

# 冲刺金牌

权威作者·策划人阵容

总主编：严军

各册主编

## ★名牌大学

- 马传通 南京大学数学系教授、国家级奥林匹克教练  
丁 肇 南京大学化学化工学院教授、国家级奥林匹克教练  
倪其造 中国科技大学化学与材料学院教授、国家级奥林匹克教练  
葛 军 南京师大数学与计算机科学学院教授、国家级奥林匹克教练  
殷 实 东南大学物理系教授  
汪 忠 南京师大生命科学学院教授  
张贻钧 南京师大化学与环境科学学院享受国务院特殊津贴学者

## ★金牌之乡

### 湖南省

- 黄其买 湖南省长沙市教科所特级教师 宋沁太 湖南省长沙市明德中学特级教师  
朱最均 湖南省长沙市第十六中学高级教师  
高建军 湖南省长沙市第一中学特级教师、奥林匹克教练

### 江苏省

- 丁志祥 江苏省南通第一中学高级教师 刘友开 江苏省淮安市教委特级教师  
周桂良 江苏省常州市教研室特级教师 南 冲 江苏省物理学会秘书长  
杨维中 江苏省南京市教研室特级教师 臧继宝 江苏省南京市教研室高级教师  
陈方炜 江苏省南京市外国语学校高级教师、奥林匹克教练  
冯惠惠 江苏省南京市雨花台中学特级教师、奥林匹克教练  
岑 芳 江苏省南京市教研室高级教师、奥林匹克教练  
孙心礼 江苏省南京市教研室高级教师、奥林匹克教练  
刘建成 江苏省南京市教研室高级教师、奥林匹克教练

### 浙江省

- 祝明富 浙江省杭州市余杭高级中学高级教师、奥林匹克教练  
任学宝 浙江省杭州市学军中学特级教师、奥林匹克教练

### 北京市

- 邓 均 北京大学附属中学奥林匹克一级教练 陈效师 中国少年儿童出版社编审  
李新影 北京市中国人民大学附属中学特级教师 王峻鸣 北京市第十二中学特级教师

### 安徽省

- 宋世骏 安徽省马鞍山市教研室特级教师 张善福 安徽省合肥市庐阳区教研室高级教师  
俞成功 安徽省合肥市教研室高级教师 杨盛楠 安徽省安庆市教研室特级教师  
胡祖明 安徽省安庆市第一中学特级教师 马云霞 安徽省马鞍山市教研室高级教师  
李善彩 安徽省合肥市庐阳区教研室特级教师 俞仁凤 安徽省马鞍山市教研室高级教师

### 山东省

- 张怡明 山东省实验中学高级教师、奥林匹克教练



冲刺金牌奥林匹克竞赛丛书

最新  
国际国内  
物 理

奥林匹克竞赛优化解题  
题典

总 主 编 严 军  
本书主编 殷 实  
副 主 编 沙振舜 刘国钧  
撰 稿 王德飞 石长盛 刘国钧 李大志  
沙振舜 钱云才 殷 实 朱海金



吉林教育出版社



## 结识名教练

# 奥赛题典

### 主编简介



殷 实

东南大学物理系教授, 长期从事物理课程的教学及相关研究工作, 任东南大学物理系物理教研室主任, 江苏省物理奥赛竞委会副主任, 教育部物理课程委员会华东协作区

全国成人教育研究会物理学科委员会副主任委员、现任江苏省大学生物理竞赛委员会委员和评委、南京市物理学会理事等职。

先后在国内核心刊物上发表论文近 30 篇, 主编、副主编教材和著作十六部, 其中主编有关奥赛方面教材、著作 7 部(本)。有丰富的教学科研经历, 在培养拔尖人才和物理竞赛方面有一套独特且行之有效的方法。





殷  
实

国际物理奥赛是以中学内容为主并向大学内容延伸、以中学生为参赛对象的国际性学科竞赛。首届国际物理奥赛始于1967年，在波兰华沙举行，至今已举办了39届。在此期间参赛规模不断扩大，近年来每年均有50多个国家派队参赛，成为全世界有天赋的对物理有浓厚兴趣的优秀青少年的竞技赛场，也成为一个国家展示自己基础教育水平的舞台，如同国际体育奥赛一样，已深深地扎根于广大青少年的心田之中。

我国的学科竞赛活动最早始于上个世纪50年代，但全国性的物理竞赛始于改革开放后的1984年，至今已举办了22届，全国性各级参赛人数累计430余万人，并于1986年首次派队参加了在英国伦敦举行的第17届国际物理奥赛。由于该项活动的蓬勃开展，20年来取得了累累硕果，除了向高等学校输送了一大批有天赋有特长的优秀青年外，还在国际物理奥赛中取得了骄人的成绩。据统计，从1986年到2008年我国共派出选手108名，全部获奖，其中金牌76块，银牌21块，铜牌9块，表扬奖2个。特别是在第22届（1991年古巴哈瓦那）、第23届（1992年芬兰赫尔辛基）、第26届（1995年澳大利亚堪培拉）、第27届（1996年挪威奥斯陆）、第29届（1998年冰岛雷克亚未克）、第31届（2000年英国莱斯特）、第35届（2004年韩国）、第36届（2005年西班牙萨拉曼卡）、第37届（2006年新加坡）、第39届（2008年越南河内）我国参赛的5名选手全部获得金牌，取得了令世人瞩目的优异成绩，充分展示了我中华学子的勤奋与智慧，也证明了改革开放后中国的基础教育在国际上处于领先地位。

我国举行物理奥赛的目的是促使中学生提高学习物理的主动性和兴趣，改进学习方法，提高学习能力。学科竞赛一方面承认不同个体对不同学科在学习能力和兴趣上的差异，不强求全体学生参加而增加学习负担，同时又为那些对某个学科有特殊兴趣和学习才能的学生提供了一个新的学习场所。学科竞赛活动在培养个人特长、开发个人潜能、造就拔尖人才方面具有独特作用。值得注意的是，各种学科竞赛活动的

蓬勃开展和深入发展已对我国的基础教育改革和发展起到了强有力的推动作用,当前各种学科竞赛和各类兴趣小组已成为素质教育和创新能力培养的一个重要途径.在各级学科竞赛中涌现出来的优秀青少年已成为高一级学校招生录取的重要对象,它们纷纷出台了一系列政策来吸引这批人才,这为今后各种学科竞赛活动的发展起了强大的推动作用.可以预言,我国的各类各级学科竞赛在素质教育和创新教育的大方向下会更加健康深入地向前发展.

物理学是一门理论与实验紧密结合的重要基础学科,它不但自身有着广泛的应用,同时还对其他学科发展有着巨大的推动作用,20 世纪科技发展史已经证明了这一点.此外物理学的基础作用还表现在它能培育和提高今后现代科技人才在其青少年时代所必备的思维能力、动手能力和创造能力,因此物理学习在素质教育中有着一种其他学科不可替代的独特作用.学好物理能帮助学生提高观察自然世界的能力,用创新的思维来思考问题,并能动手去解决实际问题.因此国际物理奥赛历来非常注重参赛选手能以物理学基本原理和物理学丰富多彩的思维方法来探索我们身边的各种自然现象和现代工程实际问题,可以说国际奥赛试题具有明显的实践性、综合性和挑战性,它对国内物理竞赛活动起到一种导向作用.近年来全国中学生物理复赛和决赛试题已开始与国际物理奥赛接轨,试题更加注重考察学生的观察分析能力、综合各种知识灵活运用的能力、动手和解决实际问题的能力,这也可以说是今后物理学科竞赛的一大趋势.

本书就是在这一形势下奉献给广大读者的,它收集了大部分近 10 年来的全国物理竞赛题(包括预赛、复赛和决赛)和亚洲物理奥赛题以及国际物理奥赛的所有试题,考虑今后素质教育对人才培养的要求、物理竞赛活动的发展趋势以及造就拔尖人才和为高等学校培养大批优秀人才的双重任务,本书在编写上力求做到以下几点:

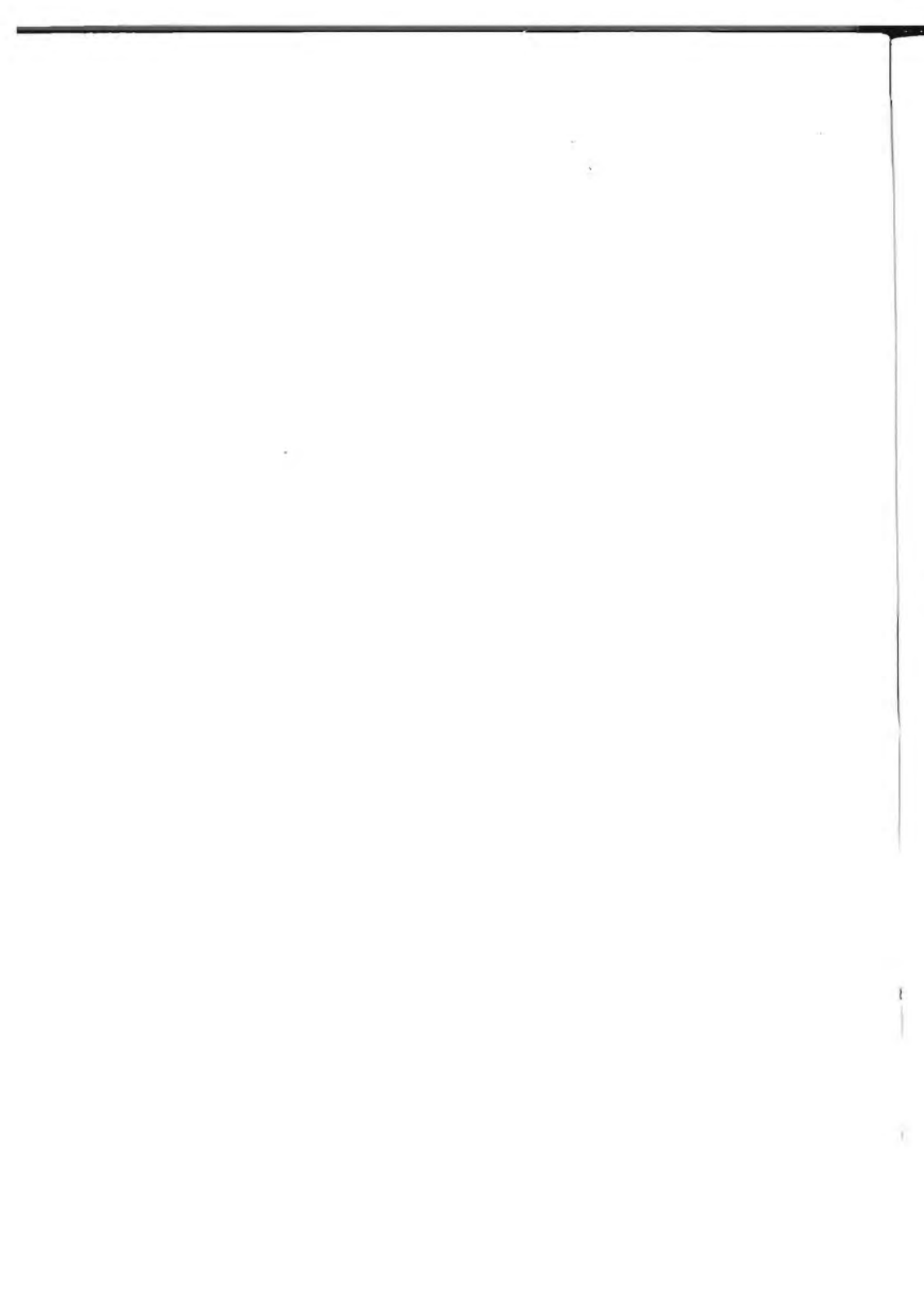
1. 全书分为理论篇和实验篇.理论篇中的章节内容以学科内容划分,而实验篇则完全以实验类型和研究方法划分.在理论篇中突出综合性,如力学综合、电磁学综合和热学综合各单独列为一节.对明显具有实践性的试题,用自然、技术与前沿为名也列为一节,以期引起读者的注意.全书中试题分别以内容(编、章、节)、题型(选择、填充、计算)、层

次(预赛、复赛、决赛、亚洲奥赛、国际奥赛)和年份排序,以利读者阅读和体会.

2. 为考虑物理知识和研究方法的覆盖面,同时考虑高考物理的需要,本书还补充了少量好题,以竞赛训练题为名罗列其中.这部分题目在难度上与历届高考中的难题相当,与全国物理预赛题和部分复赛题构成一个物理基础训练的平台,一方面为拔尖人才培养打下坚实基础,同时也为即将冲刺高考的莘莘学子提供一个训练提高的营地.

3. 学好物理应以理解为基础,以分析为过程.物理学习本身就是以培养思维能力为目的深层次的认知活动,基于这一点,本书对其中每道题在解答之前都做了分析,对少量试题解答之后又作了一些讨论,其目的就是帮助青少年读者构建物理图象,分析过程特点和点拨学习方法,言简意赅,能给读者带来事半功倍的效果.这是本书与其他题集的不同之处,期盼能成为本书一个亮点.

本书是编者在编写题解方面的一种新的尝试,不足之处在所难免,恳请广大读者不吝指正.



主编寄语 ..... 殷 实



## 第一编 理论部分

### 第一章 力学

- ◆第一节 运动学 ..... (2)
- ◆第二节 静力学 ..... (12)
- ◆第三节 动力学 ..... (31)
- ◆第四节 动量与能量 ..... (62)
- ◆第五节 流体力学 ..... (90)
- ◆第六节 振动、波动和声 ..... (92)
- ◆第七节 力学综合 ..... (115)

### 第二章 热学

- ◆第一节 气体和气态方程 ..... (184)
- ◆第二节 热力学第一定律 ..... (190)
- ◆第三节 物性与热传递 ..... (198)
- ◆第四节 热学综合 ..... (207)

### 第三章 电磁学

- ◆第一节 静电场 ..... (251)
- ◆第二节 稳恒电流 ..... (296)
- ◆第三节 磁场 ..... (311)
- ◆第四节 电磁感应 ..... (344)
- ◆第五节 交变电流 ..... (359)

◆第六节 电磁振荡和电磁波 非线性电路 .....	(362)
◆第七节 电磁学综合 .....	(370)
第四章 光学	
◆第一节 几何光学 .....	(436)
◆第二节 波动光学 光的本性 .....	(491)
第五章 原子和原子核	
◆第一节 原子 .....	(509)
◆第二节 原子核 .....	(525)
第六章 其他	
◆第一节 物理学史和当代科技报道 .....	(533)
◆第二节 自然、技术与前沿 .....	(536)



## 第二编 实验部分

第一章 测定型题 .....	(612)
第二章 黑盒问题 .....	(717)
第三章 研究型题 .....	(749)

## 附 录

物理常数和普适数据表 .....	(844)
全国中学生物理竞赛内容提要 .....	(845)
诺贝尔物理学奖简介(或大事年表) .....	(852)
关于全国中学生物理竞赛实验考试、命题的若干规定 .....	(862)
全国中学生物理竞赛章程 .....	(864)
第1~25届全国中学生物理竞赛基本情况 .....	(868)
我国参加国际物理奥林匹克竞赛情况 .....	(869)
第1~8届亚洲物理奥林匹克竞赛各国参赛情况 .....	(871)

第一编

理论部分







# 力 学

## 第一节 运 动 学

**题 1** (1998·全国物理预赛题) 下雨时,雨点竖直下落到地面,其速度为  $10 \text{ m/s}$ .若在地面上放一横截面积为  $80 \text{ cm}^2$ 、高为  $10 \text{ cm}$  的圆柱形量筒,则经  $30 \text{ min}$ ,筒内接得雨水水面高度为  $1 \text{ cm}$ .现因风的影响,雨水下落时偏斜  $30^\circ$ ,若用同样的量筒接得雨水量与无风时相同,则所需时间为\_\_\_\_\_min.

**【分析】** 求解关键在于:单位时间落在量筒内雨量等价于以雨对筒的速度为边长,量筒截面为底面的斜柱体内的雨滴数.

**【解】** 30.

由题 1 分析可知,风的影响不能改变雨竖直下落的速度,同样的量筒接得相同的雨水量,所需时间必然与无风时相同,即仍需  $30 \text{ min}$ .

**题 2** (2008·全国物理预赛题) 为训练宇航员能在失重状态下工作和生活,需要创造一种失重的环境.在地球表面附近,当飞机模拟某些在重力作用下的运动时,就可以在飞机座舱内实现短时间的完全失重状态.现要求一架飞机在速率为  $v_1 = 500 \text{ m/s}$  时进入失重状态试验,在速率为  $v_2 = 1000 \text{ m/s}$  时退出失重状态试验.重力加速度  $g$  取  $10 \text{ m/s}^2$ .试问:

(1)在上述给定的速率要求下,该飞机需要模拟何种运动,方可在一定范围内任意选择失重时间的长短?试定量讨论影响失重时间长短的因素.

(2)飞机模拟这种运动时,可选择的失重状态的时间范围是多少?

**【分析】** 当飞机只在重力作用下做加速运动时,座舱内的试验者便处于完全失重状态.

**【解】** (1)当飞机做加速度大小为重力加速度  $g$  且方向竖直向下的运动时,座舱内的试验者便处于完全失重状态.这种运动可以是飞机模拟无阻力下的自由落体运动或竖直上抛运动,也可以是斜抛运动.进入试验的速率和退出试验的速率确定后,当飞机模拟前两种运动时,失重时间的长短都是一定的且不可选择的;当飞



机模拟无阻力作用下的斜抛运动时,失重时间的长短与抛射角有关,可在一定范围内进行选择。

下面考察飞机模拟无阻力作用下的斜抛运动. 设开始试验时飞机的初速度的大小为  $v_1$ , 方向与水平方向呈  $\theta$  角, 起始位置为  $A$  点, 经做抛物线运动在  $B$  点退出试验, 如图 1-1-1 所示. 以  $t$  表示试验经历的时间, 在退出试验时的速率为  $v_2$ , 则有

$$v_{2x} = v_1 \cos\theta, v_{2y} = v_1 \sin\theta - gt. \quad (1)$$

$$\text{而} \quad v_2^2 = v_{2x}^2 + v_{2y}^2. \quad (2)$$

由式①②得

$$g^2 t^2 - 2v_1 g t \sin\theta + v_1^2 - v_2^2 = 0. \quad (3)$$

解式③得

$$t = \frac{v_1 \sin\theta + [v_1^2 \sin^2\theta + (v_2^2 - v_1^2)]^{\frac{1}{2}}}{g}. \quad (4)$$

由式④可知, 当进入试验时的飞机速度  $v_1$  和退出试验时的飞机速度  $v_2$  确定以后, 失重时间的长短可通过  $\theta$  来调节。

(2) 当  $\theta = 90^\circ$  时, 失重时间最长, 由式④可求得最长失重时间

$$t_{\max} = 150 \text{ s}. \quad (5)$$

当  $\theta = -90^\circ$  时, 失重时间最短, 由式④可求得最短失重时间

$$t_{\min} = 50 \text{ s}.$$

因此, 失重时间的调节范围在 50 s ~ 150 s 之间。

**题 3** (2007 · 全国物理竞赛题) 图 1-1-2 中所示为用三根刚性细杆  $AB$ 、 $BC$ 、 $CD$  连成的平面连杆结构图.  $AB$  杆和  $CD$  杆可分别绕过  $A$ 、 $D$  的垂直于纸面的固定轴转动,  $A$ 、 $D$  两点位于同一水平线上.  $BC$  杆的两端分别与  $AB$  杆和  $CD$  杆相连, 可绕连接处转动 (类似铰链). 当  $AB$  杆绕  $A$  轴以恒定的角速度  $\omega$  转到图中所示的位置时,  $AB$  杆处于竖直位置,  $BC$  杆与  $CD$  杆都与水平方向成  $45^\circ$  角. 已知  $AB$  杆的长度为  $l$ ,  $BC$  杆和  $CD$  杆的长度由图给定. 求此时  $C$  点加速度的大小  $a_C$  和方向 (用与  $CD$  杆之间的夹角表示).

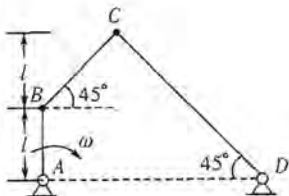


图 1-1-2

**【分析】** 这是一道关于圆周运动的问题, 解题时要注意速度、加速度的合成。

**【解】** 解法一: 因为  $B$  点绕  $A$  轴做圆周运动, 其速度的大小为

$$v_B = \omega l. \quad (1)$$

$B$  点的向心加速度的大小为

$$a_B = \omega^2 l. \quad (2)$$

因为是匀角速度转动,  $B$  点的切向加速度为零, 故  $a_B$  也是  $B$  点的加速度, 其方向沿  $BA$  方向. 因为  $C$  点绕  $D$  轴做圆周运动, 其速度的大小用  $v_C$  表示, 方向垂直于

杆  $CD$ ; 在考查的时刻, 由图 1-1-3 可知, 其方向沿杆  $BC$  方向. 因  $BC$  是刚性杆, 所以  $B$  和  $C$  点沿  $BC$  方向的速度必相等, 故有

$$v_C = v_B \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \omega l. \quad (3)$$

此时杆  $CD$  绕  $D$  轴按顺时针方向转动,  $C$  点的法向加速度

$$a_{Cn} = \frac{v_C^2}{CD}. \quad (4)$$

由图可知,  $\overline{CD} = 2\sqrt{2}l$ . 由③④两式得

$$a_{Cn} = \frac{\sqrt{2}}{8} \omega^2 l. \quad (5)$$

其方向沿  $CD$  方向.

下面来分析  $C$  点沿垂直于杆  $CD$  方向的加速度, 即切向加速度  $a_{Ct}$ . 因为  $BC$  是刚性杆, 所以  $C$  点相对  $B$  点的运动只能是绕  $B$  的转动,  $C$  点相对  $B$  点的速度方向必垂直于杆  $BC$ . 令  $v_{CB}$  表示其速度的大小, 根据速度合成公式, 有

$$v_{CB} = v_C - v_B.$$

$$\text{由几何关系得 } v_{CB} = \sqrt{v_B^2 - v_C^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} v_B = \frac{\sqrt{2}}{2} \omega l. \quad (6)$$

由于  $C$  点绕  $B$  点做圆周运动, 相对  $B$  点的向心加速度

$$a_{CB} = \frac{v_{CB}^2}{CB}. \quad (7)$$

$$\text{因为 } \overline{CB} = \sqrt{2}l, \text{ 故有 } a_{CB} = \frac{\sqrt{2}}{4} \omega^2 l. \quad (8)$$

其方向垂直杆  $CD$ .

由②式及图 1-1-3 可知,  $B$  点的加速度沿  $BC$  杆的分量为

$$(a_B)_{BC} = a_B \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \omega^2 l. \quad (9)$$

所以  $C$  点相对  $A$  点(或  $D$  轴)的加速度沿垂直于杆  $CD$  方向的分量

$$a_{Ct} = a_{CB} + (a_B)_{BC} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \omega^2 l. \quad (10)$$

$C$  点的总加速度为  $C$  点绕  $D$  轴做圆周运动的法向加速度  $a_{Cn}$  与切向加速度  $a_{Ct}$  的合加速度, 即

$$a_C = \sqrt{a_{Cn}^2 + a_{Ct}^2} = \frac{\sqrt{74}}{8} \omega^2 l. \quad (11)$$

$a_C$  的方向与杆  $CD$  间的夹角

$$\gamma = \arctan \frac{a_{Ct}}{a_{Cn}} = \arctan 6 = 80.54^\circ. \quad (12)$$

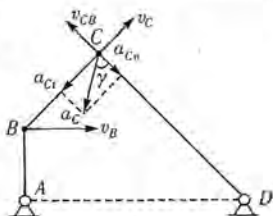


图 1-1-3



解法二:通过微商求C点加速度.以固定点A为原点作一直角坐标系 $Axy$ , $Ax$ 轴与 $AD$ 重合, $Ay$ 轴与 $AD$ 垂直.任意时刻 $t$ ,连杆的位形如图1-1-4所示.此时,各杆的位置分别用 $\theta$ 、 $\varphi$ 和 $\alpha$ 表示,且已知 $\overline{AB}=l$ , $\overline{BC}=\sqrt{2}l$ , $\overline{CD}=2\sqrt{2}l$ , $\overline{AD}=3l$ , $\frac{d\theta}{dt}=-\omega$ .C点坐标表示为

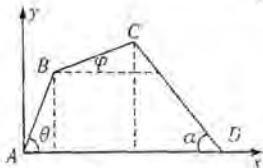


图 1-1-4

$$x_C = l \cos \theta + \sqrt{2} l \cos \varphi, \quad (1)$$

$$y_C = l \sin \theta + \sqrt{2} l \sin \varphi. \quad (2)$$

将①②两式分别对时间 $t$ 求一阶微商,得

$$\frac{dx_C}{dt} = -l \left( \sin \theta \frac{d\theta}{dt} + \sqrt{2} \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} \right), \quad (3)$$

$$\frac{dy_C}{dt} = l \left( \cos \theta \frac{d\theta}{dt} + \sqrt{2} \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} \right). \quad (4)$$

把③④两式分别对时间 $t$ 求一阶微商,得

$$\frac{d^2 x_C}{dt^2} = -l \left[ \cos \theta \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \sin \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \sqrt{2} \cos \varphi \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \sqrt{2} \sin \varphi \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right]. \quad (5)$$

$$\frac{d^2 y_C}{dt^2} = l \left[ -\sin \theta \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \cos \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} - \sqrt{2} \sin \varphi \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \sqrt{2} \cos \varphi \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right]. \quad (6)$$

根据几何关系,有

$$\begin{aligned} \overline{CD} \sin \alpha &= \overline{AB} \sin \theta + \overline{BC} \sin \varphi, \\ \overline{CD} \cos \alpha + \overline{AB} \cos \theta + \overline{BC} \cos \varphi &= 3l. \end{aligned}$$

即

$$2\sqrt{2} \sin \alpha = \sin \theta + \sqrt{2} \sin \varphi. \quad (7)$$

$$2\sqrt{2} \cos \alpha = 3 - \cos \theta - \sqrt{2} \cos \varphi. \quad (8)$$

将⑦⑧两式平方后相加且化简,得

$$\sqrt{2} \sin \theta \sin \varphi + \sqrt{2} \cos \theta \cos \varphi - 3 \cos \theta - 3\sqrt{2} \cos \varphi - 2 = 0. \quad (9)$$

把⑨式对时间 $t$ 求一阶微商,并代入 $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{d\theta}{dt} = -\omega$ ,得

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} \omega. \quad (10)$$

把⑩式对时间 $t$ 求二阶微商,并代入上述数据,得

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{3}{8} \omega^2. \quad (11)$$

将⑩⑪两式以及 $\theta$ 、 $\varphi$ 、 $\frac{d\theta}{dt}$ 的数值代入⑤⑥两式,得

$$\frac{d^2 x_C}{dt^2} = -\frac{5}{8} l \omega^2, \quad \frac{d^2 y_C}{dt^2} = -\frac{7}{8} l \omega^2.$$

所以

$$a_C = \sqrt{\left( \frac{d^2 x_C}{dt^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2 y_C}{dt^2} \right)^2} = \frac{\sqrt{74}}{8} l \omega^2. \quad (12)$$

由图 1-1-4 知,  $a_C$  与  $x$  轴的夹角为  $\beta$ , 有

$$\tan\beta = \frac{\frac{d^2 y_C}{dt^2}}{\frac{d^2 x_C}{dt^2}} = 1.4. \quad (13)$$

所以求得  $\beta = \arctan 1.4 = 54.46^\circ$ .

这个夹角在第三象限, 即  $\beta = 234.46^\circ$ , 故  $a_C$  与  $CD$  的夹角

$$\gamma = 80.54^\circ. \quad (14)$$

**题 4** (2006 · 全国物理复赛题) 有一竖直放置、两端封闭的长玻璃管, 管内为真空. 管内有一小球自某处自由下落(初速度为零), 落到玻璃管底部时与底部发生弹性碰撞, 以后小球将在玻璃管内不停地上下跳动. 现用支架固定一照相机, 用以拍摄小球在空间的位置, 每隔一相等的确定的时间间隔  $T$  拍摄一张照片, 照相机的曝光时间极短, 可忽略不计. 从所拍到的照片发现, 每张照片上小球都处于同一位置. 求小球开始下落处离玻璃管底部距离(用  $H$  表示)的可能值以及与各  $H$  值相应的照片中, 小球位置离玻璃管底部距离的可能值.

**【分析】** 小球在管内做自由落体与竖直上抛的往复运动, 它的运动具有对称性. 据此, 我们可求出有关结果.

**【解】** 小球沿竖直线上下运动时, 其离开玻璃管底部的距离  $h$  随时间  $t$  变化的关系如图 1-1-5 所示. 设照片拍摄到的小球位置用  $A$  表示,  $A$  离玻璃管底部的距离为  $h_A$ , 小球开始下落处到玻璃管底部的距离为  $H$ . 小球可以在下落的过程中经过  $A$  点, 也可在上升的过程中经过  $A$  点. 现以  $T$  表示小球从最高点落到玻璃管底部所需的时间(也就是从玻璃管底部反跳后上升到

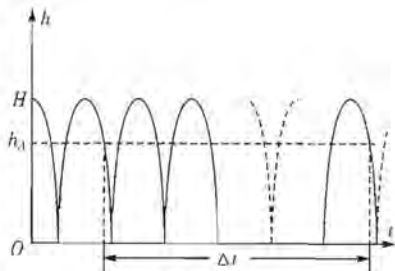


图 1-1-5

最高点所需的时间),  $T_1$  表示小球从最高点下落至  $A$  点所需的时间(也就是从  $A$  点上升至最高点所需的时间),  $T_2$  表示小球从  $A$  点下落至玻璃管底部所需的时间(也就是从玻璃管底部反跳后上升至  $A$  点所需的时间). 显然,  $T_1 + T_2 = T$ . 根据题意, 在时间间隔  $\Delta t$  的起始时刻和终了时刻小球都在  $A$  点, 若用  $n$  表示时间间隔  $\Delta t$  (包括起始时刻和终了时刻)内小球位于  $A$  点的次数( $n \geq 2$ ), 则当  $n$  为奇数时有

$$\Delta t = (n-1)T_1 + (n-1)T_2 = (n-1)T. \quad (n=3, 5, 7, \dots) \quad (1)$$

(例如, 由图 1-1-5, 若  $n=5$ , 第一张照片中小球的位置为 1, 第二张照片中小球的位置为 5, 第三张照片中小球的位置为 9, 则有  $\Delta t=4T$ ) 在①式中  $T_1$  可以取大于零小于  $T$  的任意值, 即

$$T_2 = T - T_1. \quad (2)$$

当  $n$  为偶数时有

$$\Delta t = nT_2 + (n-2)T_1 = nT_1 + (n-2)T_2. \quad (n=2, 4, 6, \dots) \quad (3)$$



(例如,由图 1-1-5,若  $n=6$ ,第一张照片中小球的位置为 1,第二张照片中小球的位置为 6,第三张照片小球的位置为 11,则有  $\Delta t=6T_2+4T_1$  和  $\Delta t=6T_1+4T_2$ ) 由③式得

$$T_1 = T_2 = \frac{1}{2} T, \quad (4)$$

由①③④式知,不论  $n$  是奇数还是偶数,都有

$$\Delta t = (n-1)T. \quad (n=2,3,4,\dots) \quad (5)$$

开始下落处到玻璃管底部的距离的可能值为

$$H = \frac{1}{2} g T^2 = \frac{1}{2} g \left( \frac{\Delta t}{n-1} \right)^2. \quad (n=2,3,4,\dots) \quad (6)$$

A 点到玻璃管底部的距离

$$h_A = H - \frac{1}{2} g T_1^2.$$

当  $n$  为奇数时,  $T_1$  可取大于零和小于  $T$  之间的任意值,故有

$$0 < h_A < \frac{1}{2} g \left( \frac{\Delta t}{n-1} \right)^2. \quad (n=3,5,7,\dots) \quad (7)$$

可见  $h_A$  的可能值为符合⑦式的任意值.

当  $n$  为偶数时,由④⑤⑥式得  $h_A$  的可能值为

$$h_A = \frac{3}{8} g \left( \frac{\Delta t}{n-1} \right)^2. \quad (n=2,4,6,\dots) \quad (8)$$

**题 5** (2005·全国物理复赛题) 两辆汽车 A 与 B,在  $t=0$  时从十字路口  $O$  处分别以速度  $v_A$  和  $v_B$  沿水平的、相互正交的公路匀速前进,如图 1-1-6 所示.汽车 A 持续地以固定的频率  $\nu_0$  鸣笛,求在任意时刻  $t$  汽车 B 的司机所检测到的笛声频率.已知声速为  $u$ ,且当然有  $u > v_A, v_B$ .

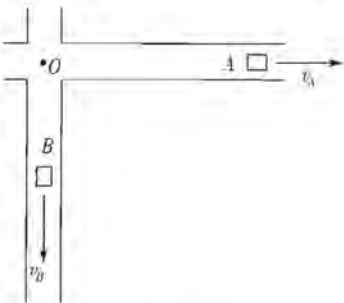


图 1-1-6

**【分析】** 此题实质为匀速运动位移问题,关键是正确运用 A、B 两车位置的几何关系.

**【解】** 如图 1-1-7 所示,  $t$  时刻汽车 B 位于  $B(t)$  处,距  $O$  点的距离为  $v_B t$ . 此时传播到汽车 B 的笛声不是  $t$  时刻而是较早时刻  $t_1$  由 A 车发出的. 汽车 A 发出此笛声时位于  $A(t_1)$  处,距  $O$  点的距离为  $v_A t_1$ . 此笛声由发出点到接收点 ( $t$  时刻 B 车所在点) 所传播的路程为  $u(t-t_1)$ , 由几何关系可知

$$(v_B t)^2 + (v_A t_1)^2 = [u(t-t_1)]^2. \quad (1)$$

$$\text{即} \quad (u^2 - v_A^2) t_1^2 - 2u^2 t t_1 + (u^2 - v_B^2) t^2 = 0.$$

这是以  $t_1$  为变量的一元二次方程,其解为

$$t_1 = \left( \frac{u^2 \pm \sqrt{u^2 (v_A^2 + v_B^2) - v_A^2 v_B^2}}{u^2 - v_A^2} \right) t.$$



由于  $u^2 > u^2 - v_A^2$ , 但  $t_1 < t$ , 所以上式中只能取减号

$$t_1 = \frac{u^2 - \sqrt{u^2(v_A^2 + v_B^2) - v_A^2 v_B^2}}{u^2 - v_A^2} t. \quad (2)$$

由②式可知汽车 A 在时刻  $t_1$  发出的声波的一个确定相位的波面将在时刻  $t$  传到汽车 B 处, 而  $t_1$

与  $t$  成正比. 经过时间  $\frac{1}{v_0}$ , 在时刻  $(t_1 + \frac{1}{v_0})$  汽车 A 发出的同样相位的波面应在时刻  $t'$  传到汽车 B 处, 由②式有

$$t_1 + \frac{1}{v_0} = \frac{u^2 - \sqrt{u^2(v_A^2 + v_B^2) - v_A^2 v_B^2}}{u^2 - v_A^2} t'. \quad (3)$$

$(t' - t)$  就是汽车 B 接收到的声波的相位相同的两个波面所经历的时间, 即汽车 B 接收到的笛声的频率

$$\nu = \frac{1}{t' - t}. \quad (4)$$

由②③④式得 
$$\nu = \frac{u^2 - \sqrt{u^2(v_A^2 + v_B^2) - v_A^2 v_B^2}}{u^2 - v_A^2} v_0.$$

**题 6** (2003·全国物理竞赛题) 如图 1-1-8 所示, 将一铁饼状小物块在高地面高为  $h$  处水平方向以初速  $v_0$  抛出. 已知物块碰地弹起时沿竖直方向的分速度的大小与碰前沿竖直方向的分速度大小之比为  $e$  ( $e < 1$ ). 又知沿水平方向物块与地面之间的动摩擦因数为  $\mu$  ( $\mu \neq 0$ ), 每次碰撞过程的时间都非常短, 而且都是“饼面”着地, 求物块沿水平方向运动的最远距离.

**【分析】** 这是一道抛体运动问题, 并且是连续多次的抛体运动问题, 由于存在能量的损失, 经有限多次的运动后将停止下来. 我们必须运用对抛体运动的分析及数学的归纳方可解出结果.

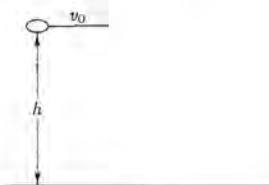


图 1-1-8

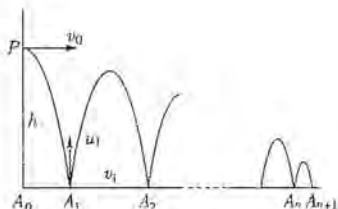


图 1-1-9

**【解】** 如图 1-1-9 所示, 设物块在  $A_1$  点第一次与地面碰撞, 碰撞前水平速度仍为  $v_0$ , 竖直速度为

$$u_0 = \sqrt{2gh}. \quad (1)$$

碰撞后物块的竖直速度变为  $u_1$ , 根据题意, 有

$$u_1 = eu_0. \quad (2)$$

设物块的质量为  $m$ , 碰撞时间为  $\Delta t$ , 因为碰撞时间极短, 物块与地面间沿竖直



方向的作用力比重力大得多,可忽略重力的作用.这样,物块对地面的正压力为

$$N_1 = \frac{mu_0 + mu_1}{\Delta t}. \quad (3)$$

水平方向动量的变化是水平摩擦力的冲量作用的结果,设水平方向速度变为  $v_1$ ,则有

$$mv_1 - mv_0 = -\mu N_1 \Delta t. \quad (4)$$

由以上各式得 
$$v_1 = v_0 - (1+e)\mu u_0. \quad (5)$$

同理,在落地点  $A_2, A_3, \dots, A_n$  其碰撞后的竖直速度分别为

$$\begin{aligned} u_2 &= e^2 u_0, \\ u_3 &= e^3 u_0, \\ &\dots \\ u_n &= e^n u_0. \end{aligned} \quad (6)$$

其水平速度分别为 
$$v_2 = v_0 - (1+e)\mu(1+e)u_0,$$

$$v_3 = v_0 - (1+e)\mu(1+e+e^2)u_0,$$

...

$$v_n = v_0 - (1+e)\mu(1+e+e^2+\dots+e^{n-1})u_0. \quad (7)$$

由式⑥可知,只有当碰撞次数  $n \rightarrow \infty$ ,碰地后竖直方向的分速度  $u_n$  才趋向于零.但物块对地面的正压力的最小值不小于  $mg$ .地面作用于物块的摩擦力的最小值不小于  $\mu mg$ .因此,物块沿水平方向的分速度一定经历有限次碰撞后才变为零,且不会反向.

设经过  $n=n_0$  次碰撞,物块沿水平方向的分速度已经足够小,再经过一次碰撞,即在  $n=n_0+1$  次碰撞结束时,水平方向的分速度恰好变为零.因  $v_{n_0+1}=0$ ,由式⑦得

$$v_0 - (1+e)\mu(1+e+e^2+\dots+e^{n_0})u_0 = 0.$$

$$v_0 - \frac{(1+e)\mu(1-e^{n_0+1})u_0}{1-e} = 0.$$

$$e^{n_0+1} = 1 - \frac{(1-e)v_0}{(1+e)\mu u_0}.$$

两边取对数 
$$n_0 + 1 = \frac{1}{\lg e} \lg \left[ 1 - \frac{(1-e)v_0}{(1+e)\mu u_0} \right]. \quad (8)$$

令 
$$B = \frac{1}{\lg e} \lg \left[ 1 - \frac{(1-e)v_0}{(1+e)\mu u_0} \right]. \quad (9)$$

若  $B$  恰为整数,这表示这次碰撞中,经过整个碰撞时间  $\Delta t$ ,水平速度变为零,则碰撞次数

$$n_0 + 1 = B.$$

有 
$$n_0 = B - 1. \quad (10)$$

若  $B$  不是整数,此种情况对应于  $n=n_0+1$  次碰撞结束前,即在小于碰撞时间内,水平速度变为零.则碰撞次数

$$n_0 + 1 = [B] + 1.$$



$$\text{有} \quad n_0 = [B]. \quad (11)$$

$[B]$ 表示  $B$  的整数部分.

由于经过  $n_0 + 1$  次碰撞,物块沿水平方向的分速度已为零,但竖直方向的分速度尚未为零,故物块将在  $A_{n_0+1}$  处做上下跳跃,直到  $e^n u_0 \rightarrow 0$ ,最后停止在  $A_{n_0+1}$  处.物块运动的最远水平距离  $s = A_0 A_{n_0+1}$ .下面分别计算每次跳跃的距离.

$$A_0 A_1 = \frac{u_0}{g} v_0. \quad (12)$$

$$A_1 A_2 = \frac{2u_1}{g} v_1 = \frac{2eu_0 v_0}{g} - \frac{2eu_0^2}{g} (1+e)\mu,$$

$$A_2 A_3 = \frac{2e^2 u_0 v_0}{g} - \frac{2e^2 u_0^2}{g} (1+e)\mu(1+e),$$

...

$$A_{n_0} A_{n_0+1} = \frac{2e^{n_0} u_0 v_0}{g} - \frac{2e^{n_0} u_0^2}{g} (1+e)\mu(1+e+e^2+\dots+e^{n_0-1}). \quad (13)$$

所求距离为上述所有量的总和,为

$$s = \frac{u_0}{g} v_0 + \frac{2u_0 v_0}{g} (e+e^2+\dots+e^{n_0}) - \frac{2u_0^2}{g} (1+e)\mu [e+e^2(1+e)+e^3(1+e+e^2)+\dots+e^{n_0}(1+e+e^2+\dots+e^{n_0-1})]. \quad (14)$$

分别求级数的和

$$e+e^2+e^3+\dots+e^{n_0} = e \frac{1-e^{n_0}}{1-e}. \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & e+e^2(1+e)+e^3(1+e+e^2)+\dots+e^{n_0}(1+e+e^2+\dots+e^{n_0-1}) \\ &= e+e^2 \frac{1-e^2}{1-e} + e^3 \frac{1-e^3}{1-e} + \dots + e^{n_0} \frac{1-e^{n_0}}{1-e} \\ &= \frac{1}{1-e} [e(1-e)+e^2(1-e^2)+e^3(1-e^3)+\dots+e^{n_0}(1-e^{n_0})] \\ &= \frac{1}{1-e} \left( \frac{e-e^{n_0+1}-e^{n_0+2}+e^{2n_0+2}}{1-e^2} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

将以上两个关系和  $u_0 = \sqrt{2gh}$  代入式(14),得

$$s = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \left( 1 + 2e \frac{1-e^{n_0}}{1-e} \right) - \frac{4e\mu h}{(1-e)^2} (1-e^{n_0})(1-e^{n_0+1}), \quad (17)$$

式中  $n_0$  由式(16)或式(15)决定.

**题7** (2008·全国物理竞赛题) 足球比赛,一攻方队员在图 1-1-10 中所示的  $A$  处沿  $Ax$  方向传球,球在草地上以速度  $v$  匀速滚动,守方有一队员在图中  $B$  处,以  $d$  表示  $A, B$  间的距离,以  $\theta$  表示  $AB$  与  $Ax$  之间的夹角,已知  $\theta < 90^\circ$ . 设在球离开  $A$  处的同时,位于  $B$  处的守方队员开始沿一直线在匀速运动中去抢球,以  $v_0$  表示他的速率.在不考虑场地边界限制的条件下,求解下列问题(要求用题中给出的有关参量间的关系式表示所求得的结果):

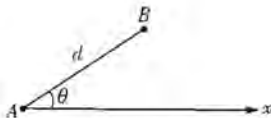


图 1-1-10



1. 求出守方队员可以抢到球的必要条件.

2. 如果攻方有一接球队员处在  $Ax$  线上等球, 以  $l_r$  表示他到  $A$  点的距离, 求出球不被原在  $B$  处的守方队员抢断的条件.

3. 如果攻方有一接球队员处在  $Ax$  线上, 以  $L$  表示他离开  $A$  点的距离, 在球离开  $A$  处的同时, 他开始匀速跑动去接球, 以  $v_r$  表示其速率, 求在这种情况下球不被原在  $B$  处的守方队员抢断的条件.

**【分析】** 解答此题的关键是以运动学的知识为基础, 结合几何图形的三角关系, 用数学的不等式进行讨论.

**【解】** 1. 解法一: 设守方队员经过时间  $t$  在  $Ax$  上的  $C$  点抢到球, 用  $l$  表示  $A$  与  $C$  之间的距离,  $l_p$  表示  $B$  与  $C$  之间的距离(如图 1-1-11 所示), 则有

$$l = v_r t, l_p = v_p t. \quad (1)$$

$$\text{和} \quad l_p^2 = d^2 + l^2 - 2dl \cos \theta. \quad (2)$$

解式①②可得

$$l = \frac{d}{1 - \left(\frac{v_p}{v_r}\right)^2} \left\{ \cos \theta \pm \left[ \left(\frac{v_p}{v_r}\right)^2 - \sin^2 \theta \right]^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (3)$$

由式③可知, 球被抢到的必要条件是该式有实数解, 即

$$v_p \geq v_r \sin \theta. \quad (4)$$

解法二: 设  $BA$  与  $BC$  的夹角为  $\varphi$  (图 1-1-11), 按正弦定理有

$$\frac{l_p}{\sin \theta} = \frac{l}{\sin \varphi}.$$

利用式①有

$$\frac{v_p}{v_r} = \frac{\sin \theta}{\sin \varphi}.$$

从  $\sin \varphi \leq 1$  可得必要条件④.

2. 用  $l_{\min}$  表示守方队员能抢断球的地方与  $A$  点间的最小距离. 由式③知

$$l_{\min} = \frac{d}{1 - \left(\frac{v_p}{v_r}\right)^2} \left\{ \cos \theta \pm \left[ \left(\frac{v_p}{v_r}\right)^2 - \sin^2 \theta \right]^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (5)$$

若攻方接球队员到  $A$  点的距离小于  $l_{\min}$ , 则他将先控制球而不被守方队员抢断. 故球不被抢断的条件是

$$l_r < l_{\min}. \quad (6)$$

由⑤⑥两式得

$$l_r < \frac{d}{1 - \left(\frac{v_p}{v_r}\right)^2} \left\{ \cos \theta \pm \left[ \left(\frac{v_p}{v_r}\right)^2 - \sin^2 \theta \right]^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (7)$$

由式⑦可知, 若位于  $Ax$  轴上等球的攻方球员到  $A$  点的距离  $l_r$  满足该式, 则球不被原位于  $B$  处的守方球员抢断.

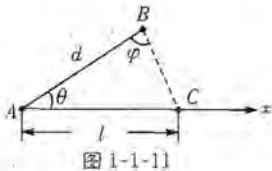


图 1-1-11

3. 解法一:如果在位于  $B$  处的守方队员到达  $Ax$  上距离  $A$  点  $l_{\min}$  的  $C_1$  点之前,攻方接球队员能够到达距  $A$  点小于  $l_{\min}$  处,球就不会被原位于  $B$  处的守方队员抢断(如图 1-1-12 所示).若  $L \leq l_{\min}$  就相当于第 2 小题.若  $L > l_{\min}$ ,设攻方接球队员位于  $Ax$  方向上某点  $E$  处,则他跑到  $C_1$  点所需时间

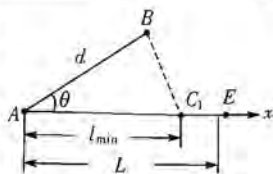


图 1-1-12

$$t_{rm} = \frac{L - l_{\min}}{v_r} \quad (8)$$

守方队员到达  $C_1$  处所需时间  $t_{pm} = \frac{(d^2 + l_{\min}^2 - 2dl_{\min}\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}{v_p}$

球不被守方抢断的条件是  $t_{rm} < t_{pm}$  (9)

即  $L < \frac{v_r}{v_p} (d^2 + l_{\min}^2 - 2dl_{\min}\cos\theta)^{\frac{1}{2}} + l_{\min}$  (10)

式中  $l_{\min}$  由式(5)给出.

解法二:守方队员到达  $C_1$  点的时间和球到达该点的时间相同,因此有

$$t_{pm} = \frac{l_{\min}}{v_p}$$

从球不被守方队员抢断的条件(9)以及式(8)可得到

$$L < \left(1 + \frac{v_r}{v_p}\right) l_{\min} \quad (11)$$

式中  $l_{\min}$  也由式(5)给出.易于证明式(11)与(10)相同.

## 第二节 静力学

**例 1** (1998·全国物理预赛题) 一个质量为  $m$ 、管口截面积为  $S$  的薄壁长玻璃管内灌满密度为  $\rho$  的水银,现把它竖直倒插在水银槽中,再慢慢向上提起,直到玻璃管口刚刚与槽中的水银面接触.这时,玻璃管内水银的高度为  $h$ .现将管的封闭端挂在天平的一个盘的挂钩上,而在天平另一个盘中放砝码,如图 1-2-1 所示.要使天平平衡,则所加砝码的质量等于\_\_\_\_\_.

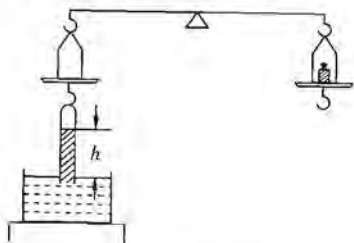


图 1-2-1



**【分析】** 为求挂钩对玻璃管的拉力,可取两种研究对象:一是玻璃管;二是玻璃管及管内水银的整体。只取玻璃管受力分析时,管的底部不计大气压的作用,管的顶部有大气压力;而取玻璃管和管内水银受力分析时,管的顶部和底部都受大气压的作用,不需考虑大气压的影响。

**【解】** 方法 1:取管及管内水银为研究对象。受力有:天平盘上挂钩的拉力  $F$ 、管和管内水银的重力  $mg + \rho gSh$ 。平衡时,  $F = mg + \rho gSh$ 。根据天平平衡原理,所加砝码质量

$$m' = \frac{F}{g} = m + \rho hS.$$

方法 2:取玻璃管为研究对象。受力有:天平盘上挂钩的拉力  $F$ 、管的重力  $mg$ 、管顶外部受到大气向下的压力  $p_0S$ 、管顶内部真空不受力。平衡时,  $F = p_0S + mg$ 。又管内水银的重力是靠底部大气压支持的,所以有  $p_0S = \rho gSh$ 。最后也能求出  $F = mg + \rho gSh$ 。

**题 2** (2008·全国物理预赛题) 磅秤由底座、载物平台  $Q$ 、杠杆系统及砝码组成,图 1-2-2 所示为其等效的在竖直平面内的截面图。 $Q$  是一块水平放置的铁板,通过两侧的竖直铁板  $HI$  和  $K$  压在  $E$ 、 $B$  处的刀口上,杠杆系统由横杆  $DEF$ 、 $ABCP$  和竖杆  $CF$ 、 $MP$  以及横梁  $MON$  组成。另有两个位于  $A$ 、 $D$  处的刀口分别压在磅秤的底座上( $Q$ 、 $K$ 、 $H$ 、 $E$ 、 $B$ 、 $A$ 、 $D$  在沿垂直于纸面的

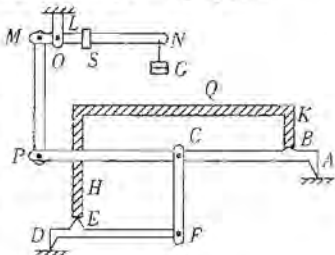


图 1-2-2

的方向都有一定的长度;图中为其断面)。C、F、M、N、O、P 都是转轴,其中 O 被位于顶部并与磅秤底座固连的支架  $OL$  吊住,所以转轴 O 不能发生移动。磅秤设计时,已做到当载物平台上不放置任何待称物品,游码 S 位于左侧零刻度处。砝码挂钩上砝码为零时,横梁  $MON$  处于水平状态;这时横杆  $DEF$ 、 $ABCP$  亦是水平的,而竖杆  $CF$ 、 $MP$  则是竖直的。当重为  $W$  的待称物品放在载物平台  $Q$  上时,用  $W_1$  表示  $B$  处刀口增加的压力,  $W_2$  表示  $E$  处刀口增加的压力,由于杠杆系统的调节,横梁  $MON$  失去平衡,偏离水平位置。适当增加砝码  $G$  或移动游码  $S$  的位置,可使横梁  $MON$  恢复平衡,回到水平位置。待称物品的重量(质量)可由砝码数值及游码的位置确定。为了保证待称物品放在载物台上不同位置时磅秤都能显示出相同的结果,在设计时,  $AB$ 、 $DE$ 、 $AC$ 、 $DF$  之间应满足怎样的关系?

**【分析】** 这是一道力矩平衡的静力学问题,特别要注意的是在  $C$ 、 $F$ 、 $P$  三个转轴处力的作用方向。

**【解】** 根据题意,通过增加砝码  $G$  和调节游码  $S$  的位置使磅秤恢复平衡时,横梁  $MON$ 、横杆  $ABCP$ 、 $DEF$  以及载物台  $Q$  都是水平的,竖杆  $MP$ 、 $CF$  都是竖直的。 $B$ 、 $E$  处刀口增加的压力分别为  $W_1$  和  $W_2$ ,它们与待称物品的重量  $W$  的关系为

$$W = W_1 + W_2. \quad \textcircled{1}$$

$W_1$  与  $W_2$  之和是确定的,但两者大小与物品放置在载物台上的位置有关。对

于横杆  $DEF$ , 它在  $E$  点受到向下的作用力(为了叙述简便, 下面所说的“作用力”都是指载物后增加的作用力)的大小  $W_2$ . 设在  $F$  点受到向上作用力的大小为  $W_2'$ , 平衡时有

$$W_2 \cdot \overline{DE} = W_2' \cdot \overline{DF}. \quad (2)$$

对横杆  $ABCP$ , 在  $B$  点受到向下作用力的大小为  $W_1$ , 在  $C$  点受到向下的作用力的大小为  $W_2'$ . 设在  $P$  点受到向上的作用力的大小为  $W_3$ , 平衡时有

$$W_3 \cdot \overline{AP} = W_1 \cdot \overline{AB} + W_2' \cdot \overline{AC}. \quad (3)$$

由①~③三式得

$$W_3 \cdot \overline{AP} = W \cdot \overline{AC} \cdot \frac{\overline{DE}}{\overline{DF}} + W_1 \left( \overline{AB} - \overline{AC} \cdot \frac{\overline{DE}}{\overline{DF}} \right). \quad (4)$$

要使重物在平台上的位置不影响  $W_3$  的大小, 就必须求  $W_3$  与  $W_1$  无关, 即有

$$\overline{AB} - \overline{AC} \cdot \frac{\overline{DE}}{\overline{DF}} = 0. \quad (5)$$

也就是说,  $\overline{AB}$ 、 $\overline{DE}$ 、 $\overline{AC}$ 、 $\overline{DF}$  应满足的关系为

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{DF}}. \quad (6)$$

**题 3** (2007·全国物理预赛题) 如图 1-2-3 所示, 有一固定的、半径为  $a$ 、内壁光滑的半球形碗(碗口处于水平位置),  $O$  为球心. 碗内搁置一质量为  $m$ 、边长为  $a$  的等边三角形均匀薄板  $ABC$ . 板的顶点  $A$  位于碗内最低点, 碗的最低点处对顶点  $A$  有某种约束使  $A$  点不能滑动(板只能绕  $A$  点转动).

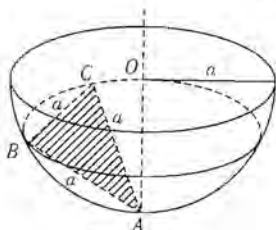


图 1-2-3

(1) 当三角形薄板达到平衡时, 求出碗对顶点  $A$ 、 $B$ 、 $C$  的作用力的大小各为多少?

(2) 当板处于上述平衡状态时, 若解除对  $A$  点的约束, 让它在碗的内表面上从静止开始自由滑动, 求此后三角形薄板可能具有的最大动能.

**【分析】** 问题(1)是一个静平衡问题, 解题时注意运用对称性, 最后归结为三力平衡问题. 问题(2)是机械能守恒问题, 板的势能转化为它的动能.

**【解】** 解法一: (1) 因  $A$  点位于半球形碗的最低点, 等边三角形薄板的  $BC$  边一定沿水平方向. 作连线  $OB$  和  $OC$ , 因  $O$  点为半球形碗的球心,  $A$ 、 $B$ 、 $C$  均在球面上, 故有

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = a. \quad (1)$$

由于  $\triangle ABC$  是等边三角形, 则

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = a. \quad (2)$$

故  $OABC$  为正四面体, 如图 1-2-4 所示. 三角形薄板所受的力有:

a.  $B$ 、 $C$  处碗面对板的作用力  $N_B$  和  $N_C$ , 均垂直于

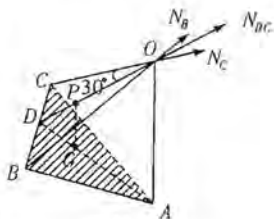


图 1-2-4



碗面,指向球心  $O$ . 又由对称性,可知

$$N_B = N_C. \quad (3)$$

它们的合力  $N_{BC}$  沿  $\angle COB$  的角平分线  $DO$  的方向,其大小为

$$N_{BC} = 2N_B \cos 30^\circ = \sqrt{3} N_B. \quad (4)$$

$DO$  的长度 
$$\overline{DO} = \overline{OB} \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} a. \quad (5)$$

b. 重力  $F_G$ , 其大小 
$$F_G = mg. \quad (6)$$

它作用于  $\triangle ABC$  的重心  $G$ .  $G$  点位于  $AD$  上,与  $A$  点的距离

$$\overline{AG} = \frac{2}{3} \overline{AD} = \frac{2}{3} \overline{OD} = \frac{\sqrt{3}}{3} a. \quad (7)$$

其方向与  $OA$  平行,该力位于  $OAD$  平面内,与  $OD$  相交. 用  $P$  点表示其交点,则

$$\overline{OP} = \overline{AG} = \frac{\sqrt{3}}{3} a. \quad (8)$$

c. 设碗面在  $A$  点作用于薄板的约束力为  $N_A$ , 薄板(或看成刚性正四面体  $OABC$ )在  $N_{BC}$ 、 $F_G$  和  $N_A$  三力作用下保持平衡,这三个力应在同一平面内且共点,即  $N_A$  应与  $F_G$  和  $N_{BC}$  都在  $OAD$  平面内且通过  $P$  点,如图 1-2-5 所示. 在  $\triangle ODA$  中,

$$\overline{OD} = \overline{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2} a, \overline{OA} = a.$$

设  $\angle DOA = \alpha$ , 则  $\angle ODA = \pi - 2\alpha$ .

在  $\triangle ADO$  中,由正弦定理有

$$\frac{a}{\sin(\pi - 2\alpha)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} a}{2 \sin \alpha}.$$

由此可得 
$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}, \sin \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}. \quad (9)$$

设  $\angle OAP = \beta$ . 在  $\triangle OPA$  中,由余弦定理得

$$\overline{AP} = \sqrt{\frac{1}{3} a^2 + a^2 - 2 \frac{\sqrt{3}}{3} a^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} = \sqrt{\frac{2}{3}} a.$$

由正弦定理得 
$$\frac{\overline{AP}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{OP}}{\sin \beta} = \frac{\overline{OA}}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

即 
$$\frac{\sqrt{\frac{2}{3}} a}{\sin \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} a}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin(\alpha + \beta)}. \quad (10)$$

$F_G$ 、 $N_{BC}$  和  $N_A$  三力平衡,它们应形成封闭的三角形,如图 1-2-6 所示. 由正弦定理得

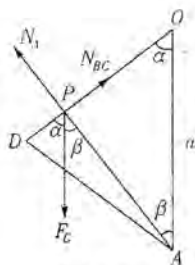


图 1-2-5

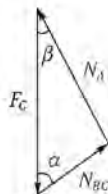


图 1-2-6

$$\frac{N_A}{\sin\alpha} = \frac{N_{BC}}{\sin\beta} = \frac{F_G}{\sin(\alpha+\beta)} \quad (11)$$

由⑩⑪和③④⑥各式得

$$N_A = \frac{mg\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\sqrt{6}}{3}mg \quad (12)$$

$$N_B = N_C = \frac{1}{\sqrt{3}}N_A = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{mg\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \quad (13)$$

$$\text{即} \quad N_B = N_C = \frac{1}{3}mg \quad (14)$$

(2)解除对A点的约束后,A、B、C三顶点将从静止开始沿碗面滑动.由对称性可知,薄板处于水平位置时重心最低,从而重力势能最小.根据机械能守恒定律,此时薄板的动能最大,薄板的重心将移至O点正下方的G'点,如图1-2-7所示.由几何关系并考虑到⑦式,G'点相对碗最低点的高度

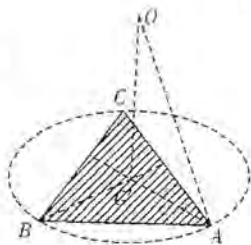


图 1-2-7

$$h' = a - \overline{OG'} = a - \sqrt{(\overline{OA})^2 - (\overline{AG'})^2} = \left(1 - \frac{\sqrt{6}}{3}\right)a \quad (15)$$

A点被约束时,薄板重心为G点.由图1-2-4可知,G点相对碗最低点的高度

$$h = \overline{AG} \cos \angle DAO = \overline{AG} \cos \alpha \quad (16)$$

$$\text{由⑦⑨两式可得} \quad h = \frac{1}{3}a \quad (17)$$

由⑮⑰两式可求得,薄板从A点约束解除到处于水平状态过程中,其重心高度减少量的最大值,从而求出重力势能减少量的最大值,最后即求得薄板具有的最大动能为

$$E_k = mg(h - h') = \frac{\sqrt{6} - 2}{3}mga \quad (18)$$

解法二:(1)当三角形薄板处于平衡状态时,根据对称性,BC必位于过B、C两点的水平圆面内,以O'点表示此水平圆面的圆心,如图1-2-8所示.碗内壁球面的球心为O点,则O'、A、O三点必位于同一条竖直线上,由于B、C点处与球面接触处都是光滑的,球面对这两点的作用力都指向球面的球心O.令 $N_B$ 和 $N_C$ 分别表示这两个力的大小,由对称性可知

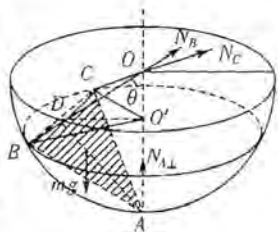


图 1-2-8

$$N_B = N_C \quad (1)$$

因球面的半径等于等边三角形的边长, $\triangle OAB$ 和 $\triangle OAC$ 都是等边三角形,故 $\angle AOB = \angle AOC = \theta = 60^\circ$ 。 (2)

把 $N_B$ 分解成沿竖直方向的分量 $N_{B\perp}$ 和位于水平面内的分量 $N_{B\parallel}$ ,则有

$$N_{B\perp} = N_B \cos \theta = N_B \cos 60^\circ = \frac{1}{2}N_B \quad (3)$$



$$N_{B//} = N_B \sin\theta = N_B \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} N_B, \quad (4)$$

同理,有

$$N_{C\perp} = N_C \cos\theta = N_C \cos 60^\circ = \frac{1}{2} N_C. \quad (5)$$

$$N_{C//} = N_C \sin\theta = N_C \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} N_C. \quad (6)$$

$N_{B//}$  和  $BO'$  平行,  $N_{C//}$  与  $CO'$  平行, 都平行于以  $O'$  点为圆心的水平圆面, 可以把这两个力移到圆心为  $O'$  点的水平圆面内, 如图 1-2-9 所示.  $N_{B//}$  和  $N_{C//}$  的合力为  $N_{//}$ .

球面底部作用于三角形薄板的力  $N_A$  也可分解成沿竖直方向的分量  $N_{A\perp}$  和位于水平面内的分量  $N_{A//}$ . 当三角形薄板达到平衡时, 有

$$N_{A//} = N_{//} = 2N_{B//} \cos\alpha. \quad (7)$$

$$mg - N_{A\perp} - N_{B\perp} - N_{C\perp} = 0. \quad (8)$$

由图 1-2-9 可知, 圆心为  $O'$  的水平圆面的半径  $R$ , 即线段  $O'B$  是等边  $\triangle OAB$  的高, 故有

$$R = a \sin\theta = a \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} a. \quad (9)$$

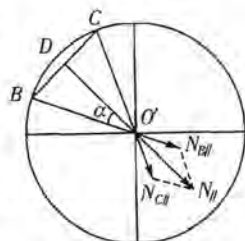


图 1-2-9

由图 1-2-9 得

$$\cos\alpha = \frac{\overline{O'D}}{R} = \frac{\sqrt{R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{R} = \frac{\sqrt{6}}{3}. \quad (10)$$

由以上有关各式, ⑦⑧两式可分别写成

$$N_{A//} = \sqrt{2} N_B. \quad (11)$$

$$N_{A\perp} = mg - N_B. \quad (12)$$

当三角形薄板达到平衡时, 作用于三角形的各力对  $BC$  边的力矩总和等于零.  $N_B$ 、 $N_C$  通过  $BC$  边, 对  $BC$  边无力矩作用; 只有  $N_{A//}$ 、 $N_{A\perp}$  和重力  $mg$  对  $BC$  边有力矩作用. 平衡时, 有

$$N_{A//} \left(\frac{a}{2}\right) + mg \left(\frac{1}{3} \overline{O'D}\right) - N_{A\perp} \overline{O'D} = 0. \quad (13)$$

由⑨⑩两式可知 
$$\overline{O'D} = \frac{\sqrt{6}}{3} R = \frac{\sqrt{2}}{2} a. \quad (14)$$

由⑬式代入⑬式, 得 
$$N_{A//} = \sqrt{2} N_{A\perp} - \frac{\sqrt{2}}{3} mg. \quad (15)$$

由⑪⑫⑮及①式得 
$$N_B = N_C = \frac{1}{3} mg. \quad (16)$$

$$N_{A//} = \frac{\sqrt{2}}{3} mg. \quad (17)$$





$$N_{A\perp} = \frac{2mg}{3} \quad (18)$$

即

$$N_A = \frac{\sqrt{6}}{3}mg \quad (19)$$

(2)当解除对A点的约束时,A、B、C三顶点将在球面内从静止开始滑动.根据对称性可知,必有一时刻薄板处于水平位置;而且此时板的重心最低,重力势能最小,薄板具有的动能最大,这一动能来自薄板减少的重力势能.

在图1-2-8中, $\triangle ADO'$ 为直角三角形,一条直角边 $DO'$ 位于水平位置,另一条直角边 $AO'$ 位于竖直位置,三角形薄板的重心 $G$ 位于斜边 $AD$ 上,离A点的距离为 $(\frac{2}{3})\overline{AD}$ ,故重心 $G$ 的高度

$$h = \frac{2}{3}\overline{AO'} = \frac{1}{3}a \quad (20)$$

当三角形薄板的三条边位于同一水平的圆面内时,三角形的重心 $G'$ 与其三边所在圆面的圆心重合,如图1-2-10所示.由有关各式得

$$\overline{BG'} = \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - (\frac{a}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

$$\overline{OG'} = \sqrt{(\overline{OB})^2 - (\overline{BG'})^2} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{3}a^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a.$$

这时,三角形薄板重心 $G'$ 的高度

$$h' = a - \frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{3 - \sqrt{6}}{3}a \quad (21)$$

$$\text{薄板的最大动能} \quad E_k = mg(h - h') = \frac{\sqrt{6} - 2}{3}mga \quad (22)$$

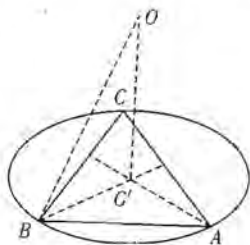


图1-2-10

**题4** (2005·全国物理预赛题) 现有一个弹簧测力计(可随便找地方悬挂),一把匀质的长为 $l$ 的有刻度、零点位于端点的直尺,一个木块及质量不计的细线.试用这些器件设计一实验装置(要求画出示意图),通过一次测量(弹簧测力计只准读一次示数),求出木块的质量和尺的质量.(已知重力加速度为 $g$ )

**【分析】** 此题可用杠杆平衡原理求解.

**【解】** 找个地方把弹簧测力计悬挂好,取一段细线做成一环,挂在弹簧测力计的挂钩上,让直尺穿在细环中,环与直尺的接触点就是直尺的悬挂点,它将尺分为长短不等的两段.用细线拴住木块挂在直尺较短的一段上,细心调节直尺悬挂点及木块悬挂点的位置,使直尺平衡在水平位置(为提高测量精度,尽量使二悬挂点相距远些),如图

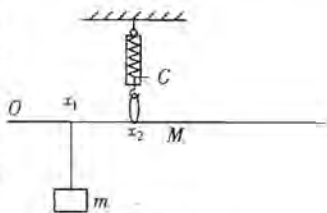


图1-2-11

1-2-11所示.设木块质量为 $m$ ,直尺质量为 $M$ .记下二悬挂点在直尺上的读数 $x_1$ 、



$x_2$ , 弹簧测力计读数  $G$ . 由平衡条件和图中所设的直尺零刻度线的位置有

$$(m+M)g=G. \quad ①$$

$$mg(x_2-x_1)=Mg\left(\frac{l}{2}-x_2\right). \quad ②$$

①②式联立可得

$$m=\frac{G(l-2x_2)}{g(l-2x_1)}, \quad ③$$

$$M=\frac{2G(x_2-x_1)}{g(l-2x_1)}. \quad ④$$

**题 5** (2002·全国物理预赛题) 2002年3月我国北方地区遭遇了近10年来最严重的沙尘暴天气, 现把沙尘上扬后的情况简化为如下情景:  $v$  为竖直向上的风速, 沙尘颗粒被扬起后悬浮在空中(不动). 这时风对沙尘的作用力相当于空气不动而沙尘以速度  $v$  竖直向下运动时所受的阻力, 此阻力可用下式表达

$$f=a\rho Av^2.$$

其中  $a$  为一系数,  $A$  为沙尘颗粒的截面积,  $\rho$  为空气密度.

1. 若沙粒的密度  $\rho_s=2.8\times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ , 沙尘颗粒为球形, 半径  $r=2.5\times 10^{-7} \text{ m}$ , 地球表面处空气密度  $\rho_0=1.25 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ,  $a=0.45$ , 试估算在地面附近, 上述  $v$  的最小值  $v_1$ .

2. 假定空气密度  $\rho$  随高度  $h$  的变化关系为  $\rho=\rho_0(1-Ch)$ , 其中  $\rho_0$  为  $h=0$  处的空气密度,  $C$  为一常量,  $C=1.18\times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ , 试估算当  $v=9.0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  时, 扬沙的最大高度. (不考虑重力加速度随高度的变化)

**【分析】** 我们可取一粒沙尘为研究对象, 建立它的受力平衡方程, 进而可求得结果.

**【解】** 1. 在地面附近, 沙尘扬起要能悬浮在空中, 则空气阻力至少应与重力平衡, 即

$$a\rho_0 Av_1^2=mg. \quad ①$$

式中  $m$  为沙尘颗粒的质量, 而

$$A=\pi r^2, \quad ②$$

$$m=\frac{4}{3}\pi r^3\rho_s. \quad ③$$

得 
$$v_1=\sqrt{\frac{4}{3}\frac{\rho_s g r}{a\rho_0}}. \quad ④$$

代入数据得 
$$v_1=4.0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}. \quad ⑤$$

2. 用  $\rho_h$ 、 $h$  分别表示  $v=9.0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  时扬沙到达的最高处的空气密度和高度, 则有

$$\rho_h=\rho_0(1-Ch). \quad ⑥$$

此时①式应为 
$$a\rho_h Av^2=mg. \quad ⑦$$

由②③⑥⑦式可解得 
$$h=\frac{1}{C}\left(1-\frac{4r\rho_s g}{3a^2 v^2 \rho_0}\right). \quad ⑧$$



代入数据得

$$h = 6.8 \times 10^3 \text{ m.}$$

⑨

**题 6** (2003·全国物理复赛题) 有一半径为  $R$  的圆柱  $A$ , 静止在水平地面上, 并与竖直墙面相接触. 现有另一质量与  $A$  相同, 半径为  $r$  的较细圆柱  $B$ , 用手扶着圆柱  $A$ , 将  $B$  放在  $A$  的上面, 并使之与墙面相接触, 如图 1-2-12 所示, 然后放手.

已知圆柱  $A$  与地面的静摩擦因数为 0.20, 两圆柱之间的静摩擦因数为 0.30. 若放手后, 两圆柱体能保持图示的平衡, 问圆柱  $B$  与墙面间的静摩擦因数和圆柱  $B$  的半径  $r$  的值各应满足什么条件?

**【分析】** 这是一个静力学问题, 首先要分析  $A$ 、 $B$  所受的力, 进而考虑它们所受力及力矩的平衡, 并要进行有关讨论.

**【解】** 放上圆柱  $B$  后, 圆柱  $B$  有向下运动的倾向, 对圆柱  $A$  和墙面有压力, 圆柱  $A$  倾向于向左移动, 对墙面没有压力. 平衡是靠各接触点的摩擦力来维持的. 现设系统处于平衡状态, 取圆柱  $A$  受地面的正压力为  $N_1$ , 水平摩擦力为  $F_1$ ; 圆柱  $B$  受墙面的正压力为  $N_2$ , 竖直摩擦力为  $F_2$ , 圆柱  $A$  受圆柱  $B$  的正压力为  $N_3$ , 切向摩擦力为  $F_3$ ; 圆柱  $B$  受圆柱  $A$  的正压力为  $N_3'$ , 切向摩擦力为  $F_3'$ , 如图 1-2-13 所示, 各力以图示方向为正方向.

已知圆柱  $A$  与地面的静摩擦因数  $\mu_1 = 0.20$ , 两圆柱间的静摩擦因数  $\mu_3 = 0.30$ . 设圆柱  $B$  与墙面的静摩擦因数为  $\mu_2$ , 过两圆柱中轴的平面与地面的夹角为  $\varphi$ .

设两圆柱的质量均为  $M$ , 为了求出  $N_1$ 、 $N_2$ 、 $N_3$  以及为保持平衡所需的  $F_1$ 、 $F_2$ 、 $F_3$  之值, 下面列出两圆柱所受力 and 力矩的平衡方程:

圆柱  $A$ :

$$Mg - N_1 + N_3 \sin\varphi + F_3 \cos\varphi = 0, \quad (1)$$

$$F_1 - N_3 \cos\varphi + F_3 \sin\varphi = 0, \quad (2)$$

$$F_1 R = F_3 R. \quad (3)$$

圆柱  $B$ :

$$Mg - F_2 - N_3' \sin\varphi - F_3' \cos\varphi = 0, \quad (4)$$

$$N_2 - N_3' \cos\varphi + F_3' \sin\varphi = 0, \quad (5)$$

$$F_3' r = F_2 r, \quad (6)$$

由于

$$F_3' = F_3.$$

所以, 得

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_3' = F. \quad (7)$$

式中  $F$  代表  $F_1$ 、 $F_2$ 、 $F_3$  和  $F_3'$  的大小. 又因为  $N_3' = N_3$ , 于是式①②④和⑤四式改写为

$$Mg - N_1 + N_3 \sin\varphi + F \cos\varphi = 0. \quad (8)$$

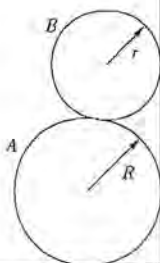


图 1-2-12

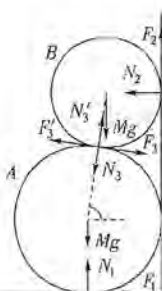


图 1-2-13



$$F - N_3 \cos\varphi + F \sin\varphi = 0, \quad (9)$$

$$Mg - F - N_3 \sin\varphi - F \cos\varphi = 0, \quad (10)$$

$$N_2 - N_3 \cos\varphi + F \sin\varphi = 0, \quad (11)$$

以上四式是  $N_1$ 、 $N_2$ 、 $N_3$  和  $F$  的联立方程,解这联立方程可得

$$N_2 = F, \quad (12)$$

$$N_3 = \frac{1 + \sin\varphi}{1 + \cos\varphi + \sin\varphi} Mg. \quad (13)$$

$$N_2 = F = \frac{\cos\varphi}{1 + \cos\varphi + \sin\varphi} Mg. \quad (14)$$

$$N_1 = \frac{2 + \cos\varphi + 2\sin\varphi}{1 + \cos\varphi + \sin\varphi} Mg. \quad (15)$$

式⑫⑬⑭和⑮是平衡时所需要的力,  $N_1$ 、 $N_2$ 、 $N_3$  没有问题,但  $F_1$ 、 $F_2$ 、 $F_3$  三个力能不能达到所需的数值  $F$ ,即式⑫⑭要受那里的静摩擦因数的制约.三个力中只要有一个不能达到所需的  $F$  值,在那一点就要发生滑动而不能保持平衡.

首先讨论圆柱  $B$  与墙面的接触点.接触点不发生滑动,要求

$$\mu_2 \geq \frac{F_2}{N_2}.$$

由式⑫,得

$$\frac{F_2}{N_2} = 1.$$

所以

$$\mu_2 \geq 1. \quad (16)$$

再讨论圆柱  $A$  与地面的接触点的情形.按题设此处的静摩擦因数为  $\mu_1 = 0.20$ .根据摩擦定律  $f \leq \mu N$ ,若上面求得的接地点维持平衡所需的水平力  $F_1$  满足  $F_1 \leq \mu_1 N_1$ ,则圆柱在地面上不滑动;若  $F_1 > \mu_1 N_1$ ,这一点将要发生滑动.

圆柱  $A$  在地面不发生滑动的条件是

$$\mu_1 \geq \frac{F_1}{N_1} = \frac{\cos\varphi}{2 + \cos\varphi + 2\sin\varphi}. \quad (17)$$

由图 1-2-13 可知

$$\cos\varphi = \frac{R-r}{R+r}. \quad (18)$$

$$\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \frac{2\sqrt{Rr}}{R+r}. \quad (19)$$

由式⑰⑱和式⑲以及  $\mu_1 = 0.20$ ,可以求得

$$r \geq \frac{1}{9} R. \quad (20)$$

即只有当  $r \geq \frac{1}{9} R$  时,圆柱  $A$  在地面上才能不滑动.

最后讨论两圆柱的接触点.接触点不发生滑动要求

$$\mu_3 \geq \frac{F_3}{N_3} = \frac{\cos\varphi}{1 + \sin\varphi}. \quad (21)$$

由式⑱⑲以及  $\mu_3 = 0.30$ ,可解得

$$r \geq \left(\frac{7}{13}\right)^2 R = 0.29R. \quad \textcircled{22}$$

显然,在平衡时, $r$ 的上限为 $R$ ,总结式⑳和式㉑,得到 $r$ 满足的条件为

$$R \geq r \geq 0.29R.$$

**题7** (2000·全国物理竞赛题) 近来一种新型的定点起重设备“平衡吊”被广泛用于几十到几百千克工件的频繁吊运,其结构的示意图如图1-2-14所示.平衡吊主要由传动、杆系、回转座和立柱组成.杆系是由ABD、DEF、BC、CE四杆铰接组成的四连杆机构,DECB在任何情况下都是一个平行四边形.杆系的A处是一水平的转轴,通过电机可控制转轴,使之固定在竖直槽内的不同位置,从而调节挂在铰接于F处吊钩上的重物的高度.杆ABD可绕转轴A在竖直平面内无摩擦地转动.杆系的C点是能在光滑的水平槽上滑动的铰链,杆BC和EC都可绕C点在竖直平面内转动.绕铰链转动的摩擦均忽略不计.下面用 $l_1$ 表示AD的长度, $l_2$ 表示AB的长度, $l_3$ 表示DF的长度, $l_4$ 表示BC的长度.

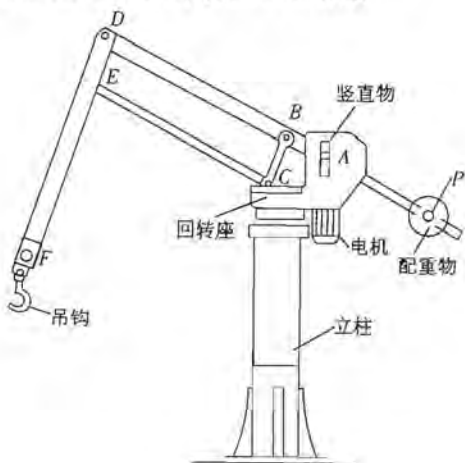


图1-2-14

(1)若将各杆都视为轻质(无自重)刚体,且无图中配重物时,试论证 $l_1$ 、 $l_2$ 、 $l_3$ 、 $l_4$ 应满足什么关系才能使平衡吊的吊钩(包括所吊的重物)位于同一水平面上的不同位置时平衡吊都能处于平衡状态.

(2)若考虑各杆的自重,为使平衡吊的吊钩(包括所吊的重物)位于同一水平面上不同位置时平衡吊都能处于平衡状态,必须在杆ABD的另一端P处加上配重物,P点距A轴的距离为 $l_p$ .设配重物受到的重力大小为 $G_p$ ,杆的AD段、DF段、BC段、CE段受到的重力的大小分别为 $G_1$ 、 $G_3$ 、 $G_4$ 和 $G_5$ ,不计杆的AP段所受的重力,问当杆长 $l_1$ 、 $l_2$ 、 $l_3$ 、 $l_4$ 和 $l_p$ 已知,且取 $l_1 = l_3$ 、 $l_2 = l_4$ 时配重的大小 $G_p$ 为多少?

