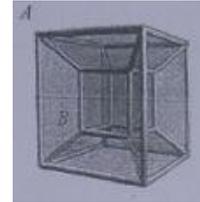


第 26 届全国物理竞赛决赛试题理论部分

一、填空题（每题 5 分，共 20 分）

1. 某光滑曲面由曲线 $y = f(x)$ 绕竖直 y 轴旋转一周形成，一自然半径为 a 、质量为 m 、劲度系数为 k 的弹性圆环置于该曲面之上，能水平静止于任意高度，则曲线方程为_____。

2. 如图所示的电阻框架为四维空间中的超立方体在三维空间中的投影模型（可视为内外两个立方体框架，对应顶点互相连接起来），若该结构中每条棱均由电阻 R 的材料构成，则 AB 节点间的等效电阻为_____。



3. 某种蜜蜂的眼睛能够看到平均波长为 $500nm$ 的光，它是由 5000 个小眼构成的复眼，小眼一个个密集排放在眼睛的整个表面上，小眼构造很精巧，顶部有一个透光的圆形集光装置，叫角膜镜；下面连着圆锥形的透明晶体，使得外部入射的光线汇聚到圆锥顶点连接的感光细胞上（入射进入一个小眼的光线不会透过锥壁进入其他小眼），从而造成一个“影像点”（像素）；所有小眼的影像点就拼成了一个完整的像。若将复眼看作球面圆锥，球面半径 $r = 1.5mm$ ，则蜜蜂小眼角膜镜的最佳直径 d 约为（请给出两位有效数字）_____。

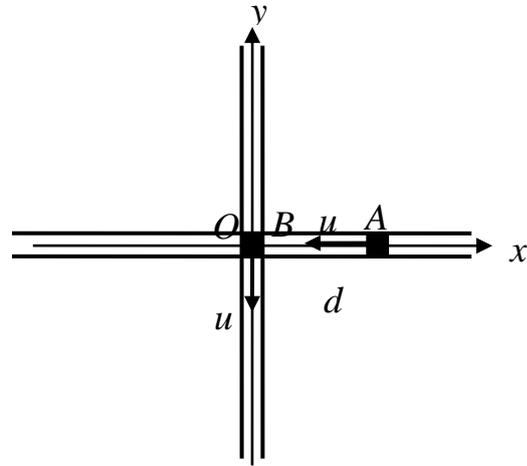
4. 开路电压 U_0 与短路电流 I_{sc} 是半导体 p-n 结光电池的两个重要技术指标，试给出两者之间的关系表达式： $U_0 =$ _____，式中各符号代表的物理量分别为_____。

二、（15 分）天体或微观系统的运动可借助计算机动态模拟软件直观显示。这涉及几何尺寸的按比例缩放。为使显示的运动对缩放后的系统而言是实际可发生的，运动时间也应缩放。

1. 在牛顿力学框架中，设质点在力场 $F(r)$ 中作轨道运动，且有 $F(\alpha r) = \alpha^k F(r)$ ， k 为常数， r 为位矢。若几何尺寸按比率 α 缩放显示，确定运行时间的缩放率 β 。

2. 由此证明，行星绕太阳轨道运动周期的平方与轨道几何尺寸的立方成正比。

三、(20分) 在水平面上有两根垂直相交的内壁光滑的连通细管，管内放置两个质量均为 m 、电荷量均为 q 的同号带点质点 A 和 B。初始时，质点 A 至两管交点 O 的距离为 d ，质点 B 位于交点 O 处，速度相互垂直，方向如图所示，大小均为 $u_0 = \sqrt{\frac{kq^2}{md}}$ ， k 为静电力常量。求在以后的运动中，它们之间的最小距离。



四、(10分) 热机和热泵利用物质热力学循环实现相反功能：前者从高温处吸热，将部分热量转化为功对外输出，其余向低温处放出；后者依靠外界输入功，从低温处吸热，连同外界做功转化成的热量一起排向高温处，按热力学第二定律，无论热机还是热泵，若工作物质循环过程中只与温度为 T_1, T_2 的两个热源接触，则吸收的热量 Q_1, Q_2 满足不等式 $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0$ ，其中热量可正可负，分别表示从热源吸热与向热源放热。

原供暖设备原本以温度 T_0 的锅炉释放的热量向房间直接供暖，使室内温度保持恒温 T_1 ，高于户外温度 T_2 。为提高能源利用率，拟在利用原有能源的基础上采用上述机器改进供暖方案，与直接供暖相比，能耗下降的理论极限可达到多少？

五、(15分) 磁场会影响电子的运动，从而使存在磁场时的电流与电压之间的关系偏离我们熟悉的欧姆定律，本题研究的问题即为一例。

设 xoy 平面内有密度 (单位体积内的电子数) 为 n 的二维电子气。平面内沿 x 轴方向存在均匀电场 $\vec{E} = E\vec{i}$ (\vec{i} 为轴正方向的单位矢量)，垂直于平面的 z 轴方向存在匀强磁场，磁感应强度为 $\vec{B} = B\vec{k}$ (\vec{k} 为 z 轴正方向的单位矢量)。已知平面内的电子运动受到的散射阻力与速度 v 成正比，可等效地用一时间参量 τ 描述为 $-\frac{mv}{\tau}$ ， m 为电子质量，试求在稳态沿 x 和 y 方向的电流密度 (大小为垂直于电流方向单位长度的电流) j_x 和 j_y ，将结果用电子电荷量绝对值 e 、 n 、 m 、 E 、 τ 及 ω 表示出， $\omega = \frac{eB}{m}$ 。

六、(25分)如图 A 所示的两块平行薄板，由理想导体构成，板间距为 d ， y 方向无限延伸。

两板间沿垂直于 y 方向传播的电磁波沿 x 正方向以行波形式传播，其电场可表述为：

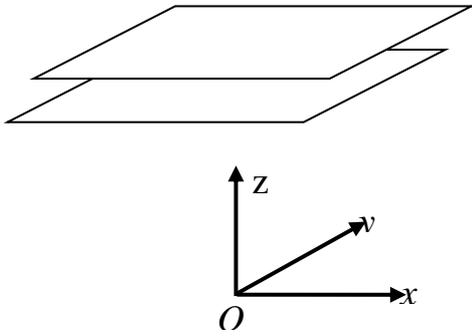


图 A

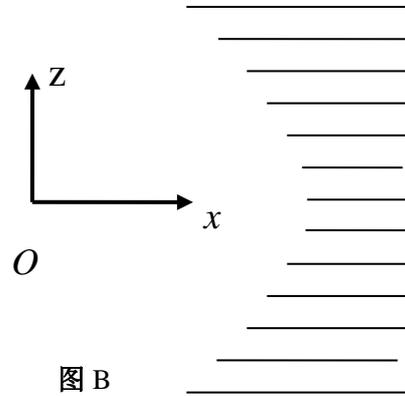


图 B

$$E = E_0 \sin\left(\frac{2\pi z}{\lambda_z}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda_x} - \omega t\right)$$

式中 ω 为圆频率， t 为时间， λ_z, λ_x 为待定参量，这种结构的组合可以制成实用的微波发射天线，用来代替传统的巨大抛物面天线，可以大幅度降低天线成本。

1. 证明 λ_z 只能取如下值： $\lambda_z = \frac{2d}{m}, m = 1, 2, 3, \dots$

2. 当 $m=1$ 时，求 λ_z 。

3. 如将一系列板间距相等而长度不等的理想导体相对于沿 y 方向无限延伸的线状波源（与纸面交与 O 点）平行对称叠排，板的右端对齐，面板的长度有一定的分布（此结构与与纸面相交的截面图如图 B 所示），则在这一结构的右端可输出沿 x 方向传播的平面电磁波。试给出满足这一要求的板堆在 xoz 截面内左侧边缘（如图 b 所示）所满足的曲线方程。（取 $m=1$ ，已知波源到板堆左端的水平距离为 L ）。

七、(35分) 1.在经典的氢原子模型中，电子围绕原子核做圆周运动，电子的向心力来自于核电场的作用。可是，经典的电磁理论表明电子做加速运动会发射电磁波，其发射功率可表示为（拉莫尔公式）： $P = \frac{e^2 a^2}{6\pi c^3 \epsilon_0}$ ，其中 a 为电子的加速度， c 为真空光速， $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k}$

$= 8.854 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$ ，电子电荷量绝对值 $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ 。若不考虑相对论效应，试估计在经典模型中氢原子的寿命 τ 。（实验测得氢原子的结合能是 $E_H = 13.6 \text{ eV}$ ，电子的静止质量

$m_0 = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ）

2.带点粒子加速后发射的电磁波也有重要的应用价值。当代科学研究中应用广泛的同步辐射即是由以接近光速运动的电子在磁场中作曲线运动改变运动方向时所产生的电磁辐射，电子存储环是同步辐射光源装置的核心，存储环中的电子束团通过偏转磁铁等装置产生高性能的同步辐射光。上海光源是近年来建成的第三代同步辐射光源，它的部分工作参数如下：环内电子能量 $E = 3.50 \text{ GeV}$ ，电子束团流强 $I = 300 \text{ mA}$ ，周长 $L = 432 \text{ m}$ ，单元数（装有偏转磁铁的弯道数量） $N = 20$ ，偏转磁铁磁场的磁感应强度 $B = 1.27 \text{ T}$ 。试计算该设备平均每个光口的辐射总功率 P_0 。

（在电子接近光速时，若动量不变，牛顿第二定律仍然成立，但拉莫尔公式不再适用，相应的公式变化为 $P = \frac{e^2 a^2}{6\pi c^3 \epsilon_0} \times \gamma^4$ ，其中 $\gamma = \frac{E}{m_0 c^2}$ ， E 为电子总能量， $m_0 c^2$ 为电子的静止能量。）

3.由于存储环内的电子的速度接近光速，所以同步辐射是一个沿电子轨道的切线方向的光锥，光锥的半顶角为 $\frac{1}{\gamma}$ ，由此可见电子的能量越高，方向性越好。试计算：上述设备在辐射方向上某点接受到的单个电子产生的辐射持续时间 ΔT 。

（本题结果均请以三位有效数字表示。）

第 26 届全国物理竞赛决赛试题及参考解答

一. 1 参考答案: $y = C - \frac{2\pi^2}{mg}(x-a)^2$ (C 为任意常数)。

一. 2 参考答案: $\frac{7}{12}R$

一. 3 参考答案: $30\mu m$

一. 4 参考答案: $U_0 = \frac{kT}{e} \ln\left(\frac{I_{SC}}{I_S} + 1\right)$, 式中 e 为电子电量的绝对值, k 为波尔兹曼常量, T

为绝对温度, I_S 为 p-n 结的反向饱和电流。

评分标准: 本题共 20 分。

第 1、2 题每题填对均得 5 分, 第 3 题只要答案在 $27-30\mu m$ 之间即得 5 分, 否则 0 分。第 4 题第一空格占 4 分, 第二空格占 1 分。

二 参考答案

1. 设位矢、时间缩放分别为 $r' = \alpha r, t' = \beta t$, 故速度、加速度满足关系

$$v' = \lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \frac{\Delta r'}{\Delta t'} = \frac{\alpha}{\beta} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\beta} v \quad (1)$$

$$a' = \lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \frac{\Delta v'}{\Delta t'} = \frac{\alpha}{\beta^2} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\beta^2} a \quad (2)$$

缩放前后质点均满足牛顿运动方程, 即

$$ma = F(r) \quad (3)$$

$$ma' = F(r') \quad (4)$$

利用 (2) 式及 $F(\alpha r) = \alpha^k F(r)$, (4) 式化简为

$$ma = \alpha^{k-1} \beta^2 F(r) \quad (5)$$

对照 (3) 式, 得

$$\beta = \alpha^{\frac{k-1}{2}} \quad (6)$$

2. 万有引力场中, 有 $k=2$, 设想轨道尺寸按

$$\alpha' = \alpha l \quad (7)$$

缩放, 则周期按

$$\tau' = \beta\tau = \alpha^{\frac{1}{2}}\tau \quad (8)$$

缩放, 故有

$$\frac{\tau'^2}{l'^3} = \frac{\tau^2}{l^3} \quad (9)$$

评分标准: 本题共 15 分

第一小题占 10 分, 正确得出 (6) 式得 10 分, 其中正确得出 (5) 式得 5 分。

第二小题占 5 分。正确得出 (9) 式得 5 分。

三 参考答案:

两质点的相对位矢为 $\vec{r} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$, 记其单位矢量为 $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$ 。由于质点约束在管内运动, 所受合力必定沿运动方向, 即静电力沿运动方向的分力, 两质点运动方程

$$\begin{cases} m\vec{a}_A = -\frac{kq^2}{r^2}(\vec{e}_r \cdot \vec{i})\vec{i} \\ m\vec{a}_B = \frac{kq^2}{r^2}(\vec{e}_r \cdot \vec{j})\vec{j} \end{cases} \quad (1)$$

相减可得

$$m\vec{a} = \frac{kq^2}{r^2}\vec{e}_r \quad (2)$$

其中 $\vec{a} = \vec{a}_B - \vec{a}_A$ 为 B 相对于 A 的加速度。(2) 式表明, B 相对于 A 的运动即力心固定之库仑势场中质点的 m 运动, 其电势能为:

$$U = \frac{kq^2}{r^2} \quad (3)$$

中心力场中运动质点的角动量、能量守恒。此处角动量与能量均应为 B 相对 A 的运动的值, 可由初始条件定出:

$$L = |-m\vec{d}\vec{i} \times (-u_0\vec{j} + u_0\vec{i})| = md\sqrt{\frac{kq^2}{md}} \quad (4)$$

$$E = \frac{1}{2}m(-u_0\vec{j} + u_0\vec{i})^2 + \frac{kq^2}{d} = 2\frac{kq^2}{d} \quad (5)$$

所求量即近力心点到力心的距离 r_m , 该点速度 u_m 必与矢径 $r_m\vec{e}_r$ 垂直, 故有:

$$mr_mu_m = md\sqrt{\frac{kq^2}{md}} \quad (6)$$

$$\frac{1}{2}mrv_m^2 + \frac{kq^2}{r_m^2} = 2\frac{kq^2}{d} \quad (7)$$

从而解得

$$r = \frac{1+\sqrt{5}}{4}d \quad (8)$$

评分标准： 本题共 20 分

正确得出 (3) 式得 10 分；(4)、(5)、(6)、(7)与(8)各占 2 分。

四 参考答案：

为表述方便，以下热量均用绝对值表示。

可以采用热机热泵联合供暖方案：利用热机从锅炉吸收热量，转化为功；此功驱动热泵，从户外吸热，向室外放热。

热机的高温热源锅炉，低温热源可选室内或户外环境。以室外为例，设热机从锅炉吸热 Q_0 ，

向室外放热 Q_{10} ，则有

$$\frac{Q_0}{T_0} - \frac{Q_{10}}{T_0} \leq 0 \quad (1)$$

热泵的高、低温热源分别为室内、户外环境。设热泵从户外吸热 Q_2 ，向室外放热 Q_{12} ，则有

$$-\frac{Q_{12}}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} \leq 0 \quad (2)$$

通过热机、热泵联合工作，室内获得的总能量为

$$Q_1 = Q_{10} + Q_{12} \quad (3)$$

将 (1)、(2) 两式相加，得

$$\frac{Q_0}{T_0} + \frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1} \leq 0 \quad (4)$$

若热机以户外环境为低温热源，同理可得上式。

由能量守恒定律给出

$$Q_1 = Q_0 + Q_2 \quad (5)$$

直接供暖时，给室内供热 Q_1 ，锅炉所释放的热量为

$$Q_0' = Q_1 \quad (6)$$

联立(4)(5)两式，可得热机热泵供暖锅炉释放的热量为

$$Q_0 \geq \frac{T_0(T_1 - T_2)}{T_1(T_0 - T_2)} Q_1 \quad (7)$$

能耗下降率为

$$\frac{Q_0' - Q_0}{Q_0'} \leq \frac{T_2(T_0 - T_1)}{T_1(T_0 - T_2)} \quad (8)$$

理论极限为上式取等号。

本题共 10 分，其中(4)式占 4 分。

五 参考答案：

列出 x 和 y 方向的二维电子的牛顿方程如下：

$$ma_x = -eE - ev_y B - \frac{mv_x}{\tau} \quad (1)$$

$$ma_y = ev_x B - \frac{mv_y}{\tau} \quad (2)$$

在稳态，v 不随时间变化，电子无加速度， $a_x = a_y = 0$ 。因此由(2)式得

$$v_y = \omega \tau v_x \quad (3)$$

代入(1)式得
$$v_x = -\frac{e\tau E}{m(1 + \omega^2 \tau^2)} \quad (4)$$

根据定义
$$j_x = -nev_x \quad (5)$$

$$j_y = -nev_y \quad (6)$$

$$j_x = -\frac{ne^2 \tau E}{m(1 + \omega^2 \tau^2)}$$

$$j_y = -\frac{ne^2 \omega \tau^2 E}{m(1 + \omega^2 \tau^2)}$$

可见在垂直于电场的方向上也产生电流。

评分标准： 本题共 15 分

其中 (1) 式与 (2) 式各占 2 分, 其中 $a_x = a_y = 0$ 各占 2 分, (3) 式与 (4) 式各占 1 分;

(5) 式 (6) 式共占 3 分; (7) 式与 (8) 各占 1 分。

六 参考答案:

1. 已知两板间的电磁波的电场强度 E 为

$$E = E_0 \sin\left(\frac{2\pi z}{\lambda_z}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda_x} - \omega t\right) \quad (1)$$

由于是理想导体板, 当 $z=0$ 和 d 时应有 $E=0$ 。从而

$$\frac{2\pi d}{\lambda_z} = m\pi, \lambda_z = \frac{2d}{m}, m=1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

2. 对于 (1) 式描述的电磁波, 可以通过

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \quad (3)$$

表达为两列平面电磁波的叠加,

$$\begin{cases} E = E_1 + E_2 \\ E_1 = \frac{1}{2} E_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda_x} - \frac{2\pi z}{\lambda_z} - \omega t\right) \\ E_2 = \frac{1}{2} E_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda_x} + \frac{2\pi z}{\lambda_z} - \omega t - \pi\right) \end{cases} \quad (4)$$

式中两列电磁波的波长 λ_0 都可表达为

$$\left(\frac{1}{\lambda_0}\right)^2 = \left(\frac{1}{\lambda_x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_z}\right)^2 = \left(\frac{\omega}{2\pi c}\right)^2 \quad (5)$$

当 $m=1, \lambda_z = 2d,$

$$\lambda_x = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{2\pi c}\right)^2 - \left(\frac{1}{2d}\right)^2}} \quad (6)$$

3. 因此, x 方向的波速 v_x 为

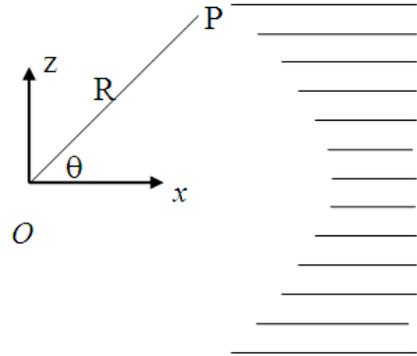
$$v_x = \left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \lambda_x = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\pi c}{\omega d}\right)^2}} \quad (7)$$

如图所示, 设板堆左端任一点 P 到波源的距离 $OP=R,$ OP 与水平线的交角为 θ 。要使得输出

为沿水平方向的平面波, 应满足, $L/c = \frac{R}{c} + \frac{L - R \cos \theta}{v_x}$ (8)

由此可得,

$$R = L \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\pi c}{\omega d} \right)^2} \right) \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\pi c}{\omega d} \right)^2} \cos \theta \right) \quad (9)$$



评分标准: 本题共 25 分

第一小题 5 分, 第二小题 10 分, 第三小题 10 分;

其中 (2) 式占 5 分, (5) 式占 6 分, (6) 式占 4 分;

(8) 式占 6 分。

七 参考解答:

1: 由方程

$$F = ma \quad (1)$$

$$a = \frac{v^2}{r} \quad (2)$$

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \quad (3)$$

可推导出电子的总能量为 $U = \frac{-e^2}{8\pi\epsilon_0 r_0} \quad (4)$

由条件 $E_H = -13.6eV$ 推导出氢原子的轨道半径和运动速度分别为:

$$r_0 = 5.29 \times 10^{-11} m \quad (5)$$

$$v_0 = 2.19 \times 10^6 m/s \quad (6)$$

由拉莫尔公式得初始发射功率

$$P = \frac{e^2 a^2}{6\pi c^3 \epsilon_0} = \frac{e^6}{96\pi^3 c^3 \epsilon_0^3 m^2 r_0^4} \quad (7)$$

在微小的时间间隔 Δt 中, 辐射使电子的总能量 U 减少

$$\Delta U = -P \Delta t \quad (8)$$

$$U = \frac{-e^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r - \Delta r} - \frac{1}{r} \right) = \frac{-e^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} \Delta r \quad (9)$$

其中 Δr 为电子轨道半径的减少量，由此可导出时间和半径 r 的变化方程：

$$\Delta t = \frac{12\pi^2 c^3 \varepsilon_0^2 m^2 r_0^2}{e^4} \Delta r = A \times 4\pi r^2 \Delta r, \quad (10)$$

其中 $A = \frac{3\pi c^3 \varepsilon_0^2 m^2}{e^4}$ 。

构造一个半径为 r_0 的球体，则 $4\pi r^2 \Delta r$ 即为距离球心为 r 的薄球壳的体积，在 r_0 到 0 的求和过程中可以算出球的体积为 $\frac{4}{3}\pi r_0^3$ 。对应本题情况解出电子轨道从 r_0 减少到 0 所需的时间为

$$\tau = \sum \Delta t = \frac{4\pi^2 c^3 \varepsilon_0^2 m^2 r_0^3}{e^4} \quad (11)$$

代入数据，得：

$$\tau = 1.56 \times 10^{-11} \text{ s} \quad (12)$$

2:

对于高能电子有 $v = c$ (1)

$$E = mc^2 \quad (2)$$

$$a = \frac{v^2}{r} \quad (3)$$

$$F = eBc \quad (4)$$

$$F = ma \quad (5)$$

以上条件可以得出电子的偏转半径： $R = \frac{E}{ecB}$ (6)

储存环中的电子数量： $n = \frac{Q}{e} = \frac{I\Delta t}{e}$ (7)

其中 Δt 为电子旋转一圈所花费的时间。由 (3) 式及辐射条件可得每个电子每圈损失的总能量为（电子在直道上不辐射能量）：

$$E_{neu} = \frac{e^2 a^2 \gamma^4}{6\pi c^3 \varepsilon_0} \times \frac{2\pi R}{c} = \frac{e^2 \gamma^4}{3\varepsilon_0 R} \quad (8)$$

由 (7) (8) 得到存储环中的电子消耗的总功率为：

$$P_{total} = \frac{nE_{neu}}{\Delta t} = \frac{Ie\gamma^4}{3\varepsilon_0 R} = 4.34 \times 10^5 \text{ W} \quad (9)$$

出光口的功率为： $P_0 = \frac{P_{total}}{N} = 2.17 \times 10^4 \text{ W}$ (10)

3: 在电子轨道上某点的切线方向上的某一点 P 处观察, 观察者只能在一个很短时间间隔内看到电子发出的辐射, 这段时间是电子地速度方向改变圆锥顶角 (即 $\frac{2}{\gamma}$) 的角度所对应的光到达接受位置的时间间隔。在这段时间内电子移动的距离为

$$x = \frac{2R}{\gamma} \quad (1)$$

令 $\beta = v/c$, 则电子在这两点发出的辐射时间间隔为:

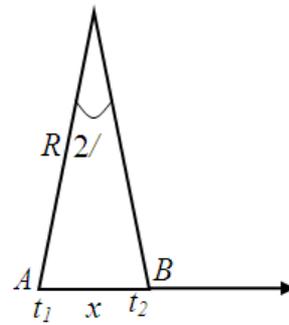
$$t_2 - t_1 = \frac{2R}{\gamma c} \quad (2)$$

但在轨道的切线方向上观察, 上述时间还要扣除 A 点发射出的光到达 B 点位置所花费的时间

$$t' = \frac{2R}{\gamma c}, \quad (3)$$

则 $\Delta T = t_2 - t_1 - t'$ (4)

又 $\gamma = \frac{mc^2}{m_0c^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ (5)



由 $1-\beta \rightarrow 0$ 可得 $\frac{2}{\beta}(1-\beta) = \frac{1}{\gamma^2}$ (6)

代入 (4) 式得到 $\Delta T = \frac{R}{c\gamma^3}$ (7)

代入数据得: $\Delta T = 9.51 \times 10^{-20} s$ (8)

评分标准:

本题共 35 分

第 1 小题 10 分, 其中 (4) (5) 式各占 1 分。

第 2 小题 12 分, 其中 (6) 式与 (7) 式各占 1 分, (8) 式占 6 分。

第 3 小题 13 分, 其中 (4) 式占 5 分。

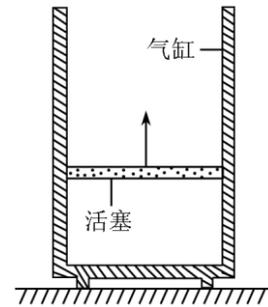
第 27 届全国中学生物理竞赛决赛试题

一、(25 分) 填空题

1. 一个粗细均匀的细圆环形橡皮圈，其质量为 M ，劲度系数为 k ，无形变时半径为 R 。现将它用力抛向空中，忽略重力的影响，设稳定时其形状仍然保持为圆形，且在平动的同时以角速度 ω 绕通过圆心垂直于圆面的轴线匀速旋转，这时它的半径应为_____。

2. 鸽哨的频率是 f 。如果鸽子飞行的最大速度是 u ，由于多普勒效应，观察者可能观测到的频率范围是从_____到_____。(设声速为 V 。)

3. 如图所示，在一个质量为 M 、内部横截面积为 A 的竖直放置的绝热气缸中，用活塞封闭了一定量温度为 T_0 的理想气体。活塞也是绝热的，活塞质量以及活塞和气缸之间的摩擦力都可忽略不计。已知大气压强为 p_0 ，重力加速度为 g ，现将活塞缓慢上提，当活塞到达气缸开口处时，气缸刚好离开地面。已知理想气体在缓慢变化的绝热过程中 pV^γ 保持不变，其中 p 是气体的压强， V 是气体的体积， γ 是一常数。根据以上所述，可求得活塞到达气缸开口处时气体的温度为_____。



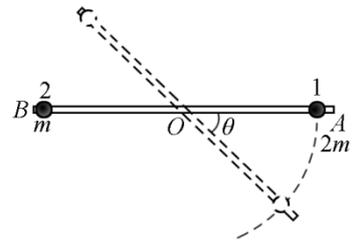
4. (本题答案保留两位有效数字) 在电子显微镜中，电子束取代了光束被用来“照射”被观测物。要想分辨 $1.0 \times 10^{-10} \text{ m}$ (即原子尺度) 的结构，则电子的物质波波长不能大于此尺度。据此推测电子的速度至少需被加速到_____。如果要想进一步分辨 $1.0 \times 10^{-12} \text{ m}$ 尺度的结构，则电子的速度至少需被加速到_____，且为使电子达到这一速度，所需的加速电压为_____。已知电子的静止质量 $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ，电子的电量 $e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ，普朗克常量 $h = 6.7 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ ，光速 $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 。

二、(20 分) 图示为一利用传输带输送货物的装置，物块(视为质点)自平台经斜面滑到一以恒定速度 v 运动的水平长传输带上，再由传输带输送到远处目的地，已知斜面高 $h = 2.0 \text{ m}$ ，水平边长 $L = 4.0 \text{ m}$ ，传输带宽 $d = 2.0 \text{ m}$ ，传输带的运动速度 $v = 3.0 \text{ m/s}$ 。物块与斜面间的摩擦系数 $\mu_1 = 0.30$ 。物块自斜面顶端下滑的初速度为零。沿斜面下滑的速度方向与传输带运动方向垂直。设斜面与传输带接触处为非常小的一段圆弧，使得物块通过斜面与传输带交界处时其速度的大小不变，重力加速度 $g = 10 \text{ m/s}^2$ 。

1. 为使物块滑到传输带上后不会从传输边缘脱离，物块与传输带之间的摩擦系数 μ_2 至少为多少？

2. 假设传输带由一带有稳速装置的直流电机驱动，与电机连接的电源的电动势 $E = 200\text{V}$ ，内阻可忽略；电机的内阻 $R = 10\Omega$ ，传输带空载（无输送货物）时工作电流 $I_0 = 2.0\text{A}$ ，求当货物的平均流量（单位时间内输送货物的质量），稳定在 $\eta = \frac{640}{9}\text{kg/s}$ 时，电机的平均工作电流等于多少？假设除了货物与传输带之间的摩擦损耗和电机的内阻热损耗外，其它部分的能量损耗与传输带上的货物量无关。

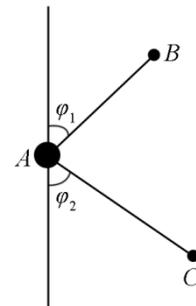
三、（20分）如图，刚性细轻杆（其质量可视为零）可绕通过其中的点 O 的光滑水平轴在竖直面内自由转动。两质量分别为 $2m$ 和 m 的小球 1 和 2（可视为质点）串在轻杆上，它们与轻杆之间的静摩擦系数为 $\mu = \frac{5\sqrt{3}}{6}$ 。开始时轻杆静止在水平位置，



小球 1 和 2 分别位于紧靠轻杆两端 A 和 B 的位置。现让系统自水平位置以零初速下摆，求

1. 小球 1 脱离轻杆时的位置（用小球 1 脱离杆时杆与水平线的夹角表示）；
2. 小球 2 脱离轻杆时的位置（用小球 2 脱离杆时杆与水平线的夹角表示）。

四、如图所示， A 、 B 、 C 为三个质点， A 的质量远远大于 B 、 C 的质量， B 和 C 的质量相等。已知 A 、 B 之间， A 、 C 之间存在相互吸引力。 B 、 C 之间存在相互排斥力，三个把质点在相互间引力或斥力的作用下运动，如果作用力合适，可以存在一种如下形式的运动：



A 、 B 、 C 的相对位置固定，它们构成一个平面，三个质点绕着位于这个平面内的某条轴匀速转动；因为质点 A 的质量远远大于 B 、 C 的

质量，可认为该轴过质点 A 且固定不动；连线 AB 与转轴的夹角 φ_1 与连线 AC 与转轴的夹角

φ_2 不相等，且 $0 < \varphi_1 < \frac{\pi}{2}$ ， $0 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}$ 。

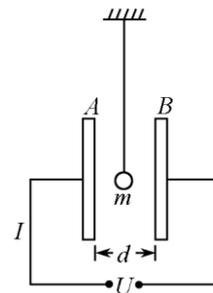
若 AB 之间吸引力的大小 $f_{AB} = k|AB|^a$ ， AC 之间吸引力的大小为 $f_a = k|AC|^a$ ，其中 $|AB|$ 、 $|AC|$ 分别为 A 、 B 与 A 、 C 之间的距离， k 为比例系数，不计重力的影响。试问 a 的值在什么范围内，上述运动才能实现？

五、(15分) 南极冰架崩裂形成一座巨型冰山，随洋流漂近一个城市。有人设计了一个利用这座冰山来发电的方案，具体过程为：(a) 先将环境中一定量的空气装入体积可变的容器，在保持压强不变的条件下通过与冰山接触容器内空气温度降至冰山温度；(b) 使容器脱离冰山，保持其体积不变，让容器中的冰空气从环境中吸收热量，使其温度升至环境温度；(c) 在保持容器体积不变的情况下让空气从容器中喷出，带动发电装置发电。如此重复，直至整座冰山融化。已知环境温度 $T_a = 293\text{K}$ ，冰山的温度为冰的熔点 $T_i = 273\text{K}$ ，可利用的冰山的质量 $m = 1.0 \times 10^{11} \text{ kg}$ ，为了估算可能获得的电能，设计者做出的假设和利用的数据如下：

1. 空气可视为理想气体。
2. 冰的熔解热 $L = 3.34 \times 10^5 \text{ J/kg}$ ；冰融化成温度为 T_i 的水之后即不再利用。
3. 压强为 p 、体积为 V 的空气内能 $U = 2.5pV$ 。
4. 容器与环境之间的热传导良好，可以保证喷气过程中容器中空气温度不变。
5. 喷气过程可分解为一连串小过程，每次喷出的气体的体积都是 u ，且 u 远小于容器的体积。在每个小过程中，喷管中的气体在内外压强差的作用下加速，从而获得一定动能 ΔE ，从喷嘴喷出。不考虑喷出气体在加速过程中体积的改变，并认为在喷气过程中容器内的气体压强仍是均匀的，外压强的大气压。
6. 假设可能获得的电能是 ΔE 总和的 45%
7. 当 $|x| \ll 1$ 时， $\ln(1+x) \approx x$ 。

试根据设计者的假设，计算利用这座冰山可以获得的电能。

六、(15分) 如图，两块大金属板 A 和 B 沿竖直方向平行放置，相距为 d ，两板间加有恒定电压 U ，一表面涂有金属膜的乒乓球垂吊在两板之间，其质量为 m 。轻推乒乓球，使之向其中一金属板运动，乒乓球与该板碰撞后返回，并与另一板碰撞，如此不断反复。假设乒乓球与两板的碰撞为非弹性碰撞，其恢复系数为 e ，乒乓球与金属板接触的时间极短，并在这段时间内达到静电平衡。达到静电平衡时，乒乓球所带的电荷量 q 与两极板间电势差的关系可表示为 $|q| = C_0 U$ ，其中 C_0 为一常量。同时假设乒乓球半径

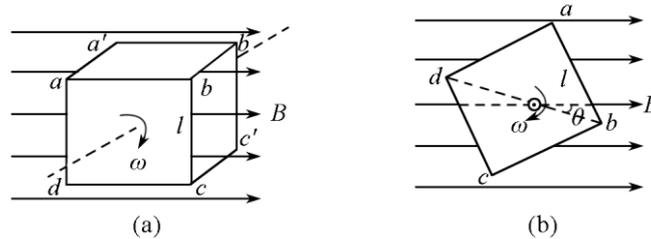


远小于两金属板间距 d ，乒乓球上的电荷不影响金属板上的电荷分布；连接乒乓球的绳子足够长，乒乓球的运动可近似为沿水平方向的直线运动；乒乓球第一次与金属板碰撞时的初动能可忽略，空气阻力可忽略。试求：

1. 乒乓球运动过程中可能获得的最大动能；
2. 经过足够长时间后，通过外电路的平均电流。

七、(20分)如图(a)所示,十二根均匀的导线杆联成一边长为 l 的刚性正方体,每根导线杆的电阻均为 R 。该正方体在匀强磁场中绕通过其中心且与 $abcd$ 面垂直的转动轴作匀速转动,角速度为 ω ,已知磁感应强度大小为 B ,方向与转动轴垂直。忽略电路的自感。当正方体转动到如图(b)所示位置(对角线 bd 与磁场方向夹角为 θ)时,求

1. 通过导线 ba 、 ad 、 bc 和 cd 的电流强度。
2. 为维持正方体作匀速转动所需的外力矩。

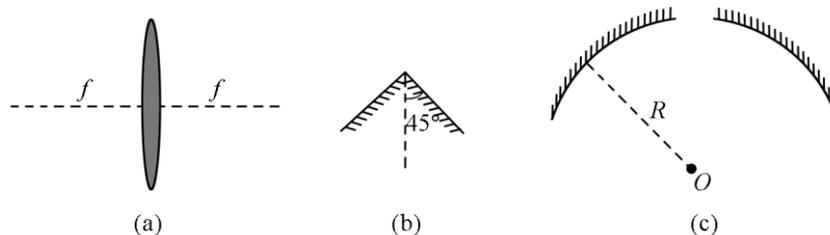


八、(10分)空心激光束是一种在传播方向上中心光强为零的圆筒形光束。由于这一特征,它可以把某些微小粒子约束在激光束的中心部位,作为激光导管,激光镊子、光学扳手等,实现对纳米粒子、生物细胞等微小粒子的精确操控。空心激光技术目前在生物学、激光加工、原子冷却等方面得到了广泛的应用,正逐渐成为一门新兴的学科分支。

