

第 16 届全国中学生物理竞赛预赛试卷

全卷共九题，总分为 140 分。

一、(10 分)

1. 到 1998 年底为止，获得诺贝尔物理学奖的华人共有_____人，他们的姓名是

_____。

2. 1998 年 6 月 3 日，美国发射的航天飞机“发现者”号搭载了一台 α 磁谱仪，其中一个关键部件是由中国科学院电工研究所设计制造的直径 1200mm、高 800mm、中心磁感强度为 0.1340T 的永久磁体。用这个 α 磁谱仪期望探测到宇宙中可能存在的_____。

3. 到 1998 年底为止，人类到达过的地球以外的星球有_____，由地球上发射的探测器到达过的地球以外的星球有_____。

二、(15 分) 一质量为 M 的平顶小车，以速度 v_0 沿水平的光滑轨道作匀速直线运动。

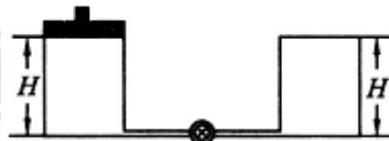
现将一质量为 m 的小物块无初速地放置在车顶前缘。已知物块和车顶之间的动摩擦系数为 μ 。

1. 若要求物块不会从车顶后缘掉下，则该车顶最少要多长？

2. 若车顶长度符合 1 问中的要求，整个过程中摩擦力共做了多少功？

三、(15 分) 如图预 16-3 所示，两个截面相同的圆柱形容器，右边容器高为 H ，上端封闭，左边容器上端是一个可以在容器内无摩擦滑动的活塞。两容器由装有阀门的极细管道相连通，容

器、活塞和细管都是绝热的。开始时，阀门关闭，左边容器中装有热力学温度为 T_0 的单原子理想气体，平



图预 16-3

衡时活塞到容器底的距离为 H ，右边容器内为真空。现将阀门缓慢打开，活塞便缓慢下降，直至系统达到平衡。求此时左边容器中活塞的高度和缸内气体的温度。

提示：一摩尔单原子理想气体的内能为 $\frac{3}{2}RT$ ，其中 R 为摩尔气体常量， T 为气体的热力学温度。

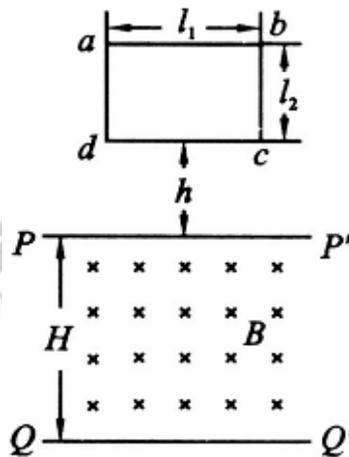
四、(20 分) 位于竖直平面内的矩形平面导线框 $abcd$ 。 ab 长为 l_1 ，是水平的， bc 长为 l_2 ，线框的质量为 m ，电阻为 R 。

其下方有一匀强磁场区域，该区域的上、下边界 PP' 和 QQ'

均与 ab 平行，两边界间的距离为 H ， $H > l_2$ ，磁场的磁感应强度为 B ，方向与线框平面垂直，如图预 16-4 所示。令

线框的 dc 边从离磁场区域上边界 PP' 的距离为 h 处自由下落，已知在线框的 dc 边进入磁场后， ab 边到达边界 PP' 之前

的某一时刻线框的速度已达到这一阶段的最大值。问从线框开始下落到 dc 边刚刚到达磁场区域下边界 QQ' 的过程中，磁场作用于线框的安培力做的总功为多少？



图预 16-4

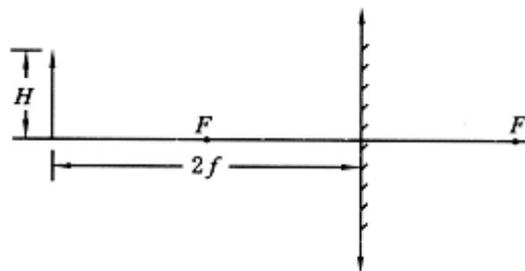
五、(15 分) 一平凸透镜焦距为 f ，其平面上镀了银，现在其凸面一侧距它 $2f$ 处，垂直于主轴放置一高为 H 的物，其下端在透镜的主轴上 (如图预 16-5)。

1. 用作图法画出物经镀银透镜所成的像，并标明该像是虚、是实。

2. 用计算法求出此像的位置和大小。

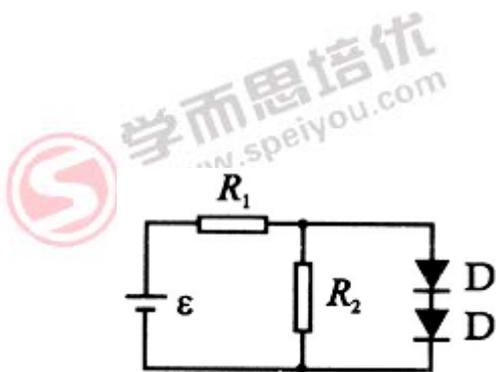
六、(15 分) 如图预 16-4-1 所示，电阻 $R_1 = R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ ，电动势 $E = 6 \text{ V}$ ，两个相同的二极管 D 串联在电路中，二极管 D 的 $I_D - U_D$ 特性曲线如图预 16-6-2 所示。试求：

1. 通过二极管 D 的电流。

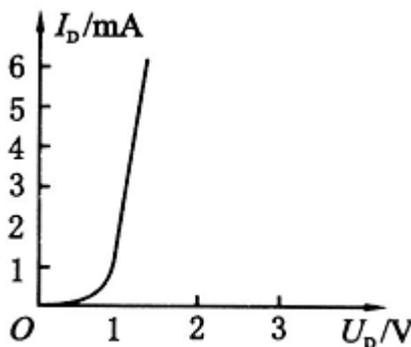


图预 16-5

2. 电阻 R_1 消耗的功率。



图预 16-6-1



图预 16-6-2

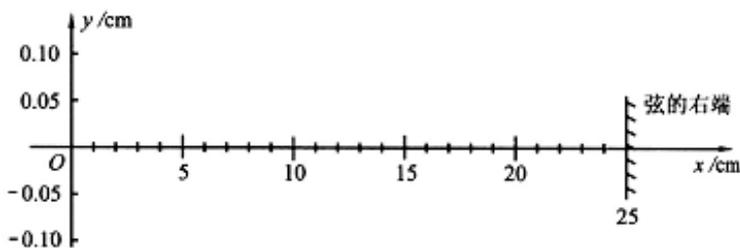
七、(15 分) 将一根长为 100 多厘米的均匀弦线，沿水平的 x 轴放置，拉紧并使两端固定。现对离固定的右端 25cm 处（取该处为原点 O ，如图预 16-7-1 所示）的弦上一点施加一个沿垂直于弦线方向（即 y 轴方向）的扰动，其位移随时间的变化规律如图预 16-7-2 所示。该扰动将沿弦线传播而形成波（孤立的脉冲波）。已知该波在弦线中的传播速度为 2.5 cm/s ，且波在传播和反射过程中都没有能量损失。

1. 试在图预 16-7-1 中准确地画出自 O 点沿弦向右传播的波在 $t = 2.5 \text{ s}$ 时的波形图。

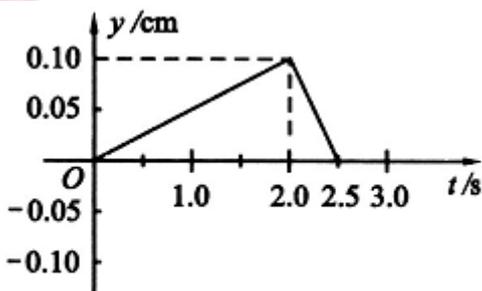
2. 该波向右传播到固定点时将发生反射，反射波向左传播，反射点总是固定不动的。这

可看成是向右传播的波和向左传播的波相叠加，使反射点的位移始终为零。由此观点出发，试在图预 16-7-1 中准确地画出 $t = 12.5 \text{ s}$ 时的波形图。

3. 在图预 16-7-1 中准确地画出 $t = 10.5 \text{ s}$ 时的波形图。



图预 16-7-1



图预 16-7-2

八、(15 分) 1997 年 8 月 26 日在日本举行的国际天文学会上, 德国 Max Planck 学会的一个研究组宣了他们的研究成果: 银河系的中心可能存在一个在黑洞。他们的根据是用口径为 3.5m 的天文望远镜对猎户座中位于银河系中心附近的星体进行近六年的观测所得到的数据, 他们发现, 距离银河系中心约 60 亿公里的星体正以 2000 km/s 的速度围绕银河系中心旋转。根据上面的数据, 试在经典力学的范围内(见提示 2), 通过计算确认, 如果银河系中心确实存在黑洞的话, 其最大半径是多少。

(引力常数 $G = 6.67 \times 10^{-20} \text{ km}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$)

提示: 1. 黑洞是一种密度极大的天体, 其表面的引力是如此之强, 以至于包括光在内的所有物质都不了其引力作用。

2. 计算中可以采用拉普拉斯经典黑洞模型, 在这种模型中, 在黑洞表面上的所有物质, 即使初速度等于光速 c 也逃脱不了其引力的作用。

九、(20 分) 一个大容器中装有互不相溶的两种液体, 它们的密度分别为 ρ_1 和 ρ_2

($\rho_1 < \rho_2$)。现让一长为 L 、密度为 $\frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)$ 的均匀木棍, 竖直地放在上面的液体内, 其下端离两液体分界面的距离为 $\frac{3}{4}L$, 由静止开始下落。试计算木棍到达最低处

所需的时间。假定由于木棍运动而产生的液体阻力可以忽略不计，且两液体都足够深，保证木棍始终都在液体内部运动，未露出液面，也未与容器相碰。



第 16 届全国中学生物理竞赛预赛试卷

参考答案及评分标准

一、参考解答

1. 五, 杨振宁、李政道、丁肇中、朱棣文、崔琦

2. 反物质

3. 月球, 月球、火星

二、参考解答

1. 物块放到小车上以后, 由于摩擦力的作用, 当以地面为参考系时, 物块将从静止开始加速运动, 而小车将做减速运动, 若物块到达小车顶后缘时的速度恰好等于小车此时的速度, 则物块就刚好不脱落。令 v 表示此时的速度, 在这个过程中, 若以物块和小车为系统, 因为水平方向未受外力, 所以此方向上动量守恒, 即

$$Mv_0 = (m + M)v \quad (1)$$

从能量来看, 在上述过程中, 物块动能的增量等于摩擦力对物块所做的功, 即

$$\frac{1}{2}mv^2 = \mu mgs_1 \quad (2)$$

其中 s_1 为物块移动的距离。小车动能的增量等于摩擦力对小车所做的功, 即

$$\frac{1}{2}Mv^2 - \frac{1}{2}Mv_0^2 = -\mu mgs_2 \quad (3)$$

其中 s_2 为小车移动的距离。用 l 表示车顶的最小长度, 则

$$l = s_2 - s_1 \quad (4)$$

由以上四式，可解得

$$l = \frac{Mv_0^2}{2\mu g(m+M)} \quad (5)$$

即车顶的长度至少应为 $l = \frac{Mv_0^2}{2\mu g(m+M)}$ 。

2. 由功能关系可知，摩擦力所做的功等于系统动量的增量，即

$$W = \frac{1}{2}(m+M)v^2 - \frac{1}{2}Mv_0^2 \quad (6)$$

由 (1)、(6) 式可得

$$W = -\frac{mMv_0^2}{2(m+M)} \quad (7)$$

三、参考解答

设容器的截面积为 A ，封闭在容器中的气体为 ν 摩尔，阀门打开前，气体的压强为 p_0 。由理想气体状态方程有

$$p_0AH = \nu RT_0 \quad (1)$$

打开阀门后，气体通过细管进入右边容器，活塞缓慢向下移动，气体作用于活塞的压强仍为 p_0 。活塞对气体的压强也是 p_0 。设达到平衡时活塞的高度为 x ，气体的温度为 T ，则有

$$p_0(H+x)A = \nu RT \quad (2)$$

根据热力学第一定律，活塞对气体所做的功等于气体内能的增量，即

$$p_0(H-x)A = \frac{3}{2}vR(T-T_0) \quad (3)$$

由 (1)、(2)、(3) 式解得

$$x = \frac{2}{5}H \quad (4)$$

$$T = \frac{7}{5}T_0 \quad (5)$$

四、参考解答

设线框的 dc 边刚到达磁场区域上边界 PP' 时的速度为 v_1 ，则有

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mgh \quad (1)$$

dc 边进入磁场后，按题意线框虽然受安培力阻力作用，但依然加速下落。设 dc 边下落到离 PP' 的距离为 Δh_1 时，速度达到最大值，以 v_0 表示这个最大速度，这时线

框中的感应电动势为

$$E = Bl_1v_0$$

线框中的电流

$$I = \frac{E}{R} = \frac{Bl_1v_0}{R}$$

作用于线框的安培力为

$$F = Bl_1I = \frac{B^2l_1^2v_0}{R} \quad (2)$$

速度达到最大的条件是安培力

$$F = mg$$

由此得

$$v_0 = \frac{mgR}{B^2 l_1^2} \quad (3)$$

在 dc 边向下运动距离 Δh_1 的过程中，重力做功 $W_G = mg\Delta h_1$ ，安培力做功 W_F ，由动能定理得

$$W_G + W_F = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

将 (1)、(3) 式代入得安培力做的功

$$W_F = -mg\Delta h_1 + \frac{m^3 g^2 R^2}{2B^4 l_1^4} - mgh \quad (4)$$

线框速度达到 v_0 后，做匀速运动。当 dc 边匀速向下运动的距离为 $\Delta h_2 = l_2 - \Delta h_1$ 时， ab 边到达磁场的边界 PP' ，整个线框进入磁场。在线框 dc 边向下移动 Δh_2 的过程中，重力做功 W_G' ，安培力做功 W_F' ，但线框速度未变化，由动能定理

$$W_G' + W_F' = 0$$

$$W_F' = -W_G' = -mg\Delta h_2 = -mg(l_2 - \Delta h_1) \quad (5)$$

整个线框进入磁场后，直至 dc 边到达磁场区的下边界 QQ' ，作用于整个线框的安培力为零，安培力做的功也为零，线框只在重力作用下做加速运动。

所以，整个过程中安培力做的总功

$$W = W_F + W_F' = -mg(l_2 + h) + \frac{m^3 g^2 R^2}{2B^4 l_1^4} \quad (6)$$

(编注：此题命题有不严密之处。由微分方程

$$mg - \frac{B^2 l_1^2 v}{R} = m \frac{dv}{dt}$$

的解

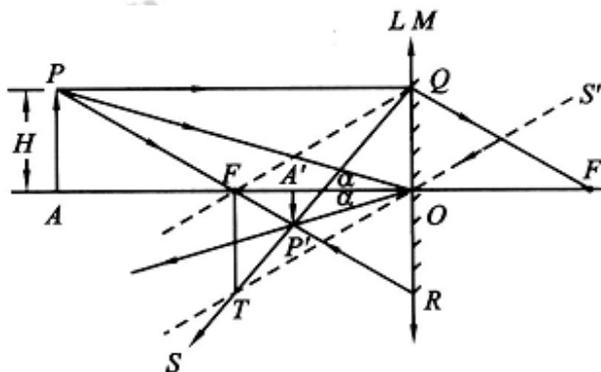
$$mg - \frac{B^2 l_1^2 v}{R} = l - \frac{B^2 l_1^2}{mR} t$$

可知，只有当 $t \rightarrow \infty$ 时， v 才能趋向极限速度 $v_0 = \frac{mgR}{B^2 l_1^2}$ (即线框下落无穷长的距离，速度才能趋向 v_0)。原题说 ab 边未进入磁场即达到最大速度是不确切的。)

五、参考解答

1. 用作图法求得物 AP 的像 $A'P'$ 及所用各条光线的光路如图预解16-5所示。

说明：平凸薄透镜平面上镀银后构成一个由会聚透镜 L 和与它密接的平面镜 M 的组合 LM ，如图预解16-5所示。图中 O 为 L 的光心， AOF' 为主轴， F 和 F' 为 L 的两个焦点， AP 为物，作图时利用了下列三条特征光线：



图预解 16-5

(1) 由 P 射向 O 的入射光线，它通过 O 后方向不变，沿原方向射向平面镜 M ，然后被 M 反射，反射光线与主轴的夹角等于入射角，均为 α 。反射线射入透镜时通过光心 O ，故由透镜射出时方向与上述反射线相同，即图中的 OP' 。

(2) 由 P 发出已通过 L 左方焦点 F 的入射光线 PFR ，它经过 L 折射后的出射线与主轴平行，垂直射向平面镜 M ，然后被 M 反射，反射光线平行于 L 的主轴，并向左射入 L ，经 L 折射后的出射线通过焦点 F ，即为图中的 RFP 。

(3) 由 P 发出的平行于主轴的入射光线 PQ ，它经过 L 折射后的出射线将射向 L 的焦点 F' ，即沿图中的 QF' 方向射向平面镜，然后被 M 反射，反射线指向与 F' 对称的 F 点，即沿 QF 方向。此反射线经 L 折射后的出射线可用下法画出：通过 O 作平行于 QF 的辅助线 $S'OS$ ， $S'OS$ 通过光心，其方向保持不变，与焦面相交于 T 点，由于入射平行光线经透镜后相交于焦面上的同一点，故 QF 经 L 折射后的出射线也通过 T 点，图中的 QT 即为 QF 经 L 折射后的出射光线。

上列三条出射光线的交点 P' 即为 LM 组合所成的 P 点的像，对应的 A' 即 A 的像点。由图可判明，像 $A'P'$ 是倒立实像，只要采取此三条光线中任意两条即可得 $A'P'$ ，即为正确的解答。

2. 按陆续成像计算物 AP 经 LM 组合所成像的伙置、大小。

物 AP 经透镜 L 成的像为第一像，取 $u_1 = 2f$ ，由成像公式可得像距 $v_1 = 2f$ ，即像在平向镜后距离 $2f$ 处，像的大小 H' 与原物相同， $H' = H$ 。

第一像作为物经反射镜 M 成的像为第二像。第一像在反射镜 M 后 $2f$ 处，对 M 来说是虚物，成实像于 M 前 $2f$ 处。像的大小 H'' 也与原物相同， $H'' = H' = H$ 。

第二像作为物，而经透镜 L 而成的像为第三像，这时因为光线由 L 右方入射，且物（第二像）位于 L 左方，故为虚物，取物 $u_3 = -2f$ ，由透镜公式 $\frac{1}{u_3} + \frac{1}{v_3} = \frac{1}{f}$ 可得
像距

$$v_3 = \frac{fu_3}{u_3 - f} = \frac{2}{3}f > 0$$

上述结果表明，第三像，即本题所求的像的位置在透镜左方距离 $\frac{2}{3}f$ 处，像的大小 H''' 可由 $\frac{H'''}{H''} = \left| \frac{v_3}{u_3} \right| = \frac{1}{3}$ 求得，即

$$H''' = \frac{1}{3}H'' = \frac{1}{3}H$$

像高为物高的 $\frac{1}{3}$ 。

六、参考解答

解法一：

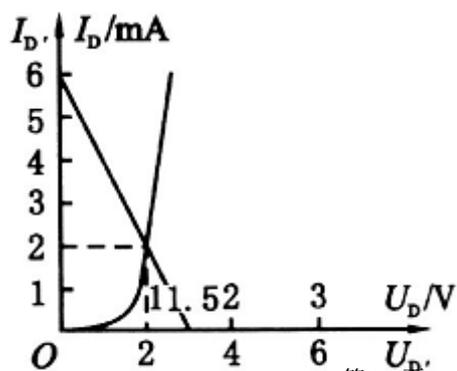
设二极管 D 两端的管压为 U_D ，流过二极管的电流为 I_D 。则有

$$2U_D = E - \left(I_D + \frac{2U_D}{R_2} \right) R_1 \quad (1)$$

代入数据解得 U_D 与 I_D 的关系为

$$U_D = (1.5 - 0.25I_D \times 10^3) \text{ V} \quad (2)$$

这是一在图预解 16-6 中横轴上截距为 1.5，纵轴上截距为 6、斜率为 -4 的直线方程（称为二极管的负载线）因管压 U_D 与流过二极管电流 I_D 还受二极管 D 的 $I_D \sim U_D$ 特性曲线的限制，因而二极管就工作在负载线与 $I_D \sim U_D$ 特性曲线的相交点 P