**【分析】** 平衡问题似乎总是通过物体的平衡条件来解决,但本题解法二却提



供了从能量关系出发的新途径。通过系统在任意位置的重力势能的表达,找到各杆长应满足的关系。

在求解平衡问题中,怎样寻求已知与未知的关系,本题的求解有其鲜明的特色。即应用了下列基本原理:当数学关系  $Ax + By = Cx + Dy$  时则必有  $A = C, B = D$ 。

【解】 方法 1.

(1)吊钩(包括所吊重物)的重力  $G$ (作用于吊钩  $F$  处)与  $C$  点的反力  $R_C$  都沿竖直方向。设杆  $AD$  和  $DF$  与竖直方向的夹角分别为  $\alpha$  与  $\beta$ (图 1-2-15),则整个杆系对  $A$  点的力矩平衡方程为

$$G(l_1 \sin \alpha + l_3 \sin \beta) = R_C(l_2 \sin \alpha + l_4 \sin \beta). \quad (1)$$

由题意,上式对任意的  $\alpha$  和  $\beta$  都成立,故有

$$Gl_1 = R_C l_2, \quad (2)$$

$$Gl_3 = R_C l_4. \quad (3)$$

于是  $l_1$  必满足

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{l_3}{l_4}. \quad (4)$$

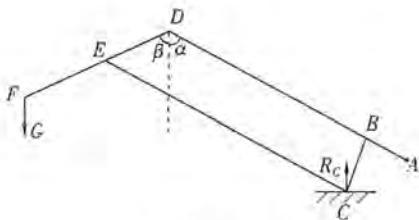


图 1-2-15

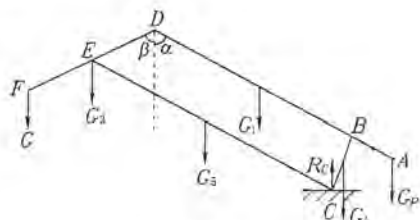


图 1-2-16

(2)设杆  $AD, DF, BC, CE$  自重分别为  $G_1, G_3, G_4, G_5$ (图 1-2-16)时,若配重大小为  $G_p$ ,整个杆系仍保持随遇平衡,则整个杆系相对  $A$  点的力矩平衡方程为

$$G(l_1 \sin \alpha + l_3 \sin \beta) + G_1 \frac{1}{2} l_1 \sin \alpha + G_3 \left( \frac{1}{2} l_3 \sin \beta + l_1 \sin \alpha \right) + G_4 \left( \frac{1}{2} l_4 \sin \beta + l_2 \sin \alpha \right) + G_5 \left( \frac{l_1 + l_2}{2} \sin \alpha + l_4 \sin \beta \right) = R_C(l_2 \sin \alpha + l_4 \sin \beta) + G_p l_p \sin \alpha. \quad (5)$$

上式必须对任意的  $\alpha$  与  $\beta$  都成立,故有

$$Gl_1 + G_1 \frac{l_1}{2} + G_3 l_1 + G_4 l_2 + G_5 \frac{l_1 + l_2}{2} = R_C l_2 + G_p l_p. \quad (6)$$

$$Gl_3 + G_3 \frac{l_3}{2} + G_4 \frac{l_4}{2} + G_5 l_4 = R_C l_4. \quad (7)$$

由⑥和⑦式中消去  $R_C$  得

$$\frac{Gl_1 + G_1 \frac{l_1}{2} + G_3 l_1 + G_4 l_2 + G_5 \frac{l_1 + l_2}{2} - G_p l_p}{l_2}$$

$$= \frac{G l_3 + G_3 \frac{l_3}{2} + G_4 \frac{l_4}{2} + G_5 l_4}{l_4} \quad (8)$$

利用条件  $l_1 = l_3, l_2 = l_4$ , 有

$$G_1 \frac{l_1}{2} + G_3 l_1 + G_4 l_2 + G_5 \frac{l_1 + l_2}{2} - G_P l_P = G_3 \frac{l_1}{2} + G_4 \frac{l_2}{2} + G_5 l_2. \quad (9)$$

由此求得

$$G_P = \frac{1}{2l_P} [(G_1 + G_3)l_1 + G_4 l_2 + G_5 (l_1 - l_2)]. \quad (10)$$

方法 2.

(1) 设固定水平转轴  $A$  到吊钩所在水平面的距离为  $h_1$ , 到水平槽的距离为  $h_2$ , 杆  $ABD$  与水平方向的夹角为  $\theta$ , 杆  $DEF$  与水平方向的夹角为  $\varphi$ , 如图 1-2-17 所示. 若以  $A$  作为重力势能的零点, 则平衡吊的杆系与吊钩 (包括重物) 构成的系统的重力势能为

$$V = -G(l_3 \sin\varphi - l_1 \sin\theta). \quad (1)$$

其中  $G$  为吊钩所受重力的大小. 当吊钩  $F$  在水平直线上移动时,  $\theta$  角和  $\varphi$  角都将改变, 因而势能  $V$  也会改变. 若  $F$  移动时平衡吊都能处于平衡状态, 则系统的势能  $V$  应不因  $\theta, \varphi$  的变化而变化.  $\theta$  和  $\varphi$  并不独立, 它们由下面的几何关系联系着, 即

$$l_2 \sin\theta + h_2 = l_4 \sin\varphi. \quad (2)$$

由①②两式消去  $\varphi$ , 得

$$V = -G \left( \frac{l_2 l_3}{l_4} - l_1 \right) \sin\theta - G h_2 \frac{l_3}{l_4}. \quad (3)$$

要求势能  $V$  不随  $\theta$  变化,  $\sin\theta$  的系数应等于零. 由于  $G$  不等于零, 故有

$$\frac{l_2 l_3}{l_4} - l_1 = 0.$$

即

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{l_3}{l_4}. \quad (4)$$

这便是杆长应满足的条件.

(2) 当各杆具有质量时, 若要求对任意重物  $G$  吊钩在任意位置  $(\theta, \varphi)$  平衡吊都能处于平衡状态, 则系统的总势能  $V$  应不随  $\theta, \varphi$  而改变. 以  $A$  点作为重力势能的零点, 则根据图 1-2-18, 各杆的势能 (包括吊钩、重物和配重) 分别为

$$V_{ABD} = -\frac{1}{2} l_1 G_1 \sin\theta - l_P G_P \sin\theta.$$

$$V_{CE} = -(h_2 - \frac{1}{2} l_5 \sin\theta) G_5 = \frac{1}{2} l_5 G_5 \sin\theta - G_5 h_2.$$

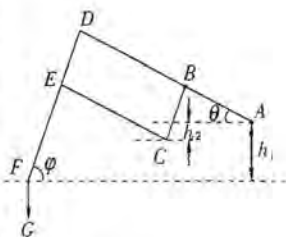


图 1-2-17

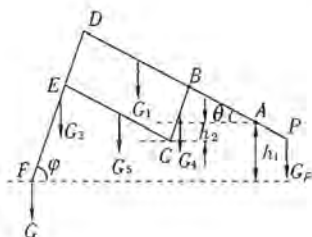


图 1-2-18



$$V_{DEF} = -(h_1 - \frac{1}{2}l_3 \sin\varphi)G_3 - (l_3 \sin\varphi - l_1 \sin\theta)G$$

$$= \frac{1}{2}l_3 G_3 \sin\varphi - (l_3 \sin\varphi - l_1 \sin\theta)G - G_3 h_1,$$

$$V_{BC} = -(h_2 - \frac{1}{2}l_4 \sin\varphi)G_4 = \frac{1}{2}l_4 G_4 \sin\varphi - G_4 h_2.$$

系统的总势能为

$$V_t = (\frac{1}{2}G_1 l_1 - G_P l_P + \frac{1}{2}G_5 l_5 + G_4 l_1) \sin\theta + (\frac{1}{2}G_3 l_3 + \frac{1}{2}G_4 l_4 - G_3 l_1) \sin\varphi - G_5 h_2 - G_3 h_1 - G_4 h_2. \quad (5)$$

因  $\theta$  与  $\varphi$  由②式联系, 联立②式与⑤式, 消去  $\varphi$  得

$$V_t = [\frac{1}{2}G_1 l_1 - G_P l_P + \frac{1}{2}G_5 l_5 + \frac{1}{2}G_3 l_3 \frac{l_2}{l_1} + \frac{1}{2}G_4 l_2 + G(l_1 - l_3 \frac{l_2}{l_1})] \cdot \sin\theta - G_4 l_3 \frac{h_2}{l_1} - \frac{1}{2}G_3 l_3 \frac{l_2}{l_1} - \frac{1}{2}G_4 h_2 - G_5 h_2 - G_3 h_1 - G_4 h_1.$$

为使  $V_t$  与  $\theta$  无关, 应有

$$\frac{1}{2}G_1 l_1 - G_P l_P + \frac{1}{2}G_5 l_5 + \frac{1}{2}G_3 l_3 \frac{l_2}{l_1} + G_4 l_2 + G(l_1 - l_3 \frac{l_2}{l_1}) = 0.$$

由④式知

$$l_1 - l_3 \frac{l_2}{l_4} = 0.$$

注意到

$$l_3 = l_1 - l_2.$$

$$\text{得} \quad G_P = \frac{1}{2l_P} [(G_1 + G_3)l_1 + G_4 l_2 + G_5(l_1 - l_2)].$$

**题 8** (1999·全国物理决赛题) 如图 1-2-19 所示, 有两根不可伸长的柔软的轻绳, 长度分别为  $l_1$  和  $l_2$ , 它们的下端在 C 点相连接并悬挂一质量为  $m$  的重物, 上端分别与质量可忽略的小圆环 A、B 相连, 圆环套在圆形水平横杆上, A、B 可在横杆上滑动, 它们与横杆间的静摩擦因数分别为  $\mu_1$  和  $\mu_2$ . 已知  $l_1$  和  $l_2$  的数值, 且  $l_1 < l_2$ . 试求  $\mu_1$  和  $\mu_2$  在各种取值情况下, 此系统处于静力平衡时两环之间的距离 AB.

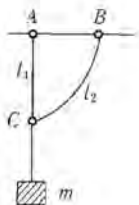


图 1-2-19

**【分析】** 引入摩擦角把平衡问题的判断转化为寻求角度之间的关系, 这是求解平衡问题的一种重要的思路. 本题解法二、三就是通过摩擦角来简化问题从而获得顺利解决问题的途径.

**【解】** 方法一

由于  $l_1$  和  $l_2$  为已知量, 只要求出 AB 的值,  $\triangle ABC$  即确定 (即 A、B、C 的相对位置确定). 现对系统平衡时 AB 应取的数值分析如下:





图 1-2-20

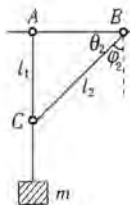


图 1-2-21

1. 已知  $l_1 < l_2$ , 则当 A、C 和重物在同一竖直线上, 系统平衡, AC 张紧, 长绳  $l_2$  则松弛 (如图 1-2-20 所示)。将 B 沿杆右移直至 BC 绳拉直 (如图 1-2-21 所示), 系统一直保持平衡, 这与  $\mu_1, \mu_2$  的取值无关。若使 B 继续右移一极小的距离  $\Delta x$ , 则绳 BC 中将出现张力, C 点右移, AC 将倾斜, 其中张力也将改变。如果  $\mu_1 = 0$ , A 环将在 AC 绳张力作用下滑动, 所以系统将失去平衡。若  $\mu_1 \neq 0$ , 设此时 BC 中张力为  $T$ , 则 B 环与杆间正压力  $N_2 = T \cos \varphi_2$ , B 环所受向左的力  $F_2 = T \sin \varphi_2$ 。如果  $F_2 > \mu_2 N_2$ , 则 B 环向左滑回原处, 系统失去平衡。由此可见, 当  $\mu_1 = 0$  或  $\mu_2 \leq \frac{F_2}{N_2} = \tan \varphi_2 =$

$\frac{\sqrt{l_2^2 - l_1^2}}{l_1} = \sqrt{\frac{l_2^2}{l_1^2} - 1}$  时, 系统的平衡位置只能是: A、C 在竖直线上,  $0 \leq AB \leq \sqrt{l_2^2 - l_1^2}$  (结论一)。

2. 当  $\mu_1 \neq 0, \mu_2 = \sqrt{\frac{l_2^2}{l_1^2} - 1}$  且  $AB > \sqrt{l_2^2 - l_1^2}$  时, 系统将如图 1-2-22 所示, A 环受力:  $N_1 = T_1 \cos \varphi_1; F_1 = T_1 \sin \varphi_1$ , 当  $F_1 > \mu_1 N_1$ , 即  $\tan \varphi_1 > \mu_1$  时 A 环将不能保持静止。同理,  $\tan \varphi_2 > \mu_2$  时, B 环将不能保持静止。A、B 两环哪个先动, 将由  $\mu_1, \mu_2$  的数值决定。图 1-2-22 中的  $\varphi_1$  与  $\varphi_2$  是互相关联的量。由正弦定律有  $\frac{l_1}{l_2} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1}$ , 当 AB 值增大时,  $\theta_1$  和  $\theta_2$  均减小,  $\varphi_2$  和  $\varphi_1$  随之增大。设 C 点与 AB 的距离为  $h$ , 由几何关系可得

$$\tan \varphi_1 = \sqrt{\frac{l_2^2}{h^2} - 1}, \tan \varphi_2 = \sqrt{\frac{l_2^2}{h^2} - 1}.$$

$$\text{设 A 滑动时, } h = h_A, \text{ 则 } \frac{l_1^2}{h_A^2} - 1 = \mu_1^2, h_A^2 = \frac{l_1^2}{1 + \mu_1^2}.$$

$$\text{设 B 滑动时, } h = h_B, \text{ 则 } \frac{l_1^2}{h_B^2} - 1 = \mu_2^2, h_B^2 = \frac{l_1^2}{1 + \mu_2^2}.$$

比较  $h_A$  和  $h_B$  的大小即可知 AB 增大 (即  $h$  减小) 时 A、B 两环谁先滑动。

(a) 若  $h_A > h_B$ , 则 A 先滑动, 即  $\frac{1 + \mu_2^2}{1 + \mu_1^2} > \frac{l_2^2}{l_1^2}$  的条件下, 当  $h = h_A$  时, A 即将滑动, 此时

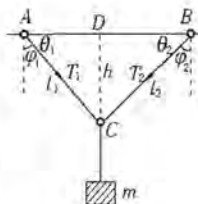


图 1-2-22



$$\theta_{1A} = \arcsin \frac{h_A}{l_1} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+\mu_1^2}},$$

$$AD = \sqrt{l_2^2 - h_A^2} = \frac{\mu_1 l_1}{\sqrt{1+\mu_1^2}},$$

$$\theta_{2A} = \arcsin \frac{h_A}{l_2} = \arcsin \frac{l_1}{l_2} \frac{1}{\sqrt{1+\mu_1^2}},$$

$$BD = \sqrt{l_2^2 - h_A^2} = \frac{\sqrt{l_2^2 + \mu_1^2 l_2^2 - l_1^2}}{\sqrt{1+\mu_1^2}},$$

$$AB = \frac{1}{\sqrt{1+\mu_1^2}} (\mu_1 l_1 + \sqrt{l_2^2 + \mu_1^2 l_2^2 - l_1^2}).$$

由此可得结论二:

在  $\mu_1 \neq 0, \frac{1+\mu_2^2}{1+\mu_1^2} > \frac{l_2^2}{l_1^2}$  的情况下,若系统保持平衡,AB 的数值一定满足下面的要求:

$$AB \leq \frac{1}{\sqrt{1+\mu_1^2}} (\mu_1 l_1 + \sqrt{l_2^2 + \mu_1^2 l_2^2 - l_1^2}).$$

(注意,此时  $\mu_2 > \sqrt{\frac{l_2^2}{l_1^2} - 1}$  的条件自然得到满足)

(b)若  $h_A < h_B$ ,则 B 先滑动,即  $\frac{1+\mu_2^2}{1+\mu_1^2} < \frac{l_2^2}{l_1^2}$  的条件下,当  $h = h_B$  时,B 即将滑动,此时

$$\theta_{1B} = \arcsin \frac{h_B}{l_1} = \arcsin \frac{l_2}{l_1} \frac{1}{\sqrt{1+\mu_2^2}},$$

$$AD = \sqrt{l_1^2 - h_B^2} = \frac{\sqrt{l_1^2 + \mu_2 l_1^2 - l_2^2}}{\sqrt{1+\mu_2^2}},$$

$$\theta_{2B} = \arcsin \frac{h_B}{l_2} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+\mu_2^2}},$$

$$BD = \sqrt{l_2^2 - h_B^2} = \frac{\mu_2 l_2}{\sqrt{1+\mu_2^2}},$$

$$AB = \frac{1}{\sqrt{1+\mu_2^2}} (\mu_2 l_2 + \sqrt{l_1^2 + \mu_2^2 l_1^2 - l_2^2}).$$

由此可得结论三:

当  $\mu_1, \mu_2$  满足下列两条件时,在  $\mu_1 \neq 0, 1+\mu_2^2 > \frac{l_2^2}{l_1^2}$  且  $\frac{1+\mu_2^2}{1+\mu_1^2} < \frac{l_2^2}{l_1^2}$  的情况下,若系统保持平衡,AB 的数值一定满足下面的要求:

$$AB \leq \frac{1}{\sqrt{1+\mu_2^2}} (\mu_2 l_2 + \sqrt{l_1^2 + \mu_2^2 l_1^2 - l_2^2}).$$

若  $\frac{1+\mu_2^2}{1+\mu_1^2} = \frac{l_2^2}{l_1^2}$ ,则  $h_A = h_B$ ,A、B 将同时开始要滑动,此时 AB 的数值为

$$AB = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\sqrt{1 + \mu_1^2}} l_1 = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\sqrt{1 + \mu_2^2}} l_2.$$

AB 的数值满足的条件为

$$AB \leq \frac{\mu_1 + \mu_2}{\sqrt{1 + \mu_1^2}} l_1.$$

此结果已包括在结论二和结论三中符号“ $\leq$ ”的等号中。

方法二

1. 平衡条件.

小环平衡条件

$$F \leq \mu N,$$

$$\mu \geq \frac{F}{N} = \frac{T \cos \theta}{T \sin \theta} = \cot \theta = \tan \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right).$$

定义  $\mu = \tan \varphi$ ,  $\varphi$  为摩擦角.

则平衡条件成为

$$\theta \geq \frac{\pi}{2} - \varphi. \quad (1)$$

2. 情况 1: 一绳松弛的情况.

设  $l_1 < l_2$ , 这时  $l_1$  垂直向下,  $0 \leq \overline{AB} < \sqrt{l_2^2 - l_1^2}$ ,  $\theta_1 = 90^\circ$ , 不论  $\mu_1, \mu_2$  为何值, 一定平衡.

3. 情况 2: 两绳均张紧的情况(图 1-2-23), 当  $\sqrt{l_2^2 - l_1^2} \leq \overline{AB} < l_1 + l_2$  时, 有

$$l_1^2 = (\overline{AB})^2 + l_2^2 - 2 \overline{AB} l_2 \cos \theta_2,$$

$$l_2^2 = (\overline{AB})^2 + l_1^2 - 2 \overline{AB} l_1 \cos \theta_1.$$

$$\begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{1}{2 \overline{AB} l_1} [(\overline{AB})^2 + l_1^2 - l_2^2], \\ \cos \theta_2 = \frac{1}{2 \overline{AB} l_2} [(\overline{AB})^2 + l_2^2 - l_1^2]. \end{cases}$$

根据①式, 系统平衡条件为

$$\theta_1 \geq \frac{\pi}{2} - \varphi_1, \theta_2 \geq \frac{\pi}{2} - \varphi_2.$$

即

$$\begin{cases} \cos \theta_1 \leq \cos \left( \frac{\pi}{2} - \varphi_1 \right) = \frac{\mu_1}{\sqrt{\mu_1^2 + 1}}, \\ \cos \theta_2 \leq \cos \left( \frac{\pi}{2} - \varphi_2 \right) = \frac{\mu_2}{\sqrt{\mu_2^2 + 1}}. \end{cases} \quad (3)$$

$$\left[ \text{注: } \cos \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{1 - \frac{1}{\tan^2 \varphi + 1}} = \sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2 + 1}} = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + 1}} \right]$$

平衡条件成为

$$\begin{cases} \cos \theta_1 \leq \frac{\mu_1}{\sqrt{\mu_1^2 + 1}}, \\ \cos \theta_2 \leq \frac{\mu_2}{\sqrt{\mu_2^2 + 1}}. \end{cases} \quad (4)$$

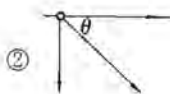


图 1-2-23



此二条件必须同时成立,④式为

$$\frac{\mu_1}{\sqrt{\mu_1^2+1}} \geq \cos\theta_2 = \frac{1}{2ABl_1} [(\overline{AB})^2 + l_1^2 - l_2^2]. \quad (5)$$

$$\frac{\mu_2}{\sqrt{\mu_2^2+1}} \geq \cos\theta_2 = \frac{1}{2ABl_2} [(\overline{AB})^2 + l_2^2 - l_1^2]. \quad (6)$$

现求同时满足⑤⑥两式的 $\overline{AB}$ 的取值范围.由⑤式

$$2\overline{AB}l_1 \frac{\mu_1}{\sqrt{\mu_1^2+1}} \geq (\overline{AB})^2 + l_1^2 - l_2^2.$$

得 $\overline{AB}$ 的方程为

$$(\overline{AB})^2 - 2\overline{AB} \frac{\mu_1 l_1}{\sqrt{\mu_1^2+1}} + l_1^2 - l_2^2 \leq 0. \quad (7)$$

先讨论等号

$$(\overline{AB})^2 - 2\overline{AB} \frac{\mu_1 l_1}{\sqrt{\mu_1^2+1}} + l_1^2 - l_2^2 = 0. \quad (8)$$

⑧式的有解条件为

$$b^2 - 4ac = 4 \frac{l_1^2 \mu_1^2}{\mu_1^2 + 1} - 4l_1^2 + 4l_2^2 \geq 0.$$

即

$$\frac{l_1^2 \mu_1^2}{\mu_1^2 + 1} - l_1^2 + l_2^2 \geq 0.$$

$$l_2^2 (1 + \mu_1^2) - l_1^2 > 0.$$

$$\mu_1^2 + 1 \geq \frac{l_1^2}{l_2^2}.$$

得

$$\mu_1^2 \geq \frac{l_1^2 - l_2^2}{l_2^2}.$$

上式右边小于零.故 $\mu_1$ 取任何值⑧式均有解, $\mu_1$ 可取任何值.⑧式的两个解为

$$\overline{AB} = \frac{l_1 \mu_1}{\sqrt{\mu_1^2 + 1}} \pm \sqrt{l_2^2 - \frac{l_1^2}{\mu_1^2 + 1}}.$$

因此,不等式⑦的解为

$$\frac{l_1 \mu_1}{\sqrt{\mu_1^2 + 1}} - \sqrt{l_2^2 - \frac{l_1^2}{\mu_1^2 + 1}} \leq \overline{AB} \leq \frac{l_1 \mu_1}{\sqrt{\mu_1^2 + 1}} + \sqrt{l_2^2 - \frac{l_1^2}{\mu_1^2 + 1}}. \quad (9)$$

同样,⑥成为

$$(\overline{AB})^2 - 2\overline{AB} \frac{l_2 \mu_2}{\sqrt{\mu_2^2 + 1}} + l_2^2 - l_1^2 \leq 0. \quad (10)$$

先讨论等号

$$(\overline{AB})^2 - 2\overline{AB} \frac{l_2 \mu_2}{\sqrt{\mu_2^2 + 1}} + l_2^2 - l_1^2 = 0. \quad (11)$$

⑪式的  $b^2 - 4ac = 4 \frac{l_2^2 \mu_2^2}{\mu_2^2 + 1} - 4l_2^2 + 4l_1^2 = 4(l_1^2 - \frac{l_2^2}{\mu_2^2 + 1})$ .

⑩式的有解条件为  $b^2 - 4ac \geq 0, l_1^2 \geq \frac{l_2^2}{\mu_2^2 + 1}$ .

$$\text{即} \quad \mu_2^2 \geq \frac{l_2^2}{l_1^2} - 1 = \frac{l_2^2 - l_1^2}{l_1^2}. \quad (12)$$

在此条件下, 不等式⑩的解为

$$\frac{l_2 \mu_2}{\sqrt{\mu_2^2 + 1}} - \sqrt{l_1^2 - \frac{l_2^2}{\mu_2^2 + 1}} \leq \overline{AB} \leq \frac{l_2 \mu_2}{\sqrt{\mu_2^2 + 1}} + \sqrt{l_1^2 - \frac{l_2^2}{\mu_2^2 + 1}}. \quad (13)$$

结论: 为使此题有解, 必须有

$$\begin{cases} \mu_1 \text{ 无限制,} \\ \mu_2 \geq \frac{l_2^2}{l_1^2} - 1. \end{cases} \quad (14)$$

其解为  $\overline{AB}$  同时满足⑨⑬两式

$$\begin{cases} \frac{l_1 \mu_1}{\sqrt{\mu_1^2 + 1}} - \sqrt{l_2^2 - \frac{l_1^2}{\mu_1^2 + 1}} \leq \overline{AB} \leq \frac{l_1 \mu_1}{\sqrt{\mu_1^2 + 1}} + \sqrt{l_2^2 - \frac{l_1^2}{\mu_1^2 + 1}}, \\ \frac{l_2 \mu_2}{\sqrt{\mu_2^2 + 1}} - \sqrt{l_1^2 - \frac{l_2^2}{\mu_2^2 + 1}} \leq \overline{AB} \leq \frac{l_2 \mu_2}{\sqrt{\mu_2^2 + 1}} + \sqrt{l_1^2 - \frac{l_2^2}{\mu_2^2 + 1}}. \end{cases} \quad (15)$$

上两式左边均小于  $\sqrt{l_2^2 - l_1^2}$ , 而  $\sqrt{l_2^2 - l_1^2}$  为情况 2 中  $\overline{AB}$  取值的下限, 因此上两式左边的不等式自然满足. 可改写为

$$\sqrt{l_2^2 - l_1^2} \leq \overline{AB} \leq \frac{l_1 \mu_1}{\sqrt{\mu_1^2 + 1}} + \sqrt{l_2^2 - \frac{l_1^2}{\mu_1^2 + 1}} = a_1, \quad (16)$$

$$\sqrt{l_2^2 - l_1^2} \leq \overline{AB} \leq \frac{l_2 \mu_2}{\sqrt{\mu_2^2 + 1}} + \sqrt{l_1^2 - \frac{l_2^2}{\mu_2^2 + 1}} = a_2. \quad (17)$$

上两式必须同时满足. 最后结果为

$$\sqrt{l_2^2 - l_1^2} \leq \overline{AB} \leq \min\{a_1, a_2\}. \quad (18)$$

### 方法三

1. 平衡条件.

小环平衡条件

$$F \leq \mu N.$$

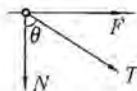
从图 1-2-24 可知

$$\mu \geq \frac{F}{N} = \frac{T \sin \theta}{T \cos \theta} = \tan \theta.$$

定义  $\mu = \tan \varphi$ ,  $\varphi$  为摩擦角.

则平衡条件成为

$$\theta \leq \varphi, \tan \theta \leq \tan \varphi = \mu.$$



①' 图 1-2-24

2. 情况 1: 一绳松弛的情况.

因为  $l_1 < l_2$ , 这时  $l_1$  垂直向下,  $(\overline{AB})^2 < l_2^2 - l_1^2, \theta_1 = 0^\circ$ , 不论  $\mu_1, \mu_2$  为何值, 一定平衡.

3. 情况 2: 两绳均张紧的情况 (参见如图 1-2-25).



A 环不滑动的条件为

$$\theta_1 \leq \varphi_1.$$

即

$$\tan \theta_1 \leq \tan \varphi_1 = \mu_1.$$

于是有

$$\cos \theta_1 = \frac{1}{\sqrt{\tan^2 \theta_1 + 1}} \geq \cos \varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu_1^2 + 1}}. \quad (3')$$

$$\sin \theta_1 = \frac{\tan \theta_1}{\sqrt{\tan^2 \theta_1 + 1}} \geq \sin \varphi_1 = \frac{\mu_1}{\sqrt{\mu_1^2 + 1}}. \quad (4')$$

又由图 1-2-25 知

$$\overline{CD} = l_1 \cos \theta_1 = l_2 \cos \theta_2,$$

$$\sin \theta_2 = \sqrt{1 - \cos^2 \theta_2} = \sqrt{1 - \frac{l_1^2}{l_2^2} \cos^2 \theta_1},$$

所以,若要 A 端不滑动,  $\overline{AB}$  必须满足

$$\overline{AB} = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \leq \frac{l_1 \mu_1}{\sqrt{\mu_1^2 + 1}} + \sqrt{l_2^2 - \frac{l_1^2}{\mu_1^2 + 1}}. \quad (5')$$

根据对称性,只要将上式中的 1,2 对调,即可得出 B 端不滑动时  $\overline{AB}$  必须满足的条件为

$$\overline{AB} \leq \frac{l_2 \mu_2}{\sqrt{\mu_2^2 + 1}} + \sqrt{l_1^2 - \frac{l_2^2}{\mu_2^2 + 1}}. \quad (6')$$

如果系统平衡, (5') (6') 两式必须同时满足.

从 (5') 式可以看出,  $\mu_1$  可能取任意正值和零,当  $\mu_1 = 0$  时,  $\overline{AB}$  只能取其最小值  $\sqrt{l_2^2 - l_1^2}$ , 此时  $\theta_1 = 0$ ,  $l_2$  拉直但无张力. 从 (6') 式可以看出,  $\mu_2$  的取值应满足

$$\mu_2^2 \geq \frac{l_2^2}{l_1^2} - 1.$$

否则  $\overline{AB}$  无解, 当  $\mu_2^2 = \frac{l_2^2}{l_1^2} - 1$  时,  $\overline{AB}$  取其最小值  $\sqrt{l_2^2 - l_1^2}$ .

答: 系统平衡时,  $\overline{AB}$  的取值范围为:

情况 1:  $l_2$  松弛,  $0 \leq \overline{AB} < \sqrt{l_2^2 - l_1^2}$ ,  $\mu_1, \mu_2$  任意;

情况 2:  $l_2$  张紧,  $\sqrt{l_2^2 - l_1^2} \leq \overline{AB} \leq$  ((5') (6') 两公式右方较小的),  $\mu_1$  任意,  $\mu_2$

$$\geq \sqrt{\frac{l_2^2}{l_1^2} - 1}.$$

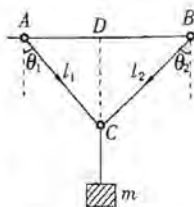


图 1-2-25

### 第三节 动力学

题 1 (2008 · 全国物理预赛题) 如图 1-3-1 所示, 两块固连在一起的物块 a

和  $b$ , 质量分别为  $m_a$  和  $m_b$ , 放在水平的光滑桌面上. 现同时施给它们方向如图所示的推力  $F_a$  和拉力  $F_b$ . 已知  $F_a > F_b$ , 则  $a$  对  $b$  的作用力( ).

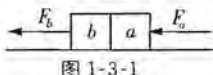


图 1-3-1

- A. 必为推力  
B. 必为拉力  
C. 可能为推力, 也可能为拉力  
D. 可能为零

**【分析】** 本题所问其实与多种因素有关, 如  $F_a$ 、 $F_b$ 、 $m_a$  和  $m_b$  等, 将  $a$ 、 $b$  隔离并由牛顿第二定律即可判断.

**【解】** C、D.

**题 2** (2008·全国物理复赛题) 蟹状星云脉冲星的辐射脉冲周期是 0.033 s. 假设它是由均匀分布的物质构成的球体, 脉冲周期是它的旋转周期, 万有引力是唯一能阻止它离心分解的力. 已知万有引力常量  $G=6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ , 由于脉冲星表面的物质未分离, 故可估算出此脉冲星密度的下限是 \_\_\_\_\_  $\text{kg}/\text{m}^3$ .

**【分析】** 在星体表面取一单位体积的质元(其质量大小即为密度  $\rho$ ). 它随脉冲星旋转所需向心力即为万有引力.

**【解】**  $1.3 \times 10^{14}$ .

**题 3** (2008·全国物理预赛题) 假定月球绕地球做圆周运动, 地球绕太阳也做圆周运动, 且轨道都在同一平面内. 已知地球表面处的重力加速度  $g=9.80 \text{ m/s}^2$ , 地球半径  $R_E=6.37 \times 10^6 \text{ m}$ , 月球质量  $m_M=7.3 \times 10^{22} \text{ kg}$ , 月球半径  $R_M=1.7 \times 10^6 \text{ m}$ , 引力恒量  $G=6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ , 月心地心间的距离约为  $r_{EM}=3.84 \times 10^8 \text{ m}$ :

(I) 月球的球心绕地球的球心运动一周需多少天?

(II) 地球上的观察者相继两次看到满月需多少天?

(III) 若忽略月球绕地球的运动, 设想从地球表面发射一枚火箭直接射向月球, 试估算火箭到达月球表面时的速度至少为多少?(结果要求两位有效数字)

**【分析】** 这是一道圆周运动问题, 解(III)问时需用到机械能守恒定律.

**【解】** (I) 月球在地球引力作用下绕地心做圆周运动. 设地球的质量为  $m_E$ , 月球绕地心做圆周运动的角速度为  $\omega_M$ . 由万有引力定律和牛顿定律分别有

$$\frac{Gm_E m_M}{r_{EM}^2} = m_M r_{EM} \omega_M^2. \quad (1)$$

和 
$$\frac{Gm_E}{R_E^2} = g. \quad (2)$$

月球绕地球一周的时间 
$$T_M = \frac{2\pi}{\omega_M}. \quad (3)$$

解①~③三式代入有关数据得

$$T_M = 2\pi \sqrt{\frac{r_{EM}^3}{gR_E^3}} = 2.37 \times 10^6 \text{ s} = 27.4 \text{ d}. \quad (4)$$

(II) 满月是当月球、地球和太阳成一直线时才有的现象. 此时, 地球在月球和太阳之间, 即图 1-3-2 中点  $A$  的位置. 当第二个满月时, 由于地球绕太阳的运动, 地球已运动到图中点  $A'$  的位置. 若以  $T_M'$  表示相继两次满月经历的时间,  $\omega_E$  表示地球



绕太阳运动的角速度,由于 $\omega_E$ 和 $\omega_M$ 的方向相同,故有

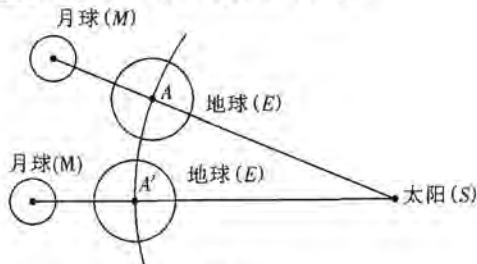


图 1-3-2

$$\omega_M T_M' = 2\pi + \omega_E T_M' \quad (5)$$

而 
$$\omega_M = \frac{2\pi}{T_M}, \omega_E = \frac{2\pi}{T_E} \quad (6)$$

式中 $T_E$ 为地球绕太阳运动的周期, $T_E = 365$  d.

由式⑤⑥得 
$$T_M' = \frac{T_E T_M}{T_E - T_M} \quad (7)$$

并注意式④,得 
$$T_M' = 29.6 \text{ d} \quad (8)$$

(Ⅲ)从地面射向月球的火箭一方面受到地球的引力作用,另一方面也受到月球引力的作用.当火箭离地球较近时,地球的引力大于月球的引力;当离月球较近时,月球的引力大于地球的引力.作地心和月心的连线.设在地球与月球之间某一点 $O$ 处,地球作用于火箭的引力的大小正好等于月球作用于火箭的引力的大小.以 $r$ 表示 $O$ 点到月球中心的距离,则有

$$G \frac{m_E m}{(r_{EM} - r)^2} = G \frac{m_M m}{r^2} \quad (9)$$

式中 $m$ 是火箭的质量, $r_{EM}$ 是月球与地球之间的距离.由式⑨得

$$\left(\frac{m_E}{m_M} - 1\right)r^2 + 2r_{EM}r - r_{EM}^2 = 0 \quad (10)$$

解式⑩,注意到式②,并代入有关数据得

$$r = 3.8 \times 10^7 \text{ m} \quad (11)$$

从地球表面发射、直接射向月球的火箭只要能到达 $O$ 点,则过该点后,因月球引力大于地球引力,便能在月球引力作用下到达月球.这样发射,火箭离开地面时的速度最小,到达月球时的速度也最小.设火箭刚到达月球时的最小速度为 $v$ ,则由机械能守恒定律

$$-G \frac{m_E m}{r_{EM} - r} - G \frac{m_M m}{r} = -G \frac{m_E m}{r_{EM} - R_M} - G \frac{m_M m}{R_M} + \frac{1}{2} m v^2 \quad (12)$$

得 
$$v = \left[ 2Gm_E \left( \frac{1}{r_{EM} - R_M} - \frac{1}{r_{EM} - r} \right) + 2Gm_M \left( \frac{1}{R_M} - \frac{1}{r} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

注意到式②,并代入有关数据得

$$v = 2.3 \times 10^3 \text{ m/s}.$$



**题4** (2007·全国物理预赛题) 如图1-3-3所示,一块光滑的平板能绕水平固定轴 $HH'$ 调节其与水平面所成的倾角,板上—根长为 $l=1.00\text{ m}$ 的轻细绳,它的一端系住—质量为 $m$ 的小球 $P$ ,另一端固定在 $HH'$ 轴上的 $O$ 点.当平板的倾角固定在 $\alpha$ 时,先将轻绳沿水平轴 $HH'$ 拉直(绳与 $HH'$ 重合),然后给小球—沿着平板并与轻绳垂直的初速度 $v_0=5.0\text{ m/s}$ .若小球能保持在板面内做圆周运动,问倾角 $\alpha$ 的值应在什么范围内(取图中 $\alpha$ 处箭头所示方向为 $\alpha$ 的正方向).取重力加速度 $g=10\text{ m/s}^2$ .

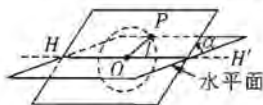


图1-3-3

**【分析】**这是一道在倾斜平面上做圆周运动的问题,解题时需要用到圆周运动的动力学方程及机械能守恒定律.

**【解】**当光滑平板与水平的倾角为 $\alpha(\alpha \geq 0)$ 时,无论小球 $P$ 处在斜面上什么位置,它受的重力在斜面上的投影总是垂直于 $HH'$ ,大小总是等于 $mg\sin\alpha$ .以此作为重力的一个分力,则重力的另一个分力,即垂直于斜面的分力 $mg\cos\alpha$ 总是与斜面对小球 $P$ 的支持力平衡.这样,小球 $P$ 在斜面内只受上述重力的分量 $mg\sin\alpha$ 和细绳拉力的作用.

当小球 $P$ 运动到圆周的最高点时,细绳垂直于 $HH'$ ,绳的拉力与小球所受重力的分量 $mg\sin\alpha$ 沿同一直线.这时只要细绳不松弛,小球就能保持在板面内做圆周运动.设小球到达圆周最高点时的速度为 $v$ ,绳的拉力为 $T$ ,有

$$T + mg\sin\alpha = m \frac{v^2}{l}. \quad (1)$$

由能量关系有 
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgl\sin\alpha. \quad (2)$$

由①②两式得 
$$T = m \left( \frac{v_0^2}{l} - 3g\sin\alpha \right). \quad (3)$$

细绳不松弛的条件是 
$$T \geq 0. \quad (4)$$

由③④两式得 
$$\alpha \leq \arcsin \left( \frac{v_0^2}{3lg} \right). \quad (5)$$

代入有关数据,得 
$$\alpha \leq \arcsin \frac{5}{6}. \quad (6)$$

当倾角 $\alpha < 0$ 时,经相同的分析可得

$$\alpha \geq -\arcsin \frac{5}{6}. \quad (7)$$

由⑥⑦两式可知, $\alpha$ 的取值范围为

$$-\arcsin \frac{5}{6} \leq \alpha \leq \arcsin \frac{5}{6}. \quad (8)$$

**题5** (2006·全国物理预赛题) 图1-3-4中正方形 $ABCD$ 是水平放置的固定梁的横截面, $AB$ 是水平的,截面的边长都是 $l$ .一根长为 $2l$ 的柔软的轻细绳,一端固定在 $A$ 点,另一端系—质量为 $m$ 的小球,初始时,手持小球,将绳拉直,绕过 $B$ 点使小球处于 $C$ 点.现给小球—竖直向下的初速度 $v_0$ ,使小球与 $CB$ 边无接触地



向下运动,当  $v_0^2$  分别取下列两值时,小球将打到梁上的何处?

$$(1) v_0^2 = 2(6\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 1)gl \quad (2) v_0^2 = 2(3\sqrt{3} + 11)gl$$

设绳的伸长量可不计,而且绳是非弹性的.

**【分析】** 此题是一个动力学问题,分析小球运动过程中的受力情况,再确定小球做什么运动,找出其轨道,从而判定小球将打到梁上的何处.

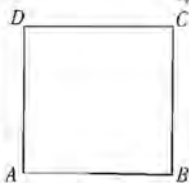


图 1-3-4

**【解】** 小球获得沿竖直向下的初速度  $v_0$  后,由于细绳处于松弛状态,故从 C 点开始,小球沿竖直方向做初速度为  $v_0$ 、加速度为  $g$  的匀加速直线运动. 当小球运动到图 1-3-5 中的 M 点时,绳刚被拉直,匀加速直线运动终止,此时绳与竖直方向的夹角为  $\alpha = 30^\circ$ . 在这过程中,小球下落的距离

$$s = l + 2l \cos \alpha = l(1 + \sqrt{3}). \quad (1)$$

细绳刚拉直时小球的速度  $v_0$  满足下式

$$v_1^2 = v_0^2 + 2gs. \quad (2)$$

在细绳拉紧的瞬间,由于绳的伸长量可不计,而且绳是非弹性的,故小球沿细绳方向的分速度  $v_0 \cos \alpha$  变为零,而与绳垂直的分速度保持不变,以后小球将从 M 点开始以初速度

$$v_1' = v_1 \sin \alpha = \frac{1}{2} v_1. \quad (3)$$

在竖直平面内做圆周运动,圆周的半径为  $2l$ ,圆心位于 A 点,如图 1-3-5 所示. 由①②③式得

$$v_1'^2 = \frac{1}{4} v_0^2 + \frac{1}{2} gl(1 + \sqrt{3}). \quad (4)$$

当小球沿圆周运动到图中的 N 点时,其速度为  $v$ ,细绳与水平方向的夹角为  $\theta$ ,由能量关系有

$$\frac{1}{2} m v_1'^2 = \frac{1}{2} m v^2 + mg(\sqrt{3}l + 2l \sin \theta). \quad (5)$$

用  $F_T$  表示绳对小球的拉力,有

$$F_T + mg \sin \theta = m \frac{v^2}{2l}. \quad (6)$$

$$(1) v_0^2 = 2(6\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 1)gl$$

设在  $\theta = \theta_1$  时(见图 1-3-6),绳开始松弛,  $F_T = 0$ , 小球的速度  $v = u_0$ . 以此代入⑤⑥两式得

$$v_1'^2 = u_1^2 + 2g(\sqrt{3}l + 2l \sin \theta_1). \quad (7)$$

$$g \sin \theta_1 = \frac{u_1^2}{2l}. \quad (8)$$

由④⑦⑧式和题设  $v_0$  的数值可求得

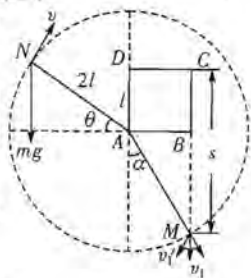


图 1-3-5

$$\theta_1 = 45^\circ. \quad \textcircled{9}$$

$$u_1 = \sqrt{\sqrt{2}gl}. \quad \textcircled{10}$$

即在  $\theta_1 = 45^\circ$  时,绳开始松弛. 以  $N_1$  表示此时小球在圆周上的位置,此后,小球将脱离圆轨道从  $N_1$  处以大小为  $u_1$ ,方向与水平方向成  $45^\circ$  角的初速度做斜抛运动.

以  $N_1$  点为坐标原点,建立直角坐标系  $N_1xy$ ,  $x$  轴水平向右,  $y$  轴竖直向上. 若以小球从  $N_1$  处抛出的时刻作为计时起点,小球在时刻  $t$  的坐标分别为

$$x = u_1 \cos 45^\circ t = \frac{\sqrt{2}}{2} u_1 t. \quad \textcircled{11}$$

$$y = u_1 \sin 45^\circ t - \frac{1}{2} g t^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} u_1 t - \frac{1}{2} g t^2. \quad \textcircled{12}$$

由⑪⑫式,注意到⑩式,可得小球的轨道方程

$$y = x - g \frac{x^2}{u_1^2} = x - \frac{x^2}{\sqrt{2}l}. \quad \textcircled{13}$$

$$AD \text{ 面的横坐标为 } x = 2l \cos 45^\circ = \sqrt{2}l. \quad \textcircled{14}$$

由⑬⑭式可得小球通过  $AD$  所在竖直平面的纵坐标

$$y = 0. \quad \textcircled{15}$$

由此可见小球将在  $D$  点上方越过,然后打到  $DC$  边上,  $DC$  边的纵坐标为

$$y = -(2l \sin 45^\circ - l) = -(\sqrt{2} - 1)l. \quad \textcircled{16}$$

把⑯式代入⑬式,解得小球与  $DC$  边撞击点的横坐标

$$x = 1.75l. \quad \textcircled{17}$$

撞击点与  $D$  点的距离为

$$\Delta l = x - 2l \cos 45^\circ = 0.35l. \quad \textcircled{18}$$

$$(2) v_0^2 = 2(3\sqrt{3} + 11)gl$$

设在  $\theta = \theta_2$  时,绳松弛,  $F_T = 0$ , 小球的速度  $v = u_2$ , 以此代替⑤⑥式中的  $\theta_1$ 、 $u_1$ , 得

$$v_1'^2 = u_2^2 + 2g(\sqrt{3}l + 2l \sin \theta_2). \quad \textcircled{19}$$

$$mg \sin \theta_2 = m \frac{u_2^2}{2l}. \quad \textcircled{20}$$

以  $v_0^2 = 2(3\sqrt{3} + 11)gl$  代入④式,与⑱⑳式联式,可解得

$$\theta_2 = 90^\circ. \quad \textcircled{21}$$

$$u_2 = \sqrt{2gl}. \quad \textcircled{22}$$

㉒式表示小球到达圆周的最高点处时,绳中张力为零,随后绳子被拉紧,球速增大,绳中的拉力不断增加,拉力和重力沿绳子的分力之和等于小球沿圆周运动所需的向心力,小球将绕以  $D$  点为圆心,  $l$  为半径的圆周打到梁上的  $C$  点.

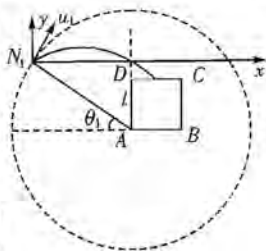


图 1-3-6



**题 6** (2006·全国物理预赛题) 1. 如图 1-3-7 所示, 弹簧  $S_1$  的上端固定在天花板上, 下端连一小球 A, 球 A 与球 B 之间用线相连. 球 B 与球 C 之间用弹簧  $S_2$  相连. A、B、C 的质量分别为  $m_A$ 、 $m_B$ 、 $m_C$ , 弹簧与线的质量均可不计. 开始时它们都处在静止状态. 现将 A、B 间的线突然剪断, 求线刚剪断时 A、B、C 的加速度.

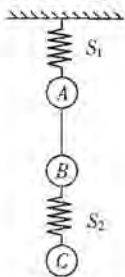


图 1-3-7

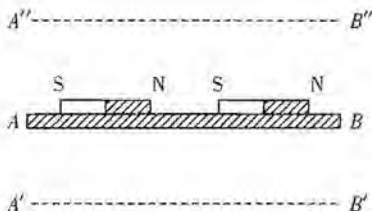


图 1-3-8

2. 两个相同的条形磁铁, 放在平板 AB 上, 磁铁的 N、S 极如图 1-3-8 所示. 开始时平板及磁铁皆处于水平位置, 且静止不动.

(1) 现将 AB 突然竖直向下平移 (磁铁与平板间始终相互接触), 并使之停在  $A'B'$  处, 结果发现两个条形磁铁碰在一起.

(2) 如果将 AB 从原位置突然竖直向上平移, 并使之停在  $A''B''$  位置处, 结果发现两条形磁铁也碰在一起.

试定性地解释上述现象.

**【分析】** 解第一题的关键是正确分析三个小球的受力情况, 但特别要提醒的是, 线刚剪断的瞬间线的拉力消失了, 而弹簧的长度尚无变化, 它的弹力也未变化. 解第二题的关键是比较在平板运动过程中, 磁铁所受最大静摩擦力与相互吸引的磁力大小.

**【解】** 1. 线剪断前, 整个系统处于平衡状态. 此时弹簧  $S_1$  的弹力

$$F_1 = (m_A + m_B + m_C)g. \quad (1)$$

弹簧  $S_2$  的弹力  $F_2 = m_C g.$  (2)

在线刚被剪断的时刻, 各球尚未发生位移, 弹簧的长度尚无变化, 故  $F_1$ 、 $F_2$  的大小尚未变化, 但线的拉力消失. 设此时球 A、B、C 的加速度的大小分别为  $a_A$ 、 $a_B$ 、 $a_C$ , 则有

$$F_1 - m_A g = m_A a_A. \quad (3)$$

$$F_2 + m_B g = m_B a_B. \quad (4)$$

$$F_2 - m_C g = m_C a_C. \quad (5)$$

解以上有关各式得

$$a_A = \frac{m_B + m_C}{m_A} g. \quad (6)$$

方向竖直向上.

$$a_B = \frac{m_B + m_C}{m_B} g. \quad (7)$$

方向竖直向下.

$$a_C = 0. \quad (8)$$

2. 开始时, 磁铁静止不动, 表明每一条磁铁受到另一条磁铁的磁力与它受到板的静摩擦力平衡.

(1) 从板突然竖直向下平移到停下, 板和磁铁的运动经历了两个阶段. 起初, 板向下加速移动, 板与磁铁有脱离接触的趋势, 磁铁对板的正压力减小, 并跟随板一起做加速度方向向下、速度向下的运动. 在这过程中, 由于磁铁对板的正压力减小, 最大静摩擦力亦减小. 向下的加速度愈大, 磁铁的正压力愈小, 最大静摩擦力也愈小. 当板的加速度大到某一数值时, 最大静摩擦力减小到小于磁力, 于是磁铁沿着平板相向运动并吸在一起. 接着, 磁铁和板一起做加速度方向向上、速度向下的运动, 直到停在  $A'B'$  处. 在这过程中, 磁铁对板的正压力增大, 最大静摩擦力亦增大, 因两磁铁已碰在一起, 磁力、接触处出现的弹力和可能存在的静摩擦力总是平衡的, 两条磁铁吸在一起的状态不再改变.

(2) 从板突然竖直向上平移到停下, 板和磁铁的运动也经历两个阶段. 起初, 板和磁铁一起做加速度方向向上、速度向上的运动, 在这过程中, 正压力增大, 最大静摩擦力亦增大, 作用于每个磁铁的磁力与静摩擦力始终保持平衡, 磁铁在水平方向不发生运动. 接着, 磁铁和板一起做加速度方向向下、速度向上的运动, 直到停在  $A'B''$  处. 在这过程中, 磁铁对板的正压力减小, 最大静摩擦力亦减小, 向下的加速度愈大, 磁铁的正压力愈小, 最大静摩擦力也愈小. 当板的加速度大到某一数值时, 最大静摩擦力减小到小于磁力, 于是磁铁沿着平板相向运动并吸在一起.

**题 7** (2004·全国物理预赛题) 要使一颗人造地球通讯卫星(同步卫星)能覆盖赤道上东经  $75.0^\circ$  到东经  $135.0^\circ$  之间的区域, 则卫星应定位在哪个经度范围内的上空? 地球半径  $R_0 = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$ . 地球表面处的重力加速度  $g = 9.80 \text{ m/s}^2$ .

**【分析】** 此题为圆周运动问题, 我们可运用万有引力定律、牛顿运动定律及圆周运动的有关规律求出结果.

**【解】** 如图 1-3-9 所示, 圆为地球赤道,  $S$  为卫星所在处, 用  $R$  表示卫星运动轨道的半径. 由万有引力定律、牛顿运动定律和卫星周期  $T$  (亦即地球自转周期) 可得

$$G \frac{Mm}{R^2} = mR \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2. \quad (1)$$

式中  $M$  为地球质量,  $G$  为引力常量,  $m$  为卫星质量.

$$\text{另有} \quad GM = R_0^2 g. \quad (2)$$

$$\text{由图可知} \quad R \cos \theta = R_0. \quad (3)$$

由以上各式, 可解得

$$\theta = \arccos \left( \frac{4\pi^2 R_0}{T^2 g} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (4)$$



取  $T=23\text{ h }56\text{ min }4\text{ s}$  (或近似取  $T=24\text{ h}$ ), 代入数值, 可得

$$\theta=81.3^\circ \quad (5)$$

由此可知, 卫星的定位范围在东经  $135.0^\circ-81.3^\circ=53.7^\circ$  到  $75.0^\circ+81.3^\circ=156.3^\circ$  之间的上空.

**题 8** (2004·全国物理预赛题) 质量分别为  $m_1$  和  $m_2$  的两个小物块用轻绳连结, 绳跨过位于倾角  $\alpha=30^\circ$  的光滑斜面顶端的轻滑轮, 滑轮与转轴之间的摩擦不计, 斜面固定在水平桌面上, 如图 1-3-10 所示. 第一次,  $m_1$  悬空,  $m_2$  放在斜面上, 用  $t$  表示  $m_2$  自斜面底端由静止开始运动至斜面顶端所需的时间. 第二次, 将  $m_1$  和  $m_2$  位置互换, 使  $m_2$  悬空,  $m_1$  放在斜面上, 发现  $m_1$  自斜面底端由静止开始运动至斜面顶端所需的时间为  $\frac{t}{3}$ . 求  $m_1$  与  $m_2$  之比.

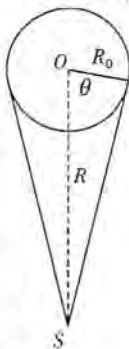


图 1-3-9

**【分析】** 此题为一般的动力学问题. 我们分析物体的受力情况, 应用牛顿第二定律列出动力学方程, 再结合匀变速运动的有关运动学公式, 即可解出最后结果.

**【解】** 第一次, 小物块受力情况如图 1-3-11 所示, 设  $T_1$  为绳中张力,  $a_1$  为两物块加速度的大小,  $l$  为斜面长, 则有

$$m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \quad (1)$$

$$T_1 - m_2 g \sin \alpha = m_2 a_1 \quad (2)$$

$$l = \frac{1}{2} a_1 t^2 \quad (3)$$

第二次,  $m_1$  与  $m_2$  交换位置. 设绳中张力为  $T_2$ , 两物块加速度的大小为  $a_2$ , 则有

$$m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \quad (4)$$

$$T_2 - m_1 g \sin \alpha = m_1 a_2 \quad (5)$$

$$l = \frac{1}{2} a_2 \left(\frac{t}{3}\right)^2 \quad (6)$$

由①②式注意到  $\alpha=30^\circ$  得

$$a_1 = \frac{2m_1 - m_2}{2(m_1 + m_2)} g \quad (7)$$

由④⑤式注意到  $\alpha=30^\circ$  得

$$a_2 = \frac{2m_2 - m_1}{2(m_1 + m_2)} g \quad (8)$$

由③⑥式得

$$a_1 = \frac{a_2}{9} \quad (9)$$

由⑦⑧⑨式可解得

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{11}{19}$$

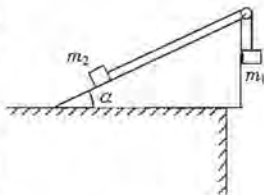


图 1-3-10

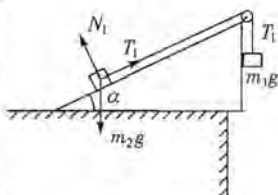


图 1-3-11

**题 9** (2002·全国物理预赛题) 据新华社报道,为了在本世纪初叶将我国的航天员送上太空,2002年3月25日22时15分,我国成功地发射了一艘无人试验飞船,在完成预定任务后,飞船于4月1日16时51分安全着陆,共绕地球飞行108圈。

(1)飞船的名称是什么?

(2)飞船在运行期间,按照地面指挥控制中心的指令成功地实施了数百个动作,包括从椭圆轨道变换成圆轨道等.假如把飞船从发射到着陆的整个过程中的运动都当做圆周运动处理,试粗略估计飞船离地面的平均高度.已知地球半径  $R=6.37 \times 10^6 \text{ m}$ ,地球表面处的重力加速度  $g=9.80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

**【分析】**这是一道飞船绕地球做圆周运动,由地球吸引力提供向心力的问题.

**【解】**(1)神舟3号.

(2)设飞船飞行时间为  $t$ ,绕地球飞行的圈数为  $N$ ,周期为  $T$ ,飞船的质量为  $m$ ,离地面的平均高度为  $h$ ,地球半径为  $R$ ,地球质量为  $M$ ,则有

$$T = \frac{t}{N} \quad (1)$$

$$G \frac{mM}{(R+h)^2} = m \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 (R+h) \quad (2)$$

$$G \frac{Mm}{R^2} = mg \quad (3)$$

由①②③式解得 
$$h = \left( \frac{gR^2 t^2}{4\pi^2 N^2} \right)^{\frac{1}{3}} - R \quad (4)$$

由题给数据可知  $t=5.8536 \times 10^5 \text{ s}$ ,代入  $t$  及其他有关数据得

$$h = 2.9 \times 10^5 \text{ m} \quad (5)$$

**题 10** (2001·全国物理预赛题) 如图1-3-12所示,一质量为  $M$ 、长为  $L$  带薄挡板  $P$  的木板,静止在水平的地面上,设木板与地面间的静摩擦系数与动摩擦系数相等,皆为  $\mu$ . 质量为  $m$  的人从木板的一端由静止开始相对于地面匀加速地向前走

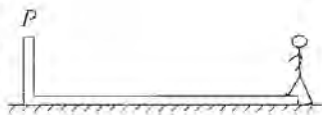


图1-3-12

向另一端,到达另一端时便骤然抓住挡板  $P$  而停在木板上. 已知人与木板间的静摩擦系数足够大,人在木板上不滑动. 问:在什么条件下,最后可使木板向前方移动的距离达到最大? 其值等于多少?

**【分析】**首先应对人、木板进行受力分析,从动力学、运动学的角度,求出人开始运动到刚抵达另一端而尚未停下这段过程所用的时间,再运用动量定理、动能定理,求出木板向前方移动的距离的数学表达式,进而运用数学分析,即可求得木板向前方移动的最大距离.

**【解】**在人从木板的一端向另一端运动的过程中,先讨论木板发生向后运动的情形. 以  $t$  表示人开始运动到刚抵达另一端尚未停下这段过程中所用的时间,以  $x_1$  表示木板向后移动的距离,如图1-3-13所示. 以  $f$  表示人与木板间的静摩擦力,以  $F$  表示



地面作用于木板的摩擦力,以  $a_1$  和  $a_2$  分别表示人和木板的加速度,则有

$$\begin{aligned} f &= ma_1, & \text{①} \\ L - x_1 &= \frac{1}{2} a_1 t^2, & \text{②} \\ f - F &= Ma_2, & \text{③} \\ x_1 &= \frac{1}{2} a_2 t^2. & \text{④} \end{aligned}$$

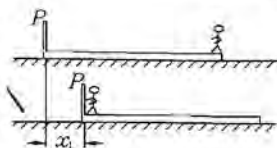


图 1-3-13

解以上四式,得 
$$t = \sqrt{\frac{2LMm}{Mf + m(f-F)}}. \quad \text{⑤}$$

对人和木板组成的系统,人在木板另一端骤然停下后,两者的总动量等于从开始到此时地面的摩擦力  $F$  的冲量,忽略人骤然停下那段极短的时间,则有

$$Ft = (M+m)v. \quad \text{⑥}$$

$v$  为人在木板另一端刚停下时两者一起运动的速度. 设人在木板另一端停下后两者一起向前移动的距离为  $x_2$ , 与地面的滑动摩擦因数为  $\mu$ , 则有

$$\frac{1}{2} (M+m)v^2 = \mu(M+m)gx_2. \quad \text{⑦}$$

木板向前移动的净距离为 
$$x = x_2 - x_1. \quad \text{⑧}$$

由以上各式得

$$x = \frac{1}{\mu g} \left( \frac{F}{M+m} \right)^2 \left[ \frac{LMm}{(M+m)(f-F) + MF} \right] - (f-F) \left[ \frac{Lm}{Mf + m(f-F)} \right].$$

由此式可知,欲使木板向前移动的距离  $x$  为最大,应有

$$f = F. \quad \text{⑨}$$

即 
$$f = F_{\max} = \mu(M+m)g. \quad \text{⑩}$$

即木板向前移动的距离为最大的条件是:人作用于木板的静摩擦力等于地面作用于木板的滑动摩擦力.

移动的最大距离 
$$x_{\max} = \frac{m}{M+m}L. \quad \text{⑪}$$

由上可见,在设木板发生向后运动,即  $f \geq F$  的情况下,  $f = F$  时,  $x$  有极大值,也就是说,在时间  $0 \sim t$  内,木板刚刚不动的条件下  $x$  有极大值.

再来讨论木板不动,即  $f < F$  的情况. 这时,因为  $f < F$ , 所以人积累的动能和碰后的总动能都将变小,从而前进的距离  $x$  也变小,即小于上述的  $x_{\max}$ .

**例 11** (2000·全国物理预竞赛) 一半径为  $R=1.00$  m 的水平光滑圆桌面,圆心为  $O$ ,有一坚直的立柱固定在桌面上的圆心附近,立柱与桌面的交线是一条凸的平滑的封闭曲线  $C$ ,如图 1-3-14 所示. 一根不可伸长的柔软的细轻绳,一端固定在封闭曲线上的某一点,另一端系一质量为  $m=7.5 \times 10^{-2}$  kg 的小物块. 将小物块放在桌面上并把绳拉直,再给小物块一个方向与绳垂直大小为  $v_0=4.0$  m/s 的初速度. 物块在桌面上运动时,绳将缠绕在立柱上. 已知当绳的张力为  $T_0=2.0$  N 时,绳即断开,在绳断开前物块始终在桌面上运动.



(1) 问绳刚要断开时, 绳的伸直部分的长度为多少?

(2) 若绳刚要断开时, 桌面圆心  $O$  到绳的伸直部分与封闭曲线的接触点的连线正好与绳的伸直部分垂直, 问物块的落地点到桌面圆心  $O$  的水平距离为多少? 已知桌面高度  $H = 0.80 \text{ m}$ . 物块在桌面上运动时未与立柱相碰. 取重力加速度大小为  $10 \text{ m/s}^2$ .

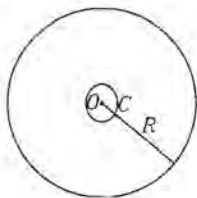


图 1-3-14

**【分析】** 绳断后, 物块在桌面上将以断时速度  $v_0$  做匀速直线运动, 直到离开桌面后, 再做平抛运动落地. 求解中把空间的几何关系弄清楚是重要的环节之一.

**【解】** (1) 因桌面是光滑的, 轻绳是不可伸长和柔软的, 且在断开前绳都是被拉紧的, 故在绳断开前, 物块在沿桌面运动的过程中, 其速度始终与绳垂直, 绳的张力对物块不做功, 物块速度的大小保持不变. 设在绳刚要断开时绳的伸直部分的长度为  $x$ , 若此时物块速度的大小为  $v_x$ , 则有

$$v_x = v_0. \quad (1)$$

绳对物块的拉力仅改变物块速度的方向, 是作用于物块的向心力. 故有

$$T_0 = \frac{mv_x^2}{x} = \frac{mv_0^2}{x}. \quad (2)$$

$$\text{由此得} \quad x = \frac{mv_0^2}{T_0}. \quad (3)$$

$$\text{代入数值得} \quad x = 0.60 \text{ m}. \quad (4)$$

(2) 设在绳刚要断开时, 物块位于桌面上的  $P$  点,  $BP$  是绳的伸直部分, 物块速度  $v_0$  的方向如图 1-3-15 所示. 由题意可知,  $OB \perp BP$ . 因物块离开桌面时的速度仍为  $v_0$ , 物块离开桌面后便做初速度为  $v_0$  的平抛运动. 设平抛运动经历的时间为  $t$ , 则有

$$H = \frac{1}{2}gt^2. \quad (5)$$

物块做平抛运动的水平射程为

$$s_1 = v_0 t. \quad (6)$$

由几何关系, 物块落地点与桌面圆心  $O$  的水平距离  $s$  为

$$s = \sqrt{(s_1 + \sqrt{R^2 - x^2})^2 + x^2}. \quad (7)$$

解⑤⑥⑦式, 得

$$s = \sqrt{\left(v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}} + \sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 + x^2}. \quad (8)$$

代入数据得

$$s = 2.5 \text{ m}.$$

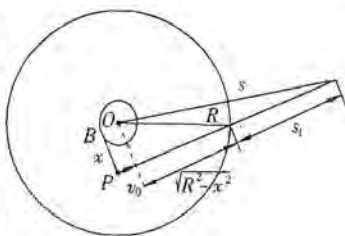


图 1-3-15



**题 12** (2005·全国物理复赛题) 图 1-3-16 中的 AOB 是游乐场中的滑道模型, 它位于竖直平面内, 由两个半径都是  $R$  的  $\frac{1}{4}$  圆周连接而成, 它们的圆心  $O_1$ 、 $O_2$  与两圆弧的连接点  $O$  在同一竖直线上.  $O_2B$  沿水池的水面. 一小滑块可由弧 AO 上的任意点从静止开始下滑.

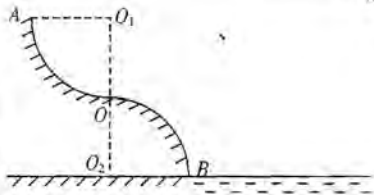


图 1-3-16

(1) 若小滑块从开始下滑到脱离滑道过程中, 在两个圆弧上滑过的弧长相等, 则小滑块开始下滑时应在圆弧 AO 上的何处? (该处用  $O_1$  的连线与竖直线的夹角表示)

(2) 凡能在  $O$  点脱离滑道的小滑块, 其落水点到  $O_2$  的距离如何?

**【分析】** 解此题的关键是正确运用圆周运动的规律、机械能守恒定律及平抛运动规律.

**【解】** (1) 如图 1-3-17 所示, 设滑块出发点为  $P_1$ , 离开点为  $P_2$ , 按题意要求  $O_1P_1$ 、 $O_2P_2$  与竖直方向的夹角相等, 设其为  $\theta$ , 若离开滑道时的速度为  $v$ , 则滑块在  $P_2$  处脱离滑道的条件是

$$\frac{mv^2}{R} = mg \cos \theta. \quad (1)$$

由机械能守恒  $2mgR(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}mv^2.$  (2)

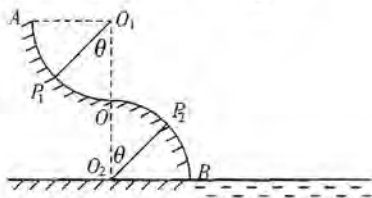


图 1-3-17

①②式联立解得

$$\cos \theta = \frac{4}{5} \text{ 或 } \theta = \arccos \frac{4}{5} = 36^\circ 52'. \quad (3)$$

(2) 滑块刚能在  $O$  点离开滑道的条件是

$$\frac{mv_0^2}{R} = mg. \quad (4)$$

$v_0$  为滑块到达  $O$  点的速度, 由此得

$$v_0 = \sqrt{Rg}. \quad (5)$$

设到达  $O$  点的速度为  $v_0$  的滑块, 在滑道 OA 上的出发点到  $O_1$  的连线与竖直方向的夹角为  $\theta_0$ , 由机械能守恒, 有

$$mgR(1 - \cos\theta_0) = \frac{1}{2}mv_0^2, \quad (6)$$

$$\text{由(5)(6)两式解得} \quad \theta_0 = \frac{\pi}{3}. \quad (7)$$

若滑块到达  $O$  点时的速度  $v > v_0$ , 则对  $OB$  滑道来说, 因  $O$  点可能提供的最大向心力为  $mg$ , 故滑块将沿半径比  $R$  大的圆周的切线方向离开  $O$  点. 对于  $v > v_0$  的滑块, 其在  $OA$  上出发点的位置对应的  $\theta$  角必大于  $\theta_0$ , 即  $\theta > \theta_0$ . 由于  $\theta_{\max} = \frac{\pi}{2}$ , 根据机械能守恒, 到达  $O$  点的最大速度

$$v_{\max} = \sqrt{2Rg}. \quad (8)$$

由此可知, 能从  $O$  点离开滑道的滑块速度是  $v_0$  到  $v_{\max}$  之间所有可能的值, 也就是说,  $\theta$  从  $\frac{\pi}{3}$  至  $\frac{\pi}{2}$  下滑的滑块都将在  $O$  点离开滑道. 以速度  $v_0$  从  $O$  点沿水平方向滑出滑道的滑块, 其落水点至  $O_2$  的距离

$$x_0 = v_0 t, \quad (9)$$

$$R = \frac{1}{2}gt^2. \quad (10)$$

$$\text{由(9)(10)式得} \quad x_0 = \sqrt{2}R. \quad (11)$$

当滑块以  $v_{\max}$  从  $O$  点沿水平方向滑出滑道时, 其落水点到  $O_2$  的距离

$$x_{\max} = v_{\max} t, \quad (12)$$

$$\text{由(8)(10)(12)式得} \quad x_{\max} = 2R, \quad (13)$$

因此, 凡能从  $O$  点脱离滑道的滑块, 其落水点到  $O_2$  的距离在  $\sqrt{2}R$  到  $2R$  之间的所有可能值. 即

$$\sqrt{2}R \leq x \leq 2R.$$

**题 13** (1999·全国物理复赛题) 经过用天文望远镜长期观察, 人们在宇宙中已经发现了许多双星系统, 通过对它们的研究, 使我们对宇宙中物质的存在形式和分布情况有了较深刻的认识. 双星系统由两个星体构成, 其中每个星体的线度都远小于两星体之间的距离. 一般双星系统距离其他星体很远, 可以当做孤立系统处理.

现根据对某一双星系统的光度学测量确定, 该双星系统中每个星体的质量都是  $M$ , 两者相距  $L$ . 它们正围绕两者连线的中点做圆周运动.

(1) 试计算该双星系统的运动周期  $T_{\text{计算}}$ ;

(2) 若实验上观测到的运动周期为  $T_{\text{观测}}$ , 且  $T_{\text{观测}} : T_{\text{计算}} = 1 : \sqrt{N} (N > 1)$ . 为了解释  $T_{\text{观测}}$  与  $T_{\text{计算}}$  的不同, 目前有一种流行的理论认为, 在宇宙中可能存在一种望远镜观测不到的暗物质. 作为一种简化模型, 我们假定在这两个星体连线为直径的球体内均匀分布着这种暗物质, 而不考虑其他暗物质的影响. 试根据这一模型和上述观测结果确定该星系间这种暗物质的密度.

**【分析】** 天文观察到的周期比计算出的周期小, 表明存在的暗物质对双星的万有引力使双星做圆周运动的向心力增大了, 使得观察到的双星运行速度比计算



的大,只要能计算出暗物质对双星的万有引力,便能获知暗物质的密度,这需把暗物质等效成一个质点.

**【解】** (1) 双星均绕它们的连线的中点做圆周运动,设运动速度为  $v$ , 向心加速度满足下面的方程

$$M \frac{v^2}{2} = \frac{GM^2}{L^2} \quad ①$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{2L}} \quad ②$$

周期 
$$T_{\text{计算}} = \frac{2\pi(\frac{L}{2})}{v} = \pi L \sqrt{\frac{2L}{GM}} \quad ③$$

(2) 根据观测结果,星体的运动周期

$$T_{\text{观测}} = \frac{1}{\sqrt{N}} T_{\text{计算}} < T_{\text{计算}} \quad ④$$

这说明双星系统中受到的向心力大于本身的引力,故它一定还受到其他指向中心的作用力.按题意这一作用来源于均匀分布的暗物质,均匀分布在球体内的暗物质对双星系统的作用与一质量等于球内暗物质的总质量  $M'$  位于中点处的质点相同.考虑暗物质作用后双星的速度即为观察到的速度  $v_{\text{观}}$ ,则有

$$M \frac{v_{\text{观}}^2}{2} = \frac{GM^2}{L^2} + G \frac{MM'}{(\frac{L}{2})^2} \quad ⑤$$

$$v_{\text{观}} = \sqrt{\frac{G(M+4M')}{2L}} \quad ⑥$$

因为在轨道一定时,周期和速度成反比,由④⑥式得

$$\frac{1}{v_{\text{观}}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{1}{v} \quad ⑦$$

把②⑥式代入⑦式得 
$$M' = \frac{N-1}{4} M \quad ⑧$$

设所求暗物质的密度为  $\rho$ ,则有

$$\frac{4}{3} \pi (\frac{L}{2})^3 \rho = \frac{N-1}{4} M$$

故 
$$\rho = \frac{3(N-1)M}{2\pi L^3} \quad ⑨$$

**题 14** (2004·全国物理竞赛题) 如图 1-3-18 所示,一质量  $M=30.0 \text{ kg}$  的楔形木块  $OABC$  静止在水平地面上,其斜面  $AB$  段的倾角  $\beta=60^\circ$ ,  $BC$  段的倾角  $\alpha=45^\circ$ ,  $AB$  段与  $BC$  段连接处 ( $B$  处) 为一非常短的光滑圆弧. 现将一质量为  $m=4.00 \text{ kg}$  的小物块 (可视为质点) 放在斜面上离地面高为  $h_1=2.80 \text{ m}$  的  $A$  处,然后放手,令小物块从静止开始沿斜面下滑. 已知小物块与斜面之间无摩擦,木块与地面间最大静摩擦因数和动摩擦因数皆为  $\mu=6.00 \times 10^{-2}$ ,  $B$  处离桌面高度  $h_2=2.00 \text{ m}$ . 如果不计小物块经过  $B$  处时小物块及木块速度大小的改变,求小物块从斜面上  $A$

处滑动到斜面底部  $C$  处整个过程中小物块对木块所做的功。(取重力加速度  $g=10.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ )

**【分析】** 此题的关键是判别木块能否运动。这就需要列出小物块及木块的运动方程,再进行分析求解。

**【解】** 为方便起见,我们先考虑小物块在斜面  $BC$  段上的运动,取  $Oxy$  坐标如图 1-3-19 所示,令  $a_x$ 、 $a_y$  分别表示小物块沿  $x$  方向和  $y$  方向加速度的大小, $N$  和  $R$  分别表示小物块与木块之间和木块与桌面之间的正压力的大小, $a_M$  表示木块的加速度的大小,小物块的运动方程为

$$ma_x = N \sin \alpha. \quad (1)$$

$$ma_y = mg - N \cos \alpha. \quad (2)$$

木块的运动方程

$$Ma_M = N \sin \alpha - \mu R. \quad (3)$$

$$R = N \cos \alpha + Mg. \quad (4)$$

小物块约束在斜面上运动,有方程

$$\frac{a_x + a_M}{a_y} = \cot \alpha. \quad (5)$$

$$\text{由以上各式解得 } N = \frac{(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) mg}{1 + \frac{m}{M} \sin^2 \alpha - \mu \frac{m}{M} \sin \alpha \cos \alpha}. \quad (6)$$

此式对  $AB$  段同样成立,只需将  $\alpha$  换成  $\beta$  即可。现在我们必须来判别木块能否运动,判别的根据是方程③。若木块运动,则由③式和④式应有

$$a_M = \frac{1}{M} (N \sin \alpha - \mu N \cos \alpha - \mu Mg) > 0. \quad (7)$$

否则木块不动,小物块只做静止在木块上的下滑运动。

当小物块在  $BC$  段上运动时, $\alpha=45^\circ$ ,由⑥⑦两式,代入有关数据得

$$N = 28.2 \text{ N}. \quad (8)$$

$$a_M = 2.50 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} > 0. \quad (9)$$

当小物块在  $AB$  段上运动时,上面⑥⑦两式应用  $\beta=60^\circ$  代替  $\alpha=45^\circ$ ,用  $N'$  代替  $N$ ,用  $a_M'$  代替  $a_M$ ,由⑥⑦两式,代入有关数据得

$$N' = 20.1 \text{ N}. \quad (8')$$

$$a_M' = -3.90 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} < 0. \quad (9')$$

以上结果说明,小物块从  $A$  到  $B$  的过程中,木块没有移动;从  $B$  到  $C$  的过程中,木块是运动的。所以,小物块对木块做的功为

$$W = N \sin \alpha \cdot s. \quad (10)$$

$$s \text{ 为木块移动的距离} \quad s = \frac{1}{2} a_M t^2. \quad (11)$$

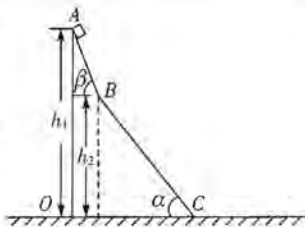


图 1-3-18

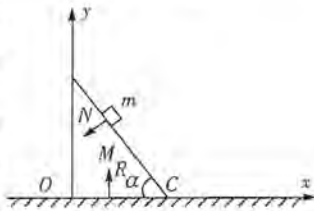


图 1-3-19



$t$  可以从小物块自  $B$  点到  $C$  点沿竖直方向的运动过程中求得, 由②式及③式

$$a_y = g - \frac{N}{m} \cos\alpha = 5.01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2},$$

由运动学公式 
$$h_2 = v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2. \quad (12)$$

$v_{0y}$  为小物块在刚过  $B$  点时的速度  $v_0$  沿竖直方向的分量,  $v_0$  可从能量守恒求得, 即

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mg(h_1 - h_2). \quad (13)$$

所以 
$$v_0 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)} = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}. \quad (14)$$

$$v_{0y} = v_0 \cos\alpha. \quad (15)$$

将⑬式代入⑫式, 解得

$$t = \frac{-v_{0y} \pm \sqrt{v_{0y}^2 + 2a_y h_2}}{a_y}.$$

取正号, 并代入数据, 得  $t = 0.492 \text{ s}.$

代入⑪式, 并注意到⑨式得

$$s = \frac{1}{2}a_y t^2 = 3.01 \times 10^{-3} \text{ m}. \quad (16)$$

代入⑩式, 得  $W = N \cdot \sin\alpha \cdot s = 6.00 \times 10^{-2} \text{ J}.$

**题 15** (2002·全国物理竞赛题) 历史上曾有人利用在地球位于其公转轨道的不同位置处从地球上测得木星的卫星周期, 首次求出了光的传播速度, 现已知离木星最近的一个卫星——木卫 I 的周期  $T_0 = 42.5 \text{ h}$ , 在地球公转轨道上各处从地球上测得的木卫 I 的所有周期值中, 最大的比  $T_0$  多  $15 \text{ s}$ , 最小的比  $T_0$  小  $15 \text{ s}$ . 假定地球、木星的公转轨道是同一平面内的圆轨道, 木卫 I 绕木星的运动轨道也是该平面内的圆轨道; 地球的轨道半径  $R_E = 1.5 \times 10^8 \text{ km}$ , 木星的轨道半径  $R_J = 7.8 \times 10^8 \text{ km}$ , 木卫 I 的轨道半径  $R_I = 4.2 \times 10^5 \text{ km}$ .

(1) 试分析论证: 测得木卫 I 周期最大值和最小值时, 相对木星而言, 地球位于其公转轨道的何处附近以及地球、木星和木卫 I 的运动对测量周期的影响.

(2) 利用这些数据并作合理近似求出光的传播速度  $c$ .

**【分析】** 对此题进行分析时要抓住主要因素, 忽略次要因素, 从而使问题得到简化.

**【解】** (1) 木星总是处在地球轨道之外, 故可由木星向地球轨道作两条切线, 当地球运行到切点附近时, 从地球上测得的木星卫 I 的周期取极值. 在其中一个切点处, 地球运行是背离木星的, 测得的周期是极大值; 在另一切点处, 地球运动趋向木星, 测得的周期是极小值. 与木星和

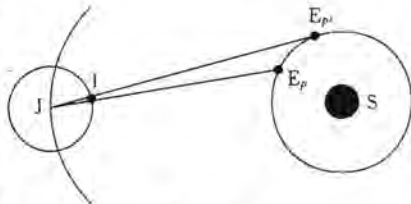


图 1-3-20

木卫 I 比较,地球的公转运动是影响测量结果的主要因素. 现论述如下:

如图 1-3-20 所示,用 S 表示太阳, J 表示木星, E 表示地球, I 表示木卫 I,  $E_p$  和  $E_p'$  代表地球在其公转轨道  $C_E$  上的两个不同位置(图中的  $JE_p'$  连线为由木星到地球轨道的切线,  $E_p'$  为切点,  $E_p$  为相对于  $E_p'$  地球在一个时段  $\Delta t = T_0$  之前的位置). 设太阳的质量为  $m_s$ , 地球质量为  $m_E$ , 公转速度为  $v_E$ , 角速度为  $\omega_E$ , 周期为  $T_E$ ; 木星的相应各量分别为  $m_J$ ,  $v_J$ ,  $\omega_J$  和  $T_J$ .

