁力矩亦必须等于零.在没有负载力矩作用的条件下,圆盘转动的角速度可达到很大,因而感应电动势亦很大,致使圆盘中的电流为零,磁力矩亦为零.这时,圆盘的角速度便是空载达到稳定时的角速度 ω_0 .

(i) 环形圆盘中感应电动势的计算

圆盘在磁场中转动时,它的每根半径都做切割磁感线的运动.把圆盘看作是由无数根径向辐条组成的,当盘的角速度为 ω 时,圆盘某根“辐条”在 Δt 时间内转过的角度为 $\Delta\theta$ ，“辐条”扫过的面积为

$$\Delta S = \frac{1}{2}(a_2^2 - a_1^2)\Delta\theta$$

磁通量为

$$\Delta\Phi = B\Delta S$$

由电磁感应定律可知,“辐条”中的感应电动势的大小为

$$E = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{1}{2}B(a_2^2 - a_1^2)\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{1}{2}B(a_2^2 - a_1^2)\omega$$

每根辐条相当于一电源,这些电源是并联的,它们的电动势又相等,故圆盘中的电动势的大小仍为

$$E = \frac{1}{2}\omega B(a_2^2 - a_1^2) \quad (2)$$

(ii) 环形圆盘电阻的计算

因环形圆盘中的电流沿着盘的半径,故可将圆盘分成很多不同半径 $r_0(=a_1), r_1, r_2, \dots, r_j, \dots, r_n(=a_2)$ 的窄圆环,第 j 个圆环的宽度为 $\Delta r_j = r_j - r_{j-1}$,其电阻为

$$\Delta R_j = \rho \frac{\Delta r_j}{S} = (\rho_0 r_j) \frac{\Delta r_j}{2\pi r_j h} = \rho_0 \frac{\Delta r_j}{2\pi h}$$

整个圆盘的电阻 R 是由各窄圆环电阻串联而成,即

$$R = \sum_j \Delta R_j = \frac{\rho_0}{2\pi h} \sum_j \Delta r_j = \frac{\rho_0}{2\pi h} (a_2 - a_1) \quad (3)$$

(iii) 空载达到稳定时的角速度

当电动机空载达到稳定时,流过圆盘的电流 $i=0$,这时圆盘的转动角速度为 ω_0 ,由(2)

式可知盘中的感应电动势

$$E_0 = \frac{1}{2} \omega_0 B (a_2^2 - a_1^2) \quad (4)$$

而恒流源的电流 I 全部流经电阻 R_0 , 由 (1) 式得

$$IR_0 = E_0 \quad (5)$$

由 (4)、(5) 式得电动机在空载达到稳定时的角速度

$$\omega_0 = \frac{2IR_0}{B(a_2^2 - a_1^2)} \quad (6)$$

(iv) 输出最大的机械功率的计算

当有机机械负载时, 若圆盘的角速度为 ω , 此时流过圆盘的电流为 i , 则由 (1) 式和 (2) 式可得

$$i = \frac{IR_0}{R + R_0} - \frac{1}{2} \frac{B\omega(a_2^2 - a_1^2)}{R + R_0} \quad (7)$$

第 j 个小圆环所受磁力的功率为

$$\Delta P_j = iB\Delta r_j \cdot v_j = iB\Delta r_j \cdot r_j \omega \quad (8)$$

整个圆环受磁力的功率为

$$P = \sum \Delta P_j = \left(\sum iB\Delta r_j \cdot r_j \right) \omega = \frac{1}{2} iB(a_2^2 - a_1^2) \omega \quad (9)$$

当电动机的转动达到稳定时, 电动机输出的机械功率也就是磁力的功率, 将 (7) 式代入 (9) 式, 得

$$P = K_1 \omega - K_2 \omega^2 \quad (10)$$

其中

$$K_1 = \frac{IR_0 B(a_2^2 - a_1^2)}{2(R + R_0)} \quad K_2 = \frac{B^2(a_2^2 - a_1^2)^2}{4(R + R_0)} \quad (11)$$

(10) 式可改写成

$$P = \frac{K_1^2}{4K_2} - K_2 \left(\omega - \frac{K_1}{2K_2} \right)^2 \quad (12)$$

当

$$\omega = \frac{K_1}{2K_2} \quad (13)$$

时, 输出的机械功率 P 最大. 由 (11) 式和 (6) 式得

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1}{2} \quad (14)$$

2. 当电动机输出的机械功率最大时, 圆盘转动的角速度为 $\omega = \frac{\omega_0}{2}$, 设这时流经环形圆盘的电流为 i' , 由 (1) 式、(2) 式和 (6) 式得

$$i' = \frac{R_0 I}{2(R + R_0)} \quad (15)$$

圆盘的电阻消耗的热功率

$$P_R = i'^2 R = \frac{1}{4} \frac{R_0^2 R I^2}{(R + R_0)^2} \quad (16)$$

将 (3) 式代入 (16) 式得

$$P_R = \frac{\pi h \rho_0 (a_2 - a_1) R_0^2 I^2}{2[\rho_0 (a_2 - a_1) + 2\pi h R_0]^2} \quad (17)$$

七、

1. 带电粒子仅受静电力作用, 在运动过程中能量守恒, 粒子的动能与静电势能之和是一个恒量. 粒子的静电势能取决于粒子所在处的电势, 为此应先研究带电圆环产生的静电场的电势. 由于电场分布是轴对称的, 初速度沿 z 轴方向的粒子永远在 z 轴上运动, 故只要研究 z 轴上的电势即可. 两个带电圆环单独产生的电场在 z 轴上电势分别为

$$V_1(z) = k \frac{Q}{\sqrt{R^2 + (z - D)^2}}$$

$$V_2(z) = k \frac{Q}{\sqrt{R^2 + (z + D)^2}}$$

$V_1(z)$ 、 $V_2(z)$ 的图线如图 1 所示. $V_1(z)$ 在 $z = D$ 处有极大值, $V_2(z)$ 在 $z = -D$ 处有极大值. 两个圆环产生的电场在坐标为 z 处的电势

$$V(z) = V_1(z) + V_2(z) = kQ \left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + (z - D)^2}} + \frac{1}{\sqrt{R^2 + (z + D)^2}} \right] \quad (1)$$

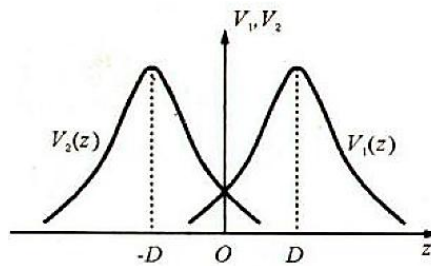


图 1

电势 $V(z)$ 随 z 的变化的图线由 $V_1(z)$ 的图线与 $V_2(z)$ 的图线叠加而成. 若 D 较大, 即两个圆环间的距离较大, $V(z)$ 的图线如图 2 中的曲线 I 所示: 它有两个极大值和一个极小值, 即两个峰和一个谷, 峰对称地分布在坐标原点两侧处, 谷底在 $z=0$ 处. 随着两个圆环间的距离变小, 即 D 变小, 两个峰相互靠近, 谷底上升. 当 D 小到某一值时, 两峰消失, 谷底上升为峰. 当 D 继续变小时, 曲线仍只有一个峰, 位于 $z=0$ 处, 如图 2 中的曲线 II 所示.

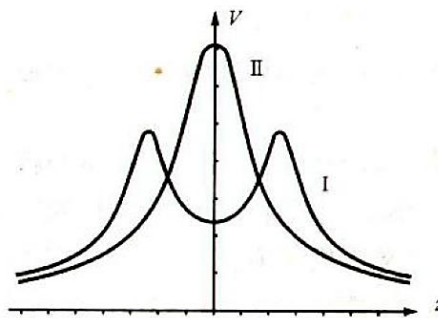


图 2

$z=0$ 处时峰还是谷, 只需分析 $V(z)$ 在 $z=0$ 附近的行为即可确定. 由 (1) 式, $z=0$

处的电势

$$V(0) = kQ \left[\frac{2}{\sqrt{R^2 + D^2}} \right] \quad (2)$$

注意到当 z 很小时有

$$\begin{aligned} \left[R^2 + (z \pm D)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\sqrt{R^2 + D^2}} \left(1 \pm \frac{2Dz \pm z^2}{R^2 + D^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{R^2 + D^2}} \left[1 \mp \frac{1}{2} \left(\frac{2Dz \pm z^2}{R^2 + D^2} \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{2Dz \pm z^2}{R^2 + D^2} \right)^2 + \dots \right] \end{aligned}$$

略去高次项并代入 (1) 式, 注意到 (2) 式, 有

$$V(z) = \frac{kQ}{\sqrt{R^2 + D^2}} \left[2 - \frac{z^2}{R^2 + D^2} + 3 \frac{D^2 z^2}{(R^2 + D^2)^2} \right] = V(0) - \frac{kQ(R^2 - 2D^2)}{(R^2 + D^2)^{5/2}} z^2 \quad (3 \text{ 分})$$

由此可得, 若

$$D > \frac{R}{\sqrt{2}} \quad (4)$$

则 $V(0)$ 为极小值, $V(z)$ 为双峰曲线, 如图 2 中曲线 I 的形状.

若

$$D < \frac{R}{\sqrt{2}} \quad (5)$$

则 $V(0)$ 为极大值, $V(z)$ 为单峰曲线, 如图 2 中曲线 II 的形状.

确定电势图线形状所对应条件的另一种分析方法:

若电势 $V(z)$ 的图线具有图 2 中曲线 I 的形状, 则在 $z=0$ 处是曲线的谷底, 电势为极小值, 该处是带电粒子的稳定平衡位置. 该处附近的场强的特点是: 当 $z > 0$ 时, 场强应指向原点, 即场强沿 z 轴的负方向; 当 $z < 0$ 时, 场强亦应指向原点, 即场强沿 z 轴的正方向. 若电势 $V(z)$ 的图线具有图 2 中曲线 II 的形状, 则在 $z=0$ 处是曲线的峰, 电势为极大值, 该处是带电粒子的不稳定平衡位置. 该处附近的场强的特点是: 当 $z > 0$ 时, 场强应指向 z 轴的正方向; 当 $z < 0$ 时, 场强应指向 z 轴的负方向. 原点附近的场强具有哪一种特点的条件, 也就是电势图线具有哪一种形状所对应的条件. 为此先应研究两个圆环产生的电场的场强在 z 轴上的分布情况.

z 轴上任一点坐标为 z 处的场强由圆环 1 产生的场强 E_1 与圆环 2 产生的场强 E_2 叠加而成. 圆环 1 的中心位于 $z = D$ 处, 在 $z < D$ 的范围内取坐标为 z 的考察点, 环 1 在考察点的场强是由环上所有电荷产生的场叠加而成的, 根据对称性, 可知该处的场强必沿 z 轴. 环上任一小段上的电荷 Q_i 产生的场强沿 z 轴的分量为

$$\Delta E_{zi}(z) = k \frac{\Delta Q_i}{r^2} \cos \theta \quad (1')$$

式中

$$r^2 = R^2 + (D - z)^2$$

r 是考察的点到细环上任一点的距离, θ 是 r 与 z 轴的夹角

$$\cos \theta = \frac{z-D}{r}$$

整个圆环 1 产生的场强

$$E_1(z) = k \frac{Q}{r^2} \cos \theta = kQ \frac{z-d}{\left[R^2 + (D-z)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (2')$$

同理得圆环 2 在 z 处的场强

$$E_2(z) = kQ \frac{D+z}{\left[R^2 + (D+z)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (3')$$

z 处的总场强

$$E(z) = kQ \frac{z-D}{\left[R^2 + (D-z)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + kQ \frac{D+z}{\left[R^2 + (D+z)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (4')$$

由于考察点都在原点附近, 上式中的坐标 z 是一个小量, 注意到当 z 很小时有

$$\begin{aligned} \left[R^2 + (D \pm z)^2 \right]^{\frac{3}{2}} &= \left[R^2 + D^2 \pm 2Dz + z^2 \right]^{\frac{3}{2}} \approx \\ &= \frac{1}{(R^2 + D^2)^{\frac{3}{2}}} \left(1 \pm \frac{2Dz}{R^2 + D^2} \right)^{\frac{3}{2}} \approx \\ &= \frac{1}{(R^2 + D^2)^{\frac{3}{2}}} \left(1 \mp \frac{3Dz}{R^2 + D^2} \right) \end{aligned}$$

代入 (4') 式得

$$E(z) = kQ \frac{2R^2 - 4D^2}{(R^2 + D^2)^{\frac{5}{2}}} z \quad (5')$$

若 $D > \frac{1}{\sqrt{2}} R$, E 与 $-z$ 成正比, 当 $z > 0$ 时, 场强为负, 当 $z < 0$ 时, 场强为正, 表示原点附近

的场强方向都指向原点, 故 $z=0$ 处为带电粒子的稳定平衡位置, 电势 $V(z)$ 的图线是曲线

I. 若 $D < \frac{1}{\sqrt{2}} R$, 在原点附近的场强方向都从原点指向两侧, 故 $z=0$ 处为带电粒子的不稳定

平衡位置, 电势 $V(z)$ 的图线是曲线 II.

若带电粒子在 $z = -\infty$ 处以某一初速度沿 z 轴射向两个圆环, 以 E_{k0} 表示其初动能, $E_k(z)$

表示粒子运动到坐标为 z 处时的动能, 则由能量守恒有

$$E_k(z) = E_{k0} - W(z) = E_{k0} - qV(z) \quad (7)$$

因粒子在坐标 z 处的动能等于一常量减去粒子在该处的静电势能, 可见 $E_k(z)$ 的图线取决于静电势能 $W(z) = qV(z)$ 的图线. 下面分两种情况来进行讨论:

(i) 若 $D > \frac{1}{\sqrt{2}}R$, 即两个圆环之间的距离比较大, 电势 $V(z)$ 的图线具有两个峰和一个谷, 粒子电势能 $W(z)$ 的图线亦具有两个峰和一个谷, 如图 3 中的曲线 I_1 所示. 已知该粒子刚好能通过两个圆环, 故粒子的初动能 E_{k0} 应等于电势能 $W(z)$ 的最大值, 即等于峰高. 在图 3 中与 z 轴平行并与电势能 $W(z)$ 的图线的双峰相切的直线代表初动能 E_{k0} , 由 (7) 式和曲线 I_1 便可画出 $E_k(z)$ 的图线, 如图 3 中的曲线 I_2 所示.

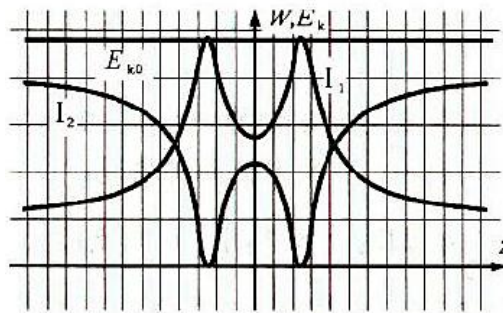


图 3

(ii) 若 $D < \frac{1}{\sqrt{2}}R$, 即两个圆环间的距离比较小, 电势 $V(z)$ 的图线只有位于 $z=0$ 处的一个峰, 粒子的电势能 $W(z)$ 的图线亦只有位于 $z=0$ 处的一个峰. 如图 4 中的曲线 II_1 所示.

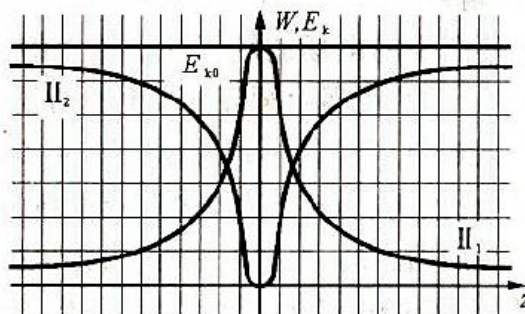


图 4

电势图线的峰高

$$V_{\max} = V(0) = k \frac{2Q}{\sqrt{R^2 + D^2}}$$

已知粒子刚能通过两个圆环, 故粒子的初动能

$$E_{k0} = qV(0) = k \frac{2qQ}{\sqrt{R^2 + D^2}}$$

在图 4 中与 z 轴平行且与曲线 Π_1 的峰相切的直线代表初动能 E_{k0} , 由 (7) 式和曲线 Π_1 便可画出 $E_k(z)$ 的图线, 如图 4 中的曲线 Π_2 所示.