图预解 16-6

上（如图预解16-6）。由此得二极管两端的管压和电流分别为

$$U_D = 1 \text{ V}, \quad I_D = 2 \text{ mA} \quad (3)$$

电阻 R_1 上的电压

$$U_1 = E - 2U_D = 4 \text{ V}$$

其功率

$$P_1 = \frac{U_1^2}{R_1} = 16 \text{ mW} \quad (4)$$

解法二：

设两个二极管用一个等效二极管 D' 代替，当流过等效二极管的电流为 $I_{D'}$ 时，等效二极管的管压为 $U_{D'} = 2U_D$ 。

即有

$$U_{D'} = E - (I_{D'} + \frac{U_{D'}}{R_2})R_1 \quad (1')$$

代入数据解得 $U_{D'}$ 与 $I_{D'}$ 的关系为

$$U_{D'} = (3 - 0.5I_{D'} \times 10^3) \text{ V} \quad (2')$$

这是一在横轴上截距为3、纵轴上截距为6、斜率为-2的负载线方程，二极管 D' 的 $I_{D'} - U_{D'}$ 特性曲线只要将图预解16-6的横坐标增大1倍即可。用作图法，求出负载线与管 D' 的特性曲线相交的 P 点得

$$U_{D'} = 2 \text{ V}, \quad I_{D'} = 2 \text{ mA} \quad (3')$$

电阻 R_1 上的电压

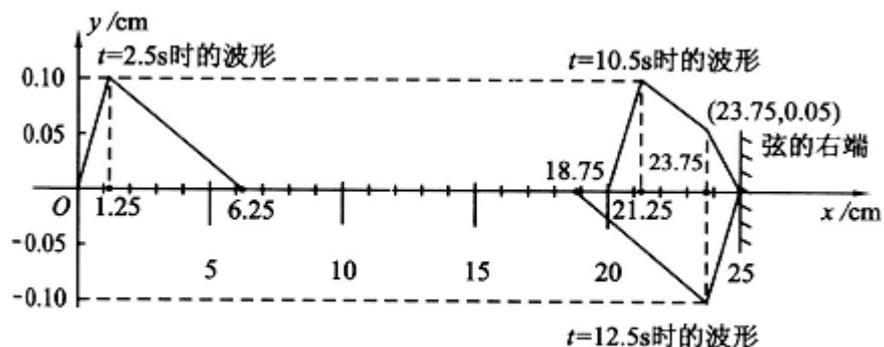
$$U_1 = E - U_D = 4 \text{ V}$$

其功率

$$P_1 = \frac{U_1^2}{R_1} = 16 \text{ mW} \quad (4')$$

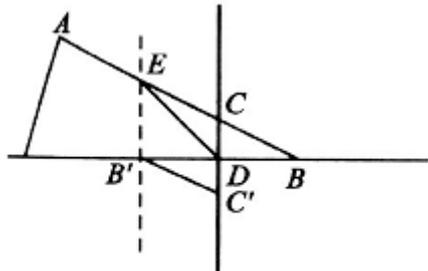
七、参考解答

$t = 10.5 \text{ s}$ 和 $t = 12.5 \text{ s}$ 的波形如图预解 16-7-1 所示。

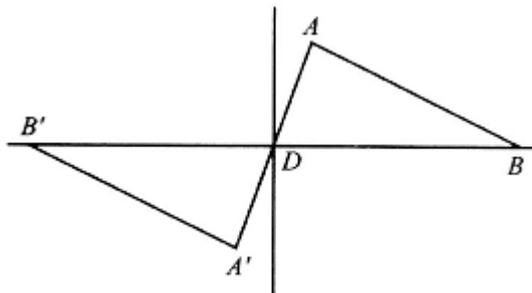


图预解 16-7-1

其中 10.5 s 时的波形，如果没有固定点应如 AB 所示，以固定点 D 对称作出反射波 $B'C'$ ，再和 AC 合成，形成了 AED （图预解 16-7-2）。 12.5 s 的波形，如果没有固定点应如 AB 所示，以固定点对称作出反射波 $A'B'$ （图预解 16-7-3）。



图预解 16-7-2



图预解 16-7-3

八、参考解答

首先求出一定质量的引力源成为黑洞应满足的条件. 按照黑洞的定义, 包括以光速运动的光子也不能脱离黑洞的吸引, 即不能逃离黑洞的表面. 而拉普拉斯经典黑洞模型则把光看做是以光速 c 运动的某种粒子. 我们知道, 物体在引力作用下的势能是负的, 物体恰能逃离引力作用, 表示物体运动到无限远的过程中, 其动能恰好全部用于克服引力做功. 物体在无限远处时, 动能和势能都等于零. 这意味着该物体处在引力源表面处时, 其动能与势能之和亦等于零. 物体不能逃离引力作用, 表示该物体尚未到达无限远处, 其动能已全部用于克服引力做功, 但引力势能仍是负的. 这意味着它在引力源表面处时, 其动能与势能之和小于零. 若某引力源的质量为 M , 半径为 r_B , 质量为 m 的粒子在引力源表面的速度等于光速, 但它仍不能逃离引力作用, 则按牛顿力学的观点应有下列关系:

$$\frac{1}{2}mc^2 - G\frac{Mm}{r_B} < 0 \quad (1)$$

或

$$r_B < \frac{2GM}{c^2} \quad (2)$$

这就是说, 对于质量为 M 的引力源, 只有其半径 r_B (叫做黑洞的引力半径) 小于 $\frac{2GM}{c^2}$ 时才会在其表面产生足够强的引力, 使得包括光在内的所有物质都不能脱离其引力作用. 对光而言, 人们将无法通过光学测量看到它, 这就是把它叫做黑洞的原因.

现在再来根据观测数据确定存在于银河系中心的大黑洞的半径. 设位于银河系中心的引力源的质量为 M , 绕银河系中心旋转的星体的质量为 m , 该星体做圆周运动时, 有下列关系:

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{mM}{r^2} \quad \text{即} \quad M = \frac{rv^2}{G} \quad (3)$$

r 为轨道半径. 若该引力源为黑洞, 则其质量分布球的半径应满足 (2) 式, 即

$$r_B < \frac{2G}{c^2} \frac{v^2 r}{G} = 2 \frac{v^2 r}{c^2} \quad (4)$$

根据观测数据, $v = 2 \times 10^3 \text{ km/s} = 2 \times 10^6 \text{ m/s}$, $r = 60 \times 10^8 \text{ km} = 6 \times 10^{12} \text{ m}$, 而

$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$, 把这些数据代入 (4) 式, 得

$$r_B < 5.3 \times 10^8 \text{ m} = 5.3 \times 10^5 \text{ km} \quad (5)$$

这说明, 对质量由 (3) 式决定的引力源来说, 半径小于 $5.3 \times 10^5 \text{ km}$ 时才是黑洞, 大于这个数值则不是黑洞. 所以如果银河系中心存在黑洞的话, 该黑洞的半径小于 $5.3 \times 10^5 \text{ km}$.

九、参考解答

1. 用 S 表示木棍的横截面积, 从静止开始到其下端到达两液体交界面为止, 在这过程中, 木棍受向下的重力 $\frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2) \cdot LSg$ 和向上的浮力 $\rho_1 LSg$. 由牛顿第二定律可知, 其下落的加速度

$$a_1 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} g \quad (1)$$

用 t_1 表示所需的时间, 则

$$\frac{3}{4}L = \frac{1}{2}a_1 t_1^2 \quad (2)$$

由此解得

$$t_1 = \sqrt{\frac{3L(\rho_1 + \rho_2)}{2(\rho_2 - \rho_1)g}} \quad (3)$$

2. 木棍下端开始进入下面液体后, 用 L' 表示木棍在上面液体中的长度, 这时木

棍所受重力不变, 仍为 $\frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2) \cdot LSg$, 但浮力变为 $\rho_1 L' Sg + \rho_2 (L - L') Sg$. 当 $L = L'$ 时, 浮力小于重力; 当 $L' = 0$ 时, 浮力大于重力, 可见有一个合力为零的平衡位置. 用 L_0' 表示在此平衡位置时, 木棍在上面液体中的长度, 则此时有

$$\frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2) \cdot LSg = \rho_1 L_0' Sg + \rho_2 (L - L_0') Sg \quad (4)$$

由此可得

$$L_0' = \frac{L}{2} \quad (5)$$

即木棍的中点处于两液体交界处时, 木棍处于平衡状态, 取一坐标系, 其原点位于交界面上, 竖直方向为 z 轴, 向上为正, 则当木棍中点的坐标 $z = 0$ 时, 木棍所受合力为零. 当中点坐标为 z 时, 所受合力为

$$-\frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2) \cdot LSg + \left[\rho_1 \left(\frac{1}{2}L + z \right) Sg + \rho_2 \left(\frac{1}{2}L - z \right) Sg \right] = -(\rho_2 - \rho_1) Sgz = -kz$$

式中 $k = (\rho_2 - \rho_1) Sg \quad (6)$

这时木棍的运动方程为

$$-kz = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2) L S a_z$$

a_z 为沿 z 方向加速度

$$a_z = -2 \frac{(\rho_2 - \rho_1) g z}{(\rho_1 + \rho_2) L} = -\omega^2 z$$

$$\omega^2 = 2 \frac{(\rho_2 - \rho_1) g}{(\rho_1 + \rho_2) L} \quad (7)$$

由此可知为简谐振动，其周期

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{(\rho_1 + \rho_2)L}{2(\rho_2 - \rho_1)g}} \quad (8)$$

为了求同时在两种液体中运动的时间，先求振动的振幅 A 。木棍下端刚进入下面液体时，其速度

$$v = a_1 t_1 \quad (9)$$

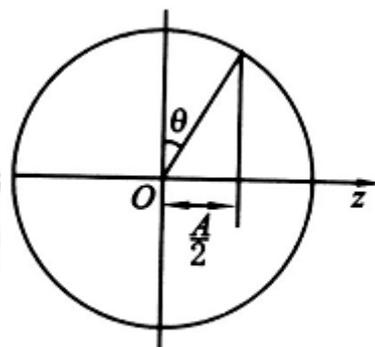
由机械能守恒可知

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (\rho_1 + \rho_2) SL \right] v^2 + \frac{1}{2} k z^2 = \frac{1}{2} k A^2 \quad (10)$$

式中 $z = \frac{1}{2}L$ 为此时木棍中心距坐标原点的距离，由 (1)、(3)、(9) 式可求得 v ，再将 v 和 (6) 式中的 k 代入 (10) 式得

$$A = L \quad (11)$$

由此可知，从木棍下端开始进入下面液体到棍中心到达坐标原点所走的距离是振幅的一半，从参考圆（如图预解 16-9）上可知，对应的 θ 为 30° ，对应的时间为 $T/12$ 。因此木棍从下端开始进入下面液体到上端进入下面液体所用的时间，即棍中心从 $z = \frac{L}{2}$ 到 $z = -\frac{L}{2}$ 所用的时间为



图预解 16-9

$$t_2 = 2 \frac{T}{12} = \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{(\rho_1 + \rho_2)L}{2(\rho_2 - \rho_1)g}} \quad (12)$$

3. 从木棍全部浸入下面液体开始，受力情况的分析和 1 中类似，只是浮力大于重力，所以做匀减速运动，加速度的数值与 a_1 一样，其过程和 1 中情况相反地对称，所

用时间

$$t_3 = t_1 \quad (13)$$

4. 总时间为

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = \frac{6\sqrt{6} + \sqrt{2}\pi}{6} \sqrt{\frac{(\rho_1 + \rho_2)L}{(\rho_2 - \rho_1)g}} \quad (14)$$

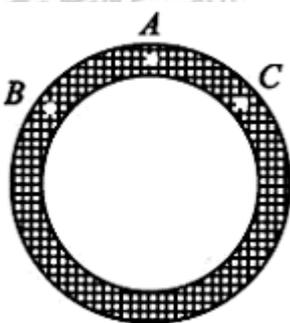
第 17 届全国中学生物理竞赛预赛试卷

全卷共八题，总分为 140 分。

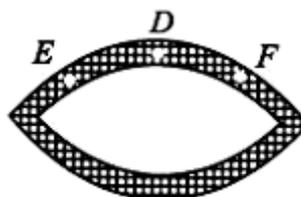
一、(10 分)

1. (5 分) 1978 年在湖北省随县发掘了一座战国早期(距今大约 2400 多年前)曾国国君的墓葬——曾侯乙墓，出土的众多墓葬品中被称为中国古代文明辉煌的象征的是一组青铜铸造的编钟乐器(共 64 件)，敲击每个编钟时，能发出音域宽广、频率准确的不同音调。与铸造的普通圆钟不同，圆钟的横截面呈圆形，每个编钟的横截面均呈杏仁状。图预 17-1-1 为圆钟截面的，图预 17-1-2 为编钟的截面，分别敲击两个钟的 A 、 B 、 C 和 D 、 E 、 F 三个部位，则圆钟可发出_____个基频的音调，编钟可发出_____个基频的音调。

2. (5 分) 我国在 1999 年 11 月 20 日用新型运载火箭成功地发射了一艘实验航天飞行器，它被命名为_____号，它的目的是为_____作准备。



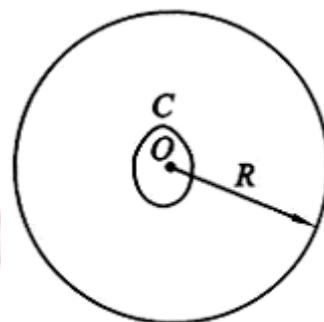
图预 17-1-1



图预 17-1-2

二、(15 分) 一半径为 $R=1.00\text{ m}$ 的水平光滑圆桌面，圆心为 O ，有一竖直的立柱固定在桌面上的圆心附近，立柱与桌面的交线是一条凸的平滑的封闭曲线 C ，如图预 17-2 所示。一根不可伸长的柔软的细轻绳，一端固定在封闭曲线上的某一点，另一端系一质量为 $m=7.5\times 10^{-2}\text{ kg}$ 的小物块。将小物块放在桌面上并把绳

拉直，再给小物块一个方向与绳垂直、大小为 $v_0=4.0\text{ m/s}$ 的初速度。物块在桌面上运动时，绳将缠绕在立柱上。已知当绳的张力为 $T_0=2.0\text{ N}$ 时，绳即断开，在绳断开前物块始



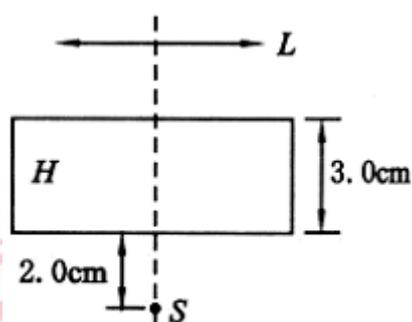
图预 17-2

终在桌面上运动。

1. 问绳刚要断开时，绳的伸直部分的长度为多少？

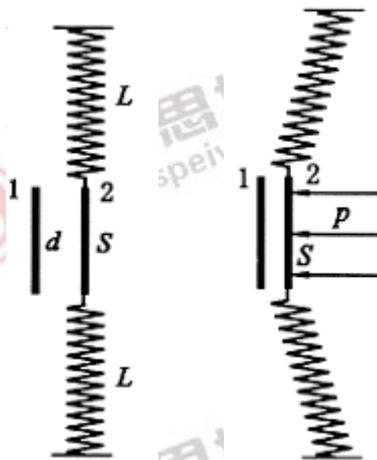
2. 若绳刚要断开时，桌面圆心 O 到绳的伸直部分与封闭曲线的接触点的连线正好与绳的伸直部分垂直，问物块的落地点到桌面圆心 O 的水平距离为多少？已知桌面高度 $H=0.80\text{ m}$ 。物块在桌面上运动时未与立柱相碰。取重力加速度大小为 10 m/s^2 。

三、(15 分) 有一水平放置的平行平面玻璃板 H ，厚 3.0 cm，折射率 $n=1.5$ 。在其下表面下 2.0 cm 处有一小物 S ；在玻璃板上方有一薄凸透镜 L ，其焦距 $f=30$ cm，透镜的主轴与玻璃板面垂直； S 位于透镜的主轴上，如图预 17-3 所示。若透镜上方的观察者顺着主轴方向观察到 S 的像就在 S 处，问透镜与玻璃板上表面的距离为多少？



图预 17-3

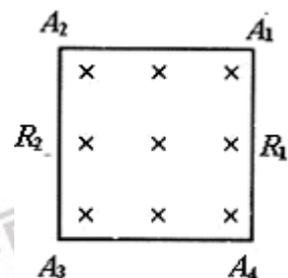
四、(20 分) 某些非电磁量的测量是可以通过一些相应的装置转化为电磁量来测量的。一平板电容器的两个极板竖直放置在光滑的水平平台上，极板的面积为 S ，极板间的距离为 d 。极板 1 固定不动，与周围绝缘；极板 2 接地，且可在水平平台上滑动并始终与极板 1 保持平行。极板 2 的两个侧边与劲度系数为 k 、自然长度为 L 的两个完全相同的弹簧相连，两弹簧的另一端固定。图预 17-4-1 是这一装置的俯视图。先将电容器充电至电压 U 后即与电源断开，再在极板 2 的右侧的整个表面上施以均匀的向左的待测压强 p ；使两极板之间的距离发生微小的变化，如图预 17-4-2 所示。测得此时电容器的电压改变量为 ΔU 。设作用在电容器极板 2 上的静电作用力不致引起弹簧的可测量到的形变，试求待测压强 p 。



图预 17-4-1

图预 17-4-2

五、(20 分) 如图预 17-5-1 所示，在正方形导线回路所围的区域 $A_1A_2A_3A_4$ 内分布有方向垂直于回路平面向里的匀强磁场，磁感应强度 B 随时间以恒定的变化率增大，回路中的感应电流为 $I=1.0$ mA。已知 A_1A_2 、 A_3A_4 两边的电阻皆为零； A_4A_1 边的电阻 $R_1=3.0$ k Ω ， A_2A_3 边的电阻 $R_2=7.0$ k Ω 。

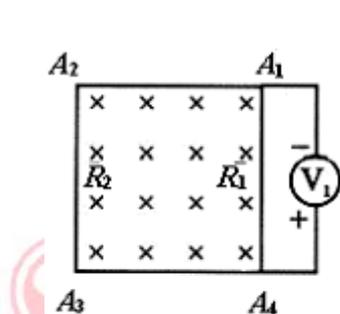


图预 17-5-1

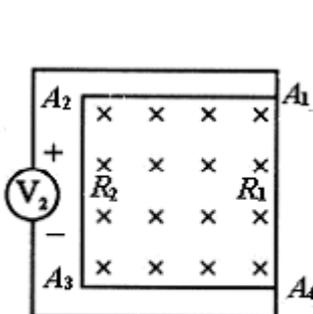
1. 试求 A_1A_2 两点间的电压 U_{12} 、 A_2A_3 两点间的电压 U_{23} 、

A_3A_4 两点间的电压 U_{34} 、 A_4A_1 两点间的电压 U_{41} 。

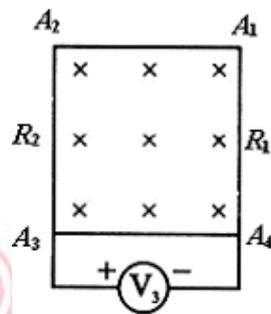
2. 若一内阻可视为无限大的电压表 V 位于正方形导线回路所在的平面内，其正负端与连线位置分别如图预 17-5-2、图预 17-5-3 和图预 17-5-4 所示，求三种情况下电压表的读数 U_1 、 U_2 、 U_3 。



图预 17-5-2



图预 17-5-3



图预 17-5-4

六、(20 分) 绝热容器 A 经一阀门与另一容积比 A 的容积大得很多的绝热容器 B 相连。开始时阀门关闭, 两容器中盛有同种理想气体, 温度均为 30°C , B 中气体的压强为 A 中的 2 倍。现将阀门缓慢打开, 直至压强相等时关闭。问此时容器 A 中气体的温度为多少? 假设在打开到关闭阀门的过程中处在 A 中的气体与处在 B 中的气体之间无热交换。已知每摩尔该气体的内能为 $U = \frac{5}{2}RT$, 式中 R 为普适气体恒量, T 是热力学温度。

七、(20 分) 当质量为 m 的质点距离一个质量为 M 、半径为 R 的质量均匀分布的致密天体中心的距离为 r ($r \geq R$) 时, 其引力势能为 $E_p = -GMm/r$,

其中 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ 为万有引力常量。设致密天体是中子星, 其半径 $R = 10 \text{ km}$, 质量 $M = 1.5M_{\odot}$

($1M_{\odot} = 2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$, 为太阳的质量)。

1. 1kg 的物质从无限远处被吸引到中子星的表面时所释放的引力势能为多少?

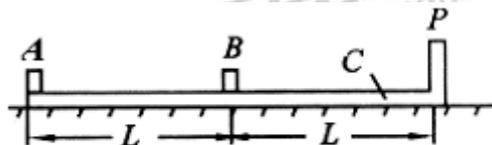
2. 在氢核聚变反应中, 若参加核反应的原料的质量为 m , 则反应中的质量亏损为 $0.0072 m$, 问 1kg 的原料通过核聚变提供的能量与第 1 问中所释放的引力势能之比是多少?

3. 天文学家认为: 脉冲星是旋转的中子星, 中子星的电磁辐射是连续的, 沿其磁轴方向最强, 磁轴与中子星的自转轴方向有一夹角 (如图预 17-7 所示), 在地球上的接收器所接收到的一连串周期出现的脉冲是脉冲星的电磁辐射。试由上述看法估算地球上接收到的两个脉冲之间的时间间隔的下限。



图预 17-7

八、(20 分) 如图预 17-8 所示, 在水平桌面上放有长木板 C , C 上右端是固定挡板 P , 在 C 上左端和中点处各放有小物块 A 和 B , A 、 B 的尺寸以及 P 的厚度皆可忽略不计, A 、 B 之间和 B 、 P 之间的距离皆为 L 。设木板 C 与桌面之间无摩擦, A 、 C 之间和 B 、 C 之间的静摩擦因数及滑动摩擦因数均为 μ ; A 、 B 、 C



图预 17-8

(连同挡板 P) 的质量相同. 开始时, B 和 C 静止, A 以某一初速度向右运动. 试问下列情况是否能发生? 要求定量求出能发生这些情况时物块 A 的初速度 v_0 应满足的条件, 或定量说明不能发生的理由.