产生空心激光束的基本做法是利用光学系统将一束实心的圆柱形激光转换成一束空心的激光。给定如下光学器件:焦距为 f 的凸透镜,圆锥角为 45° 的锥面反射镜,半径为 R 的球面镜(中间有圆孔),如图:

利用上述光学器件设计一光学系统,使得一束很细的实心圆柱入射激光转化成一束空心的出射激光,且空腔为圆柱形,半径为 r 。请回答如下问题:

1. 画出该光学系统的光路图。
2. 求该光学系统中锥面镜顶点到球面镜球心的距离 x 。



第 27 届全国中学生物理竞赛决赛试题答案

一、(25 分) 填空题

1. $\frac{4\pi^2 kR}{4\pi^2 k - M\omega^2}$ (6 分)

2. $\frac{fV}{V+u}$, $\frac{fV}{V-u}$ (4 分)

3. $T_0 \left(1 - \frac{Mg}{p_0 A}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$ (6 分)

4. $7.3 \times 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $2.8 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $8.4 \times 10^5 \text{ V}$ (9 分)

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4}$$

$$E_k = eV = E - m_e c^2$$

二、(20 分)

1. 令 m 表示物块的质量, 物块在斜面上滑动的加速度

$$a = \frac{mg \sin \theta - \mu_1 mg \cos \theta}{m} = g(\sin \theta - \mu_1 \cos \theta), \quad (1)$$

物块滑到斜面底端的速度

$$v_0 = \sqrt{\frac{2ah}{\sin \theta}} = \sqrt{2gh(1 - \mu_1 \cot \theta)} = 4.0 \text{ m/s} \quad (2)$$

以传输带为参照系, 物块滑到传输带的初速度大小

$$v'_0 = \sqrt{v_0^2 + V^2} = 5.0 \text{ m/s} \quad (3)$$

运动方向与传输带边缘的夹角 α 满足

$$\tan \alpha = \frac{4}{3} \quad (4)$$

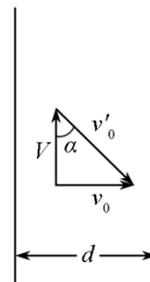
物块在传输带上作减速运动, 其加速大小为

$$a' = \frac{\mu_2 mg}{m} = \mu_2 g \quad (5)$$

当物块与传输带相对静止时在传输带上运动的距离

$$s' = \frac{v_0'^2}{2a} = \frac{v_0'^2}{2\mu_2 g}, \quad (6)$$

物块不超过传输带的边缘对应的最小摩擦系数 μ_2 应满足



$$s' \sin \alpha = \frac{v_0'^2 \sin \alpha}{2\mu_2 g} = d \quad (7)$$

因此可得

$$\mu_2 = \frac{v_0'^2 \sin \alpha}{2gd} = 0.5。 \quad (8)$$

2. 物块对传输带的摩擦力大小

$$F = \mu_2 \cdot \frac{\eta g}{\mu_2 g} v_0' = \eta v_0', \quad (9)$$

方向与 v_0' 的方向相同。从地面参照系来看, 传送带速度为 V , 单位时间内物块对传输带所做的功

$$W = -FV \cos \alpha, \quad (10)$$

因此负载所引起的附加功率

$$\Delta P = -W = \eta V^2 = 640W。 \quad (11)$$

考虑到无负载时电机的输出功率

$$P_0 = I_0 E - I_0^2 R = 360W。 \quad (12)$$

有负载时电机的输出功率为

$$P = P_0 + \Delta P = 1000W。 \quad (13)$$

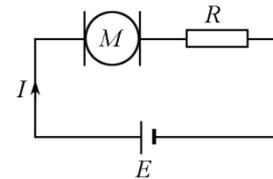
设有负载时的工作电流为 I , 则

$$P = IE - I^2 R, \quad (14)$$

解之得

$$I = 10A。 \quad (15)$$

评分标准: (2) 式 2 分, (3)、(4) 式共 2 分, (6) 式 2 分, (7) 式 3 分, (8) 式 1 分, (9) 式 4 分, (10) 式 2 分, (13) 式 2 分, (15) 式 2 分。



三、(20 分)

设轻杆的杆长为 $2l$, 当杆与水平线的夹角为 θ 时, 球 1 和球 2 的速度分别为 v_1 和 v_2 , 杆转动的角速度为 ω 。因机械能守恒, 有

$$0 = mgl \sin \theta - 2mgl \sin \theta + \frac{1}{2}(2m)v_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2。 \quad (1)$$

又因

$$v_1 = v_2 = l\omega, \quad (2)$$

可由 (1)、(2) 解得

$$\omega = \sqrt{\frac{2g \sin \theta}{3l}} \quad (3)$$

轻杆与两小球构成的系统对转轴的角动量

$$L = 2mlv_1 + mlv_2, \quad (4)$$

由角动量定律有

$$2mgl \cos \theta - mgl \cos \theta = \frac{\Delta L}{\Delta t}. \quad (5)$$

根据角加速度 β 的定义

$$\beta = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}, \quad (6)$$

由 (2)、(4)、(5)、(6) 各式得

$$\beta = \frac{g \cos \theta}{3l}. \quad (7)$$

当两球都未脱离轻杆时, 两球都绕转轴作圆周运动, 球 1 的切向加速度和法向加速度分别为

$$a_{t1} = l\beta \quad (8)$$

$$a_{n1} = l\omega \quad (9)$$

以 N_1 表示沿垂直于轻杆方向球 1 与杆的相互作用力的大小, 以 f_1 表示沿着轻杆方向球 1 与杆的相互作用力的大小, 根据牛顿第二定律, 有

$$2mg \cos \theta - N_1 = 2ma_{t1}, \quad (10)$$

$$f_1 - 2mg \sin \theta = 2ma_{n1} \quad (11)$$

由 (3)、(9)、(10)、(11) 各式得

$$N_1 = \frac{4}{3}mg \cos \theta. \quad (12)$$

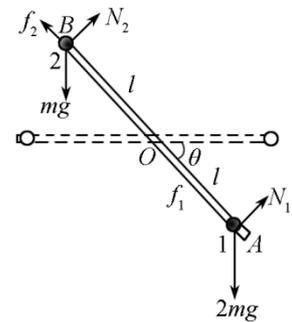
$$f_1 = \frac{10}{3}mg \sin \theta. \quad (13)$$

对 2 球作同样的分析, 沿垂直于轻杆方向球 2 与杆的相互作用力的大小 N_2 与沿着轻杆方向球 2 与杆的相互作用力的大小 f_2 分别为

$$N_2 = \frac{4}{3}mg \cos \theta, \quad (14)$$

$$f_2 = \frac{1}{3}mg \sin \theta. \quad (15)$$

由 (12)、(14) 式可知, 杆与小球 1、杆与小球 2 的最大静摩擦力相等, 而 (13)、(14) 式表明小球 1 与杆的摩擦力大于小球 2 与杆的摩擦力, 故在转动过程中, 小球 1 与杆之间的摩



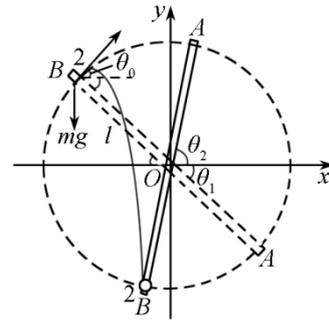
摩擦力先达到最大静摩擦力, 故小球 1 先滑动。设 1 球开始滑

动时, 细杆与水平线夹角为 θ_1 , 则 $f_1(\theta_1) = \mu N_1(\theta_1)$,

$$\text{即 } \frac{10}{3} mg \sin \theta_1 = \frac{3}{4} \mu mg \cos \theta_1, \quad (16)$$

由 (16) 式并代入数据得

$$\theta_1 = \frac{\pi}{6}. \quad (17)$$



当 $\theta = \theta_1$ 时, 球 1 开始向外滑动。由于球 1 的初始位置紧靠轻杆末端, 球 1 从开始滑动到脱离细杆的时间可忽略不计, 因此球 1 脱离细杆与水平线夹角也为 $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$ 。

球 1 一旦脱离轻杆, 因轻杆没有质量, 球 2 与轻杆间的相互作用立即消失, 此后球 2 只受重力作用而作斜舞女运动, 注意到 (2)、(3)、(7) 各式, 抛出时的初速度

$$v_0 = l \sqrt{\frac{2g \sin \theta_1}{3l}} = \sqrt{\frac{3gl}{3}}. \quad (18)$$

初速度的方向与水平线的夹角

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} - \theta_1 = \frac{\pi}{3}. \quad (19)$$

在球 2 作抛体运动的过程中, 球与轻杆间虽无相互作用, 但球仍套在杆上, 轻杆将跟着球运动, 但不会干扰小球的运动。当球离转轴的距离再次等于 l 时, 球 2 便脱离轻杆。建立如图所示的坐标系 Oxy , 根据斜抛运动规律可得任意 t 时刻 (取球 2 开始作抛体运动的时刻为计时起点) 球 2 的位置坐标

$$x = -l \cos \theta_1 + v_0 \cos \theta_0 t, \quad (20)$$

$$y = l \sin \theta_1 + v_0 \sin \theta_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \quad (21)$$

球 2 脱离细杆时有

$$l^2 = x^2 + y^2. \quad (22)$$

利用 (17)、(18)、(19) 各式得

$$t^2 \left(t^2 - 2 \sqrt{\frac{l}{g}} t - \frac{2l}{3g} \right) = 0, \quad (23)$$

从而解得

$$t = \left(1 + \frac{\sqrt{15}}{3} \right) \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (24)$$

此时

$$\begin{cases} x = -\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}{6}l \\ y = -\frac{2+\sqrt{15}}{6}l \end{cases} \quad (25)$$

设球 2 脱离细杆时细杆与水平线夹角也为 θ_2 (如图), 则

$$\cos \theta_2 = \frac{|x|}{l} = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}{6}, \quad (26)$$

$$\theta_2 = \arccos\left(\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}{6}\right) = 78.2^\circ \text{ (或 } 1.36 \text{ 弧度)}. \quad (27)$$

评分标准: (3) 式 2 分, (7) 式 3 分, (12) ~ (15) 式各 1 分, (16) 式 2 分, (17) 式 1 分, (18) 式 2 分, (19) 式 1 分, (20) ~ (22) 式各 1 分, (26)、(27) 式各 1 分。

四、(15 分)

解法 1:

以 m 表示质点 B 的质点, θ 表示连线 BC 与竖直方向的夹角, ω 表示转动角速度, f_{BC} 表示 BC 间排斥力的大小。根据牛顿定律有

$$f_{AB} \sin \varphi_1 - f_{BC} \sin \theta = m\omega^2 |AB| \sin \varphi_1, \quad (1)$$

$$f_{AB} \cos \varphi_1 - f_{BC} \cos \theta = 0, \quad (2)$$

$$f_{AC} \sin \varphi_2 + f_{BC} \sin \theta = m\omega^2 |AC| \sin \varphi_2, \quad (3)$$

$$f_{AC} \cos \varphi_2 - f_{BC} \cos \theta = 0. \quad (4)$$

由 (1)、(3) 两式并利用 (2)、(4) 两式可得

$$\frac{f_{AB} \sin(\varphi_1 - \theta)}{f_{AC} \sin(\varphi_2 + \theta)} = \frac{|AB| \sin \varphi_1}{|AC| \sin \varphi_2}. \quad (5)$$

考虑到几何关系

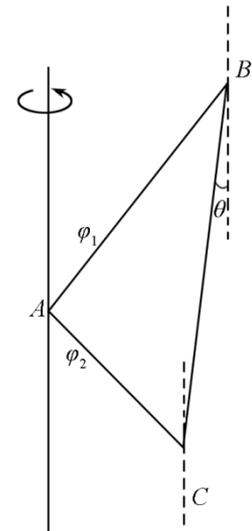
$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{\sin(\varphi_2 + \theta)}{\sin(\varphi_1 - \theta)} \quad (6)$$

并利用已知 f_{AB} 和 f_{BC} 的表示式。可由 (5) 得到

$$\left(\frac{|AB|}{|AC|}\right)^{a-2} = \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} \quad (7)$$

$$\text{又, 由 (2)、(4) 式可得 } \frac{f_{AB}}{f_{AC}} = \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_1}. \quad (8)$$

带入已知的 f_{AB} 和 f_{BC} 的表达式可得



$$\frac{f_{C1}}{f_{C2}} = \frac{EB}{FC} = \frac{r_1 \sin \varphi_1}{r_2 \sin \varphi_2}, \quad (5a)$$

$$\frac{CD}{BD} = \frac{AF}{AE} = \frac{r_2 \cos \varphi_2}{r_1 \cos \varphi_1}, \quad (6a)$$

将 (4a) ~ (6a) 代入 (3a) 得

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\alpha-1} = \frac{r_1 \sin \varphi_1}{r_2 \sin \varphi_2} = \frac{r_2 \cos \varphi_2}{r_1 \cos \varphi_1}. \quad (7a)$$

由 (7a) 得

$$\sin^\alpha \varphi_1 \cos^{\alpha-2} \varphi_1 = \sin^\alpha \varphi_2 \cos^{\alpha-2} \varphi_2. \quad (8a)$$

之后的讨论与“参考解答 1”相同。

评分标准: 考虑“参考解答 1”。

五、(15 分)

以 p_a 表示环境中大气的压强, 则初始时装入容器的空气的压强为 p_a , 温度为 T_a , 以 V_a 表示其体积。当容器与冰山接触, 达到平衡时, 容器中空气的温度为 T_1 , 体积减小为 V_0 , 根据题意, 空气经历的过程为等压过程, 故有

$$\frac{V_0}{T_1} = \frac{V_a}{T_a} \quad (1)$$

在这一过程中, 容器中空气内能的增加量为

$$\Delta U = 2.5 p_a (V_0 - V_a), \quad (2)$$

大气所考察空气做功为

$$W = -p_a (V_0 - V_a) \quad (3)$$

若以 Q 表示此过程中冰山传给容器中空气的热量, 根据热力学第一定律有

$$Q = \Delta U - W. \quad (4)$$

由以上四式得

$$Q = 3.5 p_a V_a \left(\frac{T_1 - T_a}{T_a} \right) \quad (5)$$

(5) 式给出的 Q 是负的, 表示在这一过程中, 实际上是容器中的空气把热量传给冰山。

容器中空气的温度降至冰山温度后, 又经一过等容升温过程, 即保持体积 V_0 不变, 温度从 T_1 升至环境温度 T_a , 并从周围环境吸热。若以 p_1 表示所考虑空气的压强, 则有

$$\frac{p_1}{T_a} = \frac{p_a}{T_1} \quad (6)$$

设喷管的体积为 u ，当喷管中的气体第一次被喷出时，容器中空气的压强由 p_1 降到 p_2 ；根据题目给出的条件，有

$$p_1(V_0 - u) = p_2V_0, \quad (7)$$

$$\text{即 } p_2 = p_1 \frac{V_0 - u}{V_0} \quad (8)$$

喷出气体获得的动能

$$\Delta E_{k1} = (p_1 - p_a)u. \quad (9)$$

当喷管中的空气第二次喷出后，容器中空气压强由 p_2 降到 p_3 ，根据题给出的条件可得

$$p_3 = p_2 \frac{V_0 - u}{V_0} \quad (10)$$

喷出气体获得的动能

$$\Delta E_{k2} = (p_2 - p_a)u. \quad (11)$$

当喷管中的空气第 N 次被喷出后，容器内空气的压强由 p_N 降到 p_{N+1} ，根据题给出的条件可得

$$p_{N+1} = p_N \frac{V_0 - u}{V_0} \quad (12)$$

喷出气体获得的动能

$$\Delta E_{kN} = (p_N - p_a)u. \quad (13)$$

如果经过 N 次喷射后，容器中空气的压强降到周围大气的压强，即

$$p_{N+1} = p_a, \quad (14)$$

这时喷气过程终止，在整过喷气过程中，喷出气体的总动能。

$$E_k = \Delta E_{k1} + \Delta E_{k2} + \cdots + \Delta E_{kN} \quad (15)$$

利用 (8) 到 (13) 式，(15) 式可化成

$$E_k = p_1 u \left[1 + \left(\frac{V_0 - u}{V_0} \right) + \left(\frac{V_0 - u}{V_0} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{V_0 - u}{V_0} \right)^{N-1} \right] - N p_a u, \quad (16)$$

(16) 式等号右边第 1 项方括号内是 N 项的等比级数，故有

$$E_k = p_1 u \frac{1 - \left(\frac{V_0 - u}{V_0} \right)^N}{1 - \frac{V_0 - u}{V_0}} - N p_a u. \quad (17)$$

又，根据 (8)、(10)、(12)、(14) 各式可得

$$p_1 \left(\frac{V_0 - u}{V_0} \right)^N = p_a, \quad (18)$$

对 (18) 式等式两边取自然对数得

$$N \ln \left(1 - \frac{u}{V_0} \right) = \ln \frac{p_a}{p_1}. \quad (19)$$

因 $u \ll V_0$, 可利用近似公式 $\ln(1+x) \approx x$ 把 (19) 进一步化简, 即

$$N = \frac{V_0 \ln \frac{p_1}{p_a}}{u} \quad (20)$$

进而由 (17)、(18)、(20) 三式得

$$E_k = (p_1 - p_a)V_0 - p_a V_0 \ln \frac{p_1}{p_a} \quad (21)$$

将 (1)、(6) 代入 (21) 式, 可得

$$E_k = p_a v_a \left(1 - \frac{T_1}{T_a} + \frac{T_1}{T_a} \ln \frac{T_1}{T_a} \right). \quad (22)$$

根据题意, 这些动能可转化成的电能为

$$E = 0.45 p_a v_a \left(1 - \frac{T_1}{T_a} + \frac{T_1}{T_a} \ln \frac{T_1}{T_a} \right). \quad (23)$$

以上讨论表明, 要获得电能 E , 冰山必须吸收 $-Q$ 的热量, 整座冰山化掉可吸收的总热量

$$Q_1 = mL. \quad (24)$$

因此可产生的总电量为

$$E_1 = \frac{mL}{-Q} E. \quad (25)$$

将 (5) 和 (23) 带入 (25) 式, 得

$$E_1 = \frac{9}{70} mL \frac{1 - \frac{T_1}{T_a} + \frac{T_1}{T_a} \ln \frac{T_1}{T_a}}{1 - \frac{T_1}{T_a}}, \quad (26)$$

代入数据后有

$$E_1 = 1.5 \times 10^{14} \text{ J} \quad (27)$$

评分标准: (5) 式 3 分, (7) 式 1 分, (9) 式 2 分, (17) 式 2 分, (18) 式 1 分, (22) 式 3 分, (25) ~ (27) 式各 1 分。

参考解答 2:

以 p_a 表示环境中大气的压强。设融化整座冰山可使 n 摩尔的空气参与如题所述的过程，且在过程 (a) 中体积和温度变化分别为 ΔV 和 $\Delta T = T_1 - T_a$ ，则在此过程中这部分气体放出的热量为

$$Q = -p_a \Delta V - \frac{5}{2} p_a \Delta V. \quad (1)$$

其中右边第一项表示大气对系统做的功，第二项表示系统内能的变化，考虑到物态方程，有

$$Q = \frac{7}{2} n R (T_a - T_1), \quad (2)$$

这部分热量等于冰山融化吸收的溶解热，故

$$Q = mL, \quad (3)$$

因此联立 (2)、(3) 可得

$$n = \frac{2mL}{7R(T_a - T_1)}. \quad (4)$$

在气体等容吸热的过程 (b) 中，设最后达到压强 p_0 ，体积达到 V_0 ，则易得

$$p_a = \frac{T_a p_a}{T_1}, \quad (5)$$

$$V_0 = \frac{nRT_a}{p_0} \quad (6)$$

再考虑喷气过程：因为等温，在每个喷气的小过程中过后，容器内的压强增量 Δp 满足

$$\frac{p + \Delta p}{p} = \frac{V_0 - u}{V_0}, \quad (7)$$

其中 V_0 为过程 (b) 中系统的体积， p 为这个喷气过程中容器内的压强，那么喷出的气体的动能

$$\Delta E = (p - p_a)u, \quad (8)$$

与 (7) 联立，消去 u ，得

$$\Delta E_k = -(p - p_a)V_0 \frac{\Delta p}{p}. \quad (9)$$

因此，做变换 $\Delta E \rightarrow dE$ ， $\Delta p \rightarrow dp$ ，总的动能则为

$$\begin{aligned} E_k &= \int_{p_0}^{p_a} -(p - p_a)V_0 \frac{dp}{p} \\ &= (p_0 - p_a)V_0 - p_a V_0 \ln \frac{p_0}{p_a} \end{aligned} \quad (10)$$

最后，据题意所获得的总的电能为

$$E = 0.45E_k, \quad (11)$$

将 (4)、(5)、(6)、(10) 代入 (11) 式, 得

$$E = \frac{9}{70} mL \frac{1 - \frac{T_1}{T_a} + \frac{T_1}{T_a} \ln \frac{T_1}{T_a}}{1 - \frac{T_1}{T_a}}; \quad (12)$$

代入数据后有

$$E = 1.5 \times 10^{14} \text{ J}. \quad (13)$$

评分标准: 参考“参考解答 1”的评分标准。

六、

1. 根据题意, 乒乓球与金属板第一次碰撞前其动能和速度分别为

$$E_{k1} = 0 \quad (1)$$

$$v_1 = 0 \quad (2)$$

刚碰后, 乒乓球带的电荷量

$$q = C_0 U \quad (3)$$

其动能和速度分别为

$$E'_{k1} = 0 \quad (4)$$

$$v'_1 = 0 \quad (5)$$

此后在电场力作用下乒乓球向另一金属板加速运动。当它到达另一金属板, 与金属板第二次碰撞前其动能为

$$E_{k2} = E'_{k2} + qU \quad (6)$$

注意到 (3)、(4) 式有

$$E_{k2} = C_0 U^2 \quad (7)$$

与金属板第二次碰撞前的速度为

$$v_2 = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} \quad (8)$$

第二次碰撞后的速度和动能分别

$$v'_2 = ev_2 \quad (9)$$

$$E'_{k2} = \frac{1}{2} m v'^2_2 \quad (10)$$

由 (9)、(10) 式得

$$E'_{k2} = e^2 E_{k2} \quad (11)$$

乒乓球与金属板第三次撞前动能为

$$E_{k2} = E'_{k2} + qU \quad (12)$$

由 (3)、(7)、(11)、(12) 式得

$$E_{k3} = (1 + e^2) C_0 U^2 \quad (15)$$

乒乓球与金属板第三次碰撞前速度

$$v_1 = \sqrt{\frac{2E_{k2}}{m}} \quad (16)$$

乒乓球与金属板第三次碰撞后的速度和动能分别为

$$v'_3 = ev_3 \quad (17)$$

$$E'_{k3} = e^3 E_{k3} \quad (18)$$

乒乓球与金属板四次碰撞前的动能

$$E_{k4} = E'_{k3} + qU \quad (19)$$

由 (3)、(15)、(18)、(19) 式得

$$E_{k4} = (1 + e^2 + e^4) C_0 U^2 \quad (20)$$

乒乓球与金属板第四次碰撞前速度为

$$v_4 = \sqrt{\frac{2E_{k4}}{m}} \quad (21)$$

乒乓球与金属板第四次碰撞后的速度和动能分别为

$$v'_4 = ev_4 \quad (22)$$

$$E'_{k4} = e^2 E_{k4} \quad (23)$$

以此类推，可得乒乓球与金属板第 n 次碰撞前、后的动能分别为

$$E_{kn} = [1 + e^2 + \dots + e^{2(n-2)}] C_0 U^2 \quad (24)$$

$$E'_{kn} = e^2 [1 + e^2 + \dots + e^{2(n-2)}] C_0 U^2 \quad (25)$$

即

$$E_{kn} = \frac{1 - e^{2(n-1)}}{1 - e^2} C_0 U^2 \quad (26)$$

$$E'_{kn} = \frac{e^2 [1 - e^{2(n-1)}]}{1 - e^2} C_0 U^2 \quad (27)$$

对非弹性碰撞， $e < 1$ ，可由以上两式看出 E_{kn} 和 E'_{kn} 均随碰撞次数单调递增。当 $n \rightarrow \infty$ 时有

$$E_k = \frac{1}{1 - e^2} C U^2 \quad (28)$$

$$E'_{k\infty} = \frac{e^2}{1-e^2} C_0 U^2 \quad (29)$$

乒乓球运动过程中达到的最大动能应与金属板碰撞前的极限动能, 即

$$E_{k\max} = E_{k\infty} = \frac{1}{1-e^2} C_0 U^2 \quad (30)$$

2. 经过足够长时间后亦即 $n \rightarrow \infty$ 时, 乒乓球在某一次与金属板碰撞后和下一次碰撞前的速度分别为

$$v'_{\infty} = \sqrt{\frac{2E'_{k\infty}}{m}} = eU \sqrt{\frac{2C_0}{(1-e^2)m}} \quad (31)$$

$$v_{\infty} = \sqrt{\frac{2E_{k\infty}}{m}} = U \sqrt{\frac{2C_0}{(1-e^2)m}} \quad (32)$$

此间时间间隔

$$T = \frac{d}{\frac{v'_{\infty} + v_{\infty}}{2}} \quad (33)$$

因此可得, 通过外电路的平均电流强度

$$I = \frac{q}{T} \quad (34)$$

由 (31)、(32)、(33)、(34) 各式得

$$I = \frac{C_0 U^2}{d} \sqrt{\frac{1+eC_0}{1-e2m}} \quad (35)$$

评分标准: (26)、(27) 式或 (28)、(29) 式共 8 分, (30) 式 2 分, (31) ~ (33) 式各 1 分, (35) 式 2 分。

七、

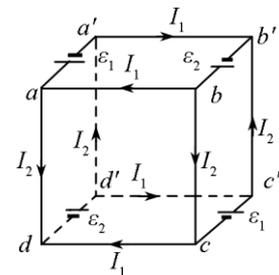
参考答案 1:

1. $a'a$ 和 cc' 中的感应电动势为

$$E_{a'a} = E_{c'c} = \varepsilon_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} Bl^2 \omega \sin \theta \quad (1)$$

$b'b$ 和 dd' 中的感应电动势为

$$\varepsilon_{b'b} = \varepsilon_{d'd} = \varepsilon_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} Bl^2 \omega \cos \theta \quad (2)$$



根据电路的对称性可知

$$I_{ba} = I_{a'b'} = I_{d'c'} = I_{cd} = I_1, \quad I_{ad} = I_{d'a'} = I_{c'b'} = I_{bc} = I_2 \quad (3)$$

根据基耳霍夫第一定律, 有

$$I_{aa'} = I_{c'c} = I_1 - I_2 \quad (4)$$

$$I_{b'b} = I_{dd'} = I_1 + I_2 \quad (5)$$

根据基耳霍夫第二定律, 有

$$I_1 R + I_{aa'} R + I_1 R_1 + I_{bb'} R = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \quad (6)$$

$$I_1 R + I_{dd'} R + I_2 R - I_{ad} R = \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \quad (7)$$

$$I_{bc} = I_{ad} = I_1 = \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{Bl^2 \omega}{R} (\cos \theta - \sin \theta) \quad (8)$$

$$I_{ad} = I_{bc} = I_2 = \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{Bl^2 \omega}{R} (\cos \theta + \sin \theta) \quad (9)$$

2. 当正方体转动到任意位置 (对角线 db 与磁场夹角为任意 θ) 时, 通过 $a'a$ 、 cc' 、 $b'b$ 、 dd' 的电流

$$I_{a'a} = I_{ad} - I_{ba} = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{Bl^2 \omega}{R} \sin \theta \quad (10)$$

$$I_{cc'} = I_{bc} - I_{cd} = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{Bl^2 \omega}{4} \sin \theta \quad (11)$$

$$I_{b'b} = I_{ba} + I_{bc} = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{Bl^2 \omega}{R} \cos \theta \quad (12)$$

$$I_{dd'} = I_{ad} + I_{cd} = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{Bl^2 \omega}{R} \cos \theta \quad (13)$$

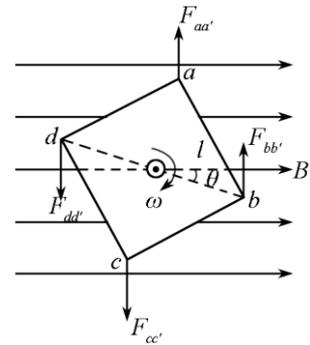
为维持正方体作匀速转动所需的外力矩等于磁场对电路作用的合力矩, 即

$$F_{a'a} = F_{c'c} = BlI_{a'a}, \quad F_{b'b} = F_{d'd} = BlI_{b'b} \quad (14)$$

$$M = 2F_{a'a} \frac{\sqrt{2}}{2} l \sin \theta + 2F_{b'b} \frac{\sqrt{2}}{2} l \cos \theta \quad (15)$$

将 (11) ~ (14) 代入 (15), 得

$$M = \frac{B^2 l^4 \omega}{2R} \quad (16)$$



评分标准: (1)、(2) 式共 2 分, (4)、(5) 式共 4 分, (6)、(7) 式共 4 分, (10) ~ (13) 式共 2 分, (14) 式 1 分, (15) 式 2 分, (16) 式 1 分。

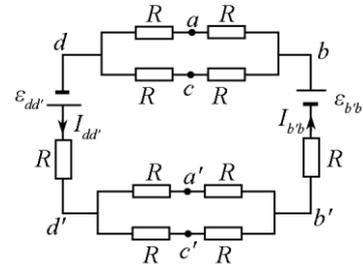
参考解答 2:

1. $a'a$ 和 cc' 中的感应电动势为

$$\varepsilon_{a'a} = \varepsilon_{cc'} = \frac{\sqrt{2}}{2} Bl^2 \omega \sin \theta \quad (1b)$$

$b'b$ 和 dd' 中的感应电动势为

$$\varepsilon_{b'b} = \varepsilon_{dd'} = \frac{\sqrt{2}}{2} Bl^2 \omega \cos \theta \quad (2b)$$



先计算 $\varepsilon_{b'b}$ 和 $\varepsilon_{dd'}$ 单独存在 ($\varepsilon_{a'a}$ 和 $\varepsilon_{cc'}$ 短路) 时流过各支路的电流。若将 $a'a$ 和 cc' 断开, 则等效电路如图所示, 则通过 $b'b$ 和 dd' 电流

$$I_{b'b}^{(1)} = I_{dd'}^{(1)} = \frac{\varepsilon_{b'b} + \varepsilon_{dd'}}{4R} = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{Bl^2 \omega}{R} \cos \theta \quad (3b)$$

通过 ba 、 ad 、 bc 和 cd 的电流强度

$$I_{ba}^{(1)} = I_{ad}^{(1)} = I_{bc}^{(1)} = I_{cd}^{(1)} = \frac{1}{2} I_{b'b}^{(1)} = \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{Bl^2 \omega}{R} \cos \theta \quad (4b)$$

根据电路的对称性, 此时 a' 、 a 之间, c 、 c' 之间的电势差

$$U_{a'a} = U_{cc'} = 0 \quad (5b)$$

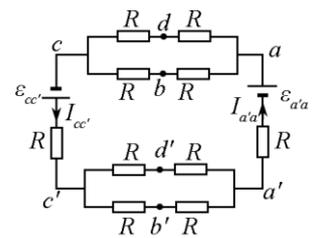
由此连接 $a'a$ 和 cc' 后流过 $a'a$ 和 cc' 的电流。

$$I_{aa'}^{(1)} = I_{cc'}^{(1)} = 0 \quad (6b)$$

因此连接 $a'a$ 和 cc' 不影响 ba 和 ad 中的电流。

再计算 $\varepsilon_{a'a}$ 和 $\varepsilon_{cc'}$ 单独存在 ($\varepsilon_{b'b}$ 和 $\varepsilon_{dd'}$ 短路) 时流过各支路的电流。若将 $b'b$ 和 dd' 断开, 等效短路时如图所示。采用与上述一样的方法, 可得 $\varepsilon_{a'a}$ 和 $\varepsilon_{cc'}$ 单独存在时流进 $a'a$ 和 cc' 电流

$$I_{a'a}^{(2)} = I_{cc'}^{(2)} = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{Bl\omega^2}{R} \sin \theta \quad (7b)$$



通过 ba 、 ad 、 bc 和 cd 的电流

$$I_{ba}^{(2)} = I_{cd}^{(2)} = -\frac{\sqrt{2}}{8} \frac{Bl\omega^2}{R} \sin \theta \quad (8b)$$

$$I_{ad}^{(2)} = I_{bc}^{(2)} = \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{Bl\omega^2}{R} \sin \theta \quad (9b)$$

此时 b' 、 b 之间和 d 、 d' 之间的电势差 $U_{b'b} = U_{dd'} = 0$, 由此连接 $b'b$ 和 dd' 后流过 $b'b$ 和 dd' 的电流

$$I_{b'b}^{(2)} = I_{dd'}^{(2)} = 0 \quad (10b)$$

因此连接 bb' 和 dd' 不影响各支路中的电流。

根据叠加原理， ba 、 ad 、 bc 和 cd 的电流强度：

$$I_{ba} = I_{ba}^{(1)} + I_{ba}^{(2)} = \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{Bl\omega^2}{R} (\cos\theta - \sin\theta) \quad (11b)$$

$$I_{ad} = I_{ad}^{(1)} + I_{ad}^{(2)} = \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{Bl\omega^2}{R} (\cos\theta + \sin\theta) \quad (12b)$$

$$I_{bc} = I_{bc}^{(1)} + I_{bc}^{(2)} = \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{Bl\omega^2}{R} (\cos\theta + \sin\theta) \quad (13b)$$

$$I_{cd} = I_{cd}^{(1)} + I_{cd}^{(2)} = \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{Bl\omega^2}{R} (\cos\theta - \sin\theta) \quad (14b)$$

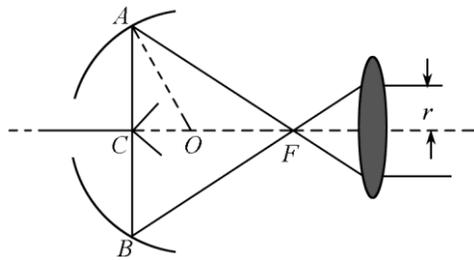
2. 与“参考解答 1”相同。

评分标准：参考“参考解答 1”的评分标准。

八、

参考解答：

1. 光路图如下，指出被球面镜反射的光线汇聚于凸透镜的焦点。



2. 参照所给光路图，可知 $CO = x$ ，设 $\angle CAO = \alpha$ ，有如下几何关系：

$$\sin\alpha = \frac{x}{R}, \quad (1)$$

$$r = f \cot(2\alpha) \quad (2)$$

两式联立，可求得

$$x = R \sin\left(\frac{1}{2} \arctan \frac{f}{r}\right). \quad (3)$$

评分标准：正确画出光路图 5 分，(3) 式 5 分。

第 28 届全国中学生物理竞赛决赛试题

一、(15 分) 在竖直面内将一半圆形光滑导轨固定在 A 、 B 两点，导轨直径 $AB=2R$ ， AB 与竖直方向间的夹角为 60° ；在导轨上套一质量为 m 的光滑小圆环，一劲度系数为 k 的轻而细的光滑弹性绳穿过圆环，其两端系与 A 、 B 两点，如图 28 决—1 所示。当圆环位于 A 点正下方 C 点时，弹性绳刚好为原长。现将圆环从 C 点无初速度释放，圆环在时刻 t 运动到 C' 点， $C'O$ 与半径 OB 的夹角为 θ ，重力加速度为 g 。试求分别对下述两种情形，求导轨对圆环的作用力的大小：(1)

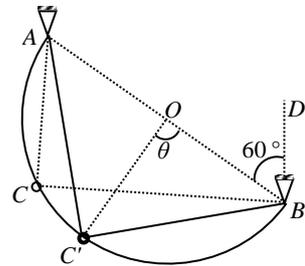


图 28 决—1

$\theta=90^\circ$ (2) $\theta=30^\circ$

二、(15 分) 如图 28 决—2 所示，在水平地面上有一质量为 M 、长度为 L 的小车，车内两端靠近底部处分别固定两个弹簧，两弹簧位于同一直线上，其原长分别为 l_1 和 l_2 ，劲度系数分别为 k_1 和 k_2 ；两弹簧的另一端分别放着一质量为 m_1 、 m_2 的小球，弹簧与小球都不相连。开始时，小球 1 压缩弹簧 1 并保持整个系统处于静止状态，小球 2 被锁定在车底板上，小球 2 与小车右端的距离等于弹簧 2 的原长。现无初速释放小球 1，当弹簧 1 的长度等于其原长时，立即解除对小球 2 的锁定；小球 1 与小球 2 碰撞后合为一体，碰撞时间极短。已知所有解除都是光滑的；从释放小球 1 到弹簧 2 达到最大压缩量时，小车移动距离 l_3 。试求开始时弹簧 1 的长度 l 和后来弹簧 2 所达到的最大压缩量 Δl_2 。

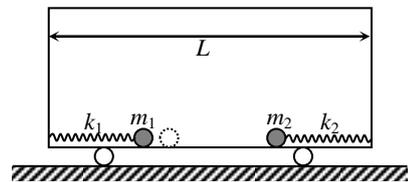


图 28 决—2

三、(20分)某空间站 A 绕地球作圆周运动, 轨道半径为 $r_A=6.73 \times 10^6 \text{m}$.