由万有引力定律及向心力公式有

$$G \frac{m_s m_E}{R_E^2} = m_E \frac{v_E^2}{R_E}, G \frac{m_s m_J}{R_J^2} = m_J \frac{v_J^2}{R_J}.$$

由此得

$$v_E = \sqrt{\frac{Gm_s}{R_E}}, v_J = \sqrt{\frac{Gm_s}{R_J}},$$

$$\frac{\omega_E}{\omega_J} = \frac{v_E R_J}{v_J R_E} = \sqrt{\left(\frac{R_J}{R_E}\right)^3} = 12.$$

$$\frac{T_E}{T_J} = \frac{2\pi R_E}{v_E} \frac{v_J}{2\pi R_J} = \sqrt{\left(\frac{R_E}{R_J}\right)^3} = \frac{1}{12}.$$

对于一段时间  $\Delta t = T_0 = 42.5 \text{ h}$  内,木卫 I 绕其轨道一周回到“原处”,而木星转过的圆心角为

$$\frac{42.5}{12 \times 365 \times 24} \times 360^\circ = 0.15^\circ. \quad (2)$$

很小,地球转过的圆心角为

$$\frac{42.5}{365 \times 24} \times 360^\circ = 1.75^\circ. \quad (3)$$

也很小.

这些结果表明:(a)地球、木星的运行速度量值同数量级;(b)经历  $T_0$  时段后,地球、木星转过很小角度,其运动方向几乎不变,故  $T_0$  可视为很小的时段;(c)  $R_J$  比  $R_E$  大得多,故相对于木-地连线  $JE_p'$  (或  $JE_p$ ),地球沿纵向运动,木星近似沿横向运动,故在经历  $\Delta t = T_0$  的小时段后,木星运动对木-地距离改变几乎无贡献,木卫 I 回到“原处”,对木卫 I-地球距离改变更无贡献,地球的运动几乎是木卫 I-地球距离改变的唯一因素,且在切点处最大,地球背离木星运动时距离增量为正,趋向木星运动时距离增量为负. 距离的增量正是木卫 I 周期差时段内光经过的路程.

(2)设在时刻  $t$ ,木卫 I 位于图中  $I_0$  处(注意此时为木蚀),则位于  $E_p$  处的地球观察到木卫 I 的时刻为  $t_1$ ,要比  $t$  略晚一小段时间  $\delta$ ,  $\delta$  等于光从  $I_0$  处传到  $E_p$  处所需的时间,经过一个周期  $T_0$  后的  $t'$  时刻,木卫 I 绕木星运行一周后又回到  $I_0$  处,此时地球已运动到  $E_p'$  处,地球观察到木卫 I 的时刻  $t_1'$  比  $t' = t + T_0$  晚一小段时间  $\delta'$ ,  $\delta'$  是光由  $I_0$  传到  $E_p'$  处所需的时间,而  $t_1' - t_1$  正是地球在切点附近测得的木卫 I 的周期,于是

$$T_1 = t_1' - t_1 = t' - t + \delta' - \delta = T_0 + \delta' - \delta. \quad (4)$$

$$T_1 - T_0 = \delta' - \delta = \frac{(E_p' E_p)}{c} = \frac{2\pi R_E T_0}{T_E c}. \quad (5)$$



由此得

$$c = 3.1 \times 10^8 \text{ m/s.}$$

对于地球在另一切点趋向木星运动的情况,类似的处理可给出完全相同的结果.

**题 16** (2001·全国物理竞赛题) 图 1-3-21 中 A 是一带有竖直立柱的木块,总质量为  $M$ ,位于水平地面上. B 是一质量为  $m$  的小球,通过一不可伸长的轻绳挂于立柱的顶端. 现拉动小球使绳伸直并处于水平位置. 然后让小球从静止状态下摆. 如在小球与立柱发生碰撞前,木块 A 始终未发生移动,则木块与地面之间的静摩擦因数至少为多大? (设 A 不会发生转动)

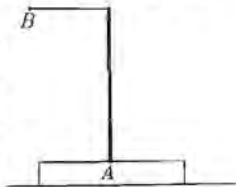


图 1-3-21

**【分析】** 对小球与木块分别进行动力学与静力学的分析,不难得出木块与地面之间的静摩擦因数  $\mu$  的表达式,关键是对  $\mu$  的表达式进行数学讨论,以求出  $\mu$  的最小值.

**【解】** 当小球摆至与水平方向的夹角为  $\theta$  时,小球的速度  $v$  (图 1-3-22) 由下式决定

$$mgl\sin\theta = \frac{1}{2}mv^2. \quad (1)$$

设此时小球受到绳的拉力为  $T$ ,由于小球做圆周运动,故有

$$T - mgsin\theta = m\frac{v^2}{l}. \quad (2)$$

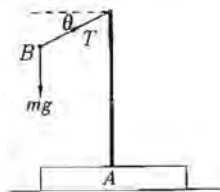


图 1-3-22

设地面对木块的支持力为  $N$ ,作用于木块的摩擦力为  $f$ ,因木块处于静止状态,有

$$T\sin\theta + Mg - N = 0. \quad (3)$$

$$T\cos\theta - f = 0. \quad (4)$$

设地面的静摩擦因数为  $\mu$ ,则有

$$f \leq \mu N. \quad (5)$$

解以上各式,得 
$$\mu \geq \frac{3m\sin\theta\cos\theta}{3m\sin^2\theta + M} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{a + 2\sin^2\theta} \quad (6)$$

式中 
$$a = \frac{3M}{3m}. \quad (7)$$

令 
$$F(\theta) = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{a + 2\sin^2\theta} \quad (8)$$

$F(\theta)$  与  $\theta$  有关,现要求不论  $\theta$  取何值,木块 A 均不发生移动,则静摩擦因数  $\mu$  的最小值  $\mu_{\min}$  等于  $F(\theta)$  的最大值  $F(\theta)_{\max}$ ,  $F(\theta)_{\max}$  可如下求得

$$\begin{aligned} F(\theta) &= \frac{2\sin\theta\cos\theta}{a(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + 2\sin^2\theta} \\ &= \frac{2\sin\theta\cos\theta}{a\cos^2\theta + (a+2)\sin^2\theta} \end{aligned}$$



$$= \frac{2}{\frac{a}{\tan\theta} + (a+2)\tan\theta}$$

$$= \frac{2}{\left[\sqrt{\frac{a}{\tan\theta}} - \sqrt{(a+2)\tan\theta}\right]^2 + 2\sqrt{a(a+2)}} \quad (9)$$

由⑨式可看出,当 $\sqrt{\frac{a}{\tan\theta}} = \sqrt{(a+2)\tan\theta}$ 时,即 $\tan\theta = \sqrt{\frac{a}{a+2}}$ 时, $F(\theta)$ 达极大值,其值为

$$F(\theta)_{\max} = \frac{1}{\sqrt{a(a+2)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3M}{3m}\left(\frac{2M}{3m}+2\right)}} = \frac{3m}{2\sqrt{M^2+3mM}}$$

故 
$$\mu_{\min} = \frac{3m}{2\sqrt{M^2+3mM}}$$

**题 17** (2001·全国物理竞赛题) 假设银河系的物质在宇宙中呈球对称分布,其球心称为银心. 距离银心相等处的银河系质量分布相同. 又假定距银心距离为  $r$  处的物质受到银河系的万有引力和将以  $r$  为半径的球面内所有银河系物质集中于银心时所产生的万有引力相同. 已知地球到太阳中心的距离为  $R_0$ , 太阳到银心的距离  $a = 1.75 \times 10^9 R_0$ , 太阳绕银心做匀速圆周运动, 周期  $T = 2.4 \times 10^8$  年, 太阳质量为  $M_s$ , 银河系中发亮的物质仅分布在  $r \leq 1.5a$  的范围内. 目前可能测得绕银心运动的物体距银心的距离不大于  $6a$ , 且在  $a \leq r \leq 6a$  范围内, 物体绕银心运动的速率是一恒量. 按上述条件解答:

- (1) 论证银河系物质能否均匀分布;
- (2) 计算银河系中发光物质质量最多有多少;
- (3) 计算整个银河系物质质量至少有多少;
- (4) 计算银河系中不发光物质(即暗物质)质量至少有多少.

上述计算结果均用太阳质量  $M_s$  表示.

**【分析】** 我们首先应进行合理假设,再运用万有引力、圆周运动的规律进行计算,将结果与观察实际相比较,判断假设的正确性.

万有引力与圆周运动的规律是解此题的关键所在.

**【解】** (1) 假定银河系物质集中分布在  $r \leq 1.5a$  的球面内, 并设其质量为  $M(1.5a)$ , 则在  $1.5a \leq r \leq 6a$  范围内, 质量为  $m$  的物体在银河系物质作用下做圆周运动时, 有

$$G \frac{M(1.5a)m}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

得

$$v = \sqrt{\frac{GM(1.5a)}{r}} \propto \sqrt{\frac{1}{r}}$$

即物体绕银心运动的速率  $v$  与  $\sqrt{\frac{1}{r}}$  成正比, 与观察的结果不一致.



(2) 假定银河系物质均匀分布在  $r \leq 6a$  的球面内, 可设银河系物质的密度为  $\rho$ , 则质量为  $m$  的物体在  $r \leq 6a$  的范围内绕银心做圆周运动时有

$$G \frac{\frac{4}{3} \pi r^3 \rho m}{r^2} = m \frac{v^2}{r}.$$

$$v = \sqrt{\frac{4}{3} \pi \rho G r^2} \propto r.$$

即绕银心运动的速率  $v$  与离银心的距离  $r$  成正比, 与观察的结果也不一致.

由以上分析可知, 银河系物质在  $r \leq 6a$  整个区域中, 不是均匀分布的. 发亮的物质仅分布在  $r \leq 1.5a$  的球体内, 在  $1.5a \leq r \leq 6a$  的范围内的物质全部是不发亮的物质, 即所谓“暗物质”. 当然并不排斥在  $r \leq 1.5a$  的球体内也存在暗物质.

(3) 根据太阳绕银心运动的周期  $T$  和太阳到银心的距离  $r_s = a$ , 可求出半径为  $a$  的球面内的银河系物质的质量  $M(a)$ . 以  $M_s$  表示太阳的质量,  $v_s$  表示太阳绕银心运动的速度, 则有

$$G \frac{M(a)M_s}{a^2} = M_s \frac{v_s^2}{a}. \quad (1)$$

而 
$$v_s = \frac{2\pi a}{T}. \quad (2)$$

由此得 
$$M(a) = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2}. \quad (3)$$

当质量为  $m$  的物体绕心做半径为  $r$  的圆周运动时, 有

$$G \frac{M(r)m}{r^2} = m \frac{v^2}{r}. \quad (4)$$

若  $a \leq r \leq 6a$ , 根据观察结果 
$$v = v_s. \quad (5)$$

由②③④⑤式得 
$$M(r) = M(a) \frac{r}{a}. \quad (6)$$

(4) 设地球绕太阳运动的周期为  $T_0$ ,  $T_0 = 1$  年. 则有

$$M_s = \frac{4\pi^2 R_0^3}{GT_0^2}. \quad (7)$$

由③⑦两式得 
$$M(a) = M_s \left( \frac{a}{R_0} \right) \left( \frac{T_0}{T} \right)^2.$$

代入有关数据得

$$M(a) = (1.75 \times 10^9)^3 \left( \frac{1}{2.4 \times 10^8} \right)^2 M_s = 9.3 \times 10^{10} M_s. \quad (8)$$

由⑥⑧两式, 可知银河系中能发亮的物质质量的上限

$$M(1.5a) = \frac{M(a)}{a} \times 1.5a = 1.4 \times 10^{11} M_s. \quad (9)$$

银河系物质质量的下限

$$M(6a) = \frac{M(a)}{a} \times 6a = 5.6 \times 10^{11} M_s. \quad (10)$$



其中不发光物质质量的下限

$$M(\text{暗}) = M(6a) - M(1.5a) = 4.2 \times 10^{11} M_{\odot} \quad (11)$$

**题 18** (1999·全国物理决赛题) 许多观察表明,自然界的周期性变化常会在地球上的动植物身上留下不同的痕迹. 鹦鹉螺是一种四亿多年前在地球上繁盛生长的软体动物,它在气室外壳上的波纹生长线数目随其生活的年代的不同而不同. 1978年美国科学家卡姆和普姆庇在研究了不同地质年代的鹦鹉螺壳后,发现现存的9个当代鹦鹉螺个体的气室外壳上的生长线都是30条左右,而古代36例鹦鹉螺化石中,地质年代愈古老,生长线的数目愈少:距今29百万年的新生代渐新世的标本上有26条;距今100百万年的中生代白垩纪的标本上有22条;距今180百万年的中生代侏罗纪的标本上有18条;距今320百万年的古生代炭纪的标本上有15条;距今470百万年的古生代奥陶纪的标本上只有9条.他们认为这些生长线记录着地球及其周期天体的演变历史,并根据上述数据作了一个大胆的假设:鹦鹉螺外壳上的生长线条数的变化是月球绕地球运动周期随年代变化的反映.试问:由此假设你能得出关于月球运动的什么结论?试通过计算说明此结论.

**注:**假设从古至今,地球质量和自转周期以及月球质量都没有发生变化.也不考虑物理常数的变化.

**【分析】**此题所求有很大的隐蔽性,给出鹦鹉螺不同时期的生长线数目,找到关于月球运动的结论,看似两个完全无关的问题,却能通过物理知识把它们联系起来,这正是当今创新教育所要体现的.解完此题能给我们不少启示.

**【解】**根据他们的大胆假设,目前鹦鹉螺生长线近似为30条的事实,可以认为是月球绕地球运动周期近似是30天的反映,把这一看法推广到地质年代(推广的依据是地球、月球质量在这段时间中没有发生变化,也不考虑物理常数的变化),就可以按照动力学规律算出任何地质年代月球绕地球的运动周期.

根据月球、地球质量的巨大差别,可以把它们之间的相对运动简化为月球围绕地球的圆周运动.根据开普勒第三定律,或万有引力定律和牛顿第二定律可知,月球运动周期 $T$ 和地月之间的距离 $L$ 有下列关系

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} L^3 = kL^3. \quad (1)$$

其中比例系数 $k$ 只与地球质量和引力常数有关.故在题中所给简化模型下,该比例常数也与年代无关,对任何地质年代都成立.若第 $i$ 个地质年代月球运动周期为 $T_i$ ,该年代的月地间的距离为 $L_i$ ,则有

$$T_i^2 = kL_i^3. \quad (2)$$

设当代的月球绕地球运动的周期为 $T_0$ ,它们间的距离为 $L_0$ ,则有

$$L_i = \left(\frac{T_i}{T_0}\right)^{\frac{2}{3}} L_0. \quad (3)$$

由此可算出不同地质年代地月之间的距离,如下表所示.



年代( $10^6$ 年)	生长线数 $T_i$	月球-地球距离 $L_i$ (以 $L_0$ 为单位)
渐新世 29	26	0.91
白垩纪 100	22	0.81
侏罗纪 180	18	0.71
石炭纪 320	15	0.63
奥陶纪 470	9	0.45

以年代为横坐标,月地间的距离为纵坐标,用上面的数据作图,结果如图1-3-23所示.各点大体上在一条直线上.可以看出,随着距今年代的增加,月球和地球之间距离按线性规律减少,即月球几乎正以恒定的速率远离我们而去.为了得到月球远离地球的速度,可在拟合直线上选取相距较远的两点,例如选  $A_1$  (100, 0.82) 和  $A_2$  (450, 0.44) 两组数据,可算得月球远离地球的速度  $v$  的近似值.

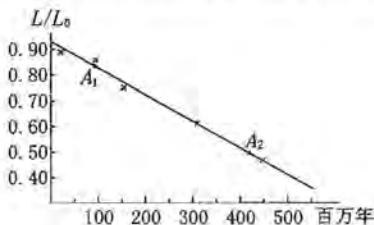


图 1-3-23

$$\bar{v} = -\frac{L_2 - L_1}{t_2 - t_1} = \frac{(0.44 - 0.82)L_0}{(450 - 100) \times 10^6} \quad (4)$$

如果取平均月-地距离为  $3.84 \times 10^5$  km(只要知道地球半径即可估算出此值,因为地月距离就是它的 60 倍,这正是牛顿当年讨论万有引力时所用的).这时,由④式可得平均速度的绝对值

$$\bar{v} = -\frac{0.38}{350} \times 3.84 \times 10^2 \text{ 米/年} = -0.42 \text{ 米/年} \quad (5)$$

其中,负号表示距离越来越远,即月球正以每年 0.42 m 的速度远离我们而去.

#### 题 19 (2008·亚洲物理奥赛题)

##### 木星的卫星

远在科学家能精确测量光速之前,丹麦天文学家欧·罗梅尔(O. Romer)就研究了木星卫星的星食时间.他通过观测木星的卫星绕木星运动的周期来确定光的速率.图1-3-24表示地球E绕太阳S的运动轨道和木星的一个卫星M绕木星J的运动轨道.他观测木星

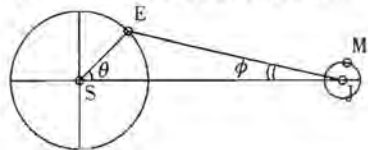


图1-3-24 地球E绕太阳S的运动轨道及卫星M绕木星J的运动轨道.地球E到太阳的平均距离  $R_E = 149.6 \times 10^6$  km,最大距离  $R_{E\max} = 1.015 R_E$ .地球绕太阳公转的周期为 365 天(即 1 年).木星绕太阳公转的周期为 11.9 年.卫星M与木星的距离  $R_M = 422 \times 10^3$  km.



现的时间间隔. 卫星处在行星的太阳阴影中, 称为卫星食, 简称卫食.

从一系列的卫食观测可以精确地求出卫食周期, 而该周期  $T$  的观察值大小依赖于地球在以连线 SJ 作为一根坐标轴的参照系中的相对位置. 卫星绕木星转动一周的平均周期为  $T_0 = 42 \text{ h } 28 \text{ min } 16 \text{ s}$ , 周期的最大观测值为  $T_0 + 15 \text{ s}$ .

a. 假定地球和木星绕太阳运动的轨道均为圆形, 试用牛顿万有引力定律估算木星和太阳的距离.

b. 计算地球在以太阳-木星连线 SJ 为一坐标轴的参照系中的相对角速度. 并计算地球在该参照系中的相对速率.

c. 设观测者(在地球上)处在  $\theta_k$  位置时, 看到卫星 M 从木星的阴影中出现. 当他处在  $\theta_{k+1}$  位置时, 看到卫星下一次从木星阴影中出现, 其中  $k=1, 2, 3, \dots$ . 从以上的观测结果中他得到卫星绕木星公转的表现周期  $T(t_k)$  依赖于观测时刻  $t_k$ . 他认为这种表现周期因观测时间而发生的变化, 是由于观测过程中地球相对于木星的距离  $d$  发生变化造成的. 根据图 1-3-25 推导出木星相对于地球

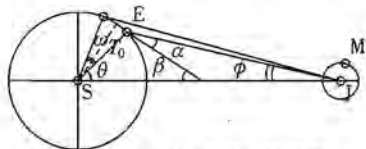


图 1-3-25 求  $\Delta d(t)$  的几何关系图

的距离与时间的关系  $d(t_k)$ , 然后利用该关系式的近似表达式解释该距离如何影响木星卫星绕木星公转的周期并估算你的距离近似表达式的相对误差.

d. 导出  $d(t_k)$  和  $T(t_k)$  的关系式, 画出  $T(t_k)$  对观测时间  $t_k$  的关系图, 指出观测者观测到表现周期为最大值、最小值以及真实值时的地球位置.

e. 从以上结果估算光的速率. 指出你的估算的误差来源, 并计算出这些误差大小的数量级.

f. 已知地球质量  $M_E = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$  以及 1 个月 = 27 d 7 h 3 min, 求木星的质量.

**【分析】** 这是一道关于行星及卫星运动的题, 解题涉及万有引力定律及圆周运动知识, 解答过程中特别要注意正确运用数学的近似计算.

**【解】** a. 假定地球和木星的轨道均为圆形, 则向心力等于太阳的引力, 有

$$\frac{GM_E M_S}{R_E^2} = \frac{M_E v_E^2}{R_E},$$

$$\frac{GM_J M_S}{R_J^2} = \frac{M_J v_J^2}{R_J}.$$

其中  $G$  为引力常量,  $M_S$  为太阳质量,  $M_E$  为地球质量,  $M_J$  为木星质量,  $R_E$  为地球轨道半径,  $R_J$  为木星轨道半径,  $v_E$  为地球公转速度,  $v_J$  为木星公转速度. 因而

$$\frac{R_J}{R_E} = \left( \frac{v_E}{v_J} \right)^2.$$

已知

$$T_E = \frac{2\pi}{\omega_E} = \frac{2\pi R_E}{v_E},$$

及

$$T_J = \frac{2\pi}{\omega_J} = \frac{2\pi R_J}{v_J}.$$



两式相比,得

$$\frac{T_E}{T_J} = \frac{v_E}{R_J} = \left( \frac{R_E}{R_J} \right)^{\frac{3}{2}}$$

由此得  $R_J = R_E \left( \frac{T_J}{T_E} \right)^{\frac{2}{3}} = 149.6 \times 10^6 \times 11.9^{\frac{2}{3}} \text{ km} = 779.8 \times 10^6 \text{ km}$ .

b. 相对角速度

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_E - \omega_J = 2\pi \left[ \frac{1}{365} - \frac{1}{11.9 \times 365} \right] \text{ rad/day} \\ &= 0.0158 \text{ rad/day.} \end{aligned}$$

相对速度

$$\begin{aligned} v &= \omega R_E = 0.0158 \times 149.6 \times 10^6 \text{ km/day} \\ &= 2.36 \times 10^6 \text{ km/day} = 27.3 \text{ km/s.} \end{aligned}$$

c. 木星与地球距离可表示为

$$\begin{aligned} \vec{d}(t) &= \vec{R}_J - \vec{R}_E, \\ d(t) &= (R_J^2 + R_E^2 - 2R_ER_J \cos \omega t)^{\frac{1}{2}} \\ &\approx R_J \left[ 1 - 2 \frac{R_E}{R_J} \cos \omega t + \dots \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\approx R_J \left[ 1 - \frac{R_E}{R_J} \cos \omega t + \dots \right]. \end{aligned}$$

上述表达式的相对误差(由略去的  $\frac{R_E}{R_J}$  的平方项引起)的数量级为

$$\left( \frac{R_E}{R_J} \right)^2 \approx 4\%.$$

当观测者在距离  $d(t)$  时看到卫星  $M$  从阴影中出现,当他在距离  $d(t+T_0)$  时看到卫星下一次从阴影中出现. 光行进距离  $\Delta d = d(t+T_0) - d(t)$  需要时间,因而观测者看到的是表观周期  $T$  而非真实周期  $T_0$ .

$$\Delta d = R_E [\cos \omega t - \cos \omega(t+T_0)] \approx R_E \omega T_0 \sin \omega t.$$

因为  $\omega T_0 \approx 0.03$ ,  $\sin \omega T_0 \approx \omega T_0$ ,  $\cos \omega T_0 \approx 1$ . 我们也可从图 1-3-25 的几何关系中直接得到以上近似表达式.

我们也可用另一种方法计算  $\Delta d$ . 由图 1-3-25 得

$$\begin{aligned} \beta &= \phi + \alpha, \\ \frac{\omega T_0}{2} + \beta + \theta &= \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

$$\Delta d(t) \approx \omega T_0 R_E \cos \alpha = \omega T_0 R_E \sin \left( \omega t + \frac{\omega T_0}{2} + \phi \right).$$

而  $\omega T_0 \approx 0.03$ , 及  $\phi < \frac{R_E}{R_J} \approx 0.19$ , 故  $\Delta d(t) \approx R_E \omega T_0 \sin \omega t$ .

d.  $T - T_0 \approx \frac{\Delta d(t)}{c}$ , 其中  $c$  是光速.



$$T \approx T_0 + \frac{\Delta d(t)}{c} = T_0 + \frac{R_E \omega T_0 \sin \omega t}{c}$$

$T \sim t$  图略. 当  $\omega t = \frac{\pi}{2}$  时观测者观测到最大周期; 当  $\omega t = \frac{3\pi}{2}$  时观测到最小周期; 当  $\omega t = 0$  和  $\pi$  时观测到真实周期.

e. 由 
$$T_{\max} = T_0 + \frac{R_E \omega T_0}{c}$$

得 
$$\frac{R_E \omega T_0}{c} = 15 \text{ s.}$$

因而 
$$c = \frac{R_E \omega T_0}{15}$$

以  $R_E = 149.6 \times 10^6 \text{ km}$ ,  $\omega = 0.0158 \text{ rad/day} = 1.82 \times 10^{-7} \text{ rad/s}$ ,  $T_0 = 42 \text{ h } 28 \text{ min } 16 \text{ s} = 152896 \text{ s} = 1.53 \times 10^5 \text{ s}$  代入上式, 得

$$c = \frac{149.6 \times 10^6 \times 1.82 \times 10^{-7} \times 1.53 \times 10^5}{15} \text{ km/s} = 2.78 \times 10^5 \text{ km/s.}$$

我们可估算由距离平方比  $\left(\frac{R_E}{R_1}\right)^2$  产生的相对误差约为 4%, 由时间测量产生的相对误差约为  $\frac{0.5}{15} \times 100\% = 3.4\%$ , 故总的相对误差约 7.4%. 另一误差来自轨道为圆形的假定, 实际上轨道是椭圆的, 其相对误差约为

$$100\% \times \frac{R_{E\max} - R_E}{R_E} \approx 1.5\%.$$

f. 我们可用推广的开普勒定律, 或对月球  $m$  绕地球做圆周运动和卫星  $M$  绕木星做圆周运动应用牛顿定律计算木星质量. 由此得

$$\frac{M_J}{M_E} = \left(\frac{T_{mE}}{T_M}\right)^2 \left(\frac{R_M}{R_{mE}}\right)^3,$$

$$M_J = 316M_E = 1.887 \times 10^{27} \text{ kg.}$$

### 题 20 (2002 · 国际物理竞赛题)

#### 重车在倾斜道路上的运动

图 1-3-26 是重车(压路机)的简化模型, 该车前后各有一圆柱体作为轮子, 在倾斜角为  $\theta$  的道路上运动. 每个圆柱轮总质量为  $m_2 = m_3 = M$ , 由外半径为  $R_0$ , 内半径为  $R_1 = 0.8R_0$  的圆柱壳及 8 根辐射条组成, 8 条辐条的总质量为  $0.2M$ , 支撑车体的下架的质量可以忽略. 圆柱体的模型如图 1-3-27 所示. 现重车在重力和摩擦力的作用下沿道路运动.

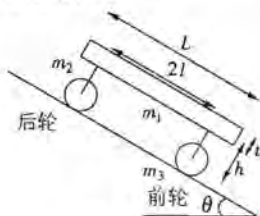


图 1-3-26

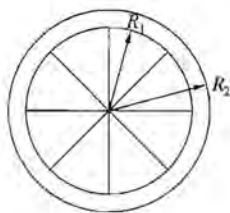


图 1-3-27



已知圆柱轮与地面的静摩擦因数和动摩擦因数分别是  $\mu_s$  和  $\mu_k$ , 车身质量为  $m_1 = 5M$ , 长为  $L$ , 厚为  $t$ , 前后轮之间距离为  $2l$ . 圆柱轮中心到车身底的距离为  $h$ . 设圆柱轮和它的轴之间的摩擦可以忽略.

问题:

(1) 计算每个圆柱轮的转动惯量.

(2) 画出作用在车身、前轮和后轮上的作用力. 写出每一部分的运动方程.

(3) 设车子从静止开始在重力和摩擦力作用下自由运动. 描述系统所有可能的运动形式, 并导出相应的车的加速度, 用题中所给的物理量表示.

(4) 假定车子从静止开始以纯滚动行进距离  $d$  m 后, 进入道路的另一部分, 这时所有的摩擦因数降为较小的常数  $\mu_s'$  和  $\mu_k'$ , 使得两个圆柱轮开始滑动, 计算车子行进总距离  $s$  m 后, 每个圆柱轮的线速度和角速度. 假定  $d$  和  $s$  均比车的线度大得多.

**【分析】** 这是一道较繁琐的力学问题, 它牵涉到转动惯量、受力分析及运动方程. 我们必须仔细分析车轮的滚动、滑动的各种可能性, 才能正确解答.

**【解】** 为简化模型, 作图并设  $h_1 = h + 0.5l$ ,  $R_0 = R$ .

(1) 计算圆柱轮转动惯量, 已知

$$R_i = 0.8R_0.$$

圆柱部分质量  $m_{\text{圆柱}} = 0.8M$ .

每根辐条质量  $m_{\text{辐条}} = 0.025M$ .

$$I = \int_{\text{圆柱}} r^2 dm + \int_{\text{辐条1}} r^2 dm + \dots + \int_{\text{辐条n}} r^2 dm.$$

$$\int_{\text{圆柱}} r^2 dm = 2\pi\sigma \int_{R_i}^{R_0} r^3 dr = 0.5\pi\sigma(R_0^4 - R_i^4)$$

$$= 0.5m_{\text{圆柱}}(R_0^2 + R_i^2)$$

$$= 0.5(0.8M)R^2(1 + 0.64) = 0.656MR^2.$$

$$\int_{\text{辐条}} r^2 dm = \lambda \int_0^{R_0} r^2 dr = \frac{1}{3}\lambda R_0^3 = \frac{1}{3}m_{\text{辐条}}R_0^2$$

$$= \frac{1}{3}0.025M(0.64R^2) = 0.00533MR^2.$$

于是每个圆柱轮的转动惯量为

$$I = 0.656MR^2 + 8 \times 0.00533MR^2 = 0.7MR^2.$$

(2) 受力和运动方程

为简化分析将系统分为 3 部分: 车身(第 1 部分), 可看  $J_{12h}$  成匀质平板; 后圆柱轮(两个后圆柱轮一起看成第 2 部分); 前圆柱轮(两个前圆柱轮一起看成第 3 部分).

第 1 部分: 车身

与该部分有关的运动方程为:

沿斜面方向的运动方程

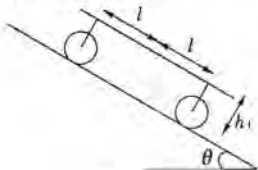


图 1-3-28

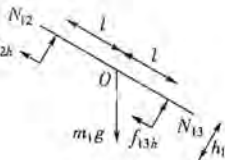


图 1-3-29



$$m_1 \sin\theta - f_{12h} - f_{13h} = m_1 a. \quad (1)$$

沿垂直于斜面方向的运动方程

$$m_1 g \cos\theta = N_{12} + N_{13}. \quad (2)$$

对  $O$  点的合力矩为零

$$N_{12}l - N_{13}l + f_{12h}h_1 + f_{13h}h_1 = 0. \quad (3)$$

第 2 部分:后圆柱轮

后轮运动方程

$$f_{21h} - f_2 + Mg \sin\theta = Ma,$$

$$N_2 - N_{21} - Mg \cos\theta = 0.$$

对纯滚动有

$$f_2 R = I a_2 = I \frac{a_2}{R}.$$

或 
$$f_2 = \frac{1}{R^2} a.$$

对有滑滚动有  $f_2 = \mu_k N_2.$

第 3 部分:前圆柱轮

前圆柱轮运动方程

$$f_{31h} - f_3 + Mg \sin\theta = Ma.$$

$$N_3 - N_{31} - Mg \cos\theta = 0.$$

对纯滚动有

$$f_3 R = I a_3 = I \frac{a_3}{R}.$$

或 
$$f_3 = \frac{1}{R^2} a.$$

对有滑滚动有  $f_3 = \mu_k N_3.$

(3) 由方程②⑤和⑨得

$$m_1 g \cos\theta = N_2 - m_2 g \cos\theta + N_3 - m_3 g \cos\theta.$$

$$N_2 + N_3 = (m_1 + m_2 + m_3) g \cos\theta = 7Mg \cos\theta. \quad (12)$$

由方程③⑤和⑧得

$$(N_3 - Mg \cos\theta)l - (N_2 - Mg \cos\theta)l = h_1 (f_2 + Ma - Mg \sin\theta + f_3 + Ma - Mg \sin\theta).$$

$$N_3 - N_2 = \frac{h_1 (f_2 + 2Ma - 2Mg \sin\theta + f_3)}{l}. \quad (13)$$

前后轮均做纯滚动情况:

由方程④和⑥得 
$$f_{21h} = \left(\frac{I}{R^2}\right)a + Ma - Mg \sin\theta. \quad (14)$$

由方程⑧和⑩得 
$$f_{31h} = \left(\frac{I}{R^2}\right)a + Ma - Mg \sin\theta. \quad (15)$$

由方程①⑭和⑮得

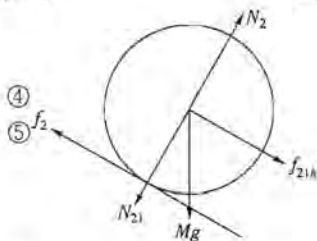


图 1-3-30

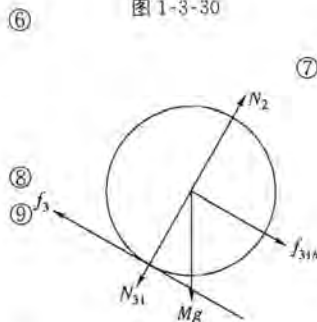


图 1-3-31



$$5Mg\sin\theta - \left[ \left( \frac{I}{R^2} \right) a + Ma - Mg\sin\theta \right] - \left[ \left( \frac{I}{R^2} \right) a + Ma - Mg\sin\theta \right] = m_1 a.$$

$$7Masin\theta = \left( \frac{2I}{R^2} + 7M \right) a.$$

$$a = \frac{7Mg\sin\theta}{7M + 2 \frac{I}{R^2}} = \frac{7Mg\sin\theta}{7M + 2 \frac{0.7MR^2}{R^2}} = 0.833g\sin\theta. \quad (15)$$

$$\begin{aligned} N_3 &= \frac{7M}{2} g\cos\theta + \frac{h_1}{l} \left[ \left( M + \frac{I}{R^2} \right) \times 0.833g\sin\theta - Mg\sin\theta \right] \\ &= 3.5Mg\cos\theta + \frac{h_1}{l} \left[ (M + 0.7M) \times 0.833g\sin\theta - Mg\sin\theta \right] \\ &= 3.5Mg\cos\theta + 0.41 \frac{h_1}{l} Mg\sin\theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_2 &= \frac{7M}{2} g\cos\theta - \frac{h_1}{l} \left[ \left( \frac{1}{R^2} + M \right) \times 0.833g\sin\theta - Mg\sin\theta \right] \\ &= 3.5Mg\cos\theta - \frac{h_1}{l} \left[ (0.7M + M) \frac{7Mg\sin\theta}{2 \times 0.7M + 7M} - Mg\sin\theta \right] \\ &= 3.5Mg\cos\theta - 0.41 \frac{h_1}{l} Mg\sin\theta. \end{aligned}$$

做纯滚动条件

$$\begin{aligned} f_2 &\leq \mu_s N_2 \quad \text{及} \quad f_3 \leq \mu_s N_3. \\ \frac{I_2}{R_2^2} a &\leq \mu_s N_2 \quad \text{及} \quad \frac{I_3}{R_3^2} a \leq \mu_s N_3. \end{aligned} \quad (17)$$

由式(17)(左下)得

$$0.7M \times 0.833g\sin\theta \leq \mu_s \left( 3.5Mg\cos\theta - 0.41 \frac{h_1}{l} Mg\sin\theta \right).$$

$$\tan\theta \leq \frac{3.5\mu_s}{0.5831 + 0.41\mu_s \frac{h_1}{l}}.$$

由式(17)(右下)得

$$0.7M \times 0.833g\sin\theta \leq \mu_s \left( 3.5Mg\cos\theta + 0.41 \frac{h_1}{l} Mg\sin\theta \right).$$

$$\tan\theta \leq \frac{3.5\mu_s}{0.5831 - 0.41\mu_s \frac{h_1}{l}}.$$

应取前一式.

前后轮均做有滑滚动的情况:

$$\text{由式(4)} \quad f_{21h} = Ma + \mu_k N_2 - Mg\sin\theta. \quad (18)$$

$$\text{由式(8)} \quad f_{31h} = Ma + \mu_k N_3 - Mg\sin\theta. \quad (19)$$

以式(18)和(19)代入式(1)得

$$5Mg\sin\theta - (Ma + \mu_k N_2 - Mg\sin\theta) - (Ma + \mu_k N_3 - Mg\sin\theta) = m_1 a.$$

$$a = \frac{7Mg\sin\theta - \mu_k N_2 - \mu_k N_3}{7M}$$

$$= g\sin\theta - \frac{\mu_k(N_2 + N_3)}{7M} \quad (20)$$

由以上两式得  $a = g\sin\theta - \mu_k g\cos\theta$ .  
前后轮同时都做有滚动的条件与前后轮均做纯滚动的条件相反,为

$$f_2 > \mu_s N_2' \text{ 和 } f_3 > \mu_s N_3'$$

$$\frac{I_2}{R_2^2} a > \mu_s N_2' \text{ 和 } \frac{I_3}{R_3^2} a > \mu_s N_3' \quad (21)$$

式中  $N_2'$  和  $N_3'$  为前后轮均做纯滚动时算得之值.

最后得  $\tan\theta > \frac{3.5\mu_s}{0.5831 + 0.41\mu_s \frac{h_1}{l}}$ .

及  $\tan\theta > \frac{3.5\mu_s}{0.5831 - 0.41\mu_s \frac{h_1}{l}}$ .

应取后式.

一轮做纯滚动而另一轮做有滚动的情况:

由式①可见必为前轮做纯滚动而后轮做有滚动.

由式④可得  $f_{21h} = m_2 a + \mu_k N_2 - m_2 g\sin\theta$ . (22)

由式⑤可得  $f_{31h} = m_3 a + \left(\frac{I}{R^2}\right) a - m_3 g\sin\theta$ . (23)

由式①②③和④得到

$$m_1 g\sin\theta - (m_2 a + \mu_k N_2 - m_2 g\sin\theta) - \left[ m_3 a + \left(\frac{I}{R^2}\right) a - m_3 g\sin\theta \right] = m_1 a.$$

$$m_1 g\sin\theta + m_2 g\sin\theta + m_2 g\sin\theta - \mu_k N_2 = \left[ \left(\frac{I}{R^2}\right) + m_3 \right] a + m_2 a + m_1 a.$$

$$5Mg\sin\theta + Mg\sin\theta + Mg\sin\theta - \mu_k N_2 = (0.7M + M)a + Ma + 5Ma.$$

$$a = \frac{7Mg\sin\theta - \mu_k N_2}{7.7M} = 0.9091g\sin\theta - \frac{\mu_k N_2}{7.7M} \quad (24)$$

$$N_3 - N_2 = \frac{h_1}{l} \left( \mu_k N_2 + \frac{I}{R^2} a + 2Ma - 2Mg\sin\theta \right).$$

$$N_3 - N_2 = \frac{h_1}{l} \left( \mu_k N_2 + 2.7 \times 0.9091Mg\sin\theta - \frac{2.7\mu_k N_2}{7.7} - 2Mg\sin\theta \right).$$

$$N_3 - N_2 \left( 1 + 0.65\mu_k \frac{h_1}{l} \right) = 0.4546 \frac{h_1}{l} Mg\sin\theta.$$

$$N_3 + N_2 = 7Mg\cos\theta.$$

由以上可得  $N_2 = \frac{7Mg\cos\theta - 0.4546 \frac{h_1}{l} Mg\sin\theta}{2 + 0.65\mu_k \frac{h_1}{l}}$ .



$$N_3 = 7Mg \cos\theta - \frac{7Mg \cos\theta - 0.4546 \frac{h_1}{l} Mg \sin\theta}{2 + 0.65\mu_k + \frac{h_1}{l}} \quad (25)$$

将以上结果代入式(24)即可得以下结果

$$\begin{aligned} a &= 0.9091g \sin\theta - \frac{\mu_k N_2}{7.7M} \\ &= 0.9091g \sin\theta - \frac{\mu_k}{7.7} \frac{7g \cos\theta - 0.4546 \frac{h_1}{l} g \sin\theta}{2 + 0.65\mu_k + \frac{h_1}{l}} \end{aligned} \quad (26)$$

该有滚有滑情况的条件为

$$\begin{aligned} f_2 > \mu_s N_2' \text{ 及 } f_3 \leq \mu_s N_3' \\ \frac{I}{R^2} a > \mu_s N_2' \text{ 及 } \frac{I}{R^2} a \leq \mu_s N_3' \end{aligned} \quad (27)$$

式中  $N_2'$  和  $N_3'$  为纯滚动情况下的正压力。

(4) 假定滚过距离  $d$  m 后, 前后轮均开始滑动, 共行进总距离  $s$  m. 设  $t_1$  s 内经过  $d$  m.

$$v_1 = v_0 + at_1 = 0 + a_1 t_1 = a_1 t_1,$$

$$d = v_0 t_1 + \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2,$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2d}{a_1}}.$$

$$v_1 = a_1 \sqrt{\frac{2d}{a_1}} = \sqrt{2da_1} = \sqrt{2d \cdot 0.833g \sin\theta} = \sqrt{1.666dg \sin\theta}. \quad (28)$$

滚过距离  $d$  m 后, 前后轮的角速度相同, 为

$$\omega_1 = \frac{v_1}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{1.666dg \sin\theta}. \quad (29)$$

接着车子滑动. 设车子从距离  $d$  滑至  $s$  需时  $t_2$  s, 则

$$v_2 = v_1 + a_2 t_2 = \sqrt{1.666dg \sin\theta} + a_2 t_2,$$

$$s - d = v_1 t_2 + \frac{1}{2} a_2 t_2^2,$$

$$t_2 = \frac{-v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2a_2(s-d)}}{a_2}. \quad (30)$$

$$v_2 = \sqrt{1.666dg \sin\theta} - v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2a_2(s-d)}.$$

用前面结果代入  $v_1$  和  $a_2$  即可得到最后结果。

至于角速度, 滑动时轮子受力矩

$$\tau = \mu_k NR,$$

$$a = \frac{\tau}{I} = \frac{\mu_k NR}{I}. \quad (31)$$

$$\begin{aligned}\omega_2 &= \omega_1 + at_2 \\ &= \frac{1}{R} \sqrt{1.666dg \sin\theta} + \frac{\mu_k NR - v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2a_2(s-d)}}{a_2}\end{aligned}$$

将每个圆柱轮的  $N$  分别代入上式,即可得到它们的角速度.

## 第四节 动量与能量

**题 1** (2008·全国物理预赛题) 如图 1-4-1 所示,“1”和“2”是放在水平地面上的两个小物块(可视为质点),与地面的滑动摩擦系数相同.两物块间的距离  $d=170.00\text{ m}$ ,它们的质量分别为  $m_1=2.00\text{ kg}$ ,  $m_2=3.00\text{ kg}$ . 现令它们分别以初速度  $v_1=10.00\text{ m/s}$  和  $v_2=2.00\text{ m/s}$  迎向运动,经过时间  $t=20.0\text{ s}$ ,两物块相碰,碰撞时间极短,碰后两者粘在一起运动.求从刚碰到到停止运动过程中损失的机械能.

图 1-4-1

**【分析】** 这是一道碰撞问题,特别需要注意的是,物体是在摩擦力作用下做减速运动,当速度减至零时,摩擦力消失,故物体不可能做反向运动.

**【解】** 因两物块与地面间的滑动摩擦系数相同,故它们在摩擦力作用下的加速度大小也是相同的,以  $a$  表示.先假定在时间  $t$  内,两物块始终做减速运动,并未停下.现分别以  $s_1$  和  $s_2$  表示它们走的路程,则有

$$s_1 = v_1 t - \frac{1}{2} at^2 \quad (1)$$

$$s_2 = v_2 t - \frac{1}{2} at^2 \quad (2)$$

$$\text{而} \quad s_1 + s_2 = d \quad (3)$$

解①~③三式并代入有关数据得

$$a = 0.175\text{ m/s}^2 \quad (4)$$

经过时间  $t$  后,两物块的速度分别为

$$v_1' = v_1 - at \quad (5)$$

$$v_2' = v_2 - at \quad (6)$$

$$\text{代人有关数据得} \quad v_1' = 6.5\text{ m/s}, v_2' = -1.5\text{ m/s} \quad (7)$$

$v_2'$  为负值( $v_2' < 0$ )是不合理的,这是因为物块 2 是在摩擦力作用下做减速运动,当速度减至零时,摩擦力消失,加速度不复存在.  $v_2' < 0$ , 表明物块 2 经历的时间小于  $t$  时已经停止运动,式②以及式④、⑥、⑦都不成立.在时间  $t$  内,物块 2 停止运动前滑行的路程应是

$$s_2 = \frac{v_2^2}{2a} \quad (8)$$

解①③⑧三式,并代入有关数据得

$$a = 0.20\text{ m/s}^2 \quad (9)$$



由⑤⑨两式解得刚要发生碰撞时两物块的速度  $v_1' = 6.0 \text{ m/s}$ ,  $v_2' = 0$ . 设  $v$  为两物块碰撞后的速度. 由动量守恒定律有

$$m_1 v_1' = (m_1 + m_2) v. \quad (10)$$

刚碰后到停止运动过程中损失的机械能

$$\Delta E = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2. \quad (11)$$

由⑩⑪两式得

$$\Delta E = \frac{1}{2} \frac{m_1^2 v_1'^2}{m_1 + m_2}. \quad (12)$$

代入有关数据得

$$\Delta E = 14.4 \text{ J}.$$

**题 2** (2005·全国物理预赛题) 一质量为  $m$  的小滑块 A 沿斜坡由静止开始下滑, 与一质量为  $km$  的静止在水平地面上的小滑块 B 发生正碰撞, 如图 1-4-2 所示. 设碰撞是弹性的, 且一切摩擦均不计. 为使二者能且只能发生两次碰撞, 则  $k$  的值应满足什么条件?

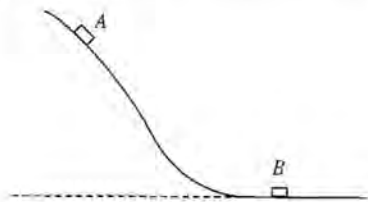


图 1-4-2

**【分析】** 此题的关键是正确列出碰撞的动量守恒与能量守恒方程, 然后进行分析、推理及数学计算.

**【解】** 设 A 与 B 碰撞前 A 的速度为  $v_0$ , 碰后 A 与 B 的速度分别为  $v_1$  与  $v_1'$ , 由动量守恒及机械能守恒定律有

$$mv_0 = mv_1 + kmv_1'. \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} mv_0^2 = \frac{1}{2} mv_1^2 + \frac{1}{2} kmv_1'^2. \quad (2)$$

由此解得

$$v_1 = \frac{-(k-1)}{k+1} v_0. \quad (3)$$

$$v_1' = \frac{2}{k+1} v_0. \quad (4)$$

为使 A 能回到坡上, 要求  $v_1 < 0$ , 这导致  $k > 1$ ; 为使 A 从坡上滑下后再能追上 B, 应有  $-v_1 > v_1'$ , 即  $(k-1) > 2$ , 这导致  $k > 3$ , 于是, 为使第二次碰撞能发生, 要求  $k > 3$ . (5)

对于第二次碰撞, 令  $v_2$  和  $v_2'$  分别表示碰后 A 和 B 的速度, 同样由动量守恒及机械能守恒定律有

$$m(-v_1) + kmv_1' = mv_2 + kmv_2'.$$

$$\frac{1}{2} mv_1^2 + \frac{1}{2} kmv_1'^2 = \frac{1}{2} mv_2^2 + \frac{1}{2} kmv_2'^2.$$

由此解得

$$v_2 = \frac{4k - (k-1)^2}{(k+1)^2} v_0. \quad (6)$$

$$v_2' = \frac{4(k-1)}{(k+1)^2} v_0. \quad (7)$$

若  $v_2 > 0$ , 则一定不会发生第三次碰撞, 若  $v_2 < 0$ , 且  $-v_2 > v_2'$ , 则会发生第三次碰撞. 故为使第三次碰撞不会发生, 要求 A 第三次从坡上滑下后速度的大小 ( $-v_2$ ) 不大于 B 速度的大小  $v_2'$ , 即

$$-v_2 \leq v_2'. \quad (8)$$

由⑥⑦⑧式得

$$k^2 - 10k + 5 \leq 0. \quad (9)$$

由

$$k^2 - 10k + 5 = 0.$$

可求得

$$k = \frac{10 \pm \sqrt{80}}{2} = 5 \pm 2\sqrt{5}.$$

⑨式的解为

$$5 - 2\sqrt{5} \leq k \leq 5 + 2\sqrt{5}. \quad (10)$$

⑩式与⑤式的交集即为所求

$$3 < k \leq 5 + 2\sqrt{5}.$$

**题 3** (2005·全国物理预赛题) 如图 1-4-3 所示, 一根长为  $l$  的细刚性轻杆的两端分别连结小球  $a$  和  $b$ , 它们的质量分别为  $m_a$  和  $m_b$ . 杆可绕距  $a$  球为  $\frac{1}{4}l$  处的水平定轴  $O$  在竖直平面内转动. 初始时杆处于竖直位置. 小球  $b$  几乎接触桌面. 在杆的右边水平桌面上, 紧挨着细杆放着一个质量为  $m$  的立方体匀质物块, 图中  $ABCD$  为过立方体中心且与细杆共面的截面. 现用一水平恒力  $F$  作用于  $a$  球上, 使之绕  $O$  轴逆时针转动, 求当  $a$  转过  $\alpha$  角时小球  $b$  速度的大小. 设在此过程中立方体物块没有发生转动, 且小球  $b$  与立方体物块始终接触没有分离, 不计一切摩擦.

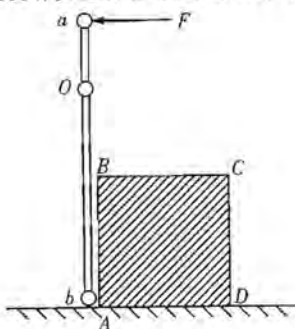


图 1-4-3

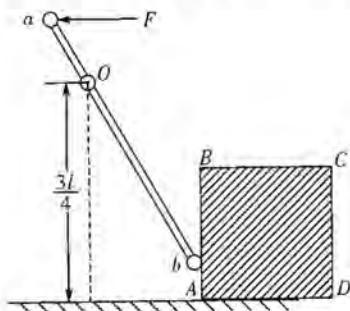


图 1-4-4

**【分析】** 此题的关键是弄清几个物体的速度关系, 正确应用功能原理.

**【解】** 如图 1-4-4 所示, 用  $v_b$  表示  $a$  转过  $\alpha$  角时  $b$  球速度的大小,  $v$  表示此时立方体速度的大小, 则有

$$v_b \cos \alpha = v. \quad (1)$$



由于  $b$  与立方体的接触是光滑的, 相互作用力总是沿水平方向, 而且两者在水平方向的位移相同, 因此相互作用的作用力和反作用力做功大小相同, 符号相反, 做功的总和为零. 因此在整个过程中推力  $F$  所做的功应等于球  $a$ 、 $b$  和正立方体机械能的增量. 现用  $v_a$  表示此时  $a$  球速度的大小, 因为  $a$ 、 $b$  角速度相同

$$Oa = \frac{1}{4}l, Ob = \frac{3}{4}l.$$

所以得

$$v_a = \frac{1}{3}v_b. \quad (2)$$

根据功能原理可知

$$F \cdot \frac{l}{4} \sin \alpha - \frac{1}{2} m_a v_a^2 - m_b g \left( \frac{l}{4} - \frac{l}{4} \cos \alpha \right) + \frac{1}{2} m_b v_b^2 + m_b g \left( \frac{3l}{4} - \frac{3l}{4} \cos \alpha \right) + \frac{1}{2} m v^2. \quad (3)$$

将①②式代入可得

$$F \cdot \frac{l}{4} \sin \alpha = \frac{1}{2} m_a \left( \frac{1}{3} v_b \right)^2 - m_b g \left( \frac{l}{4} - \frac{l}{4} \cos \alpha \right) + \frac{1}{2} m_b v_b^2 + m_b g \left( \frac{3l}{4} - \frac{3l}{4} \cos \alpha \right) + \frac{1}{2} m (v_b \cos \alpha)^2.$$

解得

$$v_b = \sqrt{\frac{9l [F \sin \alpha + (m_a - 3m_b) g (1 - \cos \alpha)]}{2m_a + 18m_b + 18m \cos^2 \alpha}}.$$

**题 4** (2004·全国物理预赛题) 如图 1-4-5 所示, 定滑轮  $B$ 、 $C$  与动滑轮  $D$  组成一滑轮组, 各滑轮与转轴间的摩擦、滑轮的质量均不计. 在动滑轮  $D$  上, 悬挂有砝码托盘  $A$ , 跨过滑轮组的不可伸长的轻线的两端各挂有砝码 2 和 3. 一根用轻线(图中穿过弹簧的那条竖直线)拴住的压缩轻弹簧竖直放置在托盘底上, 弹簧的下端与托盘底固连, 上端放有砝码 1(两者未粘连). 已知三个砝码和砝码托盘的质量都是  $m$ , 弹簧的劲度系数为  $k$ , 压缩量为  $l_0$ , 整个系统处在静止状态. 现突然烧断拴住弹簧的轻线, 弹簧便伸长, 并推动砝码 1 向上运动, 直到砝码 1 与弹簧分离. 假设砝码 1 在以后的运动过程中不会与托盘的顶部相碰. 求砝码 1 从与弹簧分离至再次接触经历的时间.

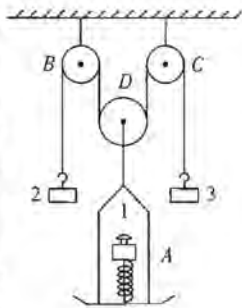


图 1-4-5

**【分析】** 此题是一道较复杂的力学问题. 我们需对各个物体进行受力分析, 并运用动量定理, 再结合能量守恒及牛顿第二定律, 即可解出结果.

**【解】** 设从烧断线到砝码 1 与弹簧分离经历的时间为  $\Delta t$ , 在这段时间内, 各砝码和砝码托盘的受力情况如图 1-4-6 所示. 图中,  $F$  表示  $\Delta t$  时间内任意时刻弹簧的弹力,  $T$  表示该时刻跨过滑轮组的轻绳中的张力,  $mg$  为重力,  $T_0$  为悬挂托盘的绳的拉力. 因  $D$  的质量忽略不计, 有

$$T_0 = 2T. \quad (1)$$



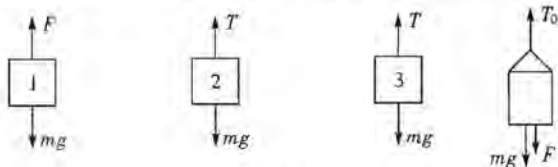


图 1-4-6

在时间  $\Delta t$  内任一时刻,砝码 1 向上运动,托盘向下运动,砝码 2、3 则向上升起,但砝码 2、3 与托盘速度的大小是相同的.设在砝码 1 与弹簧分离的时刻,砝码 1 的速度大小为  $v_1$ ,砝码 2、3 与托盘速度的大小都是  $v_2$ ,由动量定理,有

$$I_F - I_{mg} = mv_1. \quad (2)$$

$$I_T - I_{mg} = mv_2. \quad (3)$$

$$I_T - I_{mg} = mv_2. \quad (4)$$

$$I_F + I_{mg} - I_{T_0} = mv_2. \quad (5)$$

式中  $I_F$ 、 $I_{mg}$ 、 $I_T$ 、 $I_{T_0}$  分别代表力  $F$ 、 $mg$ 、 $T$ 、 $T_0$  在  $\Delta t$  时间内冲量的大小.注意到①式,有

$$I_{T_0} = 2I_T. \quad (6)$$

由②③④⑤⑥各式得 
$$v_2 = \frac{1}{3}v_1. \quad (7)$$

在弹簧伸长过程中,弹簧的上端与砝码 1 一起向上运动,下端与托盘一起向下运动.以  $\Delta l_1$  表示在  $\Delta t$  时间内弹簧上端向上运动的距离, $\Delta l_2$  表示其下端向下运动的距离.由于在弹簧伸长过程中任意时刻,托盘的速度都为砝码 1 的速度的  $\frac{1}{3}$ ,

故有 
$$\Delta l_2 = \frac{1}{3}\Delta l_1. \quad (8)$$

另有 
$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = l_0. \quad (9)$$

在弹簧伸长过程中,机械能守恒,弹簧弹性势能的减少等于系统动能和重力势能的增加,即有

$$\frac{1}{2}kl_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + 3 \times \frac{1}{2}mv_2^2 + mv\Delta l_1 - mg\Delta l_2 + 2mg\Delta l_2. \quad (10)$$

由⑦⑧⑨⑩式得 
$$v_1^2 = \frac{3}{2m} \left( \frac{1}{2}kl_0^2 - mgl_0 \right). \quad (11)$$

砝码 1 与弹簧分开后,砝码做上抛运动,上升到最大高度经历的时间为  $t_1$ ,有 
$$v_1 = gt_1. \quad (12)$$

砝码 2、3 和托盘的受力情况如图 1-4-7 所示,以  $a$  表示加速度的大小,有

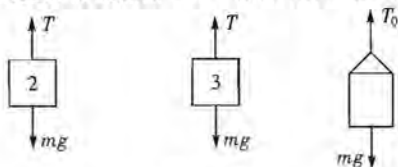


图 1-4-7



$$mg - T = ma. \quad (13)$$

$$mg - T = ma. \quad (14)$$

$$T_0 - mg = ma. \quad (15)$$

$$T_0 = 2T. \quad (16)$$

由⑭⑮和⑯式得  $a = \frac{1}{3}g.$  (17)

托盘的加速度向上,初速度  $v_2$  向下,设经历时间  $t_2$ , 托盘速度变为零,有  $v_2 = at_2.$  (18)

由⑦⑱⑲和⑳式,得  $t_1 = t_2 = \frac{v_1}{g}.$  (19)

即砝码 1 自与弹簧分离到速度为零经历的时间与托盘自分离到速度为零经历的时间相等. 由对称性可知,当砝码回到分离位置时,托盘亦回到分离位置,即再经历  $t_1$ , 砝码与弹簧相遇. 题中要求的时间

$$t_B = 2t_1. \quad (20)$$

由⑪⑫⑳式得  $t_B = \frac{2}{g} \sqrt{\frac{3}{2m} \left( \frac{1}{2} kl_0^2 - mgl_0 \right)}.$

**题 5** (2003·全国物理预赛题) 质量为  $M$  的运动员手持一质量为  $m$  的物块,以速率  $v_0$  沿与水平面成  $\alpha$  角的方向向前跳跃(如图 1-4-8). 为了能跳得更远一点,运动员可在跳远全过程中的某一位置处,沿某一方向把物块抛出. 物块抛出时相对运动员的速度的大小  $u$  是给定的,物块抛出后,物块和运动员都在同一竖直平面内运动.



图 1-4-8

(1)若运动员在跳远的全过程中的某时刻  $t_0$  把物块沿与  $x$  轴负方向成某  $\theta$  角的方向抛出,求运动员从起跳到落地所经历的时间.

(2)在跳远的全过程中,运动员在何处把物块沿与  $x$  轴负方向成  $\theta$  角的方向抛出,能使自己跳得更远? 若  $v_0$  和  $u$  一定,在什么条件下可跳得更远? 并求出运动员跳的最大距离.

**【分析】** 这是一道关于斜抛运动及动量守恒的力学问题,解题过程中要注意进行必要的讨论与分析.

**【解】** (1)规定运动员起跳的时刻为  $t=0$ ,设运动员在  $P$  点(见图 1-4-9)抛出物块. 以  $t_0$  表示运动员到达  $P$  点的时刻,则运动员在  $P$  点的坐标  $x_P$ 、 $y_P$  和抛物前的速度  $v$  的分量  $v_{Px}$ 、 $v_{Py}$  分别为

$$v_{Px} = v_0 \cos \alpha, \quad (1)$$

$$v_{Py} = v_0 \sin \alpha - gt_0. \quad (2)$$

$$x_P = v_0 t_0 \cos \alpha. \quad (3)$$

$$y_P = v_0 t_0 \sin\alpha - \frac{1}{2} g t_0^2. \quad (4)$$

设在刚抛出物块后的瞬间,运动员的速度  $v$  的分量大小分别为  $v_{Px}$ 、 $v_{Py}$ , 物块相对运动员的速度  $u$  的分量大小分别为  $u_x$ 、 $u_y$ , 方向分别沿负  $x$ 、负  $y$  方向. 则动量守恒定律可知

$$Mv_{Px} + m(v_{Px} - u_x) = (M+m)v_{Px}. \quad (5)$$

$$Mv_{Py} + m(v_{Py} - u_y) = (M+m)v_{Py}. \quad (6)$$

因  $u$  的方向与  $x$  轴负方向的夹角为  $\theta$ , 故有

$$u_x = u \cos\theta. \quad (7)$$

$$u_y = u \sin\theta. \quad (8)$$

解式①②⑤⑥和式⑦⑧, 得

$$v_{Px} = v_0 \cos\alpha + \frac{m u \cos\theta}{M+m}. \quad (9)$$

$$v_{Py} = v_0 \sin\alpha - g t_0 + \frac{m u \sin\theta}{M+m}. \quad (10)$$

抛出物块后, 运动员从  $P$  点开始沿新的抛物线运动, 其初速度为  $v_{Px}$ 、 $v_{Py}$ . 在  $t$  时刻 ( $t > t_0$ ) 运动员的速度和位置为

$$v_x = v_{Px}. \quad (11)$$

$$v_y = v_{Py} - g(t - t_0). \quad (12)$$

$$x = x_P + v_{Px}(t - t_0) = \left( v_0 \cos\alpha + \frac{m u_x}{M+m} \right) t - \frac{m u_x}{M+m} t_0. \quad (13)$$

$$y = y_P + v_{Py}(t - t_0) - \frac{1}{2} g(t - t_0)^2. \quad (14)$$

由式③④⑨⑩⑬⑭, 可得

$$x = \left( v_0 \cos\alpha + \frac{m u \cos\theta}{M+m} \right) t - \frac{m u \cos\theta}{M+m} t_0. \quad (15)$$

$$y = 2 \left( v_0 \sin\alpha + \frac{m u \sin\theta}{M+m} \right) t - g t^2 - \frac{2 m u \sin\theta}{M+m} t_0. \quad (16)$$

运动员落地时  $y=0$ .

$$\text{由式⑬得 } g t^2 - 2 \left( v_0 \sin\alpha + \frac{m u \sin\theta}{M+m} \right) t + \frac{2 m u \sin\theta}{M+m} t_0 = 0. \quad (17)$$

方程的根为

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha + \frac{m u \sin\theta}{M+m} \pm \sqrt{\left( v_0 \sin\alpha + \frac{m u \sin\theta}{M+m} \right)^2 - 2g \frac{m u \sin\theta}{M+m} t_0}}{g}. \quad (18)$$

式⑬给出两个根中, 只有当“ $\pm$ ”号取“ $+$ ”才符合题意, 因为从式⑫和式⑩可求

出运动员从  $P$  点到最高点的时间为式  $\frac{v_0 \sin\alpha + \left( \frac{m u \sin\theta}{M+m} \right)}{g}$ .

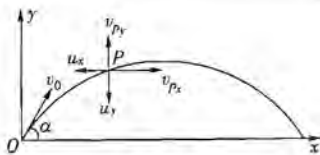


图 1-4-9



从起跳到落地所经历的时间应比上面给出的时间大,故从起跳到落地所经历的时间为

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha + \frac{m u \sin \theta}{M+m} + \sqrt{\left(v_0 \sin \alpha + \frac{m u \sin \theta}{M+m}\right)^2 - 2g \frac{m u \sin \theta}{M+m} t_0}}{g} \quad (19)$$

由式(19)可以看出,  $t$  越大,  $t_0$  越小, 跳的距离  $x$  越大. 由式(19)可以看出, 当  $t_0 = 0$  时,  $t$  的值最大, 由式(3)和式(4)可知, 抛出物块处的坐标为

$$x_P = 0, y_P = 0. \quad (20)$$

即应在原点亦即在刚起跳时把物块抛出, 运动员可跳得远一点. 由式(19)可以得到运动员自起跳至落地所经历的时间为

$$T = 2 \frac{v_0 \sin \alpha}{g} + 2 \frac{m u \sin \theta}{M+m g}.$$

把  $t_0 = 0$  和  $t = T$  代入式(19), 可求得跳远的距离, 为

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} + \frac{2m v_0 u}{(M+m)g} \sin(\theta + \alpha) + \frac{m^2 u^2}{(M+m)^2 g} \sin 2\theta. \quad (21)$$

可见, 若  $\sin 2\alpha = 1, \sin(\theta + \alpha) = 1, \sin 2\theta = 1.$

即  $\alpha = \frac{\pi}{4}, \theta = \frac{\pi}{4}.$  (22)

时,  $x$  有最大值, 即沿与  $x$  轴成  $45^\circ$  方向跳起, 且跳起后立即沿与负  $x$  轴成  $45^\circ$  方向抛出物块, 则  $x$  有最大值, 此最大值为

$$x_m = \frac{v_0^2}{g} + \frac{2m v_0 u}{(M+m)g} + \frac{m^2 u^2}{(M+m)g}.$$

**题 6** (2003·全国物理预赛题) 有一个摆长为  $l$  的摆(摆球可视为质点, 摆线的质量不计), 在过悬挂点的竖直线上距悬挂点  $O$  的距离为  $x$  处 ( $x < l$ ) 的  $C$  点有一固定的钉子, 如图 1-4-10 所示, 当摆摆动时, 摆线会受到钉子的阻挡. 当  $l$  一定而  $x$  取不同值时, 阻挡后摆球的运动情况不同. 现将摆拉到位于竖直线的左方(摆球的高度不超过  $O$  点), 然后放手, 令其自由摆动, 如果摆线被钉子阻挡后, 摆球恰巧能够击中钉子, 试求  $x$  的最小值.

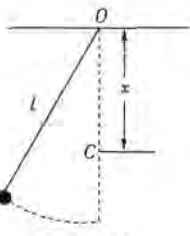


图 1-4-10

**【分析】** 如果摆球能击中钉子, 则必定在某位置时摆线张力为零, 其开始松弛, 而后摆球在重力作用下做斜抛运动, 下落时正好击中钉子. 因而, 我们必须列出摆球在竖直平面内做圆周运动的有关运动方程及机械能守恒方程, 并进一步进行分析, 方可求出结果.

**【解】** 摆线受阻后在一段时间内摆球做圆周运动, 若摆球的质量为  $m$ , 则摆球受重力  $mg$  和摆线拉力  $T$  的作用, 设在这段时间内任一时刻的速度为  $v$ , 如图 1-4-11 所示. 用  $\alpha$  表示此时摆线与重力方向之间的夹角, 则有方程式

$$T + mg \cos \alpha = \frac{m v^2}{l - x}. \quad (1)$$

运动过程中机械能守恒,令 $\theta$ 表示摆线在起始位置时与竖直方向的夹角,取 $O$ 点为势能零点,则有关系

$$-mgl\cos\theta = \frac{1}{2}mv^2 - mg[x - (l-x)\cos\alpha]. \quad (2)$$

摆受阻后,如果后来摆球能击中钉子,则必定在某位置时摆线开始松弛,此时 $T=0$ ,此后摆球仅在重力作用下做斜抛运动.设在該位置时摆球速度 $v=v_0$ ,摆线与竖直线的夹角 $\alpha=\alpha_0$ ,由式①得

$$v_0^2 = g(l-x)\cos\alpha_0. \quad (3)$$

$$\text{代入式(2), 求出 } 2l\cos\theta = 3(x-l)\cos\alpha_0 + 2x. \quad (4)$$

要求做斜抛运动的摆球击中 $C$ 点,则应满足下列关系式:

$$(l-x)\sin\alpha_0 = v_0 t \cos\alpha_0. \quad (5)$$

$$(l-x)\cos\alpha_0 = -v_0 t \sin\alpha_0 + \frac{1}{2}gt^2. \quad (6)$$

利用式⑤和式⑥消去 $t$ ,得到

$$v_0^2 = \frac{g(l-x)\sin^2\alpha_0}{2\cos\alpha_0}. \quad (7)$$

$$\text{由式(3)(7)得到 } \cos\alpha_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad (8)$$

$$\text{代入式(4), 求出 } \theta = \arccos\left[\frac{x(2+\sqrt{3})-l\sqrt{3}}{2l}\right]. \quad (9)$$

$\theta$ 越大, $\cos\theta$ 越小, $x$ 越小, $\theta$ 最大值为 $\frac{\pi}{2}$ ,由此可求得 $x$ 的最小值

$$x(2+\sqrt{3}) = \sqrt{3}l.$$

$$\text{所以 } x = (2\sqrt{3}-3)l = 0.464l.$$

**题 7** (1999·全国物理预赛题) 一质量为 $M$ 的平顶小车,以速度 $v_0$ 沿水平的光滑轨道做匀速直线运动.现将一质量为 $m$ 的小物块无初速地放置在车顶前缘.已知物块和车顶之间的动摩擦因数为 $\mu$ .

(1)若要求物块不会从车顶后缘掉下,则该车顶最少要多长?

(2)若车顶长度符合(1)问中的要求,整个过程中摩擦力共做了多少功?

**【分析】**物块在车顶滑动时,相互间的摩擦一方面使物块加速,另一方面使车减速,两者速度趋近,当两者速度相等时,物体在车顶滑过的路程即为车顶的最小长度.

**【解】**(1)方法1:物块放到小车上以后,由于摩擦力的作用,当以地面为参考系时,物块将从静止开始做加速运动,而小车将做减速运动.若物块达到小车上后缘时的速度恰好等于小车此时的速度,则物块就刚好不脱落.令 $v$ 表示此时的速度,在这个过程中,若以物块和小车为系统,因为水平方向未受外力,所以此方向上动量守恒,即

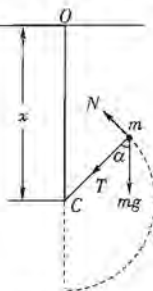


图 1-4-11



$$Mv_0 = (m + M)v. \quad (1)$$

从能量来看,在上述过程中,物块动能的增量等于摩擦力对物块所做的功,即

$$\frac{1}{2}mv^2 = \mu mgs_1. \quad (2)$$

其中  $s_1$  为物块移动的距离. 小车动能的增量等于摩擦力对小车所做的功,即

$$\frac{1}{2}Mv^2 - \frac{1}{2}Mv_0^2 = \mu mgs_2. \quad (3)$$

其中  $s_2$  为小车移动的距离. 用  $l$  表示车顶的最小长度,则

$$l = s_2 - s_1. \quad (4)$$

由以上四式,可解得

$$l = \frac{Mv_0^2}{2\mu g(m+M)}. \quad (5)$$

即车顶的长度至少应为

$$l = \frac{Mv_0^2}{2\mu g(m+M)}.$$

方法 2: 用作图法求解. 在  $v-t$  坐标系中作出小车、物体的运动图线,如图 1-4-12 所示.  $v$  为物体最终的共同速度

$$v = v_0 - a_{\text{车}} t'. \quad (1)$$

$$a_{\text{车}} = \frac{\mu mg}{M}, \quad (2)$$

$$v = a_{\text{物}} t'. \quad (3)$$

$$a_{\text{物}} = \mu g. \quad (4)$$

由①②③④得  $t' = \frac{Mv_0}{\mu(M+m)g}.$

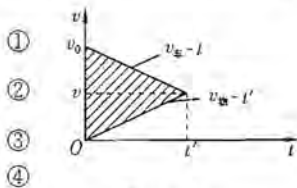


图 1-4-12

车顶的最短长度应等于车、物的  $v-t$  图线下面积之差,如图中斜线所示,

$$\Delta s = \frac{v_0}{2} t' = \frac{Mv_0^2}{2\mu(M+m)g}.$$

所以车顶的最短长度为  $l = \frac{Mv_0^2}{2\mu(M+m)g}.$

(2) 由功能关系可知,摩擦力所做的功等于系统动能的增量,即

$$A = \frac{1}{2}(m+M)v^2 - \frac{1}{2}Mv_0^2. \quad (6)$$

由①⑥式可得

$$A = -\frac{mMv_0^2}{2(m+M)}. \quad (7)$$

**题 8** (2008·全国物理竞赛题) 足球射到球门横梁上时,因速度方向不同,射在横梁上的位置有别,其落地点也是不同的. 已知球门的横梁为圆柱形,设足球以水平方向的速度沿垂直于横梁的方向射到横梁上,球与横梁间的滑动摩擦系数  $\mu=0.70$ ,球与横梁碰撞时的恢复系数  $e=0.70$ . 试问足球应射在横梁上什么位置才能使球心落在球门线内(含球门线上)? 足球射在横梁上的位置用球与横梁的撞击点到横梁轴线的垂线与水平方向(垂直于横梁的轴线)的夹角  $\theta$  ( $\theta < 90^\circ$ ) 来表示. 不计空气及重力的影响.

**【分析】** 解答此题需涉及动量定理、碰撞的恢复系数等知识.

**【解】** 足球射到球门横梁上的情况如图 1-4-13 所示(图所在的平面垂直于横梁轴线). 图中  $B$  表示横梁的横截面,  $O_1$  点为横梁的轴线,  $O_1O_1'$  为过横梁轴线并垂直于轴线的水平线,  $A$  表示足球,  $O_2$  点为其球心,  $O$  点为足球与横梁的碰撞点, 碰撞点  $O$  的位置由直线  $O_1O_2$  与水平线  $O_1O_1'$  的夹角  $\theta$  表示. 设足球射到横梁上时球心速度的大小为  $v_0$ , 方向垂直于横梁沿水平方向, 与横梁碰撞后球心速度的大小为  $v$ , 方向用它与水平方向的夹角  $\varphi$  表示(如图 1-4-13). 以碰撞点  $O$  为原点作直角坐标系  $Oxy$ ,  $y$  轴与  $O_2O_1$  重合. 以  $\alpha_0$  表示碰前速度的方向与  $y$  轴的夹角, 以  $\alpha$  表示碰后速度的方向与  $-y$  轴的夹角, 足球被横梁反弹后落在何处取决于反弹后的速度方向, 即角  $\alpha$  的大小.

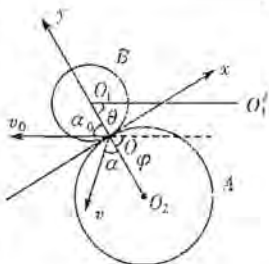


图 1-4-13

以  $F_x$  表示横梁作用于足球的力在  $x$  方向的分量的大小,  $F_y$  表示横梁作用于足球的力在  $y$  方向的分量的大小,  $\Delta t$  表示横梁与足球相互作用的时间,  $m$  表示足球的质量, 有

$$F_x \Delta t = m v_{0x} - m v_x, F_y \Delta t = m v_y + m v_{0y}. \quad (1)$$

式中  $v_{0x}$ 、 $v_{0y}$  和  $v_x$ 、 $v_y$  分别是碰前和碰后球心速度在坐标系  $Oxy$  中的分量大小. 根据摩擦定律有

$$F_x = \mu F_y. \quad (2)$$

由式①②得

$$\mu = \frac{v_{0x} - v_x}{v_y + v_{0y}}. \quad (3)$$

根据恢复系数的定义有

$$v_y = e v_{0y}. \quad (4)$$

因

$$\tan \alpha_0 = \frac{v_{0x}}{v_{0y}}, \tan \alpha = \frac{v_x}{v_y}. \quad (5)$$

由式③~⑤得

$$\tan \alpha = \frac{1}{e} \tan \alpha_0 - \mu \left( 1 + \frac{1}{e} \right).$$

由图 1-4-13 可知

$$\varphi = \theta + \alpha. \quad (6)$$

若足球被球门横梁反弹后落在球门线内, 则应有

$$\varphi \geq 90^\circ.$$

在临界情况下, 若足球被反弹后刚好落在球门线上, 这时  $\varphi = 90^\circ$ . 由式⑥得

$$\tan(90^\circ - \theta) = \tan \alpha.$$

因足球是沿水平方向射到横梁上的, 故  $\alpha_0 = \theta$ , 有

$$\frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{e} \tan \theta - \mu \left( 1 + \frac{1}{e} \right). \quad (7)$$

这就是足球反弹后落在球门线上时入射点位置  $\theta$  所满足的方程. 解式⑦得

$$\tan \theta = \frac{e\mu \left( 1 + \frac{1}{e} \right) \pm \left[ e^2 \mu^2 \left( 1 + \frac{1}{e} \right)^2 + 4e \right]^{\frac{1}{2}}}{2}. \quad (8)$$



代人有关数据得  $\tan\theta=1.6$ , 即  $\theta=58^\circ$ .

现要求球落在球门线内, 故要求  $\theta \geq 58^\circ$ .

**题 9** (2007·全国物理竞赛题) 如图 1-4-14 所示, 一块长为  $L=1.00\text{ m}$  的光滑平板  $PQ$  固定在轻质弹簧的上端, 弹簧的下端与地面固定连接. 平板被限制在两条竖直光滑的平行导轨之间(图中未画出竖直导轨), 从而只能在竖直方向运动. 平板与弹簧构成的振动系统的振动周期  $T=2.00\text{ s}$ . 一小球  $B$  放在一光滑的水平台面上, 台面的右侧边缘正好在平板  $P$  端的正上方, 到  $P$  端的距离为  $h=9.80\text{ m}$ . 平板静止在其平衡位置. 小球  $B$  与平板  $PQ$  的质量相等. 现给小球一水平向右的速度  $v_0$ , 使它从水平台面抛出. 已知小球  $B$  与平板发生弹性碰撞, 碰撞时间极短, 且碰撞过程中重力可忽略不计. 要使小球与平板  $PQ$  发生一次碰撞, 而且只发生一次碰撞,  $v_0$  的值应在什么范围内? 取  $g=9.80\text{ m/s}^2$ .

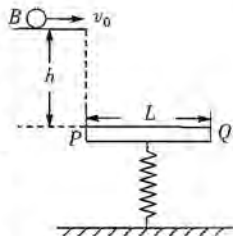


图 1-4-14

**【分析】** 此题的基础是平抛运动, 但它涉及动量守恒、能量守恒及简谐运动等知识.

**【解】** 如果小球的水平速度比较大, 它与平板的第一次碰撞正好发生在平板的边缘  $Q$  处, 这时  $v_0$  的值便是满足题中条件的最大值; 如果小球的水平速度较小, 在它和平板发生第一次碰撞后再次接近平板时, 刚好从平板的边缘  $Q$  处越过而不与平板接触, 这时  $v_0$  的值便是满足题中条件的最小值.

设小球从台面水平抛出到与平板发生第一次碰撞经历的时间为  $t_1$ , 有

$$h = \frac{1}{2} g t_1^2. \quad (1)$$

若碰撞正好发生在  $Q$  处, 则有  $L = v_0 t_1$ . (2)

从①②两式解得的  $v_0$  值便是满足题中条件的最大值, 即

$$v_{0\max} = L \sqrt{\frac{g}{2h}}. \quad (3)$$

代人有关数据, 得  $v_{0\max} = 0.71\text{ m/s}$ . (4)

如果  $v_0 < v_{0\max}$ , 小球与平板的碰撞处将不在  $Q$  点. 设小球第一次刚要与平板碰撞时在竖直方向的速度为  $v_1$ , 则有

$$v_1 = \sqrt{2gh}. \quad (5)$$

以  $v_1'$ 、 $v_1''$  分别表示碰撞结束时刻小球和平板沿竖直方向的速度, 由于碰撞时间极短, 在碰撞过程中, 小球和平板在竖直方向的动量守恒. 设小球和平板的质量都是  $m$ , 则有

$$mv_1 = mv_1' + mv_1''. \quad (6)$$

因为碰撞是弹性的, 且平板是光滑的, 由能量守恒可得

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_1'^2 + \frac{1}{2} m v_1''^2 + \frac{1}{2} m v_0^2. \quad (7)$$

解⑥⑦两式, 得  $v_1' = 0$ . (8)



$$v_1'' = v_1 = \sqrt{2gh}. \quad (9)$$

碰撞后,平板从其平衡位置以  $v_1''$  为初速度开始做简谐振动. 取固定坐标, 其原点  $O$  与平板处于平衡位置时板的上表面中点重合,  $x$  轴的方向竖直向下. 若以小球和平板发生碰撞的时刻作为  $t=0$ , 则平板在  $t$  时刻离开平衡位置的位移

$$x_{PQ} = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (10)$$

式中

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (11)$$

$A$  和  $\varphi$  是两个待定的常量. 利用参考圆方法, 在  $t$  时刻平板振动的速度

$$v_{PQ} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi). \quad (12)$$

因  $t=0$  时,  $x_{PQ}=0$ ,  $v_{PQ}=v_1''$ . 由⑨⑩⑫三式可求得

$$A = \frac{\sqrt{2gh}}{2\pi} T. \quad (13)$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}. \quad (14)$$

把⑬⑭两式代入⑩式, 得

$$x_{PQ} = \frac{\sqrt{2gh}}{2\pi} T \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{2}\right). \quad (15)$$

碰撞后, 小球开始做平抛运动. 如果第一次碰撞后, 小球再经过时间  $t_2$  与平板发生第二次碰撞且发生在  $Q$  处, 则在发生第二次碰撞时, 小球的  $x$  坐标为

$$x_B(t_2) = \frac{1}{2} g t_2^2. \quad (16)$$

$$\text{平板的 } x \text{ 坐标为 } x_{PQ}(t_2) = \frac{\sqrt{2gh}}{2\pi} T \cos\left(\frac{2\pi}{T}t_2 - \frac{\pi}{2}\right). \quad (17)$$

$$\text{在碰撞时, 有 } x_B(t_2) = x_{PQ}(t_2). \quad (18)$$

由⑯~⑱式, 代入有关数据, 得

$$4.90t_2^2 = 4.41 \cos\left(\pi t_2 - \frac{\pi}{2}\right). \quad (19)$$

这便是  $t_2$  满足的方程. 通过数值计算法求解方程, 可得(参见下面数值列表)

$$t_2 = 0.771 \text{ s}. \quad (20)$$

如果第二次碰撞正好发生在平板的边缘  $Q$  处, 则有

$$L = v_0(t_1 + t_2). \quad (21)$$

$$\text{由①⑳和㉑三式得 } v_0 = \frac{L}{t_1 + t_2} = 0.46 \text{ m/s}. \quad (22)$$

而满足题中要求的  $v_0$  的最小值应大于㉒式给出的值. 综合以上讨论,  $v_0$  的取值范围是

$$0.46 \text{ m/s} < v_0 \leq 0.71 \text{ m/s}. \quad (23)$$

附: ⑲式的数值求解. 用数值法要代入  $t_2$  的不同数值, 逐步逼近所求值, 如下表所列.