- (1) 物块 A 与 B 发生碰撞;
- (2) 物块 A 与 B 发生碰撞 (设为弹性碰撞) 后, 物块 B 与挡板 P 发生碰撞;
- (3) 物块 B 与挡板 P 发生碰撞 (设为弹性碰撞) 后, 物块 B 与 A 在木板 C 上再发生碰撞;
- (4) 物块 A 从木板 C 上掉下来;
- (5) 物块 B 从木板 C 上掉下来.

第 17 届全国中学生物理竞赛预赛试卷

参考答案及评分标准

一、参考解答

- 1, 2
- 神舟, 载人飞行

二、参考解答

1. 因桌面是光滑的, 轻绳是不可伸长的和柔软的, 且在断开前绳都是被拉紧的, 故在绳断开前, 物块在沿桌面运动的过程中, 其速度始终与绳垂直, 绳的张力对物块不做功, 物块速度的大小保持不变。设在绳刚要断开时绳的伸直部分的长度为 x , 若此时物块速度的大小为 v_x , 则有

$$v_x = v_0 \quad (1)$$

绳对物块的拉力仅改变物块速度的方向, 是作用于物块的向心力, 故有

$$T_0 = \frac{mv_x^2}{x} = \frac{mv_0^2}{x} \quad (2)$$

由此得

$$x = \frac{mv_0^2}{T_0} \quad (3)$$

代入数据得 $x = 0.60 \text{ m}$ (4)

2. 设在绳刚要断开时, 物块位于桌面上的 P 点, BP 是绳的伸直部分, 物块速度 v_0 的方向如图预解 17-2 所示。由题意可知, $OB \perp BP$ 。因物块离开桌面时的速度仍为 v_0 , 物块离开桌面后便做初速度为 v_0 的平抛运动, 设平抛运动经历的时间为 t , 则有

$$H = \frac{1}{2}gt^2 \quad (5)$$

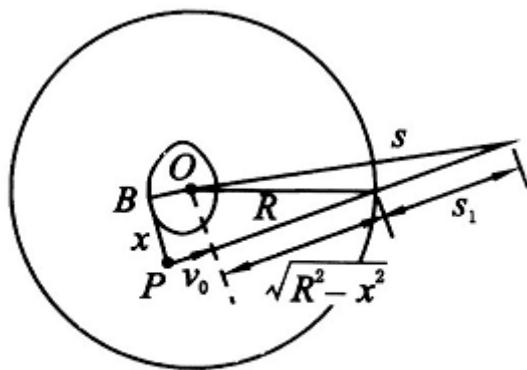
物块做平抛运动的水平射程为

$$s_1 = v_0 t \quad (6)$$

由几何关系, 物块落地地点与桌面圆心 O 的水平距离 s 为

$$s = \sqrt{\left[s_1 + \sqrt{R^2 - x^2}\right]^2 + x^2} \quad (7)$$

解 (5)、(6)、(7) 式, 得



图预解 17-2

$$s = \sqrt{\left[v_0 \sqrt{\frac{2H}{g} + \sqrt{R^2 - x^2}} \right]^2 + x^2} \quad (8)$$

代人数据得

$$s = 2.5 \text{ m}$$

三、参考解答

物体 S 通过平行玻璃板及透镜成三次像才能被观察到。设透镜的主轴与玻璃板下表面和上表面的交点分别为 A 和 B ， S 作为物，通过玻璃板 H 的下表面折射成像于点 S_1 处，由图预解

17-3，根据折射定律，有

$$n' \sin i = n \sin r$$

式中 $n' = 1.0$ 是空气的折射率，对傍轴光线， i 、 r 很小， $\sin i \approx \tan i$ ， $\sin r \approx \tan r$ ，则

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{SA}} = n \frac{\overline{AD}}{\overline{S_1A}}$$

式中 \overline{SA} 为物距， $\overline{S_1A}$ 为像距，有

$$\overline{S_1A} = n \overline{SA} \quad (1)$$

将 S_1 作为物，再通过玻璃板 H 的上表面折射成像于点 S_2 处，这时物距为

$\overline{S_1B} = \overline{S_1A} + \overline{AB}$ 。同样根据折射定律可得像距

$$\overline{S_2B} = \frac{\overline{S_1B}}{n} \quad (2)$$

将 S_2 作为物，通过透镜 L 成像，设透镜与 H 上表面的距离为 x ，则物距 $u = x + \overline{S_2B}$ 。根据

题意知最后所成像的像距 $v = -(x + \overline{SA} + \overline{AB})$ ，代入透镜成像公式，有

$$\frac{1}{x + \overline{S_2B}} - \frac{1}{x + \overline{SA} + \overline{AB}} = \frac{1}{f} \quad (3)$$

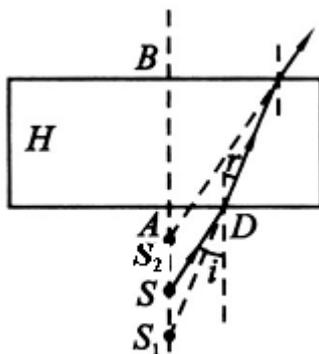
由 (1)、(2)、(3) 式代入数据可求得

$$x = 1.0 \text{ cm} \quad (4)$$

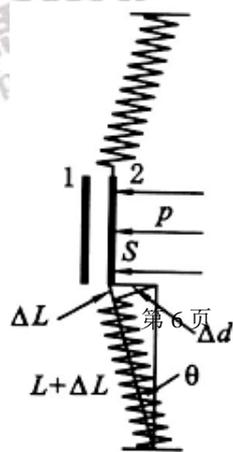
即 L 应置于距玻璃板 H 上表面 1.0 cm 处。

四、参考解答

因电容器充电后与电源断开，极板上的电量保持不变，故两板之间的电压 U 应与其电容 C 成反比；而平板电容器的电容 C 又与极板间的距离 d 成反比；故平板电容器的两板之间的电压与距离 d 成正比，即



图预解 17-3



图预解 17-4

$$U = Ad \quad (1)$$

式中 A 为比例系数。

极板 2 受压强作用而向左移动，并使弹簧变形。设达到平衡时，极板 2 向左移动的距离为 Δd ，电容器的电压减少了 ΔU ，则有

$$U - \Delta U = A(d - \Delta d) \quad (2)$$

由 (1) 与 (2) 式得

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{\Delta d}{d} \quad (3)$$

极板 2 移动后，连接极板 2 的弹簧偏离其原来位置 θ 角，弹簧伸长了 ΔL ，如图预解 17-4 所示，弹簧的弹力在垂直于极板的方向上的分量与加在极板 2 上的压力平衡，即有

$$pS = 2k\Delta L \sin \theta \quad (4)$$

因为 θ 是小角，由几何关系知

$$\sin \theta = \frac{\Delta L}{\Delta d} \approx \frac{\Delta d}{L} \quad (5)$$

解 (3)、(4)、(5) 式得

$$p = \frac{2kd^3}{L^2S} \left(\frac{\Delta U}{U} \right)^3 \quad (6)$$

五、参考解答

1. 设回路中的总感应电动势为 E ，根据楞次定律可知，电路中的电流沿逆时针方向，按欧姆定律有

$$E = I(R_1 + R_2) = 10 \text{ V} \quad (1)$$

由对称性可知，正方形回路每条边上的感应电动势相等，设为 E_1 ，等效电路如图预解 17-5-1 所示。有

$$E_1 = E/4 = 2.5 \text{ V} \quad (2)$$

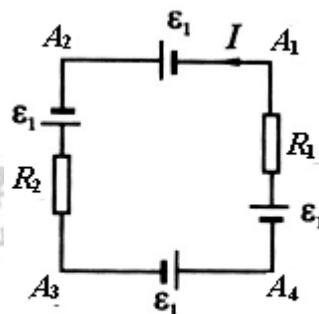
根据含源电路欧姆定律，并代入数值得

$$U_{12} = -E_1 = -2.5 \text{ V} \quad (3)$$

$$U_{23} = IR_2 - E_1 = 4.5 \text{ V} \quad (4)$$

$$U_{34} = -E_1 = -2.5 \text{ V} \quad (5)$$

$$U_{41} = IR_1 - E_1 = 0.5 \text{ V} \quad (6)$$



图预解 17-5-1

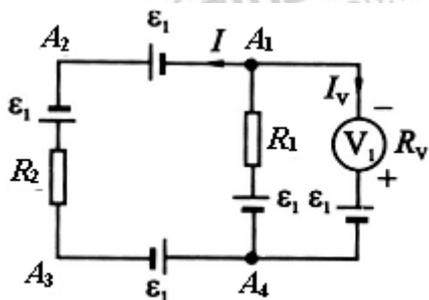
2. 三种情况下的等效电路分别如图预解 17-5-2、17-5-3、17-5-4。对图预解 17-5-2 中的 $A_1V_1A_4A_1$ 回路，因磁通量变化率为零，回路中的总电动势为零，这表明连接 A_4 、 A_1 两端的电压表支路亦为含源电路，电压表的读数等于由正端 (+) 到负端 (-) 流过电压表的电流 I_V 乘以电压表的内阻 R_V ，因 R_V 阻值为无限大， I_V 趋近于零 (但 $I_V R_V$ 为有限值)，故

得

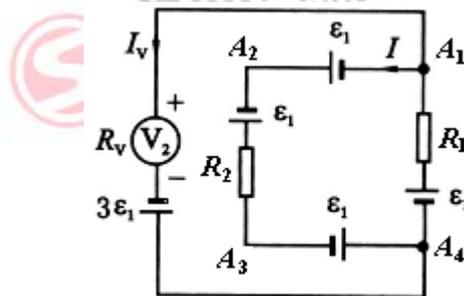
$$IR_1 + I_V R_V = IR_1 - U_1 = 0$$

解得

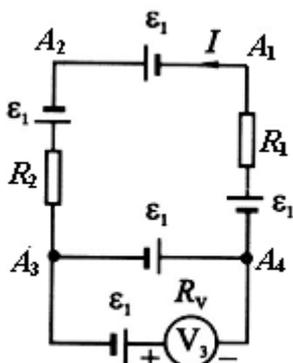
$$U_1 = IR_1 = 3.0 \text{ V} \quad (7)$$



图预解 17-5-2



图预解 17-5-3



图预解 17-5-4

同理，如图预解17-5-3所示，回路 $A_1V_2A_4A_1$ 的总电动势为 E ，故有

$$IR_1 + I_V R_V = IR_1 + U_2 = E \quad (8)$$

解得

$$U_2 = E - IR_1 \quad (9)$$

代入数据得

$$U_2 = 7.0 \text{ V} \quad (10)$$

如图预解17-5-4所示，回路 $A_1V_3A_4A_1$ 的总电动势为零，而 A_3A_4 边中的电阻又为零，故有

$$U_3 = I_V R_V = 0 \quad (11)$$

六、参考解答

设气体的摩尔质量为 μ ，容器 A 的体积为 V ，阀门打开前，其中气体的质量为 M 。压强为 p ，温度为 T 。由

$$pV = \frac{M}{\mu}RT$$

得

$$M = \frac{\mu pV}{RT} \quad (1)$$

因为容器 B 很大，所以在题中所述的过程中，容器 B 中气体的压强和温度皆可视为不变。

根据题意，打开阀门又关闭后， A 中气体的压强变为 $2p$ ，若其温度为 T' ，质量为 M' ，则有

$$M' = \frac{2\mu pV}{RT'} \quad (2)$$

进入容器 A 中的气体的质量为

$$\Delta M = M' - M = \frac{\mu pV}{R} \left(\frac{2}{T'} - \frac{1}{T} \right) \quad (3)$$

设这些气体处在容器 B 中时所占的体积为 ΔV ，则

$$\Delta V = \frac{\Delta M}{2\mu p} RT \quad (4)$$

因为 B 中气体的压强和温度皆可视为不变，为把这些气体压入容器 A ，容器 B 中其他气体对这些气体做的功为

$$W = 2p\Delta V \quad (5)$$

由 (3)、(4)、(5) 式得

$$W = pV \left(\frac{2T}{T'} - 1 \right) \quad (6)$$

容器 A 中气体内能的变化为

$$\Delta U = \frac{M'}{\mu} \times 2.5R(T' - T) \quad (7)$$

因为与外界没有热交换，根据热力学第一定律有

$$W = \Delta U \quad (8)$$

由 (2)、(6)、(7) 和 (8) 式得

$$\left(\frac{2T}{T'} - 1 \right) = 2 \times 2.5 \left(1 - \frac{T}{T'} \right) \quad (9)$$

结果为 $T' = 353.5 \text{ K}$

七、参考解答

1. 根据能量守恒定律，质量为 m 的物质从无限远处被吸引到中子星的表面时所释放的引力势能 ΔE_1 应等于对应始末位置的引力势能的改变，故有

$$\frac{\Delta E_1}{m} = \frac{0 - \left(-\frac{GMm}{R}\right)}{m} = \frac{GM}{R} \quad (1)$$

代入有关数据得

$$\frac{\Delta E_1}{m} \approx 2.0 \times 10^{16} \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \quad (2)$$

2. 在氢核聚变反应中, 每千克质量的核反应原料提供的能量为

$$\frac{\Delta E_2}{m} = 0.0072 c^2 \quad (3)$$

所求能量比为

$$\frac{\Delta E_2/m}{\Delta E_1/m} \approx \frac{1}{31} \quad (4)$$

3. 根据题意, 可知接收到的两个脉冲之间的时间间隔即为中子星的自转周期, 中子星做高速自转时, 位于赤道处质量为 ΔM 的中子星质元所需的向心力不能超过对应的万有引力, 否则将会因不能保持匀速圆周运动而使中子星破裂, 因此有

$$\Delta m \omega^2 R \leq \frac{RM \Delta m}{R^2} \quad (5)$$

式中 $\omega = \frac{2\pi}{\tau} \quad (6)$

ω 为中子星的自转角速度, τ 为中子星的自转周期. 由 (5)、(6) 式得到

$$\tau \geq 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{MG}} \quad (7)$$

代入数据得

$$\tau \geq 4.4 \times 10^{-4} \text{ s} \quad (8)$$

故时间间隔的下限为 $4.4 \times 10^{-4} \text{ s}$

八、参考解答

1. 以 m 表示物块 A 、 B 和木板 C 的质量, 当物块 A 以初速 v_0 向右运动时, 物块 A 受到木板 C 施加的大小为 μmg 的滑动摩擦力而减速, 木板 C 则受到物块 A 施加的大小为 μmg 的滑动摩擦力和物块 B 施加的大小为 f 的摩擦力而做加速运动, 物块 B 则因受木板 C 施加的摩擦力 f 作用而加速, 设 A 、 B 、 C 三者的加速度分别为 a_A 、 a_B 和 a_C , 则由牛顿第二定律, 有

$$\mu mg = ma_A$$

$$\mu mg - f = ma_C$$

$$f = ma_B$$

事实上在此题中， $a_B = a_C$ ，即 B 、 C 之间无相对运动，这是因为当 $a_B = a_C$ 时，由上式可得

$$f = \frac{1}{2} \mu mg \quad (1)$$

它小于最大静摩擦力 μmg ，可见静摩擦力使物块 B 、木板 C 之间不发生相对运动。若物块 A 刚好与物块 B 不发生碰撞，则物块 A 运动到物块 B 所处时， A 与 B 的速度大小相等。因为物块 B 与木板 C 的速度相等，所以此时三者的速度均相同，设为 v_1 ，由动量守恒定律得

$$mv_0 = 3mv_1 \quad (2)$$

在此过程中，设木板 C 运动的路程为 s_1 ，则

物块 A 运动的路程为 $s_1 + L$ ，如图预解 17-8 所示。

由动能定理有

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\mu mg(s_1 + L) \quad (3)$$

$$\frac{1}{2}(2m)v_1^2 = \mu mgs_1 \quad (4)$$

或者说，在此过程中整个系统动能的改变等于系统内部相互间的滑动摩擦力做功的代数和（(3) 与 (4) 式等号两边相加），即

$$\frac{1}{2}(3m)v_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\mu mgL \quad (5)$$

式中 L 就是物块 A 相对木板 C 运动的路程。解 (2)、(5) 式，得

$$v_0 = \sqrt{3\mu gL} \quad (6)$$

即物块 A 的初速度 $v_0 = \sqrt{3\mu gL}$ 时， A 刚好不与 B 发生碰撞，若 $v_0 > \sqrt{3\mu gL}$ ，则 A 将与 B 发生碰撞，故 A 与 B 发生碰撞的条件是

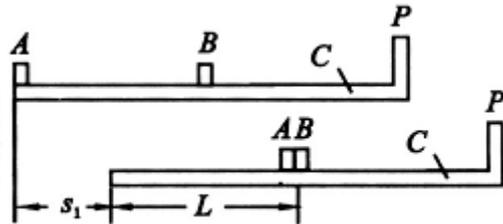
$$v_0 > \sqrt{3\mu gL} \quad (7)$$

2. 当物块 A 的初速度 v_0 满足 (7) 式时， A 与 B 将发生碰撞，设碰撞的瞬间， A 、 B 、

C 三者的速度分别为 v_A 、 v_B 和 v_C ，则有

$$v_A > v_B = v_C \quad (8)$$

在物块 A 、 B 发生碰撞的极短时间内，木板 C 对它们的摩擦力的冲量非常小，可忽略不计。故在碰撞过程中， A 与 B 构成的系统的动量守恒，而木板 C 的速度保持不变。因为物块 A 、 B 间的碰撞是弹性的，系统的机械能守恒，又因为质量相等，由动量守恒和机械能守恒可以证明（证明从略），碰撞前后 A 、 B 交换速度，若碰撞刚结束时， A 、 B 、 C 三者的速度分别为 v_A' 、 v_B' 和 v_C' ，则有



图预解 17-8

$$v_A' = v_B \quad v_B' = v_A \quad v_C' = v_C$$

由 (8)、(9) 式可知, 物块 A 与木板 C 速度相等, 保持相对静止, 而 B 相对于 A 、 C 向右运动, 以后发生的过程相当于第 1 问中所进行的延续, 由物块 B 替换 A 继续向右运动。

若物块 B 刚好与挡板 P 不发生碰撞, 则物块 B 以速度 v_B' 从板 C 板的中点运动到挡板 P 所在处时, B 与 C 的速度相等. 因 A 与 C 的速度大小是相等的, 故 A 、 B 、 C 三者的速度相等, 设此时三者的速度为 v_2 . 根据动量守恒定律有

$$mv_0 = 3mv_2 \quad (10)$$

A 以初速度 v_0 开始运动, 接着与 B 发生完全弹性碰撞, 碰撞后物块 A 相对木板 C 静止, B 到达 P 所在处这一整个过程中, 先是 A 相对 C 运动的路程为 L , 接着是 B 相对 C 运动的路程为 L , 整个系统动能的改变, 类似于上面第 1 问解答中 (5) 式的说法. 等于系统内部相互间的滑动摩擦力做功的代数和, 即

$$\frac{1}{2}(3m)v_2^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\mu mg \cdot 2L \quad (11)$$

解 (10)、(11) 两式得

$$v_0 = \sqrt{6\mu gL} \quad (12)$$

即物块 A 的初速度 $v_0 = \sqrt{6\mu gL}$ 时, A 与 B 碰撞, 但 B 与 P 刚好不发生碰撞, 若 $v_0 > \sqrt{6\mu gL}$, 就能使 B 与 P 发生碰撞, 故 A 与 B 碰撞后, 物块 B 与挡板 P 发生碰撞的条件是

$$v_0 > \sqrt{6\mu gL} \quad (13)$$

3. 若物块 A 的初速度 v_0 满足条件 (13) 式, 则在 A 、 B 发生碰撞后, B 将与挡板 P 发生碰撞, 设在碰撞前瞬间, A 、 B 、 C 三者的速度分别为 v_A'' 、 v_B'' 和 v_C'' , 则有

$$v_B'' > v_A'' = v_C'' \quad (14)$$

B 与 P 碰撞后的瞬间, A 、 B 、 C 三者的速度分别为 v_A''' 、 v_B''' 和 v_C''' , 则仍类似于第 2 问解答中 (9) 的道理, 有

$$v_B''' = v_C''' \quad v_C''' = v_B''' \quad v_A''' = v_A'' \quad (15)$$

由 (14)、(15) 式可知 B 与 P 刚碰撞后, 物块 A 与 B 的速度相等, 都小于木板 C 的速度, 即

$$v_C''' > v_A''' = v_B''' \quad (16)$$

在以后的运动过程中, 木板 C 以较大的加速度向右做减速运动, 而物块 A 和 B 以相同的较小的加速度向右做加速运动, 加速度的大小分别为

$$a_C = 2\mu g \quad a_A = a_B = \mu g \quad (17)$$

加速过程将持续到或者 A 和 B 与 C 的速度相同，三者以相同速度 $\frac{1}{3}v_0$ 向右做匀速运动，或者木块 A 从木板 C 上掉了下来。因此物块 B 与 A 在木板 C 上不可能再发生碰撞。