一人造地球卫星 B 在同一轨道平面内作圆周运动, 轨道半径为 $r_B=3r_A/2$, A 和 B 均沿逆时针方向运行。现从空间站上发射一飞船(对空间站无反冲)前去回收该卫星, 为了节省燃料, 除了短暂的加速或减速变轨过程外, 飞船在往返过程中均采用同样形状的逆时针椭圆转移轨道, 作无动力飞行。往返两过程的椭圆轨道均位于空间站

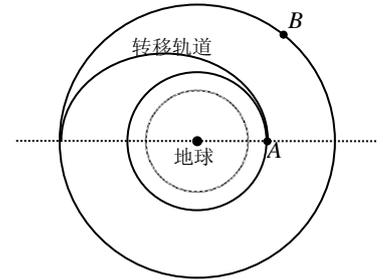


图 28 决—3

和卫星的圆轨道平面内, 且近地点和远地点都分别位于空间站和卫星的轨道上, 如图 28 决—3 所示。已知地球半径为 $R_e=6.38 \times 10^6 \text{m}$, 地球表面重力加速度为 $g=9.80 \text{m/s}^2$. 试求:

- (1) 飞船离开空间站 A 进入椭圆转移轨道所必须的速度增量 Δv_A , 若飞船在远地点恰好与卫星 B 相遇, 为了实现无相对运动的捕获, 飞船所需的速度增量 Δv_B .
- (2) 按上述方式回收卫星, 飞船从发射到返回空间站至少需要的时间, 空间站 A 至少需要绕地球转过的角度。

四、(15分)摩尔质量为 μ 的某种理想气体, 从左向右流过一个内壁光滑的长直水平绝热导管, 导管内横截面的面积为 S , 一摩尔绝对温度为 T 的该气体的内能为 $5RT/2$, 式中 R 为普适气体常量。

(1) 将一加热装置固定放置在管得中部, 以恒定功率 W 给气体加热, 如图 28 决—4 (a) 所示。假设该装置对气流的阻力可以忽略, 当气流稳定后, 管中气体虽然在加热装置附近的状态不均匀, 但随着与加热装置距离的增加而逐渐趋于均匀。在加热装置左边均匀稳流区域中, 气体的压强为 P_0 , 温度为 T_0 , 向右流动的速度为 v_0 . 已知加热装置右边均匀稳流区域中气体的压强为 P_1 , 试求该区域气体的温度 T_1 .

(2) 现将管中的加热装置换成一多空塞, 如图 28 决—4 (b) 所示。在气流稳定后, 多空塞左边气体的温度和压强分别为 T_0 和 P_0 , 向右流动的速度为 v_0 ; 多空塞右边气体的压强为 P_2 ($P_2 < P_0$). 假设气体在经过多空塞的过程中与多空塞没有任何形式的能量交换, 求多空塞右边气体的流速 v_2 .

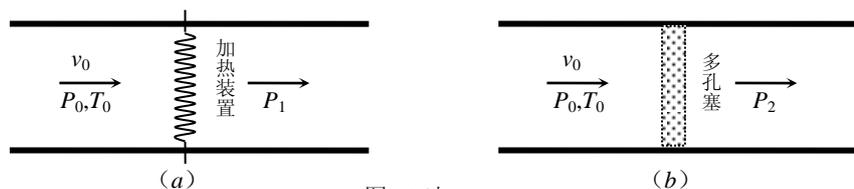
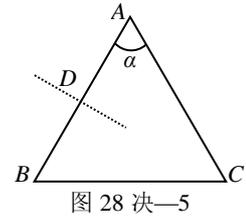


图 28 决—4

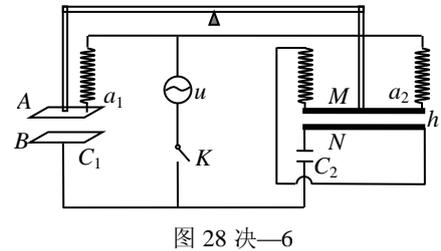
五、(15分)如图 28 决—5 所示，一个三棱镜 ABC 的顶角 α 小于 90° 。假设光线在纸面内以任意入射角入射到 AB 面上的 D 点，经一次折射后，又入射到 AC 面上，且能在 AC 面上发生全反射。已知光线在 AC 面上发生全反射的临界角为 θ ($\theta < 45^\circ$)， AC 边足够长。试求下列两种情形下分别求三棱镜顶角 α 的取值范围：



- (1) 如果光线仅从 AB 面上法线的下方入射；
- (2) 如果光线仅从 AB 面上法线的上方入射。

六、(20分)一电荷量为 q 的点电荷产生的电场在距离它为 r 处的电场强度的大小为 $E = k_e \frac{q}{r^2}$ ，式中 k_e 为常量；一条长直导线中通有电流 i 时，它产生的磁场在与导线相距为 r (远小于长直导线的长度) 处的磁感应强度的大小为 $B = k_m \frac{2i}{r}$ ，式中 k_m 也为常量。

上述两常量比值的平方根 $\sqrt{\frac{k_e}{k_m}}$ 可用如图 28 决—6 所示的实验装置，通过低频 (约几百赫兹) 的电场和磁场来测定。图中 A 、 B 表示水平放置的、电容为 C_1 的平行板电容器的极板，极板为正方形，边长为 a_1 (极板间距远小于 a_1)。极板 B 固定，极板 A 悬挂在天平臂一端的挂钩上， M 、 N 为两根水平放置的平行长直金属细杆，长度均为 a_2 ，两杆



间的距离为 h ($h \ll a_2$)。杆 N 固定，杆 M 悬挂于天平臂的另一挂钩上。 C_2 为一个已知电容器的电容， K 是电键。交流电源的电压 u 与时间 t 的关系为 $u = U_0 \cos 2\pi ft$ ，其中 f 表示交流电的频率。各部分通过导线如图链接。已知在电键 K 打开时，天平已调节至平衡。接通电源后，天平将失去平衡。通过调节交流电源的频率，可使天平重新达到平衡 (注意：天平具有惯性，实际上是交流电的平均效果使天平平衡)，试求 $\sqrt{\frac{k_e}{k_m}}$ 的表达式。【图中的双线可视为刚性绝缘杆，单线视为导线，曲线表示柔软无质量的导线。不考虑电场、磁场的边缘效应。不考虑导线磁场对 M 和 N 的影响。】

七、(20分)两个劲度系数均为 k 的相同的轻质金属弹簧，上端固定在水平绝缘横杆上，竖直下垂，下端与一质量为 m 的匀质刚性金属杆连接，金属杆的长度为 l ，杆长与两弹簧的间距相等。将金属杆置于磁感应强度为 B 的匀强磁场中，磁场方向垂直于纸面向内。杆、弹簧和交流电源 u 构成一闭合电路，金属杆和弹簧的电阻可忽略；且回路电流的磁场远弱于外磁场 B ，如图 28 决—7 (a) 所示。在图 28 决—7 (b) 中，一电感和一电容并联后接到同样地交流电源 u 上。若在图 28 决—7 所示的两回路中，在任何时刻，通过电源的电流都一样。试将图 (b) 中的电容 C 和电感 L 用图 (a) 中的装置的已知参量表示。

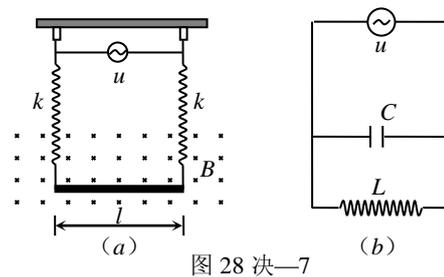


图 28 决—7

八、(20分)朱棣文等三位科学家因成功实现中性原子的磁光俘获而获得了 1997 年诺贝尔物理学奖。对以下问题的研究有助于理解磁光俘获的机理(注意：本问题所涉及的原子的物理特性参数,实际上都是在对大量原子或同一原子的多次同类过程进行平均的意义上加以理解的)。

(1) 已知处于基态的某静止原子对频率为 ν_0 的光子发生共振吸收，并跃迁到它的第一激发态，如图 28 决—8 (a) 所示。然而，由于热运动，原子都处于运动中。假设某原子一速度 ν_0 运动，现用一束激光迎头射向该原子，问恰能使该原子发生共振吸收的激光频率 ν 为多少？经过共振吸收，该原子的速率改变了多少？($h\nu_0 \ll mc^2$, m 是原子质量, $h=6.63 \times 10^{-34} \text{J}\cdot\text{s}$)

(2) 原子的共振吸收是瞬时的，但跃迁到激发态的原子一般不会立即回到基态，而会在激发态滞留一段时间，这段时间称为该能级的平均寿命。已知所考察原子的第一激发态的平均寿命为 τ 。若该原子能对迎头射来的激光接连发生共振吸收，且原子一旦回到基态，便立即发生共振吸收，如此不断重复，试求该原子在接连两次刚要发生共振吸收时刻之间的平均加速度。注意：原子从激发态回到基态向各个方向发射光子的机会均等，由于碰撞频率极高，因而由此而引起原子动量改变的平均效果为零。

(3) 设所考察的原子以初速度 v_0 沿 z 轴正向运动，一激光束沿 z 轴负向迎头射向该原子，使它发生共振吸收。在激光频率保持不变的条件下，为了使该原子能通过一次接着一次的共振吸收而减速至零，为此可让该原子通过一非均匀磁场 $B(z)$ ，实现原子的磁光俘获，如图 28 决—8 (c) 所示。由于处于磁场中的原子与该磁场会发生相互作用，从而改变原子的激发态能量，如图 28 决—8 (b) 所示。当磁感应强度为 B 时，原来能量为 E 的能级将变为 $E+\Delta E$ ，其中 $\Delta E=\mu B$ ， μ 是已知常量。试求磁感应强度 B 随 z 变化的关系式。

(4) 设质量为 $m=1.0\times 10^{-26}\text{kg}$ 的锂原子初速度 $v_0=1.2\times 10^3\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ，静止时的共振吸收频率为 $\nu_0=4.5\times 10^{14}\text{Hz}$ ，第一激发态的平均寿命 $\tau=5.3\times 10^{-8}\text{s}$ 。为使所考察的原子按 (3) 中所描述的过程减速为零，原子通过的磁场区域应有多长？

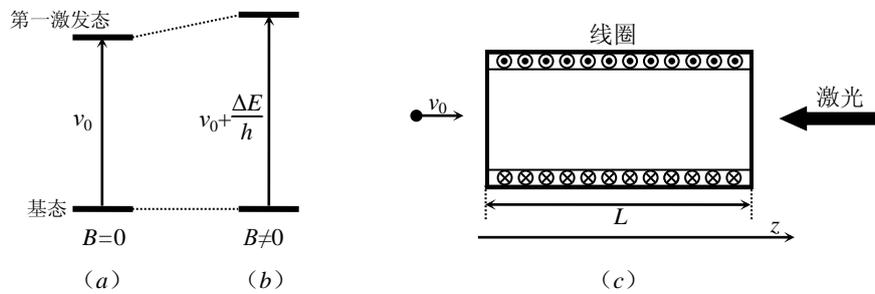


图 28 决—8

第 28 届全国中学生物理竞赛决赛试题

及参考解答

一、参考解答：

1. 设弹性绳在时刻 t 的伸长量为 ΔL ，弹性绳的张力为 T ，小圆环的高度为 H 。当 $\theta = 90^\circ$ 时，小圆环受到导轨的正压力为 N 、竖直向下重力 mg 和弹性绳的沿 $C'A$ 和 $C'B$ 两个方向的张力，见图 1，根据几何关系有

$$\begin{aligned} \Delta L &= 4R \cos 45^\circ - 2R(\cos 30^\circ + \sin 30^\circ) \\ &= (2\sqrt{2} - \sqrt{3} - 1)R > 0 \end{aligned} \quad (1)$$

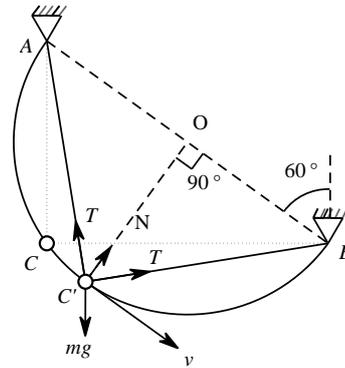


图1

这说明绳是张紧的。

$$H = \sqrt{2}R \sin(45^\circ - 30^\circ) \quad (2)$$

根据牛顿定律，这时有

$$N + 2T \cos 45^\circ - mg \cos 30^\circ = \frac{mv^2}{R} \quad (3)$$

式中， v 是小圆环此刻运动速度的大小，小圆环在下降过程中机械能守恒

$$mgH = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\Delta L^2 \quad (4)$$

根据胡克定律有

$$T = k\Delta L \quad (5)$$

$$N = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - 1 \right) mg - (16 + 2\sqrt{3} - 5\sqrt{2} - 5\sqrt{6})kR \quad (6)$$

$$= 1.6mg - 0.15kR$$

2. 当 $\theta = 30^\circ$ 时，弹性绳的伸长量为

$$\begin{aligned} \Delta L &= 2R(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ) - 2R(\cos 30^\circ + \sin 30^\circ) \\ &= (\sqrt{6} - \sqrt{3} - 1)R = -0.28R < 0 \end{aligned} \quad (7)$$

弹性绳处于松弛状态， $T = 0$ ，小圆环受力如图 2 所示，根据牛顿定律有

$$N - mg \cos 30^\circ = \frac{mv^2}{R} \quad (8)$$

整个过程机械能守恒，有

联立 (1) 至 (4) 式得

$$\Delta l_2 = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} \sqrt{\frac{Mm_1}{(M+m_2)(m_1+m_2)}} (l_1 - l) \quad (5)$$

考虑从小球 1 释放至弹簧 2 达到最大压缩的全过程。小球、弹簧及小车作为一个整体，所受到的合外力为零，系统质心的位置在整个过程中应当保持不变，即

$$(M+m_1+m_2)l_3 - m_1[(l_1-l) + (L-l_1-l_2)] - (m_1+m_2)\Delta l_2 = 0 \quad (6)$$

联立 (5) 和 (6) 式得

$$l = l_1 - \frac{l_1 + l_2 - L + \frac{M+m_1+m_2}{m_1}l_3}{1 + \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} \sqrt{\frac{M(m_1+m_2)}{Mm_1}}} \quad (7)$$

$$\Delta l_2 = \frac{l_1 + l_2 - L + \frac{M+m_1+m_2}{m_1}l_3}{\frac{m_1+m_2}{m_1} + \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} \sqrt{\frac{(M+m_2)(m_1+m_2)}{Mm_1}}} \quad (8)$$

评分标准:

本题 15 分

(1) (2) (3) (4) 式各 2 分, (6) 式 3 分, (7) (8) 式各 2 分

三、参考解答:

1. 设空间站 A 和卫星 B 的速度大小分别为 v_{A0} 和 v_{B0} , 则由牛顿引力定律得

$$\frac{GmM}{r_A^2} = \frac{mv_{A0}^2}{r_A} \quad (1)$$

$$\frac{Gm'M}{R_e^2} = m'g \quad (2)$$

式中, m 和 M 分别是飞船和地球的质量, m' 和 g 分别是地球表面上的某一物体的质量和重力加速度, 由 (1) 与 (2) 式得

$$v_{A0} = R_e \sqrt{\frac{g}{r_A}} \quad (3)$$

同理有

$$v_{B0} = R_e \sqrt{\frac{g}{r_B}} \quad (4)$$

飞船进入椭圆转移轨道后, 其机械能为

$$E = -\frac{GmM}{2a} \quad (5)$$

式中, $2a$ 是椭圆轨道的长轴, 由集合关系有

$$2a = r_A + r_B \quad (6)$$

设飞船在近地点和远地点处的速度大小分别为 v_A 和 v_B , 则

$$\frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{GmM}{r_A} = -\frac{GmM}{2a} \quad (7)$$

由 (1) 和 (7) 式得

$$v_A = \sqrt{2GM\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{2a}\right)} = R_e \sqrt{2g\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{2a}\right)} \quad (8)$$

同理, 有

$$v_B = R_e \sqrt{2g\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{2a}\right)} \quad (9)$$

由 (3)、(8) 式和题给条件得

$$\Delta v_A = v_A - v_{A0} = \left(\sqrt{\frac{6}{5}} - 1\right) R_e \sqrt{\frac{g}{r_A}} = 735 \text{ m/s} \quad (10)$$

由 (4)、(9) 式和题给条件得

$$\Delta v_B = v_{B0} - v_B = \left(\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{8}{15}}\right) R_e \sqrt{\frac{g}{r_A}} = 664 \text{ m/s} \quad (11)$$

2. 设空间站 A 、卫星 B 和飞船的运动周期分别为 T_A 、 T_B 和 T , 根据开普勒第三定律有

$$\frac{T_A^2}{r_A^3} = \frac{T_B^2}{r_B^3} = \frac{T^2}{a^3} \quad (12)$$

式中

$$T_A = \frac{2\pi r_A}{v_{A0}} \quad (13)$$

飞船从 A 到 B 过程所用的时间为

$$\Delta t_1 = \frac{T}{2} \quad (14)$$

经 Δt_1 时间和无相对运动的捕获后, 飞船和卫星 B 同时到达远地点 N 并开始以相同速率 v_B 和半径 r_B 作圆周运动, 此时空间站 A 绕地球转过角度 $\Delta\varphi_A$, 位置如图 1 所示, 且

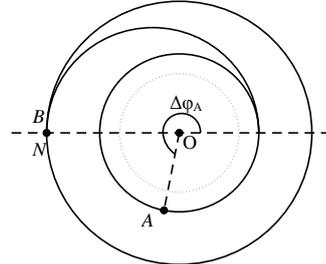


图1

$$\Delta\varphi_A = 360^\circ \frac{\Delta t_1}{T_A} \quad (15)$$

可见, 飞船经历了椭圆轨道半个周期 Δt_1 后, 空间站 A 相对于飞船超前了

$$\Delta\varphi_0 = \Delta\varphi_A - 180^\circ \quad (16)$$

如果想选择一个合适的时刻, 开始使捕获了卫星的飞船经短暂减速后, 沿同样形状的椭圆轨道在近地点 M 和空间站 A 相遇。如图 2 所示, 则 A 与飞船必须处于这样的相对位置, 即空间站 A 须超前飞船

$$\Delta\varphi = 360^\circ \times n - \Delta\varphi_0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (17)$$

设从飞船捕获了卫星时刻算起, 经 Δt 时间后运动到上述相对位置, 则应满足

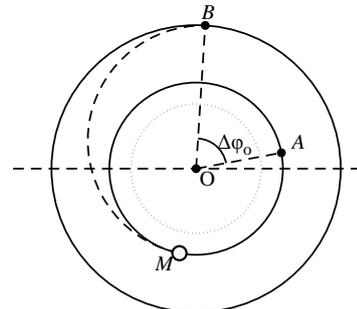


图2

$$\left(\frac{360^\circ}{T_A} \Delta t + \Delta\varphi_A \right) - \left(\frac{180^\circ}{T_B} \Delta t + 180^\circ \right) = \Delta\varphi \quad (18)$$

由 (3)、(12)、(13)、(15)、(17) 和 (18) 式得

$$\min \Delta t = \min \left\{ \frac{\Delta\varphi + 180^\circ - \Delta\varphi}{360^\circ} \frac{T_A T_B}{T_B - T_A} \right\} \quad (19)$$

由 (3)、(12)、(13)、(14) 和 (19) 式得, 飞船从发射到返回空间站至少需要的时间为

$$T = 2\Delta t_1 + \min \Delta t = \left[\frac{1 + \frac{r_B}{r_A}}{2} \right]^{\frac{3}{2}} + \frac{2 - \left[\frac{1 + \frac{r_B}{r_A}}{2} \right]^{\frac{3}{2}}}{1 - \left(\frac{r_A}{r_B} \right)^{\frac{3}{2}}} \frac{2\pi r_A^{\frac{3}{2}}}{R_e \sqrt{g}} = 1.50 \times 10^4 \text{ s} \quad (20)$$

空间站 A 绕地球转过的响应的角度为

$$\Delta\varphi_{Am} = \frac{\Delta t_m}{T_A} 360^\circ = 981^\circ \quad (21)$$

评分标准：

本题 20 分

第一问 10 分，(1) (2) (5) (6) 式各 1 分，(7) (10) (11) 式各 2 分；

第二问 10 分，(12) (13) (14) 式各 1 分，(18) 式 3 分，(20) (21) 式各 2 分

四、参考解答：

1. 考虑管的横截面积 AB 和 CD 之间的气体，其中横截面 AB 和 CD 都位于气体的均匀稳流区域内；经过 Δt 时间，该气体的左右边界分别运动到管的横截面 $A'B'$ 和 $C'D'$ 处。如图 1 所示，适当选取时间间隔 Δt 的长短，可使得横截面 $A'B'$ 位于气体的云军稳流区域内。因而， $ABB'A'$ 和 $CDD'C'$ 区域内各点均在气体的均匀稳流区域内，设加热装置右方均匀稳流区域内气体的流速为 v_1 ，根据功能原理有

$$W\Delta t + [p_0(Sv_0\Delta t) - p_1(Sv_1\Delta t)] = \Delta E \quad (1)$$

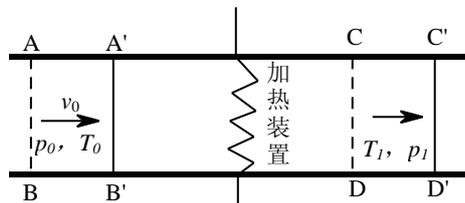


图1

式中， ΔE 表示气体在 $A'B'D'C'$ 区域内和区域 $ABDC$ 内两种情况下能量之差。考虑到在稳定状态下，气体在两区域 $ABDC$ 和 $A'B'D'C'$ 的公共区域 $A'B'DC$ 中的能量相同； ΔE 应当等于处于区域 $CDD'C'$ 和 $ABB'A'$ 中的气体的能量之差

$$\Delta E = \left(\frac{1}{2} \Delta m v_1^2 + \frac{5}{2} \frac{\Delta m}{\mu} RT_1 \right) - \left(\frac{1}{2} \Delta m v_0^2 + \frac{5}{2} \frac{\Delta m}{\mu} RT_0 \right) \quad (2)$$

式中， Δm 为 $ABB'A'$ 范围内气体的质量。由于气体在从区域 $ABDC$ 运动到区域 $A'B'D'C'$ 的过程中，质量不变，在 $CDD'C'$ 范围内气体的质量也等于 Δm 。由理想气体状态方程有

$$p_0(Sv_0\Delta t) = \frac{\Delta m}{\mu} RT_0 \quad (3)$$

$$p_1(Sv_1\Delta t) = \frac{\Delta m}{\mu} RT_1 \quad (4)$$

联立 (1)、(2)、(3)、和 (4) 式得

$$T_1^2 + \frac{7RT_0^2}{\mu v_0^2} \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^2 T_1 - \left(1 + \frac{7RT_0}{\mu v_0^2} + \frac{2WRT_0}{p_0 S \mu v_0^3}\right) \left(\frac{p_1 T_0}{p_0}\right)^2 = 0 \quad (5)$$

其解为

$$T_1 = T_0 \frac{p_1}{p_0} \left\{ -\frac{7RT_0}{2\mu v_0^2} \frac{p_1}{p_0} + \frac{1}{2} \sqrt{4 + \left(28 + \frac{8W}{p_0 S v_0}\right) \frac{RT_0}{\mu v_0^2} + \left(\frac{7RT_0}{\mu v_0^2} \frac{p_1}{p_0}\right)^2} \right\} \quad (6)$$

负根不合题意, 已舍去。

2. 考虑管的横截面 AB 和 CD 之间的气体, 经过 Δt 时间, 该气体的左右边界分别运动到管的横截面 $A'B'$ 和 $C'D'$ 处, 如图 2 所示。

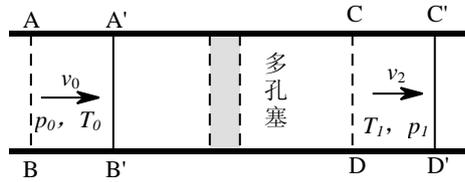


图2

根据功能原理有

$$p_0(Sv_0\Delta t) - p_2(Sv_2\Delta t) = \left(\frac{1}{2}\Delta m v_2^2 + \frac{5}{2}\frac{\Delta m}{\mu}RT_2\right) - \left(\frac{1}{2}\Delta m v_0^2 + \frac{5}{2}\frac{\Delta m}{\mu}RT_0\right) \quad (7)$$

式中, Δm 为 $ABB'A'$ 范围内气体的质量。由于气体在从区域 $ABDC$ 运动到区 $A'B'D'C'$ 的过程中, 质量不变, 在 $CDD'C'$ 范围内气体的质量也等于 Δm 。由理想气体状态方程有

$$p_0(Sv_0\Delta t) = \frac{\Delta m}{\mu}RT_0 \quad (8)$$

$$p_2(Sv_2\Delta t) = \frac{\Delta m}{\mu}RT_2 \quad (9)$$

由 (7)、(8) 和 (9) 式得

$$v_2^2 + 7\frac{p_2RT_0}{p_0\mu v_0}v_2 - \left(1 + 7\frac{RT_0}{\mu v_0^2}\right)v_0^2 = 0 \quad (10)$$

其解为

$$v_2 = v_0 \left[-\frac{7}{2} \frac{p_2}{p_0} \frac{RT_0}{\mu v_0^2} + \frac{1}{2} \sqrt{4 + 28 \frac{RT_0}{\mu v_0^2} \left(\frac{7p_2}{p_0} \frac{RT_0^2}{\mu v_0^2} \right)} \right] \quad (11)$$

负根不合题意, 已舍去。

评分标准:

本题 15 分

第一问 8 分, (1) (2) 式各 2 分, (3) (4) (5) (6) 式各 1 分

第二问 7 分, (7) 式 3 分, (8) (9) (10) (11) 式各 1 分

五、参考解答 (一):

1. 考虑光线仅从 AB 面上法线下方入射, 如图 1 所示, 在 AB 面上发生折射, 根据折射定律有

$$\sin i_0 = n \sin r \quad (1)$$

式中, i_0 和 r 分别是光线在 AB 面上入射角和折射角, n 是棱镜的折射率。在 AC 面上发生全反射应满足

$$n \sin i_1 \geq 1 \quad (2)$$

式中, i_1 是光线在 AC 面上的入射角, 在 $\triangle ADE$ 中有

由此可得

$$i_1 = \alpha - r > 0 \quad (3)$$

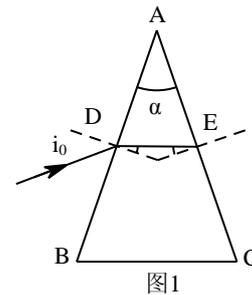


图1

将 (3) 式代入 (2) 式有

$$n \sin i_1 = n \sin(\alpha - r) \geq 1 \quad (4)$$

因为 i_0 , α 都为锐角, 结合 (1) 式, 利用三角函数关系得

$$\sin \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 i_0} \geq 1 + \cos \alpha \sin i_0 \quad (5)$$

对 (5) 式两边平方得

$$\sin^2 i_0 + 2 \cos \alpha \sin i_0 + (1 - n^2 \sin^2 \alpha) \leq 0 \quad (6)$$

上式取等号时的解为

$$\sin i_0 = -\cos \alpha \pm \sqrt{n^2 - 1} \sin \alpha$$

或

$$\sin i_0 = n \sin(\pm \alpha - \Theta) \quad (7)$$

式中, 已利用了

$$n \sin \Theta = 1$$

由于 $0 \leq \sin i_0 \leq 1$, (6) 式的解 $\sin i_0$ 应满足

$$0 \leq \sin i_0 \leq \min\{1, n \sin(n - \Theta)\} \quad (8)$$

从 (8) 式可看出, 当光线仅从 AB 面上法线的下方入射时, 为使入射角 i_0 取任意值时, 光线在 AC 面上都发生全反射, 三棱镜顶角 α 的取值范围为

$$\alpha \geq 2\Theta \quad (9)$$

2. 考虑光线仅从 AB 面上法线的上方入射, 如图 2 所示, 根据几何关系得

$$i_1 = \alpha + r \quad (10)$$

在 AC 面上发生全反射应满足

$$n \sin(\alpha + r) \geq 1 \quad (11)$$

采用 1 中相同的方法可得

$$\sin^2 i_0 - 2 \cos \alpha \sin i_0 + (1 - n^2 \sin^2 \alpha) \leq 0 \quad (12)$$

上式取等号时的解为

$$\sin i_0 = \cos \alpha \pm \sqrt{n^2 - 1} \sin \alpha$$

或

$$\sin i_0 = n \sin(\Theta \pm \alpha) \quad (13)$$

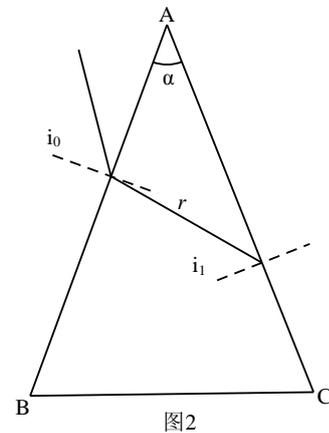
由于 $0 \leq \sin i_0 \leq 1$, (12) 式的解 $\sin i_0$ 应满足

$$\max\{0, n \sin(\Theta - \alpha)\} \leq \sin i_0 \leq 1 \quad (14)$$

其中 (14) 式可看出

$$\alpha \leq \Theta \quad (15)$$

当光线仅从 AB 面上法线的上方入射时, 我们还必须保证光线以任意入射角入射到 AB 面上, 经一次折射后, 能入射到 AC 面上的条件。为此, 让光线沿 AB 面掠入射到 D 点 ($i_0 = 90^\circ$) 发生折射, 如图 3 所示, 容易看出, 当且仅当



$$\alpha < 90^\circ - \Theta \quad (16)$$

时, 折射光线才能射到 AC 面上, 联立条件 (15) 和 (16) 式得

$$\Theta < 45^\circ$$

这与题设条件一致。

由于 (15) 和 (16) 式知, 当光线仅从 AB 面上法线的上方入射时, 为使入射角 i_0 取任意值时, 光线在 AC 面上都发生全反射, 三棱镜顶角 α 的取值范围为

$$\Theta \leq \alpha < 90^\circ - \Theta \quad (17)$$

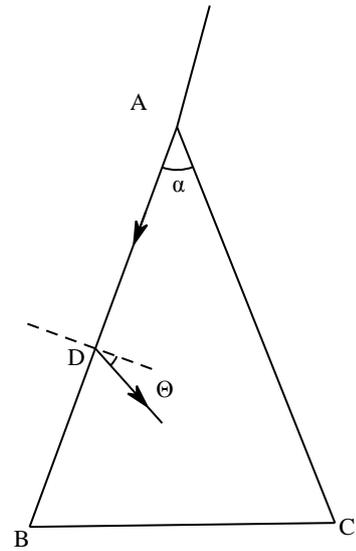


图3

评分标准:

本题 15 分

第一问 7 分, (1) (2) (3) (6) (8) 式各 1 分, (9) 式 2 分

第二问 8 分, (10) (11) (12) (14) 式各 1 分, (15) (16) 各 2 分

参考解答 (二)

1. 考虑光线仅从 AB 面上法线的下方入射。先考虑沿 AB 面掠入射的光线, 此时的折射角 r 即为全反射临界角

$$r = \Theta \quad (1)$$

如图 1 所示, 如果此光线在面上能发生全反射, 则此

光线在 AC 面上的入射角 i_1 应当满足

$$i_1 \geq \Theta \quad (2)$$

在 $\triangle ADE$ 中有

$$\alpha + (90^\circ - r) + (90^\circ - i_1) = 180^\circ$$

由此可得

$$\alpha = r + i_1 \quad (3)$$

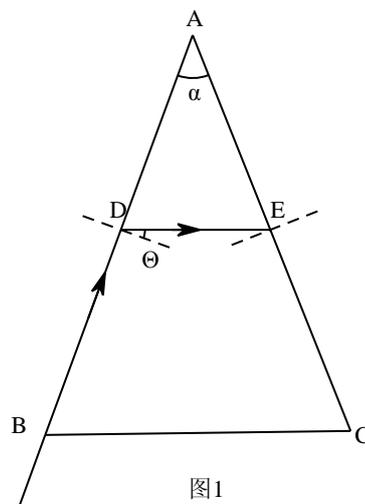


图1

由 (1)、(2) 和 (3) 式得

$$\alpha \geq 2\Theta \quad (4)$$

再考虑垂直于 AB 面入射的光线, 如图 2 所示, 如果此光线在 AC 面上能发生全反射, 则此光线在 AC 面上的入射角 i_1 应当满足

$$i_1 \leq \Theta \quad (5)$$

在 $\triangle ADE$ 中有

$$\alpha + 90^\circ + (90^\circ - i_1) = 180^\circ$$

由此可得

$$\alpha = i_1 \quad (6)$$

由 (5) 和 (6) 式得

$$\alpha \geq \Theta \quad (7)$$

由 (4) 和 (7) 式可看出, 当光线仅从 AB 面上法线的下方入射时, 为了使入射角 i_0 取任意值时, 光线在 AC 面上都发生全反射, 三棱镜顶角 α 的取值范围为

$$\alpha \geq 2\Theta \quad (8)$$

2. 考虑光线仅从 AB 面上法线的上方入射, 考虑沿 AB 面掠入射的光线, 此时的折射角 r 即为全反射临界角

$$r = \Theta \quad (9)$$

如图 3 所示, 如果此光线能与 AC 面相交, 则

$$90^\circ - \Theta > \alpha \quad (10)$$

由图 3 从几何关系可知

$$i_1 > \alpha \geq \Theta \quad (11)$$

可见光线能在 AC 面上发生全反射。

由 (7) 和 (10) 式得, 当光线仅从 AB 面上法线的上方入射时, 为了使入射角 i_0 取任意值时, 光线在 AC 面上都发生全反射, 三棱镜顶角 α 的取值范围为

$$\Theta \leq \alpha < 90^\circ - \Theta \quad (12)$$

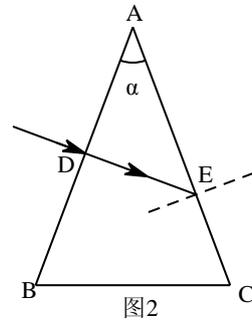


图2

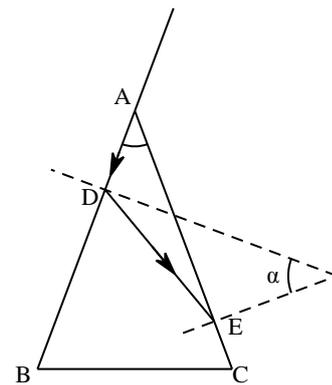


图3

评分标准：

本题 15 分

第一问 9 分，(1) (2) (3) 式各 1 分，(4) 式各 2 分，(5) (6) 式各 1 分，(7) 式 2 分

第二问 6 分，(9) 式 1 分，(10) 式 2 分，(11) 式 2 分，得出 (12) 式中下限的再给 1 分

六、参考解答：

根据题意可知，通电后天平失去平衡，是由于电容器 C_1 的极板 B 对极板的静电力与长冶金属杆 N 对 M 的磁力不相等的结果。

先考察极板 A 受到的静电力，当电源的电压为 u 时， C_1 极板上的电量为

$$q = C_1 u \quad (1)$$

不考虑边缘效应，平板电容器的电容为

$$C_1 = \frac{a_1^2}{4\pi k_e h_1} \quad (2)$$

式中， h_1 是平板电容器的极板间距。

电容器中电场强度的大小为

$$E = \frac{u}{h_1} \quad (3)$$

由 (1)、(2) 和 (3) 式得

$$E = 4\pi k_e \frac{q}{a_1^2} \quad (4)$$

由对称性和场强叠加原理可知，极板 B 上的电荷单独产生的电场强度的大小

$$E_1 = \frac{1}{2} E \quad (5)$$

极板 A 受到的静电力的大小为

$$F_e = qE_1 \quad (6)$$

方向向下。由 (4)、(5) 和 (6) 式得

$$F_e = 2\pi k_e \frac{q^2}{a_1^2} \quad (7)$$

利用 (1) 式，(7) 式可表示为

$$F_e = 2\pi k_e \frac{C_1^2 u^2}{a_1^2}$$

或

$$F_e = 2\pi k_e \frac{C_1^2}{a_1^2} U_0^2 \cos^2(2\pi ft) \quad (8)$$

在考察金属杆 M 受到的磁力，金属杆 M 、 N 与电容 C_2 串联后接在交流电源两端，通过杆的电流就是通过 C_2 的电流。若用 U_0 表示电容两端电压的峰值，则通过电容的电流的峰值

$$I_0 = \frac{U_0}{\frac{1}{2\pi f C_2}} = 2\pi f C_2 U_0 \quad (9)$$

所谓交流电通过电容，实际上是电容不断充电和放电的过程，当极板上的电量或两极板间的电压最大时，充电结束，此时刻电流为 0；接着放电，极板上的电量或电压由大变小，电流反向，当电量或电压变为 0 时，电流最大，所以电流和电压的变化时不同步调的，两者相差四分之一周期，当极板两端电压为

$$u = U_0 \cos 2\pi ft$$

时，通过电容 C_2 的电流应为

$$i_2 = 2\pi f C_2 U_0 \cos(2\pi ft + \frac{\pi}{2}) \quad (10)$$

不考虑边缘效应，杆 N 在杆 M 处产生的磁感应强度的大小为

$$B = 2k_m \frac{i_2}{h} \quad (11)$$

杆 M 受到的磁场力为

$$F_m = Bi_2 a_2 \quad (12)$$

方向向下。由 (10)、(11) 和 (12) 式有

$$F_m = 2k_m \frac{a_2}{h} 4\pi^2 f^2 C_2^2 U_0^2 \cos(2\pi ft + \frac{\pi}{2}) \quad (13)$$