2. 粒子位于原点并获得沿 z 轴的小速度后的运动情况亦与电势图线的形状密切相关. 下面也分两种情况讨论:

(i) 若 $D > \frac{1}{\sqrt{2}}R$, 即两个环之间的距离比较大, 电势 $V(z)$ 的图线具有两个峰, 粒子电势能 $W(z)$ 的图线亦具有两个峰, 即图 3 中的曲线 I_1 , $z=0$ 处是谷底, 电势能具有极小值. 当粒子获得沿 z 轴的速度后, 若其初动能大于两侧电势能的峰高的大小, 则粒子将越过势能峰, 运动到无限远处. 若其初动能小于两侧电势能的峰值, 粒子只能在二峰之间往返运动. 若其初动能远小于势能的峰值, 则粒子以 $z=0$ 为平衡位置做简谐振动. 为此研究两个带电圆环产生的电场的场强在 z 轴上的分布情况. z 轴上任一点坐标为 z 处的场强由圆环 1 产生的场强 E_1 与圆环 2 产生的场强 E_2 叠加而成. 圆环 1 的中心位于 $z=D$ 处, 在 $z < D$ 的范围内取坐标为 z 的考察点, 环 1 在考察点的场强是由环上所有电荷产生的场叠加而成的, 根据对称性, 可知该处的场强必沿 z 轴. 环上任一小段上的电荷 Q_i 产生的场强沿 z 轴的分量为

$$\Delta E_{1i}(z) = k \frac{\Delta Q_i}{r^2} \cos \theta$$

式中 r 是考察点到圆环上任一点的距离, θ 是 r 与 z 轴的夹角

$$r^2 = R^2 + (D - z)^2$$

$$\cos \theta = \frac{z - D}{r}$$

整个圆环 1 产生的场强

$$E_1(z) = k \frac{Q}{r^2} \cos \theta = kQ \frac{z - D}{[R^2 + (z - D)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

同理得圆环 2 在 z 处的场强

$$E_2(z) = kQ \frac{z+D}{\left[R^2 + (z+D)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

z 处的总场强

$$E(z) = kQ \frac{z-D}{\left[R^2 + (z-D)^2\right]^{\frac{3}{2}}} + kQ \frac{z+D}{\left[R^2 + (z+D)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (8)$$

由于考察点都在原点附近, 上式中的坐标 z 是一个小量, 注意到

$$\begin{aligned} \left[R^2 + (z \pm D)^2\right]^{\frac{3}{2}} &= \left[R^2 + D^2 \pm 2Dz + z^2\right]^{\frac{3}{2}} \approx \\ &\frac{1}{(R^2 + D^2)^{\frac{3}{2}}} \left(1 \pm \frac{2Dz}{R^2 + D^2}\right)^{\frac{3}{2}} \approx \\ &\frac{1}{(R^2 + D^2)^{\frac{3}{2}}} \left(1 \mp \frac{3Dz}{R^2 + D^2}\right) \end{aligned}$$

代入 (8) 式得

$$E(z) = kQ \frac{2R^2 - 4D^2}{(R^2 + D^2)^{\frac{5}{2}}} z$$

因 $D > \frac{1}{\sqrt{2}}R$, $2R^2 - 4D^2$ 是负的, 故上式可改写成

$$E(z) = -kQ \frac{4D^2 - 2R^2}{(R^2 + D^2)^{\frac{5}{2}}} z$$

位于原点附近的粒子受到的电场力

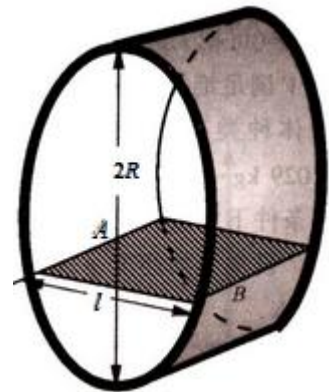
$$F(z) = qE(z) = -kqQ \frac{4D^2 - 2R^2}{(R^2 + D^2)^{\frac{5}{2}}} z$$

第 23 届全国中学生物理竞赛决赛试题

理论部分

一、建造一条能通向太空的天梯，是人们长期的梦想。当今在美国宇航局（NASA）支持下，洛斯阿拉莫斯国家实验室的科学家已在进行这方面的研究。一种简单的设计是把天梯看作一条长度达千万层楼高的质量均匀的缆绳，它由一种高强度、很轻的纳米碳管制成，由传统的太空飞船运到太空上，然后慢慢垂到地球表面。最后达到这样的状态和位置：天梯本身呈直线状；其上端指向天空，下端刚与地面接触但与地面之间无相互作用；整个天梯相对于地球静止不动。如果只考虑地球对天梯的万有引力，试求此天梯的长度。已知地球半径 $R_0 = 6370km$ ，地球表面处的重力加速度 $g = 9.80m/s^2$ 。

二、如图所示，一内半径为 R 的圆筒（图中 $2R$ 为其内直径）位于水平地面上。筒内放一矩形物。矩形物中的 A 、 B 是两根长度相等、质量皆为 m 的细圆棍，它们平行地固连在一质量可以不计的、长为 $l = \sqrt{3}R$ 的矩形薄片的两端。初始时矩形物位于水平位置且处于静止状态， A 、 B 皆与圆筒内表面接触。已知 A 、 B 与圆筒内表面间的静摩擦因数都等于 1。



现令圆筒绕其中心轴线非常缓慢地转动，使 A 逐渐升高。

1. 矩形物转过多大角度后，它开始与圆筒之间不再能保持相对静止？

答：_____（只要求写出数值，不要求写出推导过程和）

2. 如果矩形物与圆筒之间刚不能保持相对静止时，立即令圆筒停止转动，令 θ 表示 A 的中点和 B 的中点的连线与竖直线之间的夹角，求此后 θ 等于多少度时， B 相对于圆筒开始滑动。（要求在卷面上写出必要的推导过程。最后用计算器对方程式进行数值求解，最终结果要求写出三位数字。）

三、由于地球的自转及不同高度处的大气对太阳辐射吸收的差异,静止的大气中不同高度处气体的温度、密度都是不同的。对于干燥的静止空气,在离地面的高度小于 20km 的大气层内,大气温度 T_e 随高度的增大而降低,已知其变化率

$$\frac{\Delta \Delta T_e}{\Delta \Delta z} = -6.0 \times 10^{-3} K \cdot m^{-1}$$

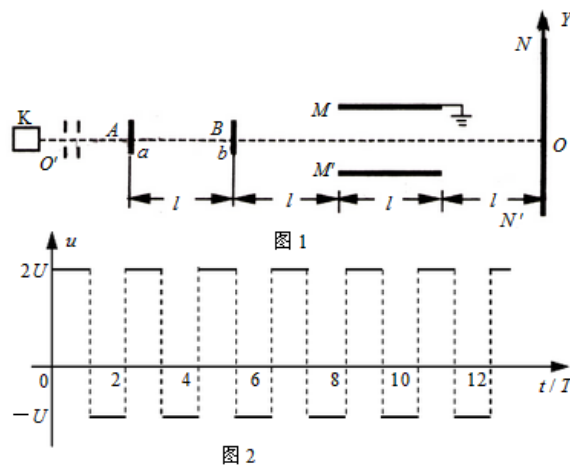
z 为竖直向上的坐标。

现考查大气层中的一质量一定的微小空气团(在确定它在空间的位置时可当作质点处理),取其初始位置为坐标原点($z = 0$),这时气团的温度 T 、密度 ρ 、压强 p 分别与周围大气的温度 T_e 、密度 ρ_e 、压强 p_e 相等。由于某种原因,该微气团发生向上小位移。因为大气的压强随高度的增加而减小,微气团在向上移动的过程中,其体积要膨胀,温度要变化(温度随高度变化可视为线性的)。由于过程进行得不是非常快,微气团内气体的压强已来得及随时调整到与周围大气的压强相等,但尚来不及与周围大气发生热交换,因而可以把过程视为绝热过程,现假定大气为理想气体,理想气体在绝热过程中,其压强 p 与体积 V 满足绝热过程方程 $pV^\gamma = C$, 式中 C 和 γ 都是常量,但 γ 与气体种类有关,对空气 $\gamma = 1.40$ 。已知空气的摩尔质量 $\mu = 0.029 \text{kg/mol}$, 普适气体恒量 $R = 8.31 \text{J/K} \cdot \text{mol}$ 。试在上述条件下定量讨论微气团以后的运动。

设重力加速度 $g = 9.8 \text{m/s}^2$, $z = 0$ 处大气的温度 $T_{e0} = 300 \text{K}$ 。

四、如图 2 所示中 K 为带电粒子发射源，从中可持续不断地射出质量、电荷都相同的带正电的粒子流，它们的速度方向都沿图中虚线 OO' ，速度的大小具有一切可能值但都是有限的。当粒子打在垂直于 OO' 的屏 $N'N$ 上时，会在屏上留下永久性的痕迹。屏内有一与虚线垂直的坐标轴 Y ，其原点位于屏与虚线的交点 O 处， Y 的下方向由 O 指向 N ，虚线上的 A 、 B 两处，各有一电子阀门 a 和 b 。阀门可以根据指令开启或关闭。开始时两阀门都处于关闭状态，挡住粒子流。 M 、 M' 是两块较大的平行金属平板，到虚线 OO' 的距离都是 d ，板 M 接地。在两板间加上如图 3 所示的周期为 $2T$ 的交变电压 u ， u 的正向最大值为 $2U$ ，负向最大值为 U 。已知当粒子在电场作用下的加速度 a 、电压 u 的半周期 T 和平板到虚线的距离 d 满足以下关系：

$$aT^2 = \frac{d}{5},$$



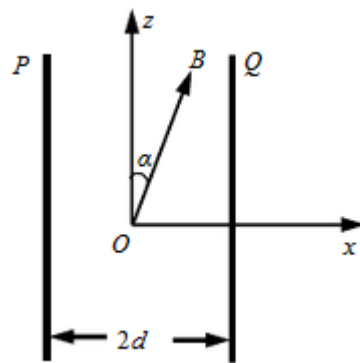
已知 AB 间的距离、 B 到金属板左端的距离、金属板的长度以及金属板右端到屏的距离都是 l 。不计重力的作用。不计带电粒子间的相互作用。打在阀门上的粒子被阀门吸收，不会影响以后带电粒子的运动。只考虑 M 、 M' 之间的电场并把它视为匀强电场。

1. 假定阀门从开启到关闭经历的时间 δ 比 T 小得多，可忽略不计。现在某时刻突然开启阀门 a 又立即关闭；经过时间 T ，两次开启阀门 a 又立即关闭；再经过时间 T ，第 3 次开启阀门 a 同时开启阀门 b ，立即同时关闭 a 、 b 。若以开启阀门 b 的时刻作为图 3 中 $t = 0$ 的时刻，则屏上可能出现的粒子痕迹的 Y 坐标（只要写出结果，不必写出计算过程）为

2. 假定阀门从开启到关闭经历的时间 $\delta = T/10$ ，现在某时刻突然开启开阀门 a ，经过时

间5 立即关闭 a ；从刚开启 a 的时刻起，经过时间 T ，突然开启阀门 b ，经过时间5 关闭 b 。若以开启刚阀门 b 的时刻作为图 3 中 $t=0$ 的时刻，则从 B 处射出的具有最大速率的粒子射到屏上所产生的痕迹的 Y 坐标（只要写出结果，不必写出计算过程）为

五、如图所示，坐标系 $Oxyz$ 的 x 轴和 z 轴都位于纸面内， y 轴垂直纸面向里。两无限大金属极板 P 和 Q 分别位于 $x = -d$ 和 $x = d$ 处。磁感应强度大小为 B 的匀强磁场的方向平行于 Oxz 坐标平面，与 z 轴的夹角为 α 。在坐标原点 O 处，有一电荷 $q (> 0)$ 、质量为 m 的带电粒子，以沿 y 轴正方向的初速度 v_0 开始运动。不计重力作用。



1. 若极板间未加电场，欲使该粒子在空间上恰好能到达极板（但与极板不接触），则初速度 v_0 应为多大？所需最短时间 t_0 是多少？
2. 若在两极板间沿 x 轴正方向加上一场强为 E 的匀强电场，使该粒子能在第 1 问中所求得的时间 t_0 到达极板，则该粒子的初速度 v_0 应为多大？若 $\alpha = \pi/4$ ，求粒子到达极板时粒子的坐标。

六、在高能物理中，实验证明，在实验室参考系中，一个运动的质子与一个静止的质子相碰时，碰后可能再产生一个质子和一个反质子，即总共存在三个质子和一个反质子。试求发生这一情况时，碰前那个运动质子的能量（对实验室参考系）的最小值（即阈值）是多少。

已知质子和反质子的静止质量都是 $m_0 = 1.67 \times 10^{-27} \text{kg}$ 。不考虑粒子间的静电作用。

第 23 届全国中学生物理竞赛决赛试题

参考解答

一、解法一（微积分解法）：为简化计算，我们把天梯简化为一条具有均匀的横截面积和质量分布，两端均无约束的长线，设其线密度为 λ ，取 Δl 一小段， $\omega = \omega_0$ ， ω_0 为地球自转角速度， x 为 Δl 小段与地球距离。由万有引力定律易证明地球对 Δl 引力可等效为地球质量全部在质心处计算。

$$F_{\text{引}} = \frac{GM(\Delta l \cdot \lambda)}{x^2}, \quad F_{\text{离}} = \lambda \Delta l \omega^2 x$$

对 $F_{\text{引}}$ 与 $F_{\text{离}}$ 分别积分

$$\int_R^l \frac{GMdx}{x^2} = \int_R^l \lambda \omega^2 x dx, \quad GM\lambda \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{l} \right) = \omega^2 \lambda \frac{l^2 - R^2}{2}$$

$$GM\lambda \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+l} \right) = \omega^2 \lambda \frac{\omega R + l^2}{2}$$

化简得： $L = \frac{R}{2} \left(-3 + \sqrt{1 + \frac{8GM}{R^3 \omega^2}} \right)$ ，代入地球半径 $R = 6371\text{km}$ ，地球质量 $M = 5.96 \times 10^{24}\text{kg}$ ，

万有引力常量 $G = 6.7 \times 10^{-11}\text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$ ，解得 $L \approx 144000\text{km}$ 。此数值数倍于同步卫星的轨道半径 42000km 。

解法二（初等解法）：题设如解法一，我们想象线绳被拽下来一点点，由于初始时绳子（在以地球自转角速度旋转的转动参考系中）处于平衡状态，只有很小的力就可以使其移开原来的平衡位置，因此在一阶近似下这个过程做功必然等于零。从做功角度看，整个线绳的位移等价于线绳的质量为 Δm 的一小部分缓慢地从顶端移到底端。这个过程的功包含两项：引力势能的改变和平均离心力所做的功（离心力是线性变化的）。如果线绳的长度为 L ，并且其底端刚刚接触地面，则外力的功为：

$$GM\lambda \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+l} \right) - \omega^2 \lambda \frac{\omega R + l^2}{2} = 0$$

此式即解法一中积分的结果，同理可得： $L \approx 144000\text{km}$

二、 1.90° $2.54.9^\circ$

三、设地面的空气压强为 p_0 ，密度为 ρ_0 ，温度为 T_0 ，空气的摩尔质量为 μ

设 $k = -\frac{dT}{dz} = 0.006\text{K} / \text{m}$ ，则高 h 处的温度为 $T = T_0 - kh$

$$\frac{dp}{dh} = -\rho g, \quad \text{又因为 } \rho = \frac{m}{V} = \frac{\mu p}{RT}, \quad \text{故 } \frac{dp}{dh} = -\frac{\mu p g}{RT} = -\frac{\mu p g}{R(T_0 - kh)}$$

解此方程，得： $p = p_0 \left(\frac{T_0 - kh}{T_0} \right)^{\frac{\mu g}{kR}}$ ， $\rho = \frac{\mu \mu p}{RT} = \frac{\mu \mu p_0}{RT_0} \left(\frac{T_0 - kh}{T_0} \right)^{\frac{\mu g}{kR} - 1} = \rho_0 \left(\frac{T_0 - kh}{T_0} \right)^{\frac{\mu g}{kR} - 1}$

气团在上升过程中是绝热过程, 故 $pV^{\gamma} = p_0V_0^{\gamma}$

将上面的结果代入, 得: $V = V_0 \left(\frac{T_0 - kh}{T_0} \right)^{\frac{\mu g}{kR\gamma}}$

$$F_{\text{浮}} = \rho g V = \rho_0 g V_0 \left(\frac{T_0 - kh}{T_0} \right)^{\frac{\mu g}{kR} - 1 - \frac{\mu g}{kR\gamma}} = G \left(\frac{T_0 - kh}{T_0} \right)^{\frac{\mu g}{kR} - 1 - \frac{\mu g}{kR\gamma}} \quad (G \text{ 为气团重力})$$

将 $\mu = 0.029 \text{ kg}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $k = 0.006 \text{ K/m}$, $R = 8.31 \text{ J/K}$, $\gamma = 1.4$ 代入上式, 求得指数数值为

$$\frac{\mu g}{kR} - 1 - \frac{\mu g}{kR\gamma} = 0.62857$$

由于指数大于 0, 故当 $h > 0$ 时, $F_{\text{浮}} < G$, 即合外力与 h 方向相反, 这说明气团的运动是一种往复运动。由于 $h \ll 20 \text{ km}$, 故在 $h = 0$ 处将展开 $F_{\text{浮}}$ 为泰勒级数:

$$F_{\text{浮}} = G \left(1 - 0.62857 \frac{k}{T_0} h + 0.62857 \times (0.62857 - 1) \frac{k^2}{T_0^2} h^2 + \dots \right)$$

由于 $h \ll 20 \text{ km}$, 故略去 h^2 及以上的高次项, 得: $F_{\text{浮}} = G \left(1 - 0.62857 \frac{k}{T_0} h \right)$

$$F_{\text{合}} = F_{\text{浮}} - G = -0.62857 \frac{k}{T_0} h G$$

由于该力大小正比于 h , 且方向与 h 相反, 故气团的运动为简谐运动。

其角频率
$$\omega = \sqrt{\frac{F_{\text{合}}/h}{m}} = \sqrt{0.62875 \frac{k}{T_0} \times 9.8} = 0.0111 \text{ (Hz)}$$

四、1. 当阀门 a 第 1 次开启时, 具有各种速率的粒子 (称之为第一批粒子) 从 A 处进入 AB 之间, 在 a 第 2 次开启时刻, 第一批粒子中速率为 $v_1 = l/T$ 的粒子正好射到 B 处, 被阀门 b 挡住。与此同时, 第二批具有各种速率的粒子从 A 处进入 AB 之间。在阀门 a 第 3 次开启的时刻, 第 1 批进入 AB 之间的粒子中速率为 $v_2 = l/2T = v_1/2$ 的粒子与第 2 批进入 AB 间的粒子中速率为 v_1 的粒子同时到达 B 处。因此时阀门 b 已开启, 这些粒子都从 B 处沿虚线射向两平行板, 而第 3 批进入 AB 间的粒子在它们到达 B 处时, 被 b 挡住。由此可知, 能从 B 处射向两平行板的粒子具有 v_1 和 v_2 两种不同的速率。

根据题意, 粒子从 B 处射出的时刻为 $t = 0$, 故速率为 v_1 的粒子在时刻 $t_1 = l/v_1 = T$ 进入两平行板之间, 由题图 3 可知, 两板间的电压 $u = -U$ 。粒子在两板间的电场作用下的加速度为 a , 粒子通过两板经历的时间为 $\Delta t_1 = l/v_1 = T$ 。