4. 若 A 恰好没从木板 C 上掉下来，即 A 到达 C 的左端时的速度变为与 C 相同，这时三者的速度皆相同，以 v_3 表示，由动量守恒有

$$3mv_3 = mv_0 \quad (18)$$

从 A 以初速度 v_0 在木板 C 的左端开始运动，经过 B 与 P 相碰，直到 A 刚没从木板 C 的左端掉下来，这一整个过程中，系统内部先是 A 相对 C 的路程为 L ；接着 B 相对 C 运动的路程也是 L ； B 与 P 碰后直到 A 刚没从木板 C 上掉下来， A 与 B 相对 C 运动的路程也皆为 L 。整个系统动能的改变应等于内部相互间的滑动摩擦力做功的代数和，即

$$\frac{1}{2}(3m)v_3^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\mu mg \cdot 4L \quad (19)$$

由 (18)、(19) 两式，得

$$v_0 = \sqrt{12\mu gL} \quad (20)$$

即当物块 A 的初速度 $v_0 = \sqrt{12\mu gL}$ 时， A 刚好不会从木板 C 上掉下。若 $v_0 > \sqrt{12\mu gL}$ ，则 A 将从木板 C 上掉下，故 A 从 C 上掉下的条件是

$$v_0 > \sqrt{12\mu gL} \quad (21)$$

5. 若物块 A 的初速度 v_0 满足条件 (21) 式，则 A 将从木板 C 上掉下来，设 A 刚要从木板 C 上掉下来时， A 、 B 、 C 三者的速度分别为 v_A'''' 、 v_B'''' 和 v_C'''' ，则有

$$v_A'''' = v_B'''' < v_C'''' \quad (22)$$

这时 (18) 式应改写为

$$mv_0 = 2mv_A'''' + mv_C'''' \quad (23)$$

(19) 式应改写为

$$\frac{1}{2}(2m)v_B''''^2 + \frac{1}{2}mv_C''''^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\mu mg \cdot 4L \quad (24)$$

当物块 A 从木板 C 上掉下来后，若物块 B 刚好不会从木板 C 上掉下，即当 C 的左端赶上 B 时， B 与 C 的速度相等。设此速度为 v_4 ，则对 B 、 C 这一系统来说，由动量守恒定律，有

$$mv_B'''' + mv_C'''' = 2mv_4 \quad (25)$$

在此过程中，对这一系统来说，滑动摩擦力做功的代数和为 $-\mu mgL$ ，由动能定理可得

$$\frac{1}{2}(2m)v_4^2 - \left(\frac{1}{2}mv_B''''^2 + \frac{1}{2}mv_C''''^2 \right) = -\mu mgL \quad (26)$$

由 (23)、(24)、(25)、(26) 式可得

$$v_0 = 4\sqrt{\mu g L} \quad (27)$$

即当 $v_0 = 4\sqrt{\mu g L}$ 时, 物块 B 刚好不能从木板 C 上掉下。若, 则 B 将从木板 C 上掉下, 故物块 B 从木板 C 上掉下来的条件是

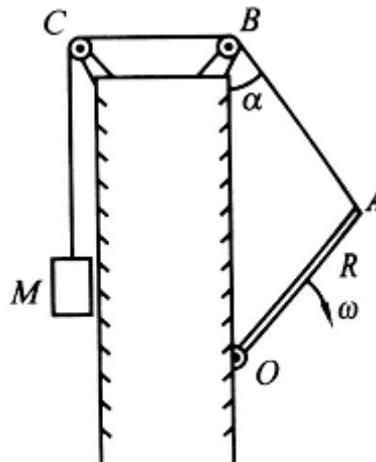
$$v_0 > 4\sqrt{\mu g L} \quad (28)$$

第 18 届全国中学生物理竞赛预赛试卷

题号	一	二	三	四	五	六	七	总计
得分								

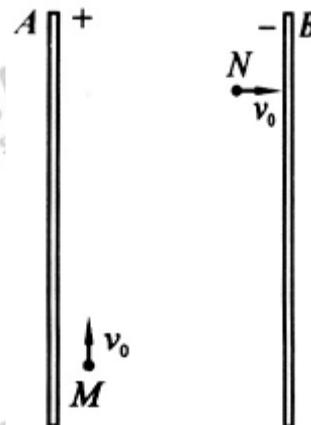
全卷共七题，总分为 140 分

一、(15 分) 如图预 18-1 所示，杆 OA 长为 R ，可绕过 O 点的水平轴在竖直平面内转动，其端点 A 系着一跨过定滑轮 B 、 C 的不可伸长的轻绳，绳的另一端系一物块 M ，滑轮的半径可忽略， B 在 O 的正上方， OB 之间的距离为 H 。某一时刻，当绳的 BA 段与 OB 之间的夹角为 α 时，杆的角速度为 ω ，求此时物块 M 的速率 v_M 。



图预 18-1

二、(15 分) 两块竖直放置的平行金属大平板 A 、 B ，相距 d ，两极间的电压为 U 。一带正电的质点从两板间的 M 点开始以竖直向上的初速度 v_0 运动，当它到达电场中某点 N 点时，速度变为水平方向，大小仍为 v_0 ，如图预 18-2 所示。求 M 、 N 两点间的电势差。(忽略带电质点对金属板上电荷均匀分布的影响)

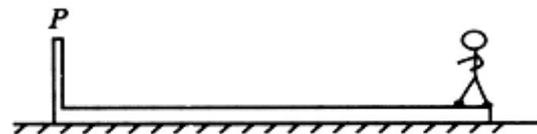


图预 18-2

三、(18 分) 一束平行光沿薄平凸透镜的主光轴入射，经透镜折射后，会聚于透镜 $f = 48 \text{ cm}$ 处，透镜的折射率 $n = 1.5$ 。若将此透镜的凸面镀银，物置于平面前 12 cm 处，求最后所成像的位置。

四、(18 分) 在用铀 235 作燃料的核反应堆中, 铀 235 核吸收一个动能约为 0.025eV 的热中子(慢中子)后, 可发生裂变反应, 放出能量和 $2\sim 3$ 个快中子, 而快中子不利于铀 235 的裂变. 为了能使裂变反应继续下去, 需要将反应中放出的快中子减速. 有一种减速的方法是使用石墨(碳 12)作减速剂. 设中子与碳原子的碰撞是对心弹性碰撞, 问一个动能为 $E_0 = 1.75\text{MeV}$ 的快中子需要与静止的碳原子碰撞多少次, 才能减速成为 0.025eV 的热中子?

五、(25 分) 如图预 18-5 所示, 一质量为 M 、长为 L 带薄挡板 P 的木板, 静止在水平的地面上, 设木板与地面间的静摩擦系数与滑动摩擦系数相等, 皆为 μ . 质量为 m 的人从木板的一端由静止开始相对于地面匀加速地向前走向另一端, 到达另一端时便骤然抓住挡板 P 而停在木板上. 已知人与木板间的静摩擦系数足够大, 人在木板上不滑动. 问: 在什么条件下, 最后可使木板向前方移动的距离达到最大? 其值等于多少?



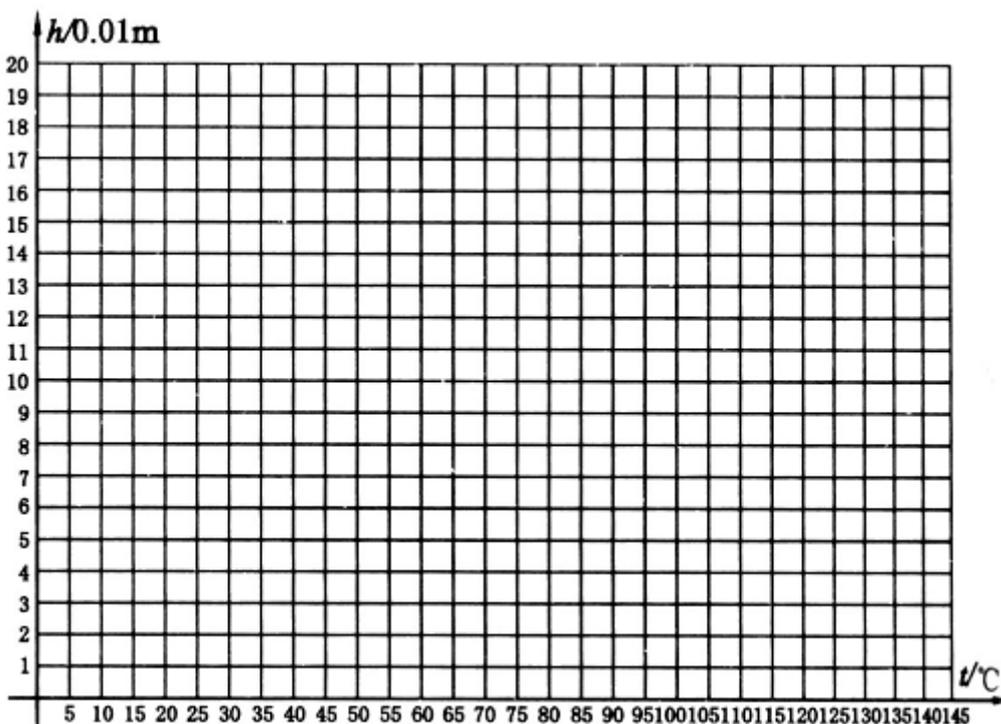
图预 18-5

六、（24 分）物理小组的同学在寒冷的冬天做了一个这样的实验：他们把一个实心的大铝球加热到某温度 t ，然后把它放在结冰的湖面上（冰层足够厚），铝球便逐渐陷入冰内。当铝球不再下陷时，测出球的最低点陷入冰中的深度 h 。将铝球加热到不同的温度，重复上述实验 8 次，最终得到如下数据：

实验顺序数	1	2	3	4	5	6	7	8
热铝球的温度 $t/^\circ\text{C}$	55	70	85	92	104	110	120	140
陷入深度 h/cm	9.0	12.9	14.8	16.0	17.0	18.0	17.0	16.8

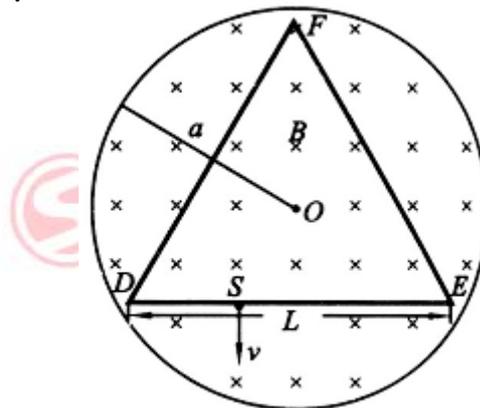
已知铝的密度约为水的密度的 3 倍，设实验时的环境温度及湖面冰的温度均为 0°C 。已知此情况下，冰的熔解热 $\lambda = 3.34 \times 10^5 \text{ J/kg}$ 。

1. 试采用以上某些数据估算铝的比热 c 。
2. 对未被你采用的实验数据，试说明不采用的原因，并作出解释。



七、（25 分）如图预 18—7 所示，在半径为 a 的圆柱空间中（图中圆为其横截面）充满磁感应强度大小为 B 的均匀磁场，其方向平行于轴线远离读者。在圆柱空间中垂直轴线平面内固定放置一绝缘材料制成的边长为 $L = 1.6a$ 的刚性等边三角形框架 $\triangle DEF$ ，其中心 O 位于圆柱的轴线上。 DE 边上 S 点（ $\overline{DS} = \frac{1}{4}L$ ）处有一发射带电粒子的源，发射粒子的方向皆在图预 18-7 中截面内且垂直于 DE 边向下。发射粒子的电量皆为 q (>0)，质量皆为 m ，但速度 v 有各种不同的数值。若这些粒子与三角形框架的碰撞均为完全弹性碰撞，并要求每一次碰撞时速度方向垂直于被碰的边。试问：

1. 带电粒子速度 v 的大小取哪些数值时可使 S 点发出的粒子最终又回到 S 点？
2. 这些粒子中，回到 S 点所用的最短时间是多少？



图预 18-7

第 18 届全国中学生物理竞赛预赛试卷

参考答案及评分标准

一、参考解答

杆的端点 A 点绕 O 点作圆周运动，其速度 v_A 的方向与杆 OA 垂直，在所考察时其大小为

$$v_A = \omega R \quad (1)$$

对速度 v_A 作如图预解 18-1 所示的正交分解，沿绳 BA 的分量就是物块 M 的速率 v_M ，则

$$v_M = v_A \cos \varphi \quad (2)$$

由正弦定理知

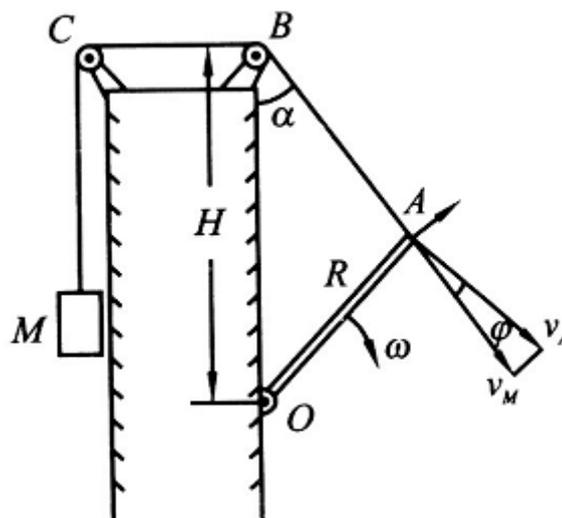
$$\frac{\sin \angle OAB}{H} = \frac{\sin \alpha}{R} \quad (3)$$

由图看出

$$\angle OAB = \frac{\pi}{2} + \varphi \quad (4)$$

由以上各式得

$$v_M = \omega H \sin \alpha \quad (5)$$



图预解 18-1

评分标准：本题 15 分

其中 (1) 式 3 分；(2) 式 5 分；(5) 式 7 分。

二、参考解答

带电质点在竖直方向做匀减速运动，加速度的大小为 g ；在水平方向因受电场力作用而做匀加速直线运动，设加速度为 a 。若质点从 M 到 N 经历的时间为 t ，则有

$$v_x = at = v_0 \quad (1)$$

$$v_y = v_0 - gt = 0 \quad (2)$$

由以上两式得

$$a = g \quad (3)$$

$$t = \frac{v_0}{g} \quad (4)$$

M 、 N 两点间的水平距离

$$x = \frac{1}{2} at^2 = \frac{v_0^2}{2g} \quad (5)$$

于是 M 、 N 两点间的电势差

$$U_{MN} = \frac{U}{d} x = \frac{Uv_0^2}{2dg} \quad (6)$$

评分标准：本题 15 分

(1)、(2) 式各 3 分；(3)、(4) 式各 2 分；(5) 式 3 分；(6) 式 2 分。

三、参考解答

1. 先求凸球面的曲率半径 R 。平行于主光轴的光线与平面垂直，不发生折射，它在球面上发生折射，交主光轴于 F 点，如图预解 18-3-1 所示。 C 点为球面的球心，

$\overline{CO} = R$ ，由正弦定理，可得

$$\frac{R+f}{R} = \frac{\sin r}{\sin(r-i)} \quad (1)$$

由折射定律知

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{1}{n} \quad (2)$$

当 i 、 r 很小时， $\sin r \approx r$ ， $\sin(r-i) \approx r-i$ ， $\sin i \approx i$ ，由以上两式得

$$1 + \frac{f}{R} = \frac{r}{r-i} = \frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1} \quad (3)$$

所以

$$R = (n-1)f \quad (4)$$

2. 凸面镀银后将成半径为 R 的凹面镜，如图预解 18-3-2 所示

令 P 表示物所在位置， P 点经平面折射成像 P' ，根据折射定律可推出

$$\overline{P'O} = n\overline{PO} \quad (5)$$

由于这是一个薄透镜， P' 与凹面镜的距离可认为等于 $\overline{P'O}$ ，设反射后成像于 P'' ，则由球面镜成像公式可得

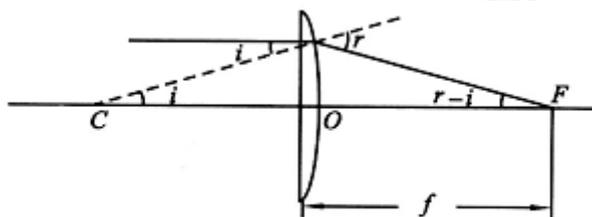
$$\frac{1}{\overline{P''O}} + \frac{1}{\overline{P'O}} = \frac{2}{R} \quad (6)$$

由此可解得 $\overline{P''O} = 36 \text{ cm}$ ，可知 P'' 位于平面的左方，对平面折射来说， P'' 是一个虚物，经平面折射后，成实像于 P''' 点。

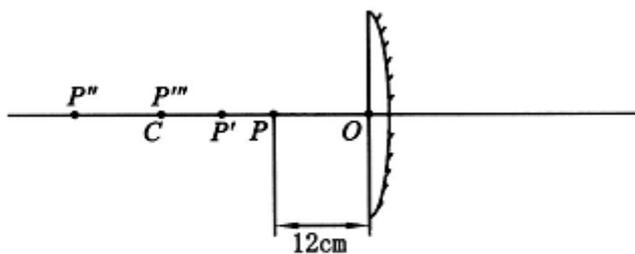
$$\frac{\overline{P'''O}}{\overline{P''O}} = \frac{1}{n} \quad (7)$$

所以 $\overline{P'''O} = 24 \text{ cm}$ (8)

最后所成实像在透镜左方 24 cm 处。



图预解 18-3-1



图预解 18-3-2

评分标准：本题 18 分

(1)、(2) 式各 2 分；(3) 或 (4) 式 2 分；(5) 式 2 分；(6) 式 3 分；(7) 式 4 分；(8) 式 3 分。

四、参考解答

设中子和碳核的质量分别为 m 和 M ，碰撞前中子的速度为 v_0 ，碰撞后中子和碳核的速度分别为 v 和 v' ，因为碰撞是弹性碰撞，所以在碰撞前后，动量和机械能均守恒，又因 v_0 、 v 和 v' 沿同一直线，故有

$$mv_0 = mv + Mv' \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mv'^2 \quad (2)$$

解上两式得

$$v = \frac{m - M}{m + M}v_0 \quad (3)$$

因 $M = 12m$

代入 (3) 式得

$$v = -\frac{11}{13}v_0 \quad (4)$$

负号表示 v 的方向与 v_0 方向相反，即与碳核碰撞后中子被反弹。因此，经过一次碰撞后中子的能量为

$$E_1 = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(-\frac{11}{13}\right)^2 v_0^2$$

于是

$$E_1 = \left(\frac{11}{13}\right)^2 E_0 \quad (5)$$

经过 2, 3, ..., n 次碰撞后，中子的能量依次为 $E_2, E_3, E_4, \dots, E_n$ ，有

$$E_2 = \left(\frac{11}{13}\right)^2 E_1 = \left(\frac{11}{13}\right)^4 E_0$$

$$E_3 = \left(\frac{11}{13}\right)^6 E_0$$

.....

$$E_n = \left(\frac{E_1}{E_0}\right)^n E_0 = \left(\frac{11}{13}\right)^{2n} E_0 \quad (6)$$

因此
$$n = \frac{1 \lg(E_n / E_0)}{2 \lg(11/13)} \quad (7)$$

已知
$$\frac{E_n}{E_0} = \frac{0.025}{1.75 \times 10^6} = \frac{1}{7} \times 10^{-7}$$

代入 (7) 式即得

$$n = \frac{\lg(\frac{1}{7} \times 10^{-7})}{2 \lg(\frac{11}{13})} = \frac{-7 - \lg 7}{2(-0.07255)} = \frac{7.8451}{0.1451} \approx 54 \quad (8)$$

故初能量 $E_0 = 1.75 \text{ MeV}$ 的快中子经过近 54 次碰撞后, 才成为能量为 0.025 eV 的热中子。

评分标准: 本题 18 分

(1)、(2)、(4)、(6) 式各 3 分; (5)、(7)、(8) 式各 2 分。

五、参考解答

在人从木板的一端向另一端运动的过程中, 先讨论木板发生向后运动的情形, 以 t 表示人开始运动到刚抵达另一端尚未停下这段过程中所用的时间, 设以 x_1 表示木板向后移动的距离, 如图预解 18-5 所示. 以 f 表示人与木板间的静摩擦力, 以 F 表示地面作用于木板的摩擦力, 以 a_1 和 a_2 分别表示人和木板的加速度, 则

$$f = ma_1 \quad (1)$$

$$L - x_1 = \frac{1}{2} a_1 t^2 \quad (2)$$

$$f - F = Ma_2 \quad (3)$$

$$x_1 = \frac{1}{2} a_2 t^2 \quad (4)$$

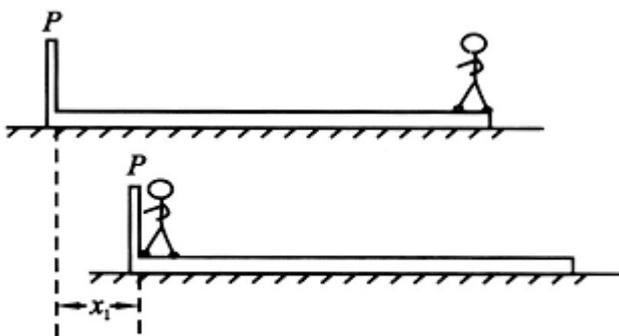
解以上四式, 得

$$t = \sqrt{\frac{2LMm}{Mf + m(f - F)}} \quad (5)$$

对人和木板组成的系统, 人在木板另一端骤然停下后, 两者的总动量等于从开始到此时地面的摩擦力 F 的冲量, 忽略人骤然停下那段极短的时间, 则有

$$Ft = (M + m)v \quad (6)$$

v 为人在木板另一端刚停下时两者一起运动的速度. 设人在木板另一端停下后两者一起前移动的距离为 x_2 , 地面的滑动摩擦系数为 μ , 则有



图预解 18-5

$$\frac{1}{2}(M+m)v^2 = \mu(M+m)gx_2 \quad (7)$$

木板向前移动的净距离为

$$X = x_2 - x_1 \quad (8)$$

由以上各式得

$$X = \frac{1}{\mu g} \left(\frac{F}{M+m} \right)^2 \left(\frac{LMm}{(M+m)(f-F) + MF} \right) - (f-F) \left(\frac{Lm}{Mf + m(f-F)} \right)$$