调节交流电频率 f ，使得天平两边电力和磁力对时间的平均值相等，即

$$\overline{F_e(t)} = \overline{F_m(t)} \quad (14)$$

从而可得

$$\sqrt{\frac{k_e}{k_m}} = 2f \frac{C_2 a_1}{C_1} \sqrt{\frac{\pi a_2}{h}} \quad (15)$$

评分标准:

本题 20 分

(1) (2) (3) (5) (6) 式各 2 分

(9) 式 2 分, (10) (11) 式各 1 分, (12) (14) (15) 式各 2 分

七、参考解答:

考虑图 1 所示装置, 未接电源时, 金属杆静止在平衡位置, 取此平衡位置为坐标原点, 竖直向上为 z 轴正方向。当回路电流为 $i(t)$ (取从右流向左通过电源的电流为正) 时, 金属杆受到弹簧的弹性力和重力的合力以及磁场的安培力的作用, 而在竖直方向运动, 设杆在时刻 t 沿 Z 方向的位移为 $z(t)$, 速度为 $v(t)$, 依据牛顿定律, 它的动量在经过一个小时时间间隔 Δt 后的变化率为

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = -2kz(t) + Bli(t) \quad (1)$$

金属杆因竖直运动而切割磁力线, 所产生的感应电动势为

$$\varepsilon(t) = Blv(t) \quad (2)$$

式中,

$$v(t) = \frac{\Delta z}{\Delta t} \quad (3)$$

按照全电路欧姆定律有

$$u(t) = \varepsilon(t) \quad (4)$$

再考虑图 2 所示电路, 由题意, 回路通过电源的电流仍为 $i(t)$, 它等于流过自感和电容的电流 $i_L(t)$ 和 $i_C(t)$ 之和

$$i(t) = i_L(t) + i_C(t) \quad (5)$$

自感上的电动势 $\varepsilon(t)$ 的大小为

$$\varepsilon_L(t) = L \frac{\Delta i_L}{\Delta t} \quad (6)$$

而电容 C 满足

$$i_c(t)\Delta t = C\Delta\varepsilon_L \quad (7)$$

按照全电路欧姆定律有

$$u(t) = \varepsilon_L(t) \quad (8)$$

由 (2)、(3)、(4)、(6) 和 (8) 式得

$$Bl\Delta z = L\Delta i_L \quad (9)$$

由于我们选取金属杆在其中电流为零时的平衡位置为 Z 坐标原点, 故

$$z(t) = 0, \text{ 当 } i_L(t) = 0 \quad (10)$$

由 (9)、(10) 两式可解得

$$z(t) = \frac{L}{Bl} i_L(t) \quad (11)$$

由 (2)、(4)、(7) 和 (8) 式得

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{1}{BlC} i_c(t) \quad (12)$$

将 (5)、(11)、(12) 式代入 (1) 得

$$\left(\frac{m}{C} - B^2 l^2\right) i_c(t) + (2kL - B^2 l^2) i_c(t) = 0 \quad (13)$$

此对任意的 $i_c(t)$ 和 $i_L(t)$ 都成立, 故

$$\frac{m}{C} - B^2 l^2 = 0, \quad 2kL - B^2 l^2 = 0 \quad (14)$$

由此得

$$C = \frac{m}{B^2 l^2} \quad (15)$$

$$L = \frac{B^2 l^2}{2k} \quad (16)$$

评分标准:

本题 20 分.

- (1) (2) 式各 2 分, (3) (4) (5) 式各 1 分, (6) (7) (8) 式各 2 分, (8) (9) (10) (11) (12) 式各 1 分, (13) 式 2 分, (15) (16) 式各 1 分

八、参考答案:

1. 所设考察原子的质量为 m , 激光束的频率为 ν ; 吸收光子后, 原子的速度由 v_0 变为 v_1 , 从基态至第一激发态, 由题意, 该原子第一激发态与基态的能量差为 $h\nu_0$, 由原子核光子组成的系统在吸收前后能量和动量均守恒, 故

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + h\nu = \frac{1}{2}mv_1^2 + h\nu_0 \quad (1)$$

$$mv_0 - \frac{h}{\nu} = mv_1 \quad (2)$$

从 (1) 和 (2) 式消去 v_1 得

$$\frac{2v_0}{c} = \frac{2(v_0 - \nu)}{\nu} + \frac{h\nu}{mc^2} \quad (3)$$

注意到 $h\nu_0 \ll mc^2$, 因而恰能使该原子发生共振吸收的激光频率为

$$\nu = \frac{v_0}{1 + \frac{v_0}{c}} \quad (4)$$

由 (2) 和 (4) 式可得该原子的速率变化, 即

$$v_1 - v_0 = -\frac{h\nu_0}{mc\left(1 + \frac{v_0}{c}\right)} \quad (5)$$

2. 由于原子吸收光子后处在激发态上会滞留一段时间 τ 才回到基态, 当原子回到基态后又立即再次发生共振吸收。因此, 原子从共振吸收回到基态这段时间内的平均加速度为

$$a = \frac{v_1' - v_0'}{\tau} \quad (6)$$

式中, 原子在共振吸收前、后的速率分别为 v_0' 、 v_1' 。利用 (5) 式, (6) 式成为

$$a = -\frac{h\nu_0}{mcr\left(1 + \frac{v_0'}{c}\right)} \approx -\frac{h\nu_0}{mcr} \quad (7)$$

加速度是负的。表示原子在不断发生共振吸收的过程中作减速运动, 由于原子速度是热运动的速度。它远小于光速, 故可认为原子在不断发生共振吸收的过程中加速度大小恒定, 原子作减速运动。

3. 由于原子在共振吸收后减速，由（4）式可知共振吸收频率要增大，故必须改变次磁感应强度的大小，否则共振吸收会终止。若让该原子进入磁感应强度的大小 B 随 z 变化的非均匀磁场，则应让第一激发态相对于基态的能量差从

$$E = h\nu_0 \quad (8)$$

变为

$$E' = E + \mu B \quad (9)$$

于是，磁场中静止原子的共振吸收频率应增加为

$$\nu' = \frac{E'}{h} = \nu_0 + \frac{\mu}{h} B \quad (10)$$

当此原子在磁场中以速度 v 运动时，相橘共振吸收条件（4），能使此原子发生共振吸收的激光的频率为

$$\nu_B = \frac{\nu'}{1 + \frac{v}{c}} = \frac{\nu_0 + \frac{\mu}{h} B}{1 + \frac{v}{c}} \quad (11)$$

（11）式说明：能使该原子发生共振吸收的激光的频率不仅与原子的运动速率有关，还与原子所在处的磁场有关，原子因共振吸收而作匀减速运动。当原子以初速 v_0 进入磁场后沿 z 轴运动距离 z 时，其速度为

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2az} \quad (12)$$

若 z 处的磁感应强度的大小 $B(z)$ 能恰好使得

$$\nu_B = \nu \quad (13)$$

则该原子将对于迎头射来的频率 ν 的激光持续地发生共振吸收，从而不断减速，利用（4）和（11）式，（13）式成为

$$\frac{\nu_0 + \frac{\mu}{h} B}{1 + \frac{v}{c}} = \frac{\nu_0}{1 + \frac{v}{c}} \quad (14)$$

将（12）式代入上式得

$$B = \frac{h\nu_0 \sqrt{v_0^2 + 2az} - \nu_0}{c + v_0} \quad (15)$$

4.由(12)式得,当 $v=0$ 时有

$$z = -\frac{v_0^2}{2a} \quad (16)$$

由(7)和(16)式得

$$z = \frac{mv_0^2 c \tau}{2h v_0} \quad (17)$$

代入题给数据得

$$z = 0.38m \quad (18)$$

评分标准:

本题 20 分

第一问 6 分, (1) (2) (3) (4) 式各 1 分, (5) 式 2 分;

第二问 3 分, (6) 式 1 分, (7) 式 2 分;

第三问 9 分, (8) (9) (10) (11) (12) 式各 1 分, (13) (15) 式各 2 分;

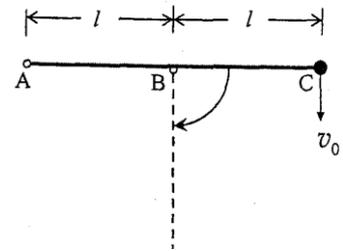
第四问 2 分, (16) (18) 式各 1 分

29 届全国中学生物理竞赛决赛试题

一、(15 分)

如图, 竖直的光滑墙面上有 A 和 B 两个钉子, 二者处于同一水平高度, 间距为 l , 有一原长为 l 、劲度系数为 k 的轻橡皮筋, 一端由 A 钉固定, 另一端系

有一质量为 $m = \frac{kl}{4g}$ 的小球, 其中 g 为重力加速度. 钉子和小球都可视为质点, 小球和任何物体碰撞都是完全非弹性碰撞而且不发生粘连. 现将小球水平向右拉伸到与 A 钉距离为 $2l$ 的 C 点, B 钉恰好处于橡皮筋下面并始终与之光滑接触. 初始时刻小球获得大小为

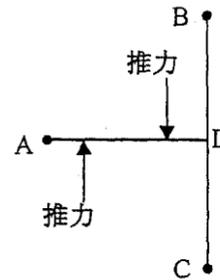


初始时刻小球获得大小为

$v_0 = \frac{\sqrt{gl}}{2}$ 、方向竖直向下的速度, 试确定此后小球沿竖直方向的速度为零的时刻.

二、(20 分)

如图所示, 三个质量均为 m 的小球固定于由刚性轻质杆构成的丁字形架的三个顶点 A、B 和 C 处. $AD \perp BC$, 且 $AD = BD = CD = a$, 小球可视为质点, 整个杆球体系置于水平桌面上, 三个小球和桌面接触, 轻质杆架悬空. 桌面和三小球之间的静摩擦和滑动摩擦因数均为 μ , 在 AD 杆上距 A 点 $a/4$ 和 $3a/4$ 两处分别施加一垂直于此杆的推力, 且两推力大小相等、方向相反.

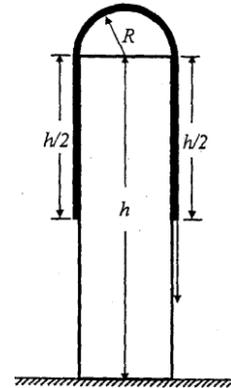


1. 试论证在上述推力作用下, 杆球体系处于由静止转变为运动的临界状态时, 三球所受桌面的摩擦力都达到最大静摩擦力;

2. 如果在 AD 杆上有一转轴, 随推力由零逐渐增加, 整个装置将从静止开始绕该转轴转动. 问转轴在 AD 杆上什么位置时, 推动该体系所需的推力最小, 并求出该推力的大小.

三、(20 分)

不光滑水平地面上有一质量为 m 的刚性柱体，两者之间的摩擦因数记为 μ 。柱体正视图如图所示，正视图下部为一高度为 h 的矩形，上部为一半径为 R 的半圆形。柱体上表面静置一质量同为 m 的均匀柔软的链条，链条两端距地面的高度均为 $h/2$ ，链条和柱体表面始终光滑接触。初始时，链条受到微小扰动而沿柱体右侧面下滑。试求在链条开始下滑直至其右端接触地面之前的过程中，当题中所给参数满足什么关系时，



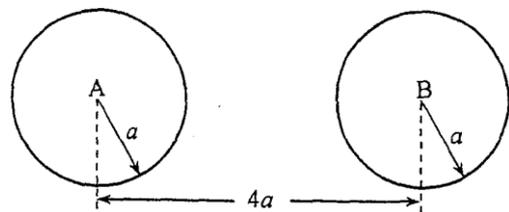
1. 柱体能在地面上滑动；
2. 柱体能向一侧倾倒；
3. 在前两条件满足的情形下，柱体滑动先于倾倒发生。

四、(20 分)

如图所示，在一光滑水平圆桌面上有两个质量、电荷都均匀分布的介质球，两球半径均为 a ， A 球质量为 m ，所带电荷量为 Q ， B 球质量为 $4m$ ，所带电荷量为 $-4Q$ 。在初始时刻，两球球心距为 $4a$ ，各有一定的初速度，以使得两球在以后的运动过程中不发生碰撞，且都不会从圆桌面掉落。现要求在此前提下尽量减小桌面面积，试求

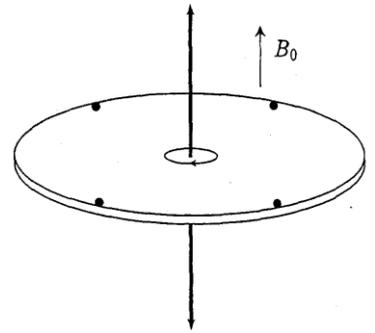
1. 两球初速度的方向和大小；
2. 圆桌面的最小半径。

假设两球在运动过程中，其所带电荷量始终保持均匀分布；桌面也不发生极化效应。已知两个均匀带电球之间的静电相互作用力，等于电荷集中在球心的两个点电荷之间的相互作用力；静电力常量为 k_e 。



五、(20分)

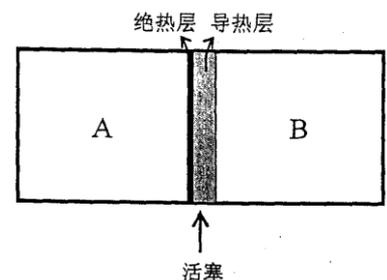
如图所示，一半径为 R 的轻质绝缘塑料薄圆盘水平放置，可绕过圆盘中心的竖直固定轴无摩擦地自由转动。一半径为 a 的轻质小圆线圈($a \ll R$)固定在盘面上，圆线圈与圆盘共轴。在盘边缘处等间隔地固定 4 个质量均为 m 的带正电的金属小球，每个小球所带电荷量均为 q 。此装置处在一磁感应强度大小为 B_0 、方向竖直向上的均匀强磁场中。初始时圆盘静止，圆线圈中通有恒定电流 I ，方向沿顺时针方向(从上往下看)。若切断圆线圈中的电流，则圆盘将发生转动。求薄圆盘稳定转动后，圆盘在水平方向对每个金属球的作用力的大小。假设金属小球可视为质点，不计小圆线圈的自感和带电金属小球因运动所产生的磁场。



已知固定在圆盘面上的半径为 a 、通有电流 I 的圆线圈在圆盘面内、距线圈圆心的距离为 r 处($r \gg a$)产生的磁场的磁感应强度的大小为 $B = k_m \frac{2\pi a^2 I}{r^3}$ ，式中 k_m 为已知常量，当线圈中的电流沿顺时针方向时，磁场方向垂直于圆盘平面且竖直向上。静电力常量为 k_e 。

六、(15分)

如图，一水平放置的刚性密闭气缸，缸壁是绝热的，活塞把气缸内空间分为两个体积相同的密闭室 A 和 B。活塞由一层热容量很小(略去其影响)、导热良好的材料(与气缸壁有摩擦)和一薄层绝热材料(与气缸壁没有摩擦)压制而成，绝热层在 A 室一侧。初始时，A 室和 B 室充有绝对温度均为 T_0 的同种多原子分子理想气体，A 室气体压强是 B 室气体压强的 4 倍。现释放活塞，活塞由于其导热部分与汽缸壁之间存在摩擦而运动缓慢，最后停止在平衡位置(此时活塞与缸壁间无静摩擦)。



已知气缸中的气体具有如下特性：在温度高于某个临界温度 $T_d (> T_0)$ 时，部分多原子气体分子将发生分解，一个多原子分子可以分解为另外两个相同的多原子分子。被分解的气体摩尔数与发生分解前气体总摩尔数之比 a 满足关系 $a = \beta(T - T_d)$ ，其中 $\beta = 2.00T_0^{-1}$ 。分解过

程是可逆的, 分解 1 摩尔分子所需能量 $\varphi = CT_0 / 10$, 1 摩尔气体的内能与绝对温度 T 的关系为 $u = CT$ (C 是与气体的种类无关的常量). 已知当压强为 P 、体积为 V 的这种气体绝热缓慢膨胀时, $PV^\gamma = \text{常量}$, 其中 $\gamma = 4 / 3$.

1. 对于具有上述特性的某种气体, 若实验测得在上述过程结束时没有任何分子发生了分解, 求这种分子发生分解的临界温度 T_d 的可能值;
2. 对于具有上述特性的另一种气体, 若实验测得在上述过程结束时有 $a = 10.0\%$ 的分子分解了, 求这种分子发生分解的临界温度 T_d .

七、(15 分)

如图一所示的光学系统是由平行光管、载物台和望远镜组成. 已知望远镜物镜 L_0 的焦距为 16.00cm . 在 L_0 的焦平面 P 处, 放置带十字叉丝线的分划板和亮十字物, 如图二所示. 在载物台上放置双面平行的平面镜 M , 通过望远镜的目镜 L_e 观察时, 能同时清楚地看到分划板上的十字叉丝线和十字物经过 L_0 折射、 M 反射、再经 L_0 折射后在分划板上所成的十字像, 十字像位于 A 点, 与上十字叉丝线的距离为 5.2mm . 绕载物台转轴(沿竖直方向)转动载物台, 使平面镜转 180° , 此时十字像位于 B 点, 与上十字叉丝线的距离为 18.8mm . 根据以上情况和数据可计算出, 此时望远镜光轴与水平面的夹角为 _____ rad ; 据此结果, 调节望远镜, 使其光轴与载物台的转轴垂直.

平行光管是由十字缝 S 和凸透镜 L 组成. 去掉光学系统中的平面镜 M , 并用钠光灯照亮 S . 沿水平方向移动 S , 当 S 到平行光管中的透镜 L 距离为 8.25cm 时, 通过望远镜目镜能清楚地看到十字缝的像恰好成在分划板中心十字叉丝线上, 由此可以推知, L 的焦距等于 _____ cm .

将载物台平面调至与载物台的转轴垂直, 在载物台上放置长、宽、高均为 3.00cm 、折射率为 1.52 的分束棱镜 $abcd$ (分束棱镜是由两块直角三棱镜密接而成, 接触面既能透光又能反光) 和待测凹球面镜 O , O 到 L 的距离为 15.00cm , 并保证分束棱镜的 ab 面与图三中的 XX' 轴垂直、凹球面镜的光轴与图三中的 XX' 轴重合; 再将望远镜绕载物台的中心轴转 90° , 如图三所示. 向右移动 S , 当 S 移动的距离为 3.75cm 时, 通过望远镜目镜刚好能看清楚十字缝 S 的像成在分划板中心十字叉丝线上. 试求凹球面镜的曲率半径.

八、(15分)

在处理微观物理问题时,经常接触到诸如电子质量 m_e 、质子电荷量 e 及普朗克常量 h 等基本物理常量. 在国际单位制中,这些物理常量的数值都很小,给相关的数值计算带来不便. 为了方便起见,在微观物理领域引入所谓“原子单位制”,规定电子质量为质量单位, $\hbar(\hbar = h/2\pi)$ 为角动量单位,质子电荷量的 $\sqrt{k_e}$ 倍为电荷量单位,其中常数 k_e 和国际单位制中的静电力常量取值相同. 按如上定义规定了质量、电荷量和角动量的基本单位后,在“原子单位制”中其它物理量的单位可用相关物理公式导出. 如果在“原子单位制”下,长度、时间和能量的单位用符号 L_{au} 、 T_{au} 和 E_{au} 表示,试从玻尔氢原子模型推出三者分别与米、秒和焦耳的换算关系. 结果用 k_e 、 m_e 、 e 和 \hbar 等常量表示.

第 29 届全国中学生物理竞赛决赛试卷

参考答案及评分标准

一、

参考解答:

以 B 钉为坐标原点建坐标系 Oxy , 如图 1 所示. 小球在被释放后受到本身重力和橡皮筋的弹力两个力的作用. 设小球相对于原点 O (即 B 钉)的位置由位矢 r 表示, 则弹力可表示为

$$F = -kr \quad (1)$$

小球的运动方程在 Oxy 坐标系下分解为

$$v_{A1} = 4v_{B1} \quad (2)$$

$$v = v_{B0} - v_{A0} \quad (3)$$

定义 y 方向新坐标 $y' = y + mg/k$ (3)式可改写为

$$\Delta t \quad (4)$$

由(2)和(4)式知小球在水平和竖直方向都做简谐振动, 其振动方程可表示为

$$\overline{Q_1 F} \quad (5)$$

$$m_c = \sqrt{k} \quad (6)$$

利用参考圆可得到小球速度的表达式

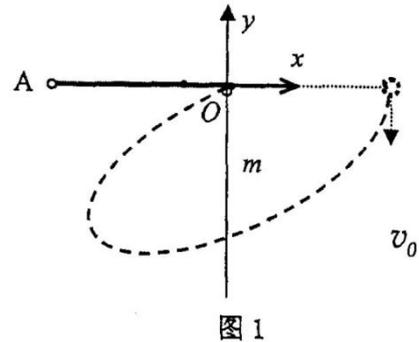
$$v_x(t) = -A_x \omega \sin(\omega t + \varphi_x) \quad (7)$$

$$v_y(t) = -A_y \omega \sin(\omega t + \varphi_y) \quad (8)$$

将如下初始条件

$$x(0) = l \quad (9)$$

$$y'(0) = \frac{mg}{k} = \frac{l}{4} \quad (10)$$



$$v_x(0) = 0 \quad (11)$$

$$v_y(0) = -\frac{\sqrt{gl}}{2} \quad (12)$$

代入(5)至(8)式, 可解得振幅 A_x 和 A_y 及位相 φ_x 和 φ_y . 再利用 $\omega = \sqrt{k/m} = 2\sqrt{g/l}$, 上述振动方程和速度表达式可用已知量表示为:

$$x(t) = l \cos\left(2\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) \quad (13)$$

$$y'(t) = \frac{\sqrt{2}}{4}l \cos\left(2\sqrt{\frac{g}{l}}t + \frac{\pi}{4}\right) \quad (14)$$

$$v_x(t) = 2\sqrt{gl} \sin\left(2\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) \quad (15)$$

$$v_y(t) = -\sqrt{\frac{gl}{2}} \sin\left(2\sqrt{\frac{g}{l}}t + \frac{\pi}{4}\right) \quad (16)$$

由(16)式可求出小球速度沿 y 方向分量第一次为零的时刻, 即 $v_y(t_0) = 0$, 其中

$$t_0 = \frac{3\pi}{8} \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (17)$$

此后, 如果小球沿 y 方向的振动没有中断, 当小球沿 y 方向的振动到达最大振幅处时, (16)式右端便等于零, 然而, 按(16)式右端等于零所求出的其它时刻并不是满足题意的解: 因为在按(16)式求出的竖直速度等于零的第二个时刻之前, 小球将和 **B** 钉发生碰撞, 碰撞时刻为

$$t_c = \frac{3\pi}{4} \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (18)$$

此时, 按(13)和(14)两式可知

$$x(t_c) = l \cos\left(2\sqrt{\frac{g}{l}}t_c\right) = l \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \quad (19)$$

$$y(t_c) = \frac{\sqrt{2}}{4}l \cos\left(2\sqrt{\frac{g}{l}}t_c + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{mg}{k} = \frac{\sqrt{2}}{4}l \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{l}{4} = 0 \quad (20)$$

这恰好是 **B** 钉的位置, 这样, 小球将在 $t=t_c$ 时和 **B** 钉发生完全非弹性碰撞, 碰撞后小球速度为零; 由于碰撞过程时间极短, t_c 时刻就是小球速度沿 y 方向分量第二次为零的时刻。

碰撞后小球并不和 B 钉粘连，所以小球将沿 y 方向做一维的简谐振动，由(4)式可知此振动周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{4g}} \quad (21)$$

每经过半个振动周期 T ，都会出现速度为零的情况(此时自然有 $v_y=0$)。这样，除(17)和(18)式确定的前两个特定时刻之外，每当

$$t_n = t_c + n\frac{T}{2} = (n + \frac{3}{2})\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}, n=1, 2, \dots \quad (22)$$

时，小球速度都为零，因而其沿 y 方向的速度分量也为零。

评分标准：本题 15 分。

(2)式 1 分，(3)或(4)式 1 分；

(5)(6)(7)(8)(13)(14)(15)(16)(17)(18)(21)式各 1 分。

(22)式 2 分。

二、

参考解答：

1. 将固连于杆的 A、B 和 C 三端的小球分别称为 A、B 和 C 球，由于杆的质量可忽略，则三小球所受桌面支持力的大小都等于其重力。这一结论可通过如下方法证明：以 B 球为例，将 B 球连同一小段杆隔离出来作为研究对象，分析其在竖直方向的受力情况，它受小球重力和桌面支持力，这两个力的作用线过小球和桌面接触点并垂直于桌面，如果这两个力大小不相等，则在该研究对象的杆截面处必存在非零的竖直方向力，才能满足在竖直方向力的平衡方程，然而，如果存在这样的力，则相对于小球球心，该研究对象的力矩不为零，这违反研究对象的力矩平衡条件，因此，桌面支持力必等于小球重力，根据如上分析，三小球所受最大静摩擦力的大小都为

$$f_{\max} = \mu mg \quad (1)$$

体系由静止向运动转变的临界状态可能存在两种不同的情况，第一种情况是两个小球所受摩擦力的大小已达到 f_{\max} ，而第三个小球尚未达到 f_{\max} 。这种临界状态对应着体系将绕第三个小球转动，第二种情况为三小球所受摩擦力的大小都已达到 f_{\max} ，这种临界状态意

味着体系将发生平移或绕三小球以外的某点转动, 也可以是平动和转动的合成运动, 总之, 这是一种对应着三小球都将开始运动的临界状态.

可以论证所谓的第一种临界状态是不合理的. 换言之, 这种临界状态是不可能发生的, 为证明这种观点, 可设 B 和 C 球所受摩擦力已达到 f_{\max} , 而 A 球摩擦力尚未达到该值, 在此基础上如果再稍增加推力, 一种可能是 B 和 C 球仍保持静止, 但是 A 球的摩擦力值随之增加直到 f_{\max} , 但这就转变成第二种临界状态了. 另一种情况是 A 球摩擦力虽未达到 f_{\max} , 但也不再增加, 而 B 和 C 球已开始运动, 此时 A 球必为体系的转动中心, B 和 C 球处于绕之转动的临界状态, 由于在该临界状态系统仍静止, 所以在水平桌面内其所受外力的矢量和为零, 用矢量形式表示为

$$f_A + f_B + f_C = 0$$

上式左边的三个力分别为 A、B 和 C 球所受的静摩擦力. B 和 C 球的摩擦力大小为 $f_B = f_C = f_{\max}$, 其方向垂直于两小球到 A 球的连线. 将(1)式正交分解, 可求得 A 球所受的摩擦力大小为

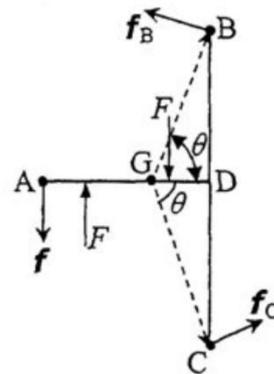
$$f_A = \sqrt{2}f_{\max} > f_{\max} \quad (2)$$

该值已超过最大静摩擦力 f_{\max} , 这意味着 A 球不可能处于静止状态, 所以这种临界状态不可能出现, 同理可知, 体系分别绕 B 或 C 球开始转动的临界状态也不可能出现, 因为这样的状态对应的 B 或 C 球的摩擦力为

$$f_{B/C} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}f_{\max} > f_{\max} \quad (3)$$

可见该值也超过了最大静摩擦力, 综上所述, 在体系由静到动的临界状态三小球所受摩擦力都达到最大摩擦力 f_{\max} .

2. 用 G 表示转轴在 AD 杆上的位置, 用 F 表示推力的大小, 在体系绕转轴刚好开始转动的临界状态, 桌面对 A、B 和 C 三球的最大静摩擦力(大小均为 μmg)的方向分别和连线 GA, GB 和 GC 垂直, 如图所示, 并且它们对 G 点的总力矩刚好和外力矩相平衡, 设 G 点与 D 点的距离为 xa , 则力矩平衡方程为



$$\mu mg(2\sqrt{x^2 a^2 + a^2} - xa) = \frac{Fa}{2} \quad (4)$$

此式可进一步整理为

$$3x^2 - 2\left(\frac{F}{2\mu mg} - 1\right)x + 4 - \left(\frac{F}{2\mu mg} - 1\right)^2 = 0 \quad (5)$$

这个方程有实根的条件是

$$\left(\frac{F}{2\mu mg} - 1\right)^2 \geq 12 - 3\left(\frac{F}{2\mu mg} - 1\right)^2 \quad (6)$$

上式简化为

$$F \geq 2(\sqrt{3} + 1)\mu mg \quad (7)$$

这意味着只有 F 满足如上条件时, 才能在 AD 杆上找到一个转轴位置而使体系运动起来, 换言之,

$$F = 2(\sqrt{3} + 1)\mu mg \quad (8)$$

是推动该体系转动的最小推力, 将上式代入(5)式, 可求出

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (9)$$

评分标准: 本题 20 分,

第 1 问 8 分,

(1)式 2 分, (2)(3)式各 3 分,

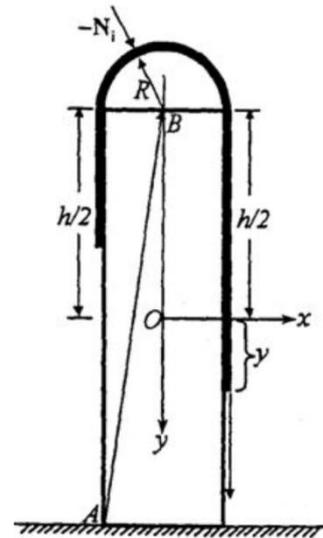
第 2 问 12 分,

(4)式 4 分, (6)式 2 分, (7)(8)(9)式各 2 分. 用其它方法正确得到(8)式的, 给(6)(7)(8)式的分值.

三、

参考解答

1. 以柱体中轴线与开始时刻链条端点所在水平线的相交点为原点, 建立坐标系 Oxy , 如图所示. 链条可视为质点组设在链条运动的某时刻, 其右侧端点相对其开始时位置已下降了一定的距离 y , 而链条左侧端点则相应上升了同样的距离, 首先分析此时链条的受力情况, 除受自身重力外, 链条还受到柱体半圆形表面的支持力. 在柱体上部半圆形表面上的任意点, 该支持力必沿半径向外方向, 用 N_i 表示. 链条受到的支持力是方向随其作用点而变化的力系, 简称支持力系.



链条质心的运动由它所受到的重力和支持力系决定. 建立链条质心运动方程, 先分析链条质心位置 (x_c, y_c) 随其右侧端点 y 坐标的变化规律. 由如图所示的几何关系, 可求得链条质心的坐标为

$$x_c = \frac{2R}{L} y + x_{c0} \quad (1)$$

$$y_c = \frac{y^2}{L} + y_{c0} \quad (2)$$

其中 (x_{c0}, y_{c0}) 是链条质心在开始时刻的位置, $L(=h+\pi R)$ 表示链条的总长度. 利用速度的定义, 可从(1)和(2)式求得质心的速度为

$$v_{cx} = \frac{2R}{L} v \quad (3)$$

$$v_{cy} = \frac{(y + \Delta y)^2 - y^2}{L \Delta t} \approx \frac{2y \Delta y}{L \Delta t} = \frac{2y}{L} v \quad (4)$$

其中 v 代表链条右端点速度(以向下为正向), 其大小可由链条运动的机械能守恒关系求得.

在链条下滑过程中只有重力做功, 所以机械能守恒

$$\left(\frac{m}{L} y\right) gy = \frac{1}{2} m v^2 \quad (5)$$

由此可知

$$v = \sqrt{\frac{2g}{L} y} \quad (6)$$

式中已同时考虑了 v 的方向.

由加速度的定义, 从(6)式可求出链条右侧端点的加速度

$$a = \frac{2g}{L}y \quad (7)$$

【(7)式也可从链条满足的运动方程 $\rho|2y|(-g) = (L\rho)a$ 求出, 其中 $\rho = m/L$.】

类似地, 由加速度的定义, 从(3)和(4)式出发, 并利用(6)和(7)式, 可求得链条质心运动的加速度

$$a_{cx} = \frac{4Rg}{L^2}y \quad (8)$$

$$a_{cy} = \frac{8g}{L^2}y^2 \quad (9)$$

根据牛顿第二定律写出链条质心运动方程, 可得到如下关系

$$\sum_i N_{ix} = ma_{cx} \quad (10)$$

$$mg + \sum_i N_{iy} = ma_{cy} \quad (11)$$

式中, $\sum_i N_{ix}$ 和 $\sum_i N_{iy}$ 分别为链条所受柱体的支持力系沿 x 和 y 方向的矢量和.

根据牛顿第三定律, 柱体受到链条的压力力系沿 x 和 y 方向的矢量和分别为

$$F_x = -\sum_i N_{ix} \quad (12)$$

和

$$F_y = -\sum_i N_{iy} \quad (13)$$

柱体受到自身重力、地面支持力 N_0 、地面摩擦力 f 和链条的压力力系的作用, 如果柱体尚未滑动和倾倒, 则由力的平衡条件知

$$f + F_x = 0 \quad (14)$$

$$N_0 + F_y + mg = 0 \quad (15)$$

柱体发生滑动的临界条件为

$$|f| = \mu|N_0| \quad (16)$$

将(8)至(15)式代入上式, 可求得柱体在地面上刚好发生滑动时坐标 y 所满足的方程为

$$4y^2 + \frac{2R}{\mu}y - L^2 = 0 \quad (17)$$

其解应在 $(0, h/2]$ 区间内, 即

$$0 < y_{\text{滑}} = \frac{R}{\mu} \frac{\sqrt{4\mu^2 \left(\frac{h}{R} + \pi\right)^2 + 1} - 1}{4} \leq \frac{h}{2} \quad (18)$$

由此可知

$$\mu \leq \frac{h}{\pi(2h + \pi R)} \quad (19)$$

这是在链条下滑过程中, 在链条右端接触地面之前, 柱体能在地面上滑动的条件.