在 Δt_1 时间内粒子在 Y 方向获得的分速度和位移分别为

$$v_{1y} = -a\Delta t_1 = -aT$$

$$y_1 = -\frac{1}{2}a(\Delta t_1)^2 = -\frac{1}{2}aT^2$$

因 $aT^2 = \frac{1}{5}d$, 故 $|y_1| = \frac{1}{10}d < d$, 表明速度为 v_1 的粒子能穿出平板, 粒子穿出平板后作匀速运动。在从射出平板至射到屏的时间内, 粒子在 Y 方向的位移

$$\Delta y_1 = v_{1y} \frac{l}{v_1} = -aT^2$$

粒子在屏上产生的痕迹的 Y 坐标为

$$Y_1 = y_1 + \Delta y_1 = -\frac{1}{2}aT^2 - aT^2 = -\frac{3}{2}aT^2 = -0.3d$$

速率为 v_2 的粒子在时刻 $t_2 = l/v_2 = 2T$ 进入两平行板之间, 由题图 3 可知, 两板间电压 $u = 2U$, 粒子在电场作用下的加速度为 $2a$, 粒子通过两板经历的时间为 $\Delta t_2 = l/v_2 = 2T$ 。

因为两板间的电压在时间 Δt_2 内由 $2U$ 变为 $-U$, 粒子的加速度亦将从 $2a$ 变成 $-a$, 由此可求得在 Δt_2 时间内粒子在 Y 方向获得的分速度和位移分别为

$$v_{2y} = 2aT - aT = aT$$

$$y_2 = \frac{1}{2}(2a)T^2 + (2aT)T - \frac{1}{2}aT^2 = \frac{5}{2}aT^2$$

因 $aT^2 = \frac{1}{5}d$, $y_2 = \frac{1}{2}d < d$, 表明速率为 v_2 的粒子亦能穿出平板。粒子穿出平板后做匀速运动。在从射出平板到屏的时间内, 粒子在 Y 方向的位移

$$\Delta y_2 = v_{2y} \frac{l}{v_2} = 2aT^2$$

粒子打在屏上产生的痕迹的坐标为

$$Y_2 = y_2 + \Delta y_2 = \frac{5}{2}aT^2 + 2aT^2 = \frac{9}{2}aT^2 = 0.9d$$

即粒子在屏上产生的痕迹是两个点, 它们的 Y 坐标分别为 $Y_1 = 0.3d$, $Y_2 = 0.9d$

2. 由于阀门从开启到关闭要经历一段时间, 在阀门 a 开启到关闭经历的时间间隔内的不同时刻, 都有各种不同速率的粒子从 A 处进入 AB 间, 有的早进入, 有的晚进入。由于阀门 b 从开启到关闭也要经历一段时间 δ , 粒子可能在最早的时刻即 $t = 0$ 的时刻从 B 处射出, 也可能在最晚的时刻即 $t = \delta$ 时刻从 B 处射出。在 a 刚开启的时刻从 A 处射入 AB 间, 并在 $t = \delta$ 时刻从 B 处射出的粒子的速率最小, 这最小速率为

$$v_{\min} = \frac{l}{T + \delta},$$

在阀门 a 刚要关闭时刻从 A 处射进 AB 间, 并在 $t = 0$ 的时刻从 B 处射出的粒子的速率最大, 这最大速率为

$$v_{\max} = \frac{l}{T - \delta}$$

在 $t = 0$ 时刻从 B 处射出的速率为 v_{\max} 的粒子在时刻

$$t_1 = \frac{l}{v_{\max}} = T - \delta$$

进入两平板之间, 在时刻 $t'_1 = t_1 + \frac{l}{v_{\max}} = 2T - 2\delta$ 离开两平板。由本题图可知, 在 $T - \delta$ 到 T 时间内, 两板间的电压为 $2U$, 在 T 到 $2T - 2\delta$ 时间内, 两板间的电压为 $-U$, 与电压对应的粒子的加速度分别为 $2a$ 和 $-a$ 。在粒子通过平板的时间内, 粒子在 Y 方向获得的分速度和位移分别为

$$v_{1y} = 2a\delta - a(T - 2\delta) = -aT + 4a\delta,$$

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2}(2a)\delta^2 + (2a)\delta(T - 2\delta) - \frac{1}{2}a(T - 2\delta)^2 \\ &= -\frac{1}{2}aT^2 + 4a\delta T - 5a\delta^2 \end{aligned}$$

粒子穿出平板后做匀速运动。从射出平板至射到屏的时间内, 粒子在 Y 方向的位移

$$\Delta y_1 = v_{1y} \frac{l}{v_{\max}} = (-aT + 4a\delta)(T - \delta) = -aT^2 + 5aT\delta - 4a\delta^2$$

粒子在屏上产生的痕迹的 Y 坐标为

$$Y_1 = y_1 + \Delta y_1 = -\frac{3}{2}aT^2 + 9aT\delta - 9a\delta^2$$

根据题意, 代入数据得 $Y_1 = -0.138d$ 。

在 $t = \delta$ 时刻从 B 处射出的速度为 v_{\max} 的粒子在时刻

$$t_2 = \delta + \frac{l}{v_{\max}} = T + 2\delta$$

进入两平板之间, 在时刻 $t'_2 = t_2 + \frac{l}{v_{\max}} = 2T + 3\delta$ 离开两平板。由本题图可知, 在 $T + 2\delta$ 到 $2T$ 时间内, 两板间的电压为 $-U$, 在 $2T$ 到 $2T + 3\delta$ 时间内, 两板间的电压为 $2U$, 与电压对应的粒子的加速度分别为 $-a$ 和 $2a$ 。在粒子通过平板的时间内, 粒子在 Y 方向获得的分速度和位移分别为

$$v_{2y} = -a(T - 2\delta) + (2a)3\delta = -aT + 8a\delta,$$

$$y_2 = -\frac{1}{2}a(T - 2\delta)^2 - a(T - 2\delta)3\delta + \frac{1}{2}(2a)(3\delta)^2$$

$$= -\frac{1}{2}aT^2 - a\delta T + 13a\delta^2$$

粒子穿出平板后做匀速运动。在从射出平板至射到屏的时间 δ 内, 粒子在 Y 方向的位移

$$\Delta y_2 = v_{2y} \frac{l}{v_{\min}} = (-aT + 8a\delta)(T + \delta) = -aT^2 + 7aT\delta + 8a\delta^2$$

粒子在屏上产生的痕迹的 Y 坐标为

$$Y_2 = y_2 + \Delta y_2 = -\frac{3}{2}aT^2 + 6aT\delta + 21a\delta^2$$

根据题意, 代入数据得 $Y_1 = -0.1d$ 。

由以上分析可知, 速率最小和速率最大的粒子打在屏上产生的痕迹是位于 Y 轴上的同一点。

五、1. 设粒子速度为 V , 则轨道半径 $r = \frac{mv}{qB}$, 又因为 $2r = \frac{d}{\cos\alpha}$, 解得 $v = \frac{qBd}{2m \cos\alpha}$, 到达金属板的时间 $t = \frac{\pi m}{qB}$ 。

2. 加电场后, 可将电场分解为平行于磁感应强度的分量 $E_1 = E \sin\alpha$ 和垂直于磁感应强度的分量 $E_2 = E \cos\alpha$, 前者使粒子产生平行于磁感应强度方向上的匀加速运动, 后者则与洛仑兹力一起使粒子作摆线运动。

先分析垂直于磁感应强度方向上的摆线运动:

将初速度 v_0 分解为指向纸外的 v_x 和指向纸内的 $v_0 + v_x$, 指向纸外的 v_x 所产生的洛仑兹力与电场力抵消, 而指向纸内的 $v_0 + v_x$ 将产生匀速圆周运动。

$$qv_x B = qE_2 = qE \cos\alpha, \text{ 故 } v_x = \frac{E \cos\alpha}{B}$$

向内的运动, 速度为 $v_0 + \frac{E \cos\alpha}{B}$, 其半径为 $r = \frac{m(v_0 + (E \cos\alpha)/B)}{qB}$, 由于粒子的周期不随速度的变化而改变, 故此运动在 1 问中计算出的时间内仍然运行半个圆周, 在垂直于磁感应强度方向上的位移为 $S_1 = 2r = \frac{2m(v_0 + (E \cos\alpha)/B)}{qB}$

$$\text{此时, 平行于磁感应强度方向上的运动的位移 } S_2 = \frac{1}{2} \frac{qE \sin\alpha}{m} \left(\frac{\pi m}{qB}\right)^2 = \frac{\pi^2 m E \sin\alpha}{2qB^2}$$

由题可知: $S_1 \cos\alpha + S_2 \sin\alpha = d$

$$\text{代入数据解得: } v_0 = \frac{2qB^2 d - \pi^2 m E \sin^2 \alpha}{4mB \cos\alpha} - \frac{E \cos\alpha}{B}$$

当 $\alpha = 45^\circ$ 时, 粒子到达金属板的 x 坐标肯定是 d , 下面计算 y 坐标和 z 坐标。

$$y = -v_x t = -\frac{E \cos \alpha}{B} \cdot \frac{\pi m}{qB} = -\frac{\sqrt{2}\pi m E}{2qB^2}$$

$$z = -S_1 \sin \alpha + S_2 \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}m(v_0 + \sqrt{2}E / 2B)}{qB} + \frac{\pi^2 m E}{4qB^2}$$

故粒子到达金属板的坐标为 $(d, -\frac{\sqrt{2}\pi m E}{2qB^2}, -\frac{\sqrt{2}m(v_0 + \sqrt{2}E / 2B)}{qB} + \frac{\pi^2 m E}{4qB^2})$

六、设质子的静止质量为 m_0 ，则它的静止能量为 $m_0 c^2$

由于此题求的是入射质子的最小能量，而碰撞以后当四个质子的速度相同的时候它们的总能量最小，所以我们假定碰撞后四个质子的速度相同。

设入射质子的总动能为 W ，动量为 P ；碰撞后每个质子的总动能为 W' ，动量为 P'

根据能量守恒，得 $W + m_0 c^2 = W'$

根据动量守恒，得 $P = 4P'$

根据相对论能量动量关系，得 $W^2 - P^2 c^2 = m_0^2 c^4$ ， $W'^2 - P'^2 c^2 = m_0^2 c^4$

由上述四式容易求得 $W = 7m_0 c^2 = 1.05 \times 10^{-9} J$

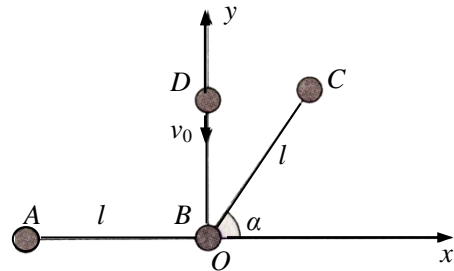
即入射质子的总能量等于质子静止能量的 7 倍。

第 24 届全国中学生物理竞赛决赛试题

★ 理论部分

一、

A, B, C 三个刚性小球静止在光滑的水平面上. 它们的质量皆为 m , 用不可伸长的长度皆为 l 的柔软轻线相连, AB 的延长线与 BC 的夹角 $\alpha = \pi/3$, 如图所示. 在此平面内取正交坐标系 Oxy , 原点 O 与 B 球所在处重合, x 轴正方向和 y 轴正方向如图. 另一质量也是 m 的刚性小球 D 位于 y 轴



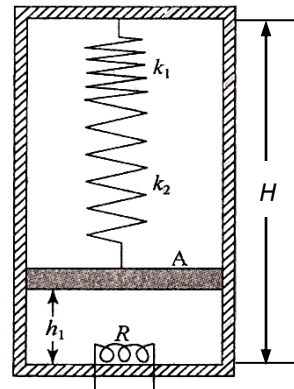
上, 沿 y 轴负方向以速度 v_0 (如图) 与 B 球发生弹性正碰, 碰撞时间极短. 设刚碰完后, 连接 A, B, C 的连线都立即断了. 求碰后经多少时间, D 球距 A, B, C 三球组成的系统的质心最近.

二、

为了近距离探测太阳并让探测器能回到地球附近, 可发射一艘以椭圆轨道绕太阳运行的携带探测器的宇宙飞船, 要求其轨道与地球绕太阳的运动轨道在同一平面内, 轨道的近日点到太阳的距离为 0.01AU (AU 为距离的天文单位, 表示太阳和地球之间的平均距离: $1\text{AU} = 1.495 \times 10^{11} \text{m}$), 并与地球具有相同的绕日运行周期 (为简单计, 设地球以圆轨道绕太阳运动). 试问从地球表面应以多大的相对于地球的发射速度 u_0 (发射速度是指在关闭火箭发动机, 停止对飞船加速时飞船的速度) 发射此飞船, 才能使飞船在克服地球引力作用后仍在地球绕太阳运行轨道附近 (也就是说克服了地球引力作用的飞船仍可看做在地球轨道上) 进入符合要求的椭圆轨道绕日运行? 已知地球半径 $R_e = 6.37 \times 10^6 \text{m}$, 地面处的重力加速度 $g = 9.80 \text{m/s}^2$, 不考虑空气的阻力.

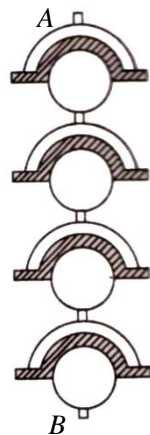
三、

如图所示，在一个竖直放置的封闭的高为 H 、内壁横截面积为 S 的绝热气缸内，有一质量为 m 的绝热活塞 A 把缸内分成上、下两部分。活塞可在缸内贴缸壁无摩擦地上下滑动。缸内顶部与 A 之间串联着两个劲度系数分别为 k_1 和 k_2 ($k_1 \neq k_2$) 的轻质弹簧。 A 的上方为真空； A 的下方盛有一定质量的理想气体。已知系统处于平衡状态， A 所在处的高度（其下表面与缸内底部的距离）与两弹簧总共的压缩量相等皆为 $h_1 = H/4$ 。现给电炉丝 R 通电流对气体加热，使 A 从高度 h_1 开始上升，停止加热后系统达到平衡时活塞的高度为 $h_2 = 3H/4$ 。求此过程中气体吸收的热量 ΔQ 。已知当体积不变时，每摩尔该气体温度每升高 1 K 吸收的热量为 $3R/2$ ， R 为普适气体恒量。在整个过程中假设弹簧始终遵从胡克定律。

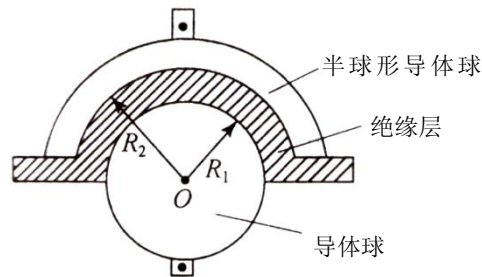


四、

为了减少线路的输电损耗，电力的远距离输送一般采用高电压的交流电传输方式。在输电线上建造一系列接地的铁塔，把若干绝缘子连成串（称为绝缘子串，见图甲），其上端 A 挂在铁塔的横臂上，高压输电线悬挂在其下端 B 。绝缘子的结构如图乙所示：在半径为 R_1 的导体球外紧包一层耐高压的半球形陶瓷绝缘介质，介质外是一内半径为 R_2 的半球形导体球壳。已知当导体球与导体球壳间的电压为 U 时，介质中离球心 O 的距离为 r 处的场强为 $E = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \frac{U}{r^2}$ ，场强方向沿径向。



图甲



图乙

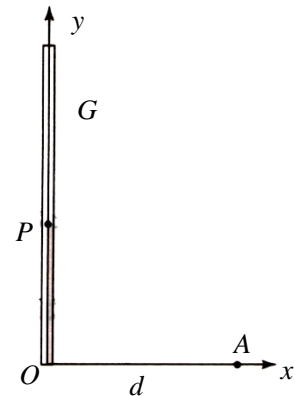
1. 已知绝缘子导体球壳的内半径 $R_2 = 4.6 \text{ cm}$ ，陶瓷介质的击穿强度 $E_k = 135 \text{ kV/cm}$ 。当介质中任一点的场强 $E > E_k$ 时，介质即被击穿，失去绝缘性能。为使绝缘子所能承受的电压（即加在绝缘子的导体球和导体球壳间的电压）为最大，导体球的半径 R_1 应取什么数值？此时，对应的交流电压的有效值是多少？

2. 一个铁塔下挂有由四个绝缘子组成的绝缘子串（如图甲），每个绝缘子的两导体间有电容 C_0 。每个绝缘子的下部导体（即导体球）对于铁塔（即对地）有分布电容 C_1 （导体球与铁塔相当于电容器的两个导体极板，它们之间有一定的电容，这种电容称为分布电容）；每个绝缘子的上部导体（即导体球壳）对高压输电线有分布电容 C_2 。若高压输电线对地电压的有效值为 U_0 。试画出该系统等效电路图。

3. 若 $C_0 = 70 \text{ pF} = 7 \times 10^{-11} \text{ F}$ ， $C_1 = 5 \text{ pF}$ ， $C_2 = 1 \text{ pF}$ ，试计算该系统所能承受的最大电压（指有效值）。

五、

如图所示， G 为一竖直放置的细长玻璃管，以其底端 O 为原点，建立一直角坐标系 Oxy ， y 轴与玻璃管的轴线重合。在 x 轴上与原点 O 的距离为 d 处固定放置一电荷量为 Q 的正点电荷 A ，一个电荷量为 q ($q > 0$) 的粒子 P 位于管内，可沿 y 轴无摩擦地运动。设两电荷之间的库仑相互作用力不受玻璃管的影响。



1. 求放在管内的带电粒子 P 的质量 m 满足什么条件时，可以在 $y > 0$ 的区域内存在平衡位置。

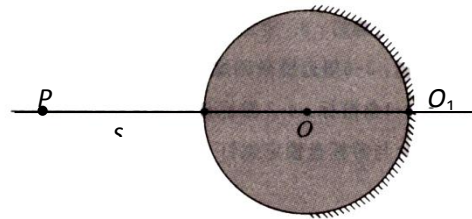
2. 上述平衡状态可以是稳定的，也可能是不稳定的；它依赖于粒子的质量 m 。以 $y(m)$ 表示质量为 m 的粒子 P 处于平衡位置时的 y 坐标。当粒子 P 处于稳定平衡状态时， $y(m)$ 的取值区间是_____；当粒子 P 处于不稳定平衡状态时， $y(m)$ 的取值区间是_____（请将填空答案写在答题纸上）。

3. 已知质量为 m_1 的粒子 P 处于稳定平衡位置，其 y 坐标为 y_1 。现给 P 沿 y 轴一微小扰动。试证明以后的运动为简谐运动，并求此简谐运动的周期。

4. 已知质量为 m_2 的粒子 P 的不稳定平衡位置的 y 坐标为 y_2 ，现设想把 P 放在坐标 y_3 处，然后从静止开始释放 P 。求释放后 P 能到达玻璃管底部的所有可能的 y_3 （只要列出 y_3 满足的关系式，不必求解）。

六、

如图所示, 一半径为 R 、折射率为 n_g 的透明球体置于折射率 $n_0 = 1$ 的空气中, 其球心位于图中光轴的 O 处, 左、右球面与光轴的交点为 O_1 与 O_2 . 球体右半球面为一球面反射镜, 组成球形反射器. 光轴上 O_1 点左侧有一发光物点 P ,

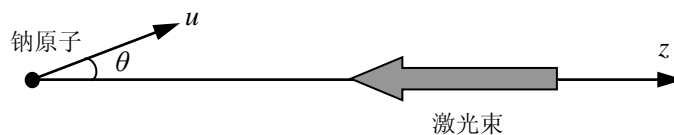


P 点到球面顶点 O_1 的距离为 s . 由 P 点发出的光线满足傍轴条件, 不考虑在折射面上发生的反射.