由此式可知，欲使木板向前移动的距离 X 为最大，应有

$$f = F \quad (9)$$

即

$$f = F_{\max} = \mu(M+m)g \quad (10)$$

即木板向前移动的距离为最大的条件是：人作用于木板的静摩擦力等于地面作用于木板的滑动摩擦力。

移动的最大距离

$$X_{\max} = \frac{m}{M+m}L \quad (11)$$

由上可见，在设木板发生向后运动，即 $f \geq F$ 的情况下， $f = F$ 时， X 有极大值，也就是说，在时间 $0 \sim t$ 内，木板刚刚不动的条件下 X 有极大值。

再来讨论木板不动即 $f < F$ 的情况，那时，因为 $f < F$ ，所以人积累的动能和碰后的总动能都将变小，从而前进的距离 x 也变小，即小于上述的 X_{\max} 。

评分标准：本题25分

(1)、(2)、(3)、(4) 式各1分；(6) 式5分；(7) 式2分；(8) 式3分；(9) 式2分；(10) 式3分；(11) 式5分；说明 $f < F$ 时木板向前移动的距离小于 $f = F$ 时的给1分。

六、参考解答

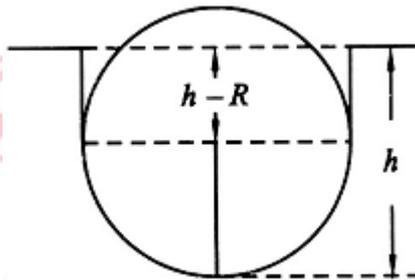
铝球放热，使冰熔化。设当铝球的温度为 t_0 时，能熔化冰的最大体积恰与半个铝球的体积相等，即铝球的最低点下陷的深度 h 与球的半径 R 相等。当热铝球的温度 $t > t_0$ 时，铝球最低点下陷的深度 $h > R$ ，熔化的冰的体积等于一个圆柱体的体积与半个铝球的体积之和，如图预解18-6-1所示。

设铝的密度为 ρ_{Al} ，比热为 c ，冰的密度为 ρ ，熔解热为 λ ，则铝球的温度从 t °C 降到 0°C 的过程中，放出的热量

$$Q_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{\text{Al}} ct \quad (1)$$

熔化的冰吸收的热量

$$Q_2 = \rho \left[\pi R^2 (h - R) + \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi R^3 \right] \lambda \quad (2)$$



图预解 18-6-1

假设不计铝球使冰熔化过程中向外界散失的热量，则有

$$Q_1 = Q_2 \quad (3)$$

解得

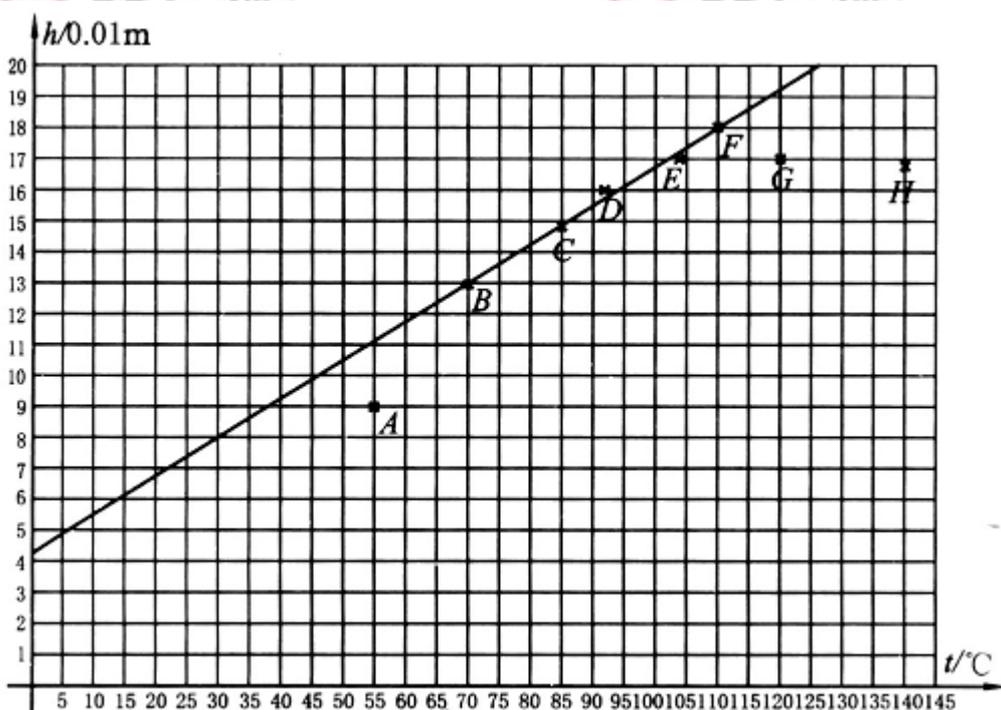
$$h = \frac{4Rc}{\lambda}t + \frac{1}{3}R \quad (4)$$

即 h 与 t 成线性关系。此式只对 $t > t_0$ 时成立。将表中数据画在 $h-t$ 图中，得第 1, 2, ..., 8 次实验对应的点 A 、 B 、...、 H 。数据点 B 、 C 、 D 、 E 、 F 五点可拟合成一直线，如图预解 18-6-2 所示。此直线应与 (4) 式一致。这样，在此直线上任取两点的坐标，代人 (4) 式，再解联立方程，即可求出比热 c 的值。例如，在直线上取相距较远的横坐标为 8 和 100 的两点 X_1 和 X_2 ，它们的坐标由图预解 18-6-2 可读得为

$$X_1(8.0, 5.0) \quad X_2(100, 16.7)$$

将此数据及 λ 的值代入 (4) 式，消去 R ，得

$$c = 8.6 \times 10^2 \text{ J/kg} \cdot ^\circ\text{C} \quad (5)$$



图预解 18-6-2

2. 在本题作的图预解 18-6-2 中，第 1, 7, 8 次实验的数据对应的点偏离直线较远，未被采用。这三个实验数据在 $h-t$ 图上的点即 A 、 G 、 H 。

A 点为什么偏离直线较远？因为当 $h \approx R$ 时，从 (4) 式得对应的温度 $t_0 \approx 65^\circ\text{C}$ ，(4) 式在 $t > t_0$ 的条件才成立。但第一次实验时铝球的温度 $t_1 = 55^\circ\text{C} < t_0$ ，熔解的冰的体积小于半个球的体积，故 (4) 式不成立。

G 、 H 为什么偏离直线较远？因为铝球的温度过高 (120°C 、 140°C)，使得一部分冰升华成蒸气，且因铝球与环境的温度相差较大而损失的热量较多，(2)、(3) 式不成立，因而 (4) 式不成立。

评分标准：本题 24 分

第1问17分；第二问7分。第一问中，(1)、(2)式各3分；(4)式4分。正确画出图线4分；解出(5)式再得3分。第二问中，说明A、G、H点不采用的原因给1分；对A和G、H偏离直线的原因解释正确，各得3分。

七、参考解答

带电粒子(以下简称粒子)从S点垂直于DE边以速度v射出后，在洛伦兹力作用下做匀速圆周运动，其圆心一定位于DE边上，其半径R可由下式

$$qvB = \frac{mv^2}{R}$$

求得，为

$$R = \frac{mv}{qB} \quad (1)$$

1. 要求此粒子每次与 $\triangle DEF$ 的三条边碰撞时都与边垂直，且能回到S点，则R和v应满足以下条件：

(i) 与边垂直的条件.

由于碰撞时速度v与边垂直，粒子运动轨迹圆的圆心一定位于 \triangle 的边上，粒子绕过 \triangle 顶点D、E、F时的圆弧的圆心就一定要在相邻边的交点(即D、E、F)上. 粒子从S点开始向右作圆周运动，其轨迹为一系列半径为R的半圆，在SE边上最后一轮的碰撞点与E点的距离应为R，所以 \overline{SE} 的长度应是R的奇数倍. 粒子从FD边绕过D点转回到S点时，情况类似，即 \overline{DS} 的长度也应是轨道半径的奇数倍. 取 $\overline{DS} = R_1$ ，则当 \overline{DS} 的长度被奇数除所得的R也满足要求，即

$$R = R_n = \frac{\overline{DS}}{(2n-1)} \quad n=1, 2, 3, \dots$$

因此为使粒子与 \triangle 各边发生垂直碰撞，R必须满足下面的条件

$$R = R_n = \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{L}{4} = \frac{2a}{5(2n-1)} \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

此时 $\overline{SE} = 3\overline{DS} = (6n-3)R_n \quad n=1, 2, 3, \dots$

\overline{SE} 为 R_n 的奇数倍的条件自然满足. 只要粒子绕过E点与EF边相碰，由对称关系可知，以后的碰撞都能与 \triangle 的边垂直.

(ii) 粒子能绕过顶点与 \triangle 的边相碰的条件.

由于磁场局限于半径为a的圆柱范围内，如果粒子在绕E点运动时圆轨迹与磁场边界相交，它将在相交点处以此时的速度方向沿直线运动而不能返回. 所以粒子作圆周运动的半径R不能太大，由图预解18-7可见，必须 $R \leq \overline{DM}$ (\triangle 的顶点沿圆柱半径到磁场边界的距离， $R = \overline{DM}$ 时，粒子圆运动轨迹与圆柱磁场边界相切)，由给定的数据可算得

$$\overline{DM} = a - \frac{8\sqrt{3}}{15}a \cong 0.076a \quad (3)$$

将 $n=1, 2, 3, \dots$, 分别代入 (2) 式, 得

$$n=1, \quad R_1 = \frac{2a}{5} = 0.400a$$

$$n=2, \quad R_2 = \frac{2a}{15} = 0.133a$$

$$n=3, \quad R_3 = \frac{2a}{25} = 0.080a$$

$$n=4, \quad R_4 = \frac{2a}{35} = 0.057a$$

由于 $R_1, R_2, R_3 \geq \overline{DM}$, 这些粒子在绕过 Δ 的顶点 E 时, 将从磁场边界逸出, 只有 $n \geq 4$ 的粒子能经多次碰撞绕过 E, F, D 点, 最终回到 S 点. 由此结论及 (1)、(2) 两式可得与之相应的速度

$$v_n = \frac{qB}{m} R_n = \frac{qB}{m} \cdot \frac{2a}{5(2n-1)} \quad n=4, 5, 6, \dots \quad (4)$$

这就是由 S 点发出的粒子与 Δ 的三条边垂直碰撞并最终又回到 S 点时, 其速度大小必须满足的条件.

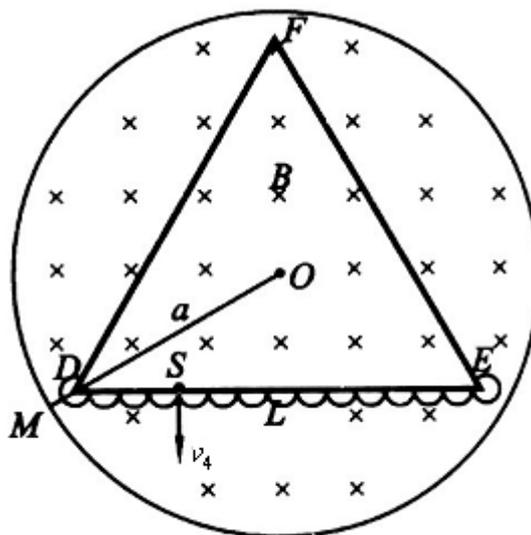
2. 这些粒子在磁场中做圆周运动的周期为

$$T = \frac{2\pi R}{v}$$

将 (1) 式代入, 得

$$T = \frac{2\pi m}{qB} \quad (5)$$

可见在 B 及 q/m 给定时 T 与 v 无关. 粒子从 S 点出发最后回到 S 点的过程中, 与 Δ 的边碰撞次数愈少, 所经历的时间就愈少, 所以应取 $n=4$, 如图预解 18-7 所示 (图中只画出在边框 DE 的碰撞情况), 此时粒子的速度为 v_4 , 由图可看出该粒子的轨迹包



图预解 18-7

括 3×13 个半圆和 3 个圆心角为 300° 的圆弧, 所需时间为

$$t = 3 \times 13 \times \frac{T}{2} + 3 \times \frac{5}{6}T = 22T \quad (6)$$

以 (5) 式代入得

$$t = 44 \frac{\pi m}{qB} \quad (7)$$

评分标准: 本题 25 分

第一问 15 分; 第二问 10 分. 第一问中: (1) 式 2 分; (2) 式 5 分; 分析出 $n \geq 4$ 的结论给 4 分; (4) 式 4 分. 第二问中: (5) 式 1 分; (6) 式 7 分; (7) 式 2 分.



第 19 届全国中学生物理竞赛预赛试卷

题号	一	二	三	四	五	六	七	2002 年 9 月
得分								

全卷共七题，总分为 140 分。

一、(15 分) 今年 3 月我国北方地区遭遇了近 10 年来最严重的沙尘暴天气。现把沙尘上扬后的情况简化为如下情景： v 为竖直向上的风速，沙尘颗粒被扬起后悬浮在空中(不动)。这时风对沙尘的作用力相当于空气不动而沙尘以速度 v 竖直向下运动时所受的阻力。此阻力可用下式表达

$$f = \alpha \rho A v^2$$

其中 α 为一系数， A 为沙尘颗粒的截面积， ρ 为空气密度。

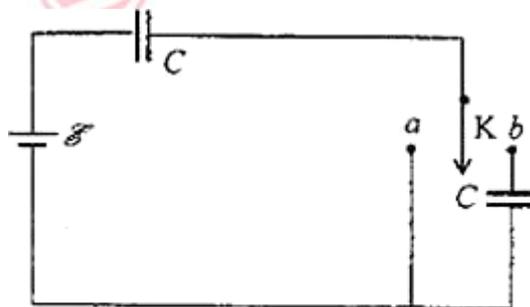
(1) 若沙粒的密度 $\rho_s = 2.8 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ，沙尘颗粒为球形，半径 $r = 2.5 \times 10^{-4} \text{ m}$ ，地球表面处空气密度 $\rho_0 = 1.25 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ， $\alpha = 0.45$ ，试估算在地面附近，上述 v 的最小值 v_1 。

(2) 假定空气密度 ρ 随高度 h 的变化关系为 $\rho = \rho_0(1 - Ch)$ ，其中 ρ_0 为 $h = 0$ 处的空气密度， C 为一常量， $C = 1.18 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ ，试估算当 $v = 9.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 时扬沙的最大高度。(不考虑重力加速度随高度的变化)

二、(20 分) 图预 19-2 所示电路中，电池的电动势为 E ，两个电容器的电容皆为 C ， K 为一单刀双掷开关。开始时两电容器均不带电

(1) 第一种情况，现将 K 与 a 接通，达到稳定，此过程中电池内阻消耗的电能等于_____；再将 K 与 a 断开而与 b 接通，此过程中电池供给的电能等于_____。

(2) 第二种情况，现将 K 与 b 接通，达到稳定，此过程中电池内阻消耗的电能等于_____；再将 K 与 b 断开而与 a 接通，此过程中电池供给的电能等于_____。



图预 19-2

三、(20 分) 据新华社报道，为了在本世纪初叶将我国的航天员送上太空，2002 年 3 月 25 日 22 时 15 分，我国成功地发射了一艘无人试验飞船。在完成预定任务后，飞船于 4 月 1 日 16 时 51 分安全着陆，共绕地球飞行 108 圈。

(1) 飞船的名称是什么？
 (2) 飞船在运行期间，按照地面指挥控制中心的指令成功地实施了数百个动作，包括从椭圆轨道变换成圆轨道等。假如把飞船从发射到着陆的整个过程中的运动都当作圆周运动处理，试粗略估计飞船离地面的平均高度。已知地球半径 $R = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$ ，地球表面处的重

力加速度 $g = 9.80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

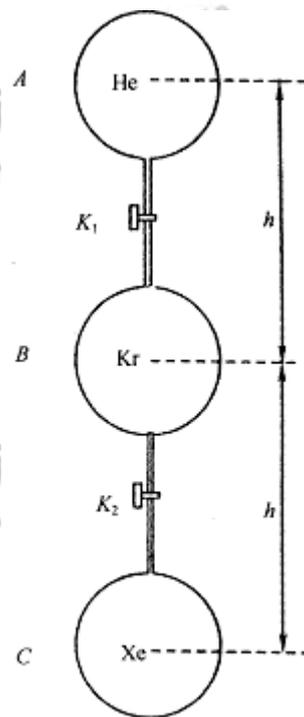
四、(20 分) 如图预 19-4 所示, 三个绝热的、容积相同的球状容器 A、B、C, 用带有阀门 K_1 、 K_2 的绝热细管连通, 相邻两球球心的高度差 $h = 1.00 \text{ m}$. 初始时, 阀门是关闭的, A 中装有 1 mol 的氦 (He), B 中装有 1 mol 的氪 (Kr), C 中装有 1 mol 的氙 (Xe), 三者的温度和压强都相同. 气体均可视为理想气体. 现打开阀门 K_1 、 K_2 , 三种气体相互混合, 最终每一种气体在整个容器中均匀分布, 三个容器中气体的温度相同. 求气体温度的改变量. 已知三种气体的摩尔质量分别为

$$\mu_{\text{He}} = 4.003 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\mu_{\text{Kr}} = 83.8 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$$

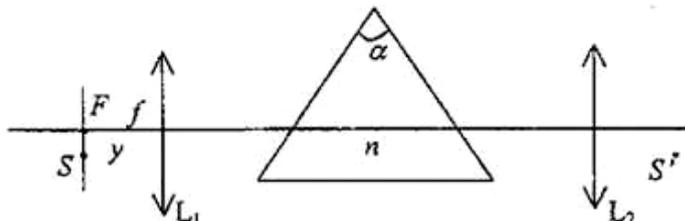
$$\mu_{\text{Xe}} = 131.3 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$$

在体积不变时, 这三种气体任何一种每摩尔温度升高 1 K , 所吸收的热量均为 $3R/2$, R 为普适气体常量.



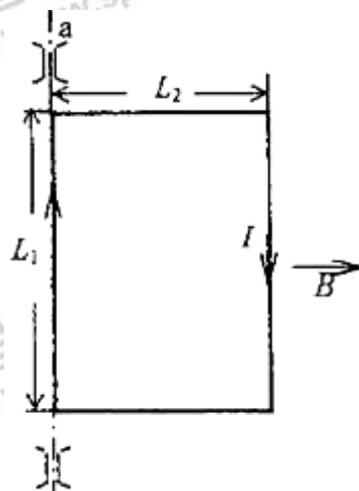
图预 19-4

五、(20 分) 图预 19-5 中, 三棱镜的顶角 α 为 60° , 在三棱镜两侧对称位置上放置焦距均为 $f = 30.0 \text{ cm}$ 的两个完全相同的凸透镜 L_1 和 L_2 . 若在 L_1 的前焦面上距主光轴下方 $y = 14.3 \text{ cm}$ 处放一单色点光源 S , 已知其像 S' 与 S 对该光学系统是左右对称的. 试求该三棱镜的折射率.



图预 19-5

六、(20 分) 一个长为 L_1 , 宽为 L_2 , 质量为 m 的矩形导线框, 由质量均匀分布的刚性杆构成, 静止放置在不导电的水平桌面上, 可绕与线框的一条边重合的光滑固定轴 ab 转动, 在此边中串接一能输出可变电流的电流源 (图中未画出). 线框处在匀强磁场中, 磁场的磁感应强度 B 沿水平方向且与转轴垂直, 俯视图如图预 19-6 所示. 现让电流从零逐渐增大, 当电流大于某一最小值 I_{min} 时, 线框将改变静止状态.



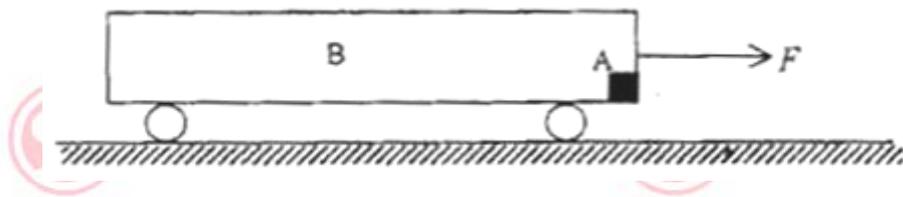
图预 19-6

(1) 求电流值 I_{min} .

