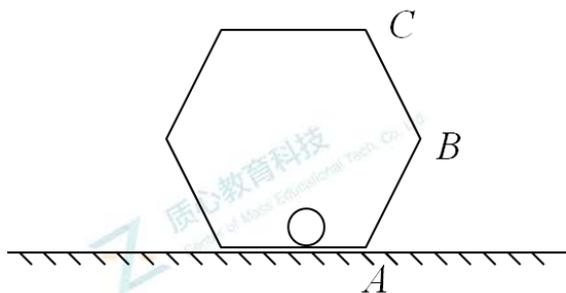


复赛刷题派对第四套

命题人：唐鹏 蔡子星 孙鹏
 满分 160 分 考试时间 180 分钟

题一（20 分）

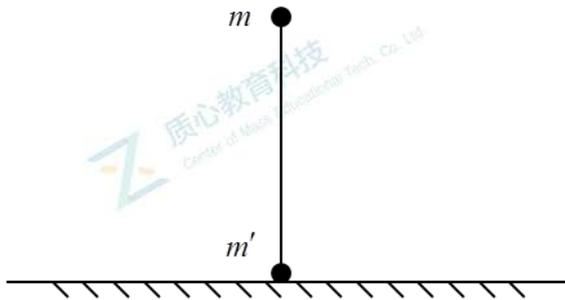
质量为 M 、截面是棱长 l 的正六边形的均匀薄壁筒内，有另一质量 m 、半径为 $r < \frac{l}{4}$ 的质量均匀分布的实心圆柱。初始时，薄壁筒固定在摩擦系数足够大的水平地面上，实心圆柱在薄壁筒中以角速度 ω_0 作纯滚动，之后将与薄壁筒 AB 侧面相碰，碰撞的时间很短。



- (1) 若碰撞中实心圆柱不脱离 AB 面且碰后瞬间不发生相对滑动，求实心圆柱与薄壁筒之间摩擦系数的最小值 μ_0 ；
- (2) 求碰撞结束瞬间实心圆柱的角速度；
- (3) 实际上要使其纯滚，在 AB 上的摩擦系数应大于 μ_0 ，我们让它依然纯滚。若在碰撞之后立即解除对薄壁筒的固定，在之后的运动中实心圆柱刚好不能接触 BC 侧面，且薄壁筒保持静止，求 ω_0 满足的关系及 M 的最小值。

题二（20分）

轻质杆上下两端分别固连一个质量为 m 和 m' 的质点。将此哑铃状物体竖直放在光滑水平桌面上，微扰后不难发现：当 $m' = 0$ 时 m' 与桌面之间作用力立即变为零；当 $m' \rightarrow \infty$ 时， m' 与桌面之间作用力始终不为零。于是当 $m' > m_c$ 时， m' 与桌面之间作用力始终不为零。



(1) 求此临界质量 m_c ；并求出 $m' = m_c$ 时， m' 与桌面之间作用力为零时轻杆与桌面之间的夹角 θ_0 。

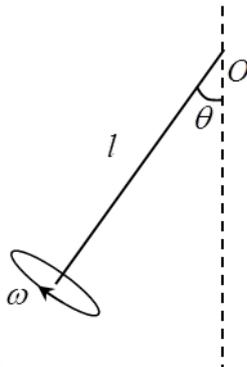
(2) 若在空间存在垂直于纸面向外、磁感应强度为 B 的匀强磁场，并在两个质点上都添加 $+q$ 的电荷，杆长为 l 。从竖直状态微扰后、 m' 离地前，杆与水平夹角为 θ 时两质点的相对速度。（用 $m, m', l, g, \theta, q, B$ 表示）

题三（20分）

太阳神车

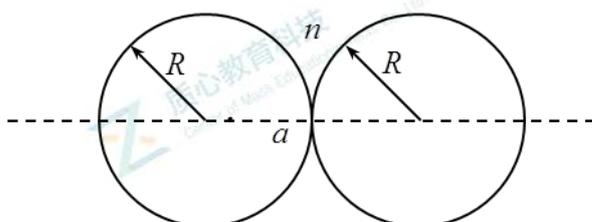
欢乐谷有太阳神车，可以吓尿蔡子星人。我们将太阳神车作如下简化：长度 l 、质量为 M 的匀质刚性摆臂一端固定在支架上垂直于纸面的水平轴 O 上，被限制在竖直平面内转动。另一端用轻质辐条固定半径为 r 的环形座椅。载满蔡子星人之后环形座椅总质量为 m ，可视作质量均匀分布。启动后摆臂在水平轴处外力矩作用下来回摆动并增加摆幅，同时环形座椅在辐条中心电机的作用下保持匀速转动，从 O 点看去是大小为 ω 的顺时针转动。若摆臂最高处与竖直方向夹角为 θ_0 ，并在此时撤去外力矩，忽略各处阻力。

- 求此时位于座椅中最高点处的那只蔡子星人的加速度。
- 求转回最低点时最左边那只蔡子星人的加速度。



题四（20分）

某液体中有两个并排的、半径同为 R 的空气泡，取球心连线为主光轴。有只小虫子在距离左泡泡右边缘为 $a = 0.195R$ 处时，发现其经过左泡泡右边的反射像，与经过左泡泡右边、右泡泡左边、右泡泡右边的折射像重合。求此液体折射率 n 。只考虑近轴光线，保留两位有效数字即可。