$t_2/s$	0.730	0.750	0.760	0.765	0.770	0.771	0.772	0.775	0.780	0.790	0.810
$x_{DQ}=4.41$ $\cdot \cos$ $(\pi t_2 - \frac{\pi}{2})/m$	3.31	3.12	3.02	2.96	2.91	2.91	2.90	2.86	2.81	2.70	2.48
$x_B=4.90t_2^2/m$	2.61	2.76	2.83	2.87	2.91	2.91	2.91	2.94	2.98	3.06	3.21
$(x_{DQ}-x_B)/m$	0.70	0.36	0.19	0.09	0	0	-0.01	-0.08	-0.17	-0.36	-0.73

**题 10** (2006·全国物理复赛题) 如图 1-4-15 所示, 一根质量可以忽略的细杆, 长为  $2l$ , 两端和中心处分别固连着质量均为  $m$  的小球  $B$ 、 $D$  和  $C$ , 开始时静止在光滑的水平桌面上. 桌面上另有一质量为  $M$  的小球  $A$ , 以一给定速度  $v_0$  沿垂直于杆  $DB$  的方向与右端小球  $B$  做弹性碰撞. 求刚碰后小球  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  的速度, 并详细讨论以后可能发生的运动情况.

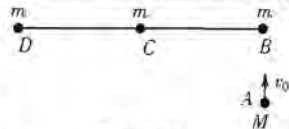


图 1-4-15

**【分析】** 小球发生的是弹性碰撞, 因而碰撞前后质点组的动量守恒、角动量守恒、能量守恒, 可由此对问题进行讨论、求解.

**【解】** 1. 求碰撞后小球  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  的速度.

碰撞前后质点组的动量守恒, 有

$$Mv_0 = Mv_A + mv_B + mv_C + mv_D \quad (1)$$

式中  $v_A$ 、 $v_B$ 、 $v_C$ 、 $v_D$  为刚碰撞后小球  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  的速度, 并假设它们的方向都与  $v_0$  的方向相同. 碰撞前后质点组的角动量守恒, 有

$$Mlv_0 = Mlv_A + mlv_B - mlv_D \quad (2)$$

这里角动量的参考点设在与  $C$  重合的空间固定点(选  $B$ 、 $D$  或别的空间点亦可), 且规定逆时针方向的角动量为正. 因为弹性碰撞, 碰撞前后质点组的动能相等, 有

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{1}{2}Mv_A^2 + \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}mv_D^2 \quad (3)$$

因为杆是刚性杆, 小球  $B$  和  $D$  相对于小球  $C$  的速度大小必相等, 方向相反, 所以有

$$v_B - v_C = v_C - v_D \quad (4)$$

联立①②③④式, 解得  $v_C = 0$ . (5)

或  $v_C = \frac{4M}{5M+6m}v_0$ . (6)

⑤式与碰撞尚未发生相对应, 不符合题意, 应舍去.

当  $v_C$  取⑥式时可解得

$$v_A = \frac{5M-6m}{5M+6m}v_0 \quad (7)$$

$$v_B = \frac{10M}{5M+6m}v_0 \quad (8)$$

$$v_D = -\frac{2M}{5M+6m}v_0. \quad (9)$$

2. 讨论碰撞后各小球的运动.

由⑥式可知,碰撞后,小球 C 以  $v_C = \frac{4M}{5M+6m}v_0$  的速度沿  $v_0$  方向做匀速运动.

由④⑧⑨式可知,碰撞后, B、D 两小球将绕小球 C 做匀角速度转动,角速度的大小为

$$\omega = \frac{v_B - v_C}{l} = \frac{6M}{5M+6m} \frac{v_0}{l}. \quad (10)$$

方向为逆时针方向.由⑦式可知,碰后小球 A 的速度的大小和方向与  $M$ 、 $m$  的大小有关,下面就  $M$ 、 $m$  不同而导致运动的不同情形进行讨论.

(i)  $v_A = 0$ , 即碰撞后,小球 A 停住,由⑦式知条件是

$$5M - 6m = 0.$$

即  $\frac{M}{m} = \frac{6}{5}$ . (11)

(ii)  $v_A < 0$ , 即碰撞后,小球 A 反方向运动,根据⑦式,发生这个运动的条件是

$$\frac{M}{m} < \frac{6}{5}. \quad (12)$$

(iii)  $v_A > 0$  但  $v_A < v_C$ , 即碰撞后小球 A 沿  $v_0$  方向做匀速直线运动,但其速度小于小球 C 的速度.由⑦式和⑧式,可知发生这个运动的条件是

$$5M - 6m > 0 \text{ 和 } 4M > 5M - 6m.$$

即  $\frac{6}{5}m < M < 6m$ . (13)

(iv)  $v_A > v_C$ , 即碰撞后小球 A 仍沿  $v_0$  方向运动,且其速度大于小球 C 的速度,发生这个运动的条件是

$$M > 6m. \quad (14)$$

(v)  $v_A = v_C$ , 即碰撞后小球 A 和小球 C 以相同的速度一起沿  $v_0$  方向运动,发生这个运动的条件是

$$M = 6m. \quad (15)$$

由于小球 B 和小球 D 绕小球 C 做圆周运动,当细杆转过  $180^\circ$  时,小球 D 将从小球 A 的后面与小球 A 相遇,而发生第二次碰撞,碰后小球 A 继续沿  $v_0$  方向运动,再也不可能发生第三次碰撞.这两次碰撞的时间间隔是

$$t = \frac{\pi}{\omega} = \frac{(5M+6m)\pi l}{6M} = \frac{\pi l}{v_0}. \quad (16)$$

第二次碰撞时,小球 C 走过的路程即两次碰撞点之间的距离

$$d = v_C t = \frac{2\pi l}{3}. \quad (17)$$

3. 求第二次碰撞后,小球 A、B、C、D 的速度.

第二次碰撞发生前一瞬间,细杆转过  $180^\circ$ . 这时,小球 B 的速度为  $v_0$ , 小球 D



的速度为  $v_0$ 。在第二次碰撞过程中,小球系统动量守恒、角动量守恒和能量守恒。设第二次碰撞后小球 A、B、C、D 的速度分别为  $v_A'$ 、 $v_B'$ 、 $v_C'$  和  $v_D'$ ,并假定它们的方向都与  $v_0$  的方向相同,有

$$Mv_0 + mv_B + mv_C + mv_D = Mv_A' + mv_B' + mv_C' + mv_D'. \quad (18)$$

注意到①式,有  $Mv_0 = Mv_A' + mv_B' + mv_C' + mv_D'$ . (18)

同理有  $Mlv_0 = Mlv_A' - mlv_B' + mlv_D'$ . (19)

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{1}{2}Mv_A'^2 + \frac{1}{2}mv_B'^2 + \frac{1}{2}mv_C'^2 + \frac{1}{2}mv_D'^2. \quad (20)$$

以及由杆的刚性条件有  $v_D' - v_C' = v_C' - v_B'$ . (21)

⑱式的角动量参考点仍设在空间固定点 C 处,即和 C 点重合的空间点。

把⑱⑲⑳㉑式与①②③④式对比,可以看到它们除了小球 B 和 D 互换之外是完全相同的,因此它们的解也是相似的,即有

$$v_C' = 0. \quad (22)$$

或  $v_C' = \frac{4M}{5M+6m}v_0$ . (23)

由㉑式给出的  $v_C'$  与未发生第二次碰撞相对应,不符合题意,应该舍去。符合题意的  $v_C' = 0$ ,即㉒式,这时

$$v_A' = v_0. \quad (24)$$

$$v_B' = 0. \quad (25)$$

$$v_D' = 0. \quad (26)$$

㉒㉓㉔式表明第二次碰撞后,小球 A 以速度  $v_0$  做匀速直线运动,即恢复到第一次碰撞前的运动,细杆和小球 B、C、D 则处于静止状态,亦恢复到第一次碰撞前的状态。

**例 11** (2004·全国物理竞赛题) 如图 1-4-16 所示,三个质量都是  $m$  的刚性小球 A、B、C 位于光滑的水平桌面上(图中纸面),A、B 之间,B、C 之间分别用刚性轻杆相连,杆与 A、B、C 的各连接处皆为“铰链式”的(不能对小球产生垂直于杆方向的作用力)。已知杆 AB 与 BC 的夹角为  $\pi - \alpha$ ,  $\alpha < \frac{\pi}{2}$ 。DE 为固定在桌面上一块挡板,它与 AB 连线

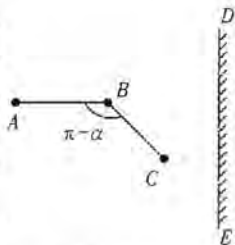


图 1-4-16

方向垂直。现令 A、B、C 一起以共同的速度  $v$  沿平行于 AB 连线方向向 DE 运动,已知在 C 与挡板碰撞过程中 C 与挡板之间无摩擦力作用,求碰撞时当 C 沿垂直于 DE 方向的速度由  $v$  变为零这一极短时间内挡板对 C 的冲量的大小。

**【分析】** 此题的关键是对各小球正确地应用动量定理。

**【解】** 令  $I$  表示题述极短时间  $\Delta t$  内挡板对 C 冲量的大小,因为挡板对 C 无摩擦力作用,可知冲量的方向垂直于 DE,如图 1-4-17 所示, $I'$  表示 B、C 间的杆对 B 或 C 冲量的大小,其方向沿杆方向,对 B 和 C 皆为推力; $v_{Cx}$  表示  $\Delta t$  末了时刻 C 沿

平行于  $DE$  方向速度的大小,  $v_{B\parallel}$  表示  $\Delta t$  末了时刻  $B$  沿平行于  $DE$  方向速度的大小,  $v_{B\perp}$  表示  $\Delta t$  末了时刻  $B$  沿垂直于  $DE$  方向速度的大小. 由动量定理可得

$$\text{对 } C \text{ 有} \quad I' \sin \alpha = m v_{C\parallel}, \quad (1)$$

$$I - I' \cos \alpha = m v, \quad (2)$$

$$\text{对 } B \text{ 有} \quad I' \sin \alpha = m v_{B\parallel}, \quad (3)$$

$$\text{对 } AB \text{ 有} \quad I' \cos \alpha = 2m(v - v_{B\perp}), \quad (4)$$

因为  $B$ 、 $C$  之间的杆不能伸、缩, 因此  $B$ 、 $C$  沿杆的方向的分速度必相等. 故有

$$v_{C\parallel} \sin \alpha = v_{B\perp} \cos \alpha - v_{B\parallel} \sin \alpha. \quad (5)$$

$$\text{由以上五式, 可解得} \quad I = \frac{3 + \sin^2 \alpha}{1 + 3 \sin^2 \alpha} m v.$$

**题 12** (2001·全国物理复赛题) 一玩具“火箭”由上下两部分和一短而硬(即劲度系数很大)的轻质弹簧构成. 上部分  $G_1$  的质量为  $m_1$ , 下部分  $G_2$  的质量为  $m_2$ , 弹簧夹在  $G_1$  与  $G_2$  之间, 与两者接触而不固连. 让  $G_1$ 、 $G_2$  压紧弹簧, 并将它们锁定, 此时弹簧的弹性势能为已知的定值  $E_0$ . 通过遥控可解除锁定, 让弹簧恢复至原长并释放其弹性势能, 设这一释放过程的时间极短. 第一种方案是让玩具位于一枯井的井口处并处于静止状态时解除锁定, 从而使上部分  $G_1$  升空. 第二种方案是让玩具在井口处从静止开始自由下落, 撞击井底(井足够深)后以原速率反弹, 反弹后当玩具垂直向上运动到离井口深度为某值  $h$  的时刻解除锁定.

(1) 在第一种方案中, 玩具的上部分  $G_1$  升空到达的最大高度(从井口算起)为多少? 其能量是从何种形式的能量转化来的?

(2) 在第二种方案中, 玩具的上部分  $G_1$  升空可能达到的最大高度(亦从井口算起)为多少? 并定量地讨论其能量可能是从何种形式的能量转化来的.

**【分析】** 此题的关键是对  $G_1$ 、 $G_2$  正确运用动量守恒与能量守恒定律. 对第 2 小题还需讨论  $G_1$  上升至最大高度时的重力势能与弹簧的弹性势能  $E_0$  的大小关系.

**【解】** (1) 在弹簧刚伸长至原长的时刻, 设  $G_1$  的速度的大小为  $v_1$ , 方向向上,  $G_2$  的速度大小为  $v_2$ , 方向向下, 则有

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0. \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = E_0. \quad (2)$$

$$\text{解①②两式得} \quad v_1 = \sqrt{\frac{2m_2 E_0}{m_1(m_1 + m_2)}}. \quad (3)$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2m_1 E_0}{m_2(m_1 + m_2)}}. \quad (4)$$

设  $G_1$  升空到达的最高点到井口的距离为  $H_1$ , 则

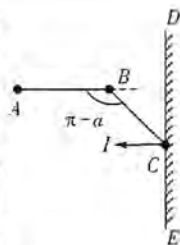


图 1-4-17



$$H_1 = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{m_2}{m_1 g(m_1 + m_2)} E_0. \quad (5)$$

$G_1$  上升到最高点的重力势能

$$E_{p1} = m_1 g H_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} E_0. \quad (6)$$

它来自弹簧的弹性势能,且仅为弹性势能的一部分.

(2) 在玩具自井底反弹向上运动至离井口的深度为  $h$  时,玩具向上的速度为

$$u = \sqrt{2gh}. \quad (7)$$

设解除锁定后,弹簧刚伸长至原长时, $G_1$  的速度大小为  $u_1$ ,方向向上, $G_2$  的速度大小为  $u_2$ ,方向向下,则有

$$m_1 u_1 - m_2 u_2 = (m_1 + m_2) u. \quad (8)$$

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) u^2 + E_0. \quad (9)$$

消去⑧⑨两式中的  $u_2$ ,得  $u_1$  的方程式

$$m_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) u_1^2 - 2m_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) u u_1 + m_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) u^2 - 2E_0 = 0.$$

由此可求得弹簧刚伸长至原长时, $G_1$  和  $G_2$  的速度分别为

$$u_1 = u + \sqrt{\frac{2E_0 m_2}{m_1(m_1 + m_2)}}. \quad (10)$$

$$u_2 = -u + \sqrt{\frac{2E_0 m_2}{m_2(m_1 + m_2)}}. \quad (11)$$

设  $G_1$  从解除锁定处向上运动到达的最大高度为  $H_2'$ ,则有

$$\begin{aligned} H_2' &= \frac{u_1^2}{2g} = \frac{1}{2g} \left[ u + \frac{2E_0 m_2}{m_1(m_1 + m_2)} \right]^2 \\ &= h + \frac{m_2 E_0}{m_1 g(m_1 + m_2)} + 2\sqrt{\frac{E_0 m_2 h}{m_1 g(m_1 + m_2)}}. \end{aligned}$$

从井口算起, $G_1$  上升的最大高度为

$$\begin{aligned} H_2 &= H_2' - h \\ &= \frac{m_2 E_0}{m_1 g(m_1 + m_2)} + 2\sqrt{\frac{E_0 m_2 h}{m_1 g(m_1 + m_2)}}. \end{aligned} \quad (12)$$

**【讨论】** 可以看出,在第二方案中, $G_1$  上升的最大高度  $H_2$  大于第一方案中的最大高度  $H_1$ ,超出的高度与解除锁定处到井口的深度  $h$  有关. 到达  $H_2$  时,其重力势能

$$E_{p2} = m_1 g H_2 = \frac{m_2 E_0}{m_1 + m_2} + 2\sqrt{\frac{m_1 m_2 E_0 g h}{m_1 + m_2}}. \quad (13)$$

(1) 若

$$E_{p2} < E_0. \quad (14)$$

即

$$2\sqrt{\frac{m_1 m_2 E_0 g h}{m_1 + m_2}} < \frac{m_1 E_0}{m_1 + m_2}.$$

这要求 
$$h < \frac{E_0 m_1}{4m_2 g(m_1 + m_2)}. \quad (15)$$

这时,  $G_1$  升至最高处的重力势能来自压紧的弹簧的弹性势能, 但仅是弹性势能的一部分, 在此条件下上升的最大高度

$$H_2 < \frac{E_0}{m_1 g}.$$

(2) 若 
$$E_{p_2} = E_0. \quad (16)$$

即 
$$2\sqrt{\frac{m_1 m_2 E_0 g h}{m_1 + m_2}} = \frac{m_1 E_0}{m_1 + m_2}.$$

这要求 
$$h = \frac{E_0 m_1}{4m_2 g(m_1 + m_2)}. \quad (17)$$

此时  $G_1$  升至最高处的重力势能来自压紧的弹簧的弹性势能, 且等于全部弹性势能. 在此条件下,  $G_1$  上升的高度

$$H_2 = \frac{E_0}{m_1 g}.$$

(3) 若 
$$E_{p_2} > E_0. \quad (18)$$

即 
$$2\sqrt{\frac{m_1 m_2 E_0 g h}{m_1 + m_2}} > \frac{m_1 E_0}{m_1 + m_2}.$$

这要求 
$$h > \frac{E_0 m_1}{4m_2 g(m_1 + m_2)}. \quad (19)$$

此时  $G_1$  升至最高处的重力势能大于压紧的弹簧的弹性势能, 超出部分的能量只能来自  $G_2$  的机械能. 在这条件下,  $G_1$  上升的最大高度为

$$H_2 > \frac{E_0}{m_1 g}.$$

**题 13** (2007·全国物理竞赛题) A、B、C 三个刚性小球静止在光滑的水平面上. 它们的质量皆为  $m$ , 用不可伸长的长度皆为  $l$  的柔软轻线相连, AB 的延长线与 BC 的夹角  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ , 如图 1-4-18 所示. 在此平面内取正交坐标系  $Oxy$ , 原点  $O$  与 B 球所在处重合,  $x$  轴正方向和  $y$  轴正方向如图. 另一质量也是  $m$  的刚性小球 D 位于  $y$  轴上, 沿  $y$  轴负方向以速度  $v_0$  (如图) 与 B 球发生弹性正碰, 碰撞时间极短. 设刚碰完后, 连接 A、B、C 的连线都立即断了. 求碰后经多少时间, D 球距 A、B、C 三球组成的系统的质心最近.

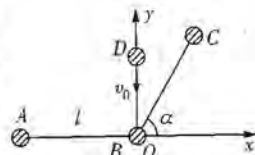


图 1-4-18

**【分析】** 这是一道碰撞问题, 解题的依据是动量守恒与能量守恒, 但要特别注意动量守恒.

**【解】** 1. 分析刚碰后各球速度的方向. 由于 D 与 B 球发生弹性正碰, 所以碰后 D 球的速度方向仍在  $y$  轴上; 设其方向沿  $y$  轴正方向, 大小为  $v$ . 由于线不可伸长, 所以在 D、B 两球相碰的过程中, A、C 两球都将受到线给它们的冲量; 又由于线是柔软的, 线对 A、C 两球均无垂直于线方向的作用力, 因此刚碰后, A 球的速度沿



AB 方向, C 球的速度沿 CB 方向. 用  $\theta$  表示 B 球的速度方向与  $x$  轴的夹角, 则各球速度方向将如图 1-4-19 所示. 因为此时连接 A、B、C 三球的两根线立即断了, 所以此后各球将做匀速直线运动.

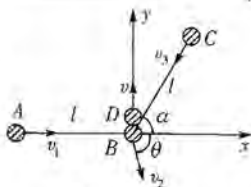


图 1-4-19

2. 研究碰撞后各球速度的大小. 以  $v_1$ 、 $v_2$ 、 $v_3$  分别表示刚碰后 A、B、C 三球速度的大小, 如图 1-4-19 所示. 因为碰撞过程中动量守恒, 所以沿  $x$  方向有

$$mv_1 - mv_3 \cos \alpha + mv_2 \cos \theta = 0. \quad (1)$$

沿  $y$  方向有  $-mv_0 = mv - mv_2 \sin \theta - mv_3 \sin \alpha. \quad (2)$

根据能量守恒有

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}mv_3^2 + \frac{1}{2}mv^2. \quad (3)$$

因为碰撞过程中线不可伸长, B、C 两球沿 BC 方向的速度分量相等, A、B 两球沿 AB 方向的速度分量相等, 有

$$v_2 \cos \theta = v_3. \quad (4)$$

$$v_2 \cos[\pi - (\alpha + \theta)] = v_3. \quad (5)$$

将  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  代入, 由以上各式可解得

$$v_1 = \frac{\sqrt{3}}{12}v_0. \quad (6)$$

$$v_2 = \frac{\sqrt{21}}{6}v_0. \quad (7)$$

$$v_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}v_0. \quad (8)$$

$$v = \frac{1}{4}v_0. \quad (9)$$

3. 确定刚碰完后, A、B、C 三球组成的系统质心的位置和速度. 由于碰撞时间极短, 刚碰后 A、B、C 三球组成的系统, 其质心位置就是碰撞前质心的位置, 以  $(x_C, y_C)$  表示此时质心的坐标, 根据质心的定义, 有

$$x_C = \frac{ml \cos \alpha - ml}{3m}, \quad (10)$$

$$y_C = \frac{ml \sin \alpha}{3m}. \quad (11)$$

代入数据, 得

$$x_C = -\frac{1}{6}l, \quad (12)$$

$$y_C = \frac{\sqrt{3}}{6}l. \quad (13)$$

根据质心速度的定义, 可求得碰后质心速度  $u_C$  的分量为

$$u_C = \frac{mv_1 + mv_2 \cos \theta - mv_3 \cos \alpha}{3m}, \quad (14)$$



$$v_{Cy} = \frac{-mv_2 \sin\theta - mv_3 \sin\alpha}{3m} \quad (15)$$

由④~⑦和⑭⑮各式及  $\alpha$  值可得

$$v_{Cx} = 0, \quad (16)$$

$$v_{Cy} = -\frac{5}{12}v_0. \quad (17)$$

4. 讨论碰后 A、B、C 三球组成的系统的质心和 D 球的运动。刚碰后 A、B、C 三球组成的系统的质心将从坐标  $(x_C = -\frac{1}{6}l, y_C = \frac{\sqrt{3}}{6}l)$  处出发, 沿 y 轴负方向以大小为  $\frac{5}{12}v_0$  的速度做匀速直线运动; 而 D 球则从坐标原点 O 出发, 沿 y 轴正方向以大小为  $\frac{1}{4}v_0$  的速度做匀速直线运动。A、B、C 三球组成系统的质心与 D 球是平行反向运动, 只要 D 球与 C 球不发生碰撞, 则  $v_C, v_D$  不变, 质心与 D 球之间的距离逐渐减少。到 y 坐标相同处时, 它们相距最近。用 t 表示所求的时间, 则有

$$vt = y_C + v_{Cy}t, \quad (18)$$

求  $v_C, v, y_C$  的值代人, 得  $t = \frac{\sqrt{3}l}{4v_0}$ . (19)

此时, D 球与 A、B、C 三球组成系统的质心两者相距  $\frac{1}{6}l$ 。在求出⑱式的过程中, 假设在  $t = \frac{\sqrt{3}l}{4v_0}$  时间内 C 球未与 D 球发生碰撞。下面说明此假设是正确的: 因为  $v_C = \frac{\sqrt{3}v_0}{3}$ , 它在 x 方向分量的大小为  $\frac{\sqrt{3}v_0}{6}$ 。经过时间 t, 它沿 x 轴负方向经过的距离为  $\frac{l}{8}$ 。而 C 球的起始位置的 x 坐标为  $\frac{1}{2}l$ 。经时间 t 后, C 球尚未到达 y 轴, 不会与 D 球相碰。

**题 14** (2003·全国物理竞赛题) 一人造地球卫星绕地球做椭圆运动, 地心是椭圆的一个焦点, 在直角坐标系中, 椭圆的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$a, b$  分别是椭圆的长半轴和短半轴, 为已知常数。当该人造卫星在轨道的远地点时, 突然以很大的能量沿卫星运行方向从卫星上发射出一个质量为  $m$  的太空探测器, 这探测器在地球引力作用下做双曲线运动, 此双曲线的焦点位于地心, 实半轴的长度正好等于原来椭圆远地点到地心的距离, 试问在发射时, 给探测器的能量为多大? 设地球的质量  $m_E$ 、万有引力常量  $G$  为已知, 不计地球以外星体的影响。

**【分析】** 解此题时注意运用角动量守恒及机械能守恒定律。

**【解】** 探测器在发射前, 是人造地球卫星的一部分, 它与人造地球卫星一起沿同一椭圆轨道运动, 椭圆的长半轴为  $a$ , 短半轴为  $b$ , 椭圆的中心 O 到焦点 F 的距离



为  $c$ , 如图 1-4-20 所示. 由解析几何知

$$c^2 = a^2 - b^2. \quad (1)$$

探测器发射前的能量就是它做椭圆运动的能量. 设在远地点探测器的速度为  $v_1$ , 则发射前探测器的能量为

$$E_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GmEm}{a+c}. \quad (2)$$

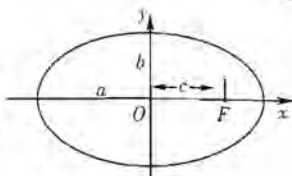


图 1-4-20

由于作用于探测器的万有引力作用线始终通过地心, 引力对地心的力矩为零, 做椭圆运动的探测器角动量守恒. 若探测器在近地点的速度为  $v_2$ , 则由角动量守恒, 有

$$mv_1(a+c) = mv_2(a-c). \quad (3)$$

万有引力是保守力, 探测器沿椭圆运动过程中机械能守恒. 对于远地点与近地点, 有

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GmEm}{a+c} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GmEm}{a-c}. \quad (4)$$

解式③和④得 
$$v_1^2 = \frac{GmEa-c}{a+a+c}. \quad (5)$$

把式⑤代入式②, 得 
$$E_1 = \frac{GmEm}{2a}. \quad (6)$$

探测器射出后, 沿双曲线运动, 该双曲线的顶点与原来的卫星的椭圆轨道的顶点重合, 如图 1-4-21 所示. 探测器做双曲线运动的过程中, 角动量守恒, 机械能亦守恒. 设  $v_0$  为探测器刚弹出时的速度, 也就是在双曲线顶点处的速度, 该点到地心的距离为  $a+c$ . 探测器的角动量为  $mv_0(a+c)$ . 当探测器到达无限远处时, 其速度的方向沿双曲线的渐近线, 以  $v$  表示其速度的大小,  $d$  表示地心到渐近线的距离, 其角动量为  $mv d$ , 根据角动量守恒, 有

$$mv_0(a+c) = mv d. \quad (7)$$

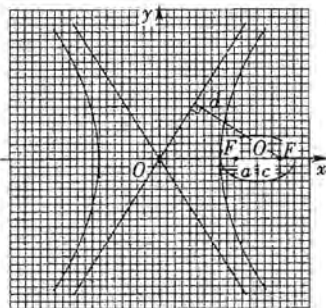


图 1-4-21

探测器在双曲线的顶点的机械能应等于它到达无限远处的机械能, 故有

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GmEm}{a+c} = \frac{1}{2}mv^2. \quad (8)$$

由图 1-4-21 可知

$$d = 2(a+c)\sin\alpha. \quad (9)$$

若  $A$ 、 $B$  分别表示双曲线的实半轴和虚半轴,  $C$  表示双曲线中心到地心的距离, 因地心是双曲线的焦点, 根据题给的条件和解析几何, 有

$$A = a+c. \quad (10)$$

$$C = 2(a+c). \quad (11)$$



$$B^2 = C^2 - A^2. \quad (12)$$

而

$$\sin\alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (13)$$

由以上各式,可得

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (14)$$

解式⑦⑧⑨和⑭,得

$$v^2 = \frac{Gm_E}{a+c}. \quad (15)$$

探测器被射出后,其能量就是做双曲线运动时的能量,故射出后探测器的能量为

$$E_2 = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{Gm_E m}{2(a+c)}. \quad (16)$$

发射探测器时探测器的能量为

$$\Delta E = E_2 - E_1. \quad (17)$$

由式①⑥和⑱,得

$$\Delta E = \frac{Gm_E m}{2a} \frac{2a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a + \sqrt{a^2 - b^2}}. \quad (18)$$

**题 15** (2002·全国物理竞赛题) 如图 1-4-22 所示,在倾角为  $\theta$  的固定斜面顶端有一轻质定滑轮,一轻绳跨过滑轮,其两端分别与物体 A、B 相连,物体 A 位于斜面上,连接 B 的轻绳竖直下垂,二者均处于静止状态. 已知 A、B 的质量分别为  $m_A = 0.150 \text{ kg}$ ,  $m_B = 0.100 \text{ kg}$ ,A 与斜面间的动摩擦

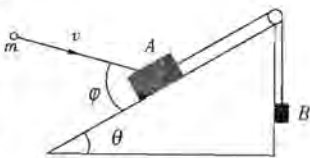


图 1-4-22

因数和静摩擦因数均为  $\mu = 0.20$ ,  $\theta = 30^\circ$ . 现在有一质量为  $m = 0.010 \text{ kg}$  的子弹沿与斜面成  $\varphi$  角的方向射入 A,射入前的速度  $v = 20.0 \text{ m/s}$ ,射入后留在 A 中,射入过程的时间极短. 当  $\varphi = 45^\circ$  时,试定量说明子弹射入后系统运动的全过程. 滑轮转轴处的摩擦可忽略不计,取  $g = 10 \text{ m/s}^2$ . 如果  $\varphi$  不是  $45^\circ$ ,而是  $45^\circ$  到  $90^\circ$  之间的任意角,则射入过程结束时 A 的速度如何?

**【分析】** 这道力学题牵涉到冲量及动力学、运动学的有关运算. 首先要比较子弹对 A 的冲量与摩擦力对 A 的冲量,找出临界角度,然后才能进一步分析、解题.

**【解】** (1) 子弹射入 A 的过程

在此过程中,子弹的速度突变,它与 A 之间产生一个冲力. 此冲力使子弹的动量发生改变. 现分别讨论垂直于斜面和于斜面两个方向的情况.

垂直于斜面方向: A 保持不动,子弹的分动量由  $mv_0 \sin\varphi \rightarrow 0$ . 设冲力在此方向的分力大小的平均值为  $N$ ,作用时间为  $\Delta t$ ,考虑到重力在此方向的分力远小于冲力,则有

$$N\Delta t = mv_0 \sin\varphi. \quad (1)$$

在此方向 A 所受的力,除子弹给它的冲力以外,还有斜面给它的正压力(设为  $N'$ )和重力的分力. 由于 A 保持不动,可知三力平衡. 同样忽略重力的分力,则有

$$N' = N.$$

平行于斜面方向: 子弹的分动量也发生突变,设子弹与 A 之间的冲力在此方向



的分力大小为  $F$ , 则  $F$  的冲量为  $F\Delta t$ .  $A$  在此方向还受到阻碍它沿斜面向上运动的摩擦力  $f$  和重力的分力. 同样忽略重力的分力, 则射入过程的最大摩擦力为

$$f_{\max} = \mu N'.$$

摩擦力  $f$  的冲量为

$$f\Delta t \leq f_{\max} \Delta t = \mu N' \Delta t = \mu m v_0 \sin\varphi. \quad (2)$$

射入开始时, 子弹和  $A$  组成的系统沿此方向的动量为  $mv_0 \cos\varphi$ , 摩擦力的冲量使系统动量减少, 如果

$$\mu m v_0 \sin\varphi \geq m v_0 \cos\varphi. \quad (3)$$

则摩擦力冲力将使  $A$  和子弹的动量减为零, 即子弹陷入  $A$  中保持静止,  $A$  也保持不动. 以上条件要求

$$\tan\varphi \geq \frac{1}{\mu} = 5, \text{ 即 } \varphi \geq 78.7^\circ. \quad (4)$$

现在  $\varphi = 45^\circ < 78.7^\circ$ , 所以射入过程结束时, 系统的动量大于零, 子弹和  $A$  将一起向上滑动. 设其速度为  $v$ , 则由动量定理可得

$$m v_0 \cos\varphi - (m + m_A) v = f_{\max} \Delta t = \mu m v_0 \sin\varphi.$$

解得

$$v = \frac{m v_0 (\cos\varphi - \mu \sin\varphi)}{m + m_A}. \quad (5)$$

代入数据, 得

$$v = 0.5\sqrt{2} \text{ m/s} = 0.71 \text{ m/s}. \quad (6)$$

(2) 射入过程结束后的运动

$A$  的运动:  $A$  以初速度  $v$  向上运动时, 由于  $B$  的速度为零, 绳子将松弛, 张力为零.  $A$  和子弹在重力和摩擦力作用下做初速度为  $v$  的匀减速运动, 在时刻  $t$  其加速度、速率和沿斜面上滑的距离分别为

$$a = -(g \sin\theta + \mu g \cos\theta). \quad (7)$$

$$v_A = v - (g \sin\theta + \mu g \cos\theta)t. \quad (8)$$

$$s_A = vt - \frac{1}{2}(g \sin\theta + \mu g \cos\theta)t^2. \quad (9)$$

$B$  的运动: 绳子张力为零,  $B$  为自由落体, 其速率及下滑的距离分别为

$$v_B = gt. \quad (10)$$

$$s_B = \frac{1}{2}gt^2. \quad (11)$$

当  $s_A = s_B$  时, 绳子被拉直, 此时  $t = t_1$ , 则有

$$vt_1 - \frac{1}{2}(\sin\theta + \mu \cos\theta)gt_1^2 = \frac{1}{2}gt_1^2. \quad (12)$$

可解得

$$t_1 = \frac{2v}{(1 + \sin\theta + \mu \cos\theta)g}. \quad (13)$$

代入数据得

$$t_1 = 0.086 \text{ s}. \quad (14)$$

设  $B$  下降距离为  $H_1$ , 则

$$H_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 = 0.037 \text{ m}.$$



设此时 A、B 的速度分别为  $v_A'$  和  $v_B'$ , 则

$$v_A' = v - g(\sin\theta + \mu\cos\theta)t_1 = \frac{1 - \sin\theta - \mu\cos\theta}{1 + \sin\theta + \mu\cos\theta}v. \quad (15)$$

$$v_B' = gt_1 = \frac{2v}{1 + \sin\theta + \mu\cos\theta}$$

代入数据得  $v_A' = 0.14 \text{ m/s}$ ,  $v_B' = 0.86 \text{ m/s}$ . (16)

(3) 绳中出现冲力的过程

由(15)和(16)式可看出,  $v_B' > v_A'$ . 因绳子不能伸展, 绳子张力将出现此冲力, 此冲力使 A、B 的速率变为一样, 设此共同速率为  $v'$ . 由于绳中张力的数值处处相同, A、B 所受冲力的冲量大小相等, 因而有

$$m_B(v_B' - v') = (m_A + m)(v' - v_A'). \quad (17)$$

可求得 
$$v' = \frac{m_B v_B' + (m_A + m)v_A'}{m_A + m_B + m}. \quad (18)$$

代入数据得  $v' = 0.41 \text{ m/s}$ . (19)

(4) A、B 速率相等后的运动

由于绳子不能伸长, A、B 的速度大小, 加速度大小和运动距离都相同, 设绳子张力为  $T$ , 加速度大小为  $a'$ , 则

$$T - (m + m_A)g\sin\theta - \mu(m + m_A)g\cos\theta = (m + m_A)a'$$

$$m_B g - T = m_B a'$$

解得 
$$a' = \frac{m_B - (m_A + m)\sin\theta - \mu(m_A + m)\cos\theta}{m + m_A + m_B}g. \quad (20)$$

代入数据得  $a' = -0.31 \text{ m/s}^2$ . (21)

负号表示 A、B 做匀减速运动, 设经过时间  $t_2$  后二者速度变为零, 则

$$t_2 = \frac{v'}{|a'|}. \quad (22)$$

代入数据得  $t_2 = 1.31 \text{ s}$ .

设 B 下降距离为  $H_2$ , 得

$$H = H_1 + H_2 = (0.27 + 0.037)\text{m} = 0.31 \text{ m}.$$

A、B 速度为零后, 由下列数据

$$m_B g = 1.00 \text{ N}.$$

$$(m_A + m)g\sin\theta = 0.80 \text{ N}.$$

$$\mu(m_A + m)g\cos\theta = 0.28 \text{ N}.$$

可以看出, A、B 都将保持不动.

$45^\circ < \varphi < 90^\circ$  的情况, 在讨论子弹射入过程中, 已知:  $\varphi < 78.7^\circ$  时, A 的速度即为(5)式;  $\varphi \geq 78.7^\circ$  时, A 保持不动.

**题 16** (1999·全国物理决赛题) 有三个质量相等的粒子, 粒子 1 与粒子 2 中间夹着一个被充分压缩了的轻质短弹簧, 并用轻质细线缚在一起(可视为一个小物体), 静止地放置在光滑水平面上. 另一个粒子 3 沿该光滑水平面射向它们, 粒子 3



和粒子 1 相碰撞并粘连在一起运动. 后轻质细线自动崩断, 使弹簧释放, 三个粒子分成两部分: 一部分为粒子 2, 另一部分为粘在一起的粒子 1、3. 已知弹簧被充分压缩时的弹性势能是  $E_p$ . 为了使被释放出的粒子 2 的散射角保持在  $30^\circ$  之内, 求粒子 3 入射时的动能应满足什么条件?

**提示:** 此处散射角是指粒子 2 射出后的运动方向与粒子 3 入射时的运动方向之间的夹角.

**【分析】** 这是一道综合性较强的涉及动量、能量的竞赛题. 解答本题要注意三点: (1) 依据动量守恒定律分析粒子 2 散射前后的速度与粒子 1、3 的速度关系, 并画出散射前后的速度矢量图; (2) 根据能量关系及速度关系推出弹性势能  $E_p$  与粒子动能间的关系; (3) 由题中给出粒子 2 的散射范围, 建立粒子 2 散射速度矢量图并分析该图得出结论.

**【解】** 建立如图 1-4-23 所示的坐标系, 以粒子 3 入射速度  $v_0$  为  $x$  轴正方向. 设每个粒子的质量为  $m$ . 当粒子 3 与 1 相碰并粘在一起, 而在细线断开之前, 三个粒子是一起运动的, 若其共同速度为  $v$ , 按照动量守恒定律, 有

$$mv_0 = 3mv. \quad (1)$$

即  $v$  也沿  $x$  方向, 其大小为  $v = \frac{v_0}{3}$ .

细线断开后弹簧释放, 弹性力做功使弹性势能  $E_p$  转化为粒子 1、3 和粒子 2 的动能. 设粒子 1、3 最后的速度为  $v_1$ , 粒子 2 最后的速度为  $v_2$ . 由机械能守恒和动量守恒定律可知

$$\frac{1}{2}(2m)v_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}(3m)v^2 + E_p. \quad (2)$$

$$(2m)v_1 + mv_2 = (3m)v = mv_0. \quad (3)$$

因弹簧安置的方向不同等原因, 粒子 2 将可能以不同的速度向各方向飞出, 设  $v_2$  与  $v_0$  的夹角为  $\theta$ . 在细线崩断过程中, 粒子 2 和粒子 1、3 由于受到弹力的冲量作用, 都将产生相应的动量的增量, 从而有速度的增量. 设其速度增量分别为  $\Delta v_1$  和  $\Delta v_2$ , 则有

$$\begin{cases} v_1 = v + \Delta v_1, \\ v_2 = v + \Delta v_2. \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} v_{1x} = v_x + \Delta v_{1x}, \\ v_{1y} = v_y + \Delta v_{1y}, \\ v_{2x} = v_x + \Delta v_{2x}, \\ v_{2y} = v_y + \Delta v_{2y}. \end{cases} \quad (4)$$

将④式代入③式, 得

$$2m(v + \Delta v_1) + m(v + \Delta v_2) = 3mv.$$

因而

$$\Delta v_1 = -\frac{1}{2}\Delta v_2.$$

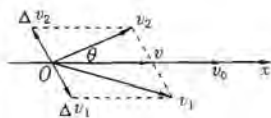


图 1-4-23

或

$$\begin{cases} \Delta v_{1x} = -\frac{1}{2} \Delta v_{2x}, \\ \Delta v_{1y} = -\frac{1}{2} \Delta v_{2y}. \end{cases} \quad (5)$$

②式可写成如下的形式

$$\frac{1}{2}(2m)(v_{1x}^2 + v_{1y}^2) + \frac{1}{2}m(v_{2x}^2 + v_{2y}^2) = \frac{1}{2}(3m)(v_x^2 + v_y^2) + E_p.$$

将④⑤两式代入上式并化简,有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(2m)[(v_x + \Delta v_{1x})^2 + (v_y + \Delta v_{1y})^2] + \frac{1}{2}m[(v_x + \Delta v_{2x})^2 + (v_y + \Delta v_{2y})^2] \\ &= \frac{1}{2}(3m)(v_x^2 + v_y^2) + \frac{3}{4}m(\Delta v_{2x}^2 + \Delta v_{2y}^2) \\ &= \frac{1}{2}(3m)(v_x^2 + v_y^2) + E_p. \end{aligned}$$

得到

$$E_p = \frac{3}{4}m(\Delta v_2)^2. \quad (6)$$

⑥式表明,在  $E_p$  给定的条件下,  $\Delta v_2$  的大小是一定的,  $v_2$  的大小和方向与  $\Delta v_2$  的方向有关,即与弹簧安置的方向有关,如图 1-4-24 所示.若  $v$  和  $v_2$  的大小一定,即图中圆的半径和  $P$  点到圆心的距离一定.当  $v_2$  与  $\Delta v_2$  垂直时,  $\theta$  角最大,这时  $v_2$  的方向沿圆的切线方向,所以在弹簧各种可能的安置方向中,以图 1-4-24 所示的沿  $\Delta v_2$  的方向安置时,粒子 2 有最大散射角,要求粒子 2 的散射角保持在  $30^\circ$  以内,必须要求

$$|\Delta v_2| \leq v \sin 30^\circ.$$

$$\text{即} \quad |\Delta v_2| \leq \frac{v}{2}.$$

$$\text{或} \quad |\Delta v_2| \leq \frac{v_0}{6}. \quad (7)$$

$$\text{由式⑦和⑥,可得到 } E_p \leq \frac{3}{4}m\left(\frac{v_0}{6}\right)^2 = \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{2}mv_0^2.$$

所以要求粒子 3 入射时的动能

$$\frac{1}{2}mv_0^2 \geq 24E_p.$$

**题 17** (2005·亚洲物理竞赛题)**秋千问题**

一男孩通过交替蹲下和站起的方式来荡秋千.图 1-4-25 所示的是在摆动过程中男孩的质心轨迹.当男孩处于站立姿势时,设秋千转轴到男孩质心的距离为  $r_u$ ;而当男孩处于下蹲姿势时,秋千转轴到男孩质心的距离为  $r_d$ .设比值  $\frac{r_d}{r_u} = 2\alpha =$

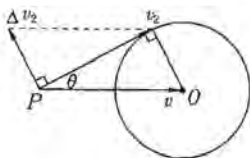


图 1-4-24



1.072, 即男孩站立与下蹲两种姿势时质心相对于秋千转轴到男孩质心的平均距离只变化大约 7%.

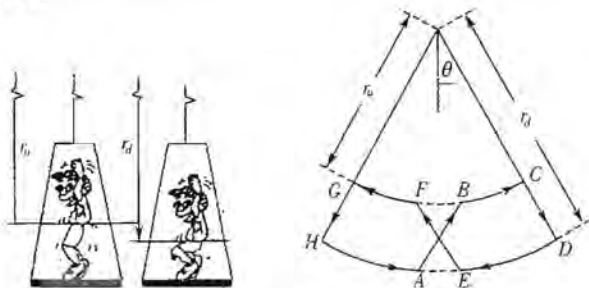


图 1-4-25

为了使问题简化,假定秋千质量可以忽略,秋千的摆幅很小,男孩的质量总是集中在其质心上;同时还假定男孩每次从下蹲到站立或者站立到下蹲的过程(即 A 到 B, E 到 F)与秋千摆动本身相比进行得足够快,因此可以认为从下蹲到站立或者站立到下蹲是瞬间完成的. 与此类似,另外两个下蹲过程(从 C 到 D, 从 G 到 H)也被假定是瞬间过程.

需要求解的问题是:男孩要将秋千摆动幅度增加一倍,或者说最大角速度增加一倍(即摆动幅度为初始幅度的两倍,或最大角速度为原来的两倍),需要进行多少次(可以用分数表示)摆动才行.

**【分析】** 这是一道关于秋千的摆动问题,解题需涉及角动量守恒定律与机械能守恒定律.

**【解】** (a) 当  $\theta=0$  时,即秋千摆至最低点时,由于小孩在秋千上由蹲姿到立姿的转换时间极短,故在由 A 到 B 以及由 E 到 F 的过程中,相对于秋千上方的悬挂点而言,作用于小孩的合力矩为零,故小孩的角动量守恒. 设  $m$  为小孩的质量,  $r$  为小孩的质心至秋千悬挂点的距离,  $\dot{\theta}$  为秋千相对于悬挂点的角速度,  $L = I\dot{\theta} = mr^2\dot{\theta}$  为小孩相对于悬挂点的角动量.

当小孩由蹲姿转换到立姿时,即从 A 到 B 或从 E 到 F, 其质心至悬挂点的距离由  $r_c$  变至  $r_s$ , 所对应的角速度由  $\dot{\theta}_c$  变至  $\dot{\theta}_s$ . 由角动量守恒定律得

$$\begin{aligned} mr_c^2\dot{\theta}_c &= mr_s^2\dot{\theta}_s \\ \dot{\theta}_s &= \left(\frac{r_c}{r_s}\right)^2 \dot{\theta}_c \end{aligned} \quad (1)$$

亦即当秋千在最低点时,小孩每一次由蹲姿站起来摆荡时,角速率增加  $\left(\frac{r_c}{r_s}\right)^2$  倍.

(b) 当秋千从 B 摆至 C 的过程中,机械能守恒,故小孩的重力势能的增加量等于动能的减少量,即

$$mgr_s(1 - \cos\theta) = \frac{1}{2}mr_s^2\dot{\theta}_s^2 \quad (2)$$



当秋千摆至  $C$  时,小孩由站姿转换为蹲姿,因此其质心至悬挂点的距离,由  $r_u$  变长为  $r_d$ ,即质心的位置从  $C$  变至  $D$ ,因此质心的重力势能已改变.当秋千从  $D$  摆至  $E$  时,设其角速率为  $\dot{\theta}_d'$ ,则同理利用机械能守恒定律,可得

$$mgr_d(1 - \cos\theta) = \frac{1}{2}mr_d^2(\dot{\theta}_d')^2. \quad (3)$$

$$\text{由②和③两式可得} \quad (\dot{\theta}_d')^2 = \frac{r_u}{r_d}(\dot{\theta}_u)^2, \quad (4)$$

由①式代人④式,可得

$$\begin{aligned} (\dot{\theta}_d')^2 &= \frac{r_u}{r_d} \cdot \left(\frac{r_d}{r_u}\right)^4 (\dot{\theta}_d)^2 \\ \dot{\theta}_d' &= \left(\frac{r_d}{r_u}\right)^{\frac{3}{2}} \dot{\theta}_d. \end{aligned} \quad (5)$$

即秋千每摆荡半圈时,其角速率增加  $\left(\frac{r_d}{r_u}\right)^{\frac{3}{2}}$  倍;因此每摆荡一圈,则角速率增加  $\left(\frac{r_d}{r_u}\right)^3$  倍.秋千摆荡的角幅和其在最低点的角速率成正比.若秋千摆荡  $n$  圈后,角幅增为起始时的两倍,则

$$\begin{aligned} 2 &= \left(\frac{r_d}{r_u}\right)^{3n} = \left(2\frac{1}{10}\right)^{3n} = 2^{\frac{3n}{10}} \\ n &= \frac{10}{3}. \end{aligned} \quad (6)$$

## 第五节 流体力学

**题 1** (1997·全国物理预赛题) 测定患者的血沉,在医学上有助于医生对病情作出判断.设血液是由红血球和血浆组成的悬浮液.将此悬浮液放进竖直放置的血沉管内,红血球就会在血浆中匀速下沉,其下沉速率称为血沉.某人的血沉  $v$  的值大约是  $10 \text{ mm} \cdot \text{h}^{-1}$ ,如果把红血球近似看做是半径为  $R$  的小球,且认为它在血浆中下沉时所受的粘滞阻力为  $f = 6\pi\eta Rv$ .在室温下  $\eta \approx 1.8 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ .已知血浆的密度  $\rho_0 \approx 1.0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,红血球的密度  $\rho \approx 1.3 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .试由以上数据估算红血球半径的大小(结果取一位有效数字即可).

**【解】** 红血球在重力、浮力和粘滞阻力的作用下做匀速下落运动,所以

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho g = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0 g + 6\pi\eta Rv.$$

取  $g \approx 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ,解得

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{\frac{9\eta v}{2g(\rho - \rho_0)}} = \sqrt{\frac{9 \times 1.8 \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-3}}{2 \times 10 \times (1.3 - 1.0) \times 10^3 \times 3600}} \text{ m} \\ &= 2.73 \times 10^{-6} \text{ m} \approx 3 \times 10^{-6} \text{ m}. \end{aligned}$$



**题2** (2002·全国物理竞赛题) 甲设计了一个如图1-5-1所示的“自动喷泉”装置,其中A、B、C为三个容器,D、E、F为三根细管,管栓K是关闭的,A、B、C及细管D、E中均盛有水,容器水面的高度差分别为 $h_1$ 和 $h_2$ ,如图所示,A、B、C的截面半径为12 cm,D的半径为0.2 cm.甲向同伴乙说:“我若拧开管栓K,会有水从细管口喷出。”乙认为不可能.理由是:“低处的水自动走向高处,能量从哪儿来?”甲当即拧开K,果然见到有水喷出,乙哑口无言,但不明白自己的错误所在.甲又进一步演示.在拧开管栓K前,先将细管D的上端加长到足够长,然后拧开K,管中水面即上升,最后水面静止于某个高度处.

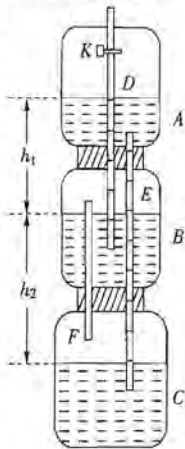


图1-5-1

(1) 论证拧开K后水柱上升的原因.

(2) 当D管上端足够长时,求拧开K后D中静止水面与A中水面的高度差.

(3) 论证水柱上升所需能量的来源.

**【分析】** 此题的关键在于正确分析各容器及细管中的压强.

**【解】** 实验证明,甲的设计是正确的,所以乙的结论肯定是错的.

(1) 设大气压为 $p_0$ ,水的密度为 $\rho$ .拧开K前的情况如图1-5-2的(a)图所示.由流体静力学可知,B、C中气体的压强为

$$p_B = p_C = p_0 + \rho g(h_1 + h_2). \quad ①$$

D中气体的压强为

$$p_D = p_B - \rho g h_1. \quad ②$$

由①②式可得

$$p_D = p_0 + \rho g h_2.$$

即 $p_D > p_0$ .当拧开K后,D中气体压强降至 $p_0$ ,此时

$$p_B - p_0 > \rho g h_1. \quad ③$$

即D管中容器B水面以上的那一段水柱所受合力向上,所以D管中水柱上升.

(2) 拧开K后,水柱上升,因D管上端已足够长,故水不会从管口喷出.设到D中的水面静止时D中增加水量的体积为 $\Delta V$ ,则B中减少水量的体积增加亦为 $\Delta V$ ,其水面将略有降低,因而B及C中气体压强略有下降,A中的水将通过E管流入C中,当从A流入水量的体积等于 $\Delta V$ 时,B、C中气体压强恢复原值.因为A、B、C的半径为D管半径的60倍,截面积比为3600倍,故A、B、C中少量水的增减( $\pm \Delta V$ )引起的A、B、C中水面高度的变化可忽略不计,即 $h_1$ 和 $h_2$ 的数值保持不变.

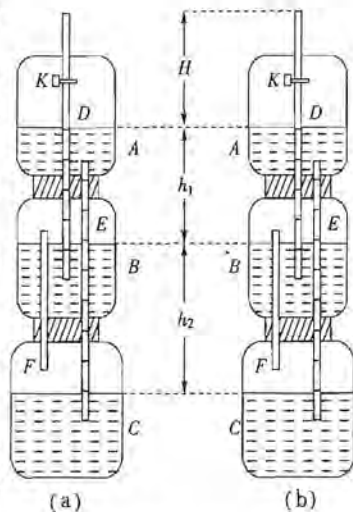


图1-5-2



设  $D$  中水面静止时与  $A$  中水面的高度差为  $H$  [图 1-5-2(b)], 则有

$$p_0 + \rho g(h_1 + h_2) = p_0 + \rho g(H + h_1). \quad (4)$$

由此可得

$$H = h_2. \quad (5)$$

(3) 将图 1-5-2(a) 和 (b) 两图相比较可知, 其差别在于体积为  $\Delta V$  的水从  $A$  移至  $C$  中, 另  $\Delta V$  的水又由  $B$  移入  $D$  中. 前者重力势能减少, 而后者重力势能增大, 前者的重力势能减少量为

$$\Delta E_1 = \rho \Delta V g (h_1 + h_2). \quad (6)$$

$D$  中增加的水柱的重心离  $A$  中水面的高度为  $\frac{h_2}{2}$ , 故后者的重力势能增量为

$$\Delta E_2 = \rho \Delta V g \left( h_1 + \frac{1}{2} h_2 \right). \quad (7)$$

即

$$\Delta E_1 > \Delta E_2.$$

由此可知, 体积为  $\Delta V$  的水由  $A$  流入  $C$  中减少的势能的一部分转化为同体积的水由  $B$  进入  $D$  中所需的势能, 其余部分则转化为水柱的动能, 故发生上下振动,  $D$  中水面静止处为平衡点. 由于水管间有摩擦等原因, 动能逐渐消耗, 最后水面停留在距  $A$  中水面  $h_2$  处.

## 第六节 振动、波动和声

**题 1** (2008·全国物理预赛题) (1) 一列简谐横波在  $x$  轴上传播 (振动位移沿  $y$  轴). 已知  $x=12$  cm 处的质元的振动图线如图 1-6-1(a) 所示,  $x=18$  cm 处的质元的振动图线如图 1-6-1(b) 所示. 根据这两条振动图线, 可获得关于这列简谐横波的确定的和可能的信息 (如频率、波速、波长等) 是哪些?

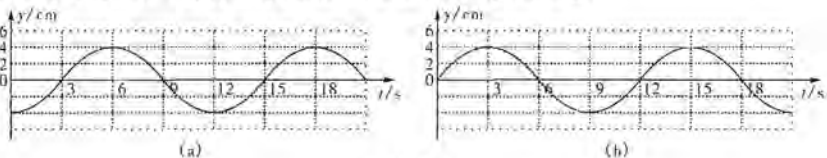


图 1-6-1

(2) 在示波器的  $YY'$  偏转电极上, 加电压  $u_1 = U_0 \sin(2\pi\nu t)$ , 式中频率  $\nu = 50$  Hz, 同时在示波器的  $XX'$  偏转电极上加如图 1-6-2(a) 所示的锯齿波电压  $u_2$ , 试在图 1-6-2(b) 中画出荧光屏上显示出的图线. 如果由于某种原因, 此图线很缓慢地向右移动, 则其原因是\_\_\_\_\_.

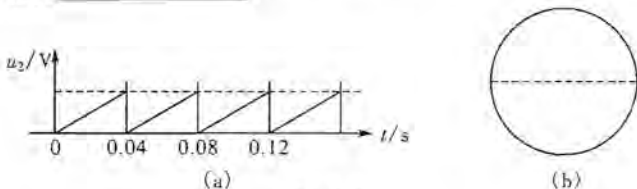


图 1-6-2



**【分析】** 第(1)小题涉及到振动、波动以及二者之间关系一系列基本概念和规律,求解时还要注意周期性的影响.第(2)小题是有关两列波的正交叠加问题,波形移动与两列波周期之间的关系有关.

**【解】** (1)振幅  $A=4\text{ cm}$ ; 周期  $T=12\text{ s}$  或频率  $\nu=\frac{1}{12}\text{ Hz}$ . 若波沿  $+x$  方向传播,则此波可能的最大的传播速度  $v_m=\frac{2}{3}\text{ cm/s}$ ,其他可能的传播速度为  $v_n=\frac{2}{3+4n}\text{ cm/s}(n=1,2,\dots)$ ; 此波可能的最大波长为  $\lambda_m=8\text{ cm}$ ,其他可能的波长为  $\lambda_n=\frac{24}{3+4n}\text{ cm}(n=1,2,\dots)$ . 若波沿  $-x$  方向传播,则此波可能的最大的传播速度  $v_m=2\text{ cm/s}$ ,其他可能的传播速度为  $v_n=\frac{2}{1+4n}\text{ cm/s}(n=1,2,\dots)$ ; 此波可能的最大波长为  $\lambda_m=24\text{ cm}$ ,其他可能的波长为  $\lambda_n=\frac{24}{1+4n}\text{ cm}(n=1,2,\dots)$ .

(2) 荧光屏上的图线如图 1-6-3. 图线缓慢右移的原因是,锯齿波的周期并非正好等于正弦波周期的 2 倍,而是稍小一点.

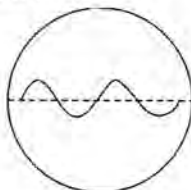


图 1-6-3

**题 2** (2000·全国物理预赛题) 1978 年在湖北省随县发掘了一座战国早期(距今大约 2400 多年前)曾国国君的墓葬——曾侯乙墓,出土的众多墓葬品中被称为中国古代文明辉煌的象征的是一组青铜铸造的编钟乐器(共 64 件),敲击每个编钟时,能发出音域宽广、频率准确的不同音调.与铸造的普通圆钟不同,圆钟的横截面呈圆形,每个编钟的横截面均呈杏仁状.图 1-6-4(a)为圆钟的截面,图 1-6-4(b)为编钟的截面,分别敲击两个钟的 A、B、C 和 D、E、F 三个部位,则圆钟可发出 \_\_\_\_\_ 个基频的音调,编钟可发出 \_\_\_\_\_ 个基频的音调.

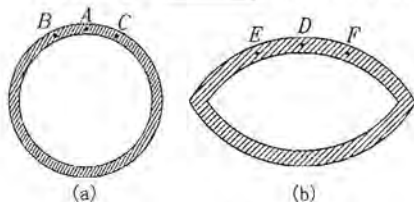


图 1-6-4

**【解】** 1; 2.



**题 3** (1999·全国物理预赛题) 将一根长为 100 多厘米的均匀弦线, 沿水平的  $x$  轴放置, 拉紧并使两端固定. 现对离固定的右端 25 cm 处(取该处为原点  $O$ , 如图 1-6-5 所示)的弦上一点施加一个沿垂直于弦线方向(即  $y$  轴方向)的扰动, 其位移随时间的变化规律如图 1-6-6 所示. 该扰动将沿弦线传播而形成波(孤立的脉冲波). 已知该波在弦线中的传播速度为  $2.5 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ , 且波在传播和反射过程中都没有能量损失.

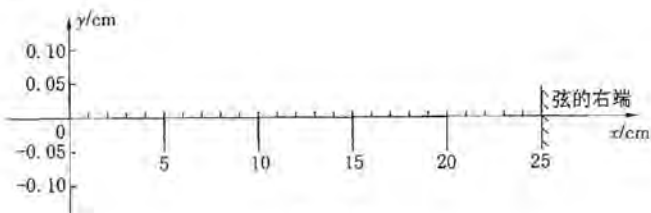


图 1-6-5

(1) 试在图 1-6-5 中准确地画出自  $O$  点沿弦向右传播的波在  $t=2.5 \text{ s}$  时的波形图.

(2) 该波向右传播到固定点时将发生反射, 反射波向左传播. 反射点总是固定不动的. 这可看成是向右传播的波和向左传播的波相叠加, 使反射点的位移始终为零. 由此观点出发, 试在图 1-6-5 中准确地画出  $t=12.5 \text{ s}$  时的波形图.

(3) 在图 1-6-5 中准确地画出  $t=10.5 \text{ s}$  时的波形图.

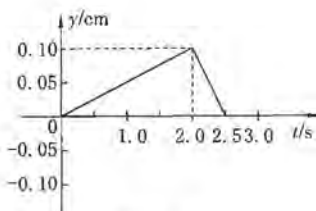


图 1-6-6

**【分析】** 波在传播过程中满足独立性原理和叠加性原理. 孤立波在未与其他波相遇时将保持其波形不变[注: 本题第(1)(2)两问], 而与其他波相遇时其波形应由叠加原理确定[注: 本题第(3)问], 由题意知该孤立波的空间间隔为  $2.5 \times 2.5 \text{ cm} = 6.25 \text{ cm}$ , 确定任意时刻该波的起点、终点和波峰坐标是解题的关键. 解题时还应注意右行波经反射端反射时, 其反射部分应倒相传播.

**【解】**

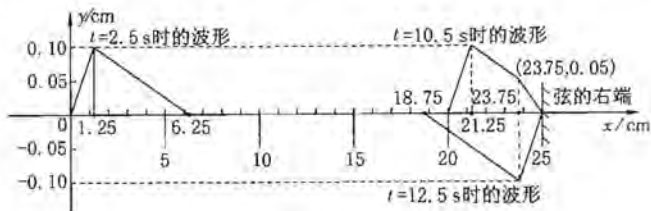


图 1-6-7



**题 4** (2003·全国物理复赛题) 有人提出了一种不用火箭发射人造地球卫星的设想. 其设想如下: 沿地球的一条弦拉一通道, 如图 1-6-8 所示. 在通道的两个出口处 A 和 B, 分别将质量为  $M$  的物体和质量为  $m$  的待发射卫星同时自由释放, 只要  $M$  比  $m$  足够大, 碰撞后, 质量为  $m$  的物体, 即待发射的卫星就会从通道口 B 冲出通道; 设待发射卫星上有一种装置, 在待发射卫星刚离开出口 B 时, 立即把待发射卫星的速度方向变为沿该处地球切线的方向, 但不改变速度的大小. 这样待发射卫星便有可能绕地心运动, 成为一个人造卫星. 若人造卫星正好沿地球表面绕地心做圆周运动, 则地心到该通道的距离为多少? 已知  $M=20m$ , 地球半径  $R_0=6400\text{ km}$ . 假定地球是质量均匀分布的球体, 通道是光滑的, 两物体间的碰撞是弹性的.

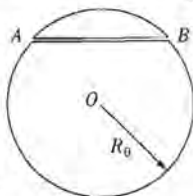


图 1-6-8

**【分析】** 这道题需要用到简谐运动、动量守恒、能量守恒及圆周运动、万有引力的有关知识.

**【解】** 位于通道内、质量为  $m$  的物体距地心  $O$  为  $r$  时(见图 1-6-9), 它受到地球的引力可以表示为

$$F = \frac{GM'm}{r^2} \quad (1)$$

式中  $M'$  是以地心  $O$  为球心, 以  $r$  为半径的球体所对应的那部分地球的质量, 若以  $\rho$  表示地球的密度, 此质量可以表示为

$$M' = \frac{4}{3}\rho\pi r^3 \quad (2)$$

于是, 质量为  $m$  的物体所受地球的引力可以改写为

$$F = \frac{4}{3}\pi G\rho m r \quad (3)$$

作用于质量为  $m$  的物体所受的引力在通道方向上的分力的大小为

$$f = F \sin\theta \quad (4)$$

$$\sin\theta = \frac{x}{r} \quad (5)$$

$\theta$  为  $r$  与通道的中垂线  $OC$  间的夹角,  $x$  为物体位置到通道中点  $C$  的距离, 力的方向指向通道的中点  $C$ . 在地面上物体的重力可以表示为

$$mg = \frac{GM_0 m}{R_0^2} \quad (6)$$

式中  $M_0$  是地球的质量, 由上式可以得到

$$g = \frac{4}{3}\pi G\rho R_0 \quad (7)$$

由以上各式可以求得

$$f = \frac{mg}{R_0} x \quad (8)$$

可见,  $f$  与弹簧的弹力有同样的性质, 相应“劲度系数”为

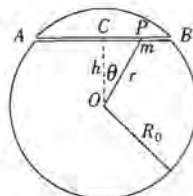


图 1-6-9

$$k = \frac{mg}{R_0}. \quad (9)$$

物体将以  $C$  为平衡位置做简谐运动, 振动周期为  $T = 2\pi\sqrt{\frac{R_0}{g}}$ . 取  $x=0$  处为“弹性势能”的零点, 设位于通道出口处的质量为  $m$  的静止物体到达  $x=0$  处的速度为  $v_0$ , 则根据能量守恒, 有

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}k(R_0^2 - h^2). \quad (10)$$

式中  $h$  表示地心到通道的距离. 解以上有关各式, 得

$$v_0^2 = \frac{R_0^2 - h^2}{R_0}g. \quad (11)$$

可见, 到达通道中点  $C$  的速度与物体的质量无关.

设想让质量为  $M$  的物体静止于出口  $A$  处, 质量为  $m$  的物体静止于出口  $B$  处, 现将它们同时释放, 因为它们的振动周期相同, 故它们将同时到达通道中点  $C$  处, 并发生弹性碰撞. 碰撞前, 两物体速度的大小都是  $v_0$ , 方向相反, 刚碰撞后, 质量为  $M$  的物体的速度为  $v'$ , 质量为  $m$  的物体的速度为  $v$ , 若规定速度方向是由  $A$  向  $B$  为正, 则有

$$Mv_0 - mv_0 = Mv' + mv. \quad (12)$$

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}Mv'^2 + \frac{1}{2}mv^2. \quad (13)$$

解式⑫和式⑬, 得 
$$v = \frac{3M-m}{M+m}v_0. \quad (14)$$

质量为  $m$  的物体是待发射的卫星, 令它回到通道出口  $B$  处时的速度为  $u$ , 则有

$$\frac{1}{2}k(R_0^2 - h^2) + \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mv^2. \quad (15)$$

由式⑭⑮⑯和式⑨解得

$$u^2 = \frac{8M(M-m)R_0^2 - h^2}{(M+m)^2} \frac{R_0}{g}. \quad (16)$$

$u$  的方向沿着通道. 根据题意, 卫星上的装置可使  $u$  的方向改变成沿地球  $B$  处的切线方向, 如果  $u$  的大小恰能使小卫星地球做圆周运动, 则有

$$G \frac{M_0 m}{R_0^2} = m \frac{u^2}{R_0}. \quad (17)$$

由式⑯⑰并注意到式⑥, 可以得到

$$h = \frac{R_0}{2} \sqrt{\frac{7M^2 - 10Mm - m^2}{2M(M-m)}}. \quad (18)$$

已知  $M = 20m$ , 则得  $h = 0.925R_0 = 5920 \text{ km}$ .

**题 5** (2004·全国物理竞赛题) 如图 1-6-10,  $a, b, c, d$  是位于光滑水平桌面上的四个小物块, 它们的质量均为  $m$ .  $a, b$  间有一自然长度为  $l$ , 劲度系数为  $k_1$  的弹簧连结;  $c, d$  之间有一自然长度为  $l$ , 劲度系数为  $k_2$  的弹簧连结. 四个物块的中



心在同一直线上. 如果  $b$ 、 $c$  发生碰撞, 碰撞是完全弹性的, 且碰撞时间极短. 开始时, 两个弹簧都处在自然长度状态, 物块  $c$ 、 $d$  静止, 物块  $a$ 、 $b$  以相同的速度  $v_0$  向右运动, 试定量论述:



图 1-6-10

(1) 若  $k_1 = k_2$ , 四个物块相对于桌面怎样运动?

(2) 若  $k_1 = 4k_2$ , 四个物块相对于桌面怎样运动?

**【分析】** 此题首先要抓住发生的是完全弹性碰撞, 因质量相等, 发生速度交换. 进一步分析可发现  $a$ 、 $b$  构成的系统及  $c$ 、 $d$  构成的系统可看成两两相同的 4 个弹簧振子, 进而列出它们各自的振动方程, 然后再进行分析、论述.

**【解】** 在  $a$ 、 $b$  两物块向右运动的过程中,  $b$  与  $c$  第一次相遇并发生碰撞, 在碰撞的极短时间内, 两根弹簧的长度都来不及发生变化, 处在原长度状态, 故  $a$ 、 $d$  的运动未变化. 由于  $b$ 、 $c$  质量相等, 碰撞是完全弹性的, 故刚碰撞后,  $b$  的速度为零,  $c$  的速度为  $v_0$ , 方向向右. 碰撞刚完时,  $a$  的速度为  $v_0$ , 方向向右,  $b$  的速度为零.  $a$  与  $b$  构成的系统的质心  $M_1$  (位于弹簧的中点处) 的速度为  $\frac{v_0}{2}$ , 方向向右;  $c$  的速度为  $v_0$ , 方向向右,  $d$  的速度为零.  $c$  与  $d$  构成的系统的质心  $M_2$  (位于弹簧的中点处) 的速度为  $\frac{v_0}{2}$ , 方向亦向右.

以  $M_1$  为坐标原点, 建立跟随质心一起以  $\frac{v_0}{2}$  的速度向右运动的坐标系, 其  $X'$  轴与四物块中心的连线相重合 (称此坐标系为质心坐标系), 以  $b$  与  $c$  发生第一次碰撞的时刻作为时间的起点 ( $t=0$ ), 则在此质心坐标系中, 连结  $a$ 、 $b$  的弹簧的中点是固定不动的,  $a$ 、 $b$  构成的系统可以看做是两个“弹簧一端固定, 弹簧的自然长度为  $\frac{l}{2}$ , 劲度系数为  $2k_1$  的弹簧振子”, 同样,  $c$ 、 $d$  构成的系统亦可看成两个弹簧振子, 弹簧的自然长度均为  $\frac{l}{2}$ , 劲度系数均为  $2k_2$ .

若以  $x_a'$ 、 $x_b'$ 、 $x_c'$ 、 $x_d'$  分别代表  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  各物块离开各自平衡位置的位移, 则有

$$x_a' = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1),$$

$$x_b' = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_2).$$

式中

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2k_1}{m}}.$$

$A_1$ 、 $\varphi_1$ 、 $\varphi_2$  为待定常量.

$$x_c' = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_3).$$



$$x_d' = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_1).$$

式中

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2k_2}{m}}.$$

$A_2, \varphi_3, \varphi_1$  为待定常量.

在  $t=0$  时刻, 相对质心坐标系有

$$\bar{x}_{e0}' = 0, v_{e0}' = \frac{v_0}{2}.$$

$$x_{b0}' = 0, v_{b0}' = -\frac{v_0}{2}.$$

$$x_{c0}' = 0, v_{c0}' = \frac{v_0}{2}.$$

$$x_{d0}' = 0, v_{d0}' = -\frac{v_0}{2}.$$

此为初始条件.

利用参考圆方法, 可求得四个小物块相对质心坐标系的速度分别为

$$v_a' = -A_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1).$$

$$v_b' = -A_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_2).$$

$$v_c' = -A_2 \omega_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_3).$$

$$v_d' = -A_2 \omega_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_4).$$

由位移、速度的表示式和初始条件可求得

$$A_1 = \frac{v_0}{2\omega_1}, \varphi_1 = -\frac{\pi}{2}, \varphi_2 = \frac{\pi}{2}.$$

$$A_2 = \frac{v_0}{2\omega_2}, \varphi_3 = -\frac{\pi}{2}, \varphi_4 = \frac{\pi}{2}.$$

由此可得

$$\left. \begin{aligned} x_a' &= \frac{v_0}{2\omega_1} \sin\omega_1 t, \\ x_b' &= -\frac{v_0}{2\omega_1} \sin\omega_1 t, \\ x_c' &= \frac{v_0}{2\omega_2} \sin\omega_2 t, \\ x_d' &= -\frac{v_0}{2\omega_2} \sin\omega_2 t. \end{aligned} \right\} \textcircled{1}$$

$$\left. \begin{aligned} v_a' &= \frac{v_0}{2} \cos\omega_1 t, \\ v_b' &= -\frac{v_0}{2} \cos\omega_1 t, \\ v_c' &= \frac{v_0}{2} \cos\omega_2 t, \\ v_d' &= -\frac{v_0}{2} \cos\omega_2 t. \end{aligned} \right\} \textcircled{2}$$



四物块在质心坐标系中的坐标分别为

$$\left. \begin{aligned} X_a' &= -\frac{l}{2} + \frac{v_0}{2\omega_1} \sin\omega_1 t, \\ X_b' &= \frac{l}{2} - \frac{v_0}{2\omega_1} \sin\omega_1 t, \\ X_c' &= \frac{l}{2} + \frac{v_0}{2\omega_2} \sin\omega_2 t, \\ X_d' &= \frac{3l}{2} - \frac{v_0}{2\omega_2} \sin\omega_2 t. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

建立相对桌面静止的坐标系,其原点与第一次碰撞刚碰完时  $ab$  系统的质心  $M_1$  重合,  $X$  轴与  $X'$  轴重合,则相对桌面坐标系,四物块的坐标分别为

$$\left. \begin{aligned} X_a &= \frac{1}{2} v_0 t + \frac{v_0}{2\omega_1} \sin\omega_1 t - \frac{l}{2}, \\ X_b &= \frac{1}{2} v_0 t - \frac{v_0}{2\omega_1} \sin\omega_1 t + \frac{l}{2}, \\ X_c &= \frac{1}{2} v_0 t + \frac{v_0}{2\omega_2} \sin\omega_2 t + \frac{l}{2}, \\ X_d &= \frac{1}{2} v_0 t - \frac{v_0}{2\omega_2} \sin\omega_2 t + \frac{3l}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

相对桌面坐标系,各物块的速度

$$\left. \begin{aligned} v_a &= \frac{v_0}{2} + \frac{v_0}{2} \cos\omega_1 t, \\ v_b &= \frac{v_0}{2} - \frac{v_0}{2} \cos\omega_1 t, \\ v_c &= \frac{v_0}{2} + \frac{v_0}{2} \cos\omega_2 t, \\ v_d &= \frac{v_0}{2} - \frac{v_0}{2} \cos\omega_2 t. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

(1)  $k_1 = k_2$  时

设两个弹簧的劲度系数都是  $k$ , 则有

$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}} = \omega_0, \quad (6)$$

第一次碰撞后  $a, b, c, d$  相对桌面坐标系的位置和速度可由④式与⑤式求得

$$\left. \begin{aligned} X_a &= \frac{1}{2} v_0 t + \frac{v_0}{2\omega_0} \sin \omega_0 t - \frac{l}{2}, \\ X_b &= \frac{1}{2} v_0 t - \frac{v_0}{2\omega_0} \sin \omega_0 t + \frac{l}{2}, \\ X_c &= \frac{1}{2} v_0 t + \frac{v_0}{2\omega_0} \sin \omega_0 t + \frac{l}{2}, \\ X_d &= \frac{1}{2} v_0 t - \frac{v_0}{2\omega_0} \sin \omega_0 t + \frac{3l}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} v_a &= \frac{v_0}{2} + \frac{v_0}{2} \cos \omega_0 t, \\ v_b &= \frac{v_0}{2} - \frac{v_0}{2} \cos \omega_0 t, \\ v_c &= \frac{v_0}{2} + \frac{v_0}{2} \cos \omega_0 t, \\ v_d &= \frac{v_0}{2} - \frac{v_0}{2} \cos \omega_0 t. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

如果在以后的运动中,  $b, c$  又可能相遇, 即第二次相遇, 则应有

$$X_b = X_c,$$

由⑦式, 得

$$\sin \omega_0 t = 0. \quad (9)$$

$t$  不等于零的最小正数解满足  $\omega_0 t = \pi$ .

(10)

$b, c$  相遇时相对质心系的速度由②式、③式得

$$v_b'(\text{遇}) = \frac{v_0}{2},$$

$$v_c'(\text{遇}) = -\frac{v_0}{2}.$$

$b, c$  相遇时,  $b$  的速度向右,  $c$  的速度向左,  $b, c$  发生第二次碰撞, 刚碰后速度交换, 有

$$v_b'(\text{后}) = -\frac{v_0}{2},$$

$$v_c'(\text{后}) = \frac{v_0}{2}.$$

$b, c$  第二次相遇时,  $a, b, c, d$  四物块离开各自平衡位置的位移可由⑩式及①式求出, 即

$$x_a' = 0,$$

$$x_b' = 0,$$

$$x_c' = 0,$$

$$x_d' = 0,$$

表示弹簧都处于自然状态, 无形变.

第二次碰撞刚碰完时,  $a, b, c, d$  相对桌面坐标系的速度



$$\left. \begin{aligned} v_a &= \frac{v_0}{2} - \frac{v_0}{2} = 0, \\ v_b &= \frac{v_0}{2} - \frac{v_0}{2} = 0, \\ v_c &= \frac{v_0}{2} + \frac{v_0}{2} = v_0, \\ v_d &= \frac{v_0}{2} + \frac{v_0}{2} = v_0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

即第二次碰撞刚碰完时,  $a, b$  速度为零, 弹簧处在自然状态, 故以后  $a, b$  静止在各自的平衡位置;  $c, d$  亦处在各自的平衡位置, 并以相同的速度  $v_0$  向右运动, 以后一直匀速运动下去, 不再振动, 也不会再发生碰撞。

(2)  $k_1 = 4k_2$  时

因  $k_1 = 4k_2$ , 故有  $\omega_1 = 2\omega_2 = \sqrt{\frac{2k_1}{m}} = \sqrt{\frac{8k_2}{m}}$ . (12)

第一次碰撞后,  $a, b, c, d$  相对桌面坐标系的位置和速度由④式和⑤式可求得

$$\left. \begin{aligned} X_a &= \frac{1}{2} v_0 t + \frac{v_0}{2\omega_1} \sin \omega_1 t - \frac{l}{2}, \\ X_b &= \frac{1}{2} v_0 t - \frac{v_0}{2\omega_1} \sin \omega_1 t + \frac{l}{2}, \\ X_c &= \frac{1}{2} v_0 t + \frac{v_0}{\omega_1} \sin \frac{\omega_1 t}{2} + \frac{l}{2}, \\ X_d &= \frac{1}{2} v_0 t - \frac{v_0}{\omega_1} \sin \frac{\omega_1 t}{2} + \frac{3l}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} v_a &= \frac{v_0}{2} + \frac{v_0}{2} \cos \omega_1 t, \\ v_b &= \frac{v_0}{2} - \frac{v_0}{2} \cos \omega_1 t, \\ v_c &= \frac{v_0}{2} + \frac{v_0}{2} \cos \frac{\omega_1 t}{2}, \\ v_d &= \frac{v_0}{2} - \frac{v_0}{2} \cos \frac{\omega_1 t}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

如果在以后的运动过程中  $b$  与  $c$  会相遇, 则有

$$X_b = X_c.$$

由⑬式有  $-\frac{1}{2} \sin \omega_1 t = \sin \left( \frac{\omega_1 t}{2} \right)$ .

因  $\omega_1 = 2\omega_2$ , 得  $\sin \omega_2 t (\cos \omega_2 t + 1) = 0$ . (15)

其解为  $\omega_2 t = n\pi$ , ( $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) (16)

其中使  $t$  为异于零的最小正数解满足

$$\omega_2 t = \pi. \quad (17)$$

及

$$\omega_1 t = 2\pi. \quad (18)$$

$b, c$  相遇时相对质心的速度由②式及⑤式得

$$v_b'(\text{遇}) = -\frac{v_0}{2}.$$

$$v_c'(\text{遇}) = -\frac{v_0}{2}.$$

因  $b, c$  相遇时, 速度的大小相等, 方向都向左, 表明  $b, c$  相遇而不发生碰撞, 即无第二次碰撞. 由⑦⑧式及①式可求得  $b, c$  第二次相遇时, 四物块相对各自平衡位置的位移

$$x_a' = 0,$$

$$x_b' = 0,$$

$$x_c' = 0,$$

$$x_d' = 0.$$

即两个弹簧都处在自然长度. 这时四个物块相对于桌面参考系的速度分别为

$$\left. \begin{aligned} v_a &= \frac{v_0}{2} + \frac{v_0}{2} = v_0, \\ v_b &= \frac{v_0}{2} - \frac{v_0}{2} = 0, \\ v_c &= \frac{v_0}{2} - \frac{v_0}{2} = 0, \\ v_d &= \frac{v_0}{2} + \frac{v_0}{2} = v_0. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

由于在此时  $a$  向右运动, 而  $b$  静止, 故弹簧将被压缩,  $b$  加速,  $a$  减速; 由于  $c$  静止,  $d$  运动, 故弹簧将被拉长,  $c$  加速,  $d$  减速; 弹簧振子又开始振动.