(2) 当线框改变静止状态后, 设该电流源具有始终保持恒定

电流值 I_0 不变 ($I_0 > I_{\min}$) 的功能。已知在线框运动过程中存在空气阻力。试分析线框的运动状况。

七、(25 分) 如图预 19-7 所示, 在长为 $l = 1.0\text{ m}$ 、质量为 $m_B = 30.0\text{ kg}$ 的车厢 B 内的右壁处, 放一质量 $m_A = 20.0\text{ kg}$ 的小物块 A (可视为质点), 向右的水平拉力 $F = 120.0\text{ N}$ 作用于车厢, 使之从静止开始运动, 测得车厢 B 在最初 2.0 s 内移动的距离 $s = 5.0\text{ m}$, 且在这段时间内小物块未与车厢壁发生过碰撞。假定车厢与地面间的摩擦忽略不计, 小物块与车厢壁之间的碰撞是弹性的。求车厢开始运动后 4.0 s 时, 车厢与小物块的速度。



图预 19-7

第 19 届全国中学生物理竞赛预赛试卷

参考答案及评分标准

一、参考解答

(1) 在地面附近, 沙尘扬起要能悬浮在空中, 则空气阻力至少应与重力平衡, 即

$$\alpha\rho_0Av_1^2 = mg \quad (1)$$

式中 m 为沙尘颗粒的质量, 而

$$A = \pi r^2 \quad (2)$$

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_s \quad (3)$$

得

$$v_1 = \sqrt{\frac{4\rho_s gr}{3\alpha\rho_0}} \quad (4)$$

代入数据得

$$v_1 = 4.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (5)$$

(2) 用 ρ_h 、 h 分别表示 $v = 9.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 时扬沙到达的最高处的空气密度和高度, 则有

$$\rho_h = \rho_0(1 - Ch) \quad (6)$$

此时式①应为

$$\alpha\rho_h Av^2 = mg \quad (7)$$

由②、③、⑥、⑦可解得

$$h = \frac{1}{C} \left(1 - \frac{4r\rho_s g}{3\alpha v^2 \rho_0} \right) \quad (8)$$

代入数据得

$$h = 6.8 \times 10^3 \text{ m} \quad (9)$$

评分标准: 本题 15 分。

- 第一小题 8 分。其中①式 3 分, ②式 1 分, ③式 1 分, ④式 2 分, ⑤式 1 分。
- 第二小题 7 分。其中⑥式 1 分, ⑦式 1 分, ⑧式 3 分, ⑨式 2 分。

二、参考解答

$$(1) \frac{1}{2}E^2C, 0 \quad (2) \frac{1}{4}E^2C, \frac{1}{2}E^2C$$

评分标准: 本题 20 分。

- 10 分。其中每个空 5 分。
- 10 分。其中每个空 5 分。

三、参考解答

(1) 神舟 3 号

(2) 设飞船飞行时间为 t ，绕地球飞行的圈数为 N ，周期为 T ，飞船的质量为 m ，离地面的平均高度为 h ，地球半径为 R ，地球质量为 M ，则有

$$T = \frac{t}{N} \quad ①$$

$$G \frac{mM}{(R+h)^2} = m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 (R+h) \quad ②$$

$$G \frac{Mm}{R^2} = mg \quad ③$$

由①、②、③式解得

$$h = \left(\frac{gR^2 t^2}{4\pi^2 N^2} \right)^{1/3} - R \quad ④$$

由题给数据可知 $t = 5.8536 \times 10^5 \text{ s}$ ，代入 t 及其它有关数据得

$$h = 2.9 \times 10^5 \text{ m} \quad ⑤$$

评分标准：本题 20 分

(1) 4 分

(2) 16 分。其中①、②、③、④式各 3 分，⑤式 4 分（答案在 $2.7 \times 10^5 \text{ m} \sim 3.1 \times 10^5 \text{ m}$ 之间均给这 4 分）

四、参考解答

根据题设的条件，可知：开始时 A 中氦气的质量 $m_{\text{He}} = 4.003 \times 10^{-3} \text{ kg}$ ，B 中氦气的质量 $m_{\text{Kr}} = 83.8 \times 10^{-3} \text{ kg}$ ，C 中氙气的质量 $m_{\text{Xe}} = 131.3 \times 10^{-3} \text{ kg}$ 。三种气体均匀混合后，A 中的 He 有 $\frac{1}{3} \text{ mol}$ 降入 B 中，有 $\frac{1}{3} \text{ mol}$ 降入 C 中。He 的重力势能增量为

$$\Delta E_{\text{He}} = \frac{1}{3} m_{\text{He}} g(-h) + \frac{1}{3} m_{\text{He}} g(-2h) = -m_{\text{He}} gh \quad ①$$

B 中的 Kr 有 $\frac{1}{3} \text{ mol}$ 升入 A 中，有 $\frac{1}{3} \text{ mol}$ 降入 C 中。Kr 的重力势能增量为

$$\Delta E_{\text{Kr}} = \frac{1}{3} m_{\text{Kr}} gh + \frac{1}{3} m_{\text{Kr}} g(-h) = 0 \quad ②$$

C 中的 Xe 有 $\frac{1}{3} \text{ mol}$ 升入 A 中，有 $\frac{1}{3} \text{ mol}$ 升入 B 中。Xe 的重力势能增量为

$$\Delta E_{\text{Xe}} = \frac{1}{3} m_{\text{Xe}} gh + \frac{1}{3} m_{\text{Xe}} g 2h = m_{\text{Xe}} gh \quad ③$$

混合后，三种气体的重力势能共增加

$$\Delta E_{\text{p}} = \Delta E_{\text{He}} + \Delta E_{\text{Kr}} + \Delta E_{\text{Xe}} = (m_{\text{Xe}} - m_{\text{He}}) gh \quad ④$$

因球与外界绝热，也没有外力对气体做功，故重力势能的增加必然引起内能的减少。在体积不变时，气体不做功。由热力学第一定律可知，此时传给气体的热量应等于气体内能的增量，但因理想气体的内能只由温度决定，与体积无关，故只要温度改变量相同，则体积不变条件下内能的增量也就是任何过程中理想气体内能的增量。根据题给的已知条件，注意到本题中所考察的理想气体共有 3 摩尔，故有

$$\Delta E_p = -3 \times \frac{3}{2} R \Delta T \quad (5)$$

上式中右方为气体内能减少量， ΔT 表示气体温度的增量，由④、⑤两式得

$$\Delta T = -\frac{2(m_{Xe} - m_{He})gh}{9R} \quad (6)$$

将已知数据代入，注意到 $R = 8.31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ ，可得

$$\Delta T = -3.3 \times 10^{-2} \text{ K} \quad (7)$$

即混合后气体温度降低 $3.3 \times 10^{-2} \text{ K}$

(如果学生没记住 R 的数值， R 的值可用标准状态的压强 $p_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ ，温度

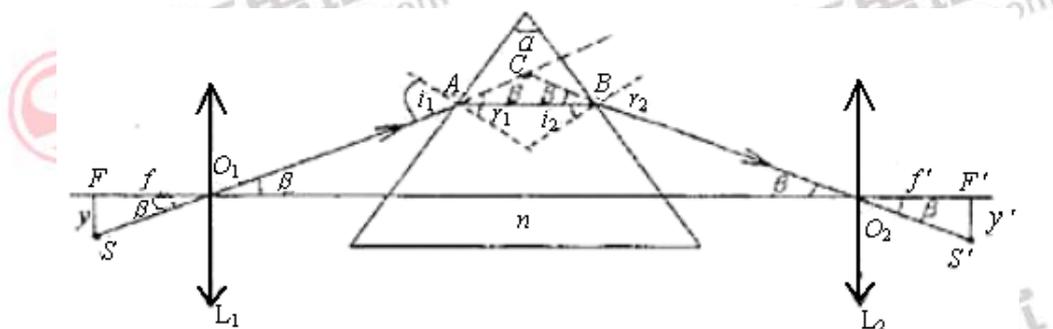
$T_0 = 273.13 \text{ K}$ 和 1 mol 理想气体在标准状态下的体积 $V_0 = 2.24 \times 10^{-2} \text{ m}^3$ 求得，即

$$R = \frac{p_0 V_0}{T_0}$$

评分标准：本题共 20 分。

说明经扩散使三种气体均匀混合，并导致气体重力势能改变求得④式，得 8 分。说明能量转换过程，由重力势能增加而内能减少，列出⑤式，得 8 分。得出正确结果，算出⑦式，得 4 分。

五、参考解答



图预解 19-5

由于光学系统是左右对称的，物、像又是左右对称的，光路一定是左右对称的。该光线在棱镜中的部分与光轴平行。由 S 射向 L_1 光心的光线的光路图如图预解 19-5 所示。由对称性可知

$$i_1 = r_2 \quad (1)$$

$$i_2 = r_1 \quad (2)$$

由几何关系得 $r_1 + i_2 = \alpha = 60^\circ \quad (3)$

由图可见

$$i_1 = \beta + r_1 \quad (4)$$

又从 $\triangle FSO_1$ 的边角关系得

$$\tan \beta = y/f \quad (5)$$

代入数值得

$$\beta = \arctan(14.3/30.0) = 25.49^\circ \quad (6)$$

由②、③、④与⑥式得 $r_1 = 30^\circ$, $i_1 = 55.49^\circ$

根据折射定律, 求得

$$n = \frac{\sin i_1}{\sin r_1} = 1.65 \quad (7)$$

评分标准: 本题 20 分

1. 图预解 19-5 的光路图 4 分。未说明这是两个左右对称性的结果只给 2 分。
2. ①、②、③、④式各给 2 分, ⑤式给 3 分, ⑥式给 1 分, ⑦式给 4 分。

六、参考解答

(1) 解法一:

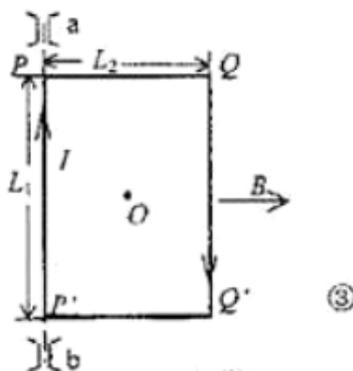
导体线框放在水平桌面上, 俯视图如图预解 19-6-1。由图可见, 在线框没动之前, 线框的 PQ 边与 $P'Q'$ 边平行于磁场 B , 因而不受磁场力。 PP' 边受的安培力的大小为 IBL_1 , 方向垂直于桌面向下, 但此力对轴的力矩为零。 QQ' 边受的安培力的大小为 $F_{QQ'} = IBL_1$, 方向垂直桌面向上。此力对固定轴的力矩为

$$M_0 = IBL_1L_2 \quad (1)$$

除此力矩外, 线框还受到重力矩作用。重力矩等于重力乘线框重心 (O 点) 到轴 ab 的距离, 即

$$\tau_0 = mg(L_2/2) \quad (2)$$

当 $M_0 = \tau_0$ 时, 桌面对线框的支持力的力矩为零, $M_0 > \tau_0$ 时, 线框将改变静止状态, 开始绕轴 ab 向上翘起。根据题意及①、②式, 由力矩平衡原理可知



图预解 19-6-1

$$I_{\min} BL_1 L_2 = \frac{1}{2} mg L_2 \quad (3)$$

解得

$$I_{\min} = \frac{mg}{2BL_1} \quad (4)$$

解法二:

线框所受的重力矩也可以由各边对 ab 轴的重力矩来求。 PQ 边与 $P'Q'$ 边的重心均在 $(L_2/2)$ 处, 两条边对 ab 轴的合力矩为

$$\tau_1 = \left(\frac{mgL_2}{L_1 + L_2} \right) \left(\frac{L_2}{2} \right) \quad (1')$$

QQ' 边对 ab 轴的力矩为

$$\tau_2 = \left(\frac{mgL_1}{2(L_1 + L_2)} \right) L_2 \quad (2')$$

故线框所受的重力矩为

$$\tau_0 = \tau_1 + \tau_2 = (mg/2)L_2$$

与解法一求得的②式一致, 从而求得 I_{\min} 与④式相同。

(2) 线框处于静止状态时, 若电流 I_0 比 I_{\min} 稍大, 线框所受的电磁力矩 M 将大于重力矩 τ ,

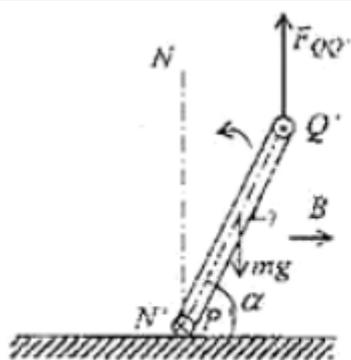
使线框绕 ab 轴向上翘起。 PQ 边和 $P'Q'$ 边所受电磁力不等于零, 但二者相互抵消。当保持

电流值 I_0 恒定不变时, 线框将从静止状态开始绕固定轴作加速转动。在加速转动过程中,

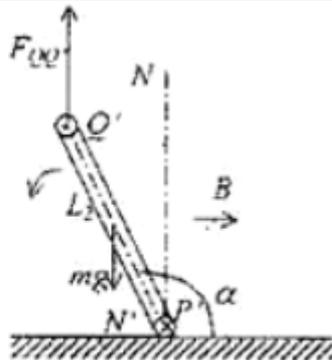
由于通过线框的磁通量发生变化, 线框内将产生感应电动势, 它有使线框中的电流变小的趋势, 题中已设电流源有保持电流恒定不变的功能, 所以当线框平面转至与桌面成 α 角时, 如图预解 19-6-2a 所示, 线框受到的合力矩为

$$M - \tau = \left(I_0 BL_1 - \frac{1}{2} mg \right) L_2 \cos \alpha \quad (5)$$

随着 α 角逐渐增大, 合力矩随之减小, 但 $M - \tau$ 始终大于零, 因而线框仍作逆时针加速转动, 角速度不断增大。当线框平面转到竖直面 NN' 时, 合力矩为零, 角速度达到最大。由于惯性, 线框将越过 NN' 面作逆时针转到。此时, 合力矩与线框转动方向相反, 角速度将逐渐减小, 合力矩的大小随着 α 角的增大而增大, 如图预解 19-6-2b 所示。



图预解 19-6-2a



图预解 19-6-2b

如果没有空气阻力， α 将增至 180° 。当 α 角等于 180° 时，线框转动的角速度为零，合力矩将使线框作顺时针加速转动，结果线框将在 α 角等于 0° 与 180° 之间往复摆动不止。实际上，由于空气阻力作用，线框平面在 NN' 平面两侧摆动的幅度将逐渐变小，最终静止在 NN' 面处，此时，电磁力矩与重力矩均为零。如果线框稍偏离平衡位置 NN' ，电磁力矩与重力矩的合力矩将使线框回到 NN' 平面处。故线框处于稳定平衡状态。

评分标准：本题 20 分。第一问 6 分、第二问 14 分。

第一问中，①、②、④式各 2 分。

第二问中，正确地分析了线框往复转动，给 4 分；说明最后平衡在竖直面处，给 6 分；说明稳定平衡，给 4 分。

七、参考解答

解法一：

1. 讨论自 B 开始运动到 $T_0 = 2.0\text{ s}$ 时间内 B 与 A 的运动。

根据题意，在 2 s 内，A 未与 B 发生过碰撞，因此不论 A 与 B 之间是否有相对运动，不论 A 与 B 之间是否有摩擦，B 总是作初速为零的匀加速直线运动。设 B 的加速度为 a_{B1} ，有

$$s = \frac{1}{2} a_{B1} T_0^2$$

得

$$a_{B1} = \frac{2s}{T_0^2} = 2.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad (1)$$

如果 A、B 之间无摩擦，则在 B 向右移动 1 米距离的过程中，A 应保持静止状态，接着 B 的车厢左壁必与 A 发生碰撞，这不合题意。如果 A、B 之间无相对运动（即两者之间的摩擦力足以使 A 与 B 有一样的加速度），则 B 的加速度

$$a_B = \frac{F}{m_A + m_B} = 2.4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

这与 (1) 式矛盾。由此可见，A、B 之间既有相对运动又存在摩擦力作用。

以 F_f 表示 A、B 间的滑动摩擦力的大小，作用于 B 的摩擦力向左，作用于 A 的摩擦

力向右，则有

$$F - F_f = m_B a_{B1} \quad (2)$$

$$F_f = m_A a_{A1} \quad (3)$$

由 (1)、(2)、(3) 式得

$$a_{A1} = 2.25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad (4)$$

$$F_f = 45 \text{ N} \quad (5)$$

2. 讨论 B 的左壁与 A 发生第一次碰撞前的运动。

由于 $a_{A1} < a_{B1}$ ，B 向右的速度将大于 A 的速度，故 A 与 B 的左壁间的距离将减小。

设自静止开始，经过时间 t_1 ，B 的左壁刚要与 A 发生碰撞，这时，B 向右运动的路程与 A 向右运动的路程之差正好等于 l ，即有

$$\frac{1}{2} a_{B1} t_1^2 - \frac{1}{2} a_{A1} t_1^2 = l$$

解得

$$t_1 = \sqrt{\frac{2l}{a_{B1} - a_{A1}}} \quad (6)$$

代入数据，得

$$t_1 = 2\sqrt{2} \text{ s} = 2.83 \text{ s}$$

A 与 B 发生第一次碰撞时，碰前的速度分别为

$$v_{A1} = a_{A1} t_1 = a_{A1} \sqrt{\frac{2l}{a_{B1} - a_{A1}}} \quad (7)$$

$$v_{B1} = a_{B1} t_1 = a_{B1} \sqrt{\frac{2l}{a_{B1} - a_{A1}}} \quad (8)$$

3. 讨论 B 与 A 间的弹性碰撞

以 u_{A1} 和 u_{B1} 分别表示第一次碰撞后 A 和 B 的速度。当 u_{A1} 、 u_{B1} 为正时，分别表示它们向右运动。在碰撞的极短时间内，外力 F 的冲量可忽略不计，因此有

$$m_A v_{A1} + m_B v_{B1} = m_A u_{A1} + m_B u_{B1}$$

$$\frac{1}{2} m_A v_{A1}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B1}^2 = \frac{1}{2} m_A u_{A1}^2 + \frac{1}{2} m_B u_{B1}^2$$

解以上两式得

$$u_{A1} - u_{B1} = -(v_{A1} - v_{B1}) = \sqrt{2l(a_{B1} - a_{A1})} \quad (9)$$

(9) 式表示，在弹性碰撞中，碰撞前后两者的相对速度的大小不变，但方向反转。

4. 讨论从第一次碰撞到车厢与小物块速度变至相同过程中的运动。

由 (9) 式可以看出, 经第一次碰撞, A 和 B 都向右运动, 但 A 的速度 u_{A1} 大于 B 的速度 u_{B1} , 这时作用于 A 的摩擦力向左, 作用于 B 的摩擦力向右, 大小仍都为 F_f 。设此过程中 A 向左的加速度和 B 向右的加速度分别为 a_{A2} 和 a_{B2} , 则由牛顿第二定律有

$$F_f = m_A a_{A2}$$

$$F + F_f = m_B a_{B2}$$

解得

$$a_{A2} = \frac{F_f}{m_A} = 2.25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad (10)$$

$$a_{B2} = \frac{F + F_f}{m_B} = 5.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad (11)$$

由此可知, 碰撞后, A 作减速运动, B 作加速运动。设经过时间 t_1' , 两者速度相等, 第一次达到相对静止, 则有

$$u_{A1} - a_{A2} t_1' = u_{B1} + a_{B2} t_1'$$

由上式和 (9) 式解得

$$t_1' = \frac{u_{A1} - u_{B1}}{a_{A2} + a_{B2}} = \frac{v_{B1} - v_{A1}}{a_{A2} + a_{B2}} = \frac{\sqrt{2l(a_{B1} - a_{A1})}}{a_{A2} + a_{B2}} \quad (12)$$

代入有关数据得

$$t_1' = \frac{2\sqrt{2}}{31} \text{ s} = 0.09 \text{ s} \quad (13)$$

设在时间 t_1' 内, A 与 B 的左壁之间的距离增大至 l_1 , 则有

$$u_{A1} t_1' - \frac{1}{2} a_{A2} t_1'^2 = u_{B1} t_1' + \frac{1}{2} a_{B2} t_1'^2 + l_1$$

结合 (9)、(12) 两式得

$$l_1 = l d^2 \quad (14)$$

式中

$$d = \sqrt{\frac{a_{B1} - a_{A1}}{a_{A2} + a_{B2}}} \quad (15)$$

代入有关数据得

$$d = \sqrt{\frac{a_{B1} - a_{A1}}{a_{A2} + a_{B2}}} = \sqrt{\frac{(5/2) - (9/4)}{(9/4) + (11/2)}} = \sqrt{\frac{1}{31}} < 1$$

由 (14) 可知 $l_1 < l$, A 不会与 B 的右壁发生碰撞。

5. 讨论 A 与 B 的左壁的第二次碰撞。

以 v_1 表示 B 与 A 第一次相等的速度，由于 B 始终受 F 作用而加速，它将拖着 A 向右加速，其情况与第一次碰撞前相似。这时作用于 A 的摩擦力向右，A 的加速度为 a_{A1} ，方向向右。作用于 B 的摩擦力向左，B 的加速度为 a_{B1} ，方向也向右。但是原来 A 与 B 左端的距离为 l ，现改为 l_1 ，因 $a_{A1} < a_{B1}$ ，B 的左壁与小 A 之间的距离将减小。设两者间的距离从 l_1 减小至零即减小至开始发生第二次碰撞所经历的时间为 t_2 ，以 l_1 代入⑥式，结合(14)式，即可求得

$$t_2 = \sqrt{\frac{2l_1}{a_{B1} - a_{A1}}} = \sqrt{\frac{2l}{a_{B1} - a_{A1}}} d = t_1 d \quad (16)$$