2. 另一方面, 由(8)、(10)和(12)式可知, 链条在下滑过程中作用于柱体的水平方向的压力 F_x , 方向向左, 所以柱体可能向左倾倒, 倾倒的临界条件为地面支持力的作用点移至柱体左下角的 A 点, 同时其它力相对于该点的力矩之和刚好为零, 链条对柱体的压力力系对 A 点的力矩的值(沿顺时针方向为正)可写为

$$\tau_N \sum_i [(Q_x + Q_{ix})(-N_{iy}) - (Q_y + R_{iy})(-N_{ix})] \quad (20)$$

上式中 $Q_x=R$ 和 $Q_y=-h$ 分别代表由 A 指向半圆圆心 B 的位矢的 x 和 y 分量, R_{ix} 和 R_{iy} 分别代表由 B 指向半圆上点 i 的半径矢量 R_i 的 x 和 y 分量. 由于柱体在其半圆形表面上点 i 受到的压力 $-N_i$ 沿半径方向, 所以有

$$\frac{R_{ix}}{R_{iy}} = \frac{(-N_{ix})}{(-N_{iy})} \quad (21)$$

因此(20)式可化简为

$$\tau_N = RF_y + hF_x \quad (22)$$

在柱体刚好能倾倒的临界状态下, 相对于柱体 A 点的力矩平衡条件为

$$\tau_N + mgR = 0 \quad (23)$$

由(8)至(11)式可算得力矩 τ_N , 再利用(9)、(11)、(13)和(15)式, 上式成为

$$\left(1 - \frac{8y^2}{2}\right)mgR - \frac{4mgRy}{L^2}h + mgR = 0 \quad (24)$$

此即

$$4y^2 + 2hy - L^2 = 0 \quad (25)$$

这是柱体刚好能倾倒时坐标 y 所满足的方程, 其解应在 $(0, h/2]$ 区间内, 即

$$0 < y_{\text{倾}} = h \frac{\sqrt{4\left(\pi \frac{R}{h} + 1\right)^2 + 1} - 1}{4} \leq \frac{h}{2} \quad (26)$$

由此可知

$$R \leq \frac{\sqrt{2}-1}{\pi} h \quad (27)$$

这是在链条下滑过程中, 在链条右端接触地面之前, 柱体能向一侧倾倒的条件.

3. 为使柱体滑动先于倾倒发生, 应有

$$y_{\text{滑}} < y_{\text{倾}} \quad (28)$$

将(18)和(25)式中 $y_{\text{滑}}$ 和 $y_{\text{倾}}$ 的表达式带入上式得

$$\frac{R}{\mu} - h > \sqrt{\left(\frac{R}{\mu}\right)^2 + 4L^2} - \sqrt{h^2 + 4L^2} \quad (29)$$

两边同乘以 $\sqrt{\left(\frac{R}{\mu}\right)^2 + 4L^2} + \sqrt{h^2 + 4L^2}$ 得

$$\left(\sqrt{\left(\frac{R}{\mu}\right)^2 + 4L^2} + \sqrt{h^2 + 4L^2}\right) \left(\frac{R}{\mu} - h\right) > \left(\frac{R}{\mu} + h\right) \left(\frac{R}{\mu} - h\right)$$

显然

$$\left(\sqrt{\left(\frac{R}{\mu}\right)^2 + 4L^2} + \sqrt{h^2 + 4L^2}\right) > \left(\frac{R}{\mu} + h\right)$$

此结果可进一步化简为

$$\mu < \frac{R}{h} \quad (30)$$

这就是在链条开始下滑直至其右端接触地面之前的过程中, 柱体若既能在地面上滑动, 也能向一侧倾倒, 使柱体滑动先于倾倒的条件.

评分标准: 本题 20 分.

第 1 问 13 分,

(1)(2)(3)(4)(8)(9)(10)(11)(14)(15)(16)(18)(19)式各 1 分,

第 2 问 4 分,

(22)(23)(26)(27)式各 1 分.

第 3 问 3 分,

(28)式 1 分，(30)式 2 分.

四、

参考解答：

解法一：

按照“两球不发生碰撞且都不会从桌面掉落的前提下尽量减小圆桌面面积”这个要求，可以推断出两球的质心应该保持不动，在初始时刻，质心在两球球心的连线上，与 A 球球心和 B 球球心的距离分别是

$$\frac{4m}{m+4m}4a = 16a/5 \quad (1)$$

$$\frac{4m}{m+4m}4a = 4a/5 \quad (2)$$

在此后的任何时刻，如果两个球心之间的距离为 l ，那么 A 球球心到质心的距离是 $4l/5$ ，B 球球心到质心的距离是 $l/5$ 。

按题意，两球之间的相互作用力是库仑吸引力，即

$$f = k_e \frac{-4Q^2}{r_{AB}^2}$$

在质心系中，若用 \hat{r}_{AC} 和 \hat{r}_{BC} 分别表示质心到 A 球心和 B 球心方向的单位矢量，A 球和 B 球的运动方程分别为

$$ma_A = k_e \frac{-4Q^2}{\left(\frac{5}{4}r_{AC}\right)^2} \hat{r}_{AC} \quad (3)$$

$$4ma_B = k_e \frac{-4Q^2}{(5r_{AC})^2} \hat{r}_{BC} \quad (4)$$

(3)和(4)式表明 A 球和 B 球都在质心系中做椭圆运动。

为了使两球的运动轨道覆盖尽量小的面积，球心距的初始值 $4a$ 应该是它的最大；值，最小距离只能是两球的半径之和 $2a$ ，所以，初始时，A 球和 B 球分别处在其椭圆轨道的远日点，距质心的距离分别为 $16a/5$ 和 $4a/5$ ；A 球和 B 球处在其椭圆轨道的近日点时，距质心的距离分别为 $8a/5$ 和 $2a/5$ 。

A 球椭圆轨道的半长轴和半短轴分别是

$$r_a = \frac{1}{2} \left(\frac{16}{5}a + \frac{8}{5}a \right) = \frac{12}{5}a \quad (5)$$

$$r_b = \sqrt{\frac{16}{5}a \times \frac{8}{5}a} = \frac{8\sqrt{2}}{5}a \quad (6)$$

B 球椭圆轨道的半长轴和半短轴分别是

$$r_a' = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}a + \frac{4}{5}a\right) = \frac{3}{5}a \quad (7)$$

$$r_b' = \sqrt{\frac{2}{5}a \times \frac{4}{5}a} = \frac{2\sqrt{2}}{5}a \quad (8)$$

所以 A 球的椭圆轨道大于 B 球的椭圆轨道.

由于两球的质心不动, 在任何时刻 A 球速度与 B 球速度应满足

$$v_A = 4v_B$$

但方向相反. 在初始时刻两球相距最远, 所以它们的初始速度的方向一定要和两球球心的连线垂直. 在质心系中, 设 B 球的初始速度为 v_{B0} , 那么 A 球的初始速度就是

$$v_{A0} = 4v_{B0}$$

当两球相距 $2a$ 时, B 球和 A 球的速度分别为 v_{B1} 和 $v_{A1} = 4v_{B1}$, 它们的方向也和那时两球球心的连线相垂直. 按角动量守恒, 在这两个时刻两球相对于质心的总角动量必相等, 所以

$$m(4v_{B0})\frac{16a}{5} + 4mv_{B0}\frac{4a}{5} = m(4v_{B1})\frac{8a}{5} + 4mv_{B1}\frac{2a}{5} \quad (9)$$

由此解得

$$v_{B1} = 2v_{B0} \quad (10)$$

按能量守恒, 在这两个时刻两球总能量(动能加势能)必相等, 所以

$$\frac{1}{2}m(4v_{B0})^2 + \frac{1}{2}(4m)v_{B0}^2 - \frac{k_e 4Q^2}{4a} = \frac{1}{2}(4v_{B1})^2 + \frac{1}{2}(4m)v_{B1}^2 - \frac{k_e 4Q^2}{2a} \quad (11)$$

将(10)式代入(11)式中即可解出

$$v_{B0} = \sqrt{\frac{k_e Q^2}{30ma}}, \quad v_{A0} = 4\sqrt{\frac{k_e Q^2}{30ma}} \quad (12)$$

由前分析知, 最小的圆桌面范围由 A 球的运动划定, 在质心系中, 它的运动轨道是以质心为力心、长半轴为 $\frac{12a}{5}$ 、短半轴为 $\frac{8\sqrt{2}a}{5}$ (的椭圆, 所以两球都不会从桌面掉落的圆桌面的最小半径 R_{\min} 为)

$$R_{\min} = \frac{12}{5}a \quad (13)$$

评分标准：本题 20 分。

第 1 问 18 分，

(1)(2)式各 1 分，(3)(4)式各 2 分，(5)(6)(7)(8)式各 1 分，

(9)(11)式各 3 分，(12)式 2 分，

第 2 问 2 分。

(13)式 2 分。

解法二：

按题意，两球之间的相互作用力是库仑吸引力，即

$$f = k_e \frac{-4Q^2}{r_{AB}^2}$$

用 \hat{r}_{AB} 表示 B 球心到 A 球心方向的单位矢量，A 球和 B 球的运动方程是

$$ma_A = k_e \frac{-4Q^2}{r_{AB}^2} \hat{r}_{AB}, \quad (1)$$

$$4ma_B = k_e \frac{4Q^2}{r_{AB}^2} \hat{r}_{AB}, \quad (2)$$

所以

$$\frac{4m}{5}(a_A - a_B) = k_e \frac{-4Q^2}{r_{AB}^2} \hat{r}_{AB} \quad (3)$$

这表明，两球的相对运动类似于天体在万有引力作用下的运动，它们不发生碰撞、且不无限远离的一般情形是相对做椭圆运动，若以 A 球心为原点建立平动参考系，则 B 球作椭圆运动。

按照“两球不发生碰撞且都不会从桌面掉落的前提下尽量减小圆桌面面积”这个要求，可以推断出两球的质心应该保持不动。为了使两球的运动轨道覆盖尽量小的面积，两球球心距离的初始值 $4a$ 应该是它的最大值，最小距离只能是两球的半径之和 $2a$ ，在初始时刻两球相距最远，所以它们的初始速度的方向一定要和两球球心的连线相垂直。

设初始时刻 A 和 B 球相对桌面的速度分别为 v_{A0} 和 v_{B0} ，则 B 球相对于 A 球的初速度为

$v = v_{A0} - v_{B0}$ ，初始时刻体系的能量为

$$E = \frac{1}{2} 4mv^2 - \frac{4k_e Q^2}{4a} \quad (4)$$

由天体运动知识可知 B 球距离 A 球的最近和最远距离之和满足

$$r_{\min} + r_{\max} = -\frac{4k_e Q^2}{E} \quad (5)$$

又因为初始时刻两球球心距离的初始值 $4a$ 为两球最远距离情况, 即 $r_{\max} = 4a$. 利用(5)式得

$$\frac{1}{2} \frac{4mv^2}{5} = 4k_e Q^2 \left[\frac{1}{4a} - \frac{1}{4a + r_{\min}} \right] \quad (6)$$

当 $r_{\min} = 2a$ 时两球刚好相切, 对应着两球发生碰撞的临界情况, 可求得 B 球相对于 A 球的初速度为

$$v = \sqrt{\frac{5k_e Q^2}{6ma}} \quad (7)$$

由于两球的质心必须相对于桌面静止, 所以有

$$4v_{B0} - v_{A0} = 0 \quad (8)$$

再利用关系 $v = v_{B0} - v_{A0}$ 可求得两球相对于桌面的速度大小为

$$v_{A0} = 4v_{B0} = 4\sqrt{\frac{k_e Q^2}{30ma}} \quad (9)$$

两速度都垂直于初始时刻的球心距, 且两者方向相反.

初始时刻, 质心在两球球心的连线上, 与 A 球心和 B 球心的距离分别是

$$\frac{4m}{m+4m} 4a = \frac{16}{5} a \quad (10)$$

$$\frac{m}{m+4m} 4a = \frac{4}{5} a \quad (11)$$

如果两个球心之间的距离为 l , 那么 A 球球心到质心的距离是 $4l/5$, B 球球心到质心的距离是 $l/5$. 结合(1)和(2)式可知在质心系, A 球和 B 球绕质心的运动轨迹也是椭圆, 初始时, A 球和 B 球分别处在其椭圆轨道的远日点, 距质心的距离分别为 $16a/5$ 和 $4a/5$; A 球和 B 球处在其椭圆轨道的近日点时, 距质心的距离分别为 $8a/5$ 和 $2a/5$.

A 球椭圆轨道的半长轴和半短轴分别是

$$r_a = \frac{1}{2} \left(\frac{16}{5} a + \frac{8}{5} a \right) = \frac{12}{5} a \quad (12)$$

$$r_b = \frac{1}{2} \left(\frac{16}{5} a \times \frac{8}{5} a \right) = \frac{8\sqrt{2}}{5} a \quad (13)$$

B 球椭圆轨道的半长轴和半短轴分别是

$$r_a' = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} a + \frac{4}{5} a \right) = \frac{3}{5} a \quad (14)$$

$$r_b' = \sqrt{\frac{2}{5}a \times \frac{4}{5}a} = \frac{2\sqrt{2}}{5}a \quad (15)$$

所以 B 球的椭圆轨道在桌面上包含在 A 球绕质心的椭圆轨道之内，最小的圆桌面范围由 A 球的运动划定。A 球的运动轨道是以质心为力心、长半轴为 $\frac{12a}{5}$ 、短半轴为 $\frac{8\sqrt{2}a}{5}$ 的椭圆，所以圈桌面的最小半径为 R_{\min} 为

$$R_{\min} = \frac{12}{5}a \quad (16)$$

评分标准：本题 20 分，

第 1 问 14 分，

(1)(2)式各 2 分，(3)式 1 分，(4)(5)(6)式各 2 分；

(7)(8)(9)式各 1 分，

第 2 问 6 分，

(12)(13)(14)(15)式各 1 分，(16)式 2 分。

五、

参考解答：

在切断圆线圈中的电流时，变化的磁场将产生涡旋电场。由对称性可知，在圆盘边缘处涡旋电场场强的大小处处相等，涡旋电场对单位正电荷的作用力在单位正电荷沿圆盘边缘运动一周过程中所作的功，就是与圆盘边缘重合的闭合回路中的感应电动势。若以 ε 表示感应电动势， E_c 表示圆盘边缘处涡旋电场场强的大小，则有

$$\varepsilon = 2\pi R E_c \quad (1)$$

根据法拉第电磁感应定律，感应电动势的大小为

$$\varepsilon = \left| \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \right| \quad (2)$$

式中 $\Delta\phi$ 是在切断圆线圈电流过程中通过圆盘平面磁通量的改变量， Δt 为经历的时间，由磁感应线的闭合性知道，圆线圈磁场对圆盘的磁通量的大小等于通过圆盘以外的圆盘所在平面的磁通量，但符号相反，为了求出圆线圈磁场对圆盘以外的圆盘所在平面的磁通量，先考察该磁场对半径为 r_i 与 r_{i+1} 之间的圆环的磁通量 ϕ_i ，此磁通量可用 r_i 处的磁感应强度

$B = k_m \frac{2\pi a^2 I}{r_i^3}$ 与圆环面积 $2\pi r_i(r_{i+1} - r_i)$ ，的乘积来表示即

$$\begin{aligned}
 \phi_i &= k_m \frac{2\pi a^2 I}{r_i^3} 2\pi r_i (r_{i+1} - r_i) \\
 &= 4\pi^2 k_m a^2 I \left(\frac{1}{r_i^2} \right) (r_{i+1} - r_i) \\
 &\approx 4\pi^2 k_m a^2 I \frac{1}{r_{i+1} r_i} \\
 &= -4\pi^2 a^2 k_m I \left(\frac{1}{r_i^2} \right) \left(\frac{1}{r_{i+1}} - \frac{1}{r_i} \right)
 \end{aligned}$$

圆线圈磁场对圆盘以外的圆盘所在平面的磁通量

$$\phi = \sum \phi_i = \sum -4\pi^2 a^2 k_m I \left(\frac{1}{r_i^2} \right) \left(\frac{1}{r_{i+1}} - \frac{1}{r_i} \right)$$

注意到 $r_1 = R, r_\infty = \infty$ 有

$$\phi = \frac{4\pi^2 a^2 k_m I}{R} \quad (3)$$

由于电流切断后，磁场消失，故通过圆盘的磁通量的变化量的大小

$$|\phi| = \frac{4\pi^2 a^2 k_m I}{R} \quad (4)$$

由(1)、(2)、(4)各式得

$$E_c = \frac{2\pi^2 k_m I}{R^2 \Delta t} \quad (5)$$

由楞次定律可知涡旋电场沿顺时针方向。

涡旋电场作用于第 i 个金属小球的力矩为

$$L_i = qE_c R = \frac{2k_m \pi a^2 q}{R^2 \Delta t} \frac{I}{\Delta t} \quad (6)$$

方向垂直于圆盘面竖直向下，涡旋电场作用于 4 个金属小球的合力矩

$$L = \sum L_i = \frac{8k_m \pi a^2 q}{R \Delta t} \frac{I}{\Delta t}$$

在圆线圈电流消失过程中， Δt 时间内涡旋电场作用于 4 个金属小球的合力矩的冲量为

$$L\Delta t = \frac{8k_m \pi a^2 q}{R} I \quad (7)$$

根据角动量定理，小球将获得角动量，若金属小球绕固定转轴转动的角速度为 ω ，有

$$\frac{8k_m \pi a^2 q}{R^3} I = 4mR^2 \omega \quad (8)$$

由(8)式得

$$\omega = \frac{2k_m \pi a^2 q}{mR^3} I \quad (9)$$

由于金属小球固定在圆盘上, 故圆盘转动的角速度亦为 ω , 且沿顺时针方向转动.

金属小球转动时, 受到磁感应强度为 B_0 的磁场作用力的大小为

$$f_B = qB_0 R \omega = \frac{2k_m \pi a^2 q^2 B_0}{mR^2} I \quad (10)$$

力的方向沿圆盘半径指向圆心.

4 个带电金属小球间存在静电相互作用力, 任一小球受到其他 3 个金属小球的静电力的合力为

$$f_e = q(k_e \frac{q}{4R^2} + k_e \frac{\sqrt{2}q}{2R^2}) = k_e \frac{q(1+\sqrt{2})}{4R^2} \quad (11)$$

此力方向沿圆盘半径由圆心向外.

以 f 表示圆盘在水平方向对金属小球的作用力的大小, 由牛顿第二定律有

$$f + f_B - f_e = m\omega^2 R \quad (12)$$

由(9)、(10)、(11)、(12)各式得

$$f = \frac{4k_m^2 \pi^2 a^4 q^2}{mR^5} I^2 + k_e \frac{q(1+\sqrt{2})}{4R^2} - \frac{2k_m \pi a^2 q^2 B_0}{mR^2} I \quad (13)$$

评分标准: 本题 20 分.

(1)(2)式各 1 分, (4)式 4 分, (5)式 3 分;

(6)(7)(8)式各 . 2 分, (9)(10)(11)(12)(13)式各 1 分.

六、

参考答案:

1. 设初始时两室气体的体积均为 v_0 , B 室中气体的摩尔数为 n_0 , 压强为 P_0 . 初始时 A 室气体压强是 $4P_0$, 因而 A 室气体的摩尔数为 $4n_0$. 把 A、B 室中的气体作为整体, 虽然活塞与气缸壁间存在摩擦, 但是摩擦力做功转换成热完全被 B 室中的气体吸收, 因而整个气体与气缸外界无能量交换, 因此 A 室中气体经历了绝热过程; B 室中的气体经历的过程并不是绝热过程. 活塞释放之后 A 室中气体的温度降低, 根据题知其中的气体分子不会发生分解. B 室中的气体吸热, 温度可升高, 可能超过 κT_0 , 有可能发生分子分解, 设 A 室中气体的终态温度为 T_A , B 室中气体的终态温度 T_B , 并且假定活塞运动过程中有部分气体分子

分解, B 室终态气体有 αn_0 摩尔分子分解. 按热力学第一定律

$$4n_0 C(T_A - T_0) + [(1 + \alpha) n_0 C_B T_0 + \alpha n_0 C_B T_0 - n_0 C_B T_0] = 0 \quad (1)$$

代入 $\phi = CT_0/10$, 上式化为

$$4T_A + (1 + \alpha)T_B = \left(5 - \frac{\alpha}{10}\right)T_0 \quad (2)$$

终态时两室气体的压强必相等, 设为 P , 并设终态时 A 和 B 室的体积分别为 V_A 和 V_B . 那么状态方程是

$$\frac{PV_0}{T_0} = n_0 R, \quad \frac{PV_A}{T_A} = 4n_0 R, \quad \frac{PV_B}{T_B} = (1 + \alpha)n_0 R, \quad (3)$$

将它们代入(2)式得

$$4 \frac{PV_A}{4n_0 R} + (1 + \alpha) \frac{PV_B}{(1 + \alpha)n_0 R} = \left(5 - \frac{\alpha}{10}\right) \frac{PV_0}{n_0 R}, \quad (4)$$

此即

$$P(V_A + V_B) = \left(5 - \frac{\alpha}{10}\right) P_0 V_0, \quad (5)$$

由于气缸是刚性的, 有

$$V_A + V_B = 2V_0,$$

所以

$$P = \frac{1}{2} \left(5 - \frac{\alpha}{10}\right) P_0. \quad (6)$$

下面求 B 室末态的温度 T_B , 对 A 室气体有

$$4P_0 V_0^\gamma = PV_A^\gamma, \quad (7)$$

对 B 室气体有

$$P(2V_0 - V_A) = (1 + \alpha)n_0 R T_B, \quad (8)$$

将(7)式代入(8)式, 并利用(6)式以及相关的状态方程, 得

$$T_B = \frac{5 - (\alpha/10)}{2(1 + \alpha)} \left[2 - \left(\frac{8}{5 - (\alpha/10)} \right)^{3/4} \right] T_0. \quad (9)$$

当 $\alpha=0$ 时,

$$T_B = \frac{5}{2} \left[2 - \left(\frac{8}{5} \right)^{3/4} \right] T_0 = 1.44T_0, \quad (10)$$

因此

$$T_d \geq 1.45T_0 \quad (11)$$

2. 当 $\alpha=10.0\%$ 时,

$$T_B = \frac{5-0.01}{2.2} \left[2 - \left(\frac{8}{5-0.01} \right)^{3/4} \right] T_0 = 1.30T_0, \quad (12)$$

而 $\alpha=\beta(T_B-T_d)$, 因此

$$T_d = T_B - \frac{\alpha}{\beta} = \left(1.30 - \frac{0.100}{2.00} \right) T_0 = 1.25T_0. \quad (13)$$

评分标准: 本题 15 分.

第 1 问 11 分,

(1)或(2)式 2 分, (4)或(5)式 2 分, (6)式 2 分;

(7)(8)(9)(10)(11)式各 1 分.

第 2 问 4 分,

(12)(13)式各 2 分.

七、

参考解答:

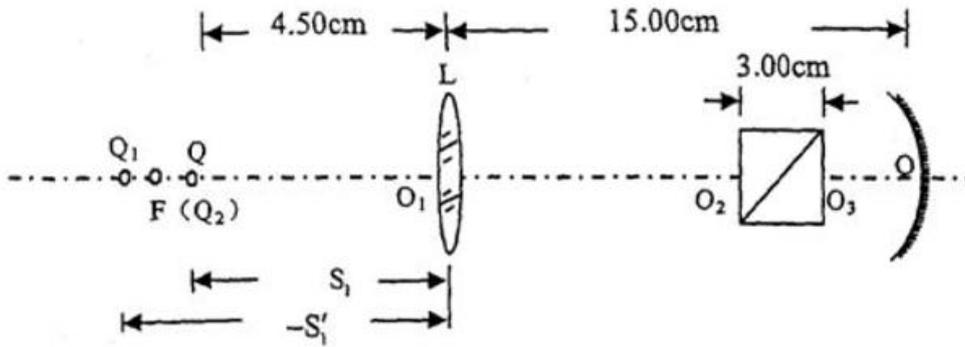
填空部分:

0.0375, 8.25

计算部分:

求凹球面镜的曲率半径 R .

如图一所示, 十字缝 S 向右移动到 Q 处, 经透镜 L 成像于 Q_1 处, 再经分束棱镜 $abcd$ (相当于平板玻璃) 两次折射一定成像于凹球面镜的焦点 F 处, 此时经过凹球面镜反射的光才是平行光, 此平行光再经分束棱镜反射进入望远镜, 通过望远镜目镜看清楚十字缝的像成在分划板中心十字叉丝线上.



图一

i) 求 Q 点经透镜 L 所成像 Q' 点的位置.

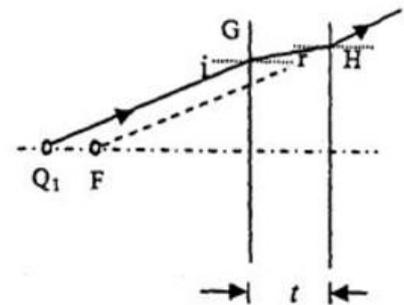
由透镜物像距公式有

$$\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_1'} = \frac{1}{f_L} \quad (1)$$

其中焦距 $f_L = 8.25 \text{ cm}$, 物距 $S_1 = (8.25 - 3.75) \text{ cm} = 4.50 \text{ cm}$, 代入上式解得像距

$$S_1' = -9.90 \text{ cm} \quad (2)$$

ii) Q_1 处的像再经分束棱镜即相当于厚度为 t 、折射率为 n 的平板玻璃两次折射成像, 其像点 Q_2 的位置一定在凹球面镜的焦点 F 处, 求物点与像点之间的距离 $\overline{Q_1 F}$.



图二

如图二所示, 从 Q_1 点发出的光线 $Q_1 G$ 两次折射从 H 点射出, 其出射光线的反向延长线 $H F$ 与光轴的交点为像点 Q_2 的位置, 即凹球面镜的焦点 F 处. 因为出射光线 $H F$ 与入射光线 $Q_1 F$ 平行, 由几何关系有

$$\tan i = \frac{t \tan r}{t - Q_1 F}$$

式中 i 和 r 是入射角和折射角. i 很小, 故有

$$\tan i \approx \sin i, \quad \tan r \approx \sin r$$

于是有

$$n = \frac{\tan i}{\sin r} = \frac{t}{t - Q_1 F}$$

即

$$\overline{Q_1F} = \frac{n-1}{n}t \quad (3)$$

将 $n=1.52$ 和 $f=3.00\text{cm}$ 代入(3)式得

$$\overline{Q_1F} = 1.03\text{cm} \quad (4)$$

iii)凹球面镜的焦距为

$$f = \overline{FQ} = -S' - \overline{Q_1F} + \overline{O_1O} = 23.87\text{cm} \quad (5)$$

iv)凹球面镜的曲率半径为

$$R = 2f = 47.74\text{cm} \quad (6)$$

评分标准: 本题 15 分,

填空 6 分,

第一空 4 分, 第二空 2 分.

计算 9 分,

(1)式 1 分, (2)(3)式各 2 分, (5)式 3 分, (6)式 1 分.

八、

参考解答:

电子绕原子核做匀速圆周运动, 设在某一允许的圆周轨道上, 电子的能量为

$$E = \frac{1}{2}m_e v^2 - k_e \frac{e^2}{r} \quad (1)$$

(1)式右端两项分别表示电子在该轨道上的动能和势能, r 为轨道半径, 原子核对该电子的库仑吸引力充当其圆周运动的向心力, 因而有

$$m_e \frac{v^2}{r} = k_e \frac{e^2}{r^2} q \quad (2)$$

氢原子圆周轨道的量子化条件为

$$m_e v r = n h \quad (3)$$

其中 n 取正整数.

联立(1)、(2)和(3)式可得

$$E_n = -\frac{m_e k_e^2 e^4}{2n^2 h^2} \quad (4)$$

其中对电子能量引入了下标 n 用以表征不同轨道的电子能级, (4)式是在国际单位制中电子

能级的表达式, 氢原子的基态对应于 $n=1$. 而在原子单位制中, (4)式右端可取

$m_e = \sqrt{k_e} e = h = n = 1$. 所以有由

$$1E_{\text{au}} = \left(\frac{m_e k_e^2 e^4}{h^2} \right) \text{J} \quad (5)$$

(1)和(2)可得

$$E_1 = -k_e \frac{e^2}{2r_1} \quad (6)$$

将(6)式和(4)式联立并运用于 $n=1$ 情况, 可得氢原子基态的轨道半径为

$$r_1 = \frac{h^2}{m_e k_e e^2} \quad (7)$$

由上式知, 在原子单位制中有

$$1L_{\text{au}} = r_1 = \left(\frac{h^2}{m_e k_e e^2} \right) \text{m} \quad (8)$$

电子在基态轨道上的运动周期为

$$t = \frac{2\pi r_1}{v_1} \quad (9)$$

其中电子在基态轨道上的运动速度为

$$v_1 = \frac{h}{m_e r_1} \quad (10)$$

由(9)和(10)式可得时间的原子单位为

$$1T_{\text{au}} = \left(\frac{h^3}{m_e k_e^2 e^4} \right) \text{S} \quad (11)$$

评分标准: 本题 15 分.

(1)(2)(3)(4)式各 1 分, (5)式 3 分;

(6)(7)式各 1 分, (8)式 2 分;

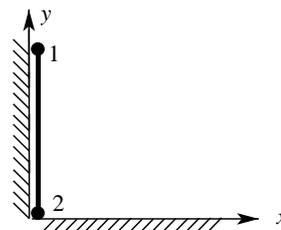
(9)(10)式各 1 分, (11)式 2 分.

第 30 届全国中学生物理竞赛决赛考试试题

一、(15 分) 一质量为 m 的小球在距水平地面 h 高处以水平速度 $\sqrt{2gh}$ 抛出, 空气阻力不计. 小球每次落地反弹时水平速度不变, 竖直速度大小按同样的比率减少. 若自第一次反弹开始小球的运动轨迹与其在地面的投影之间所包围的面积总和为 $\frac{8}{21}h^2$, 求小球在各次与地面碰撞过程中所受到的总冲量.

提示: 小球每次做斜抛运动 (从水平地面射出又落至地面) 的轨迹与其在地面的投影之间所包围的面积等于其最大高度和水平射程乘积的 $\frac{2}{3}$.

二、(15 分) 质量均为 m 的小球 1 和 2 由一质量可忽略、长度为 l 的刚性轻杆连接, 竖直地靠在墙角, 小球 1 在杆的上端, 如图所示. 假设墙和地面都是光滑的. 初始时给小球 2 一个微小的向右初速度. 问在系统运动过程中, 当杆与竖直墙面之间的夹角等于何值时, 小球 1 开始离开竖直墙面?



三、(25 分) 太空中有一飞行器靠其自身动力维持在地球赤道的正上方 $L = \alpha R_e$ 处, 相对于赤道上的地面物资供应站保持静止. 这里, R_e 为地球的半径, α 为常数, $\alpha > \alpha_m$, 而

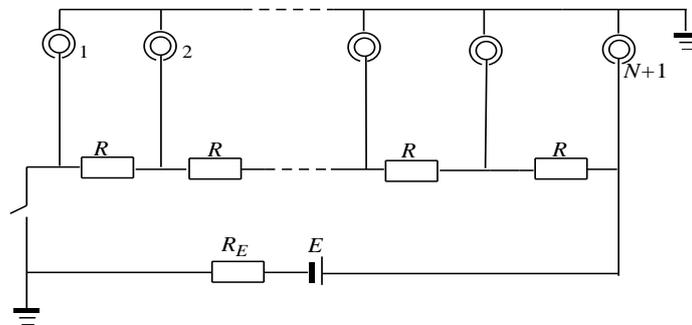
$$\alpha_m = \left(\frac{GM_e}{\omega_e^2 R_e^3} \right)^{1/3} - 1,$$

M_e 和 ω_e 分别为地球的质量和自转角速度, G 为引力常数. 设想从供应站到飞行器有一根用于运送物资的刚性、管壁匀质、质量为 m_p 的竖直输送管, 输送管下端固定在地面上, 并设法保持输送管与地面始终垂直. 推送物资时, 把物资放进输送管下端内的平底托盘上, 沿管壁向上推进, 并保持托盘运行速度不致过大. 忽略托盘与管壁之间的摩擦力, 考虑地球的自转, 但不考虑地球的公转. 设某次所推送物资和托盘的总质量为 m .

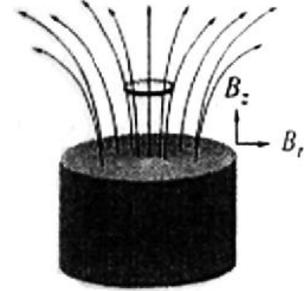
1. 在把物资从供应站送到飞行器的过程中, 地球引力和惯性离心力做的功分别是多少?

2. 在把物资从供应站送到飞行器的过程中，外推力至少需要做多少正功？
3. 当飞行器离地面的高度（记为 L_0 ）为多少时，在把物资送到飞行器的过程中，地球引力和惯性离心力所做功的和为零？
4. 如果通过适当控制飞行器的动力，使飞行器在不输送物资时对输送管的作用力恒为零，在不输送物资的情况下，计算当飞行器离地面的高度为 $L = \alpha R_e$ ($\alpha > \alpha_m$) 时，地面供应站对输送管的作用力；并对 $L > L_0$ 、 $L = L_0$ 、 $\alpha_m R_e < L < L_0$ 三种情形，分别给出供应站对输送管作用力的大小和方向。

四、（20分）一电路包含内阻为 R_E 、电动势为 E 的直流电源和 N 个阻值均为 R 的相同电阻，有 $N+1$ 个半径为 r 的相同导体球通过细长导线与电路连接起来，球壳上有小缺口容许细长导线进入但与其绝缘，如图所示。把导体球按照从左向右的顺序依次编号为 1 到 $N+1$ 。所有导体球起初不带电，开关闭合并达到稳定状态后，导体球上所带的总电量为 Q 。问导体球的半径是多少？已知静电力常量为 k 。



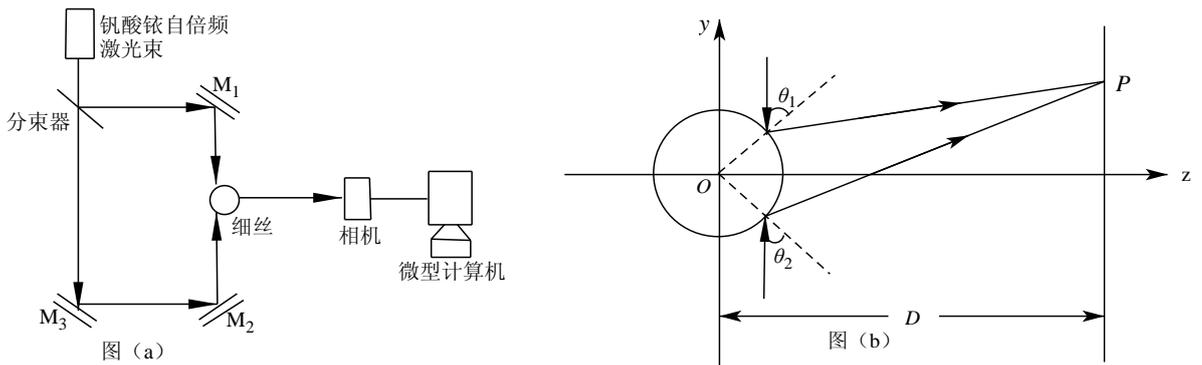
五、(20分) 如图, 处于超导体、半径为 r_0 、质量为 m 、自感为 L 的超导细圆环处在竖直放置的柱形磁棒上方, 其对称轴与磁棒的对称轴重合. 圆环附近的磁场具有柱对称性, 磁感应强度 B 可用一个竖直分量 $B_z = B_0(1 - 2\alpha z)$ 和一个径向分量 $B_r = B_0\alpha r$ 近似地描述. 这里 B_0 、 α 为大于零的常量, z 、 r 分别为竖直和径向位置坐标. 在 $t=0$ 时刻, 环心的坐标为 $z=0$ 、 $r=0$, 环上电流为 I_0 (规定圆环中电流的正向与 z 轴正向满足右手规则). 此时把圆环释放, 圆环开始向下运动, 其对称轴仍然保持竖直. 处于超导态的超导细圆环具有这样的性质: 穿过超导细圆环的磁通量保持不变.