1. 问发光物点 P 经此反射器, 最后的像点位于何处?
2. 当 P 点沿光轴以大小为 v 的速度由左向右匀速运动时, 试问最后的像点将以怎样的速度运动? 并说明当球体的折射率 n_g 取何值时像点亦做匀速运动.

七、

已知钠原子从激发态 (记做 $P_{3/2}$) 跃迁到基态 (记做 $S_{1/2}$) 所发出的光谱线波长 $\lambda_0 = 588.9965 \text{ nm}$. 现有一团钠原子气, 其中的钠原子做无规的热运动 (钠原子的运动不必考虑相对论效应), 被一束沿 z 轴负方向传播的波长为 $\lambda = 589.0080 \text{ nm}$ 的激光照射. 以 θ 表示钠原子运动方向与 z 轴正方向之间的夹角 (如图 所示). 问在 $30^\circ < \theta < 45^\circ$ 角度区间内的钠原子中速率 u 在什么范围内能产生共振吸收, 从 $S_{1/2}$ 态激发到 $P_{3/2}$ 态? 并求共振吸收前后钠原子速度 (矢量) 变化的大小. 已知钠原子质量为 $M = 3.79 \times 10^{-26} \text{ kg}$, 普朗克常量 $h = 6.626069 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, 真空中的光速 $c = 2.997925 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

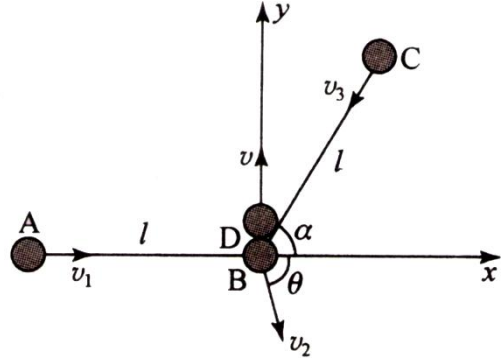


第 24 届全国中学生物理竞赛决赛参考解答

一、

1. 分析刚碰后各球速度的方向. 由于 D 与 B 球发生弹性正碰, 所以碰后 D 球的速度方向仍在 y 轴上; 设其方向沿 y 轴正方向,

大小为 v . 由于线不可伸长, 所以在 D, B 两球相碰的过程中, A, C 两球都将受到线给它们的冲量; 又由于线是柔软的, 线对 A, C 两球均无垂直于线方向的作用力, 因此刚碰后, A 球的速度沿 AB 方向, C 球的速度沿 CB 方向. 用 θ 表示 B 球的速度方向与 x 轴的



夹角, 则各球速度方向将如图所示. 因为此时连接 A, B, C 三球的两根线立即断了, 所以此后各球将做匀速直线运动.

2. 研究碰撞后各球速度的大小. 以 v_1, v_2, v_3 分别表示刚碰后 A, B, C 三球速度的大小, 如图所示. 因为碰撞过程中动量守恒, 所以沿 x 方向有

$$mv_1 - mv_3 \cos \alpha + mv_2 \cos \theta = 0; \quad (1)$$

沿 y 方向有

$$-mv_0 = mv - mv_2 \sin \theta - mv_3 \sin \alpha. \quad (2)$$

根据能量守恒有

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}mv_3^2 + \frac{1}{2}mv^2. \quad (3)$$

因为碰撞过程中线不可伸长, B, C 两球沿 BC 方向的速度分量相等, A, B 两球沿 AB 方向的速度分量相等, 有

$$v_2 \cos \theta = v_1, \quad (4)$$

$$v_2 \cos [\pi - (\alpha + \theta)] = v_3. \quad (5)$$

将 $\alpha = \pi/3$ 代入, 由以上各式可解得

$$v_1 = \frac{\sqrt{3}}{12}v_0, \quad (6)$$

$$v_2 = \frac{\sqrt{21}}{6}v_0, \quad (7)$$

$$v_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}v_0, \quad (8)$$

$$v = \frac{1}{4}v_0 . \quad (9)$$

3. 确定刚碰完后, A , B , C 三球组成的系统质心的位置和速度. 由于碰撞时间极短, 刚碰后 A , B , C 三球组成的系统, 其质心位置就是碰撞前质心的位置, 以 (x_c, y_c) 表示此时质心的坐标, 根据质心的定义, 有

$$x_c = \frac{ml \cos\alpha - ml}{3m} , \quad (10)$$

$$y_c = \frac{ml \sin\alpha}{3m} . \quad (11)$$

代入数据, 得

$$x_c = -\frac{1}{6}l , \quad (12)$$

$$y_c = \frac{\sqrt{3}}{6}l . \quad (13)$$

根据质心速度的定义, 可求得碰后质心速度 v_c 的分量为

$$v_{cx} = \frac{mv_1 + mv_2 \cos\theta - mv_3 \cos\alpha}{3m} , \quad (14)$$

$$v_{cy} = \frac{-mv_2 \sin\theta - mv_3 \sin\alpha}{3m} . \quad (15)$$

由 (4) ~ (7) 和 (14), (15) 各式及 α 值可得

$$v_{cx} = 0 , \quad (16)$$

$$v_{cy} = -\frac{5}{12}v_0 . \quad (17)$$

4. 讨论碰后 A , B , C 三球组成的系统的质心和 D 球的运动. 刚碰后 A , B , C 三球组成的系统的质心将从坐标 $(x_c = -l/6, y_c = \sqrt{3}l/6)$ 处出发, 沿 y 轴负方向以大小为 $5v_0/12$ 的速度做匀速直线运动; 而 D 球则从坐标原点 O 出发, 沿 y 轴正方向以大小为 $v_0/4$ 的速度做匀速直线运动. A , B , C 三球组成系统的质心与 D 球是平行反向运动, 只要 D 球与 C 球不发生碰撞, 则 v_c, v_D 不变, 质心与 D 球之间的距离逐渐减少. 到 y 坐标相同处时, 它们相距最近. 用 t 表示所求的时间, 则有

$$vt = y_c + v_{cy} t \quad (18)$$

将 v_{cy}, v, y_c 的值代入, 得

$$t = \frac{\sqrt{3}l}{4v_0} . \quad (19)$$

此时, D 球与 A, B, C 三球组成系统的质心两者相距 $l/6$. 在求出 (19) 式的过程中, 假设了在 $t = \sqrt{3}l/4v_0$ 时间内 C 球未与 D 球发生碰撞. 下面说明此假设是正确的;

因为 $v_3 = \sqrt{3}v_0/3$, 它在 x 方向分量的大小为 $\sqrt{3}v_0/6$. 经过 t 时间, 它沿 x 轴负方向经过的距离为 $l/8$. 而 C 球的起始位置的 x 坐标为 $l/2$. 经 t 时间后, C 球尚未到达 y 轴, 不会与 D 球相碰.

二、

从地球表面发射宇宙飞船时, 必须给飞船以足够大的动能, 使它在克服地球引力作用后, 仍具有合适的速度进入绕太阳运行的椭圆轨道. 此时, 飞船离地球已足够远, 但到太阳的距离可视为不变, 仍为日地距离. 飞船在地球绕太阳运动的轨道上进入它的椭圆轨道, 用 E 表示两轨道的交点, 如图 1 所示. 图中半径为 r_{se} 的圆 A 是地球绕太阳运行的轨道, 太阳 S 位于圆心. 设椭圆 B 是飞船绕日运行的轨道, P 为椭圆轨道的近日点.

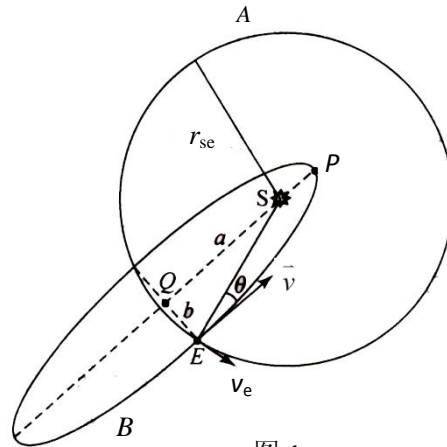


图 1

由于飞船绕日运行的周期与地球绕日运行的周期相等, 根据开普勒第三定律, 椭圆的半长轴 a 应与日地距离 r_{se} 相等, 即有

$$a = r_{se} \tag{1}$$

根据椭圆的性质, 轨道上任一点到椭圆两焦点的距离之和为 $2a$, 由此可以断定, 两轨道的交点 E 必为椭圆短轴的一个顶点, E 与椭圆长轴和短轴的交点 Q (即椭圆的中心) 的连线垂直于椭圆的长轴. 由 $\triangle ESQ$, 可以求出半短轴

$$b = \sqrt{r_{se}^2 - (a - \overline{SP})^2} . \tag{2}$$

由 (1), (2) 两式, 并将 $a = r_{se} = 1\text{AU}$, $\overline{SP} = 0.01\text{AU}$ 代入, 得

$$b = 0.141\text{AU} . \tag{3}$$

在飞船以椭圆轨道绕太阳运行过程中, 若以太阳为参考系, 飞船的角动量和机械能是守恒的. 设飞船在 E 点的速度为 v , 在近日点的速度为 v_p , 飞船的质量为 m , 太阳的质量为 M_s , 则有

$$mva \sin\theta = mv_p \overline{SP} , \tag{4}$$

式中 θ 为速度 v 的方向与 E , S 两点连线间的夹角:

$$\sin\theta = \frac{b}{a} . \quad (5)$$

由机械能守恒, 得

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_s m}{a} = \frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{GmM_s}{SP} . \quad (6)$$

因地球绕太阳运行的周期 T 是已知的 ($T = 365 \text{ d}$), 若地球的质量为 M_e , 则有

$$G\frac{M_s M_e}{a^2} = M_e \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a . \quad (7)$$

解 (3) ~ (7) 式, 并代入有关数据, 得

$$v = 29.8 \text{ km/s} . \quad (8)$$

(8) 式给出的 v 是飞船在 E 点相对于太阳的速度的大小, 即飞船在克服地球引力作用后从 E 点进入椭圆轨道时所必须具有的相对于太阳的速度. 若在 E 点飞船相对地球的速度为 u , 因地球相对于太阳的公转速度为

$$v_e = \frac{2\pi a}{T} = 29.8 \text{ km/s} , \quad (9)$$

方向如图 1 所示. 由速度合成公式, 可知

$$v = u + v_e , \quad (10)$$

速度合成的矢量图如图 2 所示, 注意到 v_e 与 \overline{ES} 垂直, 有

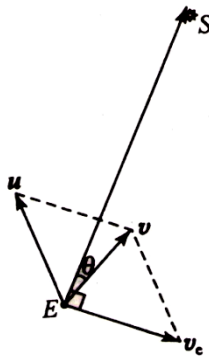


图 2

$$u = \sqrt{v^2 + v_e^2 - 2vv_e \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} ,$$

(11)

代入数据, 得

$$u = 39.1 \text{ km/s} . \quad (12)$$

u 是飞船在 E 点相对于地球的速度, 但不是所要求的发射速度 u_0 . 为了求得 u_0 , 可以从与地心固定连接在一起的参考系来考察飞船的运动. 因飞船相对于地球的发射速度为 u_0 时,

飞船离地心的距离等于地球半径 R_e . 当飞船相对于地球的速度为 u 时, 地球引力作用可以忽略. 由能量守恒, 有

$$\frac{1}{2}mu_0^2 - G\frac{M_em}{R_e} = \frac{1}{2}mu^2 . \quad (13)$$

地面处的重力加速度为

$$g = G\frac{M_e}{R_e^2} , \quad (14)$$

解 (13), (14) 两式, 得

$$u_0 = \sqrt{u^2 + 2gR_e} . \quad (15)$$

由 (15) 式及有关数据, 得

$$u_0 = 40.7 \text{ km/s} . \quad (16)$$

如果飞船在 E 点处以与图示相反的方向进入椭圆轨道, 则 (11) 式要做相应的改变. 此时, 它应为

$$u = \sqrt{v^2 + v_e^2 - 2vv_e \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} , \quad (17)$$

相应计算, 可得另一解

$$u = 45.0 \text{ km/s} , \quad u_0 = 46.4 \text{ km/s} . \quad (18)$$

如果飞船进入椭圆轨道的地点改在 E 点的对称点处 (即地球绕日轨道与飞船绕日轨道的另一个交点上), 则计算过程相同, 结果不变.

三、

两个弹簧串联时, 作为一个弹簧来看, 其劲度系数

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} . \quad (1)$$

设活塞 A 下面有 $\nu \text{ mol}$ 气体. 当 A 的高度为 h_1 时, 气体的压强为 p_1 , 温度为 T_1 . 由理想气体状态方程和平衡条件, 可知

$$p_1 S h_1 = \nu R T_1 , \quad (2)$$

$$p_1 S = k h_1 + m g . \quad (3)$$

对气体加热后, 当 A 的高度为 h_2 时, 设气体压强为 p_2 , 温度为 T_2 . 由理想气体状态方程和平衡条件, 可知

$$p_2 S h_2 = \nu R T_2 , \quad (4)$$

$$p_2 S = k h_2 + m g . \quad (5)$$

在 A 从高度 h_1 上升到 h_2 的过程中, 气体内能的增量

$$\Delta U = \nu \frac{3}{2} R (T_2 - T_1) . \quad (6)$$

气体对弹簧、活塞系统做的功 W 等于弹簧弹性势能的增加和活塞重力势能的增加, 即

$$W = \frac{1}{2} k (h_2^2 - h_1^2) + mg (h_2 - h_1) . \quad (7)$$

根据热力学第一定律, 有

$$\Delta Q = \Delta U + W . \quad (8)$$

由以上各式及已知数据可求得

$$\Delta Q = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} H^2 + \frac{5}{4} mgH . \quad (9)$$

四、

1. 根据题意, 当导体球与导体球壳间的电压为 U 时, 在距球心 r ($R_1 < r < R_2$) 处, 电场强度的大小为

$$E = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \frac{U}{r^2} . \quad (1)$$

在 $r = R_1$, 即导体球表面处, 电场强度最大. 以 $E(R_1)$ 表示此场强, 有

$$E(R_1) = \frac{R_2 U}{(R_2 - R_1) R_1} . \quad (2)$$

因为根据题意, $E(R_1)$ 的最大值不得超过 E_k , R_2 为已知, 故 (2) 式可写为

$$E_k = \frac{R_2 U}{(R_2 - R_1) R_1} \quad (3)$$

或

$$U = E_k \frac{(R_2 - R_1) R_1}{R_2} . \quad (4)$$

由此可知, 选择适当的 R_1 值, 使 $(R_2 - R_1) R_1$ 最大, 就可使绝缘子的耐压 U 为最大. 不难看出, 当

$$R_1 = \frac{R_2}{2} \quad (5)$$

时, U 便是绝缘子能承受的电压的最大值 U_k . 由 (4), (5) 两式得

$$U_k = \frac{E_k R_2}{4} , \quad (6)$$

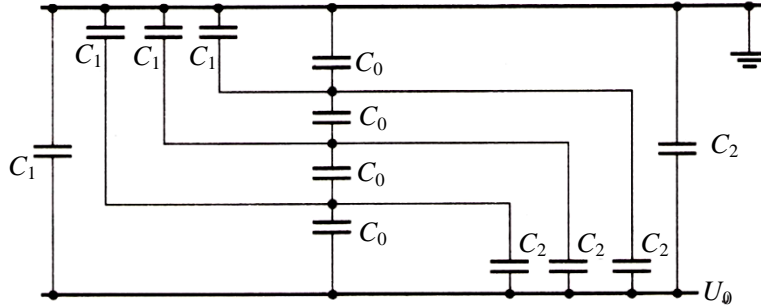
代入有关数据, 得

$$U_k = 155 \text{ kV} . \quad (7)$$

当交流电压的峰值等于 U_k 时, 绝缘介质即被击穿. 这时, 对应的交流电压的有效值

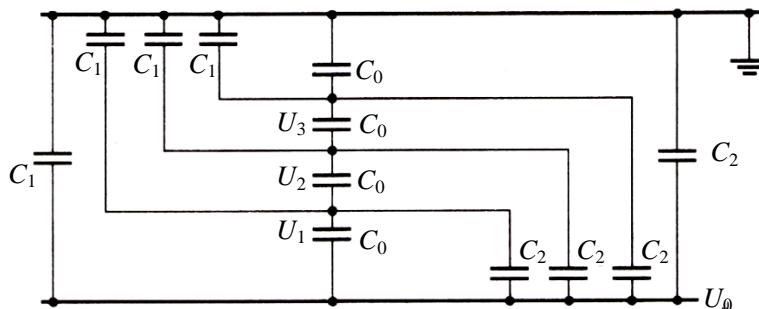
$$U_e = \frac{U_k}{\sqrt{2}} \quad 110 \text{ kV} . \quad (8)$$

2. 系统的等效电路如图所示.