代入有关数据，得

$$t_2 = 2\sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{31}} = \sqrt{\frac{8}{31}} = 0.51 \text{ s}$$

第二次碰撞前瞬间 A 和 B 的速度分别为

$$v_{A2} = v_1 + a_{A1}t_2$$

$$v_{B2} = v_1 + a_{B1}t_2$$

$$v_{A2} - v_{B2} = (a_{A1} - a_{B1})t_2 = (a_{A1} - a_{B1})t_1 d = (v_{A1} - v_{B1})d \quad (17)$$

故第二次碰撞前 A、B 速度之差小于第一次碰撞前 A、B 的速度差。设第二次碰撞完毕的瞬间 A、B 的速度分别为 u_{A2} 和 u_{B2} ，则有

$$u_{A2} - u_{B2} = -(v_{A2} - v_{B2}) = (v_{B1} - v_{A1})d \quad (18)$$

第二次碰撞后，A 以加速度 a_{A2} 作减速运动，B 以加速度 a_{B2} 作加速运动。设经历时间 t_2' ，两者速度相等，即第二次相对静止，则有

$$u_{A2} - a_{A2}t_2' = u_{B2} + a_{B2}t_2'$$

解得

$$t_2' = \frac{u_{A2} - u_{B2}}{a_{A2} + a_{B2}} = \frac{v_{B1} - v_{A1}}{a_{A2} + a_{B2}} d = t_1' d = 0.016 \text{ s} \quad (19)$$

在 t_2' 时间内，A 与 B 的左壁的距离变为 l_2 ，有

$$u_{A2}t_2' - \frac{1}{2}a_{A2}t_2'^2 = u_{B2}t_2' + \frac{1}{2}a_{B2}t_2'^2 + l_2$$

结合 (8)、(9) 得

$$l_2 = ld^4 \quad (20)$$

自 B 开始运动到 A 与 B 达到第二次相对静止共经历时间

$$T_2 = t_1 - t_1' + t_2 + t_2' = 3.43 \text{ s}$$

$$T_2 < 4.0 \text{ s}$$

6. 讨论 A 与 B 的左壁的第三次碰撞。

当 A 与 B 的左壁之间的距离为 l_2 时, A、B 相对静止。由于 B 受外力 F 作用而继续加速, 它将拖着 A 向右加速。这时, A 的加速度为 a_{A1} , B 的加速度为 a_{B1} , 方向都向右, 但因 $a_{B1} > a_{A1}$, A 将与 B 的左壁发生第三次碰撞。设此过程经历的时间为 t_3 , 则以 l_2 代入 (6) 式结合 (16) 式得

$$t_3 = \sqrt{\frac{2l_2}{a_{B1} - a_{A1}}} = \sqrt{\frac{2l}{a_{B1} - a_{A1}}} d^2 = t_1 d^2 = 0.09 \text{ s} \quad (21)$$

设第三次碰撞前瞬间 A 和 B 的速度分别为 v_{A3} 和 v_{B3} , 碰撞后的速度分别为 u_{A3} 和 u_{B3}

$$v_{A3} - v_{B3} = (a_{A1} - a_{B1})t_3 = (v_{A1} - v_{B1})d^2$$

$$u_{A3} - u_{B3} = -(v_{A3} - v_{B3}) = (a_{B1} - a_{A1})t_3 = (a_{B1} - a_{A1})t_1 d^2 = (v_{A1} - v_{B1})d^2$$

碰撞后, A 以加速度 a_{A2} 作减速运动, B 以加速度 a_{B2} 作加速运动。设经过时间 t_3' 两者速度相等, 即第三次相对静止, A 与 B 左壁之间的距离为 l_3 。则有

$$t_3' = \frac{u_{A3} - u_{B3}}{a_{A2} + a_{B2}} = t_1' d^2 \quad (22)$$

$$t_3 = ld^6$$

自 B 开始运动至第三次 A 与 B 相对静止共经历的时间 T_3 仍小于 4 s。

7. 讨论车厢左壁与小物块的第 n 次碰撞。

在第 $n-1$ 次碰撞完毕的瞬间, A 和 B 的速度分别为 $u_{A_{n-1}}$ 和 $u_{B_{n-1}}$, A 以加速度 a_{A2} 作减速运动, B 以加速度 a_{B2} 作加速运动。经过时间 t'_{n-1} , 两者速度相等, 即第 $n-1$ 次相对静止。A 与 B 左壁之间的距离为 l_{n-1} 。根据前面的讨论有

$$t'_{n-1} = t_1' d^{n-2} \quad (23)$$

$$l_{n-1} = ld^{2(n-1)}$$

再经过时间 t_n 将发生 B 的左壁与 A 的第 n 次碰撞。碰撞前两者的速度分别为 v_{An} 和 v_{Bn} 。

根据前面的讨论, 有

$$t_n = t_1 d^{n-1} \quad (24)$$

$$v_{An} - v_{Bn} = (v_{A1} - v_{B1})d^{n-1}$$

可以看出, 碰撞次数越多, 下一次碰撞前, A、B 速度之差越小。当碰撞次数 n 非常大时, 下次碰撞前两者的速度趋于相等, 即 A 实际上将贴在 B 的左壁上不再分开。

8. 讨论第 4 秒 B 与 A 的运动速度。

第 4 秒末 B 与 A 的速度取决于在第 4 秒末 B 与 A 经历了多少次碰撞。B 自静止开始运动到第 n 次相对静止经历的总时间为

$$\begin{aligned} T_n &= t_1 + t'_1 + t_2 + t'_2 + \cdots + t_{n-1} + t'_{n-1} + t_n + t'_n \\ &= t_1 + t'_1 + t_1 d + t'_1 d + \cdots + t_1 d^{n-2} + t'_1 d^{n-2} + t_1 d^{n-1} + t'_1 d^{n-1} \\ &= (t_1 + t'_1) + (t_1 + t'_1)d + (t_1 + t'_1)d^2 + \cdots + (t_1 + t'_1)d^{n-2} + (t_1 + t'_1)d^{n-1} \\ &= (t_1 + t'_1) \frac{1-d^n}{1-d} \end{aligned} \quad (25)$$

以 $t_1 = 2\sqrt{2}$, $t'_1 = \frac{2\sqrt{2}}{31}$ 代入, 注意到当 n 很大时, $d^\infty = 0$ 得

$$T_\infty = \frac{64\sqrt{2}}{31 - \sqrt{31}} = 3.56 \text{ s} \quad (26)$$

这表明早在第 4 秒之前, A 与 B 的左壁贴在一起时二者速度已相同, 不再发生碰撞, 此后二者即以相同的速度运动了、现以 A 和 B 都静止时作为初态, 设 $T = 4 \text{ s}$ 时刻 A 和 B 的速度为 V , 对 A、B 开始运动至 $T = 4 \text{ s}$ 的过程应用动量定理, 得

$$FT = (m_A - m_B)V \quad (27)$$

或

$$V = \frac{FT}{m_A - m_B}$$

代入数值, 得

$$V = 9.6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (28)$$

解法二:

如果 A 与 B 之间没有摩擦力, B 前进 1m 就会与 A 发生碰撞。已知开始 2s 为 A 与 B 未发生碰撞, 而 B 已走了 5m, 可见二者之间有摩擦力存在, 且在此期间二者均作匀加速运动。由 $s = \frac{1}{2}at^2$ 可求出 B 对地面的加速度 a_{B1} :

$$5 = \frac{1}{2}a_{B1}2^2, \quad a_{B1} = 2.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad (1)'$$

设 A 与 B 底部之间的滑动摩擦力为 F_f ，则由小车的运动方程

$$m_B a_B = F - F_f$$

代入数值得

$$F_f = 45 \text{ N} \quad (2)'$$

又由 A 的运动方程得 A 的相对地面的加速度为

$$a_{A1} = \frac{F_f}{m_A} = 2.25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad (3)'$$

于是，A 对 B 的相对加速度为

$$a_{AB1} = a_{A1} - a_{B1} = -0.25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad (4)'$$

第一次碰撞

由开始运动到 A 碰撞 B 的左壁的时间 t_1 满足 $s = \frac{1}{2} a_{AB1} t_1^2$ ， $s = 1 \text{ m}$ 。于是

$$t_1 = 2\sqrt{2} \text{ s} = 2.83 \text{ s} \quad (5)'$$

A 与 B 的左壁碰撞前瞬间，A 相对 B 的速度

$$v_{AB1} = a_{AB1} t_1 = -0.5\sqrt{2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = -0.71 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (6)'$$

由于作弹性碰撞的两个物体在碰撞前后其相对速度等值反向，所以碰后 A 从 B 的左壁开始，以相对速度

$$v'_{AB1} = -v_{AB1} = 0.5\sqrt{2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 0.71 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (7)'$$

向右运动，所受摩擦力反向向左，为 $-F_f$ 。对地面的加速度 a_{A2} 为

$$a_{A2} = \frac{F_f}{m_A} = -2.25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad (8)'$$

此时 B 所受的摩擦力 F_f 方向向右，由其运动方程 $m_B a_{B2} = F + F_f$ 得 B 对地面的加速度 a_{B2} 为

$$a_{B2} = \frac{F + F_f}{m_B} = 5.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad (9)'$$

由 (8)'、(9)' 二式知，碰后 A 对 B 的相对加速度为

$$a_{AB2} = a_{A2} - a_{B2} = -7.75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad (10)'$$

A 相当于 B 作向右的匀减速运动。设 A 由碰后开始达到相对静止的时间为 t'_1 ，相当于 B 走

过的距离为 s_1 ，由 (6)' 式得

$$t_1' = \frac{v_{AB1}'}{|a_{AB2}|} = \left| \frac{a_{AB1}}{a_{AB2}} \right| t_1 = \frac{2}{31} \sqrt{2} \text{ s} = 0.091 \text{ s} \quad (11)'$$

$$s_1 = \frac{1}{2} |a_{AB2}| t_1'^2 = \frac{1}{31} \text{ m} = 0.03 \text{ m} \quad (12)'$$

可见 A 停止在 B 当中，不与 B 的右壁相碰。

第二次碰撞

A 在 B 内相对静止后，将相当于 B 向左滑动，所受的摩擦力改为向右，而 B 所受的摩擦力改为向左。这时 A 对 B 的相对加速度重新成为 a_{AB1} ，即 (4)' 式。A 由相对静止到与 B

的左壁第二次碰撞所需的时间 t_2 可用 $s_1 = \frac{1}{2} a_{AB1} t_2^2$ 算出：

$$t_2 = \sqrt{\frac{2s_1}{a_{AB1}}} = \sqrt{\frac{a_{AB2}}{a_{AB1}}} t_1' = \sqrt{\frac{a_{AB1}}{a_{AB2}}} t_1 = 0.51 \text{ s} \quad (13)'$$

自 B 开始运动至 B 的左壁与 A 发生第二次碰撞经历的时间

$$T_2 = t_1 + t_1' + t_2 = 3.43 \text{ s}$$

A 达到 B 的左壁前相当于 B 的速度的大小为

$$v_{AB2} = a_{AB1} t_2 = a_{AB1} \sqrt{\frac{a_{AB1}}{a_{AB2}}} t_1 = \sqrt{\frac{a_{AB1}}{a_{AB2}}} v_{AB1} \quad (14)'$$

这也就是第二次碰后 A 由 B 的左壁出发的相对速度大小。第二次碰后，A 相对 B 向右运动，此时 A 相对于 B 的相对加速度又成为 a_{AB2} ，即 (10)' 式。A 由碰撞到相对静止所需要的时间 t_2' 和相当于 B 走过的距离 s_2 分别为

$$t_2' = \left| \frac{v_{AB2}}{a_{AB2}} \right| = \left| \frac{a_{AB1}}{a_{AB2}} \right| t_2 = \left| \frac{a_{AB1}}{a_{AB2}} \right| \sqrt{\frac{a_{AB1}}{a_{AB2}}} t_1 = \sqrt{\frac{a_{AB1}}{a_{AB2}}} t_1' = 0.016 \text{ s} \quad (15)'$$

$$s_2 = \frac{1}{2} |a_{AB2}| t_2'^2 = 0.001 \text{ m}$$

以后的碰撞

根据 (13)'、(15)' 二式，如令

$$k = \sqrt{\frac{a_{AB1}}{a_{AB2}}} = \sqrt{\frac{1/4}{31/4}} = \sqrt{\frac{1}{31}} = 0.18 \quad (16)'$$

则有

$$t_2 = k t_1 \quad t_2' = k t_1'$$

由此可以推知，在第三次碰撞中必有

$$t_3 = k t_2 = k^2 t_1 \quad t_3' = k t_2' = k^2 t_1' \quad (17)'$$

在第 n 次碰撞中有

$$t_n = k^{n-1}t_1 \quad t'_n = k^{n-1}t'_1 \quad (18)'$$

即每一次所需时间要比上次少得多 (A 在 B 中所走的距离也小得多)。把所有的时间加在一起, 得

$$T_\infty = \sum_{i=1}^{\infty} (t_i + t'_i) = (t_1 + t'_1) \sum_{i=0}^{\infty} k^i = \left(2\sqrt{2} + \frac{2\sqrt{2}}{31} \right) \frac{1}{1-k} \text{ s} = 3.56 \text{ s} \quad (19)'$$

这就是说, 在 B 开始运动后 3.56 s 时, A 将紧贴 B 的左壁, 并与 B 具有相同速度, 二者不再发生碰撞, 一直处于相对静止状态。现取 A 和 B 都静止时作为初态, 以 $T = 4.0 \text{ s}$ 时刻的运动状态为末态, 设此时 A 和 B 的速度为 V , 由动量定理, 有

$$FT = (m_A + m_B)V$$

代入数值, 得

$$V = \frac{FT}{m_A + m_B} = 9.6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (20)'$$

答: 自车厢开始运动到 4.0 s 时车厢与物块的速度相同, 均为 $9.6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

评分标准: 本题 25 分。

得出摩擦力 F_f 得 5 分, 得出第一次碰撞时间 t_1 得 5 分, 得出第二次碰撞时间 t_2 得 5 分。得

出无穷次碰撞时间 T_∞ 得 5 分, 得到最后结果 V 再得 5 分。

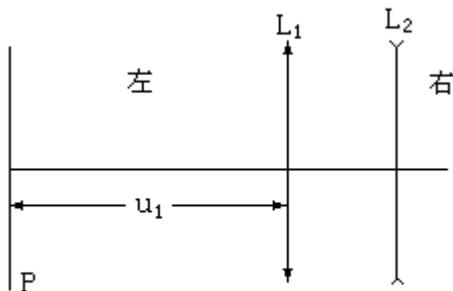
第 20 届全国中学生物理竞赛预赛试卷

全卷共七题，总分为 140 分。

一、(20 分) 两个薄透镜 L_1 和 L_2 共轴放置，如图所示。已知 L_1 的焦距 $f_1=f$ ， L_2 的焦距 $f_2=-f$ ，两透镜间距离也是 f 。小物体位于物面 P 上，物距 $u_1=3f$ 。

(1) 小物体经这两个透镜所成的像在 L_2 的_____边，到 L_2 的距离为_____，是_____像（虚或实）、_____像（正或倒），放大率为_____。

(2) 现在把两透镜位置调换，若还要给定的原物体在原像处成像，两透镜作为整体应沿光轴向_____边移动距离_____。这个新的像是_____像（虚或实）、_____像（正或倒），放大率为_____。



图预 20-1

二、(20 分) 一个氢放电管发光，在其光谱中测得一条谱线的波长为 $4.86 \times 10^{-7} \text{m}$ 。试计算这是氢原子中电子从哪一个能级向哪一个能级（用量子数 n 表示）跃迁时发出的？已知氢原子基态 ($n=1$) 的能量为 $E_1 = -13.6 \text{eV} = -2.18 \times 10^{-18} \text{J}$ ，普朗克常量为 $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{J}\cdot\text{s}$ 。

三、(20 分) 在野外施工中，需要使质量 $m=4.20 \text{kg}$ 的铝合金构件升温；除了保温瓶中尚存有温度 $t=90.0^\circ\text{C}$ 的 1.200kg 的热水外，无其他热源。试提出一个操作方案，能利用这些热水使构件从温度 $t_0=10.0^\circ\text{C}$ 升温到 66.0°C 以上(含 66.0°C)，并通过计算验证你的方案。

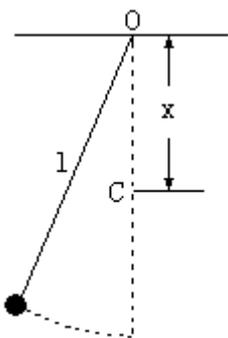
已知铝合金的比热容 $c=0.880 \times 10^3 \text{J}\cdot(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})^{-1}$ ，水的比热容 $c=4.20 \times 10^3 \text{J}\cdot(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})^{-1}$ ，不计向周围环境散失的热量。

四、(20 分)从 z 轴上的 O 点发射一束电量为 $q(>0)$ 、质量为 m 的带电粒子，它们速度的方向分布在以 O 点为顶点， z 轴为对称轴的一个顶角很小的锥体内(如图所示)，速度的大小都等于 v 。试设计一种匀强磁场，能使这束带电粒子会聚于 z 轴上的另一点 M ， M 点离开 O 点的距离为 d 。要求给出该磁场的方向、磁感应强度的大小和最小值。不计粒子间的相互作用和重力的作用。



图预 20-4

五、(20 分)有一个摆长为 l 的摆(摆球可视为质点，摆线的质量不计)，在过悬挂点的竖直线上距悬挂点 O 的距离为 x 处($x < l$)的 C 点有一固定的钉子，如图所示，当摆摆动时，摆线会受到钉子的阻挡。当 l 一定而 x 取不同值时，阻挡后摆球的运动情况将不同。现将摆拉到位于竖直线的左方(摆球的高度不超过 O 点)，然后放手，令其自由摆动，如果摆线被钉子阻挡后，摆球恰巧能够击中钉子，试求 x 的最小值。



图预 20-5

六、(20 分)质量为 M 的运动员手持一质量为 m 的物块, 以速率 v_0 沿与水平面成 α 角的方向向前跳跃(如图). 为了能跳得更远一点, 运动员可在跳远全过程中的某一位置处, 沿某一方向把物块抛出. 物块抛出时相对运动员的速度的大小 u 是给定的, 物块抛出后, 物块和运动员都在同一竖直平面内运动.

(1) 若运动员在跳远的全过程中的某时刻 t_0 把物块沿与 x 轴负方向成某 θ 角的方向抛出, 求运动员从起跳到落地所经历的时间.

(2) 在跳远的全过程中, 运动员在何处把物块沿与 x 轴负方向成 θ 角的方向抛出, 能使自己跳得更远? 若 v_0 和 u 一定, 在什么条件下可跳得最远? 并求出运动员跳的最大距离.

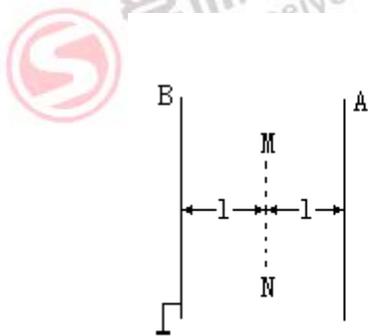


图预 20-6

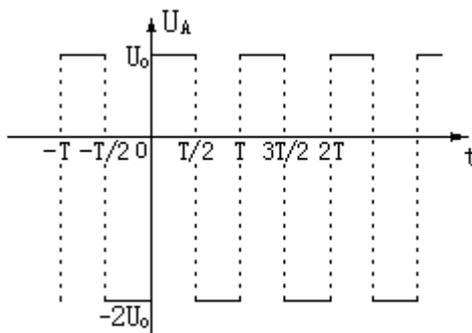
七、. (20 分)图预 20-7-1 中 A 和 B 是真空中两块面积很大的平行金属板, 加上周期为 T 的交流电压, 在两板间产生交变的匀强电场. 已知 B 板电势为零, A 板电势 U_A 随时间变化的规律如图预 20-7-2 所示, 其中 U_A 的最大值为 U_0 , 最小值为 $-2U_0$, 在图预 20-7-1 中, 虚线 MN 表示与 A、B 板平行等距的一个较小的面, 此面到 A 和 B 的距离皆为 l . 在此面所在处, 不断地产生电量为 q 、质量为 m 的带负电的微粒, 各个时刻产生带电微粒的机会均等. 这种微粒产生后, 从静止出发在电场力的作用下运动. 设微粒一旦碰到金属板, 它就附在板上不再运动, 且其电量同时消失, 不影响 A、B 板的电压. 已知上述的 T、 U_0 、 l 、 q

和 m 等各量的值正好满足等式 $l^2 = \frac{3}{16} \frac{U_0 q}{2m} \left(\frac{T}{2}\right)^2$

若在交流电压变化的每个周期 T 内, 平均产生 320 个上述微粒, 试论证在 $t=0$ 到 $t=T/2$ 这段时间内产生的微粒中, 有多少微粒可到达 A 板(不计重力, 不考虑微粒之间的相互作用).