1. 圆环作何种运动? 给出环心的 z 坐标与时间的依赖关系.
2. 求 t 时刻圆环中电流 I 的表达式.

六、(15分) 一厚度为 t 的薄金属盘悬吊在温度为 300.0K 的空气中, 其上表面受太阳直射, 温度为 360.0K , 下表面的温度为 340.0K . 空气的温度保持不变, 单位时间内金属盘每个表面散失到空气中的能量与此表面和空气的温度差以及此表面的面积成正比, 忽略金属盘侧面的能量损失. 若金属盘的厚度变为原来的 2 倍, 求金属盘上、下表面的温度.

七、(15分) 亚毫米细丝直径的双光束干涉测量装置如图(a)所示, 其中 M_1 、 M_2 、 M_3 为全反射镜, 相机为 CCD(电荷耦合装置)相机. 来自钷酸铷自倍频激光器的激光束被分束器分成两束, 一束经全反镜 M_1 反射后从上侧入射到细丝上; 另一束经全反镜 M_3 和 M_2 相继反射后从下侧入射到细丝上. 图(b)给出了两条反射光线产生干涉的光路, 其中 θ_1 、 θ_2 分别为上、下两侧的入射角, D 为细丝轴线到观察屏(即相机感光片)的距离, P 为两条反射光线在观察屏上的交点. 已建立这样的直角坐标系: 坐标原点 O 位于细丝的轴线上, x 轴(未画出)沿细丝轴线、指向纸面内, y 轴与入射到细丝上的光线平行(y 轴的正向向上), z 轴指向观察屏并与其垂直. 已知光波长为 λ , 屏上干涉条纹的间距为 a . 由于 D 远大于细丝直径和观察屏的尺寸, 可假设投射到屏上的只有非常接近平行于 z 轴的细光束.



1. 由于细丝到观察屏的距离远大于观察屏的尺寸, 因而上、下两侧的入射光只有 45° 入射角附近的细光束经细丝反射到屏上, 上、下两侧的反射光束分别形成两个虚像. 试求这两个虚像的位置. (注: 当 $x \sim 0$ 时, $\sin x \sim x, \cos x \sim 1$)
2. 求细丝的直径 d .

八、(15分) 相对于站立在地面的李同学, 张同学以相对论速率 v 向右运动, 王同学以同样的速率 v 向左运动. 当张同学和王同学相遇时, 三位同学各自把自己时钟的读数调整到零. 当张同学和王同学之间的距离为 L 时 (在地面参考系中观察), 张同学拍一下手. 已知张同学和王同学之间的相对速率为

$$v_r = \frac{2\beta c}{1 + \beta^2},$$

其中 $\beta = \frac{v}{c}$, c 为真空中的光速.

1. 求张同学拍手时随身携带的时钟的读数.
2. 从王同学自身静止的参考系看, 在张同学拍手这一事件发生的时刻, 王同学也拍一下手. 从张同学自身静止的参考系看, 在王同学拍手这一事件发生的时刻, 张同学第二次拍一下手. 从王同学自身静止的参考系看, 在张同学第二次拍手这一事件发生的时刻, 王同学第二次拍一下手. 照此继续下去. 求当张同学第 n 次拍手时地面参考系中张、王同学之间的距离.
3. 从李同学自身静止的参考系看, 张同学和王同学依次拍手的时刻为多少? 并指出这些时刻的顺序.

第 30 届全国中学生物理竞赛决赛考试试题

解答与评分标准

一、参考解答:

设小球每次落地反弹时, 反弹后的竖直速度大小是反弹前的 λ 倍. 第一次落地时竖直速度为

$$v_0 = \sqrt{2gh} \quad (1)$$

第一次反弹竖直速度大小为

$$v_1 = \lambda\sqrt{2gh}, 0 < \lambda < 1. \quad (2)$$

第一次反弹高度为

$$h_1 = \frac{v_1^2}{2g} = \lambda^2 h. \quad (3)$$

第一次反弹后飞行时间为

$$t_1 = 2\frac{v_1}{g} = 2\lambda\sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (4)$$

第一次反弹至第二次反弹时水平方向的位移为

$$x_1 = \sqrt{2gh} t_1 = 4\lambda h \quad (5)$$

小球在第一次反弹至第二次反弹之间的运动轨迹与其在地面的投影之间所包围的面积为

$$S_1 = \frac{2}{3} h_1 x_1 = \frac{8}{3} \lambda^3 h^2. \quad (6)$$

设第 n 次反弹后至 $n+1$ 次反弹前的最大竖直速度大小和上升的最大高度分别为 v_n 和 h_n ,

由题意和上述论证知

$$v_{n+1} = \lambda v_n, \quad (7)$$

$$h_{n+1} = \lambda^2 h_n, \quad (8)$$

$$t_{n+1} = \lambda t_n, \quad (9)$$

$$x_{n+1} = \lambda x_n, \quad (10)$$

$$S_{n+1} = \lambda^3 S_n. \quad (11)$$

S_1, S_2, \dots 构成一无穷递缩等比数列, 其总和为

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n = S_1(1 + \lambda^3 + \lambda^6 + \dots) = \frac{S_1}{1 - \lambda^3} = \frac{8}{21} h^2 \quad (12)$$

由 (6)、(12) 式有

$$\lambda = \frac{1}{2} \quad (13)$$

设 I_n 表示小球在第 n ($n \geq 1$) 次碰撞过程中小球受到的作用力的冲量, 由动量定理有

$$I_n = mv_n - m(-v_{n-1}) = m(1 + \lambda)v_{n-1} \quad (14)$$

由于小球每次反弹前后速度的水平分量不变, 小球每次碰撞过程中受到的沿水平方向的冲量为零. 小球在各次与地面碰撞过程中所受到的总冲量为

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} I_n = (mv_0)(1 + \lambda)(1 + \lambda + \lambda^2 + \dots) = mv_0 \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} \quad (15)$$

方向向上. 将 (13) 式代入 (15) 式得

$$I = 3mv_0 = 3m\sqrt{2gh} \quad (16)$$

评分标准: 本题 15 分.

(1) 至 (6) 式各 1 分, (11) 式 4 分, (12) 式 (16) 式各 1 分.

二、参考解答: 如图, 在小球 1 未离开竖直墙面之前, 杆与竖直墙面之间夹角为 θ 时, 小球 1 的坐标为

$$x_1 = 0, y_1 = l \cos \theta, \quad (1)$$

小球 2 的坐标为

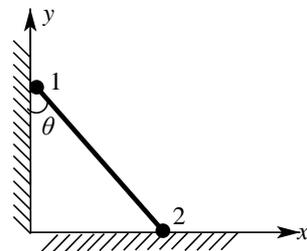
$$x_2 = l \sin \theta, y_2 = 0. \quad (2)$$

小球 1 的速度为

$$v_{1x} = \frac{dx_1}{dt} = 0, v_{1y} = \frac{dy_1}{dt} = -\omega l \sin \theta, \quad (3)$$

式中 $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ 是杆的转动角速度. 小球 2 的速度为

$$v_{2x} = \frac{dx_2}{dt} = \omega l \cos \theta, v_{2y} = \frac{dy_2}{dt} = 0. \quad (4)$$



由机械能守恒, 有

$$mgl = \frac{1}{2}m(v_{1x}^2 + v_{1y}^2) + \frac{1}{2}m(v_{2x}^2 + v_{2y}^2) + mgl \cos \theta = \frac{1}{2}ml^2\omega^2 + mgl \cos \theta. \quad (5)$$

由上式得

$$\omega = \sqrt{\frac{2g(1 - \cos \theta)}{l}}. \quad (6)$$

这里考虑到随着时间 t 的增加, θ 变大, 因此 $\omega > 0$, 从而舍去负根.

系统质心 c 的 x 坐标为

$$x_c = \frac{mx_1 + mx_2}{2m} = \frac{1}{2}l \sin \theta. \quad (7)$$

质心速度的 x 分量为

$$v_{cx} = \frac{dx_c}{dt} = \frac{1}{2}\omega l \cos \theta. \quad (8)$$

质心加速度的 x 分量为

$$a_{cx} = \frac{dv_{cx}}{dt} = -\frac{1}{2}\omega^2 l \sin \theta + \frac{1}{2}l \cos \theta \frac{d\omega}{dt} \quad (9)$$

由 (6) 式得

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2}\omega \sin \theta \sqrt{\frac{2g}{l(1 - \cos \theta)}} = \frac{g}{l} \sin \theta. \quad (10)$$

在得到上述结果时又利用了 (6) 式. 把 (6)、(10) 式代入 (9) 式, 得

$$a_{cx} = \frac{dv_{cx}}{dt} = -g \sin \theta (1 - \cos \theta) + \frac{1}{2}g \sin \theta \cos \theta = g \sin \theta \left(\frac{3}{2} \cos \theta - 1 \right). \quad (11)$$

设竖直墙面对小球 1 的正压力为 T , 质心 c 的 x 方向的运动满足

$$T = 2ma_{cx} \quad (12)$$

由 (12) 式可知, 当 $a_{cx} = 0$ 时,

$$T = 0 \quad (13)$$

小球 1 开始离开竖直墙面. 由 (11) 式得, 小球 1 开始离开竖直墙面时, 夹角 θ 满足方程

$$\sin \theta \left(\frac{3}{2} \cos \theta - 1 \right) = 0. \quad (14)$$

方程 (13) 的一个解满足 $\sin \theta = 0$, 故 $\theta = 0$, 此角度对应初始位置; 方程 (13) 的另一个

解满足 $\frac{3}{2}\cos\theta - 1 = 0$, 故

$$\theta = \arccos \frac{2}{3}. \quad (15)$$

此即小球 1 开始离开竖直墙面时杆与竖直墙面之间的夹角.

评分标准: 本题 15 分. (1) 至 (15) 式各 1 分.

三、参考解答:

1. 当物资 (包括托盘, 一下类似) m 距地心 r 处时, 物资 m 与地球系统的引力势能 U_G 和

物资 m 受到的由于地球自转引起的惯性离心力 F_L 分别为

$$U_G = -\frac{GM_e m}{r}, \quad F_L = m\omega_e^2 r. \quad (1)$$

这里已取由地心向外的方向为力的正向. 先计算地球引力对物资 m 所做的功. 当物资 m 分别在供应站和飞行器处时, 物资 m 与地球系统的引力势能为

$$U_G(R_e) = -\frac{GM_e m}{R_e}, \quad U_G(L+R_e) = -\frac{GM_e m}{L+R_e} = -\frac{GM_e m}{(\alpha+1)R_e}. \quad (2)$$

由功能原理, 地球引力对物资 m 所做的功为

$$W_G = U_G(R_e) - U_G(L+R_e) = -\frac{GM_e m}{R_e} \left(1 - \frac{1}{\alpha+1} \right) = -\frac{\alpha GM_e m}{(\alpha+1)R_e} \quad (3)$$

再计算惯性离心力对物资 m 所做的功 W_L . 由于惯性离心力与 r 成正比, 可用物资在供应站处的惯性离心力和物资在飞行器处的惯性离心力的平均值来计算惯性离心力的功. 于是

$$W_L = \frac{1}{2} [F_L(R_e) + F_L(L+R_e)] L = \frac{1}{2} m\omega_e^2 [R_e + (L+R_e)] L = \frac{1}{2} \alpha(\alpha+2) m\omega_e^2 R_e^2 \quad (4)$$

2. 物资离开供应站后, 地球吸引力变小而惯性离心力变大. 那个惯性离心力大于地球吸引力时, 就不再需要推动物资做功了. 因此, 需要外力做正功的路程为从出发点到地球吸引力等于惯性离心力之处. 令 r_0 为地球吸引力等于惯性离心力之处到地心的距离, 则有

$$\frac{GM_e m}{r_0^2} = m\omega_e^2 r_0,$$

或

$$r_0 = \left(\frac{GM_e}{\omega_e^2} \right)^{1/3}. \quad (5)$$

物资到 r_0 处时, 地球引力所做的功为

$$W_G(r_0) = U_G(R_e) - U_G(r_0) = -\frac{GM_em}{R_e} + \frac{GM_em}{r_0} = -\frac{GM_em}{R_e} \left(1 - \frac{R_e}{r_0} \right), \quad (6)$$

惯性离心力所做的功为

$$W_L(r_0) = \frac{1}{2} [F_L(r_0) + F_L(R_e)] (r_0 - R_e) = \frac{1}{2} m\omega_e^2 (r_0^2 - R_e^2). \quad (7)$$

因此, 为了把物资从供应站推送到飞行器, 外推力至少需要做的正功为

$$\begin{aligned} W_{\min} &= -[W_G(r_0) + W_L(r_0)] = \frac{GM_em}{R_e} \left(1 - \frac{R_e}{r_0} \right) - \frac{1}{2} m\omega_e^2 (r_0^2 - R_e^2) \\ &= \frac{GM_em}{R_e} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{R_e}{r_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{R_e}{r_0} \right)^3 \right] > 0. \end{aligned}$$

这里, 利用了 (5) 式. 再将 (5) 式代入上式得

$$W_{\min} = \frac{GM_em}{R_e} + \frac{1}{2} m\omega_e^2 R_e^2 - \frac{3}{2} m(GM_e \omega_e)^{2/3}. \quad (8)$$

3. 令 (3) 式和 (4) 式之和等于零, 则有

$$-\frac{\alpha GM_em}{(\alpha+1)R_e} + \frac{1}{2} \alpha(\alpha+2)m\omega_e^2 R_e^2 = 0,$$

即

$$\alpha^2 + 3\alpha + 2 \left(1 - \frac{GM_e}{\omega_e^2 R_e^3} \right) = 0, \quad (9)$$

其解为

$$\alpha_{\pm} = \frac{1}{2} \left[-3 \pm \left(1 + \frac{8GM_e}{\omega_e^2 R_e^3} \right)^{1/2} \right]. \quad (10)$$

舍去 α 的负根并令

$$\alpha_0 \equiv \alpha_+ = \frac{1}{2} \left[-3 + \left(1 + \frac{8GM_e}{\omega_e^2 R_e^3} \right)^{1/2} \right], \quad (11)$$

则飞行器到地面的距离为

$$L_0 = \alpha_0 R_e = \frac{R_e}{2} \left[-3 + \left(1 + \frac{8GM_e}{\omega_e^2 R_e^3} \right)^{1/2} \right]. \quad (12)$$

4. 为求供应站对输送管的作用力, 先计算在输送管向下运动无限小距离 Δl 过程中, 地球引力、惯性离心力、地面供应站对输送管作用力所做的功. 由于输送处于平衡状态, 因此这三个力对任何无限小位移所做功的和为零. 为计算地球引力、惯性离心力所做的功, 可以把输送管向下运动无限小距离 Δl 想象成输送管最上面无限小的一段 Δl (质量为 $\Delta m = m_p \Delta l / L$) 无限缓慢地移动到最下面. 在此过程中地球引力和惯性离心力所做的功可从类似于上面 (3) 式和 (4) 式中的结果求出. 这一无限小的一段 Δl 在距地心 r 处时, 地球引力势能和惯性离心力分别为

$$U_G = -\frac{GM_e \Delta m}{r} = -\frac{GM_e m_p \Delta l}{Lr}, F_L = \Delta m \omega_e^2 r = \frac{1}{L} m_p \omega_e^2 r \Delta l. \quad (13)$$

在输送管最上面无限小的一段 Δl 无限缓慢地移动到最下面的过程中, 地球引力所做的功为

$$\Delta W_G = U_G(L + R_e) - U_G(R_e) = \frac{GM_e m_p}{LR_e} \left(1 - \frac{1}{\alpha + 1} \right) \Delta l = \frac{GM_e m}{(\alpha + 1)R_e^2} \Delta l, \quad (14)$$

惯性离心力所做的功为

$$\Delta W_L = -\frac{1}{2} [F_L(R_e) + F_L(L + R_e)] L = -\frac{1}{2} (\alpha + 2) m_p \omega_e^2 R_e \Delta l. \quad (15)$$

取供应站对输送管的作用力 F_{base} 向下为正向. 在输送管向下运动无限小距离 Δl 过程中, F_{base} 所做的功为

$$\Delta W_{base} = F_{base} \Delta l. \quad (16)$$

由 $\Delta W_G + \Delta W_L + \Delta W_{base} = 0$, 有

$$\frac{GM_e m_p}{(\alpha + 1)R_e^2} \Delta l - \frac{1}{2} (\alpha + 2) m_p \omega_e^2 R_e \Delta l + F_{base} \Delta l = 0 \quad (17)$$

于是,

$$F_{base} = -\frac{GM_e m_p}{(\alpha + 1)R_e^2} + \frac{1}{2} (\alpha + 2) m_p \omega_e^2 R_e. \quad (18)$$

若 $F_{base} < 0$, 则供应站对输送管作用力的方向向上.

为便于讨论 $L > L_0$ 、 $L = L_0$ 、 $\alpha_m R_e < L < L_0$ 三种情形, 将 (18) 式改写为

$$\begin{aligned}
 F_{base} &= -\frac{GM_e m_p}{(\alpha+1)R_e^2} + \frac{1}{2}(\alpha+2)m_p \omega_e^2 R_e = \frac{m_p \omega_e^2 R_e}{2(\alpha+1)} \left[(\alpha+1)(\alpha+2) - \frac{2GM_e}{\omega_e^2 R_e^3} \right] \\
 &= \frac{m_p \omega_e^2 R_e}{2(\alpha+1)} (\alpha - \alpha_+) (\alpha - \alpha_-) = \frac{m_p \omega_e^2 R_e}{2(\alpha+1)} (\alpha - \alpha_0) (\alpha - \alpha_-).
 \end{aligned} \tag{19}$$

式中, α_{\pm} 由 (10) 式给出, α_0 由 (11) 式给出.

对于 $L > L_0$, 亦即 $\alpha > \alpha_0$, 供应站对输送管作用力的大小由 (18) 式或 (19) 式给出, 方向向下. 对于 $L = L_0$, 亦即 $\alpha = \alpha_0$, 由 (19) 式有

$$F_{base} = 0 (L = L_0). \tag{20}$$

对于 $\alpha_m R_e < L < L_0$, 亦即 $\alpha_m < \alpha < \alpha_0$, 由 (19) 式可知 $F_{base} < 0$. 在此情况下, 供应站对输送管作用力的大小为

$$|F_{base}| = \frac{GM_e m_p}{(\alpha+1)R_e^2} - \frac{1}{2}(\alpha+2)m_p \omega_e^2 R_e. \tag{21}$$

方向向上.

评分标准: 本题 25 分.

第 1 问 6 分,

(1)、(3)、(4) 式各 2 分.

第 2 问 6 分,

(5) 式 2 分, (6)、(7) 式各 1 分, (8) 式 2 分.

第 3 问 4 分,

(9) 式 2 分, (10) 式 1 分, (11) 或 (12) 式 1 分.

第 4 问 9 分,

(13) 至 (16) 式各 1 分, (18) 式 1 分, (19) 式 2 分, (20)、(21) 式各 1 分.

四、参考解答:

开关闭合经过较长时间后, 电路中将流过稳定的直流电流, 导体球上也将有稳定的电荷分布.

设第 i 个导体球所带电量为 Q_i , 那么包围它的导体球壳就带有电荷 $-Q_i$, 这些电荷必定分别均匀地分布在两个球面上, 因而导体球和外球壳之间的电势差为

$$\Delta U_i = kQ_i \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right), \quad (1)$$

而外面的导体球壳是接地的, 所以第 i 个导体球本身的电势就是

$$U_i = kQ_i \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right). \quad (2)$$

将 (2) 式两边对所有的导体球求和, 得

$$k \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) Q = \sum_{i=1}^{N+1} U_i, \quad (3)$$

其中

$$Q = \sum_{i=1}^{N+1} Q_i \quad (4)$$

是导体球上所带的总电量. 同时, 电路中的直流电流为

$$I = \frac{E}{NR + R_E}. \quad (5)$$

于是第 i 个导体球的电势为

$$U_i = (i-1)IR = \frac{(i-1)ER}{NR + R_E}. \quad (6)$$

把 (6) 式代入 (3) 式得

$$k \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) Q = \frac{ER}{NR + R_E} \sum_{i=1}^{N+1} (i-1) = \frac{1}{2} N(N+1) \frac{ER}{NR + R_E}. \quad (7)$$

由 (7) 式可解得

$$r = \left(\frac{N(N+1)ER}{2kQ(NR + R_E)} + \frac{1}{r_0} \right)^{-1}. \quad (8)$$

评分标准: 本题 20 分.

(1) 式 4 分, (2)、(3) 式各 2 分, (4) 式 1 分, (5)、(6)、(7) 式各 3 分, (8) 式 2 分.

五、参考解答:

1. 超导细圆环上有电流 I 时, 穿过超导圆环的磁通量为

$$\Phi = \pi r_0^2 B_z + LI \quad (1)$$

把 $B_z = B_0(1 - 2\alpha z)$ 代入上式, 得

$$\Phi = \pi r_0^2 B_0(1 - 2\alpha z) + LI \quad (2)$$

由于穿过超导圆环的磁通量保持不变, 因此 Φ 为常量. 由初始条件: $t=0$ 时, $z=0$ 、 $r=0$, $I=I_0$,

有

$$\Phi_0 = \pi r_0^2 B_0 + LI_0. \quad (3)$$

于是

$$I = \frac{2}{L} \pi r_0^2 B_0 \alpha z + I_0 \equiv I(z). \quad (4)$$

现在考虑作用在圆环上的安培力. 由于磁场为非均匀磁场, 因此作用在圆环上的安培力不为零. 由于轴对称, 安培力的方向沿轴线. 作用在圆环上的安培力

$$\begin{aligned} F_A(z) &= -B_r(z) I(z) 2\pi r_0 \\ &= -B_0 \alpha r_0 \left(\frac{2}{L} \pi r_0^2 B_0 \alpha z + I_0 \right) 2\pi r_0 \\ &= -kz - F_0, \end{aligned} \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} k &= \frac{4}{L} \pi^2 \alpha^2 B_0^2 r_0^4, \\ F_0 &= 2\pi \alpha B_0 r_0^2 I_0. \end{aligned} \quad (6)$$

再考虑到作用在圆环上的重力 $F_g(z) = -mg$, 作用在圆环上的合力为

$$F(z) = F_A(z) + F_g(z) = -kz - (mg + F_0). \quad (7)$$

在平衡位置 z_0 处, $F(z_0) = 0$. 由上式, 得平衡位置为

$$z_0 = -\frac{mg + F_0}{k} = -\frac{(mg + 2\pi \alpha B_0 r_0^2 I_0)L}{4\pi^2 \alpha^2 B_0^2 r_0^4}. \quad (8)$$

由 (7) 式可知, 圆环的运动为在其平衡位置附近的简谐振动, 振动角频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi\alpha B_0 r_0^2}{\sqrt{mL}}, \quad (9)$$

圆环在 t 时刻的 z 坐标的一般形式为

$$z(t) = z_0 + A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (10)$$

其中振幅 A 和初始相位 φ_0 由初始条件

$$z(t=0) = 0, v_z(t=0) = \left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=0} = 0 \quad (11)$$

决定. 由 (10)、(11) 式得

$$z_0 + A \cos \varphi_0 = 0, \omega A \sin \varphi_0 = 0$$

因此,

$$A = -z_0, \varphi_0 = 0. \quad (12)$$

于是,

$$\begin{aligned} z(t) &= z_0 - z_0 \cos(\omega t) \\ &= -z_0 [\cos(\omega t) - 1] \\ &= \frac{(mg + 2\pi\alpha B_0 r_0^2 I_0)L}{4\pi^2 \alpha^2 B_0^2 r_0^4} \left[\cos\left(\frac{2\pi\alpha B_0 r_0^2}{\sqrt{mL}} t\right) - 1 \right] \end{aligned} \quad (13)$$

2. 把 (13) 式代入 (4) 式, 得 t 时刻圆环中电流的表达式

$$\begin{aligned} I(t) &= \left(\frac{mg}{2\pi\alpha B_0 r_0^2} + I_0 \right) \left[\cos\left(\frac{2\pi\alpha B_0 r_0^2}{\sqrt{mL}} t\right) - 1 \right] + I_0 \\ &= \left(\frac{mg}{2\pi\alpha B_0 r_0^2} + I_0 \right) \cos\left(\frac{2\pi\alpha B_0 r_0^2}{\sqrt{mL}} t\right) - \frac{mg}{2\pi\alpha B_0 r_0^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

评分标准: 本题 20 分.

第 1 问 18 分,

(1) 式 2 分, (2) 至 (4) 式各 1 分,

(5) 式 2 分, (6)、(7) (8) 式各 1 分,

(9)、(10) 式各 2 分, (11) 式 1 分,

(12) 式 2 分, (13) 式 1 分.

第 2 问 2 分, (14) 式 2 分.

六、参考解答: 设金属盘上、下表面的温度分别为 T_t 、 T_b , 空气的温度为 T_0 . 根据题意, 金属盘上、下表面单位时间内向空气散失的能量分别为

$$cA(T_t - T_0), cA(T_b - T_0), \quad (1)$$

其中 c 为常量, A 为金属盘表面的面积. 设上表面单位时间内吸收的太阳光的能量为 P_a . 根据能量守恒有

$$P_a = cA(T_t - T_0) + cA(T_b - T_0). \quad (2)$$

因此,

$$T_t + T_b = \frac{P_a + 2cAT_0}{cA} = \frac{P_a}{cA} + 2T_0. \quad (3)$$

可见金属盘上、下表面温度的和为常量. 由题给数据, 有

$$T_t + T_b = 360.0K + 340.0K = 700.0K. \quad (4)$$

当金属盘的厚度为 t 时, 根据热传导定律, 单位时间内从金属盘的上表面传导到下表面的热量为

$$P_c = kA \frac{T_t - T_b}{t}, \quad (5)$$

其中 k 为热传导系数. 从金属盘的上表面传导到下表面的热量通过下表面散失到空气中, 故

$$kA \frac{T_t - T_b}{t} = cA(T_b - T_0). \quad (6)$$

当金属盘的厚度为 $2t$ 时, 设其上、下表面的温度分别为 T'_t 、 T'_b , 同理有

$$kA \frac{T'_t - T'_b}{2t} = cA(T'_b - T_0). \quad (7)$$

用 (6) 式去除 (7) 式, 并利用 (4) 式以及

$$T'_t + T'_b = 700.0K, \quad (8)$$

有

$$\frac{700.0K - 2T'_b}{2 \times (700.0K - 2T'_b)} = \frac{T'_b - T_0}{T_b - T_0}. \quad (9)$$

由上式, 得

$$T'_b = \frac{700.0K(T_b + T_0) - 4T_b T_0}{1400.0K - 2T_b - 2T_0} \approx 333.3K. \quad (10)$$

由 (8) 式, 有

$$T'_t = 700K - T'_b \approx 366.7K. \quad (11)$$

评分标准: 本题 15 分.

- (1)、(2) 式各 2 分, (3)、(4) 式各 1 分,
 (5)、(6) 式各 2 分, (7) 至 (11) 式各 1 分.

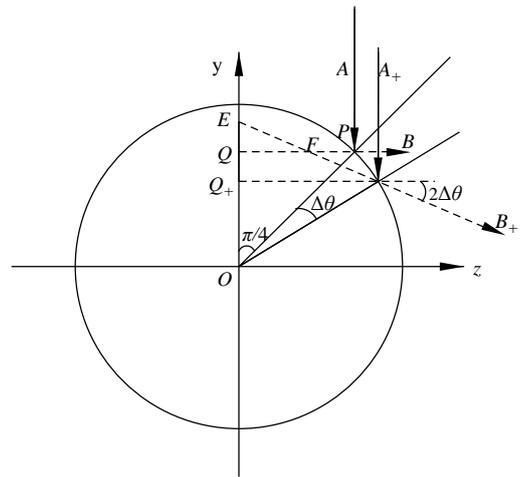
七、参考解答:

1. 考虑上侧以 45° 角入射到细丝外表面的细光束 AP , 它被经细丝外表面反射后成方向平行于 z 轴正向的反射光 PB , 其反向延长线与 y 轴交于 Q 点, 如图所示. 由几何关系可知,

光线 PB 离 xz 平面的距离为

$$OQ = +\frac{\sqrt{2}}{4}d = y_+ \quad (1)$$

考虑上侧以 $45^\circ + \Delta\theta$ ($\Delta\theta$ 很小) 角入射到细丝外表面的细光束 A_+P_+ , 它被经细丝外表面反射后的反射光 P_+B_+ , 其反向延长线与 y 轴交于 E 点, 如图所示. 由反射定律可知



$$\angle A_+P_+B_+ = 2 \times (45^\circ + \Delta\theta) \quad (2)$$

因而, 反射光 P_+B_+ 与 z 轴的夹角为

$$2\Delta\theta \quad (3)$$

考虑 $\triangle EOP_+$, 由几何关系可知

$$\angle EP_+O = 45^\circ + \Delta\theta = \angle EOP_+$$

于是

$$OE = P_+E \quad (4)$$

由于 $OP_+ = d/2$, 所以

$$\frac{d}{4} = OE \cos(45^\circ + \Delta\theta)$$

利用

$$\cos(45^\circ + \Delta\theta) = \cos 45^\circ \cos \Delta\theta - \sin 45^\circ \sin \Delta\theta$$

和

$$\cos \Delta\theta \sim 1, \sin \Delta\theta \sim \Delta\theta, \text{ 当 } \Delta\theta \sim 0$$

可得

$$\cos(45^\circ + \Delta\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \Delta\theta)$$

所以

$$OE = \frac{\sqrt{2}d}{4(1 - \Delta\theta)} \approx \frac{\sqrt{2}d}{4}(1 + \Delta\theta) \quad (5)$$

因而由 (1)、(5) 式得

$$QE = OE - OQ = \frac{\sqrt{2}d}{4}\Delta\theta \quad (6)$$

进而, 设 EB_+ 交 QB 于 F (设其 z 坐标为 z), 则在直角三角形 EQF 中有

$$z_+ = QF = \frac{QE}{\tan(2\Delta\theta)} = \frac{\sqrt{2}}{4}d \frac{\Delta\theta}{2\Delta\theta} = \frac{\sqrt{2}}{8}d \quad (7)$$

因此, 上侧入射角在 $\pi/4$ 附近的入射光线虚像的位置为

$$y_+ = \frac{\sqrt{2}}{4}d, z_+ = \frac{\sqrt{2}}{8}d \quad (8)$$

利用对称性可见, 下侧入射角在 $\pi/4$ 附近的入射光线虚像的位置为

$$y_- = -\frac{\sqrt{2}}{4}d, z_- = \frac{\sqrt{2}}{8}d \quad (9)$$

【另解二:

(前解答中由开始到“夹角为 $2\Delta\theta$ ”全部保留)。

$$PP_+ = r\Delta\theta, PQ = OQ = \frac{\sqrt{2}}{2}r, \quad (4)$$

进而, 由于 PP_+ 与 QB 的夹角为 45° , 可得

$$Q_+P_+ = \frac{\sqrt{2}}{2}r + \frac{\sqrt{2}}{2}r\Delta\theta.$$

反向延长 P_+B_+ 交 y 轴于 E , 在直角三角形 EQ_+P_+ 中

$$\begin{aligned}
 Q_+E &= Q_+P_+ \cdot \tan(2\Delta\theta) \\
 &\approx \frac{\sqrt{2}}{2}r(1+\Delta\theta) \cdot 2\Delta\theta \\
 &\approx \sqrt{2}r\Delta\theta,
 \end{aligned} \tag{5}$$

考虑到 $QQ_+ = \frac{\sqrt{2}}{2}r\Delta\theta$, 所以精确到 $\Delta\theta$

$$Q_+E = 2Q_+Q \tag{6}$$

由 $\triangle EQF \sim \triangle EQ_+P_+$ 有

$$z_+ \equiv QF = \frac{1}{2}P_+Q_+ = \frac{\sqrt{2}}{4}r = \frac{\sqrt{2}}{8}d. \tag{7}$$

F 是 PB 、 P_+B_+ 两条反射光反向延长线的交点, 即为虚像.

对于 $\Delta\theta < 0$ 的情形, 得到虚像位置不变. 由对称性可知, 下侧虚像位置与上侧虚像以 z 轴为对称.

$$\text{上虚像: } y_+ = +\frac{\sqrt{2}}{4}d, z_+ = \frac{\sqrt{2}}{8}d, \tag{8}$$

$$\text{下虚像: } y_- = -\frac{\sqrt{2}}{4}d, z_- = \frac{\sqrt{2}}{8}d. \tag{9}$$

】

2. 本问题可视为由上、下两侧的反射光束分别形成的虚光源所发出的光线之间的干涉, 相当于双缝位置分别在 $y_+ = \frac{\sqrt{2}}{4}d, z_+ = \frac{\sqrt{2}}{8}d$ 和 $y_- = -\frac{\sqrt{2}}{4}d, z_- = \frac{\sqrt{2}}{8}d$ 的双缝干涉. 双缝屏与观察屏之间的距离为 $D - \frac{\sqrt{2}d}{8} \approx D$, 双缝间距为 $\frac{\sqrt{2}}{2}d$. 故条纹间距

$$a = \lambda \frac{D}{(\sqrt{2}/2)d} = \frac{\sqrt{2}\lambda D}{d} \tag{10}$$

由此得, 细丝的直径 d 为

$$d = \frac{\sqrt{2}\lambda D}{a} \tag{11}$$

评分标准: 本题 15 分.

第 1 问 10 分,

(1)、(2) 式各 1 分, (3) 式 2 分, (4) 至 (9) 式各 1 分.

第 2 问 5 分,

(10) 式 3 分, (11) 式 2 分.

八、参考解答:

1. 在地面参考系 S 中, 从张同学和王同学相遇, 到他们之间的距离为 L 时, 时间间隔为

$$\Delta t = \frac{L}{2v}. \quad (1)$$

在张同学自身静止的参考系 S' 中, 张同学开始两次读其随身携带的时钟的两个事件发生在同一地点, 因此张同学拍手时随身携带的时钟的读数 T 为固有时间或原时. 利用时间的相对论效应得

$$T = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \Delta t \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{L}{2v} \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (2)$$

2. 在参考系 S' 中, 张同学第一次拍手这一事件 1 发生的时刻和位置分别是 $t_1' = T$ 和 $x_1' = 0$

已设张、王同学分别位于各自参考系中直角坐标系的坐标原点, 两参考系中直角坐标系的原点在 $t' = t'' = 0$ 时重合、 x' 和 x'' 轴重合且同向. 而在王同学自身静止的参考系 S'' 中, 张同学的时钟慢了. 利用时间的相对论效应, 在参考系 S'' 中事件 1 发生的时刻 t_1'' (此即王同学随身携带的时钟的读数) 为

$$t_1'' = \gamma t_1' = \gamma T, \quad (3)$$

式中

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v_r^2/c^2}} = \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}, \quad (4)$$

推导中已应用了张同学相对于王同学做匀速直线运动的速率 v_r 的表达式. 注意: 在参考系 S''

中事件 1 发生的位置并不在王同学自身所在处或原点, 而在 $x_2'' \neq 0$.

依题意, 王同学在时刻

$$t_2'' = t_1'' = \gamma T \quad (5)$$

拍手, 这一事件在参考系 S'' 中发生的时刻和位置分别是 $t_2'' = t_1''$ 和原点 $x_2'' = 0$, 是和事件 1 不同的另一事件, 记为事件 2. 而在张同学自身静止的参考系 S' 中, 王同学的时钟慢了. 利用时间的相对论效应, 在参考系 S' 中事件 2 发生的时刻 t_2' 为

$$t_2' = \gamma t_2'' = \gamma(\gamma T) = \gamma^2 T, \quad (6)$$

依题意, 张同学在时刻

$$t'_3 = t'_2 = \gamma^2 T \quad (7)$$

第二次拍手 (事件 3), t'_3 即为其随身携带的时钟的读数.