由⑩式, 当

$$\omega_2 t = 2\pi.$$

$$\omega_1 t = 4\pi.$$

$b, c$  两木块又相遇, 由②式可求得相遇时,  $b, c$  相对质心坐标系的速度为

$$v_b'(\text{遇}) = -\frac{v_0}{2}.$$

$$v_c'(\text{遇}) = \frac{v_0}{2}.$$

因相遇时,  $b$  向左运动,  $c$  向右运动, 速度大小相等, 故  $b, c$  相遇而不发生碰撞. 此时四物块相对于桌面坐标系的速度为

$$\left. \begin{aligned} v_a &= v_0, \\ v_b &= 0, \\ v_c &= v_0, \\ v_d &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

在随后的时间里,  $a, b$  构成的系统的质心  $M_1$  以速度  $\frac{1}{2}v_0$  向右做匀速直线运



动,  $a, b$  相对于  $M_1$  做简谐运动, 振动的圆频率  $\omega_1$ .  $c, d$  构成的系统的质心  $M_2$  亦以速度  $\frac{1}{2}v_0$  向右做匀速直线运动,  $c, d$  相对于  $M_2$  做简谐运动, 振动的圆频率  $\omega_2$ .  $b, c$  两物块每隔  $\frac{\pi}{\omega_2}$  的一段时间相遇一次, 但都是上述两种情况之一, 只相遇而不碰撞.

**题 6** (1996·俄罗斯物理竞赛题) 将一个水平放置的弹簧(劲度系数为  $k$ )一端固定在竖直墙上, 另一端连接一质量为  $m$  的物体(如图 1-6-11), 物体与地面的动摩擦因数为  $\mu$ . 在弹簧伸长到最大距离的瞬时, 用手指弹物体使物体以速度  $v_0$  开始向墙运动.

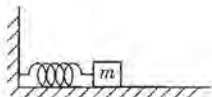


图 1-6-11

假设振动是稳定的, 且弹簧的最大伸长为  $l$  ( $l > \frac{\mu mg}{k}$ ). 试确定速度  $v_0$ .

**【分析】** 由于振动过程中有阻力做功, 为使振子在固定的两点间做稳定的周期性运动, 必须及时补充能量. 题中所述, 在弹簧伸长到最大距离处的瞬时, 用手指弹物体使物体获得向左速度  $v_0$  就是一种补充能量的方式.  $v_0$  应为多大, 可用功能原理求解.

**【解】** 物体从  $A$  点向左运动时(如图 1-6-12), 由能量守恒有

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kl^2 = \frac{1}{2}kA^2 + \mu mg(l+A). \quad (1)$$

其中  $A$  是弹簧的最大压缩.

物体从  $B$  点向右运动时, 有

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kl^2 + \mu mg(l+A). \quad (2)$$

由①②两式得

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = 2\mu mg(l+A). \quad (3)$$

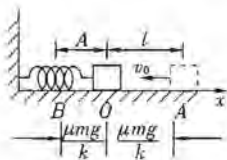


图 1-6-12

由①③两式得 
$$A = l + \frac{2\mu mg}{k}.$$

对于速度  $v_0$  有 
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = 4\mu mg \left( l + \frac{\mu mg}{k} \right).$$

解得 
$$v_0 = \sqrt{8\mu g \left( l + \frac{\mu mg}{k} \right)}.$$

**题 7** (2006·亚洲物理竞赛题)

### 滑动摩擦下的谐振子

#### 引言

力学里, 经常用到所谓的相空间, 即由体系所有粒子的坐标和动量(或者速度)构成的虚拟空间. 相空间里的点称为相点. 每个相点确定了系统的一个状态.

当力学系统演化时, 相应的相点的轨迹成为相轨迹. 通常在相轨迹上画一个箭头来反应演化的方向, 给定力学系统的所有可能的相轨迹构成相图. 通过分析相图

就可以定性地给出力学系统的重要性质,而无需将系统的动力学方程求解为显函数形式(explicit form).在许多情况下,相空间的应用是解决力学问题的最合适的方法.

本题中,我们建议利用相空间来分析一个自由度的力学系统,即用一个坐标描述的系统.在这种情况下,相空间是一个二维平面,相轨迹是该平面上的一条曲线,它反映动量 and 坐标的依赖关系.

作为一个例子,图 1-6-13 给出了一个沿  $x$  轴正方向运动的自由粒子的相轨迹.

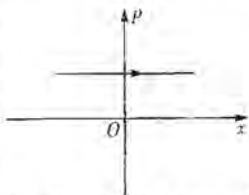


图1-6-13 自由粒子的相轨迹

### 问题 A 相图

(A1) 画出自由质点相轨迹,该质点在两个互相平行、位于  $x = -\frac{L}{2}$  和  $x = \frac{L}{2}$  的全反射墙壁之间运动.

(A2) 研究谐振子的相轨迹,也就是质量为  $m$  受胡克力 ( $F = -kx$ ) 作用的质点的相轨迹.

(a) 写出相轨迹的方程和相应的参数.

(b) 画出谐振子的相轨迹.

(A3) 考虑一个长度为  $L$ 、质量不计的刚性棒,一端固定,另一端有质量为  $m$  的质点(重力加速度为  $g$ ).用棒与铅垂线之间夹角  $\alpha$  作为描述系统的坐标,相平面是由  $(\alpha, \frac{d\alpha}{dt})$  描绘的坐标平面,研究并画出在任意角度  $\alpha$  下该摆的相图.设  $K$  为该系统不同性质的相轨迹种类的数目,求  $K$  的值.对每种相轨迹至少画出一条典型的相轨迹,给出描述的每一种相轨迹的参数的取值范围(不要将平衡点当作相轨迹).忽略空气阻力.

### 问题 B 滑动摩擦下的振子

考虑运动的阻力时,我们通常处理两种类型的摩擦力.第一类是与速度有关的摩擦力(粘滞摩擦),可用  $\vec{F} = -\gamma\vec{v}$  来表达,例如固体在气体或液体中的运动.第二类是跟速度无关的摩擦力,其大小可用  $F = \mu N$  来表达,力的方向和互相接触物体间的相对速度的方向相反(滑动摩擦),如一个固体在另一个固体表面的运动.

作为第二种摩擦力的一个特例,考虑水平表面上和弹簧一端相连的物体,弹簧的另一端固定.该物体的质量是  $m$ ,弹簧的劲度系数是  $k$ ,物体和表面之间的摩擦系数是  $\mu$ .假定物体沿  $x$  轴做直线运动(取  $x=0$  为弹簧未伸缩的位置).假定动摩擦系数和静摩擦系数是相同的,初始时刻物体位于  $x=A_0$  ( $A_0 > 0$ ) 的位置,速度为零.

(B1) 写出在滑动摩擦力下,简谐振子的运动方程.

(B2) 画出这一振子的相轨迹,确定振子的平衡位置.

(B3) 振子是否在弹簧未拉伸状态下完全停止运动?如果不是,确定振子能够完全静止的区域长度.



(B4) 确定振子的  $x$  正方向振动最大偏离量  $A$  在一次振动后的减少. 相邻两次到达最大正向偏离的时间间隔是多少? 给出  $x$  正方向第  $n$  次最大偏离量  $A(t_n)$  的表达式, 其中  $t_n$  是第  $n$  次达到正向最大偏离处的时间.

(B5) 画出坐标与时间的关系, 并估计物体总的振动周数  $N$ .

注: 半轴为  $a$  和  $b$ 、中心位于原点的椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

【分析】这是一道关于谐振子的问题, 但首先要弄清相空间、相轨迹等概念.

【解】A. 相图

(A1) 在图 1-6-14 中, 取  $x$  轴的方向垂直于墙壁, 由于质点在两墙壁之间的运动, 不受外力的作用, 故动量守恒, 即  $p$  为定值. 题设质点和墙壁之间的碰撞为完全弹性的, 故质点在碰撞前后的动量大小不变, 但方向相反. 因此该质点的相轨迹如图 1-6-14 所示. 图中向右的箭头方向表示质点朝  $x$  值增加的方向运动, 即沿  $+x$  方向运动; 向左的箭头方向, 则表示质点朝  $x$  值减少的方向运动, 即沿  $-x$  方向运动. 整体而言, 相轨迹沿着顺时针的方向.

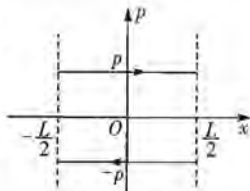


图 1-6-14

整体而言, 相轨迹沿着顺时针的方向.

(A2)

(a) 设一维简谐振动质点的动量为  $p$ , 位置坐标为  $x$ , 总能量为  $E$ , 则三者之间的关系式为

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} = E. \quad (1)$$

上式可改写为

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{x^2}{\frac{2E}{k}} = 1. \quad (2)$$

此为该质点在  $(x, p)$  相平面的相轨迹方程式, 其形状为一椭圆, 中心位于原点  $(0, 0)$ , 半轴长分别为  $\sqrt{2mE}$  和  $\sqrt{\frac{2E}{k}}$ .

(b) 相轨迹的图形如图 1-6-15 所示, 沿着顺时针的方向运行.

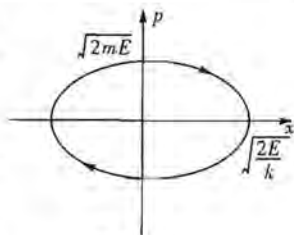


图 1-6-15

(A3) 选取质点摆动轨迹的最低点, 即细杆垂直悬挂时的下端, 作为重力势能的零点, 则该质点在夹角为  $\alpha$  时的重力势能为  $mgL(1 - \cos\alpha)$ , 动能为  $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(L\omega)^2$ , 式中角速度

$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha}$ . 设质点的总能量为  $E$ , 则相轨迹的方程式为

$$\frac{1}{2}mL^2\dot{\alpha}^2 + mgL(1 - \cos\alpha) = E. \quad (3)$$



根据  $E$  的大小, 质点的运动可分成下列三种形式:

(1)  $E < 2mgL$

质点以最低点为平衡点, 做来回的振动. 若  $E \ll mgL$ , 则此振动为简谐运动.

(2)  $E = 2mgL$

质点不会来回摆动, 而是趋向停止在最高的平衡点, 即悬挂点正上方距离为  $L$  处.

(3)  $E > 2mgL$

质点以细杆的悬挂点为圆心, 做同向的圆运动.

上述的质点运动在  $(\alpha, \dot{\alpha})$  相平面上, 分别对应三种类别的相轨迹图形, 如图 1-6-16 所示.

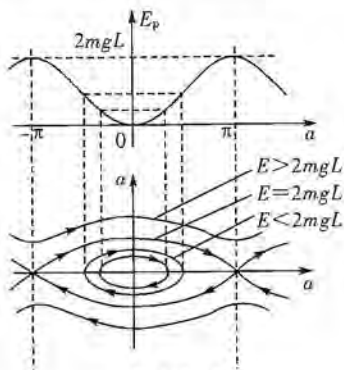


图 1-6-16

### B. 滑动摩擦下的阻尼振荡

(B1) 由于滑动摩擦力的大小和物体的运动速率无关, 但其作用的方向和物体的速度方向相反, 因此物体的运动方程式必须依其速度方向而定. 设  $x$  轴沿着物体的运动方向, 按题设当  $x=0$  时, 理想弹簧的伸缩量为零, 在无摩擦的情况下, 原点为一平衡点. 以  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$  表示物体的速度,  $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$  表示物体的加速度, 物体的运动方程式可写为

$$\text{当 } \dot{x} > 0 \text{ 时, } \ddot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{f_r}{m}. \quad (4)$$

$$\text{当 } \dot{x} < 0 \text{ 时, } \ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f_r}{m}. \quad (5)$$

式中  $f_r = \mu mg$  为滑动摩擦力,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  为该弹簧系统在无摩擦情况下的振动角频率.

(B2) 定义新变量  $x_1 = x + \frac{f_r}{m\omega_0^2}$ ,  $x_2 = x - \frac{f_r}{m\omega_0^2}$ , 则④和⑤两式可改写为

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = 0. \quad (6)$$



$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = 0. \quad (7)$$

这两式相当于在无摩擦情况下的简谐运动方程式。换句话说,滑动摩擦力对质点振动的影 响,可简化为造成平衡点的迁移;当  $\dot{x} > 0$  时,平衡点由无摩擦情况下的平衡点  $x=0$ ,移至  $x_- = -\frac{f_r}{m\omega_0^2} = -\frac{\mu g}{\omega_0^2}$  (或  $x_1=0$ );当  $\dot{x} < 0$ ,则移至  $x_+ = \frac{f_r}{m\omega_0^2} = \frac{\mu g}{\omega_0^2}$  (或  $x_2=0$ )。

由(A2)题的结果可知做简谐运动的质点,在  $(x, p)$  相平面的相轨迹为一以平衡点为中心的椭圆。因此在有滑动摩擦力作用的情况下,质点运动的相轨迹为下述两种椭圆曲线的组合:

(1) 当  $\dot{x} > 0$  时,即在  $p > 0$  的半平面上,相轨迹为一以  $x=x_-$  为中心的椭圆。

(2) 当  $\dot{x} < 0$  时,即在  $p < 0$  的半平面上,相轨迹为一以  $x=x_+$  为中心的椭圆。

上述的两椭圆交会于  $p=0$ ,构成一条连续的曲线,但椭圆的轴长正比于  $\sqrt{E}$ ,而总能量  $E$  因摩擦而减小,故轴长随时间而递减。质点的相轨迹图形如图 1-6-17 所示。

(B3) 由图 1-6-17 的相轨迹图形,可看出质点不一定会完全停止在  $x=0$  处。由于题设静摩擦系数和动摩擦系数相等,当质点进入  $x_+$  和  $x_-$  两点之间的区域时,都可能达到完全停止,故称为停滞区,其长度为

$$x_+ - x_- = \frac{2f_r}{m\omega_0^2} = \frac{2\mu g}{\omega_0^2}. \quad (8)$$

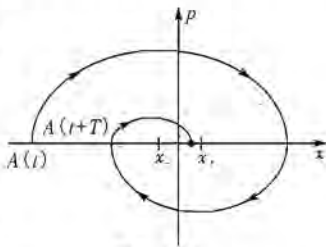


图 1-6-17

(B4) 参看图 1-6-17,  $A(t)$  和  $A(t+T)$  分别为质点轨迹在  $-x$  轴上的两个端点坐标,两者出现的时间相隔一个周期。在上方半平面上的椭圆全轴长(沿  $x$  方向)为  $2[x_- - A(t)]$ ,下方半平面上的椭圆全轴长则为  $2[x_+ - A(t+T)]$ ,由图上的几何关系可得

$$A(t+T) - A(t) = 2[x_- - A(t)] - 2[x_+ - A(t+T)].$$

$$A(t+T) - A(t) = 2(x_+ - x_-). \quad (9)$$

质点在  $+x$  方向上连续经历两次最大位移,或经历一次完整的振荡的时间间隔为一个周期,在  $+x$  方向上最大位移的减少量,可写为

$$\Delta A = |A(t) - A(t+T)| = 2(x_+ - x_-) = \frac{4\mu g}{\omega_0^2} = \left(\frac{4\mu g}{2\pi\omega_0}\right) T. \quad (10)$$

在  $+x$  方向上最大位移  $A$  与  $t_n$  之间的关系式  $A(t_n)$ ,可写为

$$A(t_n) = A_0 - \left(\frac{4\mu g}{2\pi\omega_0}\right) nT = A_0 - \left(\frac{2\mu g}{\pi\omega_0}\right) t_n. \quad (11)$$

即质点的振幅随时间而线性地减小。

(B5) 物体振荡的总次数

$$N = \frac{A_0}{2(x_+ - x_-)} = A_0 \left(\frac{\omega_0^2}{4\mu g}\right). \quad (12)$$



$N$  值决定于起始的振幅. 物体的位置坐标和时间之间的关系曲线如图 1-6-18 所示.

图 1-6-18 中物体的振荡频率等于无摩擦情况下的振荡频率  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , 连续两次最大位移

之间的时间差为一个周期, 即  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ . 物体将继续振动直至其轨迹的端点 ( $v=0$ ) 落入停滞区内

( $x_+ \geq x \geq x_-$ ) 时为止. 换句话说, 当物体离原点的最大位移小于停滞区的一半长度时, 物体将停止运动. 在实际的情况下, 物体可完全停止在停滞区内的任一位置. 图中的  $P$  点即为物体的停止位置.

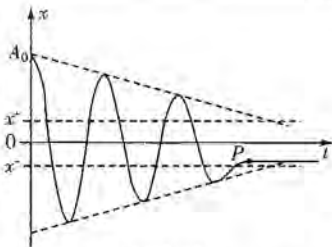


图 1-6-18

### 题 8 (2004 · 亚洲物理竞赛题)

#### 失重状态下质量的测量

飞船环绕地球飞行时, 处于失重状态, 因此不能用常规仪器测量重力, 以导出宇航员的质量. 太空实验室 2 号等飞船配备有身体质量测量装置 (Body Mass Measurement Device). 其结构是一根弹簧, 一端连接椅子, 另一端连在飞船上的固定点. 弹簧的轴线通过飞船的质心, 弹簧的劲度系数为  $k=605.6 \text{ N/m}$ .

1. 当飞船固定在发射台上时, 椅子 (无人乘坐) 的振动周期是  $T_0=1.28195 \text{ s}$ . 计算椅子的质量  $m_0$ .

2. 当飞船环绕地球飞行时, 宇航员束缚在椅子上, 再次测量椅子的振动周期  $T'$ , 测得  $T'=2.33044 \text{ s}$ . 于是宇航员粗略地估算自己的质量, 但他对结果感到疑惑. 为了得到自己的真实质量, 他再次测量了椅子 (无人乘坐) 的振动周期, 得到  $T_0'=1.27395 \text{ s}$ .

问宇航员的真实质量是多少? 飞船的质量是多少?

注: 弹簧的质量可以忽略, 而宇航员是漂浮着.

**【分析】** 这道关于宇宙飞船的题, 其实是弹簧振子的振动问题, 解题时首先要明白什么是约化质量.

**【解】** (1) 当宇宙飞船固定在发射台上时, 系于弹簧上的空椅子 (质量为  $m_0$ ) 的振动周期为

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m_0}{k}} \quad (1)$$

$$m_0 = \frac{kT_0^2}{4\pi^2} = \frac{605.6 \text{ N/m} \times 1.28195^2 \text{ s}^2}{4\pi^2} = 25.21 \text{ kg} \quad (2)$$

(2) 当宇宙飞船在太空中环绕地球运行时, 该系统成为弹簧的一端系有空椅, 另一端固定在宇宙飞船 (质量为  $M$ ) 上的系统. 这一系统的振动, 与一系于弹簧的一端, 质量等于  $m_0'$  的物体 (弹簧的另一端固定) 的振动相仿. 这里  $m_0'$  即空椅和宇宙飞船的约化质量为



$$m_0' = \frac{m_0 M}{m_0 + M} \quad (3)$$

其振动周期为  $T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{m_0'}{k}}$ , 利用①式, 可得

$$\frac{m_0}{m_0'} = \left(\frac{T_0'}{T_0}\right)^2 = \left(\frac{1.28195 \text{ s}}{1.27395 \text{ s}}\right)^2 \quad (4)$$

利用③和④两式, 可求得宇宙飞船的质量为

$$M = \frac{m_0}{\frac{m_0}{m_0'} - 1} = \frac{25.21 \text{ kg}}{\left(\frac{1.28195 \text{ s}}{1.27395 \text{ s}}\right)^2 - 1} = 2001 \text{ kg} \quad (5)$$

若宇航员束缚在椅子上, 随同弹簧振荡, 则仿照前法, 设  $m$  为宇航员与空椅的质量和, 则该质量和宇宙飞船  $M$  的约化质量为

$$m' = \frac{mM}{m + M} \quad (6)$$

按题意此系统的振荡周期为  $T' = 2\pi\sqrt{\frac{m'}{k}} = 2.33044 \text{ s}$ , 由此可得出  $m'$  值为

$$m' = k \left(\frac{T'}{2\pi}\right)^2 = 605.6 \text{ N/m} \times \left(\frac{2.33044 \text{ s}}{2\pi}\right)^2 = 83.31 \text{ kg} \quad (7)$$

由⑥式可得  $m = \frac{m'}{1 - \frac{m'}{M}} = \frac{83.31 \text{ kg}}{1 - \frac{83.31 \text{ kg}}{2001 \text{ kg}}} = 86.93 \text{ kg}$ .

宇航员的真正质量为

$$m_A = m - m_0 = 86.93 \text{ kg} - 25.21 \text{ kg} = 61.72 \text{ kg}.$$

### 题 9 (2002 · 亚洲物理竞赛题)

#### 一维晶格的振动

如图 1-6-19 所示, 有  $N$  个可移动的同质点与  $N+1$  根质量不计的相同弹簧排成一条直链.  $N$  远大于 1 ( $N \gg 1$ ), 质点的质量为  $m$ , 弹簧的劲度系数为  $S$ , 质点与弹簧依次相连, 链的两端与另外两个附加的固定质点相连. 这个链可以看做一维晶体振动的模型. 当链处于振动状态时, 链的纵向振动可以看做一些称为简正模式的简单振动的迭加, 每个模式具有自己的简正频率.

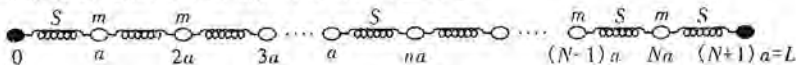


图 1-6-19

(a) 写出第  $n$  个质点的运动方程.

(b) 为求出问题(a)中方程的解, 用试解

$$x_n(\omega) = A \sin k a \cos(\omega t + \alpha).$$

代入方程, 其中  $x_n(\omega)$  为第  $n$  个质点偏离平衡位置的位移,  $\omega$  为振动模式的角频率,  $A, k$  和  $\alpha$  均为常数,  $k$  和  $\omega$  分别为波数和简正(角)频率. 对于每个  $k$ , 有一个对应的频率  $\omega$ . 写出  $\omega$  对于  $k$  的表达式和  $k$  的允许值及  $\omega$  的最大值. 于是链的振动

就是所有这些简正模式的迭加. 有用的公式

$$\left(\frac{d}{dx}\right)\cos ax = -a\sin ax,$$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)\sin ax = a\cos ax,$$

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B,$$

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B.$$

根据普朗克假设, 角频率为  $\omega$  的光子能量为  $\hbar\omega$ , 其中  $\hbar$  为普朗克常数除以  $2\pi$ . 爱因斯坦由此进一步假定频率为  $\omega$  的晶体振动模式也具有这个能量. 注意: 一个振动模式不是一个质点, 而是整个链的一种简谐振动方式. 这个振动模式相似于光子而称为声子. 下面我们就根据这个思想来研究本题的余下部分. 假定晶体由一条直链上很大数目的质点组成.

(c) 对于一定的允许  $\omega$  (或  $k$ ), 可能没有声子, 或有 1 个声子, 或有 2 个声子, 或有任意其他数目的声子. 因此, 对于一个具有频率  $\omega$  的特定模式, 可以计算平均能量  $\langle E(\omega) \rangle$ . 假定  $P_p(\omega)$  表示频率为  $\omega$  的模式具有  $p$  个声子的几率, 那么平均能量就是

$$\langle E(\omega) \rangle = \frac{\sum_{p=0}^{\infty} p\hbar\omega P_p(\omega)}{\sum_{p=0}^{\infty} P_p(\omega)}.$$

式中声子数  $p$  是分立的. 由于声子数很多, 并且对于大的  $p$ ,  $P_p$  变得很小, 因此我们可以将求和扩展到  $p=\infty$ , 其引起的误差可以忽略不计. 几率  $P_p$  由玻尔兹曼公式

$$P_p(\omega) \propto \exp\left(\frac{-p\hbar\omega}{k_B T}\right),$$

给出, 其中  $k_B$  为玻尔兹曼常数,  $T$  为晶体的热力学温度 (假定为常数), 比例系数与  $p$  无关. 计算出频率为  $\omega$  的模式的平均能量. 有用的公式

$$\left(\frac{d}{dx}\right)e^{f(x)} = \left(\frac{df}{dx}\right)e^{f(x)}.$$

下一步我们将计算晶体的总能量  $E_T$ . 在 (c) 中我们求得了频率为  $\omega$  的模式的平均能量. 为求总能量  $E_T$ , 需将  $\langle E(\omega) \rangle$  乘以频率在  $\omega$  到  $\omega + \Delta\omega$  之间的晶体的简正模式数目, 然后在  $\omega=0$  到  $\omega=\omega_{\max}$  的整个范围内求和.

(d) 为了计算总能量, 取波数间隔  $\Delta k$ . 对于很大的质点数  $N$  及  $\Delta k$  远大于相邻 (允许)  $k$  值的差的情况, 在波数间隔  $\Delta k$  中有多少模式数?

(e) 为了利用 (a) 和 (b) 的结果, 近似用  $\left(\frac{dk}{d\omega}\right)d\omega$  代替  $\Delta k$ , 并用对  $\omega$  的积分代替求和 (这里用变量  $\omega$  代替  $k$  较方便). 在这个近似下求出晶体的总的模式数. 并导出  $E_T$  的表达式 (但不要计算出来). 下列积分可能有用



$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

(f) 定容摩尔热容  $C_V$  是实验上可测的:  $C_V = \frac{dE_T}{dT}$  ( $T$  为热力学温度). 对所讨论的晶体在很高温度和很低温度下导出  $C_V$  对  $T$  的表达式 (也就是说, 对某一个温度间隔,  $C_V$  是常量, 还是与  $T$  成线性关系, 还是  $T$  的几次方成线性关系). 定性画出  $C_V$  与  $T$  的关系图, 指出很高温度和很低温度下由公式预见的与温度关系的趋势.

【分析】这是一道关于一维晶体振动的问题, 解题需用到普朗克假设、玻尔兹曼公式等, 且要应用微分、积分进行运算.

【解】(a)  $m\ddot{x}_n = S(x_{n+1} - x_n) - S(x_n - x_{n-1})$ .

(b) 令  $x_n = A \sin nka \cos(\omega t + a)$ , 此式是含有时间的谐振函数关系, 可得  $x_n = -\omega^2 x_n$ . 将之代入(a), 可得  $\omega$  和  $k$  的关系式

$$\begin{aligned} -mA\omega^2 \sin nka &= AS[\sin(n+1)ka - 2\sin nka + \sin(n-1)ka] \\ &= -4AS \sin nka \sin^2 \frac{1}{2}ka. \\ \omega^2 &= \frac{4S}{m} \sin^2 \frac{1}{2}ka. \end{aligned}$$

为定出被允许的  $k$  值, 利用边界条件

$$\sin(N+1)ka = \sin kL = 0.$$

满足上式的  $k$  值为  $kL = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, N\pi$ .

或  $k = \frac{\pi}{L}, \frac{2\pi}{L}, \frac{3\pi}{L}, \dots, \frac{N\pi}{L}$ .

上面所得的  $\omega$  和  $k$  的关系式可写为

$$\omega = \omega_0 \sin \frac{1}{2}ka.$$

因此  $\omega$  的最大值为

$$\omega_0 = 2\sqrt{\frac{S}{m}}.$$

(c) 频率为  $\omega$  的声子的平均能量为

$$\langle E(\omega) \rangle = \frac{\sum_{p=0}^{\infty} p\hbar\omega P_p(\omega)}{\sum_{p=0}^{\infty} P_p(\omega)},$$

解法一:

$$\frac{\sum_{p=0}^{\infty} p\hbar\omega e^{-\frac{p\hbar\omega}{k_B T}}}{\sum_{p=0}^{\infty} e^{-\frac{p\hbar\omega}{k_B T}}} = k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln \sum_{p=0}^{\infty} e^{-\frac{p\hbar\omega}{k_B T}}.$$

几何级数的总和为

$$\sum_{p=0}^{\infty} e^{-\frac{p\hbar\omega}{k_B T}} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}}.$$

得

$$\langle E(\omega) \rangle = -k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln \left( \frac{1}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}} \right) = \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}$$

解法二:

$$\begin{aligned} \langle E(\omega) \rangle &= \frac{\sum_{p=0}^{\infty} p \hbar\omega P_p(\omega)}{\sum_{p=0}^{\infty} P_p(\omega)} = \frac{\sum_{p=0}^{\infty} p \hbar\omega e^{-\frac{p\hbar\omega}{k_B T}}}{\sum_{p=0}^{\infty} e^{-\frac{p\hbar\omega}{k_B T}}}, \\ &= \frac{\sum_{p=0}^{\infty} e^{-\frac{p\hbar\omega}{k_B T}}}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{\infty} p \hbar\omega e^{-\frac{p\hbar\omega}{k_B T}} &= k_B T^2 \frac{d}{dT} \sum_{p=0}^{\infty} e^{-\frac{p\hbar\omega}{k_B T}} = k_B T^2 \frac{d}{dT} (1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}})^{-1} \\ &= \frac{\hbar\omega e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}}{(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}})^2}, \\ \langle E(\omega) \rangle &= \frac{\hbar\omega e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}} = \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}, \end{aligned}$$

解法三:

令  $x = \frac{\hbar\omega}{k_B T}$ ,  $D = \sum_{p=0}^{\infty} e^{-\frac{p\hbar\omega}{k_B T}}$ , 则

$$D = 1 + e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots = \frac{1}{1 - e^{-x}}.$$

又令  $Q = \sum_{p=0}^{\infty} p \hbar\omega e^{-\frac{p\hbar\omega}{k_B T}}$ , 则

$$\begin{aligned} Q &= \hbar\omega (e^{-x} + 2e^{-2x} + 3e^{-3x} + \dots), \\ e^{-x} Q &= \hbar\omega (e^{-2x} + 2e^{-3x} + 3e^{-4x} + \dots), \\ (1 - e^{-x}) Q &= \hbar\omega (e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots) = \frac{\hbar\omega e^{-x}}{1 - e^{-x}}, \\ Q &= \frac{\hbar\omega e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2}, \\ \langle E(\omega) \rangle &= \frac{Q}{D} = \frac{\hbar\omega e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{\hbar\omega}{e^x - 1} = \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}. \end{aligned}$$

(d) 从(b)的结果可知被允许的  $k$  值为

$$k = \frac{\pi}{L}, \frac{2\pi}{L}, \frac{3\pi}{L}, \dots, \frac{N\pi}{L}.$$

故两个相邻  $k$  值的间隔为  $\frac{\pi}{L}$ . 若  $\Delta k \gg \frac{\pi}{L}$ , 则在  $\Delta k$  区间的简正模式数目为

$$\frac{\Delta k}{\frac{\pi}{L}} = \left( \frac{L}{\pi} \right) \Delta k.$$



(e) 此晶体的简正模式的总数为  $N$ .

$\Delta k$  近似等于  $\left(\frac{dk}{d\omega}\right) d\omega$ , 因此在  $\Delta k$  区间的简正模式数目可写为

$$dn = \left(\frac{L}{\pi}\right) \Delta k = \frac{L}{\pi} \left(\frac{dk}{d\omega}\right) d\omega.$$

利用(b)的结果, 可得

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dk} &= \frac{1}{2} a \omega \cos \frac{1}{2} ka = \frac{1}{2} a \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}. \\ dn &= \frac{L}{\pi} \left(\frac{2}{a \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}}\right) d\omega = \frac{(N+1)a}{\pi} \left(\frac{2}{a \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}}\right) d\omega \\ &= \frac{2(N+1)}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}} d\omega. \end{aligned}$$

简正模式的总数为

$$\int dn = \int_0^{\omega_0} \frac{2(N+1)}{\pi} \frac{d\omega}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}} = N+1 \approx N.$$

利用(c)中的  $\langle E(\omega) \rangle$  和(e)中的  $dn$ , 可得晶体的总能量  $E_T$  为

$$E_T = \int_0^{\omega_0} \langle E(\omega) \rangle dn = \frac{2N}{\pi} \int_0^{\omega_0} \left(\frac{\hbar\omega}{e^{k_B T} - 1}\right) \frac{d\omega}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}}.$$

(f) 由于  $(e^{k_B T} - 1)^{-1}$  为一随温度  $T$  升高而单调性地增大的函数, 故  $E_T$  随温度的升高而变大.

当  $T \rightarrow 0$  时,  $(e^{k_B T} - 1)^{-1} \approx e^{-k_B T}$ .

故

$$E_T \approx \frac{2N}{\pi} \int_0^{\omega_0} \hbar\omega e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}} \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}} d\omega.$$

令  $x \equiv \frac{\hbar\omega}{k_B T}$ , 则上式可写为

$$\begin{aligned} E_T &\approx \frac{2N}{\pi \hbar\omega_0} (k_B T)^2 \int_0^{\infty} \frac{x e^{-x}}{\sqrt{1 - \left(\frac{k_B T x}{\hbar\omega_0}\right)^2}} dx \\ &\approx \frac{2N}{\pi \hbar\omega_0} (k_B T)^2 \int_0^{\infty} x e^{-x} dx. \end{aligned}$$

由上式可知  $E_T \propto T^2$ , 因此晶体的摩尔定容热容为

$$C_V = \frac{dE_T}{dT} \propto T.$$

另解:



$$E_T = \frac{2N}{\pi} \sum_{\omega=0}^{\omega_0} \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} \cdot \frac{\Delta\omega}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

当  $T \rightarrow 0$  时

$$\begin{aligned} E_T &\approx \frac{2N}{\pi} \sum_{\omega=0}^{\omega_0} \hbar\omega e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}} \frac{\Delta\omega}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}} \\ &= \frac{2N}{\pi} \frac{(k_B T)^2}{\hbar\omega_0} \sum_x e^{-x} x \Delta x. \end{aligned}$$

当  $T \rightarrow \infty$  时,  $e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} \approx 1 + \frac{\hbar\omega}{k_B T}$ ,

$$E_T \approx \frac{2N}{\pi} \int_0^{\omega_{\max}} \frac{\hbar\omega}{k_B T} \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}} d\omega = \frac{2N}{\pi} k_B T \frac{\pi}{2} = Nk_B T.$$

因此晶体的摩尔定容热容为

$$C_V = \frac{dE_T}{dT} \approx Nk_B.$$

由上式知  $C_V$  为一常数, 称为杜隆-泊替定律.

另解:

当  $T \rightarrow \infty$  时,  $e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1 \approx \frac{\hbar\omega}{k_B T}$ , 故

$$E_T \approx \frac{2N}{\pi} k_B T \sum_{\omega} \frac{\Delta\omega}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}}.$$

因为上式的连加项不含温度  $T$ , 故  $E_T \propto T$ , 所以  $C_V$  为一常数. 绘出  $C_V$  对  $T$  的关系曲线如下.

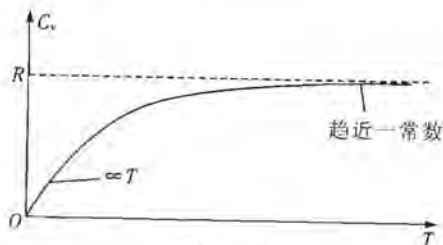


图 1-6-20

**题 10** (1997·国际物理奥赛题) 一小球悬挂于无质量的理想弹簧末端, 上下振动, 其固有频率为  $f$ . 如果将此弹簧从中间切掉一半, 挂上同一小球, 则新的固有频率  $f'$  是多少?

**【分析】** 这是一道较基本的国际奥赛题, 只须分析出弹簧的劲度系数与弹簧长度的关系, 将该关系代入弹簧振子的周期表达式即可求得  $f'$ .

**【解】** 设原弹簧长为  $l$ , 劲度系数为  $k$ . 挂在此弹簧末端的质量为  $m$  的小球的振动频率为



$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

劲度系数为  $k$ , 意味着使弹簧伸长  $\Delta x$  需作用力  $F$ , 则

$$k = \frac{F}{\Delta x}$$

考虑此伸长过程中弹簧的中点在同一作用力  $F$  下, 它只移动了距离  $\frac{\Delta x}{2}$ , 因此半截弹簧的弹性系数为

$$k' = \frac{F}{\frac{\Delta x}{2}} = 2k$$

于是挂在此半截弹簧末端的小球的振动频率为

$$f' = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{m}} = \sqrt{2} f$$

## 第七节 力学综合

### 题 1 (2008 · 全国物理预赛题)

(1) 在一条笔直的公路上依次设置三盏交通信号灯  $L_1$ 、 $L_2$  和  $L_3$ ,  $L_2$  与  $L_1$  相距 80 m,  $L_3$  与  $L_1$  相距 120 m. 每盏信号灯显示绿色的时间间隔都是 20 s, 显示红色的时间间隔都是 40 s.  $L_1$  与  $L_3$  同时显示绿色,  $L_2$  则在  $L_1$  显示红色经历了 10 s 时开始显示绿色. 规定车辆通过三盏信号灯经历的时间不得超过 150 s. 若有一辆匀速向前行驶的汽车通过  $L_1$  的时刻正好是  $L_1$  刚开始显示绿色的时刻, 则此汽车能不停顿地通过三盏信号灯的最大速率是 \_\_\_\_\_ m/s; 若一辆匀速向前行驶的自行车通过  $L_1$  的时刻是  $L_1$  显示绿色经历了 10 s 的时刻, 则此自行车能不停顿地通过三盏信号灯的最小速率是 \_\_\_\_\_ m/s.

(2) 位于水平光滑桌面上的  $n$  个完全相同的小物块沿一条直线排列, 相邻小物块间都存在一定的距离. 自左向右起, 第 1 个小物块标记为  $P_1$ , 第 2 个小物块标记为  $P_2$ , 第 3 个小物块标记为  $P_3$ , 等等, 最后一个小物块即最右边的小物块标记为  $P_n$ . 现设法同时给每个小物块一个方向都向右但大小各不相同的速度, 其中最大的速度记做  $v_1$ , 最小的速度记做  $v_n$ , 介于最大速度和最小速度间的各速度由大到小依次记为  $v_2, v_3, \dots, v_{n-1}$ . 若当小物块发生碰撞时, 碰撞都是弹性正碰, 且碰撞时间极短, 则最终小物块  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$  速度的大小依次为 \_\_\_\_\_.

(3) 一座平顶房屋, 屋顶的面积  $S=40 \text{ m}^2$ . 第一次连续下了  $t=24 \text{ h}$  的雨, 雨滴沿竖直方向以  $v=5.0 \text{ m/s}$  的速度落到屋顶. 假定雨滴撞击屋顶的时间极短且不反弹, 并立即流走. 第二次气温在零下若干摄氏度, 而且是下冻雨, 也下了 24 h, 全部冻雨落到屋顶便都结成冰并留在屋顶上, 测得冰层的厚度  $d=25 \text{ mm}$ . 已知两次下

雨的量相等,冰的密度为  $9 \times 10^2 \text{ kg/m}^3$ . 由以上数据可估算得第二次下的冻雨结成的冰对屋顶的压力为 \_\_\_\_\_ N; 第一次下雨过程中雨对屋顶的撞击使整个屋顶受到的压力为 \_\_\_\_\_ N.

**【分析】** 第(1)小题应仔细观察信号灯之间的间距,红绿灯的间隔时间及先后次序,根据题意选择速度范围;第(2)小题用到相同物体之间发生弹性碰撞过程中速度交换规律;第(3)小题中第1问只要算出冰的重力即可,但第2小问应考察1秒时间雨对屋顶的冲力,此处用到动量定理.

**【解】** (1)  $2; \frac{12}{13}$ ; (2)  $v_n, v_{n-1}, \dots, v_3, v_2, v_1$ ; (3)  $9 \times 10^3; 0.052$ .

**题2** (2006·全国物理预赛题) 从赤道上的C点发射洲际导弹,使之精确地击中北极点N,要求发射所用的能量最少. 假定地球是一质量均匀分布的半径为R的球体,  $R=6400 \text{ km}$ . 已知质量为m的物体在地球引力作用下做椭圆运动时,其能量E与椭圆半长轴a的关系为

$$E = -G \frac{Mm}{2a}.$$

式中M为地球质量,G为引力常量.

(1) 假定地球没有自转,求最小发射速度的大小和方向(用速度方向与从地心O到发射点C的连线之间的夹角表示).

(2) 若考虑地球的自转,则最小发射速度的大小为多少?

(3) 试导出  $E = -G \frac{Mm}{2a}$ .

**【分析】** 解答此题需要用到万有引力定律、机械能守恒定律、开普勒定律及数学中有关椭圆的知识.

**【解】** (1) 这是一个大尺度运动,导弹发射后,在地球引力作用下将沿椭圆轨道运动. 如果导弹能打到N点,则此椭圆一定位于过地点O、北极点N和赤道上的发射点C组成的平面(此平面是C点所在的子午面)内,因此导弹的发射速度(初速度v)必须也在此平面内,地心O是椭圆的一个焦点. 根据对称性,注意到椭圆上的C、N两点到焦点O的距离相等,故所考查椭圆的长轴是过O点垂直CN的直线,即图上的直线AB,椭圆的另一焦点必在AB上. 已知质量为m的物体在质量为M的地球的引力作用下做椭圆运动时,物体和地球构成的系统的能量E(无穷远作为引力势能的零点)与椭圆半长轴a的关系为

$$E = -\frac{GMm}{2a}. \quad \text{①}$$

要求发射的能量最少,即要求椭圆的半长轴a最短. 根据椭圆的几何性质可知,椭圆的两焦点到椭圆上任一点的距离之和为2a,现C点到一个焦点O的距离是定值,等于地球的半径R,只要位于长轴上的另一焦点到C点的距离最小,该椭圆的半长轴就最小. 显然,当另一焦点位于C到AB的垂线的垂足处时,C到该焦

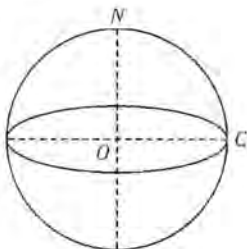


图 1-7-1



点的距离必最小. 由几何关系可知

$$2a = R + \sqrt{2}R. \quad (2)$$

设发射时导弹的速度为  $v$ , 则有

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R}. \quad (3)$$

解①②③式得  $v = \sqrt{\frac{2GM}{R}(\sqrt{2}-1)}$ .  $(4)$

因  $G\frac{Mm}{R^2} = mg. \quad (5)$

比较④⑤两式得  $v = \sqrt{2Rg(\sqrt{2}-1)}. \quad (6)$

代入有关数据得  $v = 7.2 \text{ km/s}. \quad (7)$

速度的方向在  $C$  点与椭圆轨道相切. 根据解析几何知识, 过椭圆上一点的切线的垂直线, 平分两焦点到该点连线的夹角  $\angle OCP$ . 从图中可看出, 速度方向与  $OC$  的夹角

$$\theta = 90^\circ - \frac{1}{2} \times 45^\circ = 67.5^\circ. \quad (8)$$

(2) 由于地球绕通过  $ON$  的轴自转, 在赤道上  $C$  点相对地心的速度为

$$v_c = \frac{2\pi R}{T}. \quad (9)$$

式中  $R$  是地球的半径,  $T$  为地球自转的周期,  $T = 24 \times 3600 \text{ s} = 86400 \text{ s}$ , 故

$$v_c = 0.46 \text{ km/s}. \quad (10)$$

$C$  点速度的方向垂直于子午面(图中纸面). 位于赤道上  $C$  点的导弹发射前也有与子午面垂直的速度  $v_c$ , 为使导弹相对于地心速度位于子午面内, 且满足⑦⑧两式的要求, 导弹相对于地面( $C$  点)的发射速度应有一大小等于  $v_c$ 、方向与  $v_c$  相反的分速度, 以使导弹在此方向相对于地心的速度为零, 导弹的速度的大小为

$$v' = \sqrt{v^2 + v_c^2}. \quad (11)$$

代入有关数据得  $v' = 7.4 \text{ km/s}. \quad (12)$

它在赤道面内的分速度与  $v_c$  相反, 它在子午面内的分速度满足⑦⑧两式.

(3) 质量为  $m$  的质点在地球引力作用下的运动服从机械能守恒定律和开普勒定律, 故对于近地点和远地点有下列关系式

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{r_2}. \quad (13)$$

$$\frac{1}{2}r_1v_1 = \frac{1}{2}r_2v_2. \quad (14)$$

式中  $v_1, v_2$  分别为物体在远地点和近地点的速度,  $r_1, r_2$  为远地点和近地点到地心的距离. 将⑭式中的  $v_1$  代入⑬式, 经整理得

$$\frac{1}{2}mv_2^2 \left( \frac{r_2^2}{r_1^2} - 1 \right) = \frac{GMm}{r_1r_2} (r_2 - r_1). \quad (15)$$

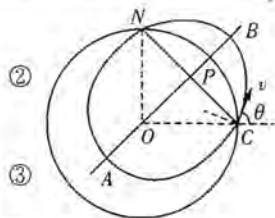


图 1-7-2

注意到

$$r_1 + r_2 = 2a. \quad (16)$$

得

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{GMmr_1}{2a r_2}. \quad (17)$$

因

$$E = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{r_2}. \quad (18)$$

由(16)(17)(18)式得

$$E = -\frac{GMm}{2a}.$$

**题 3.** (2004·全国物理预竞赛) 如图 1-7-3 所示,  $B$  是质量为  $m_B$ 、半径为  $R$  的光滑半球形碗, 放在光滑的水平桌面上.  $A$  是质量为  $m_A$  的细长直杆, 被固定的光滑套管  $C$  约束在竖直方向,  $A$  可自由由上下运动. 碗和杆的质量关系为  $m_B = 2m_A$ . 初始时,  $A$  杆被握住, 使其下端正好与碗的半球面的上边缘接触(如图). 然后从静止开始释放  $A$ ,  $A$ 、 $B$  便开始运动. 设  $A$  杆的位置用  $\theta$  表示,  $\theta$  为碗面的球心  $O$  至  $A$  杆下端与球面接触点的连线方向和竖直方向之间的夹角. 求  $A$  与  $B$  速度的大小(表示成  $\theta$  的函数).

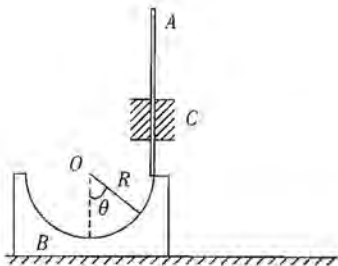


图 1-7-3

**【分析】** 此题是有关相对运动的问题. 我们应用速度的合成及能量守恒的知识即可解出结果.

**【解】** 由题设条件知, 若从地面参考系观测, 则任何时刻,  $A$  沿竖直方向运动, 设其速度为  $v_A$ ,  $B$  沿水平方向运动, 设其速度为  $v_B$ . 若以  $B$  为参考系, 从  $B$  观测, 则  $A$  杆保持在竖直方向, 它与碗的接触点在碗面内做半径为  $R$  的圆周运动, 速度的方向与圆周相切, 设其速度为  $v_A'$ . 杆相对地面的速度是杆相对碗的速度与碗相对地面的速度的合速度, 速度合成的矢量图如图中的平行四边形所示. 由图 1-7-4 得

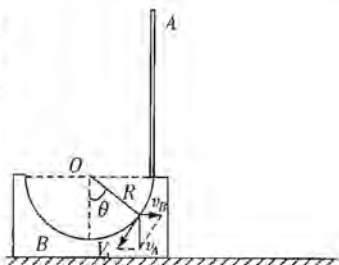


图 1-7-4

$$v_A' \sin\theta = v_A. \quad (1)$$

$$v_A' \cos\theta = v_B. \quad (2)$$

因而

$$v_B = v_A \cot\theta. \quad (3)$$

由能量守恒

$$m_A g R \cos\theta = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2. \quad (4)$$

由(3)(4)两式及  $m_B = 2m_A$  得

$$v_A = \sin\theta \sqrt{\frac{2gR \cos\theta}{1 + \cos^2\theta}}.$$

$$v_B = \cos\theta \sqrt{\frac{2gR \cos\theta}{1 + \cos^2\theta}}.$$



**题4** (2001·全国物理预赛题) 如图1-7-5所示,杆OA长为 $R$ ,可绕过O点的水平轴在竖直平面内转动,其端点A系着一跨过定滑轮B、C的不可伸长的轻绳,绳的另一端系一物块M. 滑轮的半径可忽略,B在O的正上方,OB之间的距离为 $H$ . 某一时刻,当绳的BA段与OB之间的夹角为 $\alpha$ 时,杆的角速度为 $\omega$ ,求此时物块M的速率 $v_M$ .

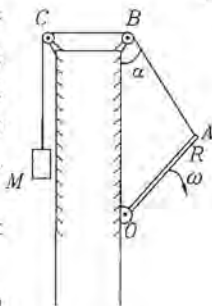


图1-7-5

**【分析】** 此题的关键是正确分析物块M的速率 $v_M$ 与杆的端点A绕O点做圆周运动的线速度 $v_A$ 的关系.

**【解】** 杆的端点A点绕O点做圆周运动,其速度 $v_A$ 的方向与杆OA垂直,其大小为

$$v_A = \omega R.$$

对速度 $v_A$ 作如图1-7-6所示的正交分解,沿绳BA的分量就是物块M的速率 $v_M$ ,则

$$v_M = v_A \cos\varphi.$$

由正弦定理知

$$\frac{\sin\angle OAB}{H} = \frac{\sin\alpha}{R}.$$

由图看出  $\angle OAB = \frac{\pi}{2} + \varphi$ .

由以上各式可得

$$v_M = \omega H \sin\alpha.$$

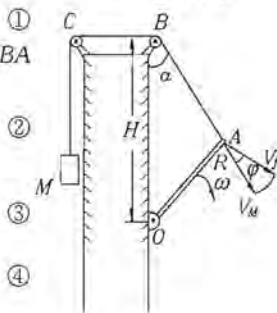


图1-7-6

**题5** (2000·全国物理预赛题) 如图1-7-7所示,在水平桌面上放有长木板C,C上右端是固定挡板P,在C上左端和中点处各放有小物块A和B,A、B的尺寸以及P的厚度皆可忽略不计,A、B之间和B、P之间的距离皆为 $L$ . 设木板C与桌面之间无摩擦,A、C之间和B、C之间的静摩擦因数及动摩擦因数均为 $\mu$ ,A、B、C(连同挡板P)的质量相同. 开始时,B和C静止,A以一初速度向右运动. 试问下列情况是否能发生? 要求定量求出能发生这些情况时物块A的初速度 $v_0$ 应满足的条件,或定量说明不能发生的理由.

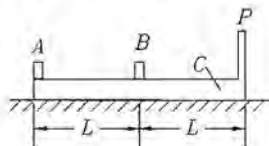


图1-7-7

- (1) 物块A与B发生碰撞;
- (2) 物块A与B发生碰撞(设为弹性碰撞)后,物块B与挡板P发生碰撞;
- (3) 物块B与挡板P发生碰撞(设为弹性碰撞)后,物块B与A在木板C上再发生碰撞;
- (4) 物块A从木板C上掉下来;
- (5) 物块B从木板C上掉下来.

**【分析】** 这是一道综合性很强的竞赛题. 解题时要注意:(1)分清过程,及该过程各物体的受力情况,该过程遵守的力学规律;(2)注意对题中涉及的物理现象的

临界条件的分析.

**【解】** (1) 以  $m$  表示  $A$ 、 $B$  和  $C$  的质量, 当物块  $A$  以初始速度  $v_0$  向右运动时,  $A$  受到木板  $C$  施加的大小为  $\mu mg$  的滑动摩擦力而减速, 木板  $C$  则受到  $A$  施加的大小为  $\mu mg$  的滑动摩擦力和物块  $B$  施加的大小为  $f$  的摩擦力而做加速运动.  $B$  则因受  $C$  施加的摩擦力  $f$  作用而加速. 设  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三者的加速度分别为  $a_A$ 、 $a_B$ 、 $a_C$ , 则由牛顿第二定律, 有

$$\begin{aligned}\mu mg &= ma_A, \\ \mu mg - f &= ma_C, \\ f &= ma_B.\end{aligned}$$

事实上在此题中  $a_B = a_C$ , 即  $B$ 、 $C$  之间无相对运动, 这是因为当  $a_B = a_C$  时, 由上式可得

$$f = \frac{1}{2} \mu mg. \quad (1)$$

它小于最大静摩擦力  $\mu mg$ , 可见静摩擦力使  $B$ 、 $C$  之间不发生相对运动. 若物块  $A$  刚好与物块  $B$  不发生碰撞, 则物块  $A$  运动到物块  $B$  所在处时,  $A$  与  $B$  的速度大小相等. 因为  $B$  与木板  $C$  的速度相等, 所以此时三者的速度均相同, 设为  $v_1$ , 由动量守恒定律有

$$mv_0 = 3mv_1. \quad (2)$$

在此过程中, 设木板  $C$  运动的路程为  $s_1$ , 则物块  $A$  运动的路程为  $s_1 + L$ , 如图 1-7-8 所示. 由动能定理有

$$\frac{1}{2} mv_1^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = -\mu mg(s_1 + L), \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} (2m)v_1^2 = \mu mgs_1. \quad (4)$$

或者说, 在此过程中整个系统动能的改变等于系统内部相互间的滑动摩擦力做功的代数和 (③和④式等号两边相加), 即

$$\frac{1}{2} (3m)v_1^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = -\mu mgL. \quad (5)$$

式中  $L$  就是  $A$  相对  $C$  运动的路程. 解②⑤式, 得

$$v_0 = \sqrt{3\mu gL}. \quad (6)$$

即物块  $A$  的初速度  $v_0 = \sqrt{3\mu gL}$  时,  $A$  刚好不与  $B$  发生碰撞, 若  $v_0 > \sqrt{3\mu gL}$ , 则  $A$  将与  $B$  发生碰撞, 故  $A$  与  $B$  发生碰撞的条件是

$$v_0 > \sqrt{3\mu gL}. \quad (7)$$

(2) 当物块  $A$  的初速度  $v_0$  满足⑦式时,  $A$  与  $B$  将发生碰撞, 设碰撞前瞬间,  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三者的速度分别为  $v_A$ 、 $v_B$  和  $v_C$ , 则有

$$v_A > v_B, v_B = v_C. \quad (8)$$

在  $A$ 、 $B$  发生碰撞的极短时间内, 木板  $C$  对它们的摩擦力的冲量非常小, 可忽

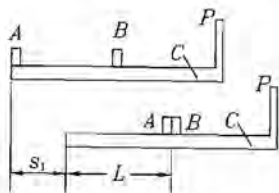


图 1-7-8



略不计。故在碰撞过程中,  $A$  与  $B$  构成的系统的动量守恒, 而木板  $C$  的速度保持不变。因为  $A$ 、 $B$  间的碰撞是弹性的, 系统的机械能守恒, 又因为质量相等, 由动量守恒和机械能守恒可以证明(证明从略), 碰撞前后  $A$ 、 $B$  交换速度, 若碰撞刚结束时,  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三者的速度分别为  $v_A'$ 、 $v_B'$  和  $v_C'$ , 则有

$$v_A' = v_B, v_B' = v_A, v_C' = v_C. \quad (9)$$

由⑧⑨式可知,  $A$  与  $C$  速度相等, 保持相对静止, 而  $B$  相对于  $A$ 、 $C$  向右运动, 以后发生的过程相当于第(1)问中所进行过程的延续, 由物块  $B$  替换  $A$  继续向右运动。

若物块  $B$  刚好与挡板  $P$  不发生碰撞, 则物块  $B$  以速度  $v_B'$  从  $C$  板的中点运动到挡板  $P$  所在处时,  $B$  与  $C$  的速度相等。因  $A$  与  $C$  的速度大小是相等的, 故  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三者的速度相等, 设此时三者的速度为  $v_2$ 。根据动量守恒定律有

$$mv_0 = 3mv_2. \quad (10)$$

$A$  以初速度  $v_0$  开始运动, 接着与  $B$  发生完全弹性碰撞, 碰撞后  $A$  相对  $C$  静止,  $B$  到达  $P$  所在处这一整个过程中, 先是  $A$  相对  $C$  运动的路程为  $L$ , 接着是  $B$  相对  $C$  运动的路程为  $L$ , 整个系统动能的改变, 类似于上面第(1)问解答中⑤式的说法, 等于系统内部相互间的滑动摩擦力做功的代数和, 即

$$\frac{1}{2}(3m)v_2^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\mu mg \cdot 2L. \quad (11)$$

解⑩⑪两式, 得 
$$v_0 = \sqrt{6\mu gL}. \quad (12)$$

即物块  $A$  的初速度  $v_0 = \sqrt{6\mu gL}$  时,  $A$  与  $B$  碰撞, 但  $B$  与  $P$  刚好不发生碰撞。若  $v_0 > \sqrt{6\mu gL}$ , 就能使  $B$  与  $P$  发生碰撞, 故  $A$  与  $B$  碰撞后, 物块  $B$  与挡板  $P$  发生碰撞的条件是

$$v_0 > \sqrt{6\mu gL}. \quad (13)$$

(3)若物块  $A$  的初速度  $v_0$  满足条件⑬式, 则在  $A$ 、 $B$  发生碰撞后,  $B$  将与挡板  $P$  发生碰撞。设在碰撞前瞬间,  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三者的速度分别为  $v_A''$ 、 $v_B''$  和  $v_C''$ , 则有

$$v_B'' > v_A'' = v_C''. \quad (14)$$

$B$  与  $P$  碰撞后的瞬间,  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三者的速度分别为  $v_A'''$ 、 $v_B'''$ 、 $v_C'''$ , 则仍类似于第(2)问解答中⑨式的道理, 有

$$v_B''' = v_C''', v_C''' = v_B''', v_A''' = v_A''. \quad (15)$$

由⑭⑮式可知,  $B$  与  $P$  刚碰撞后, 物块  $A$  与  $B$  的速度相等, 都小于木板  $C$  的速度, 即

$$v_C''' > v_A''' = v_B''', \quad (16)$$

在以后的运动过程中, 木板  $C$  以较大的加速度向右做减速运动, 而物块  $A$  和  $B$  以相同的较小的加速度向右做加速运动, 加速度的大小分别为

$$a_C = 2\mu g, a_A = a_B = \mu g. \quad (17)$$

加速过程将持续到或者  $A$  和  $B$  与  $C$  的速度相同, 三者以相同速度  $\frac{1}{3}v_0$  向右做



匀速运动,或者木块 A 从木板 C 上掉了下来.因此物块 B 与 A 在木板 C 上不可能再发生碰撞.

(4)若 A 刚刚没从木板 C 上掉下来,即 A 到达 C 的左端时的速度变为与 C 相同,这时三者的速度皆相同,以  $v_3$  表示,由动量守恒有

$$3mv_3 = mv_0. \quad (18)$$

从 A 以初速度  $v_0$  在木板 C 的左端开始运动,经过 B 与 P 相碰,直到 A 刚没从木板 C 的左端掉下来,这整个过程中,系统内部先是 A 相对 C 运动的路程为  $L$ ;接着 B 相对 C 运动的路程也是  $L$ ;B 与 P 碰后直到 A 刚没从木板 C 上掉下来,A 与 B 相对 C 运动的路程也皆为  $L$ .整个系统功能的改变应等于内部相互间的滑动摩擦力做功的代数和,即

$$\frac{1}{2}(3m)v_3^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\mu mg \cdot 4L. \quad (19)$$

由(18)(19)两式,得 
$$v_0 = \sqrt{12\mu gL}. \quad (20)$$

即当物块 A 的初速度  $v_0 = \sqrt{12\mu gL}$  时,A 刚好不会从木板 C 上掉下.若  $v_0 > \sqrt{12\mu gL}$ ,则 A 将从木板 C 上掉下,故 A 从 C 上掉下的条件是

$$v_0 > \sqrt{12\mu gL}. \quad (21)$$

(5)若物块 A 的初速度  $v_0$  满足条件(21)式,则 A 将从木板 C 上掉下来,设 A 刚要从木板 C 上掉下来时,A、B、C 三者的速度分别为  $v_A''' = v_B'''$  和  $v_C'''$ ,则有

$$v_A''' = v_B''' < v_C'''. \quad (22)$$

这时(18)式应改写成 
$$mv_0 = 2mv_A''' + mv_C'''. \quad (23)$$

(19)式应改写成

$$\frac{1}{2}(2m)v_B'''^2 + \frac{1}{2}mv_C'''^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\mu mg \cdot 4L. \quad (24)$$

当物块 A 从木板 C 上掉下来后,若物块 B 刚好不会从木板 C 上掉下,即当 C 在左端赶上 B 时,B 与 C 的速度相等.设此速度为  $v_4$ ,则对 B、C 这一系统来说,由动量守恒定律,有

$$mv_B''' + mv_C''' = 2mv_4. \quad (25)$$

在此过程中,对这一系统来说,滑动摩擦力做功的代数和为  $-\mu mgL$ ,由动能定理可得

$$\frac{1}{2}(2m)v_4^2 - \left(\frac{1}{2}mv_B'''^2 + \frac{1}{2}mv_C'''^2\right) = -\mu mgL. \quad (26)$$

由(23)(24)(25)式可得 
$$v_0 = \sqrt{16\mu gL}. \quad (27)$$

即当  $v_0 = \sqrt{16\mu gL}$  时,物块 B 刚好不能从木板 C 上掉下.若  $v_0 > \sqrt{16\mu gL}$ ,则 B 将从木板 C 上掉下,故物 B 从木板 C 上掉下的条件是

$$v_0 > \sqrt{16\mu gL}.$$

**题 6** (1999·全国物理预赛题) 1997 年 8 月 26 日在日本举行的国际天文学大会上,德国 Max Planck 学会的一个研究组宣布了他们的研究成果:银河系的中心可能存



在一个大黑洞,他们的根据是用口径为 3.5 m 的天文望远镜对猎户座中位于银河系中心附近的星体进行近 6 年的观测所得的数据.他们发现,距离银河系中心约  $6 \times 10^9$  km 的星体正以 2 000 km/s 的速度围绕银河系中心旋转.根据上面的数据,试在经典力学的范围内(见提示 2),通过计算确认,如果银河系中心确实存在黑洞的话,其最大半径是多少?(引力常量  $G=6.67 \times 10^{-11} \text{ km}^2 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ )

**提示:** 1. 黑洞是一种密度极大的天体,其表面的引力是如此之强,以至于包括光在内的所有物质都逃脱不了其引力作用.

2. 计算中可以采用拉普拉斯经典黑洞模型,在这种模型中,在黑洞表面上的所有物质,即使初速度等于光速  $c$  也逃脱不了其引力的作用.

**【分析】** 提示 1、2 是选择物理规律,建立方程的依据.必须仔细审阅明确含义才能解答好本题.

**【解】** 首先求出一定质量的引力源成为黑洞应满足的条件.按照黑洞的定义,包括以光速运动的光子也不能脱离黑洞的吸引,即不能逃离黑洞的表面.而拉普拉斯经典黑洞模型则把光看做是以光速  $c$  运动的某种粒子.我们知道,物体在引力作用下的势能是负的,物体恰能逃离引力作用,表示物体运动到无限远的过程中,其动能恰好全部用于克服引力做功.物体在无限远处时,动能和势能都等于零.这意味着该物体处在引力源表面处时,其动能与势能之和亦等于零.物体不能逃离引力作用,表示该物体尚未到达无限远处,其动能已全部用于克服引力做功,但引力势能仍是负的.这意味着它在引力源表面处时,其动能与势能之和小于零.若某引力源的质量为  $M$ ,半径为  $r_B$ ,质量为  $m$  的粒子在引力源表面的速度等于光速,但它仍不能逃离引力作用,则按牛顿力学的观点应有下列关系

$$\frac{1}{2}mc^2 - G\frac{Mm}{r_B} < 0. \quad (1)$$

$$\text{或} \quad r_B < \frac{2GM}{c^2}. \quad (2)$$

这就是说,对于质量为  $M$  的引力源,只有其半径  $r_B$ (叫做黑洞的引力半径)小于  $\frac{2GM}{c^2}$  时才会在其表面产生足够强的引力,使得包括光在内的所有物质都不能脱离其引力作用.对光而言,人们将无法通过光学测量看到它,这就是把它叫做黑洞的原因.

现在再来根据观测数据确定存在于银河系中心的大黑洞的半径.设位于银河系中心的引力源的质量为  $M$ ,绕银河系中心旋转的星体的质量为  $m$ ,该星体做圆周运动时,有下列关系

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{mM}{r^2}.$$

$$\text{即} \quad M = \frac{rv^2}{G}.$$

$r$  为轨道半径.若该引力源为黑洞,则其质量分布球的半径应满足②式,即

$$r_B < \frac{2G}{c^2} \frac{rv^2}{G} = 2\frac{v^2 r}{c^2}. \quad (4)$$

根据观测数据,  $v=2 \times 10^3 \text{ km/s}=2 \times 10^5 \text{ m/s}$ ,  $r=60 \times 10^3 \text{ km}=6 \times 10^{12} \text{ m}$ , 而  $c=3 \times 10^8 \text{ m/s}$ . 把这些数据代入④式, 得

$$r_B < 5.3 \times 10^8 \text{ m} = 5.3 \times 10^5 \text{ km}. \quad \textcircled{5}$$

这说明, 对质量由③式决定的引力源来说, 半径小于  $5.3 \times 10^5 \text{ km}$  时才是黑洞, 大于这个数值则不是黑洞. 所以如果银河系中心存在黑洞的话, 该黑洞的半径小于  $5.3 \times 10^5 \text{ km}$ .

**题 7** (2008·全国物理竞赛题) “嫦娥一号”奔月卫星与“长征三号”火箭分离后, 进入绕地运行的椭圆轨道, 近地点离地面高  $H_n=2.05 \times 10^2 \text{ km}$ , 远地点离地面高  $H_f=5.0930 \times 10^4 \text{ km}$ , 周期约为 16 h, 称为 16 小时轨道(如图 1-7-9 中曲线 1 所示). 随后, 为了使卫星离地越来越远, 星载发动机先在远地点点火, 使卫星进入新轨道(如图中曲线 2 所示), 以抬高近地点. 后来又连续三次在抬高以后的近地点点火, 使卫星加速和变轨, 抬高远地点, 相继进入 24 小时轨道、48 小时轨道和地月转移轨道(分别如图中曲线 3、4、5 所示). 已知卫星质量  $m=2.350 \times 10^3 \text{ kg}$ , 地球半径  $R=6.378 \times 10^3 \text{ km}$ , 地面重力加速度  $g=9.81 \text{ m/s}^2$ , 月球半径  $r=1.738 \times 10^3 \text{ km}$ .

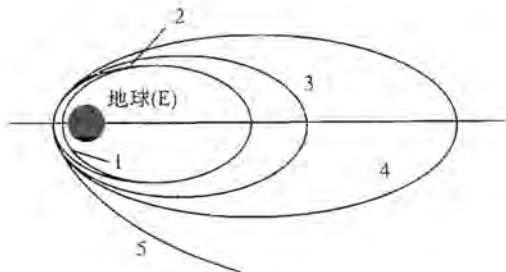


图 1-7-9

1. 试计算 16 小时轨道的半长轴  $a$  和半短轴  $b$  的长度以及椭圆离心率  $e$ .
2. 在 16 小时轨道的远地点点火时, 假设卫星所受推力的方向与卫星速度方向相同, 而且点火时间很短, 可以认为椭圆轨道长轴方向不变. 设推力大小  $F=490 \text{ N}$ , 要把近地点抬高到  $600 \text{ km}$ , 问点火时间应持续多长时间?
3. 试根据题目所给数据计算卫星在 16 小时轨道的实际运行周期.
4. 卫星最后进入绕月圆形轨道, 距月面高度  $H_m \approx 200 \text{ km}$ , 周期  $T_m = 127 \text{ min}$ . 试据此估算月球质量与地球质量之比值.

**【分析】** 这是一道有关人造卫星的题目, 解答此题需涉及万有引力定律、能量守恒、角动量守恒及圆周运动等有关知识.

**【解】** 1. 椭圆半长轴  $a$  等于近地点和远地点之间距离的一半, 即近地点与远地点矢径长度(均指卫星到地心的距离)  $r_n$  与  $r_f$  的算术平均值, 即有

$$a = \frac{1}{2}(r_n + r_f) = \frac{1}{2}[(H_n + R) + (H_f + R)] = \frac{1}{2}(H_n + H_f) + R. \quad \textcircled{1}$$

代入数据得

$$a = 3.1946 \times 10^4 \text{ km}. \quad \textcircled{2}$$



椭圆半短轴  $b$  等于近地点与远地点矢径长度的几何平均值, 即有

$$b = \sqrt{r_n r_f} \quad (3)$$

代入数据得  $b = 1.942 \times 10^4 \text{ km}$  (4)

椭圆的偏心率  $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$  (5)

代入数据得  $e = 0.794$  (6)

2. 当卫星在 16 小时轨道上运行时, 以  $v_n$  和  $v_f$  分别表示它在近地点和远地点的速度. 根据能量守恒, 卫星在近地点和远地点能量相等, 有

$$\frac{1}{2} m v_n^2 - \frac{GMm}{r_n} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{GMm}{r_f} \quad (7)$$

式中  $M$  是地球质量,  $G$  是万有引力常量. 因卫星在近地点和远地点的速度都与卫星到地心的连线垂直, 根据角动量守恒有

$$m v_n r_n = m v_f r_f \quad (8)$$

注意到  $\frac{GM}{R^2} = g$  (9)

由⑦~⑨三式可得

$$v_n = \sqrt{\frac{r_f}{r_n} \frac{2g}{(r_f + r_n)}} R \quad (10)$$

$$v_f = \frac{r_n}{r_f} v_n = \sqrt{\frac{r_n}{r_f} \frac{2g}{(r_f + r_n)}} R \quad (11)$$

当卫星沿 16 小时轨道运行时, 根据题目所给的数据有  $r_n = R + H_n$ ,  $r_f = R + H_f$ . 由式⑪, 并代入有关数据得

$$v_f = 1.198 \text{ km/s} \quad (12)$$

依题意, 在远地点星载发动机点火, 对卫星做短时间加速, 加速度的方向与卫星的速度方向相同. 加速后, 长轴方向没有改变, 故加速结束时, 卫星的速度与新轨道的长轴垂直, 卫星所在处将是新轨道的远地点. 所以, 新轨道的远地点高度  $H_f' = H_f = 5.0930 \times 10^4 \text{ km}$ , 但新轨道近地点高度  $H_n' = 6.00 \times 10^2 \text{ km}$ . 由式⑪可求得卫星在新轨道远地点处的速度为

$$v_f' = 1.230 \text{ km/s} \quad (13)$$

卫星动量的增加量等于卫星所受推力  $F$  的冲量. 设发动机点火时间为  $\Delta t$ , 有

$$m(v_f' - v_f) = F \Delta t \quad (14)$$

由⑫~⑭三式, 并代入有关数据得

$$\Delta t = 1.5 \times 10^2 \text{ s} = 2.5 \text{ min} \quad (15)$$

这比运行周期小得多.

3. 当卫星沿椭圆轨道运行时, 以  $r$  表示它所在处矢径的大小,  $v$  表示其速度的大小,  $\theta$  表示矢径与速度的夹角, 则卫星的角动量的大小

$$L = r m v \sin \theta = 2 m a v \quad (16)$$

其中 
$$\sigma = \frac{1}{2} r v \sin \theta. \quad (17)$$

是卫星矢径在单位时间内扫过的面积,即卫星的面积速度.由于角动量是守恒的,故  $\sigma$  是恒量.利用远地点处的角动量,得

$$\sigma = \frac{1}{2} r_1 v_1. \quad (18)$$

又因为卫星运行一周扫过的椭圆的面积为

$$S = \pi ab. \quad (19)$$

所以卫星沿轨道运动的周期 
$$T = \frac{S}{\sigma}. \quad (20)$$

由(18)~(20)三式得 
$$T = \frac{2\pi ab}{r_1 v_1}. \quad (21)$$

代入有关数据得 
$$T = 5.678 \times 10^4 \text{ s} \approx 15 \text{ h } 46 \text{ min}. \quad (22)$$

注:本小题有多种解法.例如,由开普勒第三定律有,绕地球运行的两个卫星的周期  $T$  与  $T_0$  之比的平方等于它们的轨道半长轴  $a$  与  $a_0$  之比的立方,即

$$\left(\frac{T}{T_0}\right)^2 = \left(\frac{a}{a_0}\right)^3.$$

其中  $a_0$  是卫星绕地球沿圆轨道运动的轨道半径,则有

$$\frac{GMm}{a_0^2} = ma_0 \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2.$$

由此得 
$$\frac{T_0^2}{a_0^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = \frac{4\pi^2}{gR^2}.$$

从而得 
$$T = \frac{2\pi a}{R} \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

代入有关数据便可求得式(22).

4. 在绕月圆形轨道上,根据万有引力定律和牛顿定律有

$$\frac{GM_M m}{r_M^2} = m r_M \left(\frac{2\pi}{T_M}\right)^2. \quad (23)$$

这里  $r_M = r + H_M$  是卫星绕月轨道半径,  $M_M$  是月球质量.由(23)两式可得

$$M_M = \frac{4\pi^2 r_M^3}{gR^2 T_M^2} M. \quad (24)$$

代入有关数据得 
$$\frac{M_M}{M} \approx 0.0124. \quad (25)$$

**题 8** (2005·全国物理竞赛题) 如图 1-7-10 所示,在一个劲度系数为  $k$  的轻质弹簧两端分别拴着一个质量为  $m$  的小球 A 和质量为  $2m$  的小球 B. A 用细线拴住悬挂起来,系统处于静止状态,此时弹簧长度为  $l$ . 现将细线烧断,并以此时为计时零点,取一相对地面静止的、竖直向下为正方向的坐标轴  $Ox$ ,原点  $O$  与此时 A 球的位置重合(如图). 试求任意时刻两球的坐标.

**【分析】** 此题的关键是正确分析小球所受弹簧的弹力. 解题过程要用到质心系(非惯性系)及简谐运动的有关知识.



**【解】** 方法 1:

对于由小球 A、B 和弹簧构成的系统,当 A、B 之间的距离为  $l$  时,已知  $m_A = m, m_B = 2m$ ,由质心的定义,可知系统的质心 C 离 A 的距离

$$l_C = \frac{2}{3}l. \quad ①$$

故 A、B 到质心 C 的距离分别为

$$l_A = \frac{2}{3}l, l_B = \frac{1}{3}l. \quad ②$$

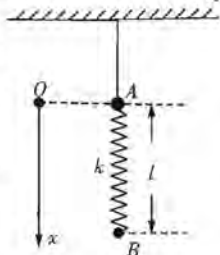


图 1-7-10

若以质心 C 为参考系(质心系),则质心 C 是固定不动的,连接 A、B 的弹簧可以分成两个弹簧 CA 和 CB. 设弹簧 CA 的自然长度为  $l_{A0}$ , 劲度系数为  $k_A$ ,一端与小球 A 相连,另一端固定在 C 点;弹簧 CB 的自然长度为  $l_{B0}$ , 劲度系数为  $k_B$ ,一端与小球 B 相连,另一端亦固定在 C 点. 若连接 A、B 的弹簧的自然长度为  $l_0$ ,根据题意有  $k(l-l_0) = 2mg$ . ③

由②式可知弹簧 CA 和 CB 的自然长度分别为

$$l_{A0} = \frac{2}{3}l_0, l_{B0} = \frac{1}{3}l_0. \quad ④$$

当 A 被悬挂,系统处于静止时,已知连接 A、B 的弹簧长度为  $l$ ,由②式可知,此时弹簧 CA 和 CB 的长度分别为

$$l_A = \frac{2}{3}l, l_B = \frac{1}{3}l. \quad ⑤$$

弹簧 CA、CB 作用于 A、B 的弹力分别为

$$f_A = k_A(l_A - l_{A0}) = \frac{2}{3}k_A(l - l_0).$$

$$f_B = k_B(l_B - l_{B0}) = \frac{1}{3}k_B(l - l_0).$$

但  $f_A, f_B$  就是连接 A、B 的弹簧因拉伸而产生的弹力  $f$ , 即有

$$f_A = f_B = f = k(l - l_0).$$

由此得

$$k_A = \frac{3}{2}k, k_B = 3k. \quad ⑥$$

相对地面,质心 C 是运动的,在  $t=0$  时刻,即细线刚烧断时刻, A 位于  $Ox$  轴的原点 O 处,即  $x_A(0) = 0$ ; B 的坐标  $x_B(0) = l$ . 由①式,可知此时质心 C 的坐标为

$$x_C(0) = \frac{2}{3}l. \quad ⑦$$

在细线烧断以后,作用于系统的外力是重力  $(m+2m)g$ . 故质心以  $g$  为加速度做匀加速直线运动,任意时刻  $t$ , 质心的坐标

$$x_C(t) = x_C(0) + \frac{1}{2}gt^2 = \frac{2}{3}l + \frac{1}{2}gt^2. \quad ⑧$$

由于质心做加速运动,质心系是非惯性系. 在非惯性参考系中,应用牛顿第二

定律研究物体的运动时,物体除受真实力作用外,还受惯性力作用.若在质心系中取一坐标轴  $Ox'$ ,原点  $O'$  与质心  $C$  固连,取竖直向下为  $Ox'$  轴的正方向,当小球  $B$  在这参考系中的坐标为  $x_B'$  时,弹簧  $CB$  作用于  $B$  的弹性力

$$f_B = -k_B(x_B' - l_{B0}).$$

当  $x_B' > l_{B0}$  时,方向竖直向上.此外,  $B$  还受到重力  $mg$ ,方向竖直向下;惯性力大小为  $mg$ ,方向竖直向上.作用于  $B$  的合力

$$F_B = -k_B(x_B' - l_{B0}) - mg + mg.$$

$$\text{由③④式得} \quad F_B = -k_B \left[ x_B' - \frac{1}{3} \left( l - \frac{2mg}{k} \right) \right]. \quad (9)$$

$$\text{令} \quad X_B = x_B' - \frac{1}{3} \left( l - \frac{2mg}{k} \right). \quad (10)$$

$$\text{有} \quad F_B = -k_B X_B. \quad (11)$$

当  $X_B = 0$ , 作用于  $B$  的合力  $F_B = 0$ ,  $B$  处于平衡状态. 由⑩式可知,在质心系中,  $B$  的平衡位置的坐标

$$x_{B0}' = \frac{1}{3} \left( l - \frac{2mg}{k} \right). \quad (12)$$

$X_B$  为  $B$  离开其平衡位置的位移,⑪式表明,作用于  $B$  的合力具有弹性力的性质,故在  $F_B$  作用下,  $B$  将在平衡位置附近做简谐运动,振动圆频率

$$\omega_B = \sqrt{\frac{k_B}{m_B}} = \sqrt{\frac{3k}{2m}}. \quad (13)$$

$$\text{离开平衡位置的位移} \quad X_B = A_B \cos(\omega_B t + \varphi_B). \quad (14)$$

$A_B$  为振幅,  $\varphi_B$  为初相位. 在  $t=0$  时刻,即细线刚烧断时刻,  $B$  是静止的,故此时刻  $B$  离开其平衡位置  $x_{B0}'$  的距离就是简谐运动的振幅  $A_B$ ,而在  $t=0$  时刻,  $B$  离开质心的距离即⑤式给出的  $l_B$ ,故  $B$  离开平衡位置的距离即振幅

$$A_B = l_B - x_{B0}'.$$

$$\text{由⑤⑫式得} \quad A_B = \frac{1}{3} l - \frac{1}{3} \left( l - \frac{2mg}{k} \right) = \frac{2mg}{3k}. \quad (15)$$

因  $t=0$ ,  $X_B = A_B$ , 且  $X_B$  是正的,故

$$\varphi_B = 0.$$

$$\text{由此得} \quad X_B = \frac{2mg}{3k} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{2m}} t\right). \quad (16)$$

由⑩式,  $t$  时刻  $B$  在质心系中的坐标

$$x_B'(t) = \frac{1}{3} \left( l - \frac{2mg}{k} \right) + \frac{2mg}{3k} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{2m}} t\right). \quad (17)$$

$$\text{在地面参考系的坐标} \quad x_B(t) = x_C(t) + x_B'(t). \quad (18)$$

$$\text{得} \quad x_B(t) = l + \frac{1}{2} g t^2 - \frac{2mg}{3k} \left[ 1 - \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{2m}} t\right) \right]. \quad (19)$$

同理,当小球  $A$  在质心系中的坐标为  $x_A'$  时,注意到  $x_A'$  是负的,这时,弹簧  $CA$  的伸长量为



$$x_A' + l_{A0} = x_A' + \frac{2}{3}l_0 = x_A + \frac{2}{3}\left(l - \frac{2mg}{k}\right).$$

当  $x_A' + l_{A0}$  为负时, 弹力向下, 为正; 当  $x_A' + l_{A0}$  为正时, 弹力向上, 为负, 故有

$$f_A = -k_A \left[ x_A + \frac{2}{3} \left( l - \frac{2mg}{k} \right) \right].$$

作用于 A 的合力为

$$F_A = -k_A \left[ x_A + \frac{2}{3} \left( l - \frac{2mg}{k} \right) \right].$$

令

$$X_A = x_A + \frac{2}{3} \left( l - \frac{2mg}{k} \right).$$

有

$$F_A = -k_A X_A.$$

当  $X_A = 0$ , 作用于 A 的合力  $F_A = 0$ , A 处于平衡状态, A 的平衡位置的坐标

$$x_{A0} = -\frac{2}{3} \left( l - \frac{2mg}{k} \right).$$

$X_A$  为 A 离开其平衡位置的位移, 故在合力  $F_A$  作用下, A 将在平衡位置附近做简谐运动, 振动圆频率

$$\omega_A = \sqrt{\frac{k_A}{m}} = \sqrt{\frac{3k}{2m}}. \quad (21)$$

离开平衡位置的位移  $X_A = A_A \cos(\omega_A t + \varphi_A)$ .