3. 设绝缘子串中间三点的电势分别为 U_1 , U_2 , U_3 , 如图所示. 由等效电路可知, 与每个中间点相连的四块电容极板上的电荷量代数和都应为零, 即有

$$\begin{cases} (U_1 - U_2)C_0 + U_1C_1 - (U_0 - U_1)C_0 - (U_0 - U_1)C_2 = 0, \\ (U_2 - U_3)C_0 + U_2C_1 - (U_1 - U_2)C_0 - (U_0 - U_2)C_2 = 0, \\ U_3C_0 + U_3C_1 - (U_2 - U_3)C_0 - (U_0 - U_3)C_2 = 0. \end{cases} \quad (9)$$



四个绝缘子上的电压之和应等于 U_0 , 即

$$(U_0 - U_1) + (U_1 - U_2) + (U_2 - U_3) + U_3 = U_0 . \quad (10)$$

设

$$\Delta U_1 = U_0 - U_1, \quad \Delta U_2 = U_1 - U_2, \quad \Delta U_3 = U_2 - U_3, \quad \Delta U_4 = U_3, \quad (11)$$

则可由 (9) 式整理得

$$\begin{cases} \Delta U_1(C_0 + C_1 + C_2) - \Delta U_2C_0 - U_0C_1 = 0, \\ \Delta U_1(C_1 + C_2) + \Delta U_2(C_0 + C_1 + C_2) - \Delta U_3C_0 - U_0C_1 = 0, \\ \Delta U_1(C_0 + C_1 + C_2) + \Delta U_2(C_0 + C_1 + C_2) + \Delta U_3(2C_0 + C_1 + C_2) - U_0(C_0 + C_1) = 0; \end{cases}$$

代入数据, 得

$$\begin{cases} 76\Delta U_1 - 70\Delta U_2 - 5U_0 = 0, \\ 6\Delta U_1 + 76\Delta U_2 - 70\Delta U_3 - 5U_0 = 0, \\ 76\Delta U_1 + 76\Delta U_2 + 146\Delta U_3 - 75U_0 = 0. \end{cases} \quad (12)$$

解 (12) 式, 可得

$$\Delta U_1 = 0.298 U_0, \quad \Delta U_2 = 0.252 U_0, \quad \Delta U_3 = 0.228 U_0. \quad (13)$$

由 (10) ~ (12) 式可得

$$\Delta U_4 = U_3 = 0.222 U_0. \quad (14)$$

以上结果表明, 各个绝缘子承受的电压不是均匀的; 最靠近输电线的绝缘子承受的电压最大, 此绝缘子最容易被击穿. 当最靠近输电线的绝缘子承受的电压有效值

$$\Delta U_1 = U_e \quad (15)$$

时, 此绝缘子被击穿, 整个绝缘子串损坏. 由 (8), (13) 和 (15) 三式可知, 绝缘子串承受的最大电压

$$U_{0\max} = \frac{U_e}{0.298} = 369 \text{ kV}. \quad (16)$$

五、

1. 如图所示, 位于坐标 y 处的带电粒子 P 受到库仑力 F_E 为斥力, 其 y 分量为

$$F_{Ey} = k \frac{Qq}{r^2} \sin\theta = k \frac{Qqy}{(d^2 + y^2)^{3/2}}, \quad (1)$$

式中 r 为 P 到 A 的距离, θ 为 r 与 x 轴的夹角. 可以看出, F_{Ey} 与 y 有关: 当 y 较小时, (1) 式分子中的 y 起主要作用, F_{Ey} 随 y 的增大而增大; 当 y 较大时, (1) 式分母中的 y 起主要作用, F_{Ey} 随 y 的增大而减小. 可见, F_{Ey} 在随 y 由小变大的过程中会出现一个极大值. 通过数值计算法, 可求得 F_{Ey} 随 y 变化的情况. 令 $\tau = y/d$, 得

$$F_{Ey} = k \frac{Qq}{d^2} \frac{\tau}{(1 + \tau^2)^{3/2}}. \quad (2)$$

当 τ 取不同数值时, 对应的 $\tau(1 + \tau^2)^{-3/2}$ 的值不同. 经数值计算, 整理出的数据如表 1 所示.

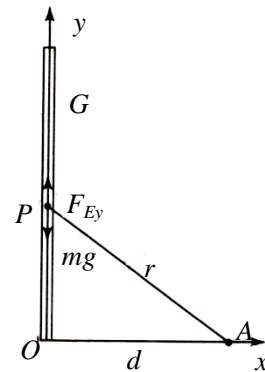


表 1

τ	0.100	0.500	0.600	0.650	0.700	0.707	0.710	0.750	0.800
$\tau(1 + \tau^2)^{-3/2}$	0.0985	0.356	0.378	0.382	0.385	0.385	0.385	0.384	0.381

由表中的数据可知, 当 $\tau = 0.707$, 即

$$y = y_0 = 0.707d \quad (3)$$

时, 库仑力的 y 分量有极大值, 此极大值为

$$F_{Ey\max} = 0.385k \frac{qQ}{d^2} . \quad (4)$$

由于带电粒子 P 在竖直方向除了受到竖直向上的 F_{Ey} 作用外, 还受到竖直向下的重力 mg 作用. 只有当重力的大小 mg 与库仑力的 y 分量相等时, P 才能平衡. 当 P 所受的重力 mg 大于 $F_{Ey\max}$ 时, P 不可能达到平衡. 故质量为 m 的粒子存在平衡位置的条件是

$$mg \leq F_{Ey\max} .$$

由 (4) 式得

$$m \leq \frac{0.385}{g} k \frac{qQ}{d^2} . \quad (5)$$

2. $y(m) > 0.707d$; $0 < y(m) \leq 0.707d$.

3. 根据题意, 当粒子 P 静止在 $y = y_1$ 处时, 处于稳定平衡位置, 故有

$$k \frac{Qqy_1}{(d^2 + y_1^2)^{\frac{3}{2}}} - m_1g = 0 . \quad (6)$$

设想给粒子 P 沿 y 轴的一小扰动 Δy , 则 P 在 y 方向所受的合力为

$$F_y = F_{Ey} - m_1g = k \frac{Qq(y_1 + \Delta y)}{[d^2 + (y_1 + \Delta y)^2]^{\frac{3}{2}}} - m_1g . \quad (7)$$

由于 Δy 为一小量, 可进行近似处理, 忽略高阶小量, 有

$$\begin{aligned} F_y &= k \frac{Qq(y_1 + \Delta y)}{[d^2 + y_1^2 + 2y_1\Delta y]^{\frac{3}{2}}} - m_1g \\ &= k \frac{Qq(y_1 + \Delta y)}{(d^2 + y_1^2)^{\frac{3}{2}}} \left(1 - \frac{3y_1\Delta y}{d^2 + y_1^2}\right) - m_1g \\ &= k \frac{Qqy_1}{(d^2 + y_1^2)^{\frac{3}{2}}} + k \frac{Qq\Delta y}{(d^2 + y_1^2)^{\frac{3}{2}}} - k \frac{3Qqy_1^2\Delta y}{(d^2 + y_1^2)^{\frac{5}{2}}} - m_1g . \end{aligned}$$

注意到 (6) 式, 得

$$F_y = - \frac{m_1g(2y_1^2 - d^2)}{(d^2 + y_1^2)y_1} \Delta y . \quad (8)$$

因 $y = y_1$ 是粒子 P 的稳定平衡位置, 故 $y_1 > 0.707d$, $2y_1^2 - d^2 > 0$. 由 (8) 式可知, 粒子 P 在 y 方向受到合力具有恢复力的性质, 故在其稳定平衡位置附近的微小振动是简谐运动; 其圆频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{(2y_1^2 - d^2)}{(d^2 + y_1^2) y_1} g}, \quad (9)$$

周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{(d^2 + y_1^2) y_1}{(2y_1^2 - d^2) g}}. \quad (10)$$

4. 粒子 P 处在重力场中, 具有重力势能; 它又处在点电荷 A 的静电场中, 具有静电势能. 当 P 的坐标为 y 时, 其重力势能

$$W_g = m_2 g y,$$

式中取坐标原点 O 处的重力势能为零; 静电势能

$$W_E = k \frac{qQ}{\sqrt{d^2 + y^2}}.$$

粒子的总势能

$$W = W_g + W_E = m_2 g y + k \frac{qQ}{\sqrt{d^2 + y^2}}. \quad (11)$$

势能也与 P 的 y 坐标有关: 当 y 较小时, 静电势能起主要作用, 当 y 较大时, 重力势能起主要作用. 在 P 的稳定平衡位置处, 势能具有极小值; 在 P 的不稳定平衡位置处, 势能具有极大值. 根据题意, $y = y_2$ 处是质量为 m_2 的粒子的不稳定平衡位置, 故 $y = y_2$ 处, 势能具有极大值, 即

$$W(y_2) = W_{\max} = m_2 g y_2 + k \frac{qQ}{\sqrt{d^2 + y_2^2}}. \quad (12)$$

当粒子 P 的坐标为 y_3 时, 粒子的势能为

$$W(y_3) = m_2 g y_3 + k \frac{qQ}{\sqrt{d^2 + y_3^2}}.$$

当 $y_3 < y_2$ 时, 不论 y_3 取何值, 粒子从静止释放都能到达管底. 若 $y_3 > y_2$, 粒子从静止释放能够到达管底, 则有

$$W(y_3) > W(y_2).$$

所以, y_3 满足的关系式为

$$y_3 < y_2; \quad (13)$$

或者

$$y_3 > y_2 \quad \text{且} \quad m_2 g y_3 + k \frac{qQ}{\sqrt{d^2 + y_3^2}} > m_2 g y_2 + k \frac{qQ}{\sqrt{d^2 + y_2^2}} . \quad (14)$$

附: (1) 式可表示为

$$F_{Ey} = k \frac{Qq}{r^2} \sin\theta = k \frac{Qq}{d^2} \cos^2\theta \sin\theta ,$$

式中 θ 为 P, A 之间的连线和 x 轴的夹角. 由上式可知, 带电粒子 P 在 $\theta = 0, \pi/2$ 时, $F_{Ey} = 0$. 在 $0 \leq \theta \leq \pi/2$ 区间, 随着 θ 的增大, $\sin\theta$ 是递增函数, $\cos^2\theta$ 是递减函数. 在此区间内, F_{Ey} 必存在一个极大值 $F_{Ey\max}$; 用数值法求解, 可求得极大值所对应得角度 θ_0 . 经数个计算整理出的数据如表 2 所示.

表 2

θ / rad	0.010	0.464	0.540	0.576	0.611	0.615	0.617	0.644	0.675
$\cos^2\theta \sin\theta$	0.029	0.367	0.378	0.383	0.385	0.385	0.385	0.384	0.381

由表中数值可知, 当 $\theta = \theta_0 \approx 0.615 \text{ rad}$ (即 35.26°) 时, F_{Ey} 取极大值

$$F_{Ey\max} = k \frac{Qq}{d^2} \cos^2\theta_0 \sin\theta_0 = 0.385 k \frac{Qq}{d^2} .$$

带电粒子 P 在竖直方向上还受到重力 G 的作用, 其方向与 F_{Ey} 相反. 故带电粒子 P 受到的合力

$$F = F_{Ey} - G = k \frac{Qq}{d^2} \cos^2\theta \sin\theta - mg .$$

当 $F = 0$, 即 $F_{Ey} = G$ 时, P 处于平衡状态. 由此可见, 当带电粒子的质量

$$m \leq \frac{F_{Ey\max}}{g} = \frac{k(qQ/d^2) \cos^2\theta_0 \sin\theta_0}{g}$$

时, 可以在 y 轴上找到平衡点.

六、

1. 单球面折射成像公式可写成

$$\frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r} , \quad (1)$$

式中 s 为物距, s' 为像距, r 为球面半径, n 和 n' 分别为入射光和折射光所在介质的折射率.

在本题中, 物点 P 经反射器的成像过程是: 先经过左球面折射成像 (第一次成像); 再经右球面反射成像 (第二次成像); 最后再经左球面折射成像 (第三次成像).

(1) 第一次成像. 令 s_1 和 s'_1 分别表示物距和像距. 因 $s_1 = s$, $n = n_0 = 1$, $n' = n_g$, $r = R$, 有

$$\frac{n_g}{s'_1} + \frac{1}{s_1} = \frac{n_g - 1}{R}, \quad (2)$$

即

$$s'_1 = \frac{n_g R s}{(n_g - 1)s - R}. \quad (3)$$

(2) 第二次成像. 用 s_2 表示物距, s'_2 表示像距, 有

$$\frac{1}{s'_2} + \frac{1}{s_2} = \frac{2}{r}. \quad (4)$$

因 $s_2 = 2R - s'_1$, $r = R$, 由 (3), (4) 两式得

$$s'_2 = \frac{(2s + 2R - n_g s)R}{3R + 3s - n_g s}. \quad (5)$$

(3) 第三次成像. 用 s_3 表示物距, s'_3 表示像距, 有

$$\frac{n_0}{s'_3} + \frac{n_g}{s_3} = \frac{n_0 - n_g}{r}. \quad (6)$$

因 $s_3 = 2R - s'_2$, $n_0 = 1$, $r = -R$, 由 (5), (6) 两式得

$$s'_3 = \frac{(4s - n_g s + 4R)R}{2n_g s - 4s + n_g R - 4R}. \quad (7)$$

2. 以 v' 表示像的速度, 则

$$\begin{aligned} v' &= \frac{\Delta s'_3}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \left\{ \frac{[4(s + \Delta s) - n_g(s + \Delta s) + 4R]R}{2n_g(s + \Delta s) - 4(s + \Delta s) + n_g R - 4R} - \frac{(4s - n_g s + 4R)R}{2n_g s - 4s + n_g R - 4R} \right\} \\ &= \frac{-n_g^2 R^2 \Delta s / \Delta t}{(2n_g s - 4s + n_g R - 4R)^2 + \Delta s(2n_g - 4)(2n_g s - 4s + n_g R - 4R)}. \end{aligned} \quad (8)$$

由于 Δs 很小, 分母中含有 Δs 的项可以略去, 因而有

$$v' = \frac{-n_g^2 R^2}{(2n_g s - 4s + n_g R - 4R)^2} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (9)$$

根据题意, P 从左向右运动, 速度大小为 v , 则有

$$v = -\frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (10)$$

由此可得, 像的速度

$$v' = \frac{n_g^2 R^2 v}{(2n_g s - 4s + n_g R - 4R)^2}. \quad (11)$$

可见, 像的速度与 s 有关, 一般不做匀速直线运动, 而做变速直线运动. 当

$$n=2 \quad (12)$$

时, (11)式分母括号中的头两项相消, v' 将与 s 无关. 这表明像也将做匀速直线运动; 而且 (11) 式变为 $v'=v$, 即像的速度和 P 的速度大小相等.

七、

解法一. 根据已知条件, 射向钠原子的激光的频率

$$\nu = \frac{c}{\lambda}. \quad (1)$$

对运动方向与 z 轴正方向的夹角为 θ 、速率为 u 的钠原子, 由于多普勒效应, 它接收的激光频率

$$\nu' = \nu \left(1 + \frac{u}{c} \cos\theta \right); \quad (2)$$

改用波长表示, 有

$$\lambda' = \frac{\lambda}{1 + \frac{u}{c} \cos\theta}. \quad (3)$$

发生共振吸收时, 应有 $\lambda' = \lambda_0$, 即

$$\frac{\lambda}{1 + \frac{u}{c} \cos\theta} = \lambda_0. \quad (4)$$

解 (4) 式, 得

$$u \cos\theta = c \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}; \quad (5)$$

代入有关数据, 得

$$u \cos\theta = 5.85 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (6)$$

由 (6) 式, 对 $\theta=30^\circ$ 的钠原子, 其速率

$$u_1 = 6.76 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1};$$

对 $\theta=45^\circ$ 的钠原子, 其速率

$$u_2 = 8.28 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

运动方向与 z 轴的夹角在 $30^\circ \sim 45^\circ$ 区域内的原子中, 能发生共振吸收的钠原子的速率范围为

$$6.76 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} < u < 8.28 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (7)$$

共振吸收前后, 动量守恒. 设钠原子的反冲速率为 V , 则有

$$Mu - \frac{h}{\lambda} e_z = MV . \quad (8)$$

其中 e_z 为 z 轴方向的单位矢量. 由 (8) 式得

$$u - V = \frac{h}{M\lambda} e_z . \quad (9)$$

钠原子速度 (矢量) 变化的大小为

$$|u - V| = \frac{h}{M\lambda} ; \quad (10)$$

代入数据, 得

$$|u - V| = 2.9 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} . \quad (11)$$

解法二. 根据已知条件, 钠原子从激发态 $P_{3/2}$ 跃迁到基态 $S_{1/2}$ 发出的光谱线的频率

$$\nu_0 = \frac{c}{\lambda_0} ; \quad (1)$$

入射激光的频率

$$\nu = \frac{c}{\lambda} . \quad (2)$$

考查运动方向与 z 轴的正方向成 θ 角的某个钠原子. 它在共振吸收过程中动量守恒, 能量守恒. 以 u 表示该钠原子在共振吸收前的速度, V 表示该钠原子共振吸收后的速度, 则有

$$Mu - \frac{h\nu}{c} e_z = MV , \quad (3)$$

$$\frac{1}{2}Mu^2 + h\nu = \frac{1}{2}MV^2 + h\nu_0 . \quad (4)$$

把 (3) 式写成分量形式, 并注意到共振吸收前后钠原子在垂直于 z 轴方向的动量不变, 有

$$Mu \sin\theta = MV \sin\theta' , \quad (5)$$

$$Mucos\theta - \frac{h\nu}{c} = MV \cos\theta' , \quad (6)$$

式中 θ' 为激发态钠原子速度方向与 z 轴正方向的夹角. 从 (5), (6) 两式中消去 θ' , 得

$$M^2 u^2 - M^2 V^2 = - \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + 2Mu \frac{h\nu}{c} \cos\theta . \quad (7)$$