照此继续下去. 当张同学第 n 次拍手时, 第 $2n-1$ 个事件在参考系 S' 中发生的时刻 t'_{2n-1} (或张同学随身携带的时钟的读数) 为

$$t'_{2n-1} = \gamma^{2(n-1)} T. \quad (8)$$

由于在张同学每次观察到的时间间隔 T 内, 张、王同学之间在地面参考系中的距离增加 L .

于是, 张同学第 n 次拍手时, 张、王同学之间在地面参考系中的距离为

$$d_n = \gamma^{2(n-1)} L = \left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} \right)^{2(n-1)} L. \quad (9)$$

3. 利用时间的相对论效应, 从李同学自身静止的参考系看, 张同学和王同学依次拍手的时刻为

$$t_1 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} t'_1 = (1 - \beta^2)^{-1/2} T = \frac{L}{2v}, \quad (10)$$

$$t_2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} t'_2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} (\gamma T) = \gamma \frac{L}{2v} = \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} \frac{L}{2v}, \quad (11)$$

$$t_3 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} t'_3 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} (\gamma^2 T) = \gamma^2 \frac{L}{2v} = \left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} \right)^2 \frac{L}{2v}, \quad (12)$$

⋮

$$t_{2n-1} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} t'_{2n-1} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} (\gamma^{2(n-1)} T) = \gamma^{2(n-1)} \frac{L}{2v} = \left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} \right)^{2(n-1)} \frac{L}{2v}. \quad (13)$$

由 (10) 至 (13) 式可直接看出

$$t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_{2n-1} \quad (14)$$

评分标准: 本题 15 分.

第 1 问 3 分,

(1) 式 1 分, (2) 式 2 分.

第 2 问 8 分，

(3) 至 (6) 式各 1 分，(8)、(9) 式各 2 分.

第 3 问 4 分，

(10)、(11)、(13)、(14) 式各 1 分.

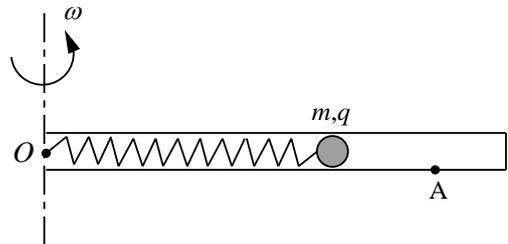
第 31 届全国中学生物理竞赛决赛理论考试试题

考生须知

- 1、考生考试前务必认真阅读本须知。
- 2、考试时间为 3 个小时。
- 3、试题从本页开始，共 5 页，含八道大题，总分为 140 分。试题的每一页下面标出了该页的页码和试题的总页数，请认真核对每一页的页码和总页数是否正确，每一页中是否有印刷不清楚的地方，发现问题请及时与监考老师联系。
- 4、考生可以用发的草稿纸打草稿，但需要阅卷老师评阅的内容一定要写到答题纸上；阅卷老师只评阅答题纸上的内容，写在草稿纸和本试题纸上的解答一律无效。

*****以下为试题*****

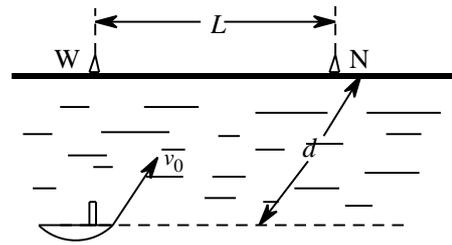
一、(12 分) 一转速测量和控制装置的原理如图所示。在 O 点有电量为 Q 的正电荷，内壁光滑的轻质绝缘细管可绕通过 O 点的竖直轴在水平面内转动，在管内距离 O 为 L 处有一光电触发控制开关 A ，在 O 端固定有一自由长度为 $L/4$ 的轻质绝缘弹簧，弹簧另一端与一质量为 m 、带有正电荷 q 的小球相连接。



开始时，系统处于静态平衡。细管在外力矩作用下，作定轴转动，小球可在细管内运动。当细管转速 ω 逐渐变大时，小球到达细管的 A 处刚好相对于细管径向平衡，并触发控制开关，外力矩瞬时变为零，从而限制转速过大；同时 O 点的电荷变为等量负电荷 $-Q$ 。通过测量此后小球相对于细管径向平衡点的位置 B ，可测定转速。若测得 OB 的距离为 $L/2$ ，求

- (1) 弹簧系统 k_0 及小球在 B 处时细管的转速；
- (2) 试问小球在平衡点 B 附近是否存在相对于细管的径向微振动？如果存在，求出该微振动的周期。

二、(14分) 多弹头攻击系统是破解导弹防御体系的有效手段.如图所示,假设沿某海岸有两个军事目标 W 和 N, 两者相距 L , 一艘潜艇沿平行于该海岸线的航线游弋, 并监视这两个目标, 其航线离海岸线的距离为 d 。潜艇接到攻击命令后浮出海面发射一颗可



分裂成多弹头的母弹, 发射速度为 v_0 (其大小远大于潜艇在海里游弋速度的大小), 假设母弹到达最高点时分裂成三个分弹头, 每个分弹头的质量相等, 分离时相对原母弹的速度大小均为 v , 且分布在同一水平面内。分弹头 1、2 为实弹, 分弹头 3 为迷惑对方雷达探测的假弹头。如果两个实弹能够分别击中军事目标 W 和 N, 试求潜艇发射母弹时的位置与发射方向, 并给出相应的实现条件。

三、(14分) 如图所示, 某绝热容器被二块装有阀门 K_1 和 K_2 的固定绝热隔板分隔成相等体积 V_0 的三室 A、B、C, $V_A = V_B = V_C = V_0$, 容器左端用绝热活塞 H 封闭, 左侧 A 室装有 $\nu_1 = 1$ 摩尔单原子分子气体, 处在压强为 P_0 、温度为 T_0 的平衡态; 中段 B 室为真空; 右侧 C 室装有 $\nu_2 = 2$ 摩尔双原子分子气体, 测得其平衡态温度为 $T_e = 0.50T_0$ 。初始时刻 K_1 和 K_2 都处在关闭状态。然后系统依次经历如下与外界无热量交换的热力学过程:

- (1) 打开 K_1 , 让 V_A 中的气体自由膨胀到中段真空 V_B 中; 等待气体达到平衡态时, 缓慢推动活塞 H 压缩气体, 使得 A 室体积减小了 30% ($V'_A = 0.70V_0$)。求压缩过程前后, 该部分气体的平衡态温度及压强;
- (2) 保持 K_1 开放, 打开 K_2 , 让容器中的两种气体自由混合后共同达到平衡态。求此时混合气体的温度和压强;
- (3) 保持 K_1 和 K_2 同时处在开放状态, 缓慢拉动活塞 H, 使得 A 室体积恢复到初始体积 $V'_A = V_0$ 。求此时混合气体的温度和压强。

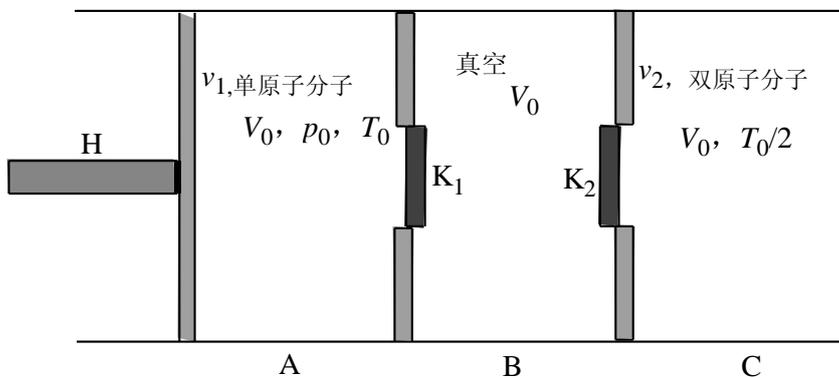
提示: 上述所有过程中, 气体均可视为理想气体, 计算结果可含数值的指数式或分式; 根据热力学第二定律, 当一种理想气体构成的热力学系统从初态 (p_i, T_i, V_i) 经过一个绝热可逆

过程（准静态绝热过程）到达终态 (p_f, T_f, V_f) 时，其状态参数满足方程：

$$(\Delta S_1)_{if} = \nu_1 C_{V_1} \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + \nu_1 R \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = 0 \quad (\text{I})$$

其中， ν_1 为该气体的摩尔数， C_{V_1} 为它的定容摩尔热容量， R 为普适气体常量。而当热力学系统由二种理想气体组成，则方程 (I) 需修改为

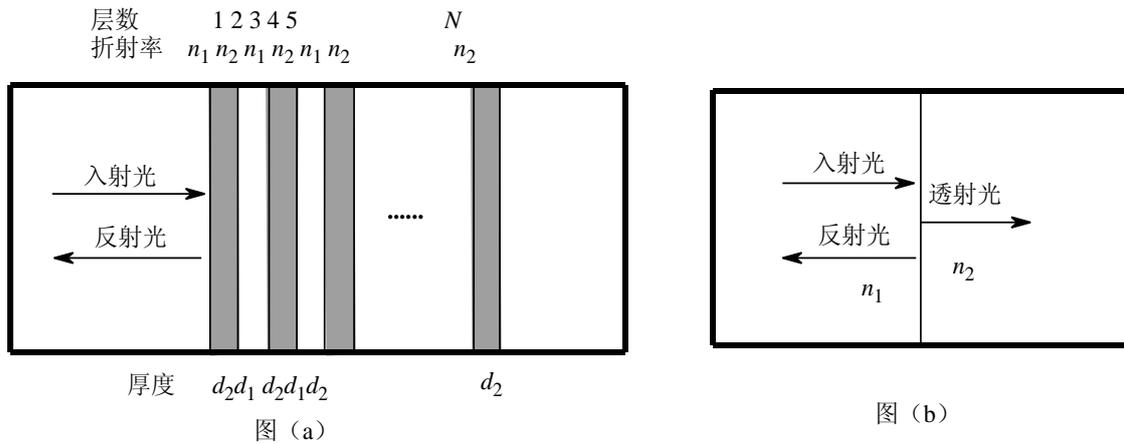
$$(\Delta S_1)_{if} + (\Delta S_2)_{if} = 0 \quad (\text{II})$$



四、(20分) 光纤光栅是一种介质折射率周期性变化的光学器件。设一光纤光栅的纤芯基体材料折射率为 $n_1 = 1.51$ ；在光纤中周期性地改变纤芯材料的折射率，其改变了的部分的材料折射率为 $n_2 = 1.55$ ；折射率分别为 n_2 和 n_1 、厚度分别为 d_2 和 d_1 的介质层相间排布，总层数为 N ，其纵向剖面图如图 (a) 所示。在该器件设计过程中，一般只考虑每层界面的单次反射，忽略光在介质传播过程中的吸收耗损。假设入射光在真空中的波长为 $\lambda = 1.06 \mu\text{m}$ ，当反射光相干叠加加强时，则每层的厚度 d_1 和 d_2 最小应分别为多少？若要求器件反射率达到 8%，则总层数 N 至少为多少？

提示：如图 (b) 所示，当光从折射率 n_1 介质垂直入射到折射率 n_2 介质时，界面上产生反射和透射，有：

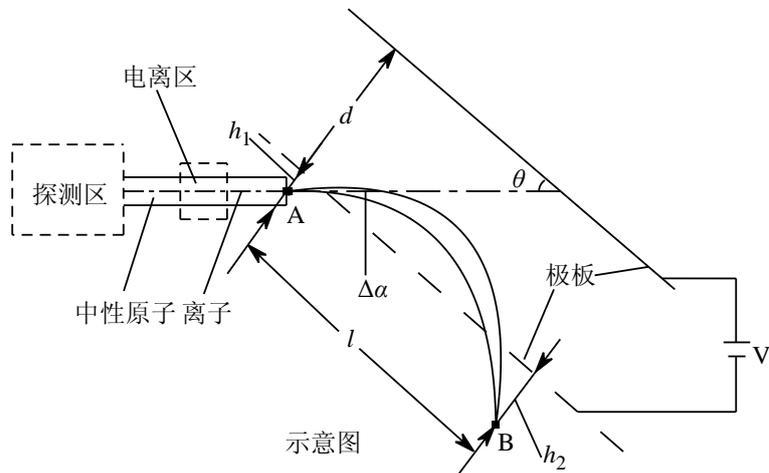
$$\frac{\text{反射光电场强度}}{\text{入射光电场强度}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \quad \frac{\text{透射光电场强度}}{\text{入射光电场强度}} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}, \quad \text{反射率} = \left| \frac{\text{反射光电场强度}}{\text{入射光电场强度}} \right|^2$$



五、(20) 中性粒子分析器

(Neutral-Particle Analyser)

是核聚变研究中测量快离子温度及其能量分布的重要设备。其基本原理如图所示，通过对高能（200eV~30KeV）中性原子（它们容易穿透探测区中的电磁区域）的能量和动量的



测量，可诊断曾与这些中性原子充分碰撞过的离子的性质。

为了测量中性原子的能量分布，首先让中性原子电离，然后让离子束以 θ 角入射到间距为 d 、电压为 V 的平行板电极组成的区域，经电场偏转后离开电场区域，在保证所测量离子不碰到上级板的前提下，通过测量入射孔 A 和出射孔 B 间平行于极板方向的距离 l 来决定离子的能量。设 A 与下级板的距离为 h_1 ，B 与下级板的距离为 h_2 ，已知离子所带电荷为 q 。

- (1) 推导离子能量 E 与 l 的关系，并给出离子在极板内垂直于极板方向的最大飞行距离。
- (2) 被测离子束一般具有发散角 $\Delta\alpha$ ($\Delta\alpha \ll \theta$)。为了提高测量的精度，要求具有相同能量 E ，但入射角方向在 $\Delta\alpha$ 范围内变化的离子在同一小孔 B 处射出，求 h_2 的表达式；并给出此时能量 E 与 l 的关系。

(3) 为了提高离子能量的分辨率，要求具有量程上限能量的离子刚好落在设备允许的 l 的最大值 l_{\max} 处，同时为了减小设备的体积，在满足测量要求的基础上，要求极板间距 d 尽可能小，利用上述第 (2) 问的结果，求 d 的表达式；若 $\theta = 30^\circ$ ，结果如何？

(4) 为了区分这些离子的质量，请设计后续装置，给出相应的原理图和离子质量表达式。

六、(20 分) 超导体的一个重要应用是绕制强磁场磁体，其使用的超导线材属于第二类超导体，如果将这类超导体置于磁感应强度为 B_a 的外磁场中，其磁力线将以磁通量子（或称为磁通漩涡线）的形式穿透超导体，从而在超导体中形成正三角形的磁通格子，如图 1 所示。所谓的磁通量子，如图 2 所示，其中心是半径为 ξ 的正常态（电阻不为零）区域，而其周围处于超导体（电阻为零），存在超导电流，所携带的磁通量为 $\Phi_0 = \frac{h}{2e} = 2.07 \times 10^{-15} \text{ Wb}$ （磁通量的最小单位）。

(1) 若 $B_a = 5 \times 10^{-2} \text{ T}$ ，求此时磁通漩涡线之间距离 a ；

(2) 随着 B_a 的增大，磁通漩涡线密度不断增加，当 B_a 达到某一临界值 B_{c2} 时，整块超导体都变为正常态，假设磁通漩涡线芯的半径为 $\xi = 5 \times 10^{-9} \text{ m}$ ，求所对应的临界磁场 B_{c2} ；

(3) 对于理想的第二类超导体，当有电流 I 通过超导带材时，在安培力的驱动下，磁通漩涡线将会粘滞流动，在超导带内产生电阻（也称为磁通流阻），从而产生焦耳耗损，不利于超导磁体的运行。磁通漩涡线稳定粘滞流动的速度 v 与单位体积磁通漩涡线所受到的驱动力 f_A 和 B_a 的关系为 $f_A = \eta \frac{B_a}{\Phi_0} v$ ，其中 η 为比例系数。外加磁场、电流方向，以及超导体带材

的尺寸如图 3 所示，请指出磁通漩涡线流动的方向，并求出磁通漩涡线流动所产生的电阻率

（用 B_a ， Φ_0 ， η ，超导体尺寸 b, c, d 表示）；

(4) 要使超导体材料真正实用化，消除这种磁通流阻成了技术的关键，请给出你的解决方案。

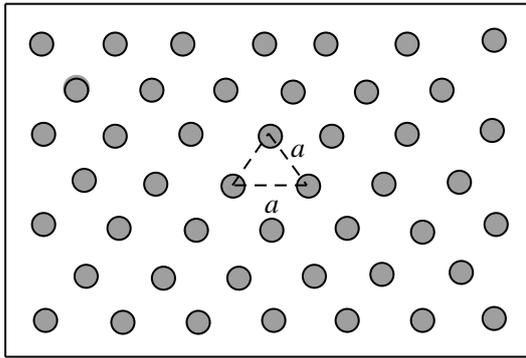


图 1

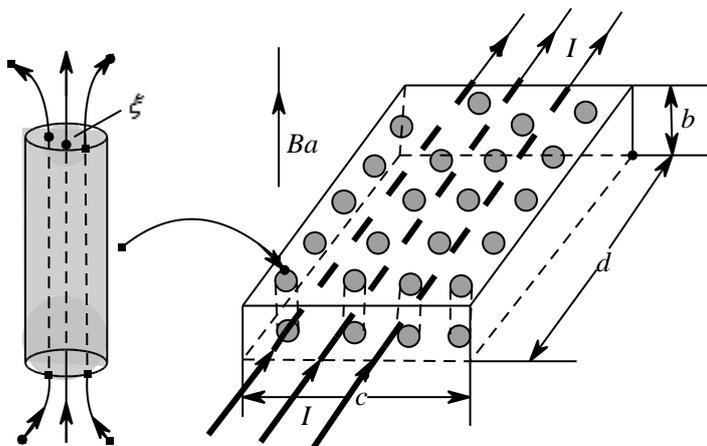
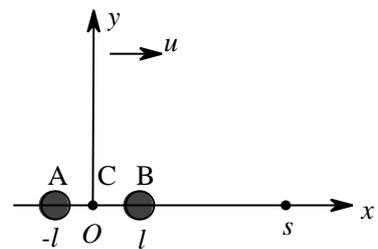


图 2

图 3

七、(20分) 如图, 两个质量均为 m 的小球 A 和 B (均可视为质点), 固定在中心位于 C、长为 $2l$ 的刚性轻质细杆的两端, 构成一质点系。在竖直面内建立 Oxy 坐标, Ox 方向沿水平向右, Oy 方向竖直向上。初始时质点系中心 C 位于原点 O , 并以初速度 v_0 竖直上抛, 上抛过程中, ACB 三点连线始终水平。风速大小恒定为 u 、方向沿 x 轴正向, 小球在运



动中所受空气阻力 \vec{f} 的大小与相对于空气运动速度 \vec{v} 的大小成正比, 方向相反, 即 $\vec{f} = -k\vec{v}$, k 为正的常量。当 C 点升至最高点时, 恰好有一沿 y 轴正向运动、质量为 m_1 、速度大小为 u_1 的小石块 (视为质点) 与小球 A 发生竖直方向的碰撞, 设碰撞是完全弹性的, 时间极短。此后 C 点回落到上抛开始时的同一水平高度, 此时它在 Ox 方向上的位置记为 s , 将从上抛

到落回的整个过程所用时间记为 T ，质点系旋转的圈数记为 n 。求质点系

- (1) 转动的初始角速度 ω_0 ，以及回落到 s 点时角速度 ω_s 与 n 的关系；
- (2) 从开始上抛到落回到 s 点为止的过程中，空气阻力做的功 W_f 与 n 、 s 、 T 的关系。

八、(20分) 太阳是我们赖以生存的恒星。他的主要成分是氢元素，在自身引力的作用下收缩而导致升温，当温度高到一定程度时，中性原子将电离成质子和电子组成的等离子体，并在其核心区域达到约 $1.5 \times 10^7 \text{ K}$ 的高温和 $1.6 \times 10^5 \text{ kg/m}^3$ 以上的高密度，产生热核聚变而放出巨大能量，从而抗衡自身的引力收缩达到平衡，而成为恒星。太阳内部主要核反应过程为



其中第一个反应的概率由弱相互作用主导，概率很低，这恰好可以使得能量缓慢释放。反应产物正电子 e^+ 会与电子 e^- 湮灭为 γ 射线，即



已知：质子 (${}^1\text{H}$)、氘 (D)、氦-3 (${}^3\text{He}$)、氦-4 (${}^4\text{He}$) 和电子的质量分别为 938.27、1875.61、2808.38、3727.36 和 0.51 (MeV/c^2) (误差为 $0.01 \text{ MeV}/c^2$)， c 为真空中的光速，中微子 ν_e 的质量小于 $3 \text{ eV}/c^2$ 。普朗克常量 $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ ， $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$ ，波尔兹曼常量 $k = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ ，电子电量 $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ 。

- (1) 试用理想气体模型估算处于热平衡状态的各种粒子的平均动能及太阳核心区的压强(请分别用 eV 和 atm 为单位)；
- (2) 反应式 (II) 中的 x 是什么粒子 (α 、 β 、 γ 、 p 和 n 之一)？请计算该粒子的动能和动量的大小，是否可以找到一个参照系，使得 x 粒子的动能为零？
- (3) 给出反应式 (I) 中各反应物的动能的范围；
- (4) 反应式 (IV) 中的 γ 射线 (光子) 经过很多次的康普顿散射到达太阳表面的时候，其波长约为 $5.4 \times 10^{-7} \text{ m}$ 。设入射光子的能量为 E_0 ，一次散射后光子的能量为 E ，光子的散射

角为 ϕ （出射光子动量相对于入射光子动量的夹角）。推导出由 E_0 和 ϕ 表示的 E 的表达式；假设从太阳中心到表面，光子经历了 10^{26} 次康普顿散射，且每次散射的角度相同，求每一次的散射角 ϕ 。

第 31 届全国中学生物理竞赛决赛

理论考试试题与评分标准

一、

参考解答:

(1) 设细管的角速度 ω_A , 小球在 A 点相对细管平衡时, 有

$$k_0 \frac{3}{4}L - k \frac{qQ}{L^2} = Lm\omega_A^2 \quad \text{①}$$

球在 B 点, 细管的角速度 ω_B 满足

$$k_0 \frac{1}{4}L + k \frac{qQ}{L^2/4} = \frac{L}{2}m\omega_B^2 \quad \text{②}$$

且外力矩为 0, 角动量守恒有

$$mL^2\omega_A = m \frac{L^2}{4}\omega_B \quad \text{③}$$

则有

$$\omega_B = 4\omega_A$$

代入②式得

$$k_0 \frac{1}{4}L + k \frac{qQ}{L^2/4} = 8Lm\omega_A^2 \quad \text{④}$$

由①和④式得

$$k_0 = k \frac{48qQ}{23L^3} \quad \text{⑤}$$

代入②式得细管的角速度 ω_B 为

$$\omega_B = 4\sqrt{\frac{13kqQ}{23mL^3}} \quad \text{⑥}$$

(2) 令 $r = r_b + x$, 小球平衡点附近所受合力为

$$F\left(\frac{L}{2} + x\right) = -k_0 \left(\frac{L}{4} + x\right) - k \frac{qQ}{\left(\frac{L}{2} + x\right)^2} + \left(\frac{L}{2} + x\right)m\omega_x^2 \quad \text{⑦}$$

由角动量守恒

$$m\left(\frac{L}{2} + x\right)^2 \omega_x = m\frac{L^2}{4} \omega_B \quad \text{⑧}$$

平衡点附近展开得径向合力为

$$F(x) = -\left(k_0 + 3m\omega_B^2 - k\frac{16qQ}{L^3}\right)x = -\frac{304}{23}\frac{kqQ}{L^3}x \quad \text{⑨}$$

所以, 小球在平衡点 B 附近存在相对于细管的径向微振动. ⑩

小球相对于细管的径向微振动周期为

$$T = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{23 mL^3}{19 kqQ}} \quad \text{⑪}$$

评分标准: 本题 12 分. ①2 分, ②1 分, ③2 分, ⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪各 1 分

二、

参考解答 (一):

以两个目标 W 和 N 连线的中点 O 为原点建立如图 1 的坐标系, 假设潜艇发射母弹时的位置为 $(x, 0, d)$, 母弹发射方向的仰角为 θ (与 xoz 平面的夹角), 与航线的夹角为 α (在 xoz 平面内, 发射方向的投影线与 x 轴的夹角). 按题意母弹到达最高点的时间为

$$t = \frac{v_0 \sin \theta}{g} \quad \text{①}$$

沿发射方向在海面上质心运动的距离 (即射程) 为

$$s = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} \quad \text{②}$$

根据题意与动量守恒定律, 在母弹参考系中, 三个分弹头的飞行方向在水平面内一定呈对称分布, 且假弹头 3 飞行方向与海岸线垂直 (如图 2 所示), 则分弹头 1、2 在与海岸线垂直的方向上飞行的距离为

$$d = \left(\frac{v}{2} + v_0 \cos \theta \cdot \sin \alpha\right) \cdot t + v_0 \cos \theta \cdot \sin \alpha \cdot t \quad \text{③}$$

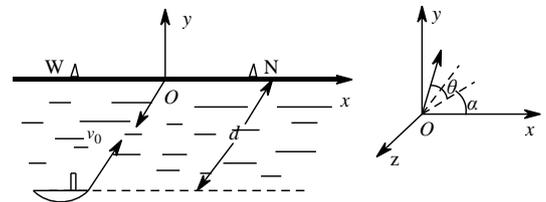


图1

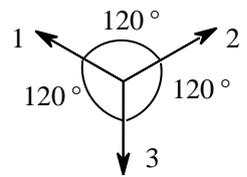


图2

则分弹头 1 在与海岸线平行的方向上飞行的距离为

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}v - v_0 \cos \theta \cdot \cos \alpha\right) \cdot t = \left(\frac{L}{2} - |x| + \frac{s}{2} \cos \alpha\right) \quad ④$$

则分弹头 2 在与海岸线平行的方向上飞行的距离为

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}v + v_0 \cos \theta \cdot \cos \alpha\right) \cdot t = \left(|x| + \frac{L}{2} - \frac{s}{2} \cos \alpha\right) \quad ⑤$$

联立④⑤式可得到

$$\begin{aligned} \sqrt{3}v \cdot \frac{v_0 \sin \theta}{g} &= L \\ \sin \theta &= \frac{gL}{\sqrt{3}v_0 v} \quad \cos \theta = \sqrt{1 - \frac{g^2 L^2}{3v_0^2 v^2}} \end{aligned} \quad ⑥$$

将⑥代入③

$$\begin{aligned} d &= \left(\frac{v}{2} + 2v_0 \cos \theta \cdot \sin \alpha\right) \cdot \frac{v_0 \sin \theta}{g} \\ \sin \alpha \pm \frac{(2\sqrt{3}d - L)v}{4Lv_0 \sqrt{1 - \frac{g^2 L^2}{3v_0^2 v^2}}} &= \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{9v^4 \left(d - \frac{L}{2\sqrt{3}}\right)^2}{4L^2 (3v_0^2 v^2 - g^2 L^2)}} \end{aligned} \quad ⑦$$

上式中“+”号表示倾向海岸方向，“-”号表示背向海岸方向.将上述结果代入联立④或⑤式可得到

$$x = \pm \sqrt{\frac{4L^2}{9v^4} (3v_0^2 v^2 - g^2 L^2) - \left(d - \frac{L}{2\sqrt{3}}\right)^2} \quad ⑧$$

$$0 < \frac{gL}{\sqrt{3}v_0 v} \leq 1, \quad \left| \frac{(2\sqrt{3}d - L)v}{4Lv_0 \sqrt{1 - \frac{g^2 L^2}{3v_0^2 v^2}}} \right| \leq 1, \quad d > 0 \quad ⑨$$

评分标准: 本题 14 分.①②式各 1 分, ③④⑤式各 2 分, ⑥⑦式各 1 分, ⑧⑨式各 2 分.

参考解答 (二):

以两个目标 W 和 N 连线的中点 O 为原点建立

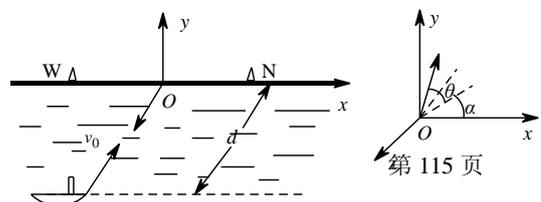


图1

如图 1 的坐标系, 假设潜艇发射母弹时的位置为 $(x, 0, d)$, 母弹发射方向的仰角为 θ (为 xoy 平面的夹角), 与航线的夹角为 α (xoz 平面内与 x 轴的夹角), 按题意母弹到达最高点的时间为

$$t = \frac{v_0 \sin \theta}{g} \quad \text{①}$$

按题意多弹头母弹的运动可分解为母弹的质心运动及分弹头相对质心的运动之和, 沿发射方向在海面上质心运动的距离 (即射程) 为

$$s = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} \quad \text{②}$$

如果要求分弹头 1、2 能够同时击中军事目标 W 和 N 连线的垂直中分线上 (海面上), 则质心必须落在两个军事目标 W 和 N 连线的垂直中分线上 (海面上), 其俯视图如图 3 所示, 分析可知有

$$\frac{v}{2} \cdot t = \frac{L}{2\sqrt{3}} \quad \text{③}$$

$$x^2 + \left(d - \frac{L}{2\sqrt{3}}\right)^2 = s^2 \quad \text{④}$$

将①代入③得到

$$\sin \theta = \frac{gL}{\sqrt{3}v_0 v}, \quad \cos \theta = \sqrt{1 - \frac{g^2 L^2}{3v_0^2 v^2}} \quad \text{⑤}$$

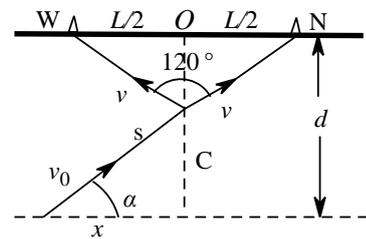


图3

将①⑤代入②得到

$$s = \frac{2L}{3v^2} \sqrt{3v_0^2 v^2 - g^2 L^2} \quad \text{⑥}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{4L^2}{9v^4} (3v_0^2 v^2 - g^2 L^2) - \left(d - \frac{L}{2\sqrt{3}}\right)^2} \quad \text{⑦}$$

$$|x| = s \cos \alpha \quad \text{⑧}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{9v^4 \left(d - \frac{L}{2\sqrt{3}}\right)^2}{L^2 (3v_0^2 v^2 - g^2 L^2)}} \quad \sin \alpha = \pm \frac{(2\sqrt{3}d - L)v}{4Lv_0 \sqrt{1 - \frac{g^2 L^2}{3v_0^2 v^2}}} \quad \text{⑨}$$

上式中“+”号表示倾向海岸方向, “-”号表示背向海岸方向.

$$0 < \frac{gL}{\sqrt{3}v_0v} \leq 1, \quad \left| \frac{(2\sqrt{3}d - L)v}{4Lv_0\sqrt{1 - \frac{g^2L^2}{3v_0^2v^2}}} \right| \leq 1, \quad d > 0 \quad \textcircled{9}$$

评分标准: 本题 14 分. ①②式各 1 分, ③④式各 2 分, ⑤式 1 分, ⑥⑦式各 2 分, ⑧式 1 分, ⑨式 2 分.

【说明】如果母弹爆炸点位于中垂线向陆地（跨过 WN 的连线）方向延伸至 $\frac{\sqrt{3}}{6}L$ 位置，则有

$$x \pm \sqrt{\frac{4L^2}{9v^4}(3v_0^2v^2 - g^2L^2) - \left(d + \frac{L}{2\sqrt{3}}\right)^2} \quad \textcircled{6}$$

$$\sin \alpha = \frac{(2\sqrt{3}d + L)v}{4Lv_0\sqrt{1 - \frac{g^2L^2}{3v_0^2v^2}}} \leq 1 \quad \textcircled{8}$$

三、

参考解答:

(1) 对于非准静态的自由膨胀过程，外界没有对气体做功，系统也没有从外界吸热. 由热力学第一定律得，容器内气体膨胀前后的内能改变为零， $\Delta U = 0 (\Delta T = 0)$ ，从而系统的温度没有改变，只是系统的体积增加了一倍，使得压强减少为原来的 1/2.

$$T_1 = T_0, \quad P_1 = \frac{1}{2}P_0 \quad \textcircled{1}$$

然后，气体从 $(2.0V_0, \frac{1}{2}P_0, T_1)$ 经过准静态绝热压缩过程，达到新的 $(1.7V_0, P', T')$ 平衡态.

该绝热过程满足方程:

$$\frac{1}{2}P_0(2V_0)^\gamma = P'(1.70V_0)^\gamma, \quad \gamma = 5/3$$

$$P' = \frac{1}{2} \times 0.85^{-\frac{5}{3}} P_0 \quad \textcircled{2}$$

$$P' \times 1.70V = \frac{1}{2} \times 0.85^{-\frac{5}{3}} P_0 \times 1.70V_0 = \nu_1 RT'$$

$$T' = \frac{PV_0}{\nu_1 R} \times 0.85 \times 0.85^{-\frac{5}{3}} = 0.85^{-\frac{2}{3}} T_0 \quad \textcircled{3}$$

(2) 当容器内的两种气体交换混合共同达到 $(2.7V_0, p'', T'')$ 平衡态时，能量守恒导出:

$$\nu_1 \frac{3}{2} RT' + \nu_2 \frac{5}{2} RT_e = \left(\nu_1 \frac{3}{2} R + \nu_2 \frac{5}{2} R \right) T''$$

$$T'' = \frac{3\nu_1 T' + 5\nu_2 T_e}{3\nu_1 + 5\nu_2} = \frac{3T' + 10T_e}{13} = \frac{3 \times 0.85^{-\frac{2}{3}} + 5}{13} T_0 = 0.64T_0 \quad (4)$$

同时, 根据理想气体方程有,

$$p_1'' = n_1 k T'', \quad p_2'' = n_2 k T'', \quad p'' = n k T'' \quad (5)$$

其中, p_1'', p_2'' 分别为单原子分子和双原子分子气体的压强, n_1, n_2 分别为相应的两种分子的分子数密度, n 为混合气体的分子数密度. 利用 $n = n_1 + n_2$ 关系和 (5) 式,

$$p'' = n k T'' = (n_1 + n_2) k T'' = p_1'' + p_2'' = \frac{(\nu_1 + \nu_2)}{2.7V_0} RT'' \quad (6)$$

代入数据得到结果,

$$p'' = \frac{3}{2.70V_0} R \frac{3 \times 0.85^{-\frac{2}{3}} + 5}{13} T_0 = \frac{9 \times 0.85^{-\frac{2}{3}} + 15}{35.1} p_0 \quad (7)$$

(3) 最后, 混合气体从 $(2.7V_0, p'', T'')$ 经过准静态绝热膨胀达到 $(3V_0, p''', T''')$ 平衡态. 该绝热过程满足如下的方程:

$$p'' (2.70V_0)^{\gamma_m} = p''' (3V_0)^{\gamma_m} \quad (8)$$

其中

$$\gamma_m = \frac{\nu_1 C_{p1} + \nu_2 C_{p2}}{\nu_1 C_{v1} + \nu_2 C_{v2}} \quad (9)^*$$

其中, 由题意得 $C_{v1} = \frac{3}{2} R$, $C_{p1} = C_{v1} + R = \frac{5}{2} R$, $C_{v2} = \frac{5}{2} R$, $C_{p2} = \frac{7}{2} R$. 从而得到混合气体的热容比:

$$\gamma_m = \frac{\nu_1 C_{p1} + \nu_2 C_{p2}}{\nu_1 C_{v1} + \nu_2 C_{v2}} = \frac{5 + 14}{3 + 10} = \frac{19}{13}$$

再代入 (8) 式得

$$p''' = 0.90^{\gamma_m} p'' = 0.90^{\frac{19}{13}} \times \frac{9 \times 0.85^{-\frac{2}{3}} + 15}{35.1} p_0 \quad (10)$$

同理有

$$T^* (2.70V_0)^{\gamma_m - 1} = T^m (3V_0)^{\gamma_m - 1} \quad \text{①}$$

$$T^* = 0.90^{(\gamma_m - 1)} T^m = 0.90^{\frac{6}{13}} \times \frac{3 \times 0.85^{\frac{2}{3}} + 5}{13.0} T_0 \quad \text{②}$$

评分标准: 本题 14 分, 第 (1) 问 4 分, ①式 2 分, ②③式各 1 分; 第 (2) 问 4 分, ④⑦式各 2 分; 第 (3) 问 6 分, ⑨⑩⑫式各 2 分.