题五（20分）

骑行吧！黄俏！【改编自美国 USAPhO2014】



（是的，还是那张毫无 PS 痕迹的图 $(\bar{y} \nabla \bar{y}) \rho$ ）

雄性的黄俏为了博取雌性老婆的欢心，需要做一些危险的事情来表现自己的魅力。黄俏老师骑电动独轮车在马戏团的圆桶状壁上骑行。假设黄俏老师连带独轮车的总高度为 h ，马戏团的圆桶半径为 R ，重力加速度为 g ，平衡时候黄俏老师的身体和水平方向夹角为 θ 。

(1) 将黄俏老师视作质点，如果知道了黄俏老师的角速度 ω_0 求摩擦因数 μ 至少为多少，黄俏老师才不会摔死？

(2) 足够粗糙的情况下唐鹏老师用简单的近似来分析。假设黄俏老师 $h \ll R$ ，考虑到他的身高，孙鹏也觉得这样分析很有道理。求黄俏老师平衡的角速度 ω_1 应该是多少？

(3) 蔡子星老师表示这样不可以，作为一个物理老师，高度 h 不可忽略。他把黄俏老师和独轮车当成一个整体，视作质量 m 均匀分布的细圆柱体，求黄俏老师平衡的角速度 ω_2 应该是多少？

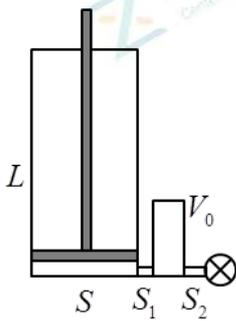
题六（20分）

气压弹射跳楼机

气压弹射是跳楼机的一种动力来源，我们将建立简单模型来分析其工作原理。动力气缸截面积为 S ，长度为 L ，其内活塞截面积也为 S ，高压储气缸体积为 V_0 ；两气缸之间有阀门 S_1 。

高压储气缸与充气装置相连，之间有阀门 S_2 。气缸及活塞都视作绝热，空气视为摩尔等容

热容为 $C_v = \frac{5}{2}R$ 的理想气体。



（1）初始时关闭阀门 S_1 ，并向高压储气缸内充气。充气装置可以向高压储气缸内注入压强 P_1 ，温度 T_0 的恒定的高压空气，由于初始时储气缸内气体很少，可直接视为真空。求高压储气缸内气压达到 P_1 时的温度 T_1 。

（2）高压气缸中充气达到 P_1 后关闭阀门 S_2 ，再打开 S_1 之后气体将推动活塞向上发射。假设游客及座位等附属装置的影响可等效为活塞有一个质量 m ，求活塞速度的最大值 v_m 。答题时使用以下近似条件：初始时动力气缸中活塞以下的体积忽略不计， S_1 处开口足够大可忽略对气体的阻力，活塞光滑；活塞速度远小于声速，因此可以视作准静态过程；大气压 $P_0 \ll \frac{mg}{S}, P_0 \ll P_1$ ； L 足够长。已知绝热过程满足 PV^γ 为常量，其中 $\gamma = \frac{C_v + R}{C_v}$ 为比热容比。

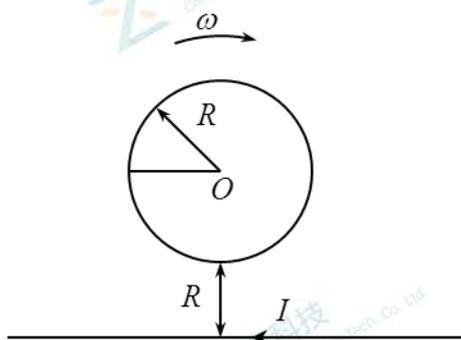
（3）求活塞能达到的最大高度 H 所满足的方程。认为（2）中的近似条件仍然成立。

题七（20分）

用更复杂的方法降温。

黄俏老师周末加班没空调，但是有斯特林发动机，本着不繁琐不足以体现极（逗）客（比）本质的精神，他用了一个别扭的方法驱动小风扇。

斯特林发动机的转轮以恒定角速度 ω 转动（动力不足或受到各种阻力时黄俏老师手动保持转速），转轮边缘由金属构成，半径为 R ，其金属辐条被蔡子星人吃的只剩下一条。黄俏老师找来一根导线弄成超级长的直导线之后用电池通以 I 的恒定电流，置于转轮同平面正下方相距也为 R 的地方（如图）。于是黄俏老师可以从 O 点和轮边缘得到一个用于驱动小风扇的电压。



- (1) 求辐条与直导线平行瞬间，黄俏老师得到的电压 U_1 ；
- (2) 求辐条在相对 O 点和直导线的外侧，且与直导线垂直瞬间，黄俏老师得到的电压 U_2 。

题八（20分）

我们都爱核聚变

一种核聚变的方式是让两个氘核高速相撞，使得在其本征系中，相对距离小于 r_0 。氘核静质量为 m_0 ，电量 e 。

- (1) 两个氘核沿一条直线以相同的速度 v_0 对撞，求能引发反应的最小速度；
- (2) 两个氘核速度夹角为 θ ，速度大小均为 v_1 ，求能引发反应的最小速度。