$A_A$  为振幅,  $\varphi_A$  为初相位. 在  $t=0$  时刻, 即细线刚烧断时刻, A 是静止的, A 离开质心 C 的距离为  $l_A$ , A 的平衡位置离开质心的距离为  $|x_{A0}|$ , 故此时 A 离开平衡位置的距离即为振幅  $A_A$ .

$$A_A = l_A - |x_{A0}| = \frac{2}{3}l - \frac{2}{3}\left(l - \frac{2mg}{k}\right) = \frac{4}{3}\frac{mg}{k}.$$

而此时  $X_A = -A_A$ , 故  $\varphi_A = \pi$ .

由此得 
$$X_A = -\frac{4mg}{3k} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{2m}}t\right). \quad (22)$$

在时刻  $t$ , A 在地面参考系中的坐标

$$\begin{aligned} x_A(t) &= x_C(t) + x_{A0} + X_A \\ &= \frac{2}{3}l + \frac{1}{2}gt^2 - \frac{2}{3}\left(l - \frac{2mg}{k}\right) - \frac{4}{3}\frac{mg}{k} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{2m}}t\right) \\ &= \frac{1}{2}gt^2 + \frac{4mg}{3k} \left[ 1 - \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{2m}}t\right) \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

方法 2:

当 A 球相对于地面参考系的坐标为  $x$  时, 弹簧 CA 的伸长量为  $x_C - \frac{2}{3}l_0 - x$ , A 所受的合力为

$$F_A = mg + \frac{3}{2}k \left( x_C - \frac{2}{3}l_0 - x \right).$$



$$\text{其加速度为} \quad a_A = g + \frac{3}{2m}k \left( x_C - \frac{2}{3}l_0 - x \right). \quad (1')$$

其相对于质心的加速度为

$$\begin{aligned} a_A' &= a_A - g = \frac{3}{2m}k \left( x_C - \frac{2}{3}l_0 - x \right) \\ &= -\frac{3}{2m}k \left[ x - \left( x_C - \frac{2}{3}l_0 \right) \right]. \end{aligned} \quad (2')$$

其中  $x - \left( x_C - \frac{2}{3}l_0 \right)$  表示 A 球相对于其平衡位置的位移, 在相互平动的两个参考系中, 相对位移与参考系无关.

上式表明, 相对质心, A 球的加速度与其相对于平衡位置的位移成正比且反向. 也就是说, A 球相对质心做简谐运动.

同理可证

$$\begin{aligned} F_B &= 2mg - 3k \left( x - x_C - \frac{l_0}{3} \right), \\ a_B &= g - \frac{3k}{2m} \left[ x - \left( x_C + \frac{l_0}{3} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3')$$

其相对于质心的加速度为

$$a_B' = -\frac{3k}{2m} \left[ x - \left( x_C - \frac{2}{3}l_0 \right) \right]. \quad (4')$$

其中  $x - \left( x_C + \frac{l_0}{3} \right)$  表示 B 球相对于其平衡位置的位移, 相对质心, B 球的加速度与其相对于平衡位置的位移成正比且反向, 即 B 球相对质心也做简谐运动. 且有 A 与 B 振动的圆频率相等, 即

$$\omega_A = \omega_B = \sqrt{\frac{3k}{2m}}. \quad (5')$$

方法 3:

在地面参考系中, 列 A、B 的牛顿定律方程

$$ma_1 = mg + k(x_2 - x_1 - l_0). \quad (1'')$$

$$2ma_2 = 2mg - k(x_2 - x_1 - l_0). \quad (2'')$$

$x_1, x_2$  是 A、B 的坐标,  $l_0$  是弹簧的自然长.

$t=0$  时, 有

$$x_1 = 0, v_1 = 0,$$

$$x_2 = l, v_2 = 0.$$

$l$  为初始时, 即细线刚烧断时刻弹簧的长度, 有关系

$$k(l - l_0) = 2mg.$$

所以

$$l_0 = l - \frac{2mg}{k}.$$

由①''式+②''式, 得

$$a_1 + 2a_2 = 3g.$$



令  $a = a_1 + 2a_2 = 3g$ ,  $a$  是一个恒定的加速度, 结合初始条件,  $a$  对应的坐标和运动方程是

$$x_1 + 2x_2 = 2l + \frac{3}{2}gt^2. \quad (3'')$$

再由②''式-2×①''式, 得

$$2m(a_2 - a_1) = -3k(x_2 - x_1 - l_0). \quad (4'')$$

这是一个以  $A$  为参考系描写  $B$  物体运动的动力学方程, 且是简谐的, 所以直接写出解答

$$x_2 - x_1 - l_0 = A \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{2m}}t + \alpha\right).$$

结合初始条件

$$l - l_0 = A \cos \alpha.$$

$$A \sqrt{\frac{3k}{2m}} \sin \alpha = 0.$$

得到

$$\alpha = 0.$$

$$A = l - l_0 = \frac{2mg}{k}.$$

所以

$$x_2 - x_1 = l_0 + \frac{2mg}{k} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{2m}}t\right).$$

即

$$x_2 - x_1 = l - \frac{2mg}{k} + \frac{2mg}{k} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{2m}}t\right). \quad (5'')$$

由③''式-2×⑤''式, 得

$$x_1 = \frac{1}{2}gt^2 + \frac{4mg}{3k} \left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{2m}}t\right)\right]. \quad (6'')$$

由③''式+⑤''式, 得

$$x_2 = l + \frac{1}{2}gt^2 - \frac{2mg}{3k} \left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{2m}}t\right)\right]. \quad (7'')$$

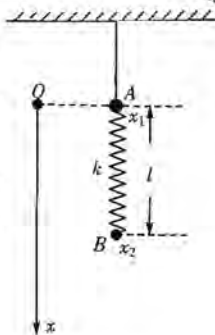


图 1-7-11

**题 9** (2004·全国物理竞赛题) 两颗人造卫星绕地球沿同一椭圆轨道同向运动, 它们通过轨道上同一点的时间相差半个周期. 已知轨道近地点离地心的距离是地球半径  $R$  的 2 倍, 卫星通过近地点时的速度  $v = \sqrt{\frac{3GM}{4R}}$ , 式中  $M$  为地球的质量,  $G$  为引力常量. 卫星上装有同样的角度测量仪, 可测出卫星与任意两点的两条连线之间的夹角. 试设计一种测量方案, 利用这两个测量仪测定太空中某星体与地心在某时刻的距离. (最后结果要求用测得量和地球半径  $R$  表示)

**【分析】** 解答此题要用到角动量守恒、机械能守恒及有关三角知识等.

**【解】** 如图 1-7-12, 卫星绕地球运动的轨道为一椭圆, 地心位于轨道椭圆的一个焦点  $O$  处, 设待测量星体位于  $C$  处. 根据题意, 当一个卫星运动到轨道的近地点  $A$  时, 另一个卫星恰好到达远地点  $B$  处, 只要位于  $A$  点的卫星用角度测量仪测出

AO 和 AC 的夹角  $\alpha_1$ , 位于 B 点的卫星用角度测量仪测出 BO 和 BC 的夹角  $\alpha_2$ , 就可以计算出此时星体 C 与地心的距离 OC.

因卫星椭圆轨道长轴的长度

$$\overline{AB} = r_{\text{近}} + r_{\text{远}}. \quad (1)$$

式中  $r_{\text{近}}$  与  $r_{\text{远}}$  分别表示轨道近地点和远地点到地心的距离. 由角动量守恒

$$mv_{\text{近}} r_{\text{近}} = mv_{\text{远}} r_{\text{远}}. \quad (2)$$

式中  $m$  为卫星的质量. 由机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv_{\text{近}}^2 - \frac{GMm}{r_{\text{近}}} = \frac{1}{2}mv_{\text{远}}^2 - \frac{GMm}{r_{\text{远}}}. \quad (3)$$

已知

$$r_{\text{近}} = 2R, v_{\text{近}} = \sqrt{\frac{3GM}{4R}}.$$

得

$$r_{\text{远}} = 6R. \quad (4)$$

所以

$$\overline{AB} = 2R + 6R = 8R. \quad (5)$$

在  $\triangle ABC$  中用正弦定理  $\frac{\sin \alpha_1}{BC} = \frac{\sin(\pi - \alpha_1 - \alpha_2)}{AB}$ .

(6)

所以

$$\overline{BC} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \overline{AB}. \quad (7)$$

地心与星体之间的距离为  $\overline{OC}$ , 在  $\triangle BOC$  中用余弦定理

$$(\overline{OC})^2 = r_{\text{远}}^2 + (\overline{BC})^2 - 2r_{\text{远}} \cdot \overline{BC} \cos \alpha_2. \quad (8)$$

由④⑤⑦式得

$$\overline{OC} = 2R \sqrt{9 + 16 \frac{\sin^2 \alpha_1}{\sin^2(\alpha_1 + \alpha_2)} - 24 \frac{\sin \alpha_1 \cos \alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}}.$$

**题 10.** (2002·全国物理复赛题) 一根不可伸长的细轻绳, 穿上一粒质量为  $m$  的珠子(视为质点), 绳的下端固定在 A 点, 上端系在轻质小环上, 小环可沿固定的水平细杆滑动(小环的质量及与细杆摩擦皆可忽略不计). 细杆与 A 在同一竖直平面内. 开始时, 珠子紧靠小环, 绳被拉直, 如图 1-7-13 所示. 已知: 绳长为  $l$ , A 点到杆的距离为  $h$ , 绳能承受的最大张力为  $T_d$ , 珠子下滑过程中到达最低点前绳子被拉断. 求细绳被拉断时珠子的位置和速度的大小(珠子与绳之间无摩擦).

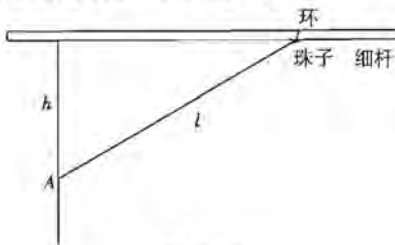


图 1-7-13



注:质点在平面内做曲线运动时,它在任一点的加速度沿该点轨道法线方向的分量称为法向加速度  $a_n$ ,可以证明  $a_n = \frac{v^2}{R}$ ,  $v$  为质点在该点时速度的大小,  $R$  为轨道曲线在该点的“曲率半径”.所谓平面曲线上某点的曲率半径,就是在曲线上取包含该点在内的一段弧,当这段弧极小时,可以把它看做是某个“圆”的弧,则此圆的半径就是曲线在该点的曲率半径.如图 1-7-14 中曲线在 A 点的曲率半径为  $R_A$ ,在 B 点的曲率半径为  $R_B$ .



图 1-7-14

**【分析】** 此题首先要运用解析几何建立珠子的运动轨迹方程,再分析珠子的受力,建立运动方程,然后才能求出结果.

**【解】** 1. 珠子运动轨迹

建立如图 1-7-15 所示的坐标系,原点  $O$  在过点的竖直线与细杆相交处,  $x$  轴沿细杆向右,  $y$  轴沿  $OA$  向下.当珠子运动到  $N$  点处且绳子未断时,小环在  $B$  处,  $BN$  垂直于  $x$  轴,所以珠子的坐标为

$$x = PN, y = BN.$$

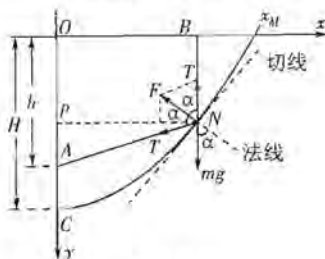


图 1-7-15

$$\begin{aligned} \text{由} \triangle APN \text{ 知} & \quad (AP)^2 + (PN)^2 = (AN)^2 \\ \text{即有} & \quad (h-y)^2 + x^2 = (l-y)^2 \\ \text{得} & \quad x^2 = -2(l-h)y + (l^2 - h^2). \end{aligned} \quad \textcircled{1}$$

这是一个以  $y$  轴为对称轴,顶点位于  $y = \frac{1}{2}(l+h)$  处,焦点与顶点的距离为  $\frac{1}{2}(l-h)$  的抛物线,如图 1-7-15 所示,图中的  $H = \frac{1}{2}(l+h)$ ,  $A$  为焦点.

2. 珠子在  $N$  点的运动方程

因为忽略绳子的质量,所以可把与珠子接触的那一小段绳子看做是珠子的一部分,则珠子受的力有三个:一是重力  $mg$ ;另外两个是两边绳子对珠子的拉力,它们分别沿  $NB$  和  $NA$  方向,这两个拉力大小相等,皆用  $T$  表示,则它们的合力的大

小为

$$F = 2T \cos \alpha. \quad (2)$$

$\alpha$  为  $N$  点两边绳子之间夹角的一半,  $F$  沿  $\angle ANB$  的角平分线方向.

因为  $AN$  是焦点至  $N$  的连线,  $NB$  平行于  $y$  轴, 根据解析几何所述的抛物线性质可知,  $N$  点的法线是  $\angle ANB$  的角平分线. 故合力  $F$  的方向与  $N$  点的法线一致.

由以上的论证, 再根据牛顿定律和题中的注, 珠子在  $N$  点的运动(沿法线方向)方程应为

$$2T \cos \alpha - mg \cos \alpha = m \frac{v^2}{R}. \quad (3)$$

$$2T \cos \alpha = \frac{mv^2}{R} + mg \cos \alpha. \quad (4)$$

式中  $R$  是  $N$  点处轨道曲线的曲率半径;  $v$  为珠子在  $N$  处时速度的大小. 根据机械能守恒定律可得

$$v = \sqrt{2gy}. \quad (5)$$

### 3. 求曲率半径 $R$

当绳子断裂时  $T = T_0$ , 由④式可见, 如果我们能另想其他办法求得曲率半径  $R$  与  $l$  及  $y$  的关系, 则就可能由④、⑤两式求得绳子断裂时珠子的纵坐标  $y$ . 现提出如下一种办法. 作一条与小珠轨迹对于  $x$  轴呈对称状态的抛物线, 如图 1-7-16 所示. 由此很容易想到这是一个从高  $H$  处平抛物体的轨迹. 平抛运动是我们熟悉的, 我们不仅知道其轨迹是抛物线, 而且知道其受力情况及详细的运动学方程. 这样我们可不必通过轨道方程而是运用力学原理分析其运动过程即可求出与  $N$  对称的  $N'$  点处抛物线的曲率半径  $R$  与  $y$  的关系, 也就是  $N$  处抛物线的曲率半径  $R$  与  $y$  的关系.

设从抛出至落地的时间为  $t$ , 则有

$$v_0 t = \sqrt{l^2 - h^2}.$$

由此解得

$$v_0 = \sqrt{g(l-h)}. \quad (7)$$

设物体在  $N'$  处的速度为  $\vec{v}$ , 由机械能守恒定律可得

$$\vec{v}^2 = v_0^2 + 2g(H - BN'). \quad (8)$$

物体在  $N'$  处法线方向的运动方程为

$$mg \cos \alpha = \frac{m \vec{v}^2}{R}. \quad (9)$$

式中  $R$  即为  $N'$  处抛物线的曲率半径, 从⑦⑧⑨式及  $H = \frac{1}{2}(l+h)$ , 可求得

$$R = \frac{2(l - BN')}{\cos \alpha}, \text{ 这也等于 } N \text{ 点抛物线的曲率半径, } BN = BN' = y, \text{ 故得}$$

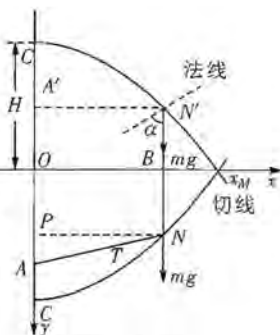


图 1-7-16



$$R = \frac{2(l-y)}{\cos\alpha}. \quad (10)$$

4. 求绳被拉断时小珠位置和速度的大小

把⑤式和⑩式代入④式,可求得绳子的张力为

$$T = \frac{mgl}{2(l-y)}. \quad (11)$$

当  $T = T_d$  时绳子被拉断,设此时珠子位置的坐标为  $(x_d, y_d)$ ,由⑩式得

$$y_d = l \left( 1 - \frac{mg}{2T_d} \right). \quad (12)$$

代人①式,得 
$$x_d = \sqrt{mgl \left( \frac{l-h}{T_d} \right) - (l-h)^2}. \quad (13)$$

绳子断开时珠子速度的大小为

$$v_d = \sqrt{2gy_d} = \sqrt{2gl \left( 1 - \frac{mg}{2T_d} \right)}. \quad (14)$$

**题 11** (2000·全国物理复赛题) 宇宙飞行器和小行星绕太阳在同一平面内做圆周运动,飞行器的质量比小行星的质量小得多,飞行器的速率为  $v_0$ ,小行星的轨道半径为飞行器轨道半径的 6 倍.有人企图借助飞行器与小行星的碰撞使飞行器飞出太阳系,于是他便设计了如下方案:

I. 当飞行器在其圆周轨道的适当位置时,突然点燃飞行器上的喷气发动机,经过极短时间后立即关闭发动机,已使飞行器获得所需的速度,沿圆周轨道的切线方向离开圆轨道;

II. 飞行器到达小行星的轨道时正好位于小行星的前缘,速度的方向和小行星在该处速度的方向相同,正好可被小行星碰撞;

III. 小行星与飞行器的碰撞是弹性正碰,不计燃烧的燃料质量.

(1) 试通过计算证明按上述方案能使飞行器飞出太阳系.

(2) 设在上述方案中,飞行器从发动机取得的能量为  $E_1$ .如果不采取上述方案而是令飞行器在圆轨道上突然点燃喷气发动机,经过极短时间后立即关闭发动机,已使飞行器获得足够的速度沿圆轨道切线方向离开圆轨道后能直接飞出太阳系.

采用这种办法时,飞行器从发动机取得的能量的最小值用  $E_2$  表示.问  $\frac{E_1}{E_2}$  为多少?

**【分析】** 题中涉及采用两种发射方式使飞行器逃出太阳系,并对这两种方式所需的能量进行比较.其实这两种方式与研究人造卫星如何逃逸地球的运动是非常相似的,它们都遵守相同的规律,如动量守恒定律、机械能守恒定律、圆周运动中的动力学方程等.对比人造卫星逃逸地球的运动的有关计算原理,正确理解并应用这些力学规律就能求得本题答案.

**【解】** (1) 设太阳的质量为  $M_0$ , 飞行器的质量为  $m$ , 飞行器绕太阳做圆周运动的轨道半径为  $R$ . 根据所设计的方案,可知飞行器是从某原来的圆轨道上某处出发,沿着半个椭圆轨道到达小行星轨道上的.该椭圆既与飞行器原来的圆轨道相

切,又与小行星的圆轨道相切.要使飞行器沿此椭圆轨道运动,应点燃发动机使飞行器的速度在极短时间内,由  $v_0$  变成某一值  $u_0$ . 设飞行器沿椭圆轨道到达小行星轨道时的速度为  $u$ ,因大小为  $u_0$  和  $u$  的这两个速度的方向都与椭圆的长轴垂直,由开普勒第二定律可得

$$u_0 R = 6uR. \quad (1)$$

$$\text{由能量关系,有 } \frac{1}{2} m u_0^2 - G \frac{M_0 m}{R} = \frac{1}{2} m u^2 - G \frac{M_0 m}{6R}. \quad (2)$$

$$\text{由牛顿万有引力定律,有 } G \frac{M_0 m}{R^2} = m \frac{v_0^2}{R}.$$

$$\text{或 } v_0 = \sqrt{\frac{GM_0}{R}}. \quad (3)$$

解①②③三式得

$$u_0 = \sqrt{\frac{12}{7}} v_0, \quad (4)$$

$$u = \sqrt{\frac{1}{21}} v_0. \quad (5)$$

设小行星绕太阳运动的速度为  $v$ ,小行星的质量为  $M$ ,由牛顿万有引力定律

$$G \frac{M_0 M}{(6R)^2} = M \frac{v^2}{6R}.$$

$$\text{得 } v = \sqrt{\frac{GM_0}{6R}} = \sqrt{\frac{1}{6}} v_0. \quad (6)$$

$$\text{可以看出 } v > u. \quad (7)$$

由此可见,只要选择好飞行器在圆轨道上合适的位置离开圆轨道,使得它到达小行星轨道处时,小行星的前缘也正好运动到该处,则飞行器就能被小行星撞击.可以把小行星看做是相对静止的,飞行器以相对速度  $(v-u)$  射向小行星.由于小行星的质量比飞行器的质量大得多,碰撞后,飞行器以同样的速度  $(v-u)$  弹回,即碰撞后,飞行器相对小行星的速度的大小为  $(v-u)$ ,方向与小行星的速度的方向相同,飞行器相对太阳的速度为

$$u_1 = v + v - u = 2v - u.$$

$$\text{或将⑤⑥式代入得 } u_1 = (\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{1}{21}}) v_0. \quad (8)$$

如果飞行器能从小行星的轨道上直接飞出太阳系,它应具有的最小速度为  $u_2$ ,则有

$$\frac{1}{2} m u_2^2 - G \frac{M_0 m}{6R} = 0.$$

$$\text{得 } u_2 = \sqrt{\frac{GM_0}{3R}} = \sqrt{\frac{1}{3}} v_0. \quad (9)$$

$$\text{可以看出 } u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{7}}) v_0 > \frac{1}{\sqrt{3}} v_0 = u_2. \quad (10)$$



飞行器被小行星撞击后具有的速度足以保证它能飞出太阳系。

(2)为使飞行器能进入椭圆轨道,发动机应使飞行器的速度由  $v_0$  增加到  $u_0$ , 飞行器从发动机获得能量

$$E_1 = \frac{1}{2} m u_0^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m \frac{12}{7} v_0^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{5}{14} m v_0^2. \quad (11)$$

若飞行器从其圆周轨道上直接飞出太阳系,飞行器应具有的最小速度为  $u_3$ , 则有

$$\frac{1}{2} m u_3^2 - G \frac{M_0 m}{R} = 0.$$

由此得 
$$u_3 = \sqrt{2G \frac{M_0}{R}} = \sqrt{2} v_0. \quad (12)$$

飞行器的速度由  $v_0$  增加到  $u_3$ , 应从发动机获取的能量为

$$E_2 = \frac{1}{2} m u_3^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_0^2. \quad (13)$$

所以 
$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{5}{14} m v_0^2}{\frac{1}{2} m v_0^2} = 0.71. \quad (14)$$

### 题 12 (2008 · 全国物理决赛题)

卫星的运动可由地面观测来确定;而知道了卫星的运动,又可以用它来确定空间飞行体或地面上物体的运动. 这都涉及时间和空间坐标的测定. 为简化分析和计算,不考虑地球的自转和公转,把它当做惯性系。

1. 先来考虑卫星运动的测定. 设不考虑相对论效应. 在卫星上装有发射电波的装置和高精度的原子钟. 假设从卫星上每次发出的电波信号,都包含该信号发出的时刻这一信息。

(I)地面观测系统(包含若干个观测站)可利用从电波中接收到的这一信息,并根据自己所处的已知位置和自己的时钟来确定卫星每一时刻的位置,从而测定卫星的运动. 这种测量系统至少需要包含几个地面观测站? 列出可以确定卫星位置的方程。

(II)设有两个观测站  $D_1$ 、 $D_2$ , 分别位于同一经线上北纬  $\theta$  和南纬  $\theta$  (单位:  $^\circ$ ) 处. 若它们同时收到时间  $\tau$  之前卫星发出的电波信号. (i) 试求发出电波时刻卫星距地面的最大高度  $H$ ; (ii) 当  $D_1$ 、 $D_2$  处观测站位置的纬度都有很小的误差  $\Delta\theta$  时, 试求  $H$  的误差; (iii) 如果上述的时间  $\tau$  有很小的误差  $\Delta\tau$ , 试求  $H$  的误差。

2. 在第 1(II)小题中, 若  $\theta = 45^\circ$ ,  $\tau = 0.10$  s. (i) 试问卫星发出电波时刻卫星距地面最大高度  $H$  是多少千米? (ii) 若  $\Delta\theta = \pm 1.0''$ , 定出的  $H$  有多大误差? (iii) 若  $\Delta\tau = \pm 0.010 \mu\text{s}$ , 定出的  $H$  有多大误差? 假设地球为半径  $R = 6.38 \times 10^3$  km 的球体, 光速  $c = 2.998 \times 10^8$  m/s, 地面处的重力加速度  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>.

3. 再来考虑根据参照卫星的运动来测定一个物体的运动. 设不考虑相对论效应. 假设从卫星持续发出的电波信号包含卫星运动状态的信息, 即每个信号发出的



时刻及该时刻卫星所处的位置,再假设被观测物体上有一台卫星信号接收器(设其上没有时钟),从而可获知这些信息.为了利用这种信息来确定物体的运动状态,即物体接收到卫星信号时物体当时所处的位置以及当时的时刻,一般来说物体至少需要同时接收到几个不同卫星发来的信号电波?列出确定当时物体的位置和该时刻的方程.

4. 根据狭义相对论,运动的钟比静止的钟慢.根据广义相对论,钟在引力场中变慢.现在来考虑在上述测量中相对论的这两种效应.已知天上卫星的钟与地面观测站的钟零点已经对准.假设卫星在离地面  $h=2.00 \times 10^4$  km 的圆形轨道上运行,地球半径  $R$ 、光速  $c$  和地面重力加速度  $g$  取第 2 小题中给的值.

(I) 根据狭义相对论,试估算地上的钟经过 24 h 后它的示数与卫星上的钟的示数差多少? 设在处理这一问题时,可以把匀速直线运动中时钟走慢的公式用于匀速圆周运动.

(II) 根据广义相对论,钟在引力场中变慢的因子是  $(1 - \frac{2\phi}{c^2})^{\frac{1}{2}}$ ,  $\phi$  是钟所在位置的引力势(即引力势能与受引力作用的物体质量之比;取无限远处引力势为零)的大小.试问地上的钟 24 h 后,卫星上的钟的示数与地上的钟的示数差多少?

**【分析】** 此题涉及狭义相对论与广义相对论的知识,在运算时要进行数学近似.

**【解】** 1. (I) 选择一个坐标系来测定卫星的运动,就是测定每一时刻卫星的位置坐标  $x, y, z$ . 设卫星在  $t$  时刻发出的信号电波到达第  $i$  个地面站的时刻为  $t_i$ . 因为卫星信号电波以光速  $c$  传播,于是可以写出

$$(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2 = c^2(t-t_i)^2. \quad (i=1, 2, 3) \quad \textcircled{1}$$

式中  $x_i, y_i, z_i$  是第  $i$  个地面站的位置坐标,可以预先测定,是已知的;  $t_i$  也可以由地面站的时钟来测定;  $t$  由卫星信号电波给出,也是已知的. 所以,方程①中有三个未知数  $x, y, z$ ,要有三个互相独立的方程,也就是说,至少需要包含三个地面站,三个方程对应于式①中  $i=1, 2, 3$  的情况.

(II) (i) 如图 1-7-17 所示,以地心  $O$  和两个观测站  $D_1, D_2$  的位置为顶点所构成的三角形是等腰三角形,腰长为  $R$ . 根据题意,可知卫星发出信号电波时距离两个观测站的距离相等,都是

$$L = c\tau. \quad \textcircled{2}$$

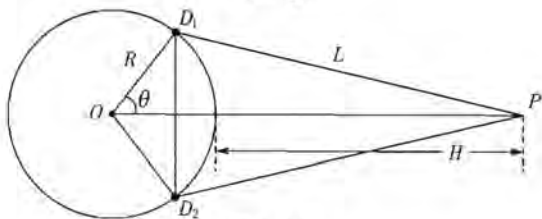


图 1-7-17



当卫星  $P$  处于上述三角形所在的平面内时, 距离地面的高度最大, 即  $H$ . 以  $\theta$  表示  $D_1, D_2$  所处的纬度, 由余弦定理可知

$$L^2 = R^2 + (H+R)^2 - 2R(H+R)\cos\theta. \quad (3)$$

由②③两式得

$$H = \sqrt{(c\tau)^2 - (R\sin\theta)^2} - R(1 - \cos\theta). \quad (4)$$

式④也可据图直接写出.

(ii) 按题意, 如果纬度有很小的误差  $\Delta\theta$ , 则由式③可知, 将引起  $H$  发生误差  $\Delta H$ . 这时有

$$L^2 = R^2 + (H + \Delta H + R)^2 - 2R(H + \Delta H + R)\cos(\theta + \Delta\theta). \quad (5)$$

将式⑤展开, 因  $\Delta\theta$  很小, 从而  $\Delta H$  也很小, 可略去高次项, 再与式③相减, 得

$$\Delta H = -\frac{R(R+H)\sin\theta\Delta\theta}{H+(1-\cos\theta)R}. \quad (6)$$

其中  $H$  由④式给出.

(iii) 如果时间  $\tau$  有  $\Delta\tau$  的误差, 则  $L$  有误差

$$\Delta L = c\Delta\tau. \quad (7)$$

由式③可知, 这将引起  $H$  产生误差  $\Delta H$ . 这时有

$$(L + \Delta L)^2 = R^2 + (H + \Delta H + R)^2 - 2R(H + \Delta H + R)\cos\theta. \quad (8)$$

由式⑦⑧和③, 略去高次项, 可得

$$\Delta H = \frac{c^2\tau\Delta\tau}{H+R(1-\cos\theta)}. \quad (9)$$

其中  $H$  由式④给出.

2. (i) 在式④中代入数据, 算得  $H = 2.8 \times 10^4$  km. (ii) 在式⑥中代入数据, 算得  $\Delta H = \pm 25$  m. (iii) 在式⑨中代入数据, 算得  $\Delta H = \pm 3.0$  m.

3. 选择一个坐标系, 设被测物体待定位的坐标为  $x, y, z$ , 待定时刻为  $t$ , 第  $i$  个卫星在  $t_i$  时刻的坐标为  $x_i, y_i, z_i$ . 卫星信号电波以光速传播, 可以写出

$$(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2 = c^2(t-t_i)^2. \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (10)$$

由于方程⑩有四个未知数  $t, x, y, z$ , 需要四个独立方程才有确定的解, 故需同时接收至少四个不同卫星的信号, 确定当时物体的位置和该时刻所需要的是式⑩中  $i=1, 2, 3, 4$  所对应的四个独立方程.

4. (I) 由于卫星上钟的变慢因子为  $\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ , 地上的钟的示数  $T$  与卫星上的钟的示数  $t$  之差为

$$T - t = T - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} T = \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\right] T. \quad (11)$$

这里  $v$  是卫星相对于地面的速度, 可由下列方程定出

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2}. \quad (12)$$

其中  $G$  是万有引力常量,  $M$  是地球质量,  $r$  是轨道半径. 式⑪给出

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{g}{r} R} = \sqrt{\frac{g}{R+h}} R.$$

其中  $R$  是地球半径,  $h$  是卫星离地面的高度,  $g = \frac{GM}{R^2}$  是地面重力加速度; 代入数值有  $v = 3.89 \text{ km/s}$ . 于是  $\left(\frac{v}{c}\right)^2 \approx 1.68 \times 10^{-10}$ , 这是很小的数. 所以

$$\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2.$$

最后, 可以算出 24 h 的时差

$$T - t \approx \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 T = \frac{1}{2} \frac{gR^2}{c^2(R+h)} T = 7.3 \mu\text{s}. \quad (13)$$

(II) 卫星上的钟的示数  $t$  与无限远惯性系中的钟的示数  $T_0$  之差

$$t - T_0 = \sqrt{1 - 2 \frac{\phi}{c^2}} T_0 - T_0 = \left(\sqrt{1 - 2 \frac{\phi}{c^2}} - 1\right) T_0. \quad (14)$$

卫星上的钟所处的重力势能的大小为

$$\phi = \frac{GM}{R+h} = \frac{R^2}{R+h} g. \quad (15)$$

所以

$$\frac{\phi}{c^2} = \frac{gR^2}{c^2(R+h)}. \quad (15)$$

代入数值有  $\frac{\phi}{c^2} = 1.68 \times 10^{-10}$ , 这是很小的数. 式(14)近似为

$$t - T_0 \approx -\frac{\phi}{c^2} T_0. \quad (16)$$

类似地, 地面上的钟的示数  $T$  与无限远惯性系的钟的示数之差

$$T - T_0 = \sqrt{1 - 2 \frac{\phi_E}{c^2}} T_0 - T_0 = \left(\sqrt{1 - 2 \frac{\phi_E}{c^2}} - 1\right) T_0. \quad (17)$$

地面上的钟所处的重力势能的大小为

$$\phi_E = \frac{GM}{R} = gR. \quad (18)$$

所以

$$\frac{\phi_E}{c^2} = \frac{gR}{c^2}.$$

代入数值有  $\frac{\phi_E}{c^2} = 6.96 \times 10^{-10}$ , 这是很小的数. 与上面的情形类似, 式(17)近似为

$$T - T_0 \approx -\frac{\phi_E}{c^2} T_0. \quad (19)$$

(16)(19)两式相减, 即得卫星上的钟的示数与地面上的钟的示数之差

$$t - T \approx -\frac{\phi - \phi_E}{c^2} T_0. \quad (20)$$

从式(19)中解出  $T_0$ , 并代入式(20)得



$$t - T \approx \frac{\phi - \phi_E}{c^2} T \approx -\frac{\phi - \phi_E}{c^2} T = \frac{gR}{c^2} \frac{h}{R+h} T. \quad (2)$$

注意,题目中的 24 h 是指地面的钟走过的时间  $T$ . 最后,算出 24 h 卫星上的钟的示数与地面上的钟的示数之差

$$t - T = 46 \mu\text{s}.$$

**例 13** (2007 · 全国物理竞赛题) 为了近距离探测太阳并让探测器能回到地球附近,可发射一艘以椭圆轨道绕太阳运行的携带探测器的宇宙飞船,要求其轨道与地球绕太阳的运动轨道在同一平面内,轨道的近日点到太阳的距离为 0.01 AU (AU 为距离的天文单位,表示太阳和地球之间的平均距离:  $1 \text{ AU} = 1.495 \times 10^{11} \text{ m}$ ),并与地球具有相同的绕日运行周期(为简单计,设地球以圆轨道绕太阳运动). 试问从地球表面应以多大的相对于地球的发射速度  $u_0$  (发射速度是指在关闭火箭发动机,停止对飞船加速时飞船的速度) 发射此飞船,才能使飞船在克服地球引力作用后仍在地球绕太阳运行轨道附近(也就是说克服了地球引力作用的飞船仍可看做在地球轨道上) 进入符合要求的椭圆轨道绕日运行? 已知地球半径  $R_E = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$ , 地面处的重力加速度  $g = 9.80 \text{ m/s}^2$ , 不考虑空气的阻力.

**【分析】** 这是一道关于发射宇宙飞船的问题,它涉及圆周运动、万有引力、角动量守恒及机械能守恒,以及速度的合成等知识.

**【解】** 从地球表面发射宇宙飞船时,必须给飞船以足够大的动能,使它在克服地球引力作用后,仍具有合适的速度进入绕太阳运行的椭圆轨道. 此时,飞船离地球已足够远,但到太阳的距离可视为不变,仍为日地距离. 飞船在地球绕太阳运行的轨道上进入它的椭圆轨道,用  $E$  表示两轨道的交点,如图 1-7-18 所示. 图中半径为  $r_{SE}$  的圆  $A$  是地球绕太阳运行的轨道,太阳  $S$  位于圆心. 设椭圆  $B$  是飞船绕日运行的轨道, $P$  为椭圆轨道的近日点.

由于飞船绕日运行的周期与地球绕日运行的周期相等,根据开普勒第三定律,椭圆的长半轴  $a$  应与日地距离  $r_{SE}$  相等,即有

$$a = r_{SE}. \quad (1)$$

根据椭圆的性质,轨道上任一点到椭圆两焦点的距离之和为  $2a$ ,由此可以断定,两轨道的交点  $E$  必为椭圆短轴的一个顶点, $E$  与椭圆长轴和短轴的交点  $Q$  (即椭圆的中心) 的连线垂直于椭圆的长轴. 由  $\triangle ESQ$ , 可以求出半短轴

$$b = \sqrt{r_{SE}^2 - (a - SP)^2}. \quad (2)$$

由①②两式,并将  $a = r_{SE} = 1 \text{ AU}$ ,  $SP = 0.01 \text{ AU}$  代入,得

$$b = 0.141 \text{ AU}. \quad (3)$$

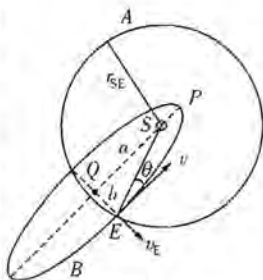


图 1-7-18

在飞船以椭圆轨道绕太阳运行过程中,若以太阳为参考系,飞船的角动量和机械能是守恒的.设飞船在  $E$  点的速度为  $v$ ,在近日点的速度为  $v_P$ ,飞船的质量为  $m$ ,太阳的质量为  $M_S$ ,则有

$$mva\sin\theta = mv_P \overline{SP}. \quad (4)$$

式中  $\theta$  为速度  $v$  的方向与  $E$ 、 $S$  两点连线间的夹角:

$$\sin\theta = \frac{b}{a}. \quad (5)$$

由机械能守恒,得

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_S m}{a} = \frac{1}{2}mv_P^2 - \frac{GmM_S}{SP}. \quad (6)$$

因地球绕太阳运行的周期  $T$  是已知的 ( $T=365$  d),若地球的质量为  $M_E$ ,则有

$$G\frac{M_S M_E}{a^2} = M_E \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a. \quad (7)$$

解③~⑦式,并代入有关数据,得

$$v = 29.8 \text{ km/s}. \quad (8)$$

⑧式给出的  $v$  是飞船在  $E$  点相对于太阳的速度的大小,即飞船在克服地球引力作用后从  $E$  点进入椭圆轨道时所必须具有的相对于太阳的速度.若在  $E$  点飞船相对地球的速度为  $u$ ,因地球相对于太阳的公转速度为

$$v_E = \frac{2\pi a}{T} = 29.8 \text{ km/s}. \quad (9)$$

方向如图 1-7-19 所示,由速度合成公式,可知

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}_E. \quad (10)$$

速度合成的矢量图如图 1-7-19 所示,注意到  $v_E$  与  $\overline{ES}$  垂直,有

$$u = \sqrt{v^2 + v_E^2 - 2vv_E \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}. \quad (11)$$

代入数据,得  $u = 39.1 \text{ km/s}$ . (12)

$u$  是飞船在  $E$  点相对于地球的速度,但不是所要求的发射速度  $u_0$ .为了求得  $u_0$ ,可以从与地心固定连接在一起的参考系来考察飞船的运动.因飞船相对于地球的发射速度为  $u_0$  时,飞船离地

心的距离等于地球半径  $R_E$ .当飞船相对于地球的速度为  $u$  时,地球引力作用可以忽略.由能量守恒,有

$$\frac{1}{2}mu_0^2 - G\frac{M_E m}{R_E} = \frac{1}{2}mu^2. \quad (13)$$

地面处的重力加速度为  $g = G\frac{M_E}{R_E^2}$ . (14)

解⑬⑭两式,得  $u_0 = \sqrt{u^2 + 2gR_E}$ . (15)

由⑮式及有关数据,得  $u_0 = 40.7 \text{ km/s}$ . (16)

如果飞船在  $E$  点处以与图示相反的方向进入椭圆轨道,则⑮式要做相应的改

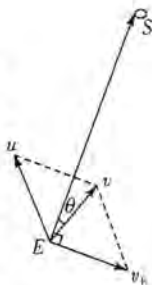


图 1-7-19



变. 此时, 它应为

$$u = \sqrt{v^2 + v_E^2 - 2vv_E \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}. \quad (17)$$

相应计算, 可得另一解

$$u = 45.0 \text{ km/s}, u_0 = 46.4 \text{ km/s}. \quad (18)$$

如果飞船进入椭圆轨道的地点改在  $E$  点的对称点处 (即地球绕日轨道与飞船绕日轨道的另一个交点上), 则计算过程相同, 结果不变.

**题 14** (2006 · 全国物理竞赛题) 建造一条能通向太空的天梯, 是人们长期的梦想. 当今在美国宇航局 (NASA) 支持下, 洛斯阿拉莫斯国家实验室的科学家已在进行这方面的研究. 一种简单的设计是把天梯看作一条长度达千万层楼高的质量均匀分布的缆绳, 它由一种高强度、很轻的纳米碳管制成, 由传统的太空飞船运到太空上, 然后慢慢垂到地球表面. 最后达到这样的状态和位置: 天梯本身呈直线状; 其上端指向太空, 下端刚与地面接触但与地面之间无相互作用; 整个天梯相对于地球静止不动. 如果只考虑地球对天梯的万有引力, 试求此天梯的长度. 已知地球半径  $R_0 = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$ , 地球表面处的重力加速度  $g = 9.80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

**【分析】** 本题需用到万有引力定律、质心运动定理, 再运用微元法进行求和.

**【解】** 要使天梯相对于地球静止不动, 由地面伸向太空, 与地面之间无相互作用力, 这样的天梯的下端只能位于赤道上某处, 且天梯与该处地球表面垂直, 并与地球同步转动. 如图 1-7-20 所示.

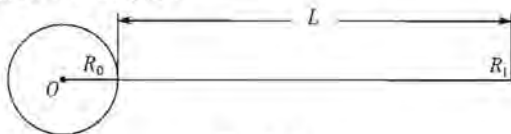


图 1-7-20

从坐标原点与地球中心固连、坐标轴指向恒星的惯性参考系来看, 天梯和地球一起匀速转动. 天梯所受的外力只有地球的万有引力. 把天梯看做是由线密度为  $\rho$  的许多非常小的小段组成, 则每小段到地球中心的距离不同, 因而所受到地球引力的大小也不同, 其中与地心的距离为  $r_{i-1}$  到  $r_i$  间的长度为  $\Delta r_i$  的小段所受地球引力为

$$f_i = G \frac{M \rho \Delta r_i}{r_i^2}. \quad (1)$$

整个天梯所受的地球引力  $F$  就等于每小段所受地球引力之和, 即

$$F = \sum_{i=1}^n f_i = \sum_{i=1}^n G \frac{M \rho \Delta r_i}{r_i^2}. \quad (2)$$

符号  $\sum_{i=1}^n$  表示对所有小段求和. 因  $\Delta r_i = r_i - r_{i-1}$  是个小量, 注意到  $r_i r_{i-1} = r_i (r_i - \Delta r_i) \approx r_i^2$ , 因此

$$\sum_{i=1}^n \frac{\Delta r_i}{r_i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{r_i - r_{i-1}}{r_i r_{i-1}} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{r_{i-1}} - \frac{1}{r_i} \right) = \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_n}$$

用  $R_0$  表示地球半径,也就是天梯下端到地心的距离,  $R_1$  表示天梯上端到地心的距离,则  $r_0 = R_0$ ,  $r_n = R_1$ ,代入②式得

$$F = GM\rho \left( \frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1} \right) \quad (3)$$

整个天梯的质量  $m = \rho(R_1 - R_0)$ . (4)

天梯的质心位于天梯的中点,它到地心的距离

$$r_c = R_0 + \frac{R_1 - R_0}{2} \quad (5)$$

根据质心运动定理,有  $F = m r_c \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2$ . (6)

式中  $T$  为地球自转的周期.

由③④⑤⑥式可得

$$(R_1 - R_0) \left( R_1^2 + R_0 R_1 - \frac{GM T^2}{2\pi^2 R_0} \right) = 0.$$

$R_1 - R_0 = 0$ , 表示天梯无长度,不符合题意,符合题意的天梯长度满足的方程为

$$R_1^2 + R_0 R_1 - \frac{GM T^2}{2\pi^2 R_0} = 0. \quad (7)$$

因为  $GM = R_0^2 g$ , 所以得

$$R_1^2 + R_0 R_1 - \frac{R_0 g T^2}{2\pi^2} = 0. \quad (8)$$

[从跟随地球一起转动的参考系看,也可得到⑧式.这时,天梯在地球引力和惯性离心力的作用下,处于平衡静止状态,地球引力仍为③式,天梯所受的惯性离心力可由下面的方法求得:仍把天梯看做由很多长度为  $\Delta r_i$  的小段组成,则第  $i$  小段受的惯性离心力为

$$f_i' = \rho \Delta r_i \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 r_i. \quad (4')$$

对所有小段求和,就得到整个天梯所受的惯性离心力

$$F' = \sum_{i=1}^n f_i' = \sum_{i=1}^n \rho \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 r_i \Delta r_i. \quad (5')$$

⑤'式中所示的和可以用图 1-7-21 中过原点的直线  $y = \rho \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 r$  下的一个带阴影的梯形面积来表示,即

$$F' = \rho \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 \frac{R_0 + R_1}{2} (R_1 - R_0). \quad (6')$$

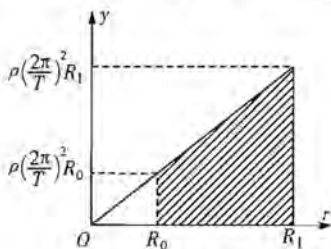


图 1-7-21

因为地球引力与惯性离心力平衡,由③式和⑥'式可得

$$GM\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1}\right) = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{R_0 + R_1}{2} (R_1 - R_0). \quad (7')$$

因为  $GM = R_0^2 g$ , 化简⑦'式最后也能得到③式.]

解③式得

$$R_1 = \frac{-R_0 \pm \sqrt{R_0^2 + \frac{2R_0 g T^2}{\pi^2}}}{2}. \quad (9)$$

根号前取正号,代入有关数据,注意到  $T = 8.64 \times 10^4$  s, 得

$$R_1 = 1.50 \times 10^6 \text{ m}. \quad (10)$$

所以天梯的长度

$$L = R_1 - R_0 = 1.44 \times 10^6 \text{ m}. \quad (11)$$

**题 15** (2006·全国物理竞赛题) 如图 1-7-22 所示,一

内半径为  $R$  的圆筒(图中  $2R$  为其内直径)位于水平地面上. 筒内放一矩形物. 矩形物中的  $A, B$  是两根长度相等、质量皆为  $m$  的细圆棍, 它们平行地固连在一质量可以不计的, 长为  $l = \sqrt{3}R$  的矩形薄片的两端. 初始时矩形物位于水平位置且处于静止状态,  $A, B$  皆与圆筒内表面接触. 已知  $A, B$  与圆筒内表面间的静摩擦因数  $\mu$  都等于 1.

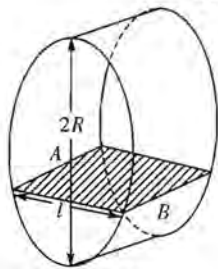


图 1-7-22

现令圆筒其中心轴线非常缓慢地转动, 使  $A$  逐渐升高.

1. 矩形物转过多大角度后, 它开始与圆筒之间不再能保持相对静止?

答: \_\_\_\_\_ (只要求写出数值, 不要求写出推导过程).

2. 如果矩形物与圆筒之间刚不能保持相对静止时, 立即令圆筒停止转动. 令  $\theta$  表示  $A$  的中点和  $B$  的中点的连线与竖直线之间的夹角, 求此后  $\theta$  等于多少度时,  $B$  相对于圆筒开始滑动. (要求在卷面上写出必要的推导过程. 最后用计算器对方程式进行数值求解, 最终结果要求写出三位数字)

**【分析】** 这是一道力学综合问题. 对矩形物的静止, 既要考虑力的平衡, 又要考虑力矩平衡. 当  $A$  开始倾倒后就要根据圆周运动与能量守恒来研究它的运动. 对  $B$  则主要是研究它的受力情况.





【解】 1.  $90^\circ$ .

2. 当矩形物处于竖直位置即  $\theta=0^\circ$  时,  $B$  不会滑动, 矩形物静止. 当圆筒缓慢转动使  $\theta$  刚超过  $0^\circ$  时,  $A$  将离开圆筒内表面而开始倾倒, 按题意此时圆筒已停止转动. 假定  $B$  仍不动, 此后,  $A$  在竖直平面内从静止开始绕  $B$  做圆周运动. 圆周运动的径向方程(牛顿第二定律)为

$$m \frac{v^2}{l} = mg \cos \theta - T. \quad (1)$$

这里  $v$  表示  $A$  的速度.  $T$  是刚性薄片对  $A$  的作用力, 规定其方向从  $B$  到  $A$  为正. 根据能量守恒, 有

$$mgl(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} mv^2. \quad (2)$$

$$\text{联立(1)(2)式, 得} \quad T = mg(3 \cos \theta - 2). \quad (3)$$

$$\text{如果令 } T=0, \text{ 可得} \quad \theta = \arccos \frac{2}{3} = 48.2^\circ.$$

由此可见,  $\theta < 48.2^\circ$  时, 作用力是径向正向, 对  $A$  是推力;  $\theta > 48.2^\circ$  时, 作用力是径向反向, 对  $A$  是拉力.

现在再来看前面被假定不动的  $B$  是否运动. 我们可以在  $B$  处画圆筒内表面的切面, 它与水平面成  $30^\circ$  夹角. 因为假定  $B$  不动, 其加速度为零, 所以  $B$  在垂直于切面方向的受力方程为

$$f_{\perp} - mg \cos 30^\circ - T \cos(30^\circ - \theta) = 0. \quad (4)$$

这里  $f_{\perp}$  是圆筒内壁对  $B$  的支持力. 由(4)式和(3)式可以论证, 如果在  $\theta$  等于  $60^\circ$  ( $A$  将与圆筒相碰)之前  $B$  不动, 则  $f_{\perp}$  必将始终不等于零, 这就是说, 在  $B$  开始滑动以前,  $B$  不会离开筒壁.  $B$  对筒壁的正压力是  $f_{\perp}$  的反作用力, 大小和  $f_{\perp}$  相同. 式中的  $T$  是刚性薄片对  $B$  的作用力, 它和(1)式中的  $T$  大小相等(因薄片质量不计). 由于  $\mu=1$ , 所以最大静摩擦力  $f_{\max}$  的大小就等于正压力.

$$f_{\max} = \mu f_{\perp} = mg \cos 30^\circ + T \cos(30^\circ - \theta). \quad (5)$$

其方向是沿切面方向. 沿切面方向除摩擦力外,  $B$  还受到其他力

$$f_{\parallel} = mg \sin 30^\circ + T \sin(30^\circ - \theta). \quad (6)$$

只要  $f_{\parallel}$  不大于最大静摩擦力,  $B$  就不滑动. 这个条件写出来就是

$$f_{\parallel} \leq f_{\max}. \quad (7)$$

$B$  滑动与否的临界点就应由  $f_{\parallel} = f_{\max}$  求出, 即

$$mg \cos 30^\circ + T \cos(30^\circ - \theta) = mg \sin 30^\circ + T \sin(30^\circ - \theta). \quad (8)$$

将(3)式的  $T$  代入(8)式, 化简后得方程

$$(3 \cos \theta - 2)[\cos \theta + (2 + \sqrt{3}) \sin \theta] + 1 = 0. \quad (9)$$

这个方程可用数值求解, 即取不同的  $\theta$  值代入逐步逼近, 最后可得

$$\theta = 54.9^\circ. \quad (10)$$

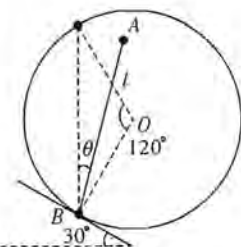


图 1-7-23



$\theta$  超过此值,  $B$  将开始滑动。

**题 16** (2005·全国物理竞赛题) 如图 1-7-24 所示, 劲度系数为  $k=40.0 \text{ N/m}$  的轻质水平弹簧的左端固定在墙壁上, 右端系一质量  $M=3.00 \text{ kg}$  的小物块  $A$ ,  $A$  的右边系一轻细线, 细线绕过轻质光滑的定滑轮后与轻挂钩相连。物块  $A$  放在足够长的水平桌面上, 它与桌面间的静摩擦因数

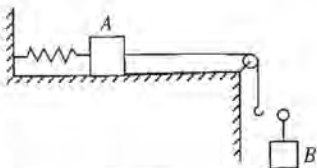


图 1-7-24

$\mu_0=0.200$ , 而动摩擦因数  $\mu=0.180$ 。滑轮以左的轻绳处于水平静止状态, 弹簧的长度为自然长度。现将一质量  $m=2.00 \text{ kg}$  的物块  $B$  轻轻地挂在钩上, 然后放手。求此后整个过程中克服摩擦力所做的功和经历的时间。(取  $g=10 \text{ m/s}^2$ )

**【分析】** 此题的关键是系统做简谐运动, 以此进一步进行分析研究。

**【解】** 取一水平向右的坐标轴  $Ox$ , 原点  $O$  与小物块  $A$  的初始位置重合, 如图 1-7-25 所示。挂上  $B$  刚释放  $B$  时, 弹簧尚未被拉长, 弹力为零。现把  $A$  和  $B$  作为一个系统, 在处理系统的运动时, 可把  $A$ 、 $B$  看做位于同一水平直线上, 作用于  $B$  的重力  $mg$  看做是水平向右的外力。根据题给的数据可知, 系统受到的向右的力  $mg$  大于最大摩擦力  $\mu Mg$ , 所以  $A$ 、 $B$  一起加速运动。当  $A$  的坐标为  $x$  时, 系统的加速度为  $a$ , 则有

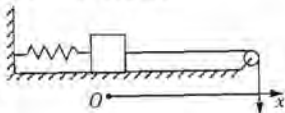


图 1-7-25

$$mg - \mu Mg - kx = (m+M)a. \quad (1)$$

当  $a=0$  时, 作用在  $A$  和  $B$  组成的系统的合力为零, 系统处于平衡状态。平衡时,  $A$  的坐标  $x_1$  可由①式及题给的数据求得

$$x_1 = \frac{mg - \mu Mg}{k} = 0.365 \text{ m}. \quad (2)$$

此时系统虽达到平衡, 但具有速度, 故  $A$  将继续向右运动直到速度变为零。在系统从开始运动到速度变为零的过程中, 因为  $mg - \mu Mg$  皆为恒力, 而弹力为线性恢复力, 所以系统的运动是以  $x = x_1$  为平衡位置的简谐运动, 振动周期

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m+M}{k}} = 2.22 \text{ s}. \quad (3)$$

振幅为  $x_1$ 。从开始运动到速度变为零所经历的时间

$$t_1 = \frac{1}{2} T = 1.11 \text{ s}. \quad (4)$$

从  $A$  开始向右运动到系统的速度为零,  $A$  移动的距离为  $2x_1$ , 弹簧的伸长量亦为  $2x_1$ , 此时系统  $AB$  受的弹力和  $mg$  的合力为  $(2kx_1 - mg)$ , 由题给的数据可知

$$2kx_1 - mg > \mu_0 Mg. \quad (5)$$

因此系统不能停住,  $A$  开始向左做加速运动。在向左运动的过程中, 当  $A$  的坐标为  $x$  时, 设系统加速度为  $a$ , 有

$$kx - mg - \mu Mg = (m+M)a. \quad (6)$$

当加速度为零时, 系统平衡, 由⑥式可求得平衡时  $A$  的坐标

$$x_2 = \frac{mg + \mu Mg}{k} = 0.635 \text{ m.} \quad (7)$$

A 在  $x = x_2$  处时,因系统具有向左的速度而继续向左运动,直到速度变为零.系统从静止开始向左运动直到速度又变为零的运动是以  $x = x_2$  为平衡位置的简谐运动,周期仍为  $T$ ,振幅为  $(2x_1 - x_2)$ ,经历时间

$$t_2 = \frac{1}{2}T = 1.11 \text{ s.} \quad (8)$$

当 AB 的速度变为零时,A 的坐标

$$x' = x_2 - (2x_1 - x_2) = 2x_2 - 2x_1 = 0.54 \text{ m.} \quad (9)$$

$x'$  也就是此时弹簧的伸长量.因为此时

$$kx' - mg = 1.6 \text{ N.} \quad (10)$$

$$\mu_0 Mg = 6 \text{ N.} \quad (11)$$

可见

$$kx' - mg < \mu_0 Mg. \quad (12)$$

所以 A 只能停在  $x = x'$  处,系统静止.

从释放 B 到系统最后处于静止状态的整个过程中,A 运动的总路程为

$$s = 2x_1 + 2(2x_1 - x_2) = 6x_1 - 2x_2. \quad (13)$$

克服摩擦力做的总功

$$W_\mu = \mu Mg s. \quad (14)$$

代入有关数据得

$$W_\mu = 4.97 \text{ J.} \quad (15)$$

从开始到最后停止所经历时间为

$$t = t_1 + t_2 = 2.22 \text{ s.} \quad (16)$$

**题 17** (2005·全国物理竞赛题) 缓冲器是用来减少车辆间冲击作用的一种装置,图 1-7-26 所示是一种常用的摩擦缓冲器的断面简化示意图,图 1-7-26 中 N 是缓冲器的弹簧盒. C 和 D 是两块完全相同的、截面为梯形的楔块,两楔块上、下对称放置,左、右端分别与垫板 P、Q 相接触,楔块的斜面与水平面的夹角均为  $\alpha$ . A 是劲度系数为  $k_1$  的弹簧,两端分别与 C、D 固连. B 是劲度系数为  $k_2$  的弹簧,一端与 Q 固连,另一端与弹簧盒的壁固连. 楔块 C、D 与各接触面之间均可滑动,动摩擦因数均为  $\mu$ .

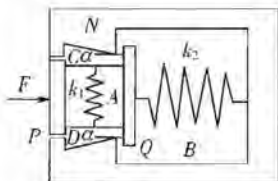


图 1-7-26

工程上用吸收率来表示缓冲器性能的优劣.测定吸收率时,将缓冲器的右侧固定,左侧用实验车由左向右撞击垫板 P.在压缩阶段,在冲击力  $F$  作用下,缓冲器的弹簧被压缩至最紧(但未超过弹性限度)时,加在 P 上的外力  $F$  做功  $W$ ;在弹簧恢复的过程中,缓冲器反抗外力做功  $W'$ ,定义吸收率为  $\eta = \frac{W - W'}{W}$ ,吸收率越



大,则缓冲器性能越好。

已知某一种摩擦缓冲器的参数为  $k_1=1.2 \times 10^7 \text{ N/m}$ ,  $k_2=1.5 \times 10^6 \text{ N/m}$ ,  $\mu=0.25$ ,  $\alpha=22^\circ$ 。由于技术上的需要,各弹簧在组装时就已处于压缩状态,  $A$  的压缩量为  $x_{10}=1.0 \times 10^{-3} \text{ m}$ ,  $B$  的压缩量为  $x_{20}=4.0 \times 10^{-2} \text{ m}$ 。弹簧  $B$  可以在外力作用下再压缩的最大量为  $\Delta x_m=6.3 \times 10^{-2} \text{ m}$ 。若弹簧、楔块和垫板的质量均可视为零,试计算该缓冲器的吸收率。

**【分析】** 此题的关键是正确分析楔块的受力,然后从力的平衡角度进行分析、讨论。

**【解】** 在压缩阶段,垫板  $P$  受到外力  $F$  的作用,楔块  $C$ 、 $D$  向右运动而压缩弹簧  $A$  和  $B$ ,在某一时刻,楔块  $C$  的受力情况如图 1-7-27(a) 所示。图中  $F_A$ 、 $F_P$ 、 $F_Q$  和  $F_N$  分别表示  $A$ 、 $P$ 、 $Q$ 、 $N$  对  $C$  的压力的大小,  $f_N$ 、 $f_P$ 、 $f_Q$  分别表示  $N$ 、 $P$  和  $Q$  作用在  $C$  上的滑动摩擦力的大小,方向如图所示。以  $\Delta x_1$  和  $\Delta x_2$  分别表示这一时刻弹簧  $A$  和  $B$  比未冲击时所增加的压缩量,则有

$$F_A = k_1(x_{10} + \Delta x_1). \quad (1)$$

$$F_Q = \frac{1}{2} k_2(x_{20} + \Delta x_2). \quad (2)$$

$$F_P = \frac{1}{2} F. \quad (3)$$

$$f_P = \mu F_P. \quad (4)$$

$$f_Q = \mu F_Q. \quad (5)$$

$$f_N = \mu F_N. \quad (6)$$

$$\tan \alpha = \frac{\Delta x_1}{2\Delta x_2}. \quad (7)$$

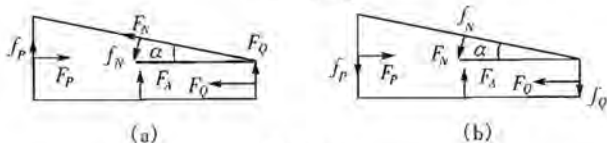


图 1-7-27

因为题中已假设  $P$ 、 $Q$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $A$ 、 $B$  的质量均可视为零,而加速度又不可能为无限大,故图中作用于楔块  $C$  的 7 个力的合力必为零。沿水平和竖直方向分别有

$$F_P - F_Q - f_N \cos \alpha - F_N \sin \alpha = 0. \quad (8)$$

$$F_A - F_N \cos \alpha + f_P + f_Q + f_N \sin \alpha = 0. \quad (9)$$

由以上各式可得

$$F = \frac{2k_1 x_{10} (\tan \alpha + \mu) + k_2 x_{20} (1 + \mu^2)}{1 - \mu^2 - 2\mu \tan \alpha} + \frac{4k_1 \tan \alpha (\tan \alpha + \mu) + k_2 (1 + \mu^2)}{1 - \mu^2 - 2\mu \tan \alpha} \Delta x_2. \quad (10)$$

在恢复阶段,楔块向左运动,所受的摩擦力的方向与压缩阶段相反,其受力情况如图 1-7-27(b) 所示,这时有

$$F_P - F_Q + f_N \cos \alpha - F_N \sin \alpha = 0. \quad (11)$$

$$F_A - F_N \cos \alpha - f_P - f_Q - f_N \sin \alpha = 0. \quad (12)$$

由①~⑦式和⑪⑫式,并将③式中的外力  $F$  改用  $F'$  表示,可得

$$F' = \frac{2k_1 x_{10} (\tan \alpha - \mu) + k_2 x_{20} (1 + \mu^2)}{1 - \mu^2 + 2\mu \tan \alpha} + \frac{4k_1 \tan \alpha (\tan \alpha - \mu) + k_2 (1 + \mu^2)}{1 - \mu^2 + 2\mu \tan \alpha} \Delta x_2. \quad (13)$$

在  $k_1, k_2, \alpha, \mu$  和  $x_{10}, x_{20}$  已确定的情况下,⑩和⑬式中的第一项和第二项  $\Delta x_2$  的系数均为常量,这表明  $F$  或  $F'$  与  $\Delta x_2$  成线性关系. 可以把  $F$  (或  $F'$ ) 看成是由一个恒力  $F_0$  (或  $F_0'$ ) 和一个与  $\Delta x_2$  成正比的变力  $K\Delta x_2$  (或  $K'\Delta x_2$ ) 叠加而成的,即

$$F = F_0 + K\Delta x_2. \quad (14)$$

$$F' = F_0' + K'\Delta x_2. \quad (15)$$

式中

$$F_0 = \frac{2k_1 x_{10} (\tan \alpha + \mu) + k_2 x_{20} (1 + \mu^2)}{1 - \mu^2 - 2\mu \tan \alpha}. \quad (16)$$

$$F_0' = \frac{2k_1 x_{10} (\tan \alpha - \mu) + k_2 x_{20} (1 + \mu^2)}{1 - \mu^2 + 2\mu \tan \alpha}. \quad (17)$$

$$K = \frac{4k_1 \tan \alpha (\tan \alpha + \mu) + k_2 (1 + \mu^2)}{1 - \mu^2 - 2\mu \tan \alpha}. \quad (18)$$

$$K' = \frac{4k_1 \tan \alpha (\tan \alpha - \mu) + k_2 (1 + \mu^2)}{1 - \mu^2 + 2\mu \tan \alpha}. \quad (19)$$

在  $\Delta x_2$  由零增加到  $\Delta x_m$  的过程中,力  $F$  做的功为

$$W = F_0 \Delta x_m + \frac{1}{2} K (\Delta x_m)^2. \quad (20)$$

在  $\Delta x_2$  由  $\Delta x_m$  减小到零的过程中,力  $F'$  做的功为

$$W' = F_0' \Delta x_m + \frac{1}{2} K' (\Delta x_m)^2. \quad (21)$$

由⑳㉑式及吸收率的定义可得

$$\eta = \frac{W - W'}{W} = 1 - \frac{W'}{W} = 1 - \frac{2F_0' + K' \Delta x_m}{2F_0 + K \Delta x_m}. \quad (22)$$

注意到⑯~⑲式,代入有关数据,可算出

$$\eta = 0.74 = 74\%.$$

**题 18** (2001·全国物理竞赛题) 如图 1-7-28(a)所示,在水平光滑的桌面上有一木板  $A$ ,一端用弹簧与墙壁相连. 桌面上有一固定挡块  $B$ ,当  $A$  与  $B$  接触时,弹簧恰好为其原长. 现将  $A$  从与  $B$  接触的位置向右拉一段距离  $l_0$  (弹簧在其弹性限度内),用手握住. 然后,在  $A$  上面放一个小木块  $C$  (可视作质点),见图 1-7-28(b). 已知  $A$  的长度为  $L = 0.7000 \text{ m}$ ,  $A$  的质量  $M = 10.00 \text{ kg}$ ,  $l_0 = 1.000 \text{ m}$ ,  $C$  的质量  $m = 0.01000 \text{ kg}$ ,  $C$  与  $A$  间的动摩擦因数  $\mu = 0.4000$ ,静摩擦因数  $\mu_0 = 0.4010$ ,弹簧的劲度系数为  $k = 45.00 \text{ N/m}$ . 问:将  $C$  放在  $A$  上什么地方(用距  $A$  左端的距离  $D$  表示)时,握住  $A$  的手放开后,  $C$  能始终留在  $A$  上?

$A$  与  $B$  的碰撞为完全非弹性的. 重力加速度  $g = 9.800 \text{ m/s}^2$ ,忽略  $C$  对  $A$  运动的影响. 忽略弹簧质量,忽略空气阻力.(解答时可以使用计算器)

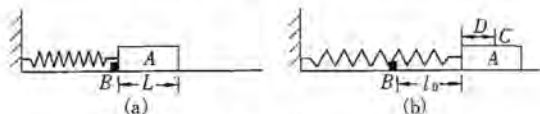


图 1-7-28

【分析】 要求 C 能始终留在 A 上, 即 C 不会从 A 的右端滑落, 也不会从 A 的左端滑落, 这就要讨论 A 与 C 的运动状况, A 做简谐运动, C 在 A 上可能相对静止, 也可能做匀变速直线运动, 对此我们需进行分析研究.

【解】 (1) A 的运动 根据题设, 不考虑 C 对 A 运动的影响, 故 A 的运动是四分之一周期的简谐运动. 周期  $T$  为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 2.962(\text{s}), \quad \frac{T}{4} = 0.7405(\text{s}). \quad (1)$$

其位移  $l$  随时间的变化为

$$l(t) = l_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right), \quad 0 \leq t \leq \frac{T}{4}. \quad (2)$$

(2) C 的运动 A 刚被释放时, 其加速度的方向向左, 其大小为

$$a = \frac{kl_0}{M} = 4.5(\text{m/s}^2).$$

若 C 能随 A 一起运动, 则 C 应受到向左的力, 且其大小应为

$$F_0 = ma = m \frac{kl_0}{M} = 0.0450(\text{N}).$$

此力只能由 A、C 间的摩擦力提供, 但该摩擦力的最大值为

$$\mu_0 mg = 0.401 \times 0.0100 \times 9.80 \text{ N} = 0.0393 \text{ N}.$$

显然,  $\mu_0 mg < F_0$ , 因此 C 不能随 A 一起运动, 相对于 A 它将向右滑动. 相对于桌面它将在滑动摩擦力的作用下向左做匀加速运动. 设  $y(t)$  为  $t$  时刻 C 离其初始位置(对桌面)的距离, 则有

$$y(t) = \frac{1}{2} \mu g t^2. \quad (3)$$

(3) C 不被甩下的条件 若 C 在 A 上滑到 A 的右端以前能停止相对滑动, 即二者达到(对桌面)相同的速度, 则 C 就不会被甩下, 否则就会被甩下.

下面先研究 C 和 A 达到相同速度时的时间及两者的距离. 设  $t_1$  为 A 的速度  $v'(t)$  与 C 的速度(对桌面)  $v(t)$  相同的时刻, 则

$$y(t_1) = \frac{1}{2} \mu g t_1^2. \quad (4)$$

$$v(t_1) = \mu g t_1. \quad (5)$$

$$l(t_1) = l_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}} t_1\right). \quad (6)$$

$$v'(t_1) = l_0 \sqrt{\frac{k}{M}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{M}} t_1\right). \quad (7)$$

$$\text{因 } t_1 \text{ 满足} \quad v'(t_1) = v(t_1). \quad (8)$$

$$\text{即得} \quad \mu g t_1 = l_0 \sqrt{\frac{k}{M}} \sin(\sqrt{\frac{k}{M}} t_1). \quad (9)$$

$$\text{或} \quad \frac{M}{k l_0} \mu g \sqrt{\frac{k}{M}} t_1 = \sin(\sqrt{\frac{k}{M}} t_1). \quad (10)$$

$$\text{上式可改写为} \quad A \varphi_1 = \sin \varphi_1. \quad (11)$$

$$\text{其中} \quad \varphi_1 = \sqrt{\frac{k}{M}} t_1, A = \frac{M}{k l_0} \mu g = 0.8711.$$

由⑪式可以利用计算器用数值解法解出  $\varphi_1$  的值:

$\varphi$	$\sin \varphi$	$A \varphi$	
0.7	0.6442	> 0.6098	
0.8	0.7174	> 0.6969	
0.9	0.7833	< 0.7840	由此可见 $0.8 < \varphi_1 < 0.9$
0.89	0.7770	> 0.7753	
0.90	0.7833	< 0.7840	由此可见 $0.89 < \varphi_1 < 0.90$
0.897	0.7815	> 0.7814	
0.898	0.7821	< 0.7822	由此可见 $0.897 < \varphi_1 < 0.898$

$$0.8973 \quad 0.78165 \quad > \quad 0.78164$$

$$0.8974 \quad 0.78171 \quad < \quad 0.78173 \quad \text{由此可见} \quad 0.8973 < \varphi_1 < 0.8974$$

最后得 3 位有效数字的  $\varphi_1$  为

$$\varphi_1 = 0.897. \quad (12)$$

$$\text{代入 } \varphi_1 = \sqrt{\frac{k}{M}} t_1, \text{ 可得 } t_1 = \sqrt{\frac{M}{k}} \varphi_1 = 0.423 \text{ s}. \quad (13)$$

$$\text{与①式比较可知} \quad t_1 < \frac{1}{4} T. \quad (14)$$

这表明: 在  $\frac{1}{4} T$  内, C 和 A 存在有共同速度的解. 将⑬式代入④式和⑥式, 可求得从  $t=0$  到  $t_1$  时间内 C 和 A 移动的距离

$$y_1 = \frac{1}{2} \mu g t_1^2.$$

$$l_0 - l(t_1) = l_0 - l_0 \cos(\sqrt{\frac{k}{M}} t_1).$$

此两式之差即为 C 在 A 上相对 A 滑行的距离

$$d = l_0 - l_0 \cos(\sqrt{\frac{k}{M}} t_1) - \frac{1}{2} \mu g t_1^2. \quad (15)$$



$$d=0.0256(\text{m}).$$

只要开始时 C 离 A 右端的距离  $\geq d$ , C 就不会从后面甩下, 由此可知

$$D \leq L - d = 0.674 \text{ m}. \quad (16)$$

(4) C 没有前冲下去的条件 C 在 A 上向右滑行 0.0256 m 后, C 相对于 A 静止, 此后 C 就和 A 以相同的速度向左运动, 直到 A 与 B 相碰, 这时  $t = \frac{T}{4} =$

$\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{M}{k}}$ , 代入⑦式可求得此时的共同速度

$$v' \left( \frac{T}{4} \right) = \sqrt{\frac{k}{M}} l_0 \sin \left( \sqrt{\frac{k}{M}} \cdot \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{M}{k}} \right) = \sqrt{\frac{k}{M}} \cdot l_0. \quad (17)$$

碰后 A 停止, C 以  $v' \left( \frac{T}{4} \right)$  为初速向前滑行, 靠摩擦减速, 到停止前滑行的距离为

$$s = \frac{\left[ v' \left( \frac{T}{4} \right) \right]^2}{2\mu g}. \quad (18)$$

由式⑰⑱得

$$s = \frac{k l_0^2}{2\mu g M} \quad (19)$$

$$s = 0.574 (\text{m}).$$

只要 C 相对于 A 静止时距 A 左端的距离大于 s, 碰后 C 就不会向前冲下. 由此可知 C 不冲下的条件为

$$D \geq s - d = 0.548 (\text{m}). \quad (20)$$

结论: 要使 C 始终留在 A 上, 开始时 C 离 A 的左端的距离必须符合下式要求

$$0.548 \text{ m} \leq D \leq 0.674 \text{ m}.$$

### 题 19. (2007 · 亚洲物理竞赛题)

#### 充液球的往返滚动

考察内部充满液体的球在球形碗底的往返滚动. 球在碗底将不断改变其运动方向和转动方向; 由于液体的粘滞性, 球的运动将十分复杂. 下面提出一种简单模型, 将对这一问题的解决有所帮助.

半径为  $r$ 、质量为  $m$  的刚性薄球壳, 其内充满质量为  $M$  的某种物质  $W$ , 它具有奇特的性质. 通常情况下  $W$  呈液态, 可视为理想流体(没有任何粘滞性); 当受到某种作用(如电场)时,  $W$  就迅速变为固态(这种作用对球不产生附加的力或力矩), 但体积保持不变, 作用消失又迅速变为液态. 该充液球(以下简称球)在半径为  $R$  ( $R > r$ ) 的球形碗底往返滚动. 设球始终在过碗的球心  $D$  的竖直平面(如图 1-7-29)内运动. 在下面三种情况下考察球的运动.

1.  $W$  呈固态, 与球壳连成一体.

(1.1) 计算该球对过球心  $C$  的轴的转动惯量  $I$ . (要求写出详细计算步骤)

(1.2) 求球在球形碗底做小幅往返纯滚动的周期  $T_1$ .

2.  $W$  呈液态(视为理想流体), 与球壳间无摩擦力作用. 求球在球形碗底做小幅往返纯滚动的周期  $T_2$ .



3.  $W$  在固态与液态(理想流体)之间变化.

开始时( $t=0$ ),使充液球球心  $C$  和碗的球心  $D$  的连线与过  $D$  的铅垂线成  $\theta_0$  角 ( $\theta_0 \ll 1 \text{ rad}$ ),球与碗壁相切于  $A_0$ ,如图 1-7-29 所示,让充液球(包括呈液态的  $W$ ) 从静止的状态释放.在球从位置  $A_0$  向左运动到平衡位置  $O$  的过程中, $W$  呈液态;当球过平衡位置  $O$  时, $W$  突然变为与球壳固连的固态,直至球到达左方最高位置  $A_0'$ ;当球到达位置  $A_0'$  时, $W$  又突然变为液态;当球向右经过平衡位置  $O$  时, $W$  又突然变为与球壳固连的固态;当球再次到达右方最高位置  $A_1$  时, $W$  又变为液态.以后每当球处于从最高位置滚向平衡位置的过程中时, $W$  呈液态,处于从平衡位置滚向最高位置的过程中时, $W$  成为与球壳固连的固态,如下方的箭头所示,进行振幅衰减的周期性循环.设在整个滚动过程中,球与碗底间始终无相对滑动(换句话说,碗底可提供所需的足够的摩擦力).求球往返滚动的周期  $T_3$  及第  $n$  次回到右方最高位置  $A_n$ (图中只画到  $A_2$ )时球心的角振幅( $C$  和  $D$  的连线与铅垂线的夹角)  $\theta_n$ .

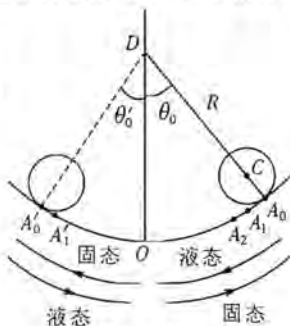


图 1-7-29

**【分析】** 这是一道较复杂的振动问题,它涉及转动惯量、质心运动定律、转动定律、简谐振动、角动量等知识,解题过程还需运用数学的积分知识.

**【解】** 1. (1.1)  $I$  为球壳的转动惯量  $I_1$  与球壳内固态物的转动惯量  $I_2$  之和.球壳的质量面密度  $\sigma = \frac{m}{4\pi r^2}$ .取与过  $C$  的轴(以下简称  $C$  轴)夹角为  $\alpha \sim \alpha + d\alpha$  间的环带(见图 1-7-30),该环带对  $C$  轴的转动惯量为  $2\pi r \sin\alpha (rd\alpha)\sigma (rsin\alpha)^2$ ,所以

$$I_1 = \int_0^\pi 2\pi r \sin\alpha (rd\alpha)\sigma (rsin\alpha)^2 = \frac{2}{3}mr^2. \quad (1)$$

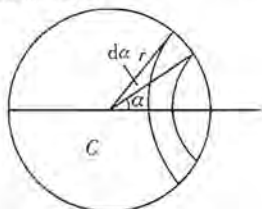


图 1-7-30

固态物的体密度  $\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi r^3}$ ,以上述环带为周边的圆盘对  $C$  轴的转动惯量为

$\frac{1}{2}\pi (rsin\alpha)^2 r d\alpha \rho (rsin\alpha)^2$ ,所以

$$I_2 = \int_0^\pi \frac{1}{2}\pi (rsin\alpha)^2 r d\alpha \rho (rsin\alpha)^2 = \frac{2}{5}Mr^2. \quad (2)$$

于是  $I = I_1 + I_2 = \frac{2}{3}mr^2 + \frac{2}{5}Mr^2. \quad (3)$

(1.2) 由质心运动定律,球在任一位置  $\theta$  ( $\theta \ll 1 \text{ rad}$ ,见图 1-7-31)处,有

$$(m+M)(R-r)\ddot{\theta} = -(m+M)g\theta + f. \quad (4)$$

式中  $f$  为碗底对球的摩擦力.由对  $C$  轴的转动定律,有



$$fr = -I\ddot{\varphi} = -\left(\frac{2}{3}mr^2 + \frac{2}{5}Mr^2\right)\ddot{\varphi}. \quad (5)$$

式中  $\varphi$  为半径 CE 由平衡位置起所转过的角度。

由纯滚动约束条件

$$(R-r)\dot{\theta} = r\dot{\varphi}. \quad (6)$$

由④⑤⑥三式得

$$\left(\frac{5}{3}m + \frac{7}{5}M\right)(R-r)\dot{\theta} = -(m+M)g\theta.$$

此式为简谐振动方程。于是得球往返滚动的角频率和周期为

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{m+M}{\frac{5m}{3} + \frac{7M}{5}}} \cdot \sqrt{\frac{g}{R-r}}. \quad (7)$$

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{R-r}{g}} \cdot \sqrt{\frac{5m+7M}{m+M}}. \quad (8)$$

2. 这时理想流体不参与转动, 只参与平动, 故④式和⑥式仍有效, 而⑤式相应变为

$$fr = -I_1\ddot{\varphi} = -\frac{2}{3}mr^2\ddot{\varphi}. \quad (9)$$

由④⑥⑨式得

$$\left(\frac{5m}{3} + M\right)(R-r)\dot{\theta} = -(m+M)g\theta.$$

于是得球往返滚动角频率和周期

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{m+M}{\frac{5m}{3} + M}} \cdot \sqrt{\frac{g}{R-r}}. \quad (10)$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{R-r}{g}} \cdot \sqrt{\frac{5m+M}{m+M}}. \quad (11)$$

3. 球从位置  $A_0$  到平衡位置  $O$  需时  $\frac{T_2}{4}$ , 从  $O$  到  $A_0'$  需时  $\frac{T_1}{4}$ , 从  $A_0'$  到  $O$  需时  $\frac{T_2}{4}$ , 从  $O$  到  $A_1$  需时  $\frac{T_1}{4}$ . 球在往返滚动中, 尽管角幅度在逐渐变小, 但周期不变, 故

$$T_3 = \frac{1}{2}(T_1 + T_2) = \pi\sqrt{\frac{R-r}{g}} \left[ \sqrt{\frac{5m+7M}{m+M}} + \sqrt{\frac{5m+M}{m+M}} \right]. \quad (12)$$

下面来求角幅度的变化。当球从初始位置  $A_0$  滚到平衡位置  $O$  时, 球心速度

$$v_C = \omega_2(R-r)\theta_0 = \sqrt{\frac{m+M}{\frac{5m}{3} + M}} \sqrt{g(R-r)}\theta_0. \quad (13)$$

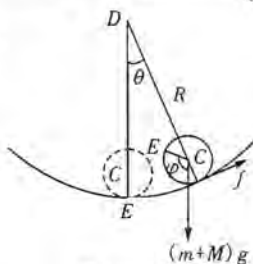


图 1-7-31

此时球壳绕  $C$  轴的转动角速度

$$\Omega = \frac{v_c}{r} = \frac{\theta_0}{r} \sqrt{\frac{m+M}{\frac{5m}{3}+M}} \sqrt{g(R-r)}. \quad (14)$$

在  $W$  呈液态未变为固态时,球对  $O$  点的角动量

$$L = (m+M)v_cr + I_1\Omega. \quad (15)$$

$W$  突然变为固态,并与球壳固连,球绕  $C$  轴的角速度变为  $\Omega'$ ,由于外力(重力和摩擦力)均过  $O$  点,球对  $O$  点的角动量守恒,有

$$L = (m+M)v_cr + I_1\Omega = [I + (m+M)r^2]\Omega'. \quad (16)$$

由此得这时球的角速度  $\Omega'$  为

$$\Omega' = \frac{(m+M)v_cr + I_1\Omega}{I + (m+M)r^2} = \frac{v_c}{r} \frac{\frac{5m}{3} + M}{\frac{5m}{3} + \frac{7M}{5}}. \quad (17)$$

这时球心速度 
$$v_c' = \Omega' r = v_c \frac{\frac{5m}{3} + M}{\frac{5m}{3} + \frac{7M}{5}}. \quad (18)$$

当球滚到左方最高点  $A_0'$  时,设其角幅度为  $\theta_0'$ ,有

$$v_c' = \omega_1(R-r)\theta_0',$$

$$v_c = \omega_2(R-r)\theta_0.$$

由以上两式得 
$$\theta_0' = \frac{v_c' \omega_2}{v_c \omega_1} \theta_0 = \theta_0 \sqrt{\frac{\frac{5m}{3} + M}{\frac{5m}{3} + \frac{7M}{5}}}. \quad (19)$$

当球从  $A_0'$  位置向右滚到右方最高位置  $A_1$  时过程相仿,故

$$\frac{\theta_1}{\theta_0} = \frac{\theta_0'}{\theta_0}.$$

于是 
$$\theta_1 = \theta_0^{1/2} = \frac{\frac{5m}{3} + M}{\frac{5m}{3} + \frac{7M}{5}} \theta_0.$$

以后过程相仿,所以 
$$\theta_n = \left[ \frac{\frac{5m}{3} + M}{\frac{5m}{3} + \frac{7M}{5}} \right]^n \theta_0. \quad (20)$$

### 题 20 (2003·亚洲物理竞赛题)

#### 卫星轨道的转换

在不久的将来,也许我们会参与卫星的发射.从物理的观点来看,这只需应用到简单的力学知识.