⑨*式即: 求证两种混合气体满足的绝热过程及其热容比 $\gamma_m = \frac{\nu_1 C_{p1} + \nu_2 C_{p2}}{\nu_1 C_{v1} + \nu_2 C_{v2}}$.

⑨式证法:

根据提示: $(\Delta S_1)_{if} + (\Delta S_2)_{if} = 0$, 得到

$$\nu_1 C_{V1} \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + \nu_1 R \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) + \nu_2 C_{V2} \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + \nu_2 R \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = 0,$$

$$(\nu_1 C_{V1} + \nu_2 C_{V2}) \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) = -(\nu_1 R + \nu_2 R) \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = (\nu_1 R + \nu_2 R) \ln\left(\frac{V_i}{V_f}\right),$$

$$\left(\frac{T_f}{T_i}\right)^{(\nu_1 C_{V1} + \nu_2 C_{V2})} = \left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{(\nu_1 R + \nu_2 R)}, \quad \left(\frac{T_f}{T_i}\right) = \left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{(\nu_1 R + \nu_2 R) / (\nu_1 C_{V1} + \nu_2 C_{V2})}$$

所以:

$$T_f V_f^g = T_i V_i^g, \quad g = \frac{\nu_1 R + \nu_2 R}{\nu_1 C_{V1} + \nu_2 C_{V2}} \quad \text{(a)}$$

其次,

$$p_i V_i = (p_{i1} + p_{i2}) V_i = (\nu_1 + \nu_2) R T_i$$

$$p_f V_f = (p_{f1} + p_{f2}) V_f = (\nu_1 + \nu_2) R T_f$$

$$\Rightarrow \left(\frac{p_i V_i}{p_f V_f}\right) = \left(\frac{T_i}{T_f}\right), \quad \left(\frac{p_i}{p_f}\right) = \left(\frac{T_i}{T_f}\right) \left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

$$\left(\frac{p_f}{p_i}\right) = \left(\frac{T_f}{T_i}\right) \left(\frac{V_i}{V_f}\right) = \left(\frac{V_i}{V_f}\right)^g \left(\frac{V_i}{V_f}\right) = \left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{g+1}$$

所以:

$$p_f V_f^{g+1} = p_i V_i^{g+1}, \quad p_f V_f^{\gamma_m} = p_i V_i^{\gamma_m} \quad (\text{b})$$

$$\gamma_m = g + 1 = \frac{\nu_1 R + \nu_2 R}{\nu_1 C_{V_1} + \nu_2 C_{V_2}} + 1 = \frac{\nu_1 C_{p_1} + \nu_2 C_{p_2}}{\nu_1 C_{V_1} + \nu_2 C_{V_2}}$$

其中 $C_{p_1} = C_{V_1} + R$, $C_{p_2} = C_{V_2} + R$. 若 $\nu_2 = 0$, 就导出由一种理想气体构成的热力学系统满足的绝热过程及热容比关系:

$$p_f V_f^{\gamma} = p_i V_i^{\gamma} = \text{const.} \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_p + R}{C_v}$$

四、

参考答案: 先分析光波在第一层介质中的来回传播. 当光从光纤 (基体折射率为 n_1) 入射到折射率为 n_2 的第一层介质表面时, 假设入射光场 (电场强度) 为 a , 则其反射光场为

$$a_{r1} = r_1 a \quad \text{①}$$

式中 $r_1 = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$, 其透射光场为

$$a_{t1} = t_1 a \quad \text{②}$$

式中 $t_1 = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$, 当光波射到折射率为 n_1 的第二层介质表面时, 先不考虑光波在第一层介质中传播过程中的相位变化, 其反射光场为

$$a_{r2} = r_2 t_1 a = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} t_1 a = -r_1 t_1 a \quad \text{③}$$

注意到 $t_1 > 0$, 可知③式等式右端的因子 (-1) 表示 a_{r2} 和 a_{r1} 之间存在 180° 相位差.

现考虑光波在第一层介质中来回传播过程中的相位变化. 如果第一层介质最小厚度 (即小于光波在该介质中的波长) 为

$$d_2 = \frac{\lambda}{4n_2} = \frac{1060\text{nm}}{4 \times 1.55} \approx 171\text{nm} \quad \text{④}$$

则反射光场 a_{r2} 在入射处界面要附加 180° 相位差, 它与反射光场 a_{r1} 正好相干叠加加强. 则在入射处界面反射光场为

$$a'_{r2} = t_1 r_1 a \quad \text{⑤}$$

它透过第一层介质后成为

$$a_{r2}'' = t_2 t_1 r_1 a \quad \text{⑥}$$

式中

$$r_1 = -r_2 = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \quad t_1 = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}, \quad t_2 = \frac{2n_2}{n_1 + n_2} \quad \text{⑦}$$

再分析光波在第一、二层介质的来回传播.当光波射到折射率为 n_1 的第二层介质的前界面时,先不考虑光波在第一、二层介质中传播过程中的相位变化,其透射光场为

$$a_{r2} = t_2 a_{r1} = t_2 t_1 a \quad \text{⑧}$$

则按照前面类似的分析, a_{r2} 在通过第二层介质经第二、三层介质界面反射并返回至在入射处界面,反射光场应为

$$a_{r3}' = (t_1 t_2)^2 r_1 a \quad \text{⑨}$$

现考虑光波在第一、二层介质中传播过程中的相位变化,若第二层介质取最小厚度

$$d_1 = \frac{\lambda}{4n_1} = \frac{1060\text{nm}}{4 \times 1.51} \approx 175\text{nm} \quad \text{⑩}$$

则光波在第一、二层介质中往返引起的的相位变化为 360° 相位差.因而从第三个界面处反射并返回至在入射处界面处时,其反射光场为

$$a_{r3}'' = a_{r3}' = (t_1 t_2)^2 r_1 a \quad \text{⑪}$$

它与反射光场 a_{r1} 、 a_{r2}'' 正好相干叠加加强.

这样,不考虑每层界面的多次反射,经反射器反射后,入射端的总光场可表示为:

$$E = r_1 a + r_1 t_1 t_2 a + r_1 t_1^2 t_2^2 a + \cdots + r_1 t_1^N t_2^N a = r_1 a \frac{1 - (t_1 t_2)^{N+1}}{1 - t_1 t_2} \quad \text{⑫}$$

由于 n_1 与 n_2 非常接近, $t_1 t_2 \approx 1$, 这样⑫式可近似为:

$$E = r_1 a \frac{1 - (t_1 t_2)^{N+1}}{1 - t_1 t_2} \approx (N+1) r_1 a \quad \text{⑬}$$

如果要求反射率达到 8%, 则应有

$$E^2 = [(N+1) r_1 a]^2 = (N+1)^2 r_1^2 a^2 = 0.08 a^2 \quad \text{⑭}$$

由题给数据得

$$r_1 = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{1.51 - 1.55}{1.51 + 1.55} \approx -0.01307 \quad \text{⑮}$$

由⑭式得

$$N = \sqrt{\frac{0.08}{|r_1|^2}} - 1 \approx 20.64 \quad \text{⑯}$$

反射层总数至少为 21. ⑰

评分标准: 本题 20 分. ①②③式各 1 分, ④⑥⑩⑪式各 2 分, ⑫式 5 分, ⑬式 1 分, ⑭⑯⑰式各 1 分。

(从⑯直接得出

$$N = \frac{\ln \left[1 - \frac{\sqrt{R}(1-t_1 t_2)}{|r_1|} \right]}{\ln(t_1 t_2)} - 1 = 20.68$$

给 3 分。)

五、

参考解答:

(1) 对于微观粒子可以忽略地球重力的作用, 因此离子在极板外做匀速直线运动, 以入射孔所在处为坐标原点, 以垂直于极板的方向为 Y 轴方向, 平行于极板方向为 X 轴方向, 则离子在坐标 $(h_1 \cot \theta, h_1)$ 处进入极板区, 进入极板区后离子做斜抛运动, 初速度为

$$v_0 = \sqrt{2E/m} \quad \text{①}$$

加速度大小为 $a_y = -qV/(md)$

Y 轴方向速度为零时, 对应的坐标为

$$(h_1 \cot \theta + Ed \sin 2\theta / (qV), h_1 + Ed \sin^2 \theta / (qV)) \quad \text{②}$$

离子离开极板时, 速度大小仍为 $v_0 = \sqrt{2E/m}$, 后作匀速直线运动, 因此出射孔在 X 轴方向的坐标为

$$l = (h_1 + h_2) \cot \theta + 2Ed \sin 2\theta / (qV) \quad \text{③}$$

离子的能量与 l 的关系为

$$E = qV [l - (h_1 + h_2) \cot \theta] / (2d \sin 2\theta) \quad ④$$

能量为 E 的离子在垂直于极板方向的最大飞行距离

$$H = Ed \sin^2 \theta / (qV) \quad ⑤$$

(2) 当 $\Delta\alpha \ll \theta$ 时, 若有

$$\begin{aligned} l &= (h_1 + h_2) \cot(\theta + \Delta\alpha) + 2Ed \sin[2(\theta + \Delta\alpha)] / (qV) \\ &= (h_1 + h_2) \cot(\theta) + 2Ed \sin(2\theta) / (qV) \end{aligned} \quad ⑥$$

则可以达到要求. 又

$$\begin{aligned} \cot(\theta + \Delta\alpha) &= (\cos \theta \cos \Delta\alpha - \sin \theta \sin \Delta\alpha) / (\sin \theta \cos \Delta\alpha + \cos \theta \sin \Delta\alpha) \\ &\approx (\cos \theta - \Delta\alpha \sin \theta) / (\sin \theta + \Delta\alpha \cos \theta) = (\cot \theta - \Delta\alpha) / (1 + \Delta\alpha \cot \theta) \approx \cot \theta - \Delta\alpha (1 + \cot^2 \theta) \\ &= \cot \theta - \Delta\alpha / \sin^2 \theta \end{aligned}$$

其中利用了关系式 $\sin \Delta\alpha \approx \Delta\alpha$, $\cos \Delta\alpha \approx 1$; 同样有

$$\begin{aligned} \sin(2(\theta + \Delta\alpha)) &= \sin 2\theta \cos \Delta\alpha + \cos 2\theta \sin \Delta\alpha \\ &\approx \sin 2\theta + \Delta\alpha \cos 2\theta \end{aligned}$$

代入④式得

$$\Delta\alpha (h_1 + h_2) / \sin^2 \theta - 4\Delta\alpha Ed \cos(2\theta) / (qV) = 0$$

即

$$h_2 = 4Ed \sin^2 \theta \cos(2\theta) / (qV) - h_1 \quad ⑦$$

对应的能量表达式为

$$E = qVl / (2d \sin 2\theta (1 + \cos 2\theta)) \quad ⑧$$

(3) 为了使所有量程范围的离子均不碰到上极板, 则极板间距应大于⑤式的 H , 则可得

$$E_{\max} \leq qV / \sin^2 \theta \quad ⑨$$

或者说, 所加电压必须 $V \geq E_{\max} \sin^2 \theta / q$

由(8)式, 并根据题意要求, 可得 E_{\max} 与 l_{\max} 的关系为

$$E_{\max} = \frac{qVl_{\max}}{2d \sin 2\theta (1 + \cos 2\theta)} \quad ⑩$$

将上式代入⑨式, 得到极板的最小间距为

$$d = \frac{l_{\max} \sin^2 \theta}{2 \sin 2\theta (1 + \cos 2\theta)} \quad \text{①}$$

若 $\theta = 30^\circ$, 则要求

$$d = \frac{\sqrt{3}}{18} l_{\max} \quad \text{②}$$

(4) 可以加如图所示的垂直于运动平面强度为 B 的半圆形均匀磁场, 则离子将做回旋运动, 测出其回旋半径 R , 则其运动方程为:

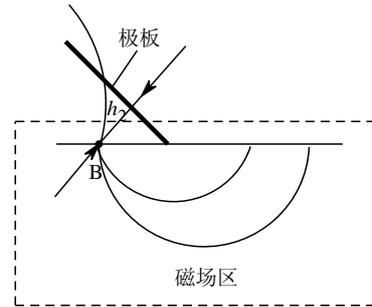
$$\frac{mv^2}{R} = qvB \quad \text{③}$$

即

$$mv = qBR$$

所以有

$$\begin{aligned} m &= (mv)^2 / (2E) = qB^2 R^2 d \sin 2\theta (1 + \cos 2\theta) / V I \\ &= qB^2 R^2 l_{\max} \sin^2 \theta / V I \end{aligned} \quad \text{④}$$



评分标准: ①式 1 分, ④式 2 分, ⑤式 1 分, ⑥⑦⑧式各 2 分, ⑨⑩⑪式各 2 分, 设计图 2 分, ⑬⑭式各 1 分.

六、

参考解答:

(1) 磁通量

$$\Phi = B_a \cdot A \quad \text{①}$$

由几何关系可知两个正三角形中包含一个磁通量子, 所以

$$A = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 \quad \text{②}$$

此时 $\Phi = \Phi_0$, 于是

$$\Phi_0 = B_a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 \quad \text{③}$$

$$a = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\Phi_0}{B_a}} = 2.19 \times 10^{-7} \text{ m} = 0.219 \mu\text{m} \quad \text{④}$$

(2) 随着外加磁场的增加, 每个磁通量子所对应面积减少, 即磁通密度增大, 当相邻两根磁通涡旋线的正常芯开始重叠时, 即

$$a \leq 2\xi \quad \text{⑤}$$

整块超导体都变为正常态, 此时所对应的磁场为上临界磁场:

$$B_a = B_{c2} = \frac{\Phi_0}{\frac{\sqrt{3}}{2}(2\xi)^2} = \frac{2.07 \times 10^{-15}}{2 \times \sqrt{3} \times 25 \times 10^{-18}} T = \frac{2.07 \times 10^{-15}}{3.47 \times 25 \times 10^{-18}} T = 23.85 T \quad \text{⑥}$$

(3) 如图三所示, 当超导带材中通以电流 I 时, 这样在 Lorentz 的作用下, 磁通涡旋线将以速度 v 向右运动, 等效于超导体以速度 v 向左做切割线磁力线运动, 从而在超导体的两端产生电势差:

$$U = B_a v d \quad \text{⑦}$$

$$v = \frac{f_A \Phi_0}{\eta B_a} = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{I d \Phi_0}{bcd} \quad \text{⑧}$$

由于磁通流动所产生的电阻为:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{B_a v d}{I} = \frac{\Phi_0 B_a I d^2}{\eta I (bcd)} = \frac{\Phi_0 B_a d^2}{\eta (bcd)} \quad \text{⑨}$$

$$R = \rho \frac{d}{bc} \quad \text{⑩}$$

$$\rho = \frac{\Phi_0 B_a bcd}{\eta (bcd)} = \frac{\Phi_0 B_a}{\eta} \quad \text{⑪}$$

(4) 在超导体内引入缺陷, 如空位, 位错, 填隙原子等, 当磁通涡旋线落入这些缺陷时, 就会产生磁通钉扎效应, 使磁通涡旋线不易流动, 即为非理想第二类超导体。

评分标准: (1) 问 6 分, ①③④各 2 分; (2) 问 4 分, ⑤⑥各 2 分; (3) 问 8 分, 方向 2 分, ⑦⑧⑨⑩各 1 分, ⑪ 2 分; (4) 问 2 分。

七、

参考解答:

(1) (共 16 分)

设 A 运动速度为 v_A , B 运动速度为 v_B , A 和 B 所受空气阻力的分量式分别为

$$\begin{cases} f_{Ax} = -k(v_{Ax} - u) \\ f_{Ay} = -kv_{Ay} \end{cases}, \begin{cases} f_{Bx} = -k(v_{Bx} - u) \\ f_{By} = -kv_{By} \end{cases}$$

细杆与小球的相互作用力为内力, 对系统的合力没有影响, 考虑到重力, 则系统所受合外力的分量式分别为

$$\begin{cases} F_x = -k(v_{Ax} - u) - k(v_{Bx} - u) = -2kv'_x \\ F_y = -2mg - kv_{Ay} - kv_{By} = -2mg - 2kv_y \end{cases} \quad \textcircled{1}$$

式中

$$v'_x = v_x - u$$

为质心 C 沿 x 方向相对风的速度;

$$v_x = \frac{v_{Ax} + v_{Bx}}{2} \text{ 和 } v_y = \frac{v_{Ay} + v_{By}}{2}$$

分别为质心 C 沿 x 方向和 y 方向上的运动速度.

(i) 上抛过程中 y 方向上质心 C 的运动

由质心运动定律, 有

$$F_y = -2mg - 2kv_y = 2m \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \quad \textcircled{2}$$

化简上式并求和, 有

$$-mg \sum \Delta t - k \sum v_y \Delta t = m \sum \Delta v_y$$

设质点系上抛至最高点时质心 C 上升高度为 y_1 , 所需时间为 T_1 . 解得

$$-mgT_1 - ky_1 = m(0 - v_0) \quad \textcircled{3}$$

(ii) 碰撞过程

设碰撞后沿 y 方向上质心 C 的速度为 v_{y1} , 小石块的速度为 u_2 , 由质点系 y 方向动量守恒, 有

$$m_1 u_1 = 2mv_{y1} + m_1 u_2 \quad \text{④}$$

设 v_{Ay1} 和 v_{By1} 分别为碰撞后 A 和 B 沿 y 方向上的速度分量, 则

$$v_{y1} = \frac{v_{Ay1} + v_{By1}}{2}$$

设碰后小球 A 绕质心 C 转动速度的 y 方向分量为 v_{c0} , 则小球 B 绕质心转动速度的 y 方向分量为 $-v_{c0}$, 由相对运动关系, v_{Ay1} 等于 v_{c0} 与质心运动速度 v_{y1} 之和, v_{By1} 等于 $-v_{c0}$ 与 v_{y1} 之和, 即有

$$v_{Ay1} = (v_{y1} + v_{c0}), v_{By1} = (v_{y1} - v_{c0})$$

碰撞给系统带来的动能贡献为

$$E_{ky} = \frac{1}{2}m(v_{y1} + v_{c0})^2 + \frac{1}{2}m(v_{y1} - v_{c0})^2 = 2 \times \frac{1}{2}mv_{y1}^2 + 2 \times \frac{1}{2}mv_{c0}^2$$

碰撞前后 x 方向速度没变, 设为 v_x , 由质点系机械能守恒, 有

$$\frac{1}{2}m_1 u_1^2 + 2 \times \frac{1}{2}mv_x^2 = \frac{1}{2}(2m)v_{y1}^2 + 2 \times \frac{1}{2}mv_{c0}^2 + 2 \times \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}m_1 u_2^2 \quad \text{⑤}$$

由对惯性系中瞬时与质心 C 重合的一点, 由角动量守恒, 有

$$m_1 l u_1 = 2mlv_{c0} + m_1 l u_2 \quad \text{⑥}$$

由角量和线量的关系, 有

$$v_{c0} = l\omega_0$$

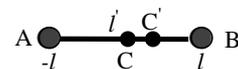
[或: 由质点系机械能守恒, 有

$$\frac{1}{2}m_1 u_1^2 + 2 \times \frac{1}{2}mv_x^2 = \frac{1}{2}m(v_{Ay1}^2 + v_{By1}^2) + 2 \times \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}m_1 u_2^2 \quad \text{⑤}$$

如图, 设碰撞后瞬间, 轻杆上静止的点为 C' (瞬时转动中心),

其距 A 为 l' , 由对 C' 点的角动量守恒, 有

$$m_1 l' u_1 = ml' v_{Ay1} + m(2l - l')v_{By1} + m_1 l' u_2 \quad \text{⑥}$$



碰撞后质点系开始转动, 对 C' 点的转动, 有

$$v_{Ay1} = l'\omega_0, v_{By1} = (2l - l')\omega_0, v_{y1} = (l' - l)\omega_0 \quad]$$

联立上述各式, 解得

$$v_{Ay1} = 2 \frac{m_1}{m + m_1} u_1, v_{By1} = 0 \quad (7)$$

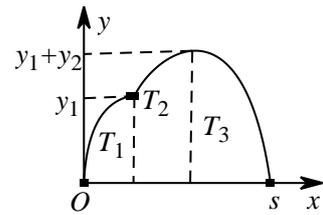
$$v_{y1} = v_{c0} = \frac{m_1}{m + m_1} u_1 \quad (8)$$

$$u_2 = \frac{m_1 - m}{m + m_1} \quad (9)$$

$$\omega_0 = \frac{m_1}{m + m_1} \frac{u_1}{l} \quad (10)$$

(iii) 再次上抛过程中 y 方向上质心 C 的运动

质心 C 的运动轨迹如图所示, 碰撞后, 质心 C 以 v_{y1} 沿 y 轴方向再次作上抛运动. 设再次到达最高点时质心 C 又上升的高度为 y_2 , 所用时间为 T_2 . 类比③式, 有



$$-mgT_2 - ky_2 = m(0 - v_{y1}) \quad (11)$$

(iv) 平抛过程中 y 方向上质心 C 的运动

质点系再次到达最高点后, 质心 C 的运动为平抛运动. 设此过程所用时间为 T_3 , 在 y 方向上质心 C 受力为

$$F_y = -2mg - 2kv_y \quad (12)$$

由牛顿运动定律, 有

$$-2mg - 2kv_y = 2m \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \quad (13)$$

化简上式并求和, 有

$$-mg \sum \Delta t - k \sum v_y \Delta t = m \sum \Delta v_y$$

注意到下落过程中有 $\sum v_y \Delta t = -(y_1 + y_2)$, 解得

$$-mgT_3 + k(y_1 + y_2) = m(-v_{ys} - 0) \quad (14)$$

式中, v_{ys} 为落地时质心 C 在 y 方向上的速度大小, 方向向下. 由③⑧⑩⑭式, 及

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

得

$$v_{ys} = gT - v_0 - \frac{m_1}{m + m_1} u_1 \quad (15)$$

(v) 整个过程中 x 方向上质心 C 的运动

质心 C 沿 x 方向相对风的速度为 $v'_x = u - v_x$, 在 x 方向上, 质心 C 的位移为 s (题给),

设末速度为 v_{xs} , 由质心运动定律, 有

$$F_x = -2kv'_x = -2k(v_x - u) = 2m \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \quad \text{⑩}$$

化简上式并求和, 有

$$-\frac{k}{m} (\sum v_x \Delta t - u \sum \Delta t) = \sum \Delta v_x$$

解得

$$v_{xs} = \frac{k}{m} (uT - s) \quad \text{⑪}$$

[或: 建立随风运行的惯性参照系 $O'x'y'$, 初始 $O'x'y'$ 坐标系与 Oxy 坐标系重合, 整个运动过程中在 x' 方向上质心 C 只受空气阻力作用, 该力沿 x' 正向, 其初速度为 u , 方向沿 x' 负向. 由质心运动定律和牛顿运动定律, 有

$$2kv'_x = 2m \frac{\Delta v'_x}{\Delta t} \quad \text{⑫}$$

化简并求和, 有

$$k \sum v'_x \Delta t = m \sum \Delta v'_x$$

解得

$$ks' = m[-v'_{xs} - (-u)]$$

式中, s' 和 v'_{xs} 分别为整个过程结束时, 质心 C 在 $O'x'y'$ 坐标中 x' 方向的位移大小和末速度大小. 有

$$s = uT - s'$$

$$v_{xs} = u - v'_{xs}$$

由上述各式, 解得整个过程结束时质心 C 在 Oxy 坐标中沿 x 方向运动的速度为

$$v_{xs} = \frac{k}{m} (uT - s) \quad \text{⑬}$$

(vi) 转动过程

如图, 因轻杆不受外力及外力矩, 故其施加给 A 和 B 的力必沿轻杆方向, 且大小相等

方向相反, 标记为 T_l , 则有

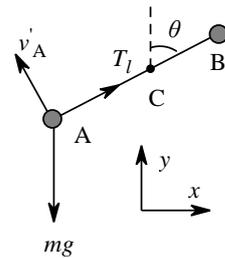
$$\begin{cases} F_{Ax} = -k(v_{Ax} - u) + T_{tx} = m \frac{\Delta v_{Ax}}{\Delta t} \\ F_{Ay} = -mg - kv_{Ay} + T_{ty} = m \frac{\Delta v_{Ay}}{\Delta t} \end{cases}, \begin{cases} F_{Bx} = -k(v_{Bx} - u) - T_{tx} = m \frac{\Delta v_{Bx}}{\Delta t} \\ F_{By} = -mg - kv_{By} - T_{ty} = m \frac{\Delta v_{By}}{\Delta t} \end{cases} \quad (18)$$

由质心运动定理, 有

$$\begin{cases} F_x = -2kv_x + 2ku = 2m \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \\ F_y = -2mg - 2kv_y = 2m \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \end{cases} \quad (19)$$

注意到相对于质心, A 的相对速度为

$$\begin{cases} v'_{Ax} = v_{Ax} - v_x \\ v'_{Ay} = v_{Ay} - v_y \end{cases}$$



由 (18) (19) 式, 有

$$\begin{cases} \frac{\Delta v'_{Ax}}{\Delta t} = \frac{\Delta v_{Ax}}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = -\frac{k}{m}(v_{Ax} - v_x) + \frac{T_{tx}}{m} = -\frac{k}{m}v'_{Ax} + \frac{T_{tx}}{m} \\ \frac{\Delta v'_{Ay}}{\Delta t} = \frac{\Delta v_{Ay}}{\Delta t} = \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = -\frac{k}{m}(v_{Ay} - v_y) + \frac{T_{ty}}{m} = -\frac{k}{m}v'_{Ay} + \frac{T_{ty}}{m} \end{cases}$$

A 相对于质心 C 作圆周运动, 故 v'_A 方向与杆方向垂直, 如图所示. 则上式可改写为

$$\begin{cases} \frac{\Delta v'_{Ax}}{\Delta t} = \frac{k}{m}v'_A \cos \theta + \frac{T_l \sin \theta}{m} \\ \frac{\Delta v'_{Ay}}{\Delta t} = \frac{k}{m}v'_A \sin \theta + \frac{T_l \cos \theta}{m} \end{cases}$$

利用上式可得, A 相对于质心 C 作圆周运动的切向加速度为

$$\frac{\Delta v'_A}{\Delta t} = -\frac{\Delta v'_{Ax}}{\Delta t} \cos \theta + \frac{\Delta v'_{Ay}}{\Delta t} \sin \theta = -\frac{k}{m}v'_A \quad (20)$$

注意到 $v'_A = \omega l$, 且圆周运动切向加速度为 $\frac{\Delta v'_A}{\Delta t} = \frac{\Delta(\omega l)}{\Delta t} = l \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$, 则上式改写为

$$\frac{\Delta \omega}{\Delta t} = -\frac{k}{m}\omega \quad (21)$$

化简并对整个过程求和, 有

$$\sum \Delta \omega = -\frac{k}{m} \sum \omega \Delta t$$

根据题意, 解得

$$\omega_s - \omega_0 = -\frac{k}{m} 2n\pi \quad \text{②}$$

上式代入 ω_0 , 得

$$\omega_s = \omega_0 - \frac{2kn\pi}{m} = \frac{m_1}{m+m_1} \frac{u_1}{l} - \frac{2kn\pi}{m} \quad \text{③}$$

(2) (共 4 分)

末态时质心速度平方为

$$v_s^2 = v_{xs}^2 + v_{ys}^2 \quad \text{④}$$

在质心系中, A 和 B 绕质心转动的速度 \vec{v}_{Ac} 和 \vec{v}_{Bc} 总是大小相等方向相反, 即有 $\vec{v}_{Ac} = -\vec{v}_{Bc}$,

则末态时系统动能为

$$E_{ks} = \frac{1}{2} m (\vec{v}_s + \vec{v}_{Ac})^2 + \frac{1}{2} m (\vec{v}_s + \vec{v}_{Bc})^2 = 2 \times \frac{1}{2} m v_s^2 + \frac{1}{2} m v_{Ac}^2 + \frac{1}{2} m v_{Bc}^2$$

式中 $v_{Ac} = \omega_s l$ 、 $v_{Bc} = \omega_s l$ 分别为末态质心系中 A 和 B 的速度大小, 代入上式, 得

$$E_{ks} = \frac{1}{2} (2m) (v_{xs}^2 + v_{ys}^2) + \frac{1}{2} (2m) (\omega_s l)^2 \quad \text{⑤}$$

中间碰撞过程小石块对质点系做功即为碰后质点系的动能, 由⑦式得

$$E_{km} = 2 \times \frac{1}{2} m v_{Ay_1}^2 + 2 \times \frac{1}{2} m v_{By_1}^2 = 2m \left(\frac{m_1}{m+m_1} u_1 \right)^2 \quad \text{⑥}$$

由功能原理, 及⑤⑦⑧⑨⑩式, 整个过程空气阻力作的功为

$$\begin{aligned} W_f &= E_{ks} - E_{km} - E_{k0} \\ &= m \left(gT - v_0 - \frac{m_1}{m+m_1} u_1 \right)^2 + \frac{k^2}{m} (uT - s)^2 + m \left(\frac{m_1}{m+m_1} u_1 - \frac{2kn\pi l}{m} \right)^2 - m v_0^2 - 2m \left(\frac{m_1}{m+m_1} u_1 \right)^2 \end{aligned} \quad \text{⑦}$$

参考评分标准: 本题 20 分. (1) 问 16 分, ②③④⑤⑥⑧⑩⑪⑬⑭⑮⑯⑰⑱⑲式各 1 分,

(2) 问 4 分, ⑤⑥式各 1 分, ⑦式 2 分.

八、

参考解答

(1) 质子、氘、氦-3、氦-4 和电子在热运动中类似于单原子理想气体，不需要考虑转动自由度，因此它们热运动的平均动能为

$$E_k = \frac{3}{2}kT = \frac{1.5 \times 1.381 \times 10^{-23} \times 1.5 \times 10^7}{1.602 \times 10^{-19}} \text{keV} \approx 2 \text{keV} \quad \text{①}$$

由于系统主要有质子和电子组成，质子每摩尔质量为 1 克；由已知密度可得质子摩尔体积为

$$V_{\text{mol}} = \frac{1}{1.6 \times 10^8} \text{m}^3 \quad \text{②}$$

$$P = 2 \times \frac{RT}{V_{\text{mol}}} = 2 \times 1.6 \times 10^8 \times 1.5 \times 10^7 \times 8.31 \text{N/m}^2 = 2 \times 2 \times 10^{16} \text{N/m}^2 = 4 \times 10^{11} \text{atm} \quad \text{③}$$

式中出现因子 2 是因为考虑了等离子体中电子贡献的缘故。

(2) 由反应前后电荷守恒，可知 x 粒子的电荷

$$Q_x = 0 \quad \text{④}$$

也就是说，该粒子为中性粒子。

由上一问可知，氘和质子热运动的平均动能只有 0.002MeV，在误差范围内，因此核反应前它们的动能可以忽略不计，即可以看作静止。

设 X 粒子的质量为 m_x ，动量为 p_x ，则由能量和动量守恒得

$$m_D c^2 + m_H c^2 = \sqrt{m_{\text{He3}}^2 c^4 + p_{\text{He3}}^2 c^2} + \sqrt{m_x^2 c^4 + p_x^2 c^2} \quad \text{⑤}$$

$$p_{\text{He3}} = p_x \quad \text{⑥}$$

由⑤式知

$$p_x c < m_D c^2 + m_H c^2 - m_{\text{He3}} c^2 = 5.5 \text{MeV} \quad \text{⑦}$$

因此有

$$p_x c \ll m_{\text{He3}} c^2$$

则由⑥式，可将⑤式改写为

$$m_D c^2 + m_H c^2 - m_{\text{He}3} c^2 = \frac{p_x^2}{2m_{\text{He}3}} + \sqrt{m_x^2 c^4 + p_x^2 c^2} \approx \sqrt{m_x^2 c^4 + p_x^2 c^2} \quad \textcircled{8}$$

即氦-3 的动能 $E_{k\text{He}3} \approx 0$, 忽略不计, x 粒子的总能量 (含静止能量) 为 5.5MeV , 因此其静止质量 $m_x < 5.5\text{MeV}/c^2$, 这么轻的中性粒子, 在我们熟知的粒子中应该是 γ 光子 (#), $m_x = 0$, 其动能和动量分别为

$$E_{kx} = 5.5\text{MeV}, p_x = 5.5\text{MeV}/c \quad \textcircled{9}$$

因此在任何一个参照系, γ 光子的动能均不为零, 否则能量和动量不能同时守恒, 即不能找到一个参考系, 使得光子的动能为零. $\textcircled{10}$

(3) 由反应 (I) 前后能量守恒可知, 反应产物的总动能

$$E_k = 2m_H c^2 - m_D c^2 - m_e c^2 - m_\nu c^2 = 0.42\text{MeV}$$

远小于氦核的静止能量, 利用第 2 问的分析方法可知, 氦核的动能可以忽略不计, 即

$$E_{kD} < 0.01\text{MeV} \approx 0 \quad \textcircled{11}$$

氦核动量可以不为零, 但要满足 $\vec{p}_D + \vec{p}_e + \vec{p}_\nu = 0$, 因此不能确定正电子和中微子的动能, 只有如下关系

$$E_{ke} + E_{k\nu} = 0.42\text{MeV}; \quad 0 < E_{ke} < 0.42\text{MeV}; \quad 0 < E_{k\nu} < 0.42\text{MeV}$$

(4) 正负电子对湮灭会产生一对光子, 其能量相等, 动量也相等但方向相反.

$$h\nu_0 = h \frac{c}{\lambda_0} = mc^2 = 0.51\text{MeV}$$

$$\lambda_0 = \frac{hc}{mc^2} = \frac{6.626 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{0.51 \times 1.6 \times 10^{-13}} m = 2.43 \times 10^{-12} m \quad \textcircled{13}$$

由前面的分析可知, γ 光子与离子的碰撞几乎为完全弹性碰撞, 且光子能量远小于离子静能, 没有能量损失, 不改变光子的波长; 因此就光子波长的改变而言, 我们只需考虑光子与电子的散射. 能量为 $E_0 = h\nu_0$ 的光子与近似静止的电子进行康普顿散射后, 产生动量为 P_e 、动能为 T 的电子和能量为 $E = h\nu$ 的光子, 则由能量守恒和动量守恒, 得

$$h\nu_0 = h\nu + T \quad \textcircled{14}$$

$$\frac{h\nu_0}{c} = \frac{h\nu}{c} \cos \phi + P_e \cos \theta \quad (15)$$

$$0 = \frac{-h\nu}{c} \sin \phi + P_e \sin \theta \quad (16)$$

从⑮与⑯式消去 θ 可得:

$$P_e^2 = \frac{h^2}{c^2} (\nu_0^2 + \nu^2 - 2\nu_0\nu \cos \phi) \quad (17)$$

由相对论能量动量关系:

$$P_e^2 c^2 = (mc^2 + T)^2 - m^2 c^4 = T^2 + 2Tmc^2$$

和⑭式得

$$(E_0 - E)^2 + 2(E - E)mc^2 = E_0^2 + E^2 - 2E_0E \cos \phi$$

整理后可得:

$$E = \frac{E_0}{1 + \frac{E_0}{mc^2}(1 - \cos \phi)} \quad (18)$$

⑮式化简可得

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{h}{mc} (1 - \cos \phi) \quad (19)$$

最后一次康普顿散射后的波长为 $\lambda_f = 5.4 \times 10^{-7} \text{ m}$, 令一次康普顿散射的散射角为 ϕ , 则

有

$$\lambda_f - \lambda_0 = \frac{h \times 10^{26}}{mc} (1 - \overline{\cos \phi}) \quad (20)$$

$$(1 - \overline{\cos \phi}) \approx \frac{\overline{\phi^2}}{2} = \frac{\lambda_f mc}{h \times 10^{26}}$$

$$\phi = \sqrt{\frac{2\lambda_f mc}{h \times 10^{26}}} = 6.7 \times 10^{-11} \text{ rad} \quad (21)$$

评分标准: 总分 20 分. ①②③各 1 分; ④⑤⑥⑦⑧ (包括#) ⑨⑩各 1 分, ⑪ 1 分, ⑫ 2 分, ⑬⑭⑯⑰各 1 分, ⑱⑲⑳各 1 分