图预 20-7-1



图预 20-7-2

第 20 届全国中学生物理竞赛预赛试卷

参考答案及评分标准

一、参考解答

(1) 右 f 实 倒 1。

(2) 左 $2f$ 实 倒 1。

评分标准：本题 20 分，每空 2 分。

二、参考解答

$$\text{波长 } \lambda \text{ 与频率 } \nu \text{ 的关系为 } \nu = \frac{c}{\lambda}, \quad (1)$$

$$\text{光子的能量为 } E_\nu = h\nu, \quad (2)$$

由式 (1)、(2) 可求得产生波长 $\lambda = 4.86 \times 10^{-7} \text{ m}$ 谱线的光子的能量

$$E_\nu = 4.09 \times 10^{-19} \text{ J} \quad (3)$$

氢原子的能级能量为负值并与量子数 n 的平方成反比：

$$E_n = -k \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

式中 k 为正的比例常数。氢原子基态的量子数 $n = 1$ ，基态能量 E_1 已知，由式 (4) 可得出

$$k = -E_1 \quad (5)$$

把式 (5) 代入式 (4)，便可求得氢原子的 $n = 2, 3, 4, 5, \dots$ 各能级的能量，它们是

$$E_2 = -\frac{1}{2^2} k = -5.45 \times 10^{-19} \text{ J},$$

$$E_3 = -\frac{1}{3^2} k = -2.42 \times 10^{-19} \text{ J},$$

$$E_4 = -\frac{1}{4^2} k = -1.36 \times 10^{-19} \text{ J},$$

$$E_5 = -\frac{1}{5^2} k = -8.72 \times 10^{-20} \text{ J}.$$

比较以上数据，发现

$$E_\nu = E_4 - E_2 = 4.09 \times 10^{-19} \text{ J}. \quad (6)$$

所以，这条谱线是电子从 $n = 4$ 的能级跃迁到 $n = 2$ 的能级时发出的。

评分标准：本题 20 分。

式 (3) 4 分，式 (4) 4 分，式 (5) 4 分，式 (6) 及结论共 8 分。

三、参考解答

1. 操作方案：将保温瓶中 $t = 90.0 \text{ }^\circ\text{C}$ 的热水分若干次倒出来。第一次先倒出一部分，与温度为 $t_0 = 10.0 \text{ }^\circ\text{C}$ 的构件充分接触，并达到热平衡，构件温度已升高到 t_1 ，将这部分温

度为 t_1 的水倒掉。再从保温瓶倒出一部分热水，再次与温度为 t_1 的构件充分接触，并达到热平衡，此时构件温度已升高到 t_2 ，再将这些温度为 t_2 的水倒掉。然后再从保温瓶中倒出一部分热水来使温度为 t_2 的构件升温……直到最后一次，将剩余的热水全部倒出来与构件接触，达到热平衡。只要每部分水的质量足够小，最终就可使构件的温度达到所要求的值。

2. 验证计算：例如，将 1.200kg 热水分 5 次倒出来，每次倒出 $m_0=0.240\text{kg}$ ，在第一次使热水与构件达到热平衡的过程中，水放热为

$$Q_1 = c_0 m_0 (t - t_1) \quad (1)$$

构件吸热为

$$Q_1' = cm(t_1 - t_0) \quad (2)$$

由 $Q_1 = Q_1'$ 及题给的数据，可得

$$t_1 = 27.1^\circ\text{C} \quad (3)$$

同理，第二次倒出 0.240kg 热水后，可使构件升温到

$$t_2 = 40.6^\circ\text{C} \quad (4)$$

依次计算出 $t_1 \sim t_5$ 的数值，分别列在下表中。

倒水次数/次	1	2	3	4	5
平衡温度/ $^\circ\text{C}$	27.1	40.6	51.2	59.5	66.0

可见 $t_5 = 66.0^\circ\text{C}$ 时，符合要求。

附：若将 1.200kg 热水分 4 次倒，每次倒出 0.300kg，依次算出 $t_1 \sim t_4$ 的值，如下表中的数据：

倒水次数/次	1	2	3	4
平衡温度/ $^\circ\text{C}$	30.3	45.50	56.8	65.2

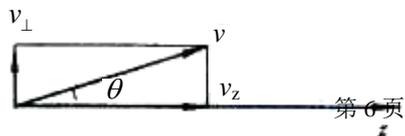
由于 $t_4 = 65.2^\circ\text{C} < 66.0^\circ\text{C}$ ，所以如果将热水等分后倒到构件上，则倒出次数不能少于 5 次。

评分标准：本题 20 分。

设计操作方案 10 分。操作方案应包含两个要点：①将保温瓶中的水分若干次倒到构件上。②倒在构件上的水与构件达到热平衡后，把与构件接触的水倒掉。

验证方案 10 分。使用的验证计算方案可以与参考解答不同，但必需满足两条：①通过计算求出的构件的最终温度不低于 66.0°C 。②使用的热水总量不超过 1.200kg。这两条中任一条不满足都不给这 10 分。例如，把 1.200kg 热水分 4 次倒，每次倒出 0.300kg，尽管验算过程中的计算正确，但因构件最终温度低于 66.0°C ，不能得分。

四、参考解答



图预解 20-4-1

设计的磁场为沿 z 轴方向的匀强磁场, O 点和 M 点都处于这个磁场中。下面我们根据题意求出这种磁场的磁感应强度的大小。粒子由 O 点射出就进入了磁场, 可将与 z 轴成 θ 角的速度分解成沿磁场方向的分速度 v_z 和垂直于磁场方向的分速度 v_{\perp} (见图预解 20-4-1), 注意到 θ 很小, 得

$$v_z = v \cos \theta \approx v \quad (1)$$

$$v_{\perp} = v \sin \theta \approx v\theta \quad (2)$$

粒子因具有垂直磁场方向的分速度, 在洛仑兹力作用下作圆周运动, 以 R 表示圆周的半径, 有

$$qBv_{\perp} = m \frac{v_{\perp}^2}{R}$$

圆周运动的周期

$$T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}}$$

由此得

$$T = \frac{2\pi m}{qB} \quad (3)$$

可见周期与速度分量 v_{\perp} 无关。

粒子因具有沿磁场方向的分速度, 将沿磁场方向作匀速直线运动。由于两种分速度同时存在, 粒子将沿磁场方向作螺旋运动, 螺旋运动螺距为

$$h = v_z T = vT \quad (4)$$

由于它们具有相同的 v , 因而也就具有相同的螺距; 又由于这些粒子是从同一点射出的, 所以经过整数个螺距 (最小是一个螺距) 又必定会聚于同一点。只要使 OM 等于一个螺距或一个螺距的 n (整数) 倍, 由 O 点射出的粒子绕磁场方向旋转一周 (或若干周后) 必定会聚于 M 点, 如图 20-4-2 所示。所以

$$d = nh, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

由式 (3)、(4)、(5) 解得

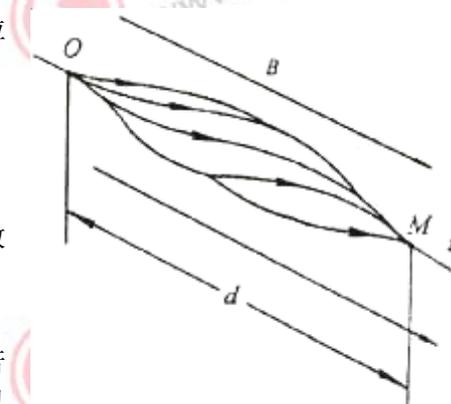
$$B = \frac{2\pi m v n}{qd}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

这就是所要求磁场的磁感应强度的大小, 最小值应取 $n = 1$, 所以磁感应强度的最小值为

$$B = \frac{2\pi m v}{qd} \quad (7)$$

评分标准: 本题 20 分。

磁场方向 2 分, 式 (3)、(4) 各 3 分, 式 (5) 5 分, 求得式 (6) 给 5 分, 求得式 (7) 再



图预解 20-4-2

给 2 分。

五、参考解答

摆线受阻后在一段时间内摆球作圆周运动，若摆球的质量为 m ，则摆球受重力 mg 和摆线拉力 T 的作用，设在这段时间内任一时刻的速度为 v ，如图预解 20-5 所示。用 α 表示此时摆线与重力方向之间的夹角，则有方程式

$$T + mg \cos \alpha = \frac{mv^2}{l-x} \quad (1)$$

运动过程中机械能守恒，令 θ 表示摆线在起始位置时与竖直方向的夹角，取 O 点为势能零点，则有关系

$$-mgl \cos \theta = \frac{1}{2}mv^2 - mg[x - (l-x)\cos \alpha] \quad (2)$$

摆受阻后，如果后来摆球能击中钉子，则必定在某位置时摆线开始松弛，此时 $T=0$ ，此后摆球仅在重力作用下作斜抛运动。设在该位置时摆球速度 $v=v_0$ ，摆线与竖直线的夹角 $\alpha=\alpha_0$ ，由式 (1) 得

$$v_0^2 = g(l-x)\cos \alpha_0, \quad (3)$$

代入 (2) 式，求出

$$2l \cos \theta = 3(x-l)\cos \alpha_0 + 2x \quad (4)$$

要求作斜抛运动的摆球击中 C 点，则应满足下列关系式：

$$(l-x)\sin \alpha_0 = v_0 \cos \alpha_0 t, \quad (5)$$

$$(l-x)\cos \alpha_0 = -v_0 \sin \alpha_0 t + \frac{1}{2}gt^2 \quad (6)$$

利用式 (5) 和式 (6) 消去 t ，得到

$$v_0^2 = \frac{g(l-x)\sin^2 \alpha_0}{2\cos \alpha_0} \quad (7)$$

由式 (3)、(7) 得到

$$\cos \alpha_0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (8)$$

代入式 (4)，求出

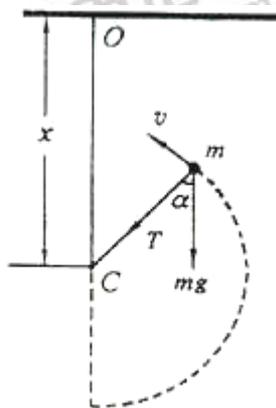
$$\theta = \arccos \left[\frac{x(2+\sqrt{3})-l\sqrt{3}}{2l} \right] \quad (9)$$

θ 越大， $\cos \theta$ 越小， x 越小， θ 最大值为 $\pi/2$ ，由此可求得 x 的最小值：

$$x(2+\sqrt{3}) = \sqrt{3}l,$$

所以

$$x = (2\sqrt{3}-3)l = 0.464l \quad (10)$$



图预解 20-5

评分标准：本题 20 分。

式 (1) 1 分，式 (2) 3 分，式 (3) 2 分，式 (5)、(6) 各 3 分，式 (8) 3 分，式 (9) 1 分，式 (10) 4 分。

六、参考解答

(1) 规定运动员起跳的时刻为 $t=0$ ，设运动员在 P 点(见图预解 20-6)抛出物块，

以 t_0 表示运动员到达 P 点的时刻，则运动员

在 P 点的坐标 x_p 、 y_p 和抛物前的速度

v 的分量 v_{px} 、 v_{py} 分别为

$$v_{px} = v_0 \cos \alpha, \quad (1)$$

$$v_{py} = v_0 \sin \alpha - gt_0 \quad (2)$$

$$x_p = v_0 \cos \alpha t_0, \quad (3)$$

$$y_p = v_0 \sin \alpha t_0 - \frac{1}{2}gt_0^2 \quad (4)$$

设在刚抛出物块后的瞬间，运动员的速度 V 的分量大小分别为 V_{px} 、 V_{py} ，物块相对运动员的速度 u 的分量大小分别为 u_x 、 u_y ，方向分别沿 x 、负 y 方向。由动量守恒定律可知

$$MV_{px} + m(V_{px} - u_x) = (M + m)v_{px}, \quad (5)$$

$$MV_{py} + m(V_{py} - u_y) = (M + m)v_{py} \quad (6)$$

因 u 的方向与 x 轴负方向的夹角为 θ ，故有

$$u_x = u \cos \theta \quad (7)$$

$$u_y = u \sin \theta \quad (8)$$

解式 (1)、(2)、(5)、(6) 和式 (7)、(8)，得

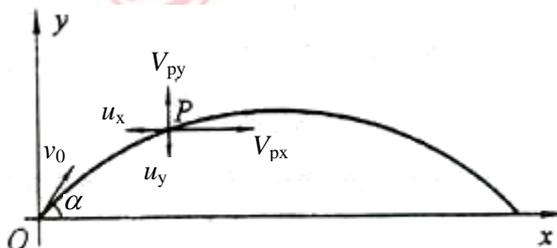
$$V_{px} = v_0 \cos \alpha + \frac{mu \cos \theta}{M + m} \quad (9)$$

$$V_{py} = v_0 \sin \alpha - gt_0 + \frac{mu \sin \theta}{M + m} \quad (10)$$

抛出物块后，运动员从 P 点开始沿新的抛物线运动，其初速度为 V_{px} 、 V_{py} 。在 t 时刻 ($t > t_0$)

运动员的速度和位置为

$$V_x = V_{px}, \quad (11)$$



图预解 20-6

$$V_y = V_{py} - g(t - t_0), \quad (12)$$

$$x = x_p + V_{px}(t - t_0) = (v_0 \cos \alpha + \frac{mu_x}{M + m})t - \frac{mu_x}{M + m}t_0, \quad (13)$$

$$y = y_p + V_{py}(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 \quad (14)$$

由式 (3)、(4)、(9)、(10)、(13)、(14) 可得

$$x = \left(v_0 \cos \alpha + \frac{mu \cos \theta}{M + m} \right) t - \frac{mu \cos \theta}{M + m} t_0 \quad (15)$$

$$y = 2 \left(v_0 \sin \alpha + \frac{mu \sin \theta}{M + m} \right) t - gt^2 - \frac{2mu \sin \theta}{M + m} t_0 \quad (16)$$

运动员落地时,

$$y = 0$$

由式 (16) 得

$$gt^2 - 2 \left(v_0 \sin \alpha + \frac{mu \sin \theta}{M + m} \right) t + \frac{2mu \sin \theta}{M + m} t_0 = 0, \quad (17)$$

方程的根为

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha + \frac{mu \sin \theta}{M + m} \pm \sqrt{\left(v_0 \sin \alpha + \frac{mu \sin \theta}{M + m} \right)^2 - 2g \frac{mu \sin \theta}{M + m} t_0}}{g} \quad (18)$$

式 (18) 给出的两个根中, 只有当“±”取“+”时才符合题意, 因为从式 (12) 和式 (10), 可求出运动员从 P 点到最高点的时间为式

$$\frac{v_0 \sin \alpha + \left(\frac{mu \sin \theta}{M + m} \right)}{g}$$

而从起跳到落地所经历的时间应比上面给出的时间大, 故从起跳到落地所经历的时间为

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha + \frac{mu \sin \theta}{M + m} + \sqrt{\left(v_0 \sin \alpha + \frac{mu \sin \theta}{M + m} \right)^2 - 2g \frac{mu \sin \theta}{M + m} t_0}}{g} \quad (19)$$

(2) 由式 (15) 可以看出, t 越大, t_0 越小, 跳的距离 x 越大, 由式 (19) 可以看出, 当

$$t_0 = 0$$

时, t 的值最大, 由式 (3) 和式 (4) 可知, 抛出物块处的坐标为

$$x_p = 0, \quad y_p = 0 \quad (20)$$

即应在原点亦即在刚起跳时把物块抛出, 运动员可跳得远一点. 由式 (19) 可以得到运动员自起跳至落地所经历的时间为

$$T = 2 \frac{v_0 \sin \alpha}{g} + 2 \frac{m}{M+m} \frac{u \sin \theta}{g}$$

把 $t_0 = 0$ 和 $t = T$ 代入式 (15), 可求得跳远的距离, 为

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} + \frac{2mv_0u}{(M+m)g} \sin(\theta + \alpha) + \frac{m^2u^2}{(M+m)^2g} \sin 2\theta \quad (21)$$

可见, 若

$$\sin 2\alpha = 1, \quad \sin(\theta + \alpha) = 1, \quad \sin 2\theta = 1,$$

$$\text{即} \quad \alpha = \pi/4, \quad \theta = \pi/4 \quad (22)$$

时, x 有最大值, 即沿与 x 轴成 45° 方向跳起, 且跳起后立即沿与负 x 轴成 45° 方向抛出物块, 则 x 有最大值, 此最大值为

$$x_m = \frac{v_0^2}{g} + \frac{2mv_0u}{(M+m)g} + \frac{m^2u^2}{(M+m)^2g} \quad (23)$$

评分标准: 本题 20 分。

第一小问 13 分: 求得式 (15)、(16) 各 3 分, 式 (17) 2 分, 求得式 (19) 并说明 “ t ” 取 “+” 的理由给 5 分。第二小问 7 分: 式 (20) 2 分, 式 (22) 2 分, 式 (23) 3 分。

七、参考解答

在电压为 U_0 时, 微粒所受电场力为 $U_0q/2l$, 此时微粒的加速度为 $a_0 = U_0q/2lm$ 。将此式代入题中所给的等式, 可将该等式变为

$$l = \frac{3}{16} a_0 \left(\frac{T}{2} \right)^2 \quad (1)$$

现在分析从 0 到 $T/2$ 时间内, 何时产生的微粒在电场力的作用下能到达 A 板, 然后计算这些微粒的数目。

在 $t = 0$ 时产生的微粒, 将以加速度 a_0 向 A 板运动, 经 $T/2$ 后, 移动的距离 x 与式 (1) 相比, 可知

$$x = \frac{1}{2} a_0 \left(\frac{T}{2} \right)^2 > l \quad (2)$$

即 $t = 0$ 时产生的微粒, 在不到 $T/2$ 时就可以到达 A 板。在 $U_A = U_0$ 的情况下, 设刚能到达 A 板的微粒是产生在 $t = t_1$ 时刻, 则此微粒必然是先被电压 U_0 加速一段时间 Δt_1 , 然后再被电压 $-2U_0$ 减速一段时间, 到 A 板时刚好速度为零。用 d_1 和 d_2 分别表示此两段时间内的位移, v_1 表示微粒在 Δt_1 内的末速, 也等于后一段时间的初速, 由匀变速运动公式应有

$$d_1 = \frac{1}{2}a_0(\Delta t_1)^2 \quad (3)$$

$$0 = v_1^2 + 2(-2a_0)d_2 \quad (4)$$

又因

$$v_1 = a_0\Delta t_1, \quad (5)$$

$$d_1 + d_2 = l, \quad (6)$$

$$t_1 + \Delta t_1 = \frac{T}{2}, \quad (7)$$

由式 (3) 到式 (7) 及式 (1), 可解得

$$t_1 = \frac{T}{2}, \quad (8)$$

这就是说, 在 $U_A = U_0$ 的情况下, 从 $t = 0$ 到 $t = T/4$ 这段时间内产生的微粒都可到达 A 板 (确切地说, 应当是 $t < T/4$)。

为了讨论在 $T/4 < t \leq T/2$ 这段时间内产生的微粒的运动情况, 先设想有一静止粒子在 A 板附近, 在 $U_A = -2U_0$ 电场作用下, 由 A 板向 B 板运动, 若到达 B 板经历的时间为 τ , 则有

$$2l = \frac{1}{2}(2a_0)\tau^2$$

根据式 (1) 可求得

$$\tau = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{4}T$$

由此可知, 凡位于 MN 到 A 板这一区域中的静止微粒, 如果它受 $U = -2U_0$ 的电场作用时间大于 τ , 则这些微粒都将到达 B 板。

在 $t = T/4$ 发出的微粒, 在 $U_A = U_0$ 的电场作用下, 向 A 板加速运动, 加速的时间为 $T/4$, 接着在 $U_A = -2U_0$ 的电场作用下减速, 由于减速时的加速度为加速时的两倍, 故经过 $T/8$ 微粒速度减为零。由此可知微粒可继续在 $U_A = -2U_0$ 的电场作用下向 B 板运动的时间为

$$\tau_1 = \frac{1}{2}T - \frac{1}{8}T = \frac{3}{8}T = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4}T$$

由于 $\tau_1 > \tau$, 故在 $t = T/4$ 时产生的微粒最终将到达 B 板 (确切地说, 应当是 $t < T/4$), 不会再回到 A 板。

在 t 大于 $T/4$ 但小于 $T/2$ 时间内产生的微粒, 被 $U_A = U_0$ 的电场加速的时间小于 $T/4$, 在 $U_A = -2U_0$ 的电场作用下速度减到零的时间小于 $t = T/8$, 故可在 $U_A = -2U_0$ 的电场作用

下向 B 板运动时间为

$$\tau' > \frac{1}{2}T - \frac{1}{8}T = \tau_1$$

所以这些微粒最终都将打到 B 板上，不可能再回到 A 板。

由以上分析可知，在 $t=0$ 到 $t=T/2$ 时间内产生的微粒中，只有在 $t=0$ 到 $t=T/4$ 时间内产生的微粒能到达 A 板，因为各个时刻产生带电微粒的机会均等，所以到达 A 板的微粒数为

$$N = 320 \times \frac{1}{4} = 80 \quad (9)$$

评分标准：本题 20 分。

论证在 $t=0$ 到 $t=T/4$ 时间内产生的微粒可能到达 A 板给 10 分；论证 $t=T/4$ 到 $t=T/2$ 时间内产生的微粒不能到达 A 板给 6 分。求得最后结果式 (9) 再给 4 分。