由 (4), (7) 两式可得

$$2h\nu_0 - 2h\nu = - \frac{1}{M} \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + 2h\nu \frac{u}{c} \cos\theta . \quad (8)$$

注意到 $(h\nu/c)^2 \ll M$, 得

$$v_0 = v \left(1 + \frac{u}{c} \cos\theta \right); \quad (9)$$

改用波长表示, 有

$$\lambda_0 = \frac{\lambda}{1 + \frac{u}{c} \cos\theta}. \quad (10)$$

解 (10) 式, 得

$$u \cos\theta = c \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}; \quad (11)$$

代入有关数据, 得

$$u \cos\theta = 5.85 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (12)$$

由 (12) 式, 对 $\theta = 30^\circ$ 的钠原子, 其速率

$$u_1 = 6.76 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1};$$

对 $\theta = 45^\circ$ 的钠原子, 其速率

$$u_2 = 8.28 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

运动方向与 z 轴的夹角在 $30^\circ \sim 45^\circ$ 区域内的原子中, 能发生共振吸收的钠原子的速率范围为

$$6.76 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} < u < 8.28 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (13)$$

由 (3) 式可知, 钠原子共振吸收前后速度 (矢量) 的变化为

$$\mathbf{u} - \mathbf{V} = \frac{h}{M\lambda} \mathbf{e}_z, \quad (14)$$

速度 (矢量) 大小的变化为

$$|\mathbf{u} - \mathbf{V}| = \frac{h}{M\lambda}; \quad (15)$$

代入数据, 得

$$|\mathbf{u} - \mathbf{V}| = 2.9 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (16)$$

第 25 届全国物理竞赛决赛试题

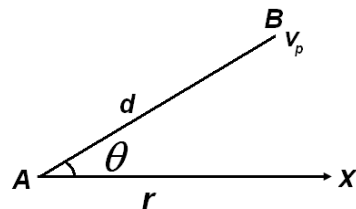
考生须知

题号	一	二	三	四	五	六	七--1	七--2	总分
得分									
阅卷									
复核									

- 1 考生考试前请认真阅读本须知。
- 2 本试题包括试题纸和答题纸两部分，其中试题纸从本页开始，共 3 张（6 页），含 7 道大题，（其中第七题包括 7-1 和 7-2 两部分），总分为 140 分，试题纸的每一页下面标出了该页的页码和试题纸的总页数，请认真核对每一页的页码和试题纸的总页数是否正确每一页是否有不清楚的地方，发现问题请及时与监考老师联系。
- 3 本试卷的第二部分为答题纸，紧接在试题纸的后面，共 10 张（20 页），请认真核对答题纸的每一页的页码和答题纸的总页数，请在标有对应题号的答题纸上解答相应的题目。
- 4 答题纸的密封线内，答题纸的背面和试题纸一律不能写解答，所写的解答一律无效。
- 5 试题纸与答题纸已经装订在一起，严禁拆开。
- 6 考生可以用发的草稿纸打草稿，但需要阅卷老师评阅的内容一定要写到答题纸上，阅卷老师只评阅答题纸上的内容，写在草稿纸上的内容一律无效。

-----以下为试题-----

一（18 分）、足球比赛，一攻方队员在图中的 A 处沿 AX 方向传球，球在草地上以速度 V 匀速滚动，守方有一队员在图中 B 处以 d 表示 A、B 间的距离，以 θ 表示 AB 与 AX 之间的夹角，已知 $\theta < 90^\circ$ ，设在球离开 A 处的同时，



位于 B 处的守方队员开始沿一直线在匀速运动中去抢球，以 V_p 表示他的速率，在不考虑场地边界限制的条件下，求解以下问题（要求用题中所给参量间的关系式表示所求得的结果）。

1. 求出守方队员可以抢到球的必要条件。
2. 如果攻方有一接球队员个处在 AX 线上等球，以 L_r 表示他到 A 点的距离，求球不被原在

B 处的守方队员抢断的条件。

3. 如果攻方有一接球队员个处在 AX 线上等球, 以 L 表示他到 A 点的距离, 在球离开 A 处的同时, 他开始匀速跑动去接球, 以 v_r 表示其速率, 求在这种情况下球不被原在 B 处的守方队员抢断的条件。

二 (25 分) 卫星的运动可有地面的观测来决定, 而知道了卫星的运动, 又可以用空间的飞行体或地面上物体的运动, 这都涉及到时间和空间坐标的测定, 为简化分析和计算, 不考虑地球的自转和公转, 把它作惯性系。

1. 先来考虑卫星的测定, 设不考虑相对论效应, 在卫星上装有发射电波的装置和高精度的原子钟。假设在卫星上每次发出的电波信号, 都包含该信号发出的时刻这一信息。

(1) 地面观测系统 (包含若干个观测站) 可利用从电波中接收到的这一信息, 并根据自己所处的已知位置和自己的时钟来确定卫星每一时刻的位置, 从而确定卫星的运动。这种测量系统至少需要包含几个地面观测站? 列出可以确定卫星位置的方程。

(2) 设有两个观测站 D_1, D_2 , 分别位于同一经线上的北纬 θ 度和南纬 θ 度处, 若它们同时收到时间 τ 之前卫星发出的电波信号。(a) 试求发出电波时刻卫星距地面的最大高度 H 。(b) 当 D_1, D_2 处观测站的位置的纬度都有很小的误差 $\Delta\theta$ 时, 试求的 H 误差。(3) 如果上述的时间 τ 有很小的误差 $\Delta\tau$, 试求的 H 误差。

2. 在上面的小题 (1) 中, 若 $\theta=45^\circ$, $\tau=0.10s$, (a) 试问卫星发射时刻卫星距地面的最大高度 H 是多少 km ? (b) 若 $\Delta\theta=\pm 1.0^\circ$, 定出的 H 有多大误差? (c) 若 $\Delta\tau=\pm 0.010 \mu s$, 定出的 H 有多大误差? 假设地球为半径 $R=6.38 \times 10^3 km$ 的球体, 光速 $c=2.998 \times 10^8 km$, 地面处的重力加速度 $g=9.81 m/s^2$ 。

3. 再来考虑根据参照卫星的运动来测定一个物体的运动。设不考虑相对论效应。假设从卫星持续发出的电波信号包含卫星运动状态的信息, 即每个信号发出的时刻及该时刻卫星的位置, 再假设被观测的物体上有一台卫星信号接收器 (设其上没有时钟), 从而可获知这些信息。为了利用这些信息来确定物体的运动状态, 即物体接收到卫星信号时物体当时所处的位置, 以及当时的时刻, 一般来说物体至少需要同时接收到几个卫星同时发来的信号电波? 列

出确定物体当时位置和当时时刻的方程。

4. 根据狭义相对论,运动的钟比静止的钟慢,钟在引力场中慢。现在来考虑在上述测量中相对论的这两种效应。已知天上卫星的钟与地面观测站的钟零点已对准,假设卫星在离地面 $h = 2.00 \times 10^4 m$ 的圆形轨道上运行,地球半径 R 、光速 c 和地球表面重力加速度 g 取小题 2 中给的值。

(1) 根据狭义相对论,试估算地上的钟经过 24 小时后,它的示数与卫星上的钟的示数差多少? 设在处理这一问题时可以把匀速直线运动的时钟走慢的公式用于匀速圆周运动。

(2) 根据广义相对论,钟在引力场中变慢的因子是 $(1 - \frac{2\phi}{c^2})^{1/2}$, ϕ 是钟所在位置的引力势(引力势能与所受引力作用的物体的质量之比,取无限远处引力势为 0) 的大小,试问地上的钟 24 小时后,卫星上的钟的示数与地面上的钟的示数差多少?

三.(15 分) 制冷机是通过外界对机器做功,把从低温吸取的热量连同外界对机器做功得到的能量一起送到高温处的机器。它能使低温处的温度降低,高温处的温度升高。已知当制冷机工作在绝对温度为 T_1 的高温处和绝对温度为 T_2 的低温处之间时,若制冷机从低温处吸取的热量为 Q ,外界对制冷机做的功为 W ,则有

$$\frac{Q}{W} \leq \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

式中等号对应于理论上的理想情况。

某制冷机在冬天作热泵使用(即取暖空调机),在室外温度为 $-5.00^\circ C$ 的情况下,使某房间内的温度保持在 $20.00^\circ C$ 。由于室内温度高于室外,故将有热量从室内传递到室外。本题只考虑传导方式的传热,它服从以下的规律:设一块导热层,其厚度为 l ,面积为 S ,两侧温度差的大小为 ΔT ,则单位时间内通过导热层由高温处传导到低温处的热量为

$$H = \kappa \frac{\Delta T}{l} S$$

其中 κ 为导热率,取决于导热层材料的性质。

1. 假设该房间向外散热是由面向室外的面积为 $S = 5.00 m^2$ 、厚度为 $l = 2.00 mm$ 的玻璃引起的,已知该玻璃的导热率为 $\kappa = 0.75 W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$,电费为每度 0.50 元,试求在理想情况下该热泵工作 12 小时需要多少度电?

2. 若将上述玻璃板换为“双层玻璃板”, 两层玻璃的厚度均为 2.00mm , 玻璃板之间夹有厚度为 $l_0 = 0.50\text{mm}$ 的空气层, 假设空气的导热率为 $\kappa = 0.025\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, 电费仍为每度 0.50 元, 若该热泵仍然工作 12 小时, 问这时的电费比上一问单层玻璃情形节省多少?

四. (25 分) 图 1 所示器件由相互紧密接触的金属层 M 薄绝缘层 I 和金属层 M 构成, 按照经典物理的观点, 在 I 层绝缘性能理想的情况下, 电子不可能从一个金属层穿过绝缘层到达另一个绝缘层。但是按照量子物理的原理, 在一定的条件下, 这种渡越是可能的。习惯上将这一过程称之为“隧穿”, 它是电子具有波动性的结果。隧穿是单个电子的过程, 是独立的事件。通过绝缘层转移的电荷量只能是电子电荷量 $-e$ ($e = 1.6 \times 10^{-19}\text{C}$) 的整数倍, 因此也称为“单电子隧穿”, MIM 器件也称为“隧穿结”, 或“单电子隧穿结”。

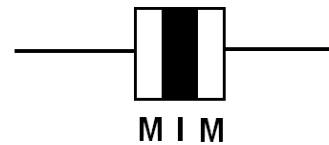


图1

本题涉及对单电子隧穿过程控制的库仑阻塞原理, 由于据此可望制成尺寸很小的单电子器件, 这是目前研究的很多、有应用前景的领域。

1. 显示库仑阻塞原理的最简单的做法是将图 1 的器件看成一个电容为 C 的电容器。如图 2 所示, 电容器极板上的电荷来源于金属极板上导电电子云相对于正电荷的背景的很小的位移, 可以连续变化。如前所述, 以隧穿方式通过绝缘层的只可能是分立的单电子电荷。如果隧穿过程会导致体系静电能上升, 则此过程不能

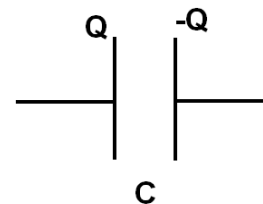


图2

发生, 这种现象称为库仑阻塞。试求出发生库仑阻塞的条件。即电容器极板间的电势差 $V_{AB} = V_A - V_B$ 在什么范围内单电子隧穿过程被禁止。

2. 假定 $V_{AB} = 0.10\text{mV}$, 是刚能发生的隧穿电压, 试估算电容 C 的大小,

3. 将图 1 的器件与电压为 V 的恒压源相接时, 通常采用图 3 所示的双结构器件来观察, 电子隧穿, 避免杂散电容的影响。中间的金属块层称为单电子岛。作为电极的左、右金属块层分别记为 S 、 D 。若已知岛中有净电荷量为 $-ne$, 其中净电子数 n 可为正、负整数或零, e 为电子电荷量大小, 两个 MIM 结的电容分别为 C_S 和 C_D , 试证明: 双结构器件的静电能中

与岛上净电荷量相关的静电能 (简称单电子岛静电能) 为

$$U_n = \frac{(-ne)^2}{2(C_S + C_D)}$$

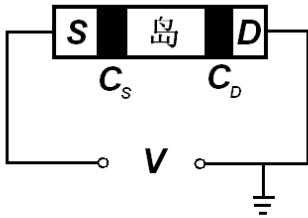


图3

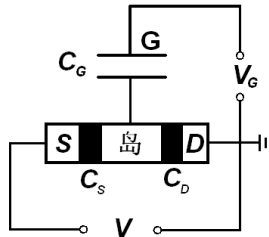


图4

4. 在图 3 给出的具有 S (源)、D (漏) 电极双结结构的基础上, 通过和岛连接的电容 C_G 添加门电极 G 构成如图 4 给出的单电子三极管结构, 门电极和岛间没有单电子隧穿事件发生。在 V 较小且固定的情况下, 通过门电压 V_G 可控制岛中的净电子数 n , 简单的模型是将 V_G 的作用视为在岛中附加的等效电荷 $q_0 = C_G V_G$, 这时单电子岛的静电能可近似为

$$U_n = \frac{(-ne + q_0)^2}{2C_\Sigma}$$

式中, $C_\Sigma = C_S + C_D + C_G$ 。

利用答卷纸上的方格图(图 5), 考虑库仑阻塞效应, 用粗线画出净电子数从 $n=0$ 开始, $C_G V_G / e$ 由 0 增大到 3 的过程中, 单电子岛的静电能 U_n 随 $C_G V_G$ 的变化的图线 (纵坐标表示 U_n , 取 U_n 的单位为 e^2 / C_Σ ; 横坐标表示 $C_G V_G$, 取 $C_G V_G$ 的单位为 e)。要求表出关键点的坐标, 并把 $n=0, 1, 2, 3$ 时 $C_G V_G / e$ 的变化范围填在答卷表格中。(此小题只按作图及所填表格(表 1)评分。)

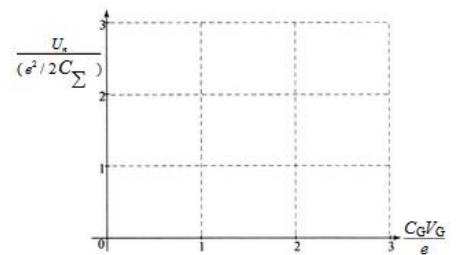
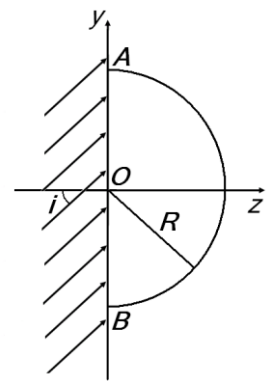


图 5

表 1

n	0	1	2	3
$C_G V_G / e$ 变化范围				

五. (15分) 折射率为 $n=1.50$ 、半径为 R 的透明半圆柱体放在空气中，其垂直于柱体轴线的横截面如图所示，图中 O 点为横截面与轴线的交点，光仅允许从半圆柱体的平面 AB 进入，一束足够宽的平行单色光沿垂直于圆柱轴的方向以入射角 i 射至 AB 整个平面上，其中有一部分入射光束能通过半圆柱体从圆柱面射出，这部分光束在入射到 AB 面上时沿 y 轴方向的长度用 d 表示。本题不考虑在光线在透明圆柱体内经一次或多次反射后再射出柱体的复杂情形。



1. 当平行入射光的入射角 i 从 0° 到 90° 变化时，试求 d 的最大值 d_{\max} 和最小值 d_{\min} .
2. 在如图所示的平面内，求出射光束与柱面相交的圆弧对 O 点张角 θ 与入射角 i 的关系，并求在掠入射时上述圆弧的位置。

六. (17分) 根据广义相对论，光线在星体的引力场中会发生弯曲，在包含引力中心的平面内是一条在引力中心附近微弯的曲线，它距离引力中心的最近的点，称为光线的近星点。通过近星点与引力中心的直线，是光线的对称轴。若在光线所在的平面内选择引力中心为平面极坐标 (r, ϕ) 的原点，选取光线的对称轴为极坐标轴，则光线方程（光子的轨迹方程）为

$$r = \frac{GM/c^2}{a \cos \phi + a^2(1 + \sin^2 \phi)}$$

G 是万有引力恒量， M 是星体质量， C 是光速， a 是绝对值远小于 1 的参数。现在假设离地球 80.0 光年处有一星体，在它与地球球心的连线的中点处有一白矮星。如果经过该白矮星两侧的星光对地球上的观察者所张的视角是 1.80×10^{-7} 弧度，试问此白矮星的质量是多少千克？已知 $G = 6.673 \times 10^{-11} \text{ m}^3 / (\text{kg} \cdot \text{s}^2)$

七

1. (11 分) 假设对氦原子基态采用玻尔模型, 认为每个电子都在以氦核为中心的圆周上运动, 半径相同, 角动量为 h , $h = \frac{h}{2\pi}$, 其中 h 是普朗克常数。

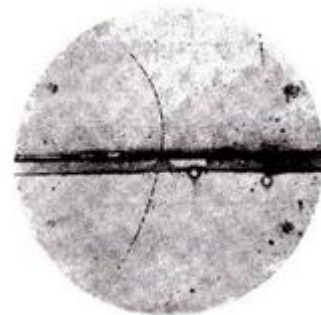
(1). 如果忽略电子间的相互作用, 氦原子的一级电离能是多少 eV ? 一级电离能是指把其中的一个电子移到无限远所需要的能量。

(2) 实验测得的氦原子的一级电离能是 $24.4eV$, 若在上述玻尔模型的基础上来考虑电子之间的相互作用, 进一步假设: 两个电子总通过氦核的一条直径的两端。试用此模型和假设, 求出电子运动轨道的半径 r_0 , 基态能量 E_0 以及一级电离能 E^+ 。并与实验测得的氦原子的一级电离能相比较。

已知电子质量 $m = 0.511MeV/c^2$, c 是光速, 组合常数 $hc = 197.3MeVfm = 197.3MeVnm$,

$ke^2 = 1.44MeVfm = 1.44MeVnm$, k 是静电力常量, e 是基本电荷。

2. (14 分) 右图是某粒子穿过云室留下的径迹的照片。径迹在直面内, 图的中间是一块与纸面垂直的铅板, 外加的恒定的匀强磁场的方向垂直于纸面向里, 假设粒子的电荷的大小是一个基本电荷量 e , $e = 1.60 \times 10^{-19}C$, 铅板下部径迹的曲率半径 $r_d = 210mm$, 铅板上部径迹的曲率半径 $r_u = 76.0mm$, 铅板内的径迹与铅板法线成 $\theta = 15.0^\circ$ 角。铅板厚度 $d = 6.00mm$, 磁感应强度 $B = 1.00T$, 粒子质量 $m = 9.11 \times 10^{-31}kg = 0.511MeV/c^2$, 不考虑云室中气体对粒子的阻力,



- (1) 写出粒子运动的方向和电荷的正负。
- (2) 试问粒子在穿过铅板期间所受的平均阻力是多少 N ?
- (3) 假设射向铅板的不是一个粒子而是从加速器中流出的流量为 $j = 5.00 \times 10^{18}/s$ 的脉冲粒子流, 一个脉冲持续时间为 $\tau = 2.50ns$, 试问铅板在此脉冲粒子束所受的力的平均值是多少 N ? 铅板在此期间吸收的热量又是多少 J ?