(a)一质量为  $m$  的卫星在半径为  $R_0$  的圆轨道上,环绕地球转动,地球的质量为



$M$ . 试求卫星的速率  $u_0$ , 以  $M, R_0$  和万有引力常数  $G$  表示.

(b) 当卫星在  $Q$  点时, 瞬时地将其速度从  $u_0$  增加至  $u_1$ , 使卫星进入椭圆轨道, 它可以到达距地球中心为  $R_1$  的  $P$  点. 试求速度  $u_1$  应为何值? 以  $u_0, R_0$  和  $R_1$  表示.

(c) 欲使卫星完全脱离地球的束缚, 则  $u_1$  的最小值应为多大? 以  $u_0$  表示.

(d) 承(b)题, 卫星在  $P$  点的速度  $u_2$  为多大? 以  $u_0, R_0$  和  $R_1$  表示.

(e) 现在, 我们要将卫星的轨道在  $P$  点处, 从椭圆轨道改变为半径为  $R_1$  的圆轨道, 则卫星在  $P$  点处的速度  $u_2$  必须提高至  $u_3$ , 试问  $u_3$  应为多大? 以  $u_2, R_0$  和  $R_1$  表示.

(f) 如果卫星在径向上受到一为时极短的微扰, 使其偏离原来半径为  $R_1$  的完美圆轨道, 推导卫星之径向距离  $r$ , 偏离平均轨道半径  $R_1$  的振荡周期  $T$ .

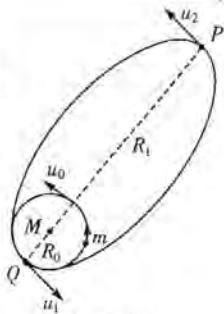


图 1-7-32

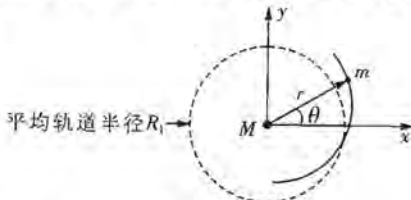


图 1-7-33

提示: 若你认为有必要, 作答时可使用卫星在轨道上的运动方程式

$$m \left[ \frac{d^2 r}{dt^2} - \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 r \right] = -G \frac{Mm}{r^2}. \quad (1)$$

$$\text{以及角动量守恒方程式} \quad m r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{常数}. \quad (2)$$

(g) 粗略画出整个受扰动的轨道和原先未受扰动的轨道的形状.

**【分析】** 这是一道关于地球卫星运动的题. 解题涉及万有引力定律、圆周运动、角动量守恒、能量守恒定律等知识, 运算过程要用到微分方程及二项式展开等数学知识.

**【解】** (a)  $\frac{m u_0^2}{R_0} = \frac{G M m}{R_0^2}, u_0 = \sqrt{\frac{G M}{R_0}}.$

(b) 由角动量守恒定律得  $m u_1 R_0 = m u_2 R_1,$

由能量守恒定律得

$$\frac{1}{2} m u_2^2 - \frac{G M m}{R_1} = \frac{1}{2} m u_1^2 - \frac{G M m}{R_0}.$$

由以上两式解得

$$\left[ \left( \frac{R_0}{R_1} \right)^2 - 1 \right] u_1^2 = 2 G M \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0} \right).$$

$$\frac{(R_0 - R_1)(R_0 + R_1)}{R_1^2} u_1^2 = 2GM \frac{(R_0 - R_1)}{R_0 R_1}$$

$$u_1 = \sqrt{\frac{GM}{R_0}} \sqrt{\frac{2R_1}{R_1 + R_0}} = u_0 \sqrt{\frac{2R_1}{R_1 + R_0}}$$

$$(c) \lim_{R_1 \rightarrow \infty} u_1 = \sqrt{2} u_0$$

$$(d) u_2 = u_1 \frac{R_0}{R_1} = u_0 \frac{\sqrt{2} R_0}{\sqrt{R_1(R_1 + R_0)}}$$

$$(e) u_3 = \sqrt{\frac{GM}{R_1}} = \sqrt{\frac{GM}{R_0}} \sqrt{\frac{R_0}{R_1}} = u_0 \sqrt{\frac{R_0}{R_1}}$$

$$= \left( u_2 \frac{\sqrt{R_1(R_1 + R_0)}}{\sqrt{2} R_0} \right) \sqrt{\frac{R_0}{R_1}} = u_2 \sqrt{\frac{R_1 + R_0}{2R_0}}$$

(f) 合并试题中的①和②两式, 可得

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{C}{mr^3} = -\frac{GM}{r^2}$$

式中  $C$  为常数. 就半径为  $R_1$  的圆轨道而言, 利用上式, 可得

$$\frac{C}{m} = GMR_1$$

$$\text{上述微分方程式可写为 } \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{GMR_1}{r^2} = -\frac{GM}{r^2}$$

就受微扰的轨道而言, 设  $r = R_1 + \eta$ , 式中  $\eta \ll R_1$ , 以之代入上式, 得

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} - \frac{GMR_1}{R_1^3 \left(1 + \frac{\eta}{R_1}\right)^3} = -\frac{GM}{R_1^2 \left(1 + \frac{\eta}{R_1}\right)^2}$$

利用二项式展开, 保留至  $\frac{\eta}{R_1}$  的一次方项, 得

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} - \frac{GM}{R_1^2} \left(1 - 3\frac{\eta}{R_1}\right) \approx -\frac{GM}{R_1^2} \left(1 - 2\frac{\eta}{R_1}\right)$$

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} + \left(\frac{GM}{R_1^3}\right) \eta \approx 0$$

上式为简谐运动的方程式, 故卫星偏离平均轨道半径  $R_1$  的振荡频率为  $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{GM}{R_1^3}}$ , 其周期为  $T = \frac{1}{f} = 2\pi \sqrt{\frac{R_1^3}{GM}}$ . 注意此周期和圆轨道的周期相同.

(g) 图 1-7-34 为整个受扰动的轨道和原先未受扰动的轨道形状.

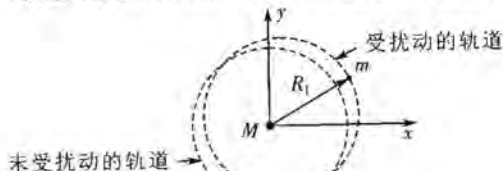


图 1-7-34



题 21 (2001·亚洲物理奥赛题)

月球何时会成为同步卫星

月球自转的周期,与月球绕地球运行(或称公转)的周期,目前正好是相同的,因此月球总是以相同的一面,面向着地球.这两种周期相同的原因,可能是月球与地球间的潮汐力长期作用的结果.

不过,目前地球自转的周期,较月球绕地球公转的周期短.因此,潮汐力仍然继续起作用,以致地球的自转速度变慢,而月球与地球间的距离,也会变得越来越远.

在本问题中,我们想估计,到底还需要多久,地球自转的周期,才会等于月球绕地球公转的周期.到那个时候,月球将成为一颗同步卫星,就像固定在天空中的物体一样,永远出现在同一位置,观察者必须处在地球面对月球的那一面,才能看到月球.另外我们也想知道,当前述的两种周期变成相同时,地球自转一次,究竟需要多少时间?

我们采用两种右手制的直角坐标系,作为参考基准.这两种坐标系的第三坐标轴,彼此同向平行,均垂直于月球的轨道平面.

(甲)第一个坐标系,称为质心(或简称CM)坐标系,是一个惯性参考系,其原点位于地球-月球系统的质心C.

(乙)第二个坐标系,称为 $xyc$ 坐标系,原点位于地心O, $z$ 轴与地球的自转轴重合,而 $x$ 轴则沿着月球与地球之间的连心线,其正方向与图1-7-35中标示的单位矢量 $\hat{r}$ 相同.在此坐标系中,月球永远处在负 $x$ 轴上.

注意:图1-7-35并未依照实际比例绘制,图中两个弯曲箭头所指的方向,即为地球自转及月球公转的方向.地球与月球间的距离以 $r$ 表示.

下列数据,均属已知:

(a)目前,月球到地球的距离为 $r_0=3.85 \times 10^8$  m,且每年增加0.038 m.

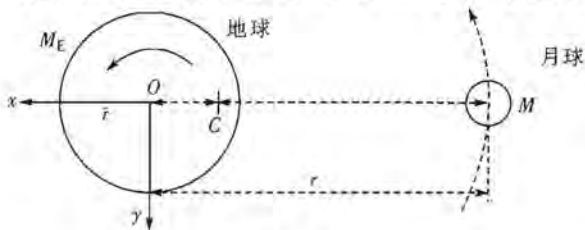


图 1-7-35

(b)月球目前的公转周期为 $T_M=27.322$ 日.

(c)月球质量为 $M=7.35 \times 10^{22}$  kg.

(d)月球半径为 $R_M=1.74 \times 10^6$  m.

(e)地球目前的自转周期为 $T_E=23.933$ 小时.

(f)地球质量为 $M_E=5.97 \times 10^{24}$  kg.

(g)地球半径为 $R_E=6.37 \times 10^6$  m.

(h)万有引力常数 $G=6.67259 \times 10^{-11}$  N·m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>.

答题时,可作以下各假设:

(i)地球-月球是一个孤立的系统,与宇宙其余部分完全隔绝.

(ii)月球绕地球的轨道为圆形.

(iii)地球的自转轴垂直于月球的轨道平面.

(iv)如月球不存在,且地球亦无自转,则地球的质量分布将呈球对称,地球的半径为  $R_E$ .

(v)不论是地球或月球,当绕通过其中心的任一轴转动时,其转动惯量  $I$ ,均与质量  $M$ 、半径为  $R$  之均匀实体圆球相同,即  $I = \frac{2MR^2}{5}$ .

(vi)地球周围的水,相对于  $xyz$  坐标系,恒保持静止.

试回答下列问题:

(1)以质心  $C$  为参考点,地球-月球系统的总角动量  $L$ ,目前的量值为多大?

(2)当地球自转的周期,等于月球公转的周期时,地球自转一次需时多久? 答案以  $T$  代表,并以目前之日(或天)为单位. 只需要求出近似解,因此可用反复逼近法(递进法)求解.

(3)将地球视为一个自转固体圆球,在静止之海水层下转动. 有一种模型,考虑了自转固体圆球与海水层之间的摩擦力,并假设由于地球转动得较快,会拖拉潮汐一起跟着前进,使两端涨潮区之连心线,与  $x$  轴成一角度  $\delta$ ,如图 1-7-36 所示.

因此,以  $O$  为参考点时,月球对地球的潮汐力,其力矩  $\Gamma$  并非为零,地球的自转因而会变慢. 此模型假设  $\delta$  角为固定值,与地球至月球之距离  $r$  无关,但等到月球公转与地球自转彼此同步时,摩擦力即不复存在,  $\delta$  角也就变成零. 依此模型,力矩  $\Gamma$  与地球至月球之距离  $r$  有一种比例关系,即  $\Gamma$  与  $\frac{1}{r}$  成正比.

据此模型,地球自转与月球公转的周期,需再过多少时间,才会相等? 答案以  $t_f$  代表,并以目前的年为单位.

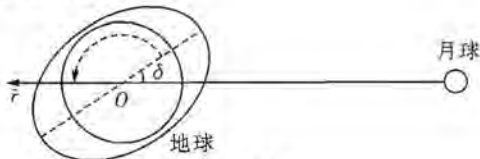


图 1-7-36

下列数学公式在答题时可能有用:

(M1) 若  $0 \leq s < r$ , 而  $x = r \cos \theta$ , 则

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + s^2 + 2rx}} \approx \left( \frac{1}{r} - \frac{x}{r^2} + \frac{3x^2 - s^2}{2r^3} + \dots \right).$$

(M2) 若  $a \neq 0$ , 而  $\frac{d\omega}{dt} = b\omega^{1-a}$ , 则  $\omega^a(t') - \omega^a(t) = (t' - t)ab$ .

**【分析】** 这是一道关于地、月球运动的题,解题时需涉及转动惯量、角动量、角



动量守恒、开普勒第三定律等知识,运算时特别注意进行数学近似。

**【解】** (1)以质心  $C$  为参考点时,地球-月球系统的总角动量  $\vec{L} = L\vec{z}$ , 可求解如下:

因所有的角动量都沿着  $z$  轴的方向,因此只需计算各角动量的  $z$  分量。

质心  $C$  到地心  $O$  的距离为

$$r_{CM} = \frac{Mr_0}{M+M_E} = \frac{3.85 \times 10^8}{1 + \frac{597}{7.35}} \text{ m} = 4.68 \times 10^6 \text{ m} = 0.735R_E.$$

月球公转的角速度为

$$\omega = \frac{2\pi}{27.322 \times 86400} \text{ rad/s} = 2.6617 \times 10^{-6} \text{ rad/s}. \quad \textcircled{1a}$$

月球绕质心  $C$  的轨道角动量为

$$\begin{aligned} L_M &= M(r_0 - r_{CM})^2 \omega \\ &= 7.35 \times (385 - 4.68)^2 \times 2.6617 \times 10^{28} \\ &= 2.83 \times 10^{34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}. \end{aligned}$$

月球自转的角速度  $\Omega_M$  与公转的角速度  $\omega$  相同,均为

$$\Omega_M = \omega = 2.6617 \times 10^{-6} \text{ rad/s}.$$

月球的自转角动量为

$$\begin{aligned} S_M &= \frac{2}{5} MR_M^2 \Omega_M = \frac{2}{5} \times 7.35 \times (1.74)^3 \times 2.6617 \times 10^{28} \\ &= 2.37 \times 10^{29} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} = 8.40 \times 10^{-6} L_M. \end{aligned}$$

相比较之下,月球的自转角动量远比它的轨道角动量小,因此可予忽略。

地球绕质心  $C$  的轨道角动量为

$$L_E = M_E r_{CM}^2 \omega = \frac{M}{M_E} L_M = \frac{7.35}{597} \times 2.83 \times 10^{34} = 3.48 \times 10^{32} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

地球自转的角速度为

$$\Omega_E = \frac{2\pi}{23.933 \times 3600} = 7.2926 \times 10^{-5} \text{ rad/s}.$$

地球绕其自转轴的转动惯量为

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{5} M_E R_E^2 = 0.4 \times 5.97 \times (6.37)^2 \times 10^{36} \\ &= 9.69 \times 10^{37} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}. \end{aligned} \quad \textcircled{1b}$$

地球的自转角动量为

$$S_E = \frac{2}{5} M_E R_E^2 \Omega_E = 7.07 \times 10^{33} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} = 20.3L_E.$$

将以上所得的角动量合计,即得地球-月球系统的总角动量  $L$  为

$$\begin{aligned} L &= L_M + L_E + S_E + S_M \\ &= (2.83 + 0.0348 + 0.707 + 0.0000237) \times 10^{34} \\ &= 3.57 \times 10^{34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}. \end{aligned} \quad \textcircled{2}$$



注意:  $L \approx L_M + L_E + S_E$ .

(2) 按牛顿力学的理论推得的开普勒行星运动第三定律, 月球公转的角速度  $\omega$  与地球-月球间的距离  $r$  满足以下的关系

$$\omega^2 r^3 = G(M_E + M). \quad (3)$$

因此, 地球-月球系统相对于质心  $C$  的轨道总角动量  $L$  为

$$L = \left( \frac{M_E M}{M + M_E} \right) r^2 \omega = M M_E \left[ \frac{G^2}{\omega(M + M_E)} \right]^{\frac{1}{3}}. \quad (4)$$

注意:  $L_M = M \left( \frac{M_E r}{M + M_E} \right)^2 \omega$ ,  $L_E = M_E \left( \frac{M r}{M + M_E} \right)^2 \omega$ , 故  $L = L_E + L_M$ .

将月球的自转角动量  $S_M$  忽略, 则当地球自转的角速度  $\Omega_E$  等于月球公转的角速度  $\omega$  时, 地球-月球系统的总角动量  $L$  为

$$\begin{aligned} L &= L_M + L_E + S_E + S_M \approx M M_E \left[ \frac{G^2}{(M + M_E)\omega} \right]^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{5} M_E R_E^2 \omega \\ &= 7.35 \times 5.975 \times \left( \frac{66.726 \times 66.726}{5.97 + 0.0735} \right)^{\frac{1}{3}} \times 10^{30} \omega^{-\frac{1}{3}} + 9.69 \times 10^{37} \omega \\ &= 3.96 \times 10^{32} \omega^{-\frac{1}{3}} + 9.69 \times 10^{37} \omega = 3.57 \times 10^{34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}. \quad (5a) \end{aligned}$$

上式中最后的等式, 是利用角动量守恒与②式所得的结果.

由①a式可知  $\omega$  的数量级至多为  $10^{-6}$ , 故为了获得一个关于  $\omega$  的初步估计值, 可忽略⑤a式中地球的自转角动量(即最后一行的第二项), 而得

$$\omega \approx \omega_1 = \left( \frac{3.96}{357} \right)^3 = 1.36 \times 10^{-6} \text{ rad/s. (初估算)}$$

如果按初估值  $\omega_1$  算出地球的自转角动量, 再重新解⑤a式, 则可获得更准确的估计值, 其结果为

$$\omega \approx \omega_f = \left( \frac{3.96}{356} \right)^3 = 1.38 \times 10^{-6} \text{ rad/s. (次估算)}. \quad (5b)$$

按照以上的步骤, 反复求解⑤a式, 可逼近正确的答案, 但至多只会影响第四位以后的有效数字.

事实上, 由于⑤a式可表示成一个四次方程式, 故其根之解也可根据公式准确求得, 结果显示这两种求解方式的答案, 是完全一致的(根据四次方程式根的标准公式求解时, 另可得一实数根与两复数根, 但此三个根, 并非本问题的答案).

故当月球变成地球的同步卫星时, 地球自转一次所需的时间为

$$T_f = \frac{2\pi}{\omega_f} = \frac{6.2832}{1.38 \times 10^{-6} \times 86400} = 52.7 \text{ 日}.$$

(3) 因题设月球潮汐力的力矩  $\Gamma$  与  $\frac{1}{r^6}$  成正比, 而由图 1-7-37 可知  $\Gamma$  为回复力

矩, 故得

$$r^6 \Gamma = \text{常数}. \quad (6)$$

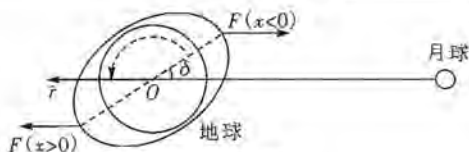


图 1-7-37

设  $r$  与  $\Gamma$  目前之值分别为  $r_0$  与  $\Gamma_0$ , 则由式⑥可得

$$\Gamma = \left(\frac{r_0}{r}\right)^6 \Gamma_0. \quad (7)$$

因为矩  $\Gamma$  须等于地球自转角动量  $I\Omega$  的变化率, 即

$$I \frac{d\Omega}{dt} = \Gamma. \quad (8)$$

按牛顿定律, 或角动量守恒定律,  $-\Gamma$  应等于地球-月球系统的轨道总角动量  $L$  的变化率, 故

$$\frac{dL}{dt} = -\Gamma. \quad (9)$$

但由③式知

$$\omega^2 r^2 = G(M_E + M).$$

而④式可改写为

$$\begin{aligned} L &= \left(\frac{MM_E}{M_E + M}\right) \omega r^2 = MM_E \left(\frac{G}{M_E + M}\right)^{\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{2}} \\ &= MM_E \left(\frac{G^2}{M_E + M}\right)^{\frac{1}{3}} \omega^{-\frac{1}{3}}. \end{aligned} \quad (10)$$

故得

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= MM_E \left(\frac{G}{M_E + M}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2r^{\frac{1}{2}}} \frac{dr}{dt} \\ &= -\frac{1}{3} MM_E \left(\frac{G^2}{M_E + M}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\omega^{\frac{4}{3}}} \frac{d\omega}{dt} = -\Gamma. \end{aligned} \quad (11)$$

目前力矩之值  $\Gamma_0$  可利用⑪式求得如下:

$$\begin{aligned} -\Gamma_0 &= \left(\frac{dL}{dt}\right)_0 = \frac{1}{2} MM_E \sqrt{\frac{G}{(M_E + M)r_0}} \left(\frac{dr}{dt}\right)_0 \\ &= \frac{1}{2} \times 7.35 \times 5.97 \times 10^{24} \times \sqrt{\frac{66.7 \times 10^{-44}}{(0.0735 + 5.97) \times (3.85)}} \times \frac{3.8 \times 10^{-8}}{3.65 \times 8.64} \\ &= 4.5 \times 10^{16} \text{ N} \cdot \text{m}. \end{aligned} \quad (12)$$

由⑪式知 
$$\frac{dL}{dt} = -\frac{1}{3} MM_E \left(\frac{G^2}{M_E + M}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\omega^{\frac{4}{3}}} \frac{d\omega}{dt} = -\left(\frac{r_0}{r}\right)^6 \Gamma_0.$$

而利用③式, 上式最右边的  $r$  可改用  $\omega$  表示, 故得

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} MM_E \left(\frac{G^2}{M_E + M}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{d\omega}{dt}\right) &= \frac{(r_0)^6 \Gamma_0}{[G(M_E + M)]^2 \omega^{\frac{16}{3}}}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= \left\{ \frac{3(r_0)^6 \Gamma_0}{GM_E M [G(M_E + M)]^{\frac{5}{3}}} \right\} \omega^{\frac{16}{3}} = b\omega^{\frac{16}{3}}. \end{aligned}$$

上式中的常数  $b$  代表大括号内的分式. 上式的解为

$$(\omega_f)^{-\frac{13}{3}} - (\omega_0)^{-\frac{13}{3}} = \frac{-13b}{3}(t_f - 0).$$

式中  $t_f$  代表由现在算起, 月球变成地球同步卫星所需的时间. 将①a 和⑤b 两式所得的  $\omega_f$  与  $\omega_0$  值, 及②式的  $\Gamma_0$  代入上式可得

$$\frac{-3}{13b} = \frac{GM_E M [G(M_E + M)]^{\frac{5}{3}}}{13(r_0)^6 (-\Gamma_0)} = 3.4 \times 10^{-8}.$$

从而可得

$$\begin{aligned} t_f &= \frac{-3}{13b} (\omega_f^{-\frac{13}{3}} - \omega_0^{-\frac{13}{3}}) = 3.4 \times [(1.38)^{-\frac{13}{3}} - (2.6617)^{-\frac{13}{3}}] \times 10^{18} \\ &= 3.4 \times 10^{18} \times (0.248 - 0.014376) \\ &= 7.9 \times 10^{17} \text{ 秒} \\ &= 2.5 \times 10^{10} \text{ 年.} \end{aligned}$$

即大约再过 250 亿年, 月球将会变成地球的同步卫星.

### 题 22 (2001·亚洲物理竞赛题)

#### 电偶极子在磁场中的运动

在均匀恒定的磁场  $\vec{B}$  作用下, 由多个带电质点组成的系统, 其平移运动会和转动互相耦合. 因此, 动量守恒及沿着  $\vec{B}$  方向的角动量分量守恒也会受到修正, 而与常见的形式不同. 这可用以下的问题加以探讨.

考虑由两个质量同为  $m$ 、带电量分别为  $q(q > 0)$  与  $-q$  的质点所组成的电偶极子, 此两质点以长度为  $l$ 、质量可忽略不计的刚性绝缘细棒连结. 设带电量为  $q$  与  $-q$  的质点, 其位置矢量分别为  $\vec{r}_1$  与  $\vec{r}_2$ , 并令  $\vec{l} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ ,  $\vec{\omega}$  代表此电偶极子绕质心转动的角速度,  $\vec{r}_{CM}$  与  $\vec{v}_{CM}$  分别代表质心的位置矢量与速度矢量. 相对论效应、电磁波辐射及电偶极子绕两质点连线的转动, 均可忽略.

当速度为  $\vec{v}$  时, 带电量为  $q$  的质点, 其所受的磁力为  $q\vec{v} \times \vec{B}$ . 数学式  $\vec{A}_1 \times \vec{A}_2$  代表  $\vec{A}_1$  和  $\vec{A}_2$  的矢量积, 可用两矢量在直角坐标系中的  $x, y, z$  分量来加以定义:

$$(\vec{A}_1 \times \vec{A}_2)_x = (\vec{A}_1)_y (\vec{A}_2)_z - (\vec{A}_1)_z (\vec{A}_2)_y,$$

$$(\vec{A}_1 \times \vec{A}_2)_y = (\vec{A}_1)_z (\vec{A}_2)_x - (\vec{A}_1)_x (\vec{A}_2)_z,$$

$$(\vec{A}_1 \times \vec{A}_2)_z = (\vec{A}_1)_x (\vec{A}_2)_y - (\vec{A}_1)_y (\vec{A}_2)_x.$$

#### (1) 守恒律

(a) 算出作用于此电偶极子的总力与相对于质心的总力矩, 从而写出此电偶极子质心的运动方程式与绕质心转动的运动方程式.

(b) 从质心的运动方程式, 导出修正后的总动量守恒律, 并将对应的守恒量记为  $\vec{P}$ . 将守恒的能量  $E$  用  $\vec{v}_{CM}$  及  $\vec{\omega}$  表出.

(c) 角动量由两部分组成, 其一来自于质心的运动, 另一则来自于绕质心的转



动.由修正后的总动量守恒律与绕质心转动的运动方程式,证明以下定义的量  $J$  必须守恒

$$J = (\vec{r}_{CM} \times \vec{P} + I\vec{\omega}) \cdot \vec{B}.$$

上式中  $I$  为电偶极子绕通过质心且垂直于  $\vec{l}$  的转轴的转动惯量,  $\vec{B}$  为沿磁场方向的单位矢量.

注意:对任意三矢量  $\vec{A}_1, \vec{A}_2$  及  $\vec{A}_3$ , 以下三关系式皆成立:

$$\vec{A}_1 \times \vec{A}_2 = -\vec{A}_2 \times \vec{A}_1.$$

$$\vec{A}_1 \cdot (\vec{A}_2 \times \vec{A}_3) = (\vec{A}_1 \times \vec{A}_2) \cdot \vec{A}_3.$$

$$\vec{A}_1 \times (\vec{A}_2 \times \vec{A}_3) = (\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_3)\vec{A}_2 - (\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2)\vec{A}_3.$$

重复运用上列前二个公式,可能会有助于导出本题中的守恒律.

(2) 在垂直于  $\vec{B}$  的平面上的运动

令磁场方向为  $z$  轴方向, 则得  $\vec{B} = B\vec{z}$ , 其中  $\vec{z}$  为沿  $z$  轴方向的单位矢量. 在以下的问题中, 假设电偶极子只在  $z=0$  的平面上运动, 其角速度可表示为  $\vec{\omega} = \omega\vec{z}$ , 而在起始时, 已知电偶极子的质心静止于原点,  $\vec{l}$  指向  $x$  轴方向, 且电偶极子的角速度为  $\omega_0\vec{z}$ .

(a) 若  $\omega_0$  小于一临界值  $\omega_c$ , 则此电偶极子无法绕其质心完成整圈的转动. 求出  $\omega_c$ .

(b) 对一任意  $\omega_0 > 0$ , 质量中心在  $-x$  方向所能达到的最大位移量  $d_m$  为多大?

(c) 刚性棒上所受到的张力为多大? 以角速度  $\omega$  表示.

**【分析】** 对于质点系(本题为由等量异号电荷构成的电偶极子)在力场中做任意运动来说, 一种研究方法是: 将复杂运动分解为质心的平移运动(涉及到质心, 质心运动定律等概念和规律)和绕质心轴的转动(涉及到力矩、转动惯量、角动量、转动定律等概念和规律)分别加以研究, 然后再耦合为实际运动. 因此必须对两部分运动规律有充分理解, 尤其运动方程的矢量表达式. 本题用到较多的数学运算(主要是矢量的乘法), 因此求解前需对题目给出的乘法运算法则予以理解, 对解题会有很大的帮助.

**【解】** (1) 守恒律

(1a) 以  $\vec{v}_1$  与  $\vec{v}_2$  分别代表两质点的速度矢量, 则得

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2), \quad \vec{v}_{CM} = \frac{1}{2}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2), \quad \vec{l} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \quad \dot{\vec{l}} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2.$$

欲算出作用于此电偶极子的总力  $\vec{F}$ , 只需考虑外力, 亦即来自磁场  $\vec{B}$  的力, 故

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = q(\vec{v}_1 \times \vec{B}) + (-q)(\vec{v}_2 \times \vec{B}) \\ &= q(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \times \vec{B} \\ &= q\dot{\vec{l}} \times \vec{B}. \end{aligned}$$

故质心的运动方程式为

$$M\dot{\vec{v}}_{CM} = q\dot{\vec{l}} \times \vec{B} = q(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \times \vec{B}. \quad (M=2m) \quad ①$$

同样地,相对于质心的总力矩,也来自磁作用力,故为

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \left(\frac{\vec{l}}{2}\right) \times (q\vec{v}_1 \times \vec{B}) + \left(-\frac{\vec{l}}{2}\right) \times (-q\vec{v}_2 \times \vec{B}) \\ &= q\vec{l} \times \left(\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2} \times \vec{B}\right) \\ &= q\vec{l} \times (\vec{v}_{CM} \times \vec{B}). \end{aligned}$$

由于电偶极子不绕两质点的连线转动,故若以  $I$  代表电偶极子绕一通过其质心且垂直于  $\vec{l}$  的转轴的转动惯量,即

$$I = m\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}ml^2. \quad ②$$

则此电偶极子绕质心的角动量可表示为  $\vec{L} = I\vec{\omega}$ , 而得其绕质心转动的运动方程式为

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I\dot{\vec{\omega}} = \vec{\tau} = q\vec{l} \times (\vec{v}_{CM} \times \vec{B}). \quad ③$$

(1b)由①式,可得总动量的守恒律为

$$\dot{\vec{P}} = 0, \vec{P} = M\vec{v}_{CM} - q\vec{l} \times \vec{B}. \quad ④$$

因两质点之相对速度可表示为  $\vec{l} = (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \vec{\omega} \times \vec{l}$ , 故由①与③两式,可得

$$\begin{aligned} \vec{v}_{CM} \cdot M\dot{\vec{v}}_{CM} + \dot{\vec{\omega}} \cdot I\vec{\omega} &= q\vec{v}_{CM} \cdot \dot{\vec{l}} \times \vec{B} + q\vec{\omega} \cdot \vec{l} \times (\vec{v}_{CM} \times \vec{B}) \\ &= -q\vec{l} \cdot \vec{v}_{CM} \times \vec{B} + q(\vec{\omega} \times \vec{l}) \cdot (\vec{v}_{CM} \times \vec{B}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

上式左边可改写为

$$\begin{aligned} \vec{v}_{CM} \cdot M\dot{\vec{v}}_{CM} + \dot{\vec{\omega}} \cdot I\vec{\omega} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (M\vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_{CM} + I\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (Mv_{CM}^2 + I\omega^2). \end{aligned}$$

故由以上两式可得能量  $E$  的守恒律为

$$\dot{E} = 0, E = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2. \quad ⑤$$

(1c)因  $\vec{P}$  与  $\vec{B}$  均保持固定,不随时间变化,故由③与④两式可得

$$\frac{d}{dt} (I\vec{\omega} \cdot \vec{B}) = I\dot{\vec{\omega}} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot I\dot{\vec{\omega}}$$



$$\begin{aligned}
 &= q \vec{B} \cdot \vec{l} \times (\vec{v}_{CM} \times \vec{B}) = q (\vec{B} \times \vec{l}) \cdot (\vec{v}_{CM} \times \vec{B}) \\
 &= (\vec{P} - M \vec{v}_{CM}) \cdot (\vec{v}_{CM} \times \vec{B}) \\
 &= \vec{P} \cdot (\vec{v}_{CM} \times \vec{B}) = (\vec{P} \times \vec{v}_{CM}) \cdot \vec{B} \\
 &= -(\vec{v}_{CM} \times \vec{P}) \cdot \vec{B} = -\frac{d}{dt} [(\vec{r}_{CM} \times \vec{P}) \cdot \vec{B}].
 \end{aligned}$$

将上式最后一项移至最左边,可得沿 $\vec{B}$ 方向的角动量分量的守恒律为

$$\dot{J} = 0, J = (\vec{r}_{CM} \times \vec{P} + I \vec{\omega}) \cdot \vec{B}, \quad (6)$$

(2) 在垂直于 $\vec{B}$ 的平面上的运动

(2a) 因电偶极子只在 $z=0$ 的平面上运动,故 $\vec{l}$ 可表示为

$$\vec{l} = l (\cos\varphi(t) \hat{x} + \sin\varphi(t) \hat{y}), \varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = \omega_0. \quad (7)$$

而角速度可用 $\dot{\varphi}$ 表示为  $\vec{\omega} = \omega \hat{z} = \dot{\varphi} \hat{z}$ . (8)

由④式可得  $M \vec{v}_{CM} = \vec{P} + qlB(\sin\varphi \hat{x} - \cos\varphi \hat{y})$ . (9)

因在起始时刻 $t=0$ 时, $v_{CM}=0, \varphi=0$ ,故可求得守恒量为

$$\vec{P} = qlB \hat{y}. \quad (10)$$

由以上两式可得

$$\dot{x}_{CM} = \left(\frac{qlB}{M}\right) \sin\varphi, \dot{y}_{CM} = \left(\frac{qlB}{M}\right) (1 - \cos\varphi). \quad (11)$$

按⑤式的能量守恒律,可得

$$\frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} M (\dot{x}_{CM}^2 + \dot{y}_{CM}^2) = \frac{1}{2} I \omega_0^2,$$

将⑪式代入上式可得

$$\frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 + \frac{(qlB)^2}{M} (1 - \cos\varphi) = \frac{1}{2} I \omega_0^2.$$

或  $\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \omega_c^2 (1 - \cos\varphi) = \omega_0^2$ . (12)

在上式中  $\omega_c = \sqrt{\frac{4(qlB)^2}{MI}} = \sqrt{\frac{4(qlB)^2}{2m \frac{ml^2}{2}}} = \frac{2qB}{m}$ . (13)

注意:⑫式的形式,与在重力作用下,在一竖直平面内运动的单摆相同.故(2a)与(2b)两小题亦可利用模拟关系求解.

电偶极子若能绕其质心完成整圈的转动,则 $\dot{\varphi}$ 不得为零,故由⑫式可得

$$\omega_0^2 - \frac{1}{2} \omega_c^2 (1 - \cos\varphi) = \dot{\varphi}^2 > 0,$$

当 $\varphi = \pi$ 时, $\dot{\varphi}^2$ 达到其极小值 $\omega_0^2 - \omega_c^2$ ,而有如下关系

$$\omega_0^2 - \omega_c^2 > 0, |\omega_0| > \omega_c = \frac{2qB}{m}. \quad (14)$$

故⑬式中定义的  $\omega_c$  即为所求的临界值.

(2b) 将⑩式表示为  $\vec{P} = P\hat{y}$ , 则得  $P = qlB > 0$ , 而由⑥式可得

$$x_{CM}P + I\omega = J. \quad (15)$$

在起始时刻  $t=0$  时,  $x_{CM} = 0, \omega = \omega_0$ , 故⑮式可写为

$$x_{CM}P = I(\omega_0 - \omega). \quad (16)$$

按题意  $\omega_0 > 0$ , 而由⑮式得  $\omega_0^2 \geq \dot{\varphi}^2 = \omega^2$ , 即  $\omega_0 \geq \omega$ , 故由⑮式可看出  $x_{CM} \geq 0$ , 且当  $\omega$  达其极小值时,  $x_{CM}$  将达其极大值  $d_m$ .

若  $\omega_0 < \omega_c$ , 则电偶极子将在  $\varphi=0$  两侧来回振荡, 而得  $\omega$  的极小值为  $-\omega_0$ , 故得最大位移量为

$$d_m = \frac{I(2\omega_0)}{P} = \left(\frac{m\omega_0}{qB}\right)l, \omega_0 < \omega_c. \quad (17)$$

若  $\omega_0 > \omega_c$ , 则  $\omega$  将不得为零, 而须一直维持为正, 其极小值为  $\sqrt{\omega_0^2 - \omega_c^2}$ , 故得最大位移量为

$$\begin{aligned} d_m &= \left(\frac{I}{P}\right)(\omega_0 - \sqrt{\omega_0^2 - \omega_c^2}) \\ &= \frac{m}{2qB}(\omega_0 - \sqrt{\omega_0^2 - \omega_c^2})l, \omega_0 > \omega_c. \end{aligned} \quad (18)$$

若  $\omega_0 = \omega_c$ , 则  $\omega^2 = \omega_c^2 \frac{1 + \cos\varphi}{2} = \omega_c^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$ , 故  $\dot{\varphi} = \omega_c \cos \frac{\varphi}{2}$ . 当  $\varphi$  随时间增加而接近  $\pi$  时, 可令  $\varphi = \pi - 2\varepsilon$ , 而得  $\dot{\varepsilon} = \frac{-\omega_c \sin \varepsilon}{2} \approx -\frac{\omega_c \varepsilon}{2}$ , 即  $\varepsilon \approx \varepsilon_0 e^{-\frac{\omega_c t}{2}}$ . 此结果显示只有当  $t \rightarrow \infty$  时, 才可能出现  $\varepsilon \rightarrow 0$  或  $\varphi \rightarrow \pi$ . 由此可得在运动过程中  $\dot{\varphi} \geq 0$ , 故  $\omega$  的极小值为零, 而得最大位移量为

$$d_m = \left(\frac{I}{P}\right)\omega_0 = \left(\frac{m\omega_0}{2qB}\right)l, \omega_0 = \omega_c. \quad (19)$$

(2c) 设对棒产生压缩作用的力, 取其值为正. 作用于棒的张力, 等于以下三部分的和.

$$(i) \text{ 两质点间的库仑力 } F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{l^2}. \quad (20)$$

$$(ii) \text{ 棒绕质心旋转的离心效应 } = -\frac{1}{2} m\omega^2 l. \quad (21)$$

(iii) 两质点以质心速度移动时, 其所受磁力沿棒方向的分力为

$$q\vec{v}_{CM} \times \vec{B} \cdot (-\hat{l}) = q\vec{v}_{CM} \cdot \hat{l} \times \vec{B}.$$

将④式的两边平方后, 可得

$$P^2 = (Mv_{CM})^2 - 2M\vec{v}_{CM} \cdot q\vec{l} \times \vec{B} + (qlB)^2.$$

将⑩式与式⑮的结果代入上式, 可得

$$\frac{1}{2} Mv_{CM}^2 = ql\vec{v}_{CM} \cdot \hat{l} \times \vec{B} = \frac{1}{2} I(\omega_0^2 - \omega^2). \quad (22)$$



将(i)至(iii)部分的贡献相加后,得刚性棒上所受到的张力为

$$T = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{l^2} - \frac{1}{2} m l \omega^2 + \frac{1}{4} m l (\omega_0^2 - \omega^2). \quad (23)$$

张力  $T$  为正值,表示其对棒为压缩作用力.

另一种解法是利用个别质点的运动方程式.考虑带电量为  $q$  的质点,其加速度为

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}_1}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \vec{v}_{CM} + \frac{1}{2} \dot{\vec{l}} \right) = \dot{\vec{v}}_{CM} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \times \vec{l}) \\ &= \dot{\vec{v}}_{CM} + \frac{1}{2} \{ (\vec{\omega} \times \dot{\vec{l}}) + (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{l}) \}. \end{aligned}$$

上式中利用到  $\dot{\vec{l}} = \vec{\omega} \times \vec{l}$  的关系.此质点受到的总力为

$$\begin{aligned} \vec{F} &= (T - F_C) \vec{l} + q \vec{v}_1 \times \vec{B} \\ &= (T - F_C) \vec{l} + q \left( \vec{v}_{CM} + \frac{1}{2} \dot{\vec{l}} \right) \times \vec{B}. \end{aligned}$$

由牛顿第二运动定律可得

$$l \cdot m \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{l} \cdot \vec{F}.$$

或

$$l \cdot m \dot{\vec{v}}_{CM} + \frac{m}{2} l \cdot (\vec{\omega} \times \dot{\vec{l}}) = T - F_C + q \vec{l} \cdot \vec{v}_{CM} \times \vec{B} + \frac{q}{2} l \cdot \dot{\vec{l}} \times \vec{B}.$$

由①式可知上式第一项与最后一项相等,两者相消,故得

$$\begin{aligned} T &= F_C - q \vec{l} \cdot \vec{v}_{CM} \times \vec{B} + \frac{m}{2} l \cdot (\vec{\omega} \times \dot{\vec{l}}) \\ &= F_C - q \vec{l} \cdot \vec{v}_{CM} \times \vec{B} - \frac{m}{2} (\vec{\omega} \times \vec{l}) \cdot \dot{\vec{l}} \\ &= F_C - q \vec{l} \cdot \vec{v}_{CM} \times \vec{B} - \frac{m}{2} (\vec{\omega} \times \vec{l}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{l}) \\ &= F_C + q \vec{v}_{CM} \cdot \vec{l} \times \vec{B} - \frac{1}{2} m l \omega^2. \end{aligned}$$

此结果与②式相同.

### 题 23 (2005 · 国际物理奥赛题)

#### 误入歧途的卫星

航天器通常沿轨道运动时有速度的变化,即为了达到更高的轨道需要加速,为了启动重新回到大气层需要减速.本题研究发动机沿径向推进时的轨道变化.

为了得到数值结果,提供以下数据:地球半径  $R_T = 6.37 \times 10^6$  m,地球表面重力加速度  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>,恒星日  $T_0 = 24.0$  h.

考虑质量为  $m$  的地球同步通信卫星(注:其周期为  $T_0$ ),处于赤道上空的圆形轨道上,半径为  $r_0$ .为了达到最终轨道,卫星装有推进系统.



## 问题 1

- 1.1 计算  $r_0$  的数值。
- 1.2 用  $g, R_T$  和  $r_0$  给出卫星速度  $v_0$  的解析表达式, 计算其数值结果。
- 1.3 用  $v_0, m, g$  和  $R_T$  给出角动量  $L_0$  和机械能  $E_0$  的表达式。

达到同步圆形轨道后(见图 1-7-38), 卫星稳定在预定的位置, 准备执行下一步的任务。此时地面控制系统发出错误指令, 导致发动机点火, 推进力指向地球, 尽管地面指挥系统反应迅速, 关闭了发动机, 仍然产生了速度变化  $\Delta v$ 。这个增量用参数  $\beta = \frac{\Delta v}{v_0}$  表示。发动机点火的时间与任何轨道时间参量相比可以忽略, 即可以认为是瞬时的。

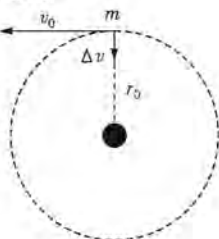


图 1-7-38

## 问题 2

假设  $\beta < 1$ 。

- 2.1 确定新轨道参数的半正焦弦(semi-latus-rectum)  $l$  和离心率  $\varepsilon$  与  $r_0$  和  $\beta$  的关系(见提示)。
- 2.2 计算新轨道的主轴和意外点火时位置矢量之间的角度  $\alpha$ 。
- 2.3 给出近地点  $r_{\min}$  和远地点  $r_{\max}$  与地球中心的距离的解析表达式, 用  $r_0$  和  $\beta$  表示, 当  $\beta = \frac{1}{4}$  时, 计算它们的值。

- 2.4 确定新轨道的周期  $T$  与  $T_0$  和  $\beta$  的关系, 计算当  $\beta = \frac{1}{4}$  时  $T$  的值。

## 问题 3

- 3.1 计算卫星逃逸地球重力场需要的最小增量参数  $\beta_{\text{esc}}$ 。
- 3.2 确定新轨道卫星到地心的最近距离  $r_{\min}'$  与  $r_0$  的函数关系。

## 问题 4

假设  $\beta > \beta_{\text{esc}}$ 。

- 4.1 确定在无限远处的剩余速度  $v_\infty$  与  $v_0$  和  $\beta$  的函数关系。
- 4.2 确定逃逸方向渐近线的碰撞参数  $b$  与  $r_0$  和  $\beta$  的关系(图 1-7-39)。
- 4.3 确定渐近的逃逸方向  $\varphi$  与  $\beta$  的关系, 计算  $\beta = \frac{3}{2}\beta_{\text{esc}}$  时的数值结果。

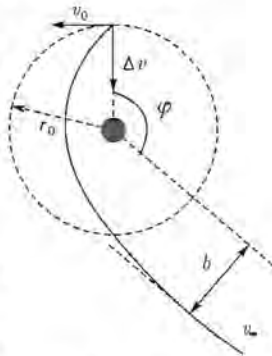


图 1-7-39

## 提示:

在平方反比律的有心力作用下, 物体轨道可能是椭圆、抛物线或双曲线。在  $m \ll M$  的近似条件下,  $M$  位于一个焦点上。以这个焦点为原点, 该曲线适当的极坐标



方程为(图 1-7-40).

$$r(\theta) = \frac{l}{1 - \epsilon \cos \theta}$$

这里的  $l$  是正常数,称为半正焦弦, $\epsilon$  是曲线的离心率,它们用运动常数表示为

$$l = \frac{L^2}{GMm^2}, \epsilon = \left(1 + \frac{2EL^2}{G^2 M^2 m^3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

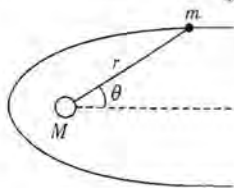


图 1-7-40

这里  $G$  是牛顿引力常量, $L$  是轨道上物体相对于原点的角动量的绝对值, $E$  是机械能,在无限远处时势能为零.

有下列对应情况:

当  $0 \leq \epsilon < 1$ , 曲线是椭圆( $\epsilon = 0$  是圆);

$\epsilon = 1$ , 曲线是抛物线;

$\epsilon > 1$ , 曲线是双曲线.

**【分析】** 此题较全面地考查了人造卫星的有关知识. 它除了要应用万有引力定律、圆周运动等基础物理知识外,还涉及到开普勒第三定律、角动量以及数学中的圆锥曲线、极坐标方程等知识.

**【解】**

1. 1、1. 2

$$\left. \begin{aligned} G \frac{M_T m}{r_0^2} &= m \frac{v_0^2}{r_0}, \\ v_0 &= \frac{2\pi r_0}{T_0}, \\ g &= \frac{GM_T}{R_T^2}. \end{aligned} \right\} \begin{cases} r_0 = \left( \frac{g R_T^2 T_0^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow r_0 = 4.22 \times 10^7 \text{ m}, \\ v_0 = R_T \sqrt{\frac{g}{r_0}} \Rightarrow v_0 = 3.07 \times 10^3 \text{ m/s}. \end{cases}$$

1. 3

$$L_0 = r_0 m v_0 = \frac{g R_T^2}{v_0^2} m v_0 \Rightarrow L_0 = \frac{m g R_T^2}{v_0}$$

$$E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 - G \frac{M_T m}{r_0} = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{g R_T^2 m}{r_0} = \frac{1}{2} m v_0^2 - m v_0^2 \Rightarrow E_0 = -\frac{1}{2} m v_0^2$$

2. 1 两个轨道的角动量相等,由此可得半正焦弦

$$l = \frac{L_0^2}{GM_T m^2} = \frac{m^2 g^2 R_T^4}{v_0^2 g R_T^2 m^2} = \frac{1}{g R_T^2} \frac{g R_T^2 m^2}{v_0^2} = r_0 \Rightarrow l = r_0$$

离心率为

$$\epsilon^2 = 1 + \frac{2EL_0^2}{G^2 M_T^2 m^3}$$

$E$  是卫星的机械能

$$E = \frac{1}{2} m (v_0^2 + \Delta v^2) - G \frac{M_T m}{r_0} = \frac{1}{2} m \Delta v^2 + E_0 = \frac{1}{2} m \Delta v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

即

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 \left( \frac{\Delta v^2}{v_0^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} m v_0^2 (\beta^2 - 1)$$

由上面二式得

$$\boxed{\epsilon = \beta}.$$

$\epsilon = \beta < 1$ , 因此轨道是椭圆.

2.2 初始轨道和后来的轨道相交于  $P$ , 即卫星点火的位置, 参见图 1-7-41.

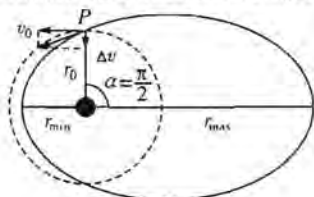


图 1-7-41

$$r(\theta = \alpha) = r_0 = \frac{r_0}{1 - \beta \cos \alpha} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{2}}.$$

2.3 由轨道方程立即可以得到在  $\theta = 0$  及  $\theta = \pi$  分别对应于  $r$  的极小和极大值

$$r_{\max} = \frac{l}{1 - \epsilon}, r_{\min} = \frac{l}{1 + \epsilon}.$$

即

$$\boxed{r_{\max} = \frac{r_0}{1 - \beta}} \text{ 和 } \boxed{r_{\min} = \frac{r_0}{1 + \beta}}.$$

当  $\beta = \frac{1}{4}$ , 可得

$$\boxed{r_{\max} = 5.63 \times 10^7 \text{ m}, r_{\min} = 3.38 \times 10^7 \text{ m}}.$$

2.4 由开普勒第三定律, 新的轨道周期  $T$  满足以下公式

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_0^2}{r_0^3}.$$

$a$  是椭圆的半长轴

$$a = \frac{r_{\max} + r_{\min}}{2} = \frac{r_0}{1 - \beta^2}.$$

所以

$$\boxed{T = T_0 (1 - \beta^2)^{-\frac{3}{2}}}.$$

代入  $\beta = \frac{1}{4}$ , 得

$$\boxed{T = T_0 \left(\frac{15}{16}\right)^{-\frac{3}{2}} = 26.4 \text{ h}}.$$

3.1 逃逸地球引力场的条件是卫星轨道为开放轨道. 即要求离心率大于或等于 1. 最小值对应于抛物线轨道,  $\epsilon = 1$  的情形.

$$\epsilon = \beta \Rightarrow \boxed{\beta_{\text{esc}} = 1}.$$

3.2  $\epsilon = \beta_{\text{esc}} = 1$ , 极坐标下的抛物线方程是

$$r = \frac{l}{1 - \cos \theta}.$$

半正焦弦仍然是  $l = r_0$ . 地球卫星之间的最小距离对应于

$$\theta = \pi.$$



$$r_{\min} = \frac{r_0}{2}.$$

4.1 由能量守恒可以得到卫星逃逸到无限远处的剩余速度  $v_{\infty}$ :

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 (\beta^2 - 1) = \frac{1}{2} m v_{\infty}^2 \Rightarrow v_{\infty} = v_0 (\beta^2 - 1)^{\frac{1}{2}}.$$

4.2 当  $\epsilon = \beta > \beta_{\text{esc}} = 1$ , 卫星轨道为双曲线. 由角动量守恒得

$$m v_0 r_0 = m v_{\infty} b.$$

所以 
$$b = r_0 \frac{v_0}{v_{\infty}} \Rightarrow b = r_0 (\beta^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}.$$

4.3 双曲线渐近线与轴的夹角是该曲线极坐标方程  $r \rightarrow \infty$  对应的角度值, 即分母为零时的角度值

$$1 - \beta \cos \theta_{\text{asym}} = 0 \Rightarrow \theta_{\text{asym}} = \arccos\left(\frac{1}{\beta}\right).$$

按照图 1-7-42 
$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \theta_{\text{asym}} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} + \arccos\left(\frac{1}{\beta}\right).$$

代人  $\beta = \frac{3}{2} \beta_{\text{esc}} = \frac{3}{2}$ , 得到 
$$\varphi = 138^\circ = 2.41 \text{ rad}.$$

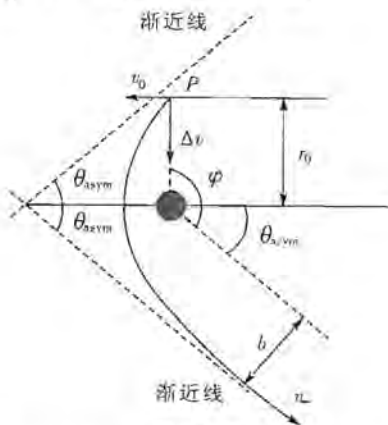


图 1-7-42

#### 题 24 (2003 · 国际物理奥赛题)

##### 连有落体的摆

半径为  $R$  的刚体圆柱水平地架于地面上方, 一质量为  $m$  的摆球, 用长为  $L$  ( $L > 2\pi R$ )、质量可忽略的细绳, 悬挂于圆柱体顶端的  $A$  点, 如图 1-7-43 所示. 将摆球拉至与  $A$  点在同一水平位置, 此时细绳张紧, 然后静止放开摆球. 细绳的任何伸缩均可忽略. 假定摆球可视为质点, 且只在垂直于圆柱轴线的竖直平面内摆动. 因此, 摆球有时亦以“质点”称之. 重力加速度为  $g$ .

如图 1-7-43 所示, 取  $O$  为坐标原点. 当质点下落至  $P$  点时, 细绳与圆柱表面相

切于  $Q$  点, 线段  $QP$  的长度以  $s$  表示. 在  $Q$  点处沿切线方向的单位矢量为  $\hat{t}$ , 而沿半径方向的单位矢量为  $\hat{r}$ . 取沿  $OA$  竖直向上的直线为  $x$  轴, 当  $OA$  沿逆时针方向转至  $OQ$  时, 其角位移  $\theta$  为正值.

当  $\theta=0$  时, 线段  $s$  的长度等于  $L$ , 质点的重力势能  $U$  设为零. 由于质点的运动,  $\theta$  与  $s$  的瞬间时间变化率分别用  $\frac{d\theta}{dt}$  与  $\frac{ds}{dt}$  表示.

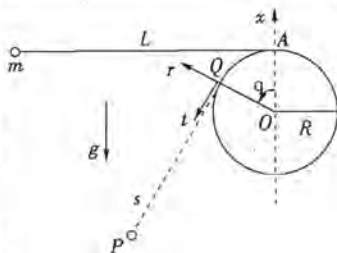


图 1-7-43

除非另外标明, 所有速率与速度均相对于固定点  $O$  而言.

### A 部分

在 A 部分中, 只考虑细绳处于张紧状态下的质点运动, 试利用以上所给量 (即  $s, \theta, \frac{ds}{dt}, \frac{d\theta}{dt}, R, L, g, \hat{t}, \hat{r}$ ) 表示, 求:

- (a)  $\frac{d\theta}{dt}$  与  $\frac{ds}{dt}$  间的关系; (b) 动点  $Q$  相对于  $O$  点的速度  $v_Q$ ; (c) 当质点位于  $P$  点时, 它相对于动点  $Q$  的速度  $v'$ ; (d) 当质点位于  $P$  点时, 它相对于  $O$  点的速度  $v$ ; (e) 当质点位于  $P$  点时, 它相对于  $O$  点的加速度在方向  $\hat{t}$  的分量; (f) 当质点位于  $P$  点时, 它的重力势能  $U$ ; (g) 质点在其轨迹线最低点时的速率  $v_m$ .

### B 部分

在 B 部分中,  $L$  与  $R$  的比值为

$$\frac{L}{R} = \frac{9\pi}{8} + \frac{2}{3} \cot \frac{\pi}{16} = 3.534 + 3.352 = 6.886.$$

- (h) 当由  $Q$  到  $P$  的细绳为直线, 且其长度为最短时, 质点的速率  $v$  为何? (以  $g$  与  $R$  表示)

- (i) 当质点摆动到圆柱体的另一侧, 且到达最高点时, 其速率  $v_H$  为何? (以  $g$  与  $R$  表示)

### C 部分

在 C 部分中, 质量为  $m$  的摆球并非悬吊于  $A$  点, 而是系以细绳绕过圆柱体的顶端, 在另一侧与一个质量为  $M$  的较重物体相连, 如图 1-7-44 所示, 该重物亦可视为质点.

开始时, 将摆球拉至与  $A$  点同一水平高度, 另一端之重物悬于  $O$  点以下, 细绳处于张紧状态, 其水平部分之长度为  $L$ . 然后静止释放摆球, 重物则开始下落. 假设摆球保持在竖直面内运动, 且能摆过垂直下降的重物和细绳, 而不与之相碰.

细绳与圆柱体表面间的动摩擦力可忽略不计, 但静摩擦力足够大, 使重物下落的速度一旦变为零, 就能使其维持不动.

- (j) 假设重物在下落距离  $D$  后, 速度变为零, 且  $L-D \gg R$ . 若此后摆球能绕过

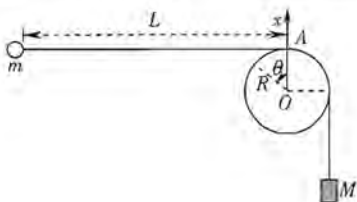


图 1-7-44

圆柱体至  $\theta=2\pi$  且悬空的两段细绳始终保持伸直, 则此值  $\alpha = \frac{D}{L}$  必不小于某定值  $\alpha_c$ . 忽略量级为  $\frac{R}{L}$  及以上项, 试估算临界值  $\alpha_c$  (以  $\frac{M}{m}$  表示).

**【分析】** 解此题需要运用微分求导的方法, 并始终抓住机械能守恒这一基本规律.

**【解】** A 部分

(a) 由于细绳长  $L = s + R\theta$  不变, 因而有

$$\frac{ds}{dt} + R \frac{d\theta}{dt} = 0. \quad (A1)^*$$

(b) 相对于  $O$ ,  $Q$  沿半径为  $R$  的圆周运动, 角速度为  $\frac{d\theta}{dt}$ , 所以

$$v_Q = R \frac{d\theta}{dt} \hat{t} = -\frac{ds}{dt} \hat{t}. \quad (A2)^*$$

(c) 相对于  $Q$ , 质点在  $\Delta t$  时间间隔内的位移为

$$\Delta r' = (s \Delta\theta) (-\hat{r}) + \Delta s \hat{t}.$$

参见图 1-7-45, 由此得  $v' = \frac{\Delta r'}{\Delta t} = -s \frac{d\theta}{dt} \hat{r} + \frac{ds}{dt} \hat{t}$ . (A3)^\*

(d) 质点相对  $O$  点的速度为分别由 (A2)、(A3) 两式给出两速度之和, 于是

$$v = v' + v_Q = -s \frac{d\theta}{dt} \hat{r} + \frac{ds}{dt} \hat{t} - \frac{ds}{dt} \hat{t} = -s \frac{d\theta}{dt} \hat{r}. \quad (A4)^*$$

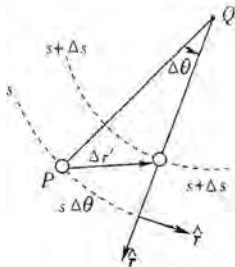


图 1-7-45

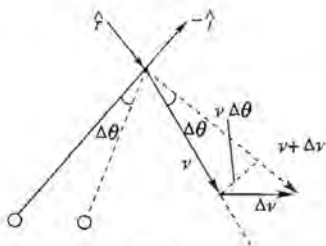


图 1-7-46

(e) 参见图 1-7-46 速度改变量  $\Delta v$  的  $(-\hat{t})$  方向分量由下式给出

$$(-\hat{i}) \cdot \Delta v = v \Delta \theta = v \frac{d\theta}{dt} \Delta t.$$

于是, 加速度  $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$  的  $\hat{t}$  分量为  $\hat{t} \cdot a = -v \frac{d\theta}{dt}$ . 由式(A4), 质点的速度为  $s \frac{d\theta}{dt}$ ,

在 P 点处质点加速度的  $\hat{t}$  分量为

$$a_t = a \cdot \hat{t} = -v \frac{d\theta}{dt} = -\left(s \frac{d\theta}{dt}\right) \frac{d\theta}{dt} = -s \frac{d\theta^2}{dt}. \quad (\text{A5})'$$

注意, 由图 1-7-46, 质点加速度的径向分量也可仿照上面方法得到

$$a_r = a \cdot \hat{r} = -\frac{dv}{dt} = \frac{-d\left(s \frac{d\theta}{dt}\right)}{dt}.$$

注: 凡公式编号右上角有“\*”号者为题目答案. 下同.

(f) 由图 1-7-47, 质点的重力势能可用  $s$  和  $\theta$  表为

$$U(\theta) = -mgh = -mg[R(1 - \cos\theta) + s\sin\theta]. \quad (\text{A6})'$$

(g) 在轨迹的最低点, 质点的重力势能  $U$  必取极小值  $U_m$ , 此势能极小位置可由质点的平衡位置求得, 不难看出, 此即  $\theta = \frac{\pi}{2}$  或  $s = L - \frac{\pi R}{2}$  的位置 (图 1-7-48). 故

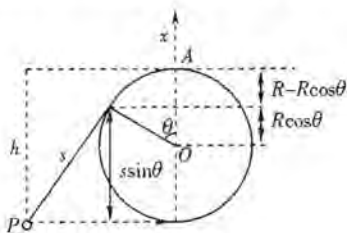


图 1-7-47

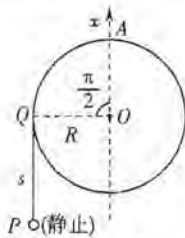


图 1-7-48

$$U_m = U\left(\frac{\pi}{2}\right) = -mg\left(R + L - \frac{\pi R}{2}\right). \quad (\text{A7})$$

初始时质点的机械能为零, 由机械能守恒, 质点在轨迹最低点处的速率  $v_m$  应满足

$$E = 0 = \frac{1}{2}mv_m^2 + U_m. \quad (\text{A8})$$

$$\text{由(A7)与(A8)式, 可得 } v_m = \sqrt{-\frac{2U_m}{m}} = \sqrt{2g\left[R + \left(L - \frac{\pi R}{2}\right)\right]}. \quad (\text{A9})'$$

B 部分

(h) 由式(A6), 质点总机械能可表为

$$E = 0 = \frac{1}{2}mv^2 + U(\theta) = \frac{1}{2}mv^2 - mg[R(1 - \cos\theta) + s\sin\theta]. \quad (\text{B1})$$

由式(A4), 质点速率等于  $s \frac{d\theta}{dt}$ , 于是由式(B1)可得



$$\dot{r}^2 = \left( s \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 2g[R(1 - \cos\theta) + s\sin\theta]. \quad (B2)$$

设绳中张力为  $T$ 。由图 1-7-49 所示,作用在质点上的净力的  $t$  分量为  $-T + mg\sin\theta$ 。于是,由牛顿第二定律,有

$$m \left[ -s \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = -T + mg\sin\theta. \quad (B3)$$

根据式(B2)和(B3),张力可表为

$$\begin{aligned} T &= m \left[ g\sin\theta + s \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \\ &= \frac{mg}{s} [2R(1 - \cos\theta) + 3s\sin\theta] \\ &= \frac{2mgR}{s} \left[ \tan \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} \left( \theta - \frac{L}{R} \right) \right] \sin\theta \\ &= \frac{2mgR}{s} (y_1 - y_2) \sin\theta. \end{aligned} \quad (B4)$$

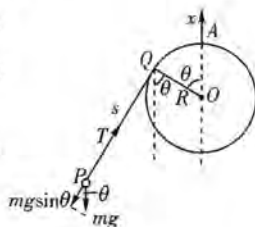


图 1-7-49

函数  $y_1 = \tan \frac{\theta}{2}$  和  $y_2 = \frac{3}{2} \left( \theta - \frac{L}{R} \right)$  的曲线画于图 1-7-50 中。

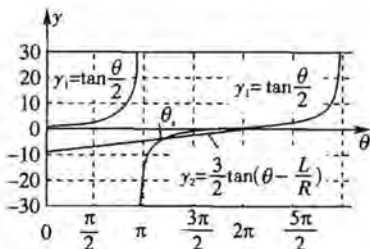


图 1-7-50

由式(B4)和图 1-7-50,得到下表所列结果,将  $y_2 = y_1$  时的  $\theta$  角记为  $\theta_c$  ( $\pi < \theta_c < 2\pi$ ),它由下式给出

$$\frac{3}{2} \left( \theta_c - \frac{L}{R} \right) = \tan \frac{\theta_c}{2}. \quad (B5)$$

或

$$\frac{L}{R} = \theta_c - \frac{2}{3} \tan \frac{\theta_c}{2}. \quad (B6)$$

	$y_1 < y_2$	$\sin\theta$	张力 $T$
$0 < \theta < \pi$	正	正	正
$\theta = \pi$	$+\infty$	0	正
$\pi < \theta < \theta_c$	负	负	正
$\theta = \theta_c$	零	负	零
$\theta_c < \theta < 2\pi$	正	负	负



由于比值  $\frac{L}{R}$  由下式给定:

$$\frac{L}{R} = \frac{9\pi}{8} + \frac{2}{3} \cot \frac{\pi}{16} = \left(\pi + \frac{\pi}{8}\right) - \frac{2}{3} \tan \frac{1}{2} \left(\pi + \frac{\pi}{8}\right). \quad (B7)$$

由(B6)和(B7)两式可得  $\theta = \frac{9\pi}{8}$ .

由表可知张力  $T$  在  $0 < \theta < \theta_c$  范围内恒正(即细绳必张紧).  $\theta$  一旦达到  $\theta_c$ , 张力即变为零, 此后悬空的细绳部分将不再张紧.  $s$  的最小可能值  $s_{\min}$  出现在  $\theta = \theta_c$  时, 并由下式给出:

$$s_{\min} = L - R\theta_c = R \left( \frac{9\pi}{8} + \frac{2}{3} \cot \frac{\pi}{16} - \frac{9\pi}{8} \right) = \frac{2R}{3} \cot \frac{\pi}{16} = 3.352R. \quad (B8)$$

当  $\theta \geq \theta_c$  时,  $T=0$ , 由式(B2)和(B3)可得  $v^2 = -g s \sin \theta$ , 因而速率  $v_s$  为

$$\begin{aligned} v_s &= \sqrt{-g s_{\min} \sin \theta_c} = \sqrt{\frac{2gR}{3} \cot \frac{\pi}{16} \sin \frac{\pi}{8}} \\ &= \sqrt{\frac{4gR}{3}} \cos \frac{\pi}{16} = 1.33 \sqrt{gR}. \end{aligned} \quad (B9)^*$$

(i) 当  $\theta \geq \theta_c$  时, 质点运动如同同一重力场中的抛体, 如图 1-7-51, 质点以初速  $v_s$  从位置  $P(x, y)$ , 沿着与  $y$  轴成  $\varphi = \left(\frac{3\pi}{2} - \theta_c\right)$  的仰角抛出.

质点在其抛物线轨道最高点的速率  $v_H$  等于它抛出时初速的  $y$  分量. 于是

$$v_H = v_s \sin(\theta_c - \pi) = \sqrt{\frac{4gR}{3}} \cos \frac{\pi}{16} \sin \frac{\pi}{8} = 0.4334 \sqrt{gR}. \quad (B10)$$

质点从抛出点  $P$  至最高点行进的水平距离  $H$  为

$$H = \frac{v_s^2 \sin 2(\theta_c - \pi)}{2g} = \frac{v_s^2}{2g} \sin \frac{\pi}{4} = 0.4535R. \quad (B11)$$

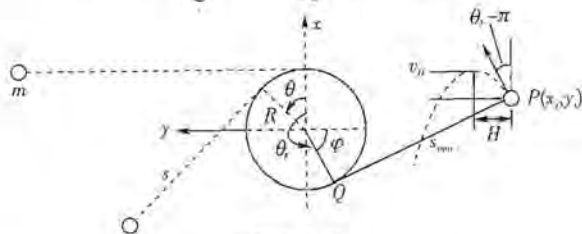


图 1-7-51

当  $\theta = \theta_c$  时, 质点的坐标由下列表式给出:

$$x_c = R \cos \theta_c - s_{\min} \sin \theta_c = -R \cos \frac{\pi}{8} + s_{\min} \sin \frac{\pi}{8} = 0.3587R.$$

$$y_c = R \sin \theta_c + s_{\min} \cos \theta_c = -R \sin \frac{\pi}{8} - s_{\min} \cos \frac{\pi}{8} = -3.479R.$$

显然,  $|y_c| > (R + H)$ , 因而质点可到达其最高位置而不与圆柱表面  $C$  部分



(1) 假定重物起始于  $O$  点以下  $h$  距离处, 如图 1-7-52 所示。

当重物下落距离  $D$  而停止运动后, 将机械能守恒定律应用于质点-重物系统, 有

$$-Mgh = E' - Mg(h+D), \quad (C1)$$

式中  $E'$  为重物停止运动后, 质点的总机械能。由此得

$$E' = MgD. \quad (C2)$$

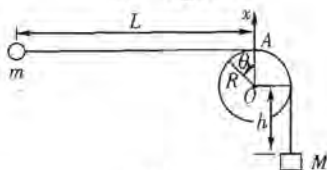


图 1-7-52

设细绳的总长度为  $A$ , 它在任意角位移  $\theta$  时的值应与  $\theta=0$  时的值相同, 即

$$A = L + \frac{\pi}{2}R + h = s + R\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + (h+D). \quad (C3)$$

注意到  $D = \alpha L$ , 引入  $l = L - D$ , 则

$$l = L - D = (1 - \alpha)L. \quad (C4)$$

由式(C3)(C4)得  $s = L - D - R\theta = l - R\theta$ . (C5)

重物停止运动后, 质点的总机械能应守恒, 根据式(C2), 现在式(C1)改变为

$$E' = MgD = \frac{1}{2}mv^2 - mg[R(1 - \cos\theta) + s\sin\theta]. \quad (C6)$$

由此得质点速率的平方为

$$v^2 = \left(s \frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2MgD}{m} + 2gR\left[1 - \cos\theta + \frac{s}{R}\sin\theta\right]. \quad (C7)$$

因式(B3)仍成立, 张力  $T$  由下式给定

$$-T + mg\sin\theta = m\left[-s\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]. \quad (C8)$$

由以上两式可得

$$\begin{aligned} T &= m\left[s\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + g\sin\theta\right] \\ &= \frac{mg}{s}\left[\frac{2M}{m}D + 2R(1 - \cos\theta) + 3s\sin\theta\right] \\ &= \frac{2mgR}{s}\left[\frac{MD}{mR} + (1 - \cos\theta) + \frac{3}{2}\left(\frac{l}{R} - \theta\right)\sin\theta\right]. \end{aligned} \quad (C9)$$

在得到最后一式时应用了式(C5)。

现引入函数  $f(\theta) = 1 - \cos\theta + \frac{3}{2}\left(\frac{l}{R} - \theta\right)\sin\theta$ . (C10)

由条件  $l = L - D \gg R$ , 上式可写为

$$f(\theta) \approx 1 + \frac{3}{2}\frac{l}{R}\sin\theta - \cos\theta = 1 + A\sin(\theta - \varphi). \quad (C11)$$



$$\text{式中 } A = \sqrt{1 + \left(\frac{3l}{2R}\right)^2}, \varphi = \arctan \frac{2R}{3l}. \quad (\text{C12})$$

由式(C11)可看出  $f(\theta)$  的极小值由下式给出:

$$f_{\min} = 1 - A = 1 - \sqrt{1 + \left(\frac{3l}{2R}\right)^2}. \quad (\text{C13})$$

由题意,当质点绕柱摆动时张力  $T$  始终保持为正(即绳始终伸直),由式(C9)可得一不等式

$$\frac{MD}{mR} + f_{\min} = \frac{M(L-l)}{mR} + 1 - \sqrt{1 + \left(\frac{3l}{2R}\right)^2} \geq 0. \quad (\text{C14})$$

$$\text{即 } \left(\frac{ML}{mR}\right) + 1 \geq \left(\frac{ML}{mR}\right) + \sqrt{1 + \left(\frac{3l}{2R}\right)^2} \approx \left(\frac{ML}{mR}\right) + \left(\frac{3l}{2R}\right). \quad (\text{C15})$$

由式(C4),则式(C15)可改写为

$$\left(\frac{ML}{mR}\right) + 1 \geq \left(\frac{ML}{mR} + \frac{3l}{2R}\right)(1 - \alpha). \quad (\text{C16})$$

略去量级为  $\frac{R}{L}$  及更高次项,上式导致

$$\alpha \geq 1 - \frac{\left(\frac{ML}{mR}\right) + 1}{\frac{ML}{mR} + \frac{3L}{2R}} = \frac{\left(\frac{3L}{2R}\right) - 1}{\frac{ML}{mR} + \frac{3L}{2R}} = \frac{1 - \frac{3L}{2R}}{\frac{2M}{3m} + 1} \approx \frac{1}{1 + \frac{2M}{3m}}. \quad (\text{C17})$$

$$\text{于是比值 } \frac{D}{L} \text{ 的临界值为 } \alpha_c = \frac{1}{1 + \frac{2M}{3m}}. \quad (\text{C18})$$

### 题 25. (2001·国际物理竞赛题)

#### 双星系统

(a)众所周知,大部分恒星构成双星系统.有一种双星系统由一个质量为  $m_0$ ,半径为  $R$  的寻常星和一个更大质量  $M$  的致密中子星相互围绕对方旋转组成.在下面的所有内容中,忽略地球的运动.对这个双星系统的观察得到下列信息:

1)寻常星的 1-7-53 最大角位移为  $\Delta\theta$ ,同时中子星的最大角位移为  $\Delta\varphi$ (图);

2)从图中一个最大位移状态(I)变到另一个最大位移状态(II)所需要时间为  $\tau$ ;

3)寻常星的辐射特性表明,其表面温度为  $T$ ,单位时间辐射到地球表面单位面积的能量为  $P$ ;

4)由于寻常星的引力场作用,这一辐射中的钙谱线与正常的波长  $\lambda_0$  相差  $\Delta\lambda$  (在这个计算中可认为波长为  $\lambda$  的光子的质量为  $\frac{h}{c\lambda}$ ).

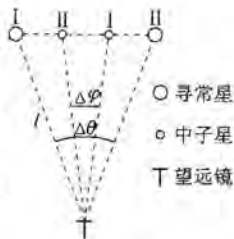


图 1-7-53

求从地球到这个双星系统距离  $l$  的表达式,只能用所观察到的量和普适常量



表示, 将你的结果填在答案纸上。

(b) 假定  $M \gg m_0$ , 寻常星基本上在半径为  $r_0$  的圆形轨道上绕中子星转动。假定寻常星开始以速度  $v_0$  (相对寻常星) 向中子星发射气体 (图 1-7-54)。假定在此问题中, 只考虑中子星的引力作用, 并忽略寻常星的轨道变化, 求气体与中子星的最近距离  $r_f$  (图 1-7-54)。将结果填写在答案纸上。

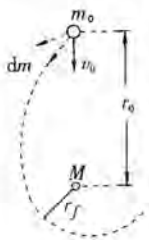


图 1-7-54

**【分析】** 此题用到万有引力、圆周运动及物理光学的知识, 需要用到圆周运动的动力学方程及能量守恒定律分析、求解。  
(b) 问还需用到角动量守恒定律。

**【解】** (a) 双星系统的质心可视为不动。设寻常星与质心距离为  $r_1$ , 中子星与质心距离为  $r_2$ , 由图 1-7-53 有

$$r_1 = l \cdot \frac{\Delta\theta}{2}, r_2 = l \cdot \frac{\Delta\varphi}{2}. \quad (1)$$

$$l = \frac{2(r_1 + r_2)}{\Delta\theta + \Delta\varphi}. \quad (2)$$

可见  $l$  的值有赖于  $r_1 + r_2$ 。由牛顿运动定律, 并注意到双星转动角速度  $\omega$  与观察量  $\tau$  的关系

$$\omega = \frac{2\pi}{2\tau} = \frac{\pi}{\tau}.$$

有

$$\frac{GMm_0}{(r_1 + r_2)^2} = m_0 \left( \frac{\pi}{\tau} \right)^2 r_1.$$

$$\frac{GMm_0}{(r_1 + r_2)^2} = M \left( \frac{\pi}{\tau} \right)^2 r_2.$$

由以上两式得

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{M}{m_0}.$$

及

$$Gm_0 = \left( \frac{\pi}{\tau} \right)^2 r_2 (r_1 + r_2)^2. \quad (3)$$

可见,  $r_1 + r_2$  的值依赖于  $m_0$ 。而  $m_0$  可由光谱的引力红移求得。由能量守恒, 并注意到光子质量与波长关系, 有

$$\frac{hc}{\lambda_0} - \frac{Gm_0}{R} = \frac{h}{c\lambda_0} = \frac{hc}{\lambda_0 + \Delta\lambda}.$$

由此可得

$$R = Gm_0 \frac{(\lambda_0 + \Delta\lambda)}{c^2 \Delta\lambda}. \quad (4)$$

于是,  $m_0$  又与  $R$  联系起来。但  $R$  可与观察量  $P$  相联系

$$P = \frac{\sigma T^4 \pi R^2}{4\pi l^2} = \frac{\sigma T^4 R^2}{l^2}. \quad (5)$$

由①②③④⑤式即可求得由观察量表示的  $l$  值

$$l = \left[ \frac{2\pi c}{\pi} (\Delta\theta + \Delta\varphi) \right] \left[ \frac{2\Delta\lambda \left( \frac{P}{\sigma T^4} \right)^{\frac{1}{2}}}{\Delta\varphi (\lambda_0 + \Delta\lambda)} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (6)$$



(b) 气体质元  $dm$  的角动量守恒

$$r_0^2 \omega_0 dm = r_f^2 \omega_f dm, \quad (7)$$

$$\omega_f = \frac{\omega_0 r_0^2}{r_f^2},$$

其中  $\omega_f$  为质元与中子星最靠近时的角速度,  $\omega_0$  则由原状态的动力学关系决定

$$\omega_0^2 = \frac{GM}{r_0^3}. \quad (8)$$

质元的能量守恒, 即有

$$\left(\frac{1}{2}\right) dm (\omega_0^2 r_0^2 + r_0^2 \omega_0^2) - \frac{GMdm}{r_0} = \left(\frac{1}{2}\right) dm r_f^2 \omega_f^2 - \frac{GMdm}{r_f}. \quad (9)$$

联立⑦⑧⑨式得

$$\omega_0^2 - \frac{GM}{r_0} = \frac{GM r_0}{r_f^2} - \frac{2GM}{r_f}.$$

即

$$\left(\omega_0^2 - \frac{GM}{r_0}\right) r_f^2 + 2GM r_f - GM r_0 = 0.$$

解  $r_f$  的二次方程, 得

$$r_f = \left( \frac{\omega_0 \sqrt{GM r_0 - GM}}{\omega_0^2 r_0 - GM} \right) r_0. \quad (10)$$

**题 26** (2000·国际物理奥赛题) 某蹦极运动员系在一根长弹性绳子的一端, 绳的另一端固定在一座高桥, 他自静止离桥向下面的河流下落, 未与水面相触, 他的质量为  $m$ , 绳子的自然长度为  $L$ , 绳子的力常数(使绳子伸长 1 m 所需的力)为  $k$ , 重力场强度为  $g$ , 求出下面各量的表达式.

- (1) 运动员在第一次达到瞬时静止前所落下的距离  $y$ ;
- (2) 他在下落过程中所达到的最大速率  $v$ ;
- (3) 他在第一次达到瞬时静止前的下落过程所经历的时间  $t$ .

设运动员可以视为系于绳子一端的质点, 与  $m$  相比绳子的质量可忽略不计, 当绳子在伸长时服从胡克定律, 在整个下落过程中空气的阻力可忽略不计.

**【分析】** 根据题设条件, 蹦极运动在下落过程中受重力及绳子对他的弹力作用, 且机械能守恒, 应用机械能守恒定律即能求出(1)(2)中的答案; 仔细分析运动员的下落运动, 它是由自由落体(绳伸直前)及简谐运动(绳发生伸长形变后)组成, 分别运用自由落体运动规律及简谐运动的方程即能求得运动的时间.

**【解】** (1) 由能量守恒, 有

$$mgy = \frac{1}{2} (k-L)^2.$$

解得  $y = \frac{kL + mg + \sqrt{2mgkL + m^2 g^2}}{k}$  (根号前应取正号).

(2) 最大速率发生于加速度为零, 即受力平衡时, 设此时绳伸长  $x$ , 则有

$$mg = kx.$$



由动能定理,得  $\frac{1}{2}mv_m^2 = mg(L+x) - \frac{1}{2}kx^2$ .

解以上两式,得  $v_m = \sqrt{2gL + \frac{mg^2}{k}}$ .

(3) 下落过程时间  $t$  为自由下落时间  $t_f$  与弹性绳做简谐运动至最大伸长时间  $t_s$  之和

$$t = t_f + t_s,$$

$$t_f = \sqrt{\frac{2L}{g}}.$$

运动员以自由下落末速  $v_f = gt_f = \sqrt{2gL}$  进入简谐运动,其速度可表示为

$$v = v_m \sin \omega t.$$

其中

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

而

$$v_f = v_m \sin \omega \tau.$$

$$\tau = \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{v_f}{v_m} = \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{\sqrt{2gL}}{v_m}.$$

$$t_s = \frac{T}{2} - \tau = \pi \sqrt{\frac{m}{k}} - \tau.$$

于是

$$\begin{aligned} t &= t_f + t_s \\ &= \sqrt{\frac{2L}{g}} + \pi \sqrt{\frac{m}{k}} - \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{\sqrt{2gL}}{v_m} \\ &= \sqrt{\frac{2L}{g}} + \sqrt{\frac{m}{k}} \left[ \pi - \arcsin \frac{\sqrt{2gL}}{\sqrt{2gL + \frac{mg^2}{k}}} \right]. \end{aligned}$$

也可表示为与此相当的其他形式.



# 第二章

## 热 学

### 第一节 气体和状态方程

**题 1** (2006·全国物理预赛题) 一根长为  $L$  (以厘米为单位) 的粗细均匀的、可弯曲的细管, 一端封闭, 一端开口, 处在大气中. 大气的压强与  $H$  cm 高的水银柱产生的压强相等, 已知管长  $L > H$ . 现将细管弯成 L 形, 如图 2-1-1 所示. 假定细管弯曲时, 管长和管的内径都不发生变化. 可以把水银从管口徐徐注入细管而不让细管中的气体泄出. 当细管弯成 L 形时, 以  $l$  表示其竖直段的长度, 问  $l$  取值满足什么条件时, 注入细管的水银量为最大值? 给出你的论证并求出水银量的最大值 (用水银柱的长度表示).



图 2-1-1

**【分析】** 将水银注入细管前后, 管中气体经历一个等温过程, 此时气体压强 (应考虑大气压强  $H$  和水银柱压强  $x$ ) 和其体积 (可用长度代之) 满足玻意耳定律. 当部分水银进入水平管后, 这部分水银不再对管中气体施压. 因而  $l$  的取值对水银注入量有重大影响. 故本题应由此分两种情况仔细讨论比较后求得水银注入量的最大值.

**【解】** 开始时竖直细管内空气柱长度为  $L$ , 压强为  $H$  (以 cmHg 为单位), 注入少量水银后, 气柱将因水银柱压力而缩短. 当管中水银柱长度为  $x$  时, 管内空气压强  $p = (H+x)$ , 根据玻意耳定律, 此时空气柱长度

$$L' = \frac{HL}{H+x} \quad (1)$$

空气柱上表面与管口的距离

$$d = L - L' = \frac{L}{H+x}x \quad (2)$$

开始时  $x$  很小, 由于  $L > H$ , 故



$$\frac{d}{H+x} > 1.$$

即水银柱上表面低于管口,可继续注入水银,直至  $d=x$  (即水银柱上表面与管口相平) 时为止. 何时水银柱表面与管口相平,可分下面两种情况讨论.

1. 水银柱表面与管口相平时,水银柱未进入水平管

此时水银柱的长度  $x \leq l$ , 由玻意耳定律有

$$(H+x)(L-x) = HL. \quad (3)$$

由③式可得

$$x = L - H. \quad (4)$$

由此可知,当  $l \geq L - H$  时,注入的水银柱的长度  $x$  的最大值

$$x_{\max} = L - H. \quad (5)$$

2. 水银柱表面与管口相平时,一部分水银进入水平管

此时注入水银柱的长度  $x > l$ , 由玻意耳定律有

$$(H+l)(L-x) = HL. \quad (6)$$

$$x = \frac{Ll}{H+l}. \quad (7)$$

$$l < x = \frac{Ll}{H+l}. \quad (8)$$

由⑧式得

$$l < L - H, \text{ 或 } l > H + l. \quad (9)$$

$$x = L - H - \frac{L}{H+l} < L - H. \quad (10)$$

即当  $l < L - H$  时,注入水银柱的最大长度  $x < x_{\max}$ .

由上讨论表明,当  $l \geq L - H$  时,可注入的水银量为最大,这时水银柱的长度为  $x_{\max}$ , 即⑤式.

**题 2** (1998·全国物理预赛题) 1 mol 理想气体缓慢地经历了一个循环过程,在  $p$ - $V$  图中这过程是一个椭圆,如图 2-1-2 所示. 已知此气体若处在与椭圆中心  $O$  点所对应的状态时,其温度为  $T_0 = 300$  K. 求在整个循环过程中气体的最高温度  $T_1$  和最低温度  $T_2$  各是多少?

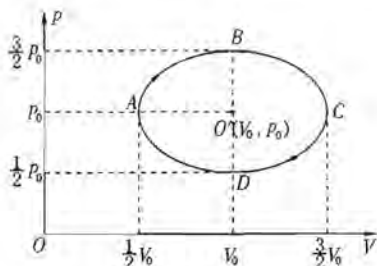


图 2-1-2

**【分析】** 由图可知,表示循环过程的椭圆曲线应与两个给定温度的等温线相



切,而等温线所对应的温度即为循环过程中的最高或最低温度.求解时首先应正确给出椭圆方程的函数表达式,再利用数学方程求出切点坐标即可.

**【解】** 在  $pV$  图中,描写此气体循环过程的椭圆方程为

$$\frac{(V-V_0)^2}{(\frac{1}{2}V_0)^2} + \frac{(p-p_0)^2}{(\frac{1}{2}p_0)^2} = 1. \quad (1)$$

现在考虑椭圆与温度为  $T$  的等温线

$$pV = RT. \quad (2)$$

的交点所对应的状态.一般来说,对给定温度  $T$  的等温线,它与椭圆有两个交点.而椭圆相切的等温线,它所对应的温度即为循环过程中的最高或最低温度.

①②两式可改写为

$$\left(\frac{V}{V_0} - 1\right)^2 + \left(\frac{p}{p_0} - 1\right)^2 = \frac{1}{4}. \quad (3)$$

$$\frac{pV}{p_0V_0} = \frac{RT}{p_0V_0} = \frac{T}{T_0}. \quad (4)$$

式中  $T_0 = \frac{p_0V_0}{R}$ , 即为  $O$  点上的温度.

$$\text{令} \quad \frac{V}{V_0} = x, \quad \frac{p}{p_0} = y.$$

则③④两式可改写成

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4}, \quad (5)$$

$$xy = C. \quad (6)$$

式中  $C = \frac{T}{T_0}$ , ⑤式又可改写成

$$(x+y-1)^2 - 2xy + 1 = \frac{1}{4}. \quad (7)$$

⑥⑦两式消去  $y$ , 得两曲线交点的  $x$  值应满足的方程式

$$x + \frac{C}{x} - 1 = \pm \sqrt{2C - \frac{3}{4}}. \quad (8)$$

由于此循环过程中  $x = \frac{V}{V_0} \geq \frac{1}{2}$ ,  $y = \frac{p}{p_0} \geq \frac{1}{2}$ , 故  $x+y-1 > 0$ , 上式右边应取“+”号, ⑧式可改写为

$$x^2 - \left(1 + \sqrt{2C - \frac{3}{4}}\right)x + C = 0. \quad (9)$$

这是  $x$  的二次方程, 它的两个根植就是等温线与椭圆的两个交点. 所求最高、最低温度相当于使曲线相切时的  $C$  值, 这时⑨式有等根, 即

$$\left(1 + \sqrt{2C - \frac{3}{4}}\right)^2 - 4C = 0. \quad (10)$$

由⑩式得  $4C^2 - 9C + \frac{49}{16} = 0.$



解得两曲线相切时的两个  $C$  值:

$$C_1 = \frac{9 + \sqrt{32}}{8} = 1.83.$$

$$C_2 = \frac{9 - \sqrt{32}}{8} = 0.418.$$

最后得:

$$\text{最高温度} \quad T_1 = C_1 T_0 = 549 \text{ K}.$$

$$\text{最低温度} \quad T_2 = C_2 T_0 = 125 \text{ K}.$$

**题 3** (2004 · 全国物理复赛题) 薄膜材料气密性能的优劣常用其透气系数来加以评判. 对于均匀薄膜材料, 在一定温度下, 某种气体通过薄膜透过的分子数  $N = k \frac{\Delta p S t}{d}$ , 其中  $t$  为渗透持续时间,  $S$  为薄膜的面积,  $d$  为薄膜的厚度,  $\Delta p$  为薄膜两侧气体的压强差.  $k$  称为该薄膜材料在该温度下对该气体的透气系数. 透气系数愈小, 材料的气密性能愈好.

图 2-1-3 为测定薄膜材料对空气的透气系数的一种实验装置示意图.  $EFGI$  为渗透室, U 形管左管上端与渗透室相通, 右管上端封闭; U 形管内横截面积  $A = 0.150 \text{ cm}^2$ . 实验中, 首先测得薄膜的厚度  $d = 0.66 \text{ mm}$ , 再将薄膜固定于图中  $CC'$  处, 从而把渗透室分为上下两部分. 上面部分的容积  $V_0 = 25.00 \text{ cm}^3$ , 下面部分连同 U 形管左管水面以上部分的总容积为  $V_1$ , 薄膜能够透气的面积  $S = 1.00 \text{ cm}^2$ . 找开开关  $K_1$ 、 $K_2$  与大气相通, 大气的压强  $p_1 = 1.00 \text{ atm}$ , 此时 U 形管右管中气柱长度  $H = 20.00 \text{ cm}$ ,  $V_1 = 5.00 \text{ cm}^3$ . 关闭  $K_1$ 、 $K_2$ , 打开开关  $K_3$ , 对渗透室上部分迅速充气至气体压强  $p_0 = 2.00 \text{ atm}$ , 关闭  $K_3$  并开始计时. 两小时后, U 形管左管中的水面高度下降了  $\Delta H = 2.00 \text{ cm}$ . 实验过程中, 始终保持温度为  $0^\circ \text{C}$ . 求该薄膜材料在  $0^\circ \text{C}$  时对空气的透气系数. (本实验中由于薄膜两侧的压强差在实验过程中不能保持恒定, 在压强差变化不太大的情况下, 可用计时开始时的压强差和计时结束时的压强差的平均值  $\overline{\Delta p}$  来代替公式中的  $\Delta p$ . 普适气体常量  $R = 8.31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $1.00 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ .)

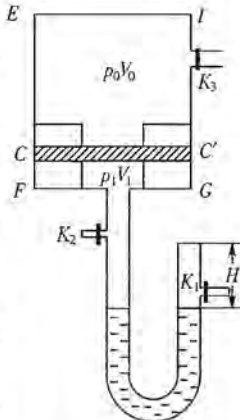


图 2-1-3

**【分析】** 由题意知测定气体渗透前后薄膜两侧的压强差  $\Delta p$  是解题的关键. 气体渗透过程中薄膜上方压强减小和薄膜下方压强的增加都是因为气体质量变化所引起的. 而压强的变化又会造成 U 形管中气体体积的变化. 利用实验结果, 灵活运用理想气体的状态方程, 根据题给定义即可求解.

**【解】** 开始时 U 形管右管中空气的体积和压强分别为

$$V_2 = HA.$$

$$p_2 = p_1.$$

①

经过 2 h, U 形管右管中空气的体积和压强分别为

$$V_2' = (H - \Delta H)A. \quad (2)$$

$$p_2' = \frac{p_2 V_2}{V_2'}. \quad (3)$$

渗透室下部连用 U 形管左管水面以上部分气体的总体积和压强分别为

$$V_1' = V_1 + \Delta HA. \quad (4)$$

$$p_1 = p_2' + 2\rho g \Delta H. \quad (5)$$

式中  $\rho$  为水的密度,  $g$  为重力加速度. 由理想气体状态方程  $pV = nRT$  可知, 经过 2 h, 薄膜下部增加的空气的摩尔数

$$\Delta n = \frac{p_1' V_1'}{RT} - \frac{p_1 V_1}{RT}. \quad (6)$$

在 2 h 内, 通过薄膜渗透过去的分子数

$$N = \Delta n N_A. \quad (7)$$

式中  $N_A$  为阿伏加德罗常量.

渗透室上部空气的摩尔数减少, 压强下降. 下降了  $\Delta p$ .

$$\Delta p = \frac{\Delta n RT}{V_0}. \quad (8)$$

经过 2 h 渗透室上部分中空气的压强为

$$p_0' = p_0 - \Delta p. \quad (9)$$

测试过程的平均压强差

$$\overline{\Delta p} = \frac{1}{2} [(p_0 - p_1) + (p_0' - p_1')]. \quad (10)$$

根据定义, 由以上各式和有关数据, 可求得该薄膜材料在  $0^\circ\text{C}$  时对空气的透气系数

$$k = \frac{Nd}{\Delta p t S} = 2.4 \times 10^{11} \text{ Pa}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}.$$

**题 4** (2002 · 全国物理竞赛题) 如图 2-1-4(a) 所示, 有两个截面为  $S$  的相同 U 形管 1, 2, 其内分别装有高度为  $h_1$  和  $h_2$ 、密度为  $\rho$  的液体. 现用同样截面的导管将两者在大气中密接起来, 如图 2-1-4(b) 所示. 导管中有一活塞  $D$ , 它把管中气体分成长度皆为  $L_0$  的两部分, 每部分中气体的压强皆为大气压  $p_0$ . 活塞与管壁间的最大静摩擦力为  $F$ . 现向 U 形管 1 开口端缓慢注入一定量的同种液体, 达到平衡时 U 形管 2 的左侧液面高度变为  $h_3$ . 试求注入液体的体积.

**【分析】** 在注入液体后, 系统各部分将达到一个新的平衡状态. 活塞口两边的气体也将经历等容变化, 考虑压强平衡, 玻-马定律认为液体的不可压缩性便可求得注入液体的体积.

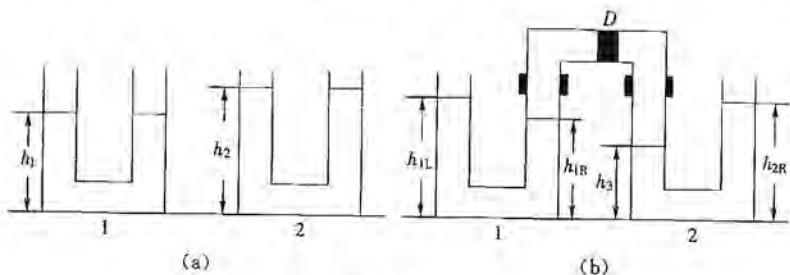


图 2-1-4

【解】 1. 设加入 U 形管 1 中的液体体积为  $V$ , 则这部分液体在 U 形管中的长度为

$$x = \frac{V}{S}. \quad (1)$$

令  $h_{1L}$ 、 $h_{1R}$  分别表示 U 形管 1 中左、右两侧液面的高度,  $h_{2R}$  表示 U 形管 2 右侧液面的高度, 根据液体的不可压缩性, 由图 2-1-4 可知

$$2h_1 + x = h_{1L} + h_{1R}. \quad (2)$$

$$h_{2R} + h_3 = 2h_2. \quad (3)$$

令  $p_L$  和  $p_R$  分别代表系统达到新的平衡后活塞  $D$  左、右两侧的气体压强, 由平衡条件可得

$$p_0 + \rho g h_{1L} = p_L + \rho g h_{1R}. \quad (4)$$

$$p_R + \rho g h_3 = p_0 + \rho g h_{2R}. \quad (5)$$

$$p_L = p_R + \frac{F}{S}. \quad (6)$$

以  $L_L$ 、 $L_R$  分别代表系统达到新的平衡后活塞  $D$  左、右两侧气柱的长度. 若将中间密封气体视为理想气体, 运用玻-马定律可以分别得到

$$p_0 L_0 = p_L L_L = p_R L_R. \quad (7)$$

因为在液体注入前后管子各部分的长度是不变的, 因此可有关系式

$$h_1 + h_2 + 2L_0 = h_{1R} + h_3 + L_L + L_R. \quad (8)$$

2. 最后解得

$$\begin{aligned} x &= h_{1L} + h_{1R} - 2h_1 = 2(h_2 - h_1 - h_3) + \frac{F}{\rho g S} + 2h_{1R} \\ &= 4(h_2 - h_3 + L_0) + \frac{F}{\rho g S} - \frac{2p_0 L_0}{p_0 + 2\rho g(h_2 - h_3)} - \frac{2p_0 L_0}{p_0 + 2\rho g(h_2 - h_3) + \frac{F}{S}} \end{aligned} \quad (9)$$

由①和⑨式可知, 要注入液体的体积应为

$$V = 4S(h_2 - h_3 + L_0) + \frac{F}{\rho g} - \frac{2Sp_0 L_0}{p_0 + 2\rho g(h_2 - h_3)} - \frac{2Sp_0 L_0}{p_0 + 2\rho g(h_2 - h_3) + \frac{F}{S}}$$

## 第二节 热力学第一定律

**题 1** (2007·全国物理预赛题) 如图 2-2-1 所示, 绝热的活塞 S 把一定质量的稀薄气体(可视为理想气体)密封在水平放置的绝热气缸内. 活塞可在气缸内无摩擦地滑动. 气缸左端的电热丝可通弱电流对气缸内气体十分缓慢地加热. 气缸处在大气中, 大气压强为  $p_0$ . 初始时, 气体的体积为  $V_0$ , 压强为  $p_0$ . 已知 1 mol 该气体温度升高 1 K 时其内能的增量为已知恒量  $c$ . 求以下两种过程中电热丝传给气体的热量  $Q_1$  与  $Q_2$  之比:

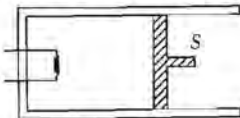


图 2-2-1

1. 从初始状态出发, 保持活塞 S 位置固定, 在电热丝中通以弱电流, 并持续一段时间, 然后停止通电, 待气体达到热平衡时, 测得气体的压强为  $p_1$ ;

2. 仍从初始状态出发, 让活塞处在自由状态, 在电热丝中通以弱电流, 也持续一段时间, 然后停止通电, 最后测得气体的体积为  $V_2$ .

**【分析】** 在分清两过程性质的基础上运用理想气体状态方程以及热力学第一定律便可求解.

**【解】** 以  $m$  表示气缸内气体的质量,  $\mu$  表示其摩尔质量. 当气体处在初始状态时, 已知其压强为  $p_0$ , 体积为  $V_0$ . 设温度为  $T_0$ , 由理想气体状态方程有

$$p_0 V_0 = \frac{m}{\mu} RT_0. \quad (1)$$

在过程 1 中, 对气体加热时, 活塞 S 位置固定不动, 气体体积保持不变, 气体对外不做功. 根据热力学第一定律, 有

$$Q_1 = \frac{m}{\mu} c (T_1 - T_0). \quad (2)$$

式中  $T_1$  为加热后气体的温度. 根据题意, 这时气体的压强为  $p_1$ . 由理想气体状态方程可知

$$p_1 V_0 = \frac{m}{\mu} RT_1. \quad (3)$$

$$\text{由 } (1) \sim (3) \text{ 式得 } Q_1 = \frac{c}{R} V_0 (p_1 - p_0). \quad (4)$$

在过程 2 中, 对气体加热时, 活塞要移动, 气体的压强保持  $p_0$  不变, 体积由  $V_0$  变为  $V_2$ , 气体对外做功. 根据热力学第一定律, 有

$$Q_2 = \frac{m}{\mu} c (T_2 - T_0) + p_0 (V_2 - V_0). \quad (5)$$

式中  $T_2$  为加热后气体的温度. 由理想气体状态方程可知

$$p_0 V_2 = \frac{m}{\mu} RT_2. \quad (6)$$



$$\text{由①⑤⑥三式得} \quad Q_2 = \frac{(c+R)}{R} p_0 (V_2 - V_0). \quad (7)$$

$$\text{由④⑦两式得} \quad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{c}{c+R} \frac{(p_1 - p_0) V_0}{(V_2 - V_0) p_0}.$$

**题 2** (2000·全国物理预赛题) 绝热容器 A 经一阀门与另一容积比 A 的容积大得很多的绝热容器 B 相连. 开始时阀门关闭, 两容器中盛有同种理想气体, 温度均为  $30^\circ\text{C}$ , B 中气体的压强为 A 中的两倍. 现将阀门缓慢打开, 直至压强相等时关闭. 问此时容器 A 中气体的温度为多少? 假设在打开到关闭阀门的过程中处在 A 中的气体与处在 B 中的气体之间无热交换. 已知每摩尔该气体的内能为  $E = \frac{5}{2}RT$ , 式中  $R$  为普适气体恒量,  $T$  是绝对温度.

**【分析】** 打开阀门后, B 中部分气体进入 A 容器, B 中气体对这部分空气所做功就等于 A 中气体的内能增量. 由此可求得 A 中气体的温度.

**【解】** 设气体的摩尔质量为  $M$ , 容器 A 的体积为  $V$ , 阀门打开前, 其中气体的质量为  $m$ , 压强为  $p$ , 温度为  $T$ . 由  $pV = \frac{m}{M}RT$ .

$$\text{得} \quad m = \frac{MpV}{RT}. \quad (1)$$

因为容器 B 很大, 所以在题中所述的过程中, B 中气体的压强和温度皆可视为不变. 根据题意, 打开阀门又关闭后, A 中气体的压强变为  $2p$ , 若其温度为  $T'$ , 质量为  $m'$ , 则有

$$m' = \frac{2MpV}{RT'}. \quad (2)$$

进入 A 的气体的质量

$$\Delta m = m' - m = \frac{MpV}{R} \left( \frac{2}{T'} - \frac{1}{T} \right). \quad (3)$$

设这些气体处在容器 B 中所占的体积为  $\Delta V$ , 则

$$\Delta V = \frac{\Delta m}{2Mp} RT. \quad (4)$$

为把这些气体压入容器 A, 容器 B 中其他气体对这些气体做的功为

$$W = 2p\Delta V. \quad (5)$$

$$\text{由③④⑤式得} \quad W = pV \left( \frac{2T}{T'} - 1 \right). \quad (6)$$

A 中气体内能的变化

$$\Delta E = \frac{m'}{M} \times 2.5R(T' - T). \quad (7)$$

因为与外界没有热交换, 根据热力学第一定律有

$$W = \Delta E. \quad (8)$$

$$\text{由②⑥⑦和⑧式得} \quad \left( \frac{2T}{T'} - 1 \right) = 2 \times 2.5 \left( 1 - \frac{T}{T'} \right). \quad (9)$$

结果为  $T' = 353(\text{K})$ .

【讨论】 开闭阀门过程中, A 中气体质量是变化的, 但热力学第一定律仍然适用, 这一点应值得读者思考.

**题 3** (1999·全国物理预赛题) 如图 2-2-2 所示, 两个截面相同的圆柱形容器, 右边容器高为  $H$ , 上端封闭, 左边容器上端是一个可以在容器内无摩擦滑动的活塞. 两容器由装有阀门的极细管道相连通, 容器、活塞和细管都是绝热的. 开始时, 阀门关



图 2-2-2

闭, 左边容器中装有热力学温度为  $T_0$  的单原子理想气体, 平衡时活塞到容器底的距离为  $H$ , 右边容器内为真空. 现将阀门缓慢打开, 活塞便缓慢下降, 直至系统达到平衡. 求此时左边容器中活塞的高度和缸内气体的温度.

提示:  $1 \text{ mol}$  单原子理想气体的内能为  $\frac{3}{2}RT$ , 其中  $R$  为摩尔气体常量,  $T$  为气体的热力学温度.

【分析】 在上述过程中, 气体占有体积增大, 但压强不变, 活塞对气体所做功转变为气体的内能. 运用气态方程和热力学第一定律本题即可求解.

【解】 设容器的截面积为  $A$ , 封闭在容器中的气体为  $n \text{ mol}$ , 阀门打开前, 气体的压强为  $p_0$ . 由理想气体状态方程有

$$p_0 AH = nRT_0. \quad (1)$$

打开阀门后, 气体通过细管进入右边容器. 活塞缓慢向下移动, 气体作用于活塞的压强仍为  $p_0$ . 活塞对气体的压强也是  $p_0$ . 设达到平衡时活塞的高度为  $x$ , 气体的温度为  $T$ , 则有

$$p_0 (H+x)A = nRT. \quad (2)$$

根据热力学第一定律, 活塞对气体所做的功等于气体内能的增量, 即

$$p_0 (H-x)A = \frac{3}{2}nR(T-T_0). \quad (3)$$

由①②③式解得 
$$x = \frac{2}{5}H,$$

$$T = \frac{7}{5}T_0.$$

**题 4** (2003·全国物理复赛题) U 形管的两支管 A、B 和水平管 C 都是由内径均匀的细玻璃管做成的, 它们的内径与管长相比都可忽略不计. 已知三部分的截面积分别为  $S_A = 1.0 \times 10^{-2} \text{ cm}^2$ ,  $S_B = 3.0 \times 10^{-2} \text{ cm}^2$ ,  $S_C = 2.0 \times 10^{-2} \text{ cm}^2$ . 在 C 管中有一段空气柱, 两侧被水银封闭. 当温度为  $t_1 = 27^\circ\text{C}$  时, 空气柱长为  $l = 30 \text{ cm}$  (如图 2-2-3 所示), C 中气柱两侧的水银柱长分别为  $a = 2.0 \text{ cm}$ ,  $b = 3.0 \text{ cm}$ , A、B 两支管都很长, 其中的水银柱高均为  $h = 12 \text{ cm}$ . 大气压强保持为  $p_0 = 76 \text{ cm Hg}$  不变. 不考虑温度变化时管和水银的热膨胀. 试求气柱中空气温度缓慢升高到  $t = 97^\circ\text{C}$  时空气的体积.

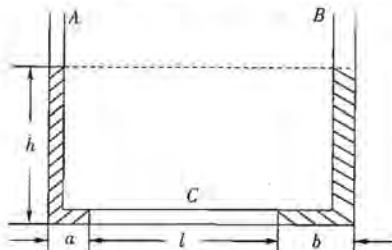


图 2-2-3

**【分析】** 由于 B 管截面积是 A 管的 3 倍, 故在气体膨胀时气柱右侧的水银将首先被全部压入 B 管中, 以此为切入点先计算气体温度, 再与题给温度比较才能判断实际情况.

**【解】** 在温度为  $T_1 = (27 + 273) \text{K} = 300 \text{K}$  时, 气柱中的空气的压强和体积分别为

$$p_1 = p_0 + h, \quad (1)$$

$$V_1 = lS_C. \quad (2)$$

当气柱中空气的温度升高时, 气柱两侧的水银将被缓慢压入 A 管和 B 管. 设温度升高到  $T_2$  时, 气柱右侧水银刚好全部压到 B 管中, 使管中水银高度增大

$$\Delta h = \frac{bS_C}{S_B}. \quad (3)$$

由此造成气柱中空气体积的增大量为

$$\Delta V' = bS_C. \quad (4)$$

与此同时, 气柱左侧的水银也有一部分进入 A 管, 进入 A 管的水银使 A 管中的水银高度也应增大  $\Delta h$ , 使两支管的压强平衡, 由此造成气柱空气体积增大量为

$$\Delta V'' = \Delta h S_A. \quad (5)$$

所以, 当温度为  $T_2$  时空气的体积和压强分别为

$$V_2 = V_1 + \Delta V' + \Delta V''. \quad (6)$$

$$p_2 = p_1 + \Delta h. \quad (7)$$

由状态方程知

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}. \quad (8)$$

由以上各式, 代入数据可得  $T_2 = 347.7 \text{K}$ . (9)

此值小于题给的最终温度  $T = 273 + t = 370 \text{K}$ , 所以温度将继续升高. 从这时起, 气柱中的空气做等压变化, 当温度到达  $T$  时, 气柱体积为

$$V = \frac{T}{T_2} V_2. \quad (10)$$

代入数据可得

$$V = 0.72 \text{cm}^3.$$

**题 5** (2002·全国物理复赛题) 如图 2-2-4 所示, 三个绝热的、容积相同的球状容器 A、B、C, 用带有阀门  $K_1$ 、 $K_2$  的绝热细管连通, 相邻两球球心的高度差  $h = 1.00 \text{m}$ . 初始时, 阀门是关闭的, A 中装有 1 mol 的氦(He)、B 中装有 1 mol 的氦



(Kr)、C 中装有 1 mol 的氙(Xe),三者的温度和压强都相同,气体均可视为理想气体.现打开阀门  $K_1$ 、 $K_2$ ,三种气体相互混合,最终每一种气体在整个容器中均匀分布,三个容器中气体的温度相同.求气体温度的改变量.已知三种气体的摩尔质量分别为

$$\mu_{\text{He}} = 4.003 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\mu_{\text{Kr}} = 83.8 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\mu_{\text{Xe}} = 131.3 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$$

在体积不变时,这三种气体任何一种每摩尔温度升高 1 K,所吸收的热量均为  $\frac{3R}{2}$ .  $R$  为普适气体常量.

**【分析】** 在三种气体相互混合过程中,系统的势能发生变化并转化为系统的内能,从而引起气体温度的改变.

**【解】** 根据题设的条件,可知:开始时 A 中氦的质量  $m_{\text{He}} = 4.003 \times 10^{-3} \text{ kg}$ , B 中氪气的质量  $m_{\text{Kr}} = 83.8 \times 10^{-3} \text{ kg}$ , C 中氙气的质量  $m_{\text{Xe}} = 131.3 \times 10^{-3} \text{ kg}$ . 三种气体均混合后, A 中的 He 有  $\frac{1}{3}$  mol 降入 B 中,有  $\frac{1}{3}$  mol 降入 C 中, He 的重力势能增量为

$$\Delta E_{\text{He}} = \frac{1}{3} m_{\text{He}} g(-h) + \frac{1}{3} m_{\text{He}} g(-2h) = -m_{\text{He}} gh. \quad (1)$$

B 中的 Kr 有  $\frac{1}{3}$  mol 升入 A 中,有  $\frac{1}{3}$  mol 降入 C 中. Kr 的重力势能增量为

$$\Delta E_{\text{Kr}} = \frac{1}{3} m_{\text{Kr}} gh + \frac{1}{3} m_{\text{Kr}} g(-h) = 0. \quad (2)$$

C 中的 Xe 有  $\frac{1}{3}$  mol 升入 A 中,有  $\frac{1}{3}$  mol 升入 B 中. Xe 的重力势能增量为

$$\Delta E_{\text{Xe}} = \frac{1}{3} m_{\text{Xe}} gh + \frac{1}{3} m_{\text{Xe}} g 2h = m_{\text{Xe}} gh. \quad (3)$$

混合后,三种气体的重力势能共增加

$$\Delta E_p = \Delta E_{\text{He}} + \Delta E_{\text{Kr}} + \Delta E_{\text{Xe}} = (m_{\text{Xe}} - m_{\text{He}}) gh. \quad (4)$$

因球与外界绝热,也没有外力对气体做功,故重力势能的增加必然引起内能的减少.在体积不变时,气体不做功.由热力学第一定律可知,此时传给气体的热量应等于气体内能的增量.但因理想气体的内能只由温度决定,与体积无关,故只要温度改变量相同,则体积不变条件下内能的增量也就是任何过程中理想气体内能的增量.根据题给的已知条件,注意到本题中所考查的理想气体共有 3 mol,故有

$$\Delta E_p = -3 \times \frac{3}{2} R \Delta T. \quad (5)$$

上式中右方为气体内能减少量,  $\Delta T$  表示气体温度的增量,由④⑤两式得

$$\Delta T = -\frac{2(m_{\text{Xe}} - m_{\text{He}}) gh}{9R}. \quad (6)$$

将已知数据代入,注意到  $R = 8.31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ ,

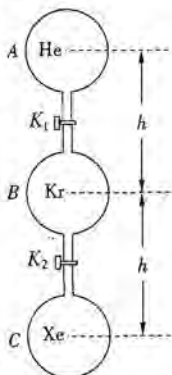


图 2-2-4



可得

$$\Delta T = -3.3 \times 10^{-2} \text{ K}$$

⑦

即混合后气体温度降低  $3.3 \times 10^{-2} \text{ K}$  (如果学生没记住  $R$  的数值,  $R$  的值可用标准状态的压强  $p_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ , 温度  $T_0 = 273.13 \text{ K}$  和  $1 \text{ mol}$  理想气体在标准状态下的体积  $V_0 = 2.24 \times 10^{-2} \text{ m}^3$  求得, 即  $R = \frac{p_0 V_0}{T_0}$ ).

**题 6** (2003 · 全国物理竞赛题) 5 个质量相等的匀质球, 其中 4 个半径均为  $a$  的球, 静止放在半径为  $R$  的半球形碗内, 它们的球心在同一水平内, 另 1 个半径为  $b$  的球放在 4 球之上. 设接触面都是光滑的, 试求碗的半径  $R$  的值满足什么条件时下面的球将相互分离.

**【分析】** 这是一道静力学的平衡问题, 在进行受力分析时, 注意利用几何对称性.

**【解】** 设半径为  $b$  的球放在 4 个球上后, 下面 4 个球的位置未变. 以  $m$  表示每个球的质量, 下面 4 个球的球心形成一个位于水平面内的正方形  $ABCD$ , 俯视图如图 2-2-5 所示.  $O$  为正方形对角线的交点, 各球之间的相互作用力大小均为  $F_1$ . 根据对称性, 并注意到接触面都是光滑的, 可知每个球受到相邻两球作用力的合力都为  $\sqrt{2}F_1$ , 方向沿对角线.

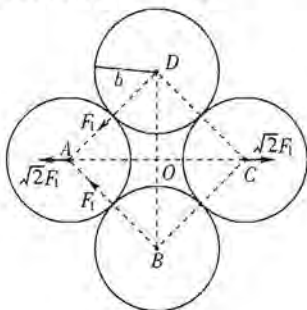


图 2-2-5

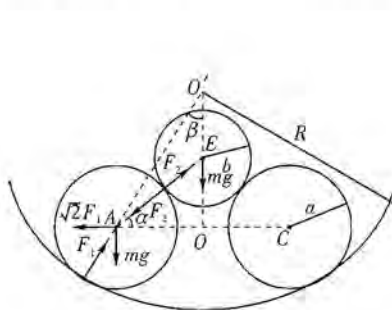


图 2-2-6

由几何对称性分析, 可知对角线  $AC$ 、上面球的球心  $E$  和碗的球心  $O'$  应在同一竖直平面内, 如图 2-2-6 所示. 设上面球与下面每个球的相互作用力的大小均为  $F_2$ , 对  $A$  球,  $F_2$  的方向沿球心  $A$ 、 $E$  连线. 平衡时对半径  $b$  的球有

$$mg = 4F_2 \sin \alpha \quad (1)$$

式中  $\alpha$  是球心连线  $AE$  与水平线  $AC$  之间的夹角. 有

$$\cos \alpha = \frac{AO}{AE} = \frac{\sqrt{2}a}{a+b} \quad (2)$$

对于下面每个球, 如球  $A$ , 受到的作用力有重力  $mg$ ,  $B$ 、 $D$  两球对它的作用的合力  $\sqrt{2}F_1$ , 上面球的作用力  $F_2$  和碗面的作用力  $F_3$ . 由于体系对称且接触面光滑, 各力均通过球心  $A$ ,  $F_3$  还通过  $O'$ , 平衡时有

$$\sqrt{2}F_1 + F_2 \cos \alpha - F_3 \sin \beta = 0 \quad (3)$$

$$F_3 \cos \beta - mg - F_2 \sin \alpha = 0 \quad (4)$$

式中  $\beta$  是  $F_3$  方向与竖直线的夹角, 有

$$\sin\beta = \frac{AO}{AO'} = \frac{\sqrt{2}a}{R-a}. \quad (5)$$

由式①可得

$$F_2 = \frac{mg}{4\sin\alpha}. \quad (6)$$

由式④和⑥可得

$$F_3 = \frac{5mg}{4\cos\beta}. \quad (7)$$

由式③⑥和⑦可得

$$F_1 = \frac{mg}{4\sqrt{2}}(5\tan\beta - \cot\alpha). \quad (8)$$

如果  $F_1 \geq 0$ , 表示下面的 4 个球相互接触, 4 个球在原来的位置;

如果  $F_1 < 0$ , 则下面的 4 个球将相互分离. 当下面的 4 个球分离时, 由式⑧得

$$5\tan\beta - \cot\alpha < 0. \quad (9)$$

利用②和⑤, 式⑨化为

$$\frac{5\sqrt{2}a}{\sqrt{R^2 - 2Ra - a^2}} < \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{b^2 + 2ab - a^2}}. \quad (10)$$

解式⑩不等式, 可得  $R > \sqrt{25b^2 + 50ab - 23a^2} + a$ .

即碗的半径  $R$  满足上式时, 下面的球将分离.

要式⑩有解, 应有

$$25b^2 + 50ab - 23a^2 \geq 0. \quad (12)$$

即

$$b \geq \left(\frac{4}{5}\sqrt{3} - 1\right)a. \quad (13)$$

由于下面各球距  $O$  的最小距离为  $(\sqrt{2}-1)a$ , 现上面的球能放在 4 个球的上面, 表明

$$b > (\sqrt{2}-1)a. \quad (14)$$

而  $\sqrt{2} > \frac{4\sqrt{3}}{5}$ , 所以只要第 5 个球能够放在 4 个球的上面, 式⑫一定成立.

**题 7** (2006·亚洲物理奥赛题) 不考虑质量的可移动活塞把容器分成两个部分, 容器对环境是绝热的, 容器的一部分有  $m_1 = 3.00 \text{ g}$  的双原子氢气, 温度是  $T_{10} = 300 \text{ K}$ , 另一部分有  $m_2 = 16.00 \text{ g}$  的双原子氧气, 温度是  $T_{20} = 400 \text{ K}$ . 氢和氧的摩尔质量分别为  $\mu_1 = 2.00 \text{ g/mol}$  和  $\mu_2 = 32.00 \text{ g/mol}$ . 气体普适常数  $R = 8.31 \text{ J/(K} \cdot \text{mol)}$ . 氢气和氧气之间的活塞有轻微的导热, 最终系统的温度达到平衡, 所有的过程都是准静态的.

(1) 系统最终的温度  $T$  是多少?

(2) 系统最终压强  $p_f$  和初始压强  $p_i$  之比有多大?

(3) 从氧气传递给氢气的热量  $Q$  是多少?

**【分析】** 由题意知容器内的气体实质为一个孤立系统, 任一时刻两部分气体内能之和不变, 能量通过活塞做功和导热在两部分气体之间流动. 运用能量守恒定律(含热力学第一定律)和理想气体状态方程及微分式等即可求解本题.

**【解】** (1) 题设气体容器和外界隔绝, 且分隔两气室的活塞不具质量, 故容器



内的气体系统(氢气和氧气)在准静态的变化过程中,对外界的热量交换为零,所做的总功也为零,因此该气体系统在任一时刻的总内能皆守恒.若容器内氢和氧的温度分别为  $T_1$  和  $T_2$ ,则

$$\frac{m_1}{\mu_1} C_V T_1 + \frac{m_2}{\mu_2} C_V T_2 = \frac{m_1}{\mu_1} C_V T_{10} + \frac{m_2}{\mu_2} C_V T_{20}. \quad (11)$$

式中  $\mu_1$  和  $\mu_2$  分别为氢和氧的摩尔质量,双原子气体的定容摩尔热容  $C_V = \frac{5}{2}R$ . 由于题设活塞具有微弱的导热性,当气体系统达到最后的平衡状态时,两气室的温度相等,即系统最后的平衡温度为

$$T = \frac{\frac{m_1}{\mu_1} T_{10} + \frac{m_2}{\mu_2} T_{20}}{\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}} = \frac{2.00 \times 300 + \frac{16.00}{32.00} \times 400}{2.00 + \frac{16.0}{32.00}} = 325 \text{ K}. \quad (12)$$

(2)由上式的平衡温度可知,氧气的温度下降,热量由氧气经由活塞的热传导,输入至氢气而使其温度升高.结果使氧气室的体积缩小,而氢气室的体积则增大,活塞往氧气室的方向移动.由于活塞的质量为零,故在气体变化的准静态过程中,两气室的压强相等,用  $p$  表示.利用理想气体状态方程  $pV = \frac{m}{\mu}RT$ ,可得

$$p\Delta V_1 + V_1 \Delta p = \frac{m_1}{\mu_1} R \Delta T_1. \quad (13)$$

$$p\Delta V_2 + V_2 \Delta p = \frac{m_2}{\mu_2} R \Delta T_2. \quad (14)$$

式中  $V_1$  和  $V_2$  分别为氢气和氧气的体积.由于容器的总体积  $V = V_1 + V_2$  固定,故  $\Delta V_1 + \Delta V_2 = 0$ .将⑬和⑭两式相加,并利用将⑪式微分的结果,得

$$(V_1 + V_2) \Delta p = R \left( \frac{m_1}{\mu_1} \Delta T_1 + \frac{m_2}{\mu_2} \Delta T_2 \right) = 0, \Delta p = 0. \quad (15)$$

亦即在气体变化的准静态过程中,气体的压强保持不变,即  $p_f = p_i$ ,故最后压强  $p_f$  和初始压强  $p_i$  的比值为 1.

(3)氧气的内能变化量为

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{m_2}{\mu_2} \left[ \frac{5}{2} R (T - T_{20}) \right] \\ &= \frac{16.0}{32.0} \left[ \frac{5}{2} \times 8.31 \times (325 - 400) \right] = -779 \text{ J}. \end{aligned}$$

在气体变化的准静态过程中,氧气的体积缩小而对外做负功,利用⑭和⑮两式的结果,可得

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_{20}}^{V_2} p dV = p \Delta V_2 = \frac{m_2}{\mu_2} R \Delta T_2 \\ &= \frac{16.0}{32.0} \times 8.31 \times (325 - 400) = -312 \text{ J}. \end{aligned}$$

由热力学第一定律  $\Delta U = Q - W$ ,可得自氧传至氢的总热量为

$$Q = \Delta U + W = (-779) + (-312) = -1091 \text{ J.}$$

式中的负号只是表示热量自氧气传出.

### 第三节 物性与热传递

**题 1** (2003·全国物理预赛题) 在野外施工中,需要使质量  $m=4.20 \text{ kg}$  的铝合金构件升温.除了保温瓶中尚存有温度  $t=90^\circ\text{C}$  的  $1.200 \text{ kg}$  的热水外,无其他热源.试提出一个操作方案,能利用这些热水使构件从温度  $t_0=10.0^\circ\text{C}$  升温到  $66.0^\circ\text{C}$  以上(含  $66.0^\circ\text{C}$ ),并通过计算验证你的方案.已知铝合金的比热容  $c=0.880 \times 10^3 \text{ J} \cdot (\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})^{-1}$ ,水的比热容  $c_0=4.20 \times 10^3 \text{ J} \cdot (\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})^{-1}$ ,不计向周围环境散失的热量.

**【分析】** 本题涉及到这样一个有趣的问题:即如何充分利用物体的热能.试想有以下两个方案:一是将全部热水一次性与构件混合,二是将热水分若干次与构件依次混合,显然最终情况会不一样.建议读者首先从这一点进行思考.

**【解】** 1. 操作方案:将保温瓶中  $t=90.0^\circ\text{C}$  的热水分若干次倒出来.第一次先倒出一部分,与温度为  $t_0=10.0^\circ\text{C}$  的构件充分接触,并达到热平衡,构件温度已升高到  $t_1$ ,将这部分温度为  $t_1$  的水倒掉.再从保温瓶倒出一部分热水,再次与温度为  $t_1$  的构件充分接触,并达到热平衡,此时构件温度已升高到  $t_2$ ,再将这些温度为  $t_2$  的水倒掉.然后再从保温瓶中倒出一部分热水来使温度为  $t_2$  的构件升温……直到最后一次,将剩余的热水全部倒出来与构件接触,达到热平衡.只要每部分水的质量足够小,最终就可使构件的温度达到所要求的值.

2. 验证计算:例如,将  $1.200 \text{ kg}$  热水分 5 次倒出来,每次倒出  $m_0=0.240 \text{ kg}$ ,在第一次使热水与构件达到热平衡的过程中,水放热为

$$Q_1 = c_0 m_0 (t - t_1). \quad \textcircled{1}$$

$$\text{构件吸热为} \quad Q_1' = cm(t_1 - t_0). \quad \textcircled{2}$$

$$\text{由 } Q_1 = Q_1' \text{ 及题给数据,可得 } t_1 = 27.1^\circ\text{C}. \quad \textcircled{3}$$

同理,第二次倒出  $0.240 \text{ kg}$  热水后,可使构件升温到

$$t_2 = 40.6^\circ\text{C}. \quad \textcircled{4}$$

依次计算  $t_1 \sim t_5$  的数值,分别列在下表中.

倒水次数/次	1	2	3	4	5
平衡温度/ $^\circ\text{C}$	27.1	40.6	51.2	59.5	66.0

可见  $t_5=66.0^\circ\text{C}$ ,符合要求.

附:若将  $1.200 \text{ kg}$  热水分 4 次倒,每次倒出  $0.300 \text{ kg}$ ,依次算出  $t_1 \sim t_4$  的数值,如下表中的数据:



倒水次数/次	1	2	3	4
平衡温度/ $^{\circ}\text{C}$	30.3	45.50	56.8	65.2

由于  $t_4 = 65.2^{\circ}\text{C} < 66.0^{\circ}\text{C}$ , 所以如果将热水等分后倒到构件上, 则倒出次数不能少于 5 次.

**题 2** (2001·全国物理预赛题) 物理小组的同学在寒冷的冬天做了一个这样的实验: 他们把一个实心的大铝球加热到某温度  $t$ , 然后把它放在结冰的湖面上(冰层足够厚), 铝球便逐渐陷入冰内. 当铝球不再下陷时, 测出球的最低点陷入冰中的深度  $h$ . 将铝球加热到不同的温度, 重复上述实验 8 次, 最终得到如下数据:

实验顺序数	1	2	3	4	5	6	7	8
热铝球的温度 $t/^{\circ}\text{C}$	55	70	85	92	104	110	120	140
陷入深度 $h/\text{cm}$	9.0	12.9	14.8	16.0	17.0	18.0	17.0	16.8

已知铝的密度约为冰的密度的 3 倍, 设实验时的环境温度及湖面冰的温度均为  $0^{\circ}\text{C}$ . 已知此情况下, 冰的溶解热  $\lambda = 3.34 \times 10^5 \text{ J/kg}$ .

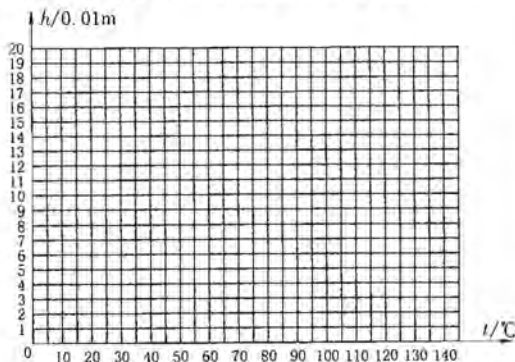


图 2-3-1

- (1) 试采用以上某些数据估算铝的比热容  $c$ ;
- (2) 对未被你采用的实验数据, 试说明不采用的原因, 并作出解释.

**【分析】** 本题可利用实验数据用作图法求解. 在处理实验数据时应先弄清铝球下陷深度  $h$  与被其熔化的冰的体积之间的定量关系. 由于铝的比热容可视作常数, 因而正确的实验数据在图中可拟合成一. 对于偏离该直线较远的数据不宜采用.

**【解】** (1) 铝球放热, 使冰熔化. 设当铝球的温度为  $t_0$  时, 能熔化冰的最大体积恰与半个铝球的体积相等, 即铝球的最低点下陷的深度  $h$  与球的半径  $R$  相等. 当热铝球的温度  $t > t_0$  时, 铝球最低点下陷的深度  $h > R$ , 熔化的冰的体积等于一个圆柱体的体积与半个铝球的体积之和, 如图 2-3-2.

设铝的密度为  $\rho_{\text{Al}}$ , 比热为  $c$ , 冰的密度为  $\rho$ , 溶解热为  $\lambda$ , 则铝球的温度从  $t^{\circ}\text{C}$  降到  $0^{\circ}\text{C}$  的过程中, 放出的热量

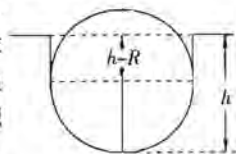


图 2-3-2

$$Q_1 = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_{\text{冰}} c t. \quad (1)$$

熔化的冰吸收的热量

$$Q_2 = \rho [\pi R^2 (h - R) + \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi R^3] \lambda. \quad (2)$$

假设不计铝球使冰熔化过程中向外界散失的热量,则有

$$Q_1 = Q_2. \quad (3)$$

解得

$$h = \frac{4Rc}{\lambda} t + \frac{1}{3} R. \quad (4)$$

则  $h$  与  $t$  成线性关系. 此式只对  $t > t_0$  时成立. 将表中数据画在  $h-t$  图中, 得第 1, 2, ..., 8 次实验对应的点 A、B、...、H. 数据点 B、C、D、E、F 五点可以拟合成一 直线, 如图解 2-3-2 所示. 此直线应与④式一致. 这样, 在此直线上任取两点的数 据, 代入④式, 再解联立方程, 即可求出比热  $c$  的值. 例如, 在直线上取相距较远的 横坐标为 8 和 100 的两点  $X_1$  和  $X_2$ , 它们的坐标由图 2-3-3 可读得为

$$X_1(8, 0.5), X_2(100, 16.7).$$

将此数据及  $\lambda$  的值代入④式, 消去  $R$ , 得

$$c = 8.6 \times 10^2 \text{ J}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}). \quad (5)$$

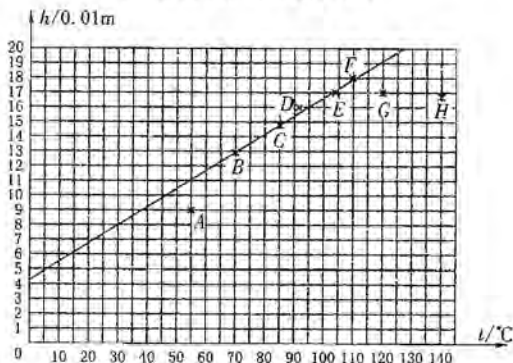


图 2-3-3

(2) 在本题作的图 2-3-3 中, 第 1、7、8 次实验的数据对应的点偏离直线较远, 未被采用. 这三个实验数据在  $h-t$  图上的点即 A、G、H.

A 点为什么偏离直线较远? 因为当  $h \approx R$  时, 从④式得对应的温度  $t_0 \approx 65^\circ\text{C}$ , ④式在  $t > t_0$  的条件下才成立. 但第一次实验时铝球的温度  $t_1 = 55^\circ\text{C} < t_0$ , 熔化的冰的体积小于半个球的体积, 故④式不成立.

G、H 为什么偏离直线较远? 因为铝球的温度过高 ( $120^\circ\text{C}$ 、 $140^\circ\text{C}$ ), 使得一部分冰升华成蒸气, 且因铝球与环境的温度相差较大而损失的热量较多, ②③式不成立, 因而④式不成立.





**题 3** (2008·全国物理复赛题) 在地面上方垂直于太阳光的入射方向, 放置一半径  $R=0.10\text{ m}$ 、焦距  $f=0.50\text{ m}$  的薄凸透镜, 在薄透镜下方的焦面上放置一黑色薄圆盘(圆盘中心与透镜焦点重合), 于是可以在黑色圆盘上形成太阳的像. 已知黑色圆盘的半径是太阳像的半径的 2 倍, 盘的导热性极好, 圆盘与地面之间的距离较大. 设太阳向外辐射的能量遵从斯特藩-玻尔兹曼定律; 单位时间内, 在其单位表面积上向外辐射的能量为  $W=\sigma T^4$ , 式中  $\sigma$  为斯特藩-玻尔兹曼常量,  $T$  为辐射体表面的绝对温度. 对太阳而言, 取其温度  $t_s=5.50\times 10^3\text{ }^\circ\text{C}$ . 大气对太阳能的吸收率为  $\alpha=0.40$ . 又设黑色圆盘对射到其上的太阳能全部吸收, 同时圆盘也按斯特藩-玻尔兹曼定律向外辐射能量. 如果不考虑空气的对流, 也不考虑杂散光的影响, 试问薄圆盘到达稳定状态时可能达到的最高温度为多少摄氏度.

**【分析】** 这是一道关于太阳辐射能的问题. 关键是要知道圆盘吸收的辐射能与其向外的辐射能相等时, 它达到稳定状态, 此时它的温度达到最高.

**【解】** 按照斯特藩-玻尔兹曼定律, 在单位时间内太阳表面单位面积向外发射的能量为

$$W_s = \sigma T_s^4. \quad (1)$$

其中  $\sigma$  为斯特藩-玻尔兹曼常量,  $T_s$  为太阳表面的绝对温度. 若太阳的半径为  $R_s$ , 则单位时间内整个太阳表面向外辐射的能量为

$$P_s = 4\pi R_s^2 W_s. \quad (2)$$

单位时间内通过以太阳为中心的任意一个球面的能量都是  $P_s$ . 设太阳到地球的距离为  $r_{SE}$ , 考虑到地球周围大气的吸收, 地面附近半径为  $R$  的透镜接收到的太阳辐射的能量为

$$P = \pi R^2 (1-\alpha) \frac{P_s}{4r_{SE}^2}. \quad (3)$$

薄凸透镜将把这些能量会聚到置于其后焦面上的薄圆盘上, 并被薄圆盘全部吸收. 另外, 因为薄圆盘也向外辐射能量. 设圆盘的半径为  $R_d$ , 温度为  $T_d$ . 注意到薄圆盘有两个表面, 故圆盘在单位时间内辐射的能量为

$$P_d = 2(\pi R_d^2)(\sigma T_d^4). \quad (4)$$

显然, 当  $P_d = P$ . (5)

即圆盘单位时间内接收到的能量与单位时间内辐射的能量相等时, 圆盘达到稳定状态, 其温度达到最高. 由①~⑤五式得

$$T_d = \left[ (1-\alpha) \frac{R^2 R_s^2}{2r_{SE}^2 R_d^2} \right]^{\frac{1}{4}} T_s. \quad (6)$$

依题意, 薄圆盘的半径为太阳的像的半径  $R_s'$  的 2 倍, 即  $R_d = 2R_s'$ , 由透镜成像公式知

$$\frac{R_s'}{f} = \frac{R_s}{r_{SE}}.$$

于是有

$$R_d = 2 \frac{R_s}{r_{SE}} f. \quad (7)$$



$$\text{把⑦式代入⑥式得 } T_d = \left[ (1-\alpha) \frac{R^2}{8f^2} \right]^{\frac{1}{4}} T_s. \quad (8)$$

代入已知数据,并注意到  $T_s = (273.15 + t_s)$  K 得

$$T_d = 1.4 \times 10^3 \text{ K}. \quad (9)$$

$$\text{即有 } t_d = T_d - 273.15 \text{ K} = 1.1 \times 10^3 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

**题 4** (1999·全国物理复赛题) 一汽缸的初始体积为  $V_0$ , 其中盛有 2 mol 的空气和少量的水(水的体积可忽略). 平衡时气体的总压强是 3.0 atm, 经等温膨胀使其体积加倍, 在膨胀结束时, 其中的水刚好全部消失, 此时的总压强为 2.0 atm. 若让其继续做等温膨胀, 使体积再次加倍. 试计算此时:

- (1) 汽缸中气体的温度;
- (2) 汽缸中水蒸气的摩尔数;
- (3) 汽缸中气体的总压强.

假定空气和水蒸气均可当做理想气体处理.

**【分析】** 求解时注意两点: 一是在第一次等温膨胀过程中, 由于液态水的存在, 其上方的饱和蒸气压强不变; 二是对水蒸气仍可应用气态方程.

**【解】** (1) 只要有液态水存在, 平衡时汽缸中气体的总压强就等于空气压强与饱和水蒸气压强之和,

$$p_{\text{总}0} = p_{\text{空}0} + p_{\text{水}} = 3.0(\text{atm}). \quad (1)$$

$$\text{第一次膨胀后, } V_1 = 2V_0.$$

$$p_{\text{总}1} = p_{\text{空}1} + p_{\text{水}} = 2.0(\text{atm}). \quad (2)$$

由于第一次膨胀是等温过程, 所以

$$p_{\text{空}0} V_0 = p_{\text{空}1} V_1 = 2p_{\text{空}1} V_0. \quad (3)$$

解①②③三式, 得

$$p_{\text{水}} = 1.0(\text{atm}). \quad (4)$$

$$p_{\text{空}0} = 2.0(\text{atm}). \quad (5)$$

$$p_{\text{空}1} = 1.0(\text{atm}). \quad (6)$$

由于  $p_{\text{水}} = 1.0 \text{ atm}$ , 可知汽缸中气体的温度

$$T_0 = 373 \text{ K}. \quad (7)$$

根据题意, 经两次膨胀, 气体温度未改变.

(2) 设水蒸气为  $n_{\text{水}}$  mol. 经第一次膨胀, 水全部变成水蒸气, 水蒸气的压强仍为  $p_{\text{水}}$ , 这时对于水蒸气和空气分别有

$$p_{\text{水}} V_1 = n_{\text{水}} RT_0. \quad (8)$$

$$p_{\text{空}1} V_1 = n_{\text{空}} RT_0 = 2RT_0. \quad (9)$$

$$\text{由此两式及⑤⑥式可得 } n_{\text{水}} = 2(\text{mol}). \quad (10)$$

(3) 在第二次膨胀过程中, 混合气体可按理想气体处理, 有

$$p_{\text{总}2} V_2 = p_{\text{总}1} V_1. \quad (11)$$

由题意知,  $V_2 = 4V_0$ ,  $V_1 = 2V_0$ , 再将②式代入, 得



$$p_{02} = 1.0(\text{atm}).$$

⑫

**题 5** (1998·全国物理复赛题) 在一个横截面积为  $S$  的密闭容器中, 有一个质量为  $m'$  的活塞把容器隔成 I、II 两室, I 室中为饱和水蒸气, II 室中有质量为  $m$  的氮气. 活塞可在容器中无摩擦地滑动. 原来, 容器被水平地放置在桌面上. 活塞处于平衡时, 活塞两边气体的温度均为  $T_0 = 373 \text{ K}$ , 压强同为  $p_0$ , 如图 2-3-4(a) 所示. 今将整个容器缓慢地转到图 2-3-4(b) 所示的直立位置, 两室内的温度仍为  $T_0$ , 并有少量水蒸气液化成水. 已知水的汽化热为  $L$ , 水蒸气和氮气的摩尔质量分别为  $M_1$  和  $M_2$ . 求在整个过程中, I 室内的系统与外界交换的热量.

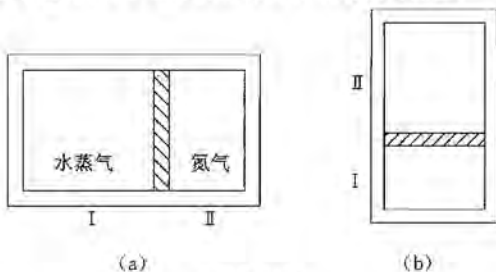


图 2-3-4

**【分析】** 将容器直立后, 活塞向下运动到新位置平衡. 此时 I 室和 II 室气体的体积分别减少和增加了  $\Delta V$ . 虽有少量质量为  $\Delta m$  的水蒸气液化成水, 但压强仍可视作  $p_0$ , 所求热量  $Q = \Delta mL$ , 因此求解  $\Delta m$  为本题的关键.

**【解】** 当容器处在初始位置时, 设水蒸气的体积为  $V_1$ , 氮气的体积为  $V_2$ . 当容器处在直立位置时, 水蒸气的体积为  $V_1 - \Delta V$ , 压强仍为  $p_0$ , 氮气的体积为  $V_2 + \Delta V$ , 压强为

$$p = p_0 - \frac{m'g}{S}. \quad (1)$$

$$\text{因} \quad p_0 V_2 = \frac{m}{M_2} RT_0. \quad (2)$$

$$\text{则} \quad p(V_2 + \Delta V) = \frac{m}{M_2} RT_0. \quad (3)$$

$$\text{由①②③式解得} \quad \Delta V = \frac{m'gV_2}{p_0 S - m'g}. \quad (4)$$

设转变成水的质量为  $\Delta m$ , 则因为只有少量的水蒸气变为水, 所以水的体积可忽略不计, 于是

$$\Delta m = \frac{M_1 p_0 V_1}{RT_0} - \frac{M_1 p_0 (V_1 - \Delta V)}{RT_0} = \frac{M_1 p_0 \Delta V}{RT_0}. \quad (5)$$

将④式代入⑤式得

$$\Delta m = \frac{M_1 p_0}{RT_0} \cdot \frac{m'gV_2}{p_0 S - m'g} = \frac{M_1}{M_2} \cdot \frac{m'g}{p_0 S - m'g} m. \quad (6)$$

I 室内的系统向外界放出的热量为

$$Q = \Delta mL = \frac{M_1}{M_2} \cdot \frac{m'g}{p_0 S - m'g} mL.$$

**题 6** (2008·全国物理竞赛题) 致冷机是通过外界对机器做功,把从低温处吸取的热量连同外界对机器做功所得到的能量一起送到高温处的机器;它能使低温处的温度降低,高温处的温度升高.已知当致冷机工作在绝对温度为  $T_1$  的高温处和绝对温度为  $T_2$  的低温处之间时,若致冷机从低温处吸取的热量为  $Q$ ,外界对致冷机做的功为  $W$ ,则有

$$\frac{Q}{W} \leq \frac{T_2}{T_1 - T_2}.$$

式中“ $=$ ”对应于理论上的理想情况.某致冷机在冬天作为热泵使用(即取暖空调机),在室外温度为  $-5.00^\circ\text{C}$  的情况下,使其房间内的温度保持在  $20.00^\circ\text{C}$ .由于室内温度高于室外,故将有热量从室内传递到室外.本题只考虑传导方式的传热,它服从以下的规律:设一块导热层,其厚度为  $l$ ,面积为  $S$ ,两侧温度差的大小为  $T$ ,则单位时间内通过导热层由高温处传导到低温处的热量为

$$H = \kappa \frac{\Delta T}{l} S.$$

其中  $\kappa$  称为热导率,取决于导热层材料的性质.

1. 假设该房间向外散热是由面向室外的面积  $S = 5.00 \text{ m}^2$ 、厚度  $l = 2.00 \text{ mm}$  的玻璃板引起的.已知该玻璃的热导率  $\kappa = 0.75 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ ,电费为每度  $0.50$  元.试求在理想情况下该热泵工作  $12 \text{ h}$  需要多少电费?

2. 若将上述玻璃板换为“双层玻璃板”,两层玻璃的厚度均为  $2.00 \text{ mm}$ ,玻璃板之间夹有厚度  $l_0 = 0.50 \text{ mm}$  的空气层,假设空气的热导率  $\kappa_0 = 0.025 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ ,电费仍为每度  $0.50$  元.若该热泵仍然工作  $12 \text{ h}$ ,问这时的电费比上一问单层玻璃情形节省多少?

**【分析】** 本题展现了物理科学在当前“节能减排”的实际作用.其间用到了有关热机(含致冷机、热泵等)和热传导方面的物理规律.求解时需对题目提供的两个热学公式作充分理解,并注意热平衡(指保持室内温度不变)所包含的物理条件.本题第二问大致重复第一问计算过程,但需对双层玻璃稳定传热要另作计算.

**【解】** 1. 依题意,为使室内温度保持不变,热泵向室内放热的功率应与房间向室外散热的功率相等.设热泵在室内放热的功率为  $q$ ,需要消耗的电功率为  $P$ ,则它从室外(低温处)吸收热量的功率为  $q - P$ .根据题意有

$$\frac{q - P}{P} \leq \frac{T_2}{T_1 - T_2}. \quad (1)$$

式中  $T_1$  为室内(高温处)的绝对温度,  $T_2$  为室外的绝对温度.由式①得

$$P \geq \frac{T_1 - T_2}{T_1} q. \quad (2)$$

显然,为使电费最少,  $P$  应取最小值;即式②中的“ $\geq$ ”号应取等号,对应于理想情况下  $P$  最小.故最小电功率

$$P_{\min} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} q. \quad (3)$$



又依题意,房间由玻璃板通过热传导方式向外散热,散热的功率

$$H = \kappa \frac{T_1 - T_2}{l} S. \quad (4)$$

要保持室内温度恒定,应有  $q = H$ . (5)

由③~⑤三式得

$$P_{\min} = \kappa \frac{S(T_1 - T_2)^2}{l T_1}. \quad (6)$$

设热泵工作时间为  $t$ ,每度电的电费为  $c$ ,则热泵工作需花费的最少电费

$$C_{\min} = P_{\min} t c. \quad (7)$$

注意到  $T_1 = 20.00 \text{ K} + 273.15 \text{ K} = 293.15 \text{ K}$ ,  $T_2 = -5.00 \text{ K} + 273.15 \text{ K} = 268.15 \text{ K}$ , 1度电 =  $1 \text{ kW} \cdot \text{h}$ . 由⑥⑦两式,并代入有关数据得

$$C_{\min} = \frac{(T_1 - T_2)^2}{T_1 l} S \kappa t c = 23.99 \text{ 元}. \quad (8)$$

所以,在理想情况下,该热泵工作 12 h 需约 24 元电费.

2. 设中间空气层内表面的温度为  $T_i$ ,外表面的温度为  $T_0$ ,则单位时间内通过内层玻璃、中间空气层和外层玻璃传导的热量分别为

$$H_1 = \kappa \frac{T_1 - T_i}{l} S, \quad (9)$$

$$H_2 = \kappa_0 \frac{T_i - T_0}{l_0} S, \quad (10)$$

$$H_3 = \kappa \frac{T_0 - T_2}{l} S. \quad (11)$$

在稳定传热的情况下,有  $H_1 = H_2 = H_3$ . (12)

由⑨~⑫四式得

$$\kappa \frac{T_1 - T_i}{l} = \kappa_0 \frac{T_i - T_0}{l_0} \text{ 和 } T_1 - T_i = T_0 - T_2. \quad (13)$$

解式⑬得

$$T_i = \frac{l_0 \kappa + l \kappa_0}{l_0 \kappa + 2l \kappa_0} T_1 + \frac{l \kappa_0}{l_0 \kappa + 2l \kappa_0} T_2. \quad (14)$$

将式⑭代入式⑨得

$$H_1 = \frac{\kappa \kappa_0}{l_0 \kappa + 2l \kappa_0} (T_1 - T_2) S. \quad (15)$$

要保持室内温度恒定,应有  $q = H_1$ . 由式⑬知,在双层玻璃情况下热泵消耗的最小电功率

$$P_{\min}' = \frac{\kappa \kappa_0}{l_0 \kappa + 2l \kappa_0} \frac{(T_1 - T_2)^2}{T_1} S. \quad (16)$$

在理想情况下,热泵工作时间  $t$  需要的电费

$$C_{\min}' = P_{\min}' t c. \quad (17)$$

代入有关数据得

$$C_{\min}' = 2.52 \text{ 元}. \quad (18)$$

所以,改用所选的双层玻璃板后,该热泵工作 12 h 可以节约的电费



$$\Delta C_{\min} = C_{\min}' - C_{\min} = 21.47 \text{ 元.}$$

题 7 (2006 · 国际物理竞赛题)

煮透的鸡蛋

(要求估算结果的数值)一只从温度为  $T_0 = 4^\circ\text{C}$  的冰箱里取出的鸡蛋,直接被放入一个盛有沸水的锅中,水始终保持沸腾,水的温度为  $T_1$ .

- (1)使鸡蛋凝固所需的能量  $U$  是多少?
- (2)传导给鸡蛋的热流量  $J$  是多少?
- (3)传导给鸡蛋的热功率  $P$  是多少?
- (4)需要煮多久才能把鸡蛋煮透,即完全凝固?

提示:你可使用简化的傅里叶定律  $J = \kappa \frac{\Delta T}{\Delta r}$ ,其中  $\Delta T$  是与问题的特征尺度  $\Delta r$  相关联的温度差,热流量  $J$  的单位是  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ .

数据:鸡蛋的密度为  $\mu = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

鸡蛋的比热容为  $c = 4.2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{g}^{-1}$

鸡蛋的半径为  $R = 2.5 \text{ cm}$

蛋白(鸡蛋的蛋白质)的凝固点  $T_c = 65^\circ\text{C}$

热传导系数  $\kappa = 0.64 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$  (假设液态和固态蛋白的热传导系数相同)

**【分析】** 本题求解涉及热学中一些基本规律,热流量的计算考虑题给的傅里叶定律即可.

**【解】** (1)鸡蛋的温度至少要上升到凝固点,加热前后温差

$$\Delta T = T_c - T_0 = 65^\circ\text{C} - 4^\circ\text{C} = 61^\circ\text{C}.$$

所以

$$U = \mu \frac{4\pi R^3}{3} c (T_c - T_0) = 16768 \text{ J.} \quad \textcircled{1}$$

(2)利用简化的傅里叶定律,取特征尺寸  $\Delta r = R$ ,相应的温度差取  $\Delta T = T_1 - T_0$ ,  $T_1 = 100^\circ\text{C}$ ,于是

$$J = \kappa \frac{T_1 - T_0}{R} = 2458 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}.$$

(3)热流量乘以表面积得到热功率

$$P = 4\pi R^2 J = 4\pi \kappa R (T_1 - T_0) \approx 19.3 \text{ W.} \quad \textcircled{2}$$

(4)由热功率②式和总热量①式可以估算加热的时间

$$\tau = \frac{U}{P} = 869 \text{ s} \approx 14.5 \text{ min.}$$



## 第四节 热学综合

**题 1** (2008·全国物理预赛题) (1)如图 2-4-1 所示,放置在升降机地板上的盛有水的容器中,插有两根相对容器的位置是固定的玻璃管  $a$  和  $b$ . 管的上端都是封闭的,下端都是开口的. 管内被水各封有一定质量的气体. 平衡时,  $a$  管内的水面比管外低,  $b$  管内的水面比管外高. 现令升降机从静止开始加速下降, 已知在此过程中管内气体仍被封闭在管内, 且经历的过程可视为绝热过程, 则在此过程中( ).

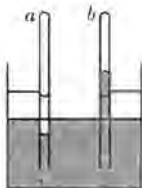


图 2-4-1

- A.  $a$  中气体内能将增加,  $b$  中气体内能将减少  
 B.  $a$  中气体内能将减少,  $b$  中气体内能将增加  
 C.  $a$ 、 $b$  中气体内能都将增加  
 D.  $a$ 、 $b$  中气体内能都将减少

(2)图 2-4-2 所示为由粗细均匀的细玻璃管弯曲成的“双 U 形管”,  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  为其四段竖直的部分, 其中  $a$ 、 $d$  上端是开口的, 处在大气中. 管中的水银把一段气体柱密封在  $b$ 、 $c$  内, 达到平衡时, 管内水银面的位置如图所示. 现缓慢地降低气柱中气体的温度, 若  $c$  中的水银面上升了一小段高度  $\Delta h$ , 则( ).

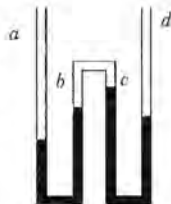


图 2-4-2

- A.  $b$  中的水银面也上升  $\Delta h$   
 B.  $b$  中的水银面也上升, 但上升的高度小于  $\Delta h$   
 C. 气柱中气体压强的减少量等于高为  $\Delta h$  的水银柱所产生的压强  
 D. 气柱中气体压强的减少量等于高为  $2\Delta h$  的水银柱所产生的压强

**【分析】** 第(1)小题首先分析升降机加速下降过程中,  $a$ 、 $b$  两管中被封闭气体体积的变化情况, 再由绝热过程中的热力学第一定律给予判断. 第(2)小题涉及到理想气体状态方程和力平衡方面的知识.

**【解】** (1)B; (2)A、D.

**题 2** (2005·全国物理预赛题) 如图 2-4-3 所示, 两根位于同一水平内的平行的直长金属导轨, 处于恒定磁场中, 磁场方向与导轨所在平面垂直. 一质量为  $m$  的均匀导体细杆, 放在导轨上, 并与导轨垂直, 可沿导轨无摩擦地滑动, 细杆与导轨的电阻均可忽略不计. 导轨的左端与一根阻值为  $R_0$  的电阻丝相连, 电阻丝置于一绝热容器中, 电阻丝的热容量不计. 容器与一水平放置的开口细管相通, 细管内有一截面为  $S$  的小液柱(质量不计), 液柱将  $1 \text{ mol}$  气体(可视为理想气体)封闭在容器中. 已知温度升高  $1 \text{ K}$  时, 该气体的内能的增加量为  $\frac{5}{2}R$  ( $R$  为普适气体常量), 大气压强为  $p_0$ . 现令细杆沿导轨方向以初速  $v_0$  向右运动, 试求达到平衡时细管中液柱的位移.

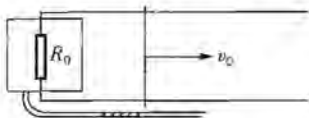


图 2-4-3

**【分析】** 从能量角度来说,本题是一个能量的连续转换过程.杆的初动能最终转换为焦耳热而被气体吸收.运用热力学第一定律和等压过程的规律即可求解.

**【解】** 导体细杆运动时,切割磁感线,在回路中产生感应电动势与感应电流,细杆将受到安培力的作用,安培力的方向与细杆的运动方向相反,使细杆减速,随着速度的减小,感应电流和安培力也减小,最后杆将停止运动,感应电流消失.在运动过程中,电阻丝上产生的焦耳热,全部被容器中的气体吸收.

根据能量守恒定律可知,杆从 \$v\_0\$ 减速至停止运动的过程中,电阻丝上的焦耳热 \$Q\$ 应等于杆的初动能,即

$$Q = \frac{1}{2} m v_0^2. \quad (1)$$

容器中的气体吸收此热量后,设其温度升高 \$\Delta T\$, 则内能的增加量为

$$\Delta E = \frac{5}{2} R \Delta T. \quad (2)$$

在温度升高 \$\Delta T\$ 的同时,气体体积膨胀,推动液柱克服大气压力做功.设液柱的位移为 \$\Delta l\$, 则气体对外做功

$$A = p_0 S \Delta l. \quad (3)$$

其中 \$S \Delta l\$ 就是气体体积的膨胀量

$$\Delta V = S \Delta l. \quad (4)$$

由理想气体状态方程 \$pV = RT\$, 注意到气体的压强始终等于大气压 \$p\_0\$, 故有

$$p_0 \Delta V = R \Delta T. \quad (5)$$

由热力学第一定律,有

$$Q = A + \Delta E. \quad (6)$$

由以上各式可解得

$$\Delta l = \frac{m v_0^2}{7 p_0 S}.$$

**题 3** (2008·全国物理竞赛题) 图 2-4-4 所示为低温工程中常用的一种气体、蒸汽压联合温度计的原理示意图, \$M\$ 为指针压力表, 以 \$V\_M\$ 表示其中可以容纳气体的容积; \$B\$ 为测温泡, 处在待测温度的环境中, 以 \$V\_B\$ 表示其体积; \$E\$ 为贮气容器, 以 \$V\_E\$ 表示其体积; \$F\$ 为阀门. \$M\$、\$E\$、\$B\$ 由体积可忽略的毛细管连接. 在 \$M\$、\$E\$、\$B\$ 均处在室温 \$T\_0 = 300 \text{ K}\$ 时充以压强 \$p\_0 = 5.2 \times 10^5 \text{ Pa}\$ 的氢气. 试回答以下各问题 (设气态氢遵从理想气体状态方程):

1. 关闭阀门 \$F\$, 使 \$E\$ 与温度计的其他部分隔断, 于是 \$M\$、\$B\$ 可构成一简易的气



温度计,用它可测量 25 K 以上的温度.这时, B 中的氢气始终处在气态, M 处在室温中.试导出 B 处的温度  $T$  和压力表显示的压强  $p$  的关系.除题中给出的室温  $T_0$  时 B 中氢气的压强  $p_0$  外,理论上至少还需要测量几个已知温度下的压强才能定量确定  $T$  与  $p$  之间的关系?

2. 开启阀门  $F$ , 使  $M$ 、 $E$ 、 $B$  连通, 可构成一用于测量 20 K~25 K 温度区间的低温的蒸汽压温度计.此时, B 中存在液态氢, 压力表 M 测出的是液态氢的饱和蒸汽压.由于饱和蒸汽压与温度有灵敏的依赖关系, 知道了氢的饱和蒸汽压与温度的关系, 通过测量氢的饱和蒸汽压, 就可相当准确地确定这一温区的温度.在设计蒸气压温度计时, 要保证当 B 处温度低于  $T_V=25$  K 时, B 中一定要有液态氢存在; 当 B 处温度高于  $T_V=25$  K 时, B 中无液态氢; 当 B 处温度等于  $T_V=25$  K 时, 认为 B 中的氢气达到饱和, 即刚要开始液化但尚无液态氢存在(即使出现了液态氢, 其量也可忽略不计).要达到这一目的,  $V_M+V_E$  与  $V_B$  间应满足怎样的关系? 已知  $T_V=25$  K 时, 液态氢的饱和蒸汽压  $p_V=3.3 \times 10^5$  Pa.

3. 已知室温下压强  $p_1=1.04 \times 10^5$  Pa 的氢气体积是同质量的液态氢体积的 800 倍.试论证蒸汽压温度计中的液态氢不会溢出测温泡 B.

**【分析】** 这是一道涉及到热学规律的工程应用题.在第 1 问中, 对 B 和 M 容器中的气体运用气态方程便可得到温度和压强间的函数关系式.由于函数式较复杂, 可变换为其倒数间的函数关系来讨论.第 2 问涉及到相变问题, 但对于温度处于临界温度  $T_V$  时, 氢气仍为蒸汽状态, 故可再次运用气态方程来讨论相应体积间应满足的关系式.对于第 3 问则应先计算出题给条件下液态氢的体积方程再判断.

**【解】** 1. 当阀门  $F$  关闭时, 设封闭在 M 和 B 中的氢气的摩尔数为  $n_1$ , 当 B 处的温度为  $T$  时, 压力表显示的压强为  $p$ .由理想气体状态方程可知, B 和 M 中氢气的摩尔数分别为

$$n_{1B} = \frac{pV_B}{RT}, \quad n_{1M} = \frac{pV_M}{RT_0} \quad (1)$$

式中  $R$  为普适气体恒量.

已知

$$n_{1B} + n_{1M} = n_1 \quad (2)$$

解式①②得

$$\frac{1}{T} = \frac{n_1 R}{V_B p} - \frac{V_M}{V_B T_0} \quad (3)$$

或

$$T = \frac{p}{\frac{n_1 R}{V_B} - \frac{V_M}{V_B T_0} p} \quad (4)$$

式③表明,  $\frac{1}{T}$  与  $\frac{1}{p}$  呈线性关系, 式中的系数与仪器结构有关.在理论上, 至少

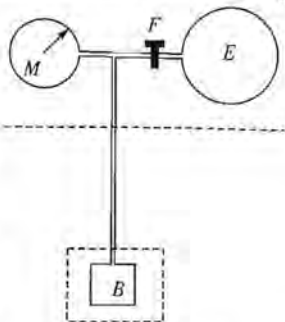


图 2-4-4





要测得两个已知温度下的压强,作  $\frac{1}{T} - \frac{1}{p}$  的图线,才可求出系数.由于题中已给出室温  $T_0$  时的压强  $p_0$ ,故至少还要测定另一已知温度下的压强,才能定量确定  $T$  与  $p$  之间的关系式.

2. 根据题意,当  $T = T_V = 25 \text{ K}$  时,  $B$  中氢气达到饱和,但尚未出现液态氢,故  $B$  中氢的摩尔数为

$$n_{2B} = \frac{p_V V_B}{RT_V} \quad (5)$$

由于力学平衡,这时  $M$  和  $E$  中氢气的压强也等于  $p_V$ ,故其中氢的摩尔数为

$$n_{2M} + n_{2E} = \frac{p_V (V_M + V_E)}{RT_0} \quad (6)$$

充入  $B$ 、 $M$  和  $E$  中氢气的总摩尔数

$$n_2 = \frac{p_0 (V_B + V_M + V_E)}{RT_0} \quad (7)$$

根据要求有

$$n_{2B} + n_{2M} + n_{2E} = n_2 \quad (8)$$

解⑤~⑧四式得

$$V_M + V_E = \frac{p_V T_0 - p_0 T_V}{(p_0 - p_V) T_V} V_B$$

代人有关数据得

$$V_M + V_E = 18V_B \quad (9)$$

也就是说,若  $V_M + V_E$  与  $V_B$  的关系满足式⑨,则当  $B$  处的温度  $T > T_V = 25 \text{ K}$  