第 25 届全国中学生物理竞赛决赛参考解答

一、

1.解法一: 设守方队员经过时间 t 在 Ax 上的 C 点抢到球, 用 l 表示 A 与 C 之间的距离, l_p 表示 B 与 C 之间的距离 (如图 1 所示), 则有

$$l = vt, \quad l_p = v_p t \quad (1)$$

和
$$l_p^2 = d^2 + l^2 - 2dl \cos \theta. \quad (2)$$

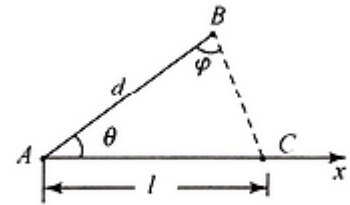


图 1

解式 (1), (2) 可得

$$l = \frac{d}{1 - (v_p/v)^2} \{ \cos \theta \pm [(\frac{v_p}{v})^2 - \sin^2 \theta]^{1/2} \}. \quad (3)$$

由式 (3) 可知, 球被抢到的必要条件是该式有实数解, 即

$$v_p \geq v \sin \theta. \quad (4)$$

解法二: 设 BA 与 BC 的夹角为 φ (如图 1). 按正弦定理有

$$\frac{l_p}{\sin \theta} = \frac{l}{\sin \varphi}.$$

利用式 (1) 有

$$\frac{v_p}{v} = \frac{\sin \theta}{\sin \varphi}.$$

从 $\sin \varphi \leq 1$ 可得必要条件 (4).

2. 用 l_{\min} 表示守方队员能抢断球的地方与 A 点间的最小距离. 由式 (3) 知

$$l_{\min} = \frac{d}{1 - (v_p/v)^2} \{ \cos \theta \pm [(\frac{v_p}{v})^2 - \sin^2 \theta]^{1/2} \}. \quad (5)$$

若攻方接球队员到 A 点的距离小于 l_{\min} , 则他将先控制球而不被守方队员抢断. 故球不被抢断的条件是

$$l_r < l_{\min} \quad (6)$$

由 (5), (6) 两式得

$$l_r < \frac{d}{1 - (v_p/v)^2} \{ \cos \theta \pm [(\frac{v_p}{v})^2 - \sin^2 \theta]^{1/2} \} \quad (7)$$

由式 (7) 可知, 若位于 Ax 轴上等球的攻方球员到 A 点的距离 l_r 满足该式, 则球不被原位于 B 处的守方球员抢断.

3.解法一: 如果在位于 B 处的守方球员到达 Ax 上距离 A 点 l_{\min} 的 C_1 点之前, 攻方接球队员能够到达距 A 点小于 l_{\min} 处, 球就不会被原位于 B 处

的守方队员抢断 (如图 2 所示). 若 $L \leq l_{\min}$ 就相当于第 2 小

题. 若 $L > l_{\min}$, 设攻方接球队员位于 Ax 方向上某点 E 处, 则

他跑到 C_1 点所需时间

$$t_{rm} = (L - l_{\min}) / v_r; \quad (8)$$

$$\text{守方队员到达 } C_1 \text{ 处所需时间 } t_{pm} = (d^2 + l_{\min}^2 - 2dl_{\min} \cos \theta)^{1/2} / v_p.$$

球不被守方抢断的条件是

$$t_{rm} < t_{pm}. \quad (9)$$

$$\text{即 } L < \frac{v_r}{v_p} (d^2 + l_{\min}^2 - 2dl_{\min} \cos \theta)^{1/2} + l_{\min}, \quad (10)$$

式中 l_{\min} 由式 (5) 给出.

解法二: 守方队员到达 C_1 点的时间和球到达该点的时间相同, 因此有

$$t_{pm} = l_{\min} / v.$$

从球不被守方队员抢断的条件 (9) 以及式 (8) 可得到

$$L < (1 + v_r / v) l_{\min} \quad (11)$$

式中 l_{\min} 也由式 (5) 给出. 易证明式 (11) 与 (10) 相同.

二、

1.(I) 选择一个坐标系来测定卫星的运动, 就是测定每一时刻卫星的位置坐标 x, y, z .

设卫星在 t 时刻发出的信号电波到达第 i 个地面站的时刻为 t_i . 因为卫星信号电波以光速 c 传播, 于是可以写出

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 = c^2(t - t_i)^2 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1)$$

式中 x_i, y_i, z_i 是第 i 个地面站的位置坐标, 可以预先测定, 是已知的; t_i 也可以由地

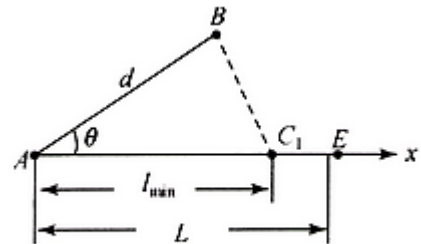


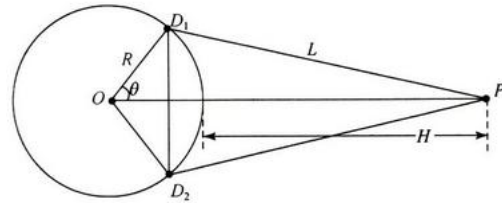
图 2

面站的时钟来测定; t 由卫星信号电波给出, 也是已知的. 所以, 方程 (1) 中有三个未知数 x, y, z , 要有三个互相独立的方程, 也就是说, 至少需要包含三个地面站, 三个方程对应于式 (1) 中 $i = 1, 2, 3$ 的情况.

(II) (i) 如图所示, 以地心 O 和两个观测站 D_1, D_2 的位置为顶点所构成的三角形是等腰三角形, 腰长为 R . 根据题意, 可知卫星发出信号电波时距离两个观测站的距离相等, 都是

$$L = c\tau. \quad (2)$$

当卫星 P 处于上述三角形所在的平面内时, 距离地面的高度最大, 即 H . 以 θ 表示 D_1, D_2



所处的纬度, 由余弦定理可知

$$L^2 = R^2 + (H + R)^2 - 2R(H + R)\cos\theta. \quad (3)$$

由 (2), (3) 两式得

$$H = \sqrt{(c\tau)^2 - (R\sin\theta)^2} - R(1 - \cos\theta). \quad (4)$$

式 (4) 也可据图直接写出.

(ii) 按题意, 如果纬度有很小的误差 $\Delta\theta$, 则由式 (3) 可知, 将引起 H 发生误差 ΔH . 这时有

$$L^2 = R^2 + (H + \Delta H + R)^2 - 2R(H + \Delta H + R)\cos(\theta + \Delta\theta). \quad (5)$$

将式 (5) 展开, 因 $\Delta\theta$ 很小, 从而 ΔH 也很小, 可略去高次项, 再与式 (3) 相减, 得

$$\Delta H = -\frac{R(R + H)\sin\theta\Delta\theta}{H + (1 - \cos\theta)R}, \quad (6)$$

其中 H 由 (4) 式给出.

(iii) 如果时间 τ 有 $\Delta\tau$ 的误差, 则 L 有误差

$$\Delta L = c\Delta\tau. \quad (7)$$

由式 (3) 可知, 这将引起 H 产生误差 ΔH . 这时有

$$(L + \Delta L)^2 = R^2 + (H + \Delta H + R)^2 - 2R(H + \Delta H + R)\cos\theta. \quad (8)$$

由式 (7), (8) 和 (3), 略去高次项, 可得

$$\Delta H = \frac{c^2\tau\Delta\tau}{H + R(1 - \cos\theta)}, \quad (9)$$

其中 H 由式 (4) 给出.

2. (i) 在式 (4) 中代入数据, 算得 $H = 2.8 \times 10^4 \text{ km}$. (ii) 在式 (6) 中代入数据, 算得 $\Delta H = \mp 25 \text{ m}$. (iii) 在式 (9) 中代入数据, 算得 $\Delta H = \pm 3.0 \text{ m}$.

3. 选择一个坐标系, 设被测物体待定位的坐标为 x, y, z , 待定时刻为 t , 第 i 个卫星在 t_i 时刻的坐标为 x_i, y_i, z_i . 卫星信号电波以光速传播, 可以写出

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 = c^2(t - t_i)^2 \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (10)$$

由于方程(1)有四个未知数 t, x, y, z , 需要四个独立方程才有确定的解, 故需同时接收至少四个不同卫星的信号. 确定当时物体的位置和该时刻所需要的是式(10)中 $i = 1, 2, 3, 4$ 所对应的四个独立方程.

4. (I) 由于卫星上钟的变慢因子为 $[1 - (v/c)^2]^{1/2}$, 地上的钟的示数 T 与卫星上的钟的示数 t 之差为

$$T - t = T - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} T = [1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}] T, \quad (11)$$

这里 v 是卫星相对地面的速度, 可由下列方程定出:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2}, \quad (12)$$

其中 G 是万有引力常量, M 是地球质量, r 是轨道半径. 式(11)给出

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{g}{r}} R = \sqrt{\frac{g}{R+h}} R,$$

其中 R 是地球半径, h 是卫星离地面的高度, $g = GM/R^2$ 是地面重力加速度; 代入数值有 $v = 3.89 \text{ km/s}$. 于是 $(v/c)^2 \approx 1.68 \times 10^{-10}$, 这是很小的数. 所以

$$\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2.$$

最后, 可以算出 $24h$ 的时差

$$T - t \approx \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 T = \frac{1}{2} \frac{gR^2}{c^2(R+h)} T = 7.3 \mu\text{s}. \quad (13)$$

(II) 卫星上的钟的示数 t 与无限远惯性系中的钟的示数 T_0 之差

$$t - T_0 = \sqrt{1 - 2\frac{\phi}{c^2}} T_0 - T_0 = \left(\sqrt{1 - 2\frac{\phi}{c^2}} - 1\right) T_0. \quad (14)$$

卫星上的钟所处的重力势能的大小为

$$\phi = \frac{GM}{R+h} = \frac{R^2}{R+h} g. \quad (15)$$

所以 $\frac{\phi}{c^2} = \frac{gR^2}{c^2(R+h)}$;

代入数值有 $\phi/c^2 = 1.68 \times 10^{-10}$, 这是很小的数. 式(14)近似为

$$t - T_0 \approx -\frac{\phi}{c^2} T_0. \quad (16)$$

类似地, 地面上的钟的示数 T 与无限远惯性系的钟的示数之差

$$T - T_0 = \sqrt{1 - 2\frac{\phi_E}{c^2}} T_0 - T_0 = (\sqrt{1 - 2\frac{\phi_E}{c^2}} - 1) T_0 \quad (17)$$

地面上的钟所处重力势能的大小为

$$\phi_E = \frac{GM}{R} = gR. \quad (18)$$

所以 $\frac{\phi_E}{c^2} = \frac{gR}{c^2};$

代入数值有 $\phi_E / c^2 = 6.96 \times 10^{-10}$, 这是很小的数. 与上面的情形类似, 式 (17) 近似为

$$T - T_0 \approx -\frac{\phi_E}{c^2} T_0. \quad (19)$$

(16), (19) 两式相减, 即得卫星上的钟的示数与地面上的钟的示数之差

$$t - T \approx -\frac{\phi - \phi_E}{c^2} T_0. \quad (20)$$

从式 (19) 中解出 T_0 , 并代入式 (20) 得

$$t - T \approx -\frac{\phi - \phi_E}{c^2} / (1 - \frac{\phi_E}{c^2}) T \approx -\frac{\phi - \phi_E}{c^2} T = \frac{gR}{c^2} \frac{h}{R+h} T. \quad (21)$$

注意, 题目中的 $24h$ 是指地面的钟走过的时间 T . 最后, 算出 $24h$ 卫星上的钟的示数与地面上的钟的示数之差

$$t - T = 46\mu s. \quad (22)$$

三、

1. 依题意, 为使室内温度保持不变, 热泵向室内放热的功率应与房间向室外散热的功率相等. 设热泵在室内放热的功率为 q , 需要消耗的电功率为 P , 则它从室外 (低温处) 吸收热量的功率为 $q - P$. 根据题意有

$$\frac{q - P}{P} \leq \frac{T_2}{T_1 - T_2}, \quad (1)$$

式中 T_1 为室内 (高温处) 的绝对温度, T_2 为室外的绝对温度. 由 (1) 式得

$$P \geq \frac{T_1 - T_2}{T_1} q. \quad (2)$$

显然, 为使电费最少, P 应取最小值; 即式 (2) 中的“ \geq ”号应取等号, 对应于理想情况下 P 最小. 故最小电功率

$$P_{\min} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} q. \quad (3)$$

又依题意, 房间由玻璃板通过热传导方式向外散热, 散热的功率

$$H = k \frac{T_1 - T_2}{l} S. \quad (4)$$

要保持室内温度恒定, 应有

$$q = H. \quad (5)$$

由 (3) ~ (5) 三式得

$$P_{\min} = k \frac{S (T_1 - T_2)^2}{l T_1}. \quad (6)$$

设热泵工作时间为 t , 每度电的电费为 c , 则热泵工作需花费的最少电费

$$C_{\min} = P_{\min} t c. \quad (7)$$

注意到 $T_1 = 20.00K + 273.15K = 293.15K$, $T_2 = -5.00K + 273.15K = 268.15K$,

1 度电 = $1kW \cdot h$. 由 (6), (7) 两式, 并代入有关数据得

$$C_{\min} = \frac{(T_1 - T_2)^2}{T_1 l} S k t c = 23.99 \text{ 元}. \quad (8)$$

所以, 在理想情况下, 该热泵工作 $12h$ 需约 24 元电费.

2. 设中间空气层内表面的温度为 T_i , 外表面的温度为 T_0 , 则单位时间内通过内层玻璃、

中间空气层和外层玻璃传导的热量分别为

$$H_1 = k \frac{T_1 - T_i}{l} S, \quad (9)$$

$$H_2 = k_0 \frac{T_i - T_0}{l_0} S, \quad (10)$$

$$H_3 = k \frac{T_0 - T_2}{l} S. \quad (11)$$

在稳定传热的情况下, 有

$$H_1 = H_2 = H_3. \quad (12)$$

由 (9) ~ (12) 四式得

$$k \frac{T_1 - T_i}{l} = k_0 \frac{T_i - T_0}{l_0} \text{ 和 } T_1 - T_i = T_0 - T_2. \quad (13)$$

$$T_i = \frac{l_0 k + l k_0}{l_0 k + 2l k_0} T_1 + \frac{l k_0}{l_0 k + 2l k_0} T_2. \quad (14)$$

将 (14) 式代入 (9) 式得

$$H_1 = \frac{k k_0}{l_0 k + 2l k_0} (T_1 - T_2) S. \quad (15)$$

要保持室内温度恒定, 应有 $q = H_1$. 由式 (3) 知, 在双层玻璃情况下热泵消耗的最小电功率

$$P'_{\min} = \frac{k k_0}{l_0 k + 2l k_0} \frac{(T_1 - T_2)^2}{T_1} S. \quad (16)$$

在理想情况下, 热泵工作时间 t 需要的电费

$$C'_{\min} = P'_{\min} t c; \quad (17)$$

代入有关数据得

$$C'_{\min} = 2.52 \text{ 元}. \quad (18)$$

所以, 改用所选的双层玻璃板后, 该热泵工作 12h 可以节约的电费

$$\Delta C_{\min} = C_{\min} - C'_{\min} = 21.47 \text{ 元}. \quad (19)$$

四、

1. 先假设由于隧穿效应, 单电子能从电容器的极板 A 隧穿到极板 B. 以 Q 表示单电子隧穿前极板 A 所带的电荷量, V_{AB} 表示两极板间的电压 (如题目中图 3 所示), 则有

$$V_{AB} = Q / C. \quad (1)$$

这时电容器储能

$$U = \frac{1}{2} C V_{AB}^2. \quad (2)$$

当单电子隧穿到极板 B 后, 极板 A 所带的电荷量为

$$Q' = Q + e, \quad (3)$$

式中 e 为电子电荷量的大小. 这时, 电容器两极板间的电压和电容器分别储能为

$$V'_{AB} = \frac{Q + e}{C}, \quad U' = \frac{1}{2} C V'^2_{AB}. \quad (4)$$

若发生库仑阻塞, 即隧穿过程被禁止, 则要求

$$U' - U > 0. \quad (5)$$

由 (1) ~ (5) 五式得

$$V_{AB} > -\frac{1}{2} \frac{e}{C}. \quad (6)$$

再假设单电子能从电容器的极板 B 隧穿到极板 A . 仍以 Q 表示单电子隧穿前极板 A 所带的电荷量, V_{AB} 表示两极板间的电压. 当单电子从极板 B 隧穿到极板 A 时, 极板 A 所带的电荷量为 $Q' = Q - e$. 经过类似的计算, 可得单电子从极板 B 到极板 A 的隧穿不能发生的条件是

$$V_{AB} < \frac{1}{2} \frac{e}{C}. \quad (7)$$

由 (6), (7) 两式知, 当电压 V_{AB} 在 $-e/2C \sim e/2C$ 之间时, 单电子隧穿受到库仑阻塞, 即库仑阻塞的条件为

$$-\frac{1}{2} \frac{e}{C} < V_{AB} < \frac{1}{2} \frac{e}{C}. \quad (8)$$

2. 依题意和式 (8) 可知, 恰好能发生隧穿时有

$$V_{AB} = \frac{1}{2} \frac{e}{C} = 0.10 \text{ mV}. \quad (9)$$

由式 (9), 并代入有关数据得

$$C = 8.0 \times 10^{-16} \text{ F}. \quad (10)$$

3. 设题目中图 3 中左边的 MIM 结的电容为 C_S , 右边的 MIM 结的电容为 C_D . 双结结构体系如图 a 所示, 以 Q_1 , Q_2 分别表示电容 C_S , C_D 所带的电荷量. 根据题意, 中间单电子岛上的电荷量为

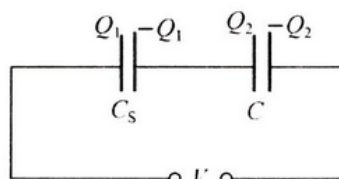


图 a

$$-ne = Q_2 - Q_1. \quad (11)$$

体系的静电能为 C_S 和 C_D 中静电能的总和, 即

$$U = \frac{Q_1^2}{2C_S} + \frac{Q_2^2}{2C_D}; \quad (12)$$

电压

$$V = \frac{Q_1}{C_S} + \frac{Q_2}{C_D}. \quad (13)$$

由 (11) ~ (13) 三式解得

$$U = \frac{1}{2}CV^2 + \frac{(Q_2 - Q_1)}{2(C_S + C_D)}. \quad (14)$$

由于 V 为恒量, 从式 (13) 可知体系的静电能中与岛上净电荷相关的静电能 $U_n = (-ne)^2 / 2(C_S + C_D)$.

4. U_n 随 $C_G V_G$ 变化的图线如图 b; $C_G V_G / e$ 的变化范围如表 2.

表 2

n	0	1	2	3
$C_G V_G / e$ 的变化范围	0~0.5	0.5~1.5	1.5~2.5	2.5~3.0

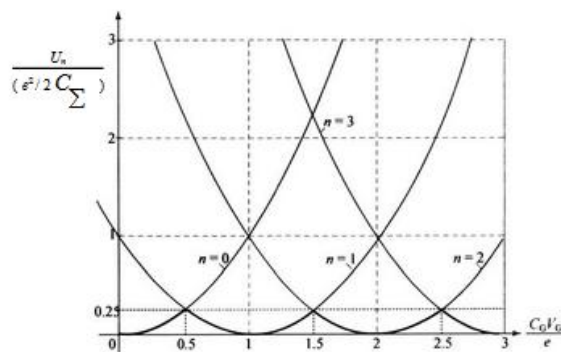


图 b

五、

1. 在图 1 中, z 轴垂直于 AB 面. 考察平行光束中两条光线分别在 AB 面上 C 与 C' 点以入射角 i 射入透明圆柱时的情况, r 为折射角, 在圆柱体中两折射光线分别射达圆柱面的 D 和 D' , 对圆柱面其入射角分别为 i_2 与 i_2' . 在 $\triangle OCD$ 中, O 点与入射点 C 的

距离 y_c 由正弦定理得

$$\frac{y_c}{\sin i_2} = \frac{R}{\sin(90^\circ + r)}, \quad \text{即 } y_c = \frac{\sin i_2}{\cos r} R. \quad (1)$$

同理在 $\triangle OC'D'$ 中, O 点与入射点 C' 的距离有

$$\frac{y_c'}{\sin i_2'} = \frac{R}{\sin(90^\circ - r)}, \quad \text{即 } y_c' = \frac{\sin i_2'}{\cos r} R. \quad (2)$$

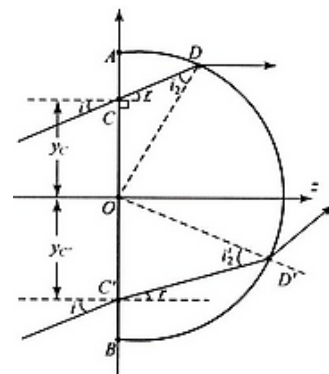


图 1

当改变入射角 i 时, 折射角 r 与柱面上的入射角 i_2 与 i'_2 亦随之变化. 在柱面上的入射角满足临界角

$$i_{20} = \arcsin(1/n) \approx 41.8^\circ \quad (3)$$

时, 发生全反射. 将 $i_2 = i'_2 = i_{20}$ 分别代入式 (1), (2) 得

$$y_{oc} = y_{oc}' = \frac{\sin i_{20}}{\cos r} R, \quad (4)$$

即
$$d = 2y_{oc} = 2 \frac{\sin i_{20}}{\cos r} R. \quad (5)$$

当 $y_c > y_{oc}$ 和 $y_c' > y_{oc}'$ 时, 入射光线进入柱体, 经过折射后射达柱面时的入射角大于临界角 i_{20} , 由于发生全反射不通射出柱体. 因折射角 r 随入射角 i 增大而增大. 由式(4)知, 当 $r = 0$, 即 $i = 0$ (垂直入射) 时, d 取最小值

$$d_{\min} = 2R \sin i_{20} = 1.33R. \quad (6)$$

当 $i \rightarrow 90^\circ$ (掠入射) 时, $r \rightarrow 41.8^\circ$. 将 $r = 41.8^\circ$ 代入式 (4) 得 $d_{\max} = 1.79R$. (7)

2. 由图 2 可见, φ 是 Oz 轴与线段 OD 的夹角, φ' 是 Oz 轴与线段 OD' 的夹角. 发生全反射时, 有

$$\varphi = i_{20} + r, \quad (8)$$

$$\varphi' = i_{20} - r, \quad (9)$$

和
$$\theta = \varphi + \varphi' = 2i_{20} \approx 83.6^\circ \quad (10)$$

由此可见, θ 与 i 无关, 即 θ 独立于 i . 在掠入射时, $i \approx 90^\circ$, $r = 41.8^\circ$, 由式 (8), (9) 两式得

$$\varphi = 83.6^\circ, \quad \varphi' = 0^\circ. \quad (11)$$

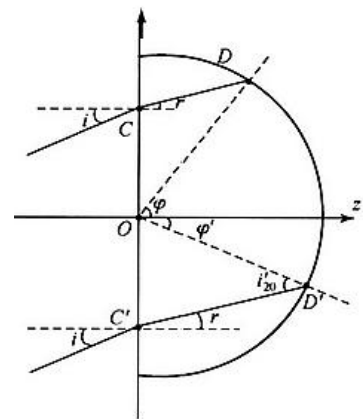


图 2

六、

由于方程

$$r = \frac{GM/c^2}{a \cos \varphi + a^2(1 + \sin^2 \varphi)} \quad (1)$$

是 φ 的偶函数, 光线关于极轴对称. 光线在坐标原点左侧的情形对应于 $a < 0$; 光线在坐标原点右侧的情形对应 $a > 0$. 右图是 $a < 0$ 的情形, 图中极轴为 Ox , 白矮星在原点 O 处. 在式(1)中代入近星点坐标 $r = r_m$, $\varphi = \pi$, 并注意到 $a^2 = |a|$, 有

$$a \approx -GM/c^2 r_m. \quad (2)$$

经过白矮星两侧的星光对观测者所张的视角 θ_s 可以有不同的表达方式, 相应的问题有不同的解法.

解法一: 若从白矮星到地球的距离为 d , 则可近似地写出

$$\theta_s \approx 2r_m / d. \quad (3)$$

在式(1)中代入观测者的坐标 $r = d$, $\varphi = -\pi/2$, 有

$$a^2 \approx GM/2c^2 d. \quad (4)$$

由(2)与(4)两式消去 a , 可以解出

$$r_m = \sqrt{2GMd/c^2}. \quad (5)$$

把式(5)代入式(3)得

$$\theta_s \approx \sqrt{8GNM/c^2 d}; \quad (6)$$

即
$$M \approx \theta_s^2 c^2 d / 8G, \quad (7)$$

其中 $d = 3.787 \times 10^{17} m$; 代入数值就可算出

$$M \approx 2.07 \times 10^{30} kg. \quad (8)$$

解法二: 光线射向无限远处的坐标可以写成

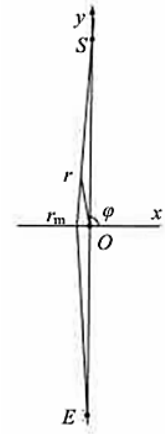
$$r \rightarrow \infty, \quad \varphi = -\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}. \quad (9)$$

近似地取 $\theta_s \approx \theta$, 把式(9)代入式(1), 要求式(1)分母为零, 并注意到 $\theta \ll 1$, 有

$$a\theta/2 + 2a^2 = 0.$$

所以
$$\theta_s \approx \theta = -4a = \sqrt{8GM/c^2 d}, \quad (10)$$

其中用到式(4), 并注意到 $a < 0$. 式(10)与式(6)相同, 从而也有式(8).



解法三: 星光对观测者所张的视角 θ_s 应等于两条光线在观测者处切线的夹角, 有

$$\sin \frac{\theta_s}{2} = \frac{\Delta (r \cos \varphi)}{\Delta r} = \cos \varphi - r \sin \varphi \frac{\Delta \varphi}{\Delta r}. \quad (11)$$

由光线方程 (1) 算出 $\Delta \varphi / \Delta r$, 有

$$\sin \frac{\theta_s}{2} = \cos \varphi - r \sin \varphi \frac{GM/c^2}{r^2 a \sin \varphi} = \cos \varphi - \frac{GM}{c^2 r a};$$

代入观测者的坐标 $r = d$, $\varphi = -\pi/2$ 以及 a 的表达式 (4), 并注意到 θ_s 很小, 就有

$$\theta_s \approx \frac{2GM}{c^2 d} \sqrt{\frac{2c^2 d}{GM}} = \sqrt{\frac{8GM}{c^2 d}},$$

与式 (6) 相同. 所以, 也得到了式 (8).

解法四: 用式 (2) 把方程 (1) 改写成

$$-r_m = r \cos \varphi - \frac{GM}{c^2 r_m r} [(r \cos \varphi)^2 + 2(r \sin \varphi)^2],$$

即
$$x = -r_m + \frac{GM}{c^2 r_m r} (x^2 + 2y^2). \quad (12)$$

当 $y \rightarrow \infty$ 时, 式 (12) 的渐近式为

$$x = -r_m - \frac{2GM}{c^2 r_m} y.$$

这是直线方程, 它在 x 轴上的截距为 $-r_m$, 斜率为

$$\frac{1}{-2GM/c^2 r_m} \approx \frac{1}{-\tan(\theta_s/2)} \approx -\frac{1}{\theta_s/2}.$$

于是有 $\theta_s \approx 4GM/c^2 r_m$. 用式 (5) 代入后, 得到式 (6), 从而也有式 (8).

七、

1. (I) 氦原子中有两个电子, 一级电离能 E^+ 是把其中一个电子移到无限远处所需要的能量满足 $He + E^+ \rightarrow He^+ + e^-$. 为了得到氦原子的一级电离能 E^+ , 需要求出一个电子电离以后氦离子体系的能量 E^* . 这是一个电子围绕氦核运动的体系, 下面给出两种解法.

解法一: 在力学方程

$$\frac{2ke^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

中, r 是轨道半径, v 是电子速度. 对基态, 用玻尔量子化条件 (角动量为 \hbar) 可以解出

$$r_0 = \hbar^2 / 2ke^2m. \quad (1)$$

于是氦离子能量

$$E^* = \frac{p_0^2}{2m} - \frac{2ke^2}{r_0} = -\frac{2k^2e^4m}{\hbar^2}, \quad (2)$$

其中 p_0 为基态电子动量的大小; 代入数值得

$$E^* = -\frac{2(ke^2)^2mc^2}{(\hbar c)^2} \approx -54.4eV. \quad (3)$$

由于不计电子间的相互作用, 氦原子基态的能量 E_0 是该值的 2 倍, 即

$$E_0 = 2E^* \approx -108.8eV. \quad (4)$$

氦离子能量 E^* 与氦原子基态能量 E_0 之差就是氦原子的一级电离能

$$E^+ = E^* - E_0 = -E^* \approx 54.4eV. \quad (5)$$

解法二: 氦离子能量

$$E^* = \frac{p^2}{2m} - \frac{2ke^2}{r}.$$

把基态的角动量关系 $rp = \hbar$ 代入, 式 (3) 可以改写成

$$E^* = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{2ke^2}{r} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{r} - \frac{2ke^2m}{\hbar^2} \right)^2 - \frac{2k^2e^4m}{\hbar^2}.$$

因基态的能量最小, 式 (4) 等号右边的第一项为零, 所以半径和能量

$$r_0 = \frac{\hbar^2}{2ke^2m}, \quad E^* = -\frac{2k^2e^4m}{\hbar^2}$$

分别与 (1), (2) 两式相同.

(II) 下面, 同样给出求氦原子基态能量 E_0 和半径 r_0 的两种解法.

解法一: 利用力学方程

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{2ke^2}{r^2} - \frac{ke^2}{(2r)^2} = \frac{7ke^2}{4r^2}$$

和基态量子化条件 $rmv = \hbar$, 可以解出半径

$$r_0 = \hbar^2 / 7ke^2m, \quad (6)$$

于是氦原子基态能量

$$E_0 = 2 \left(\frac{p_0^2}{2m} - \frac{2ke^2}{r_0} \right) + \frac{ke^2}{2r_0} = -\frac{49k^2e^4m}{16\hbar^2}; \quad (7)$$

代入数值算得

$$E_0 = -\frac{49(ke^2)^2 mc^2}{16(\hbar c)^2} \approx -83.4eV, \quad (8)$$

$$r_0 = \frac{4(\hbar c)^2}{7ke^2 mc^2} \approx 0.0302nm.$$

所以, 氢原子的一级电离能

$$E^+ = E^* - E_0 \approx 29.0eV. \quad (9)$$

这仍比实验测得的氢原子一级电离能 $24.6eV$ 高出 $4.4eV$.

解法二: 氢原子能量

$$E = 2\left(\frac{p^2}{2m} - \frac{2ke^2}{r}\right) + \frac{ke^2}{2r} = \frac{\hbar^2}{mr^2} - \frac{7ke^2}{2r}$$

可以化成

$$E = \frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{1}{r} - \frac{7ke^2 m}{4\hbar}\right)^2 - \frac{49k^2 e^4 m}{16\hbar}.$$

当上式等号右边第一项为零时, 能量最小. 由此可知, 基态能量与半径

$$E_0 = -\frac{49k^2 e^4 m}{16\hbar}, \quad r_0 = \frac{4\hbar}{7ke^2 m}$$

分别与 (7), (6) 两式相同

2. (I) 粒子从下部射向并穿过铅板向上运动, 其电荷为正.

(II) 如题图所示, 粒子的运动速度 v 与磁场方向垂直, 洛伦兹力在纸面内; 磁力不改变荷电粒子动量的大小, 只改变其方向. 若不考虑云室中气体对粒子的阻力, 荷电粒子在恒定磁场作用下的运动轨迹就是曲率半径为一定值的圆弧; 可以写出其运动方程

$$qBv = \left| \frac{\Delta p}{\Delta t} \right| = \frac{p\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{pv}{r}, \quad (1)$$

其中 q 是粒子电荷, v 是粒子速度的大小 p 是粒子动量的大小, $\Delta\phi$ 是粒子在 Δt 时间内转过的角度, r 是轨迹曲率半径. 于是有

$$p = qBr. \quad (2)$$

按题意, $q = e$. 用 p_d 和 p_u 分别表示粒子射入铅板和自铅板射出时动量的大小, 并在式 (1)

中代入有关数据, 可以算得

$$p_d = 63.0MeV/c, \quad p_u = 22.8MeV/c. \quad (3)$$

注意到当 $pc \sim mc^2$ 时应使用狭义相对论, 从

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \quad (4)$$

中可以得到

$$v = \frac{c}{\sqrt{1+(mc/p)^2}}. \quad (5)$$

用 v_d 和 v_u 分别表示粒子进入和离开铅板时的速度大小.把式 (2) 以及 $m = 0.511MeV/c^2$ 代入式 (3), 可得

$$v_d \approx c, \quad v_u \approx c. \quad (6)$$

于是, 粒子穿过铅板的平均速度 $\bar{v} = (1/2) (v_d + v_u) \approx c$. 用 Δt 表示粒子穿过铅板的时间, 则有

$$\bar{v} \cos \theta \Delta t = d. \quad (7)$$

再用 Δp_{du} 表示粒子穿过铅板动量改变量的大小, 铅板所受到的平均力的大小

$$f = \frac{\Delta p_{du}}{\Delta t} = \frac{p_d - p_u}{d / (\bar{v} \cos \theta)} \approx \frac{(p_d - p_u) c \cos \theta}{d}; \quad (8)$$

代入有关数值得

$$f \approx 1.04 \times 10^{-9} N. \quad (9)$$

(III) 一个粒子穿过铅板的时间

$$\Delta t = \frac{d}{\bar{v} \cos \theta} \approx \frac{d}{c \cos \theta} \approx 2.07 \times 10^{-11} s = 0.0207 ns, \quad (10)$$

比粒子束流的脉冲周期 $\tau = 2.50 ns$ 小得多. 铅板在此脉冲粒子束穿过期间所受的力的平均大小

$$F \approx (p_d - p_u) j; \quad (11)$$

代入数据得

$$F = 0.107 N. \quad (12)$$

运用式 (4), 可把粒子能量写成

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}, \quad (13)$$

所以粒子穿过铅板前后的能量分别为

$$E_d = \sqrt{p_d^2 c^2 + m^2 c^4} = 63.0 MeV, \quad E_u = \sqrt{p_u^2 c^2 + m^2 c^4} = 22.8 MeV. \quad (14)$$

于是, 铅板在脉冲粒子束穿过期间所吸收的热量

$$Q = (E_d - E_u) j \tau; \quad (15)$$

代入数据得

$$Q = 8.04 \times 10^{-2} J. \quad (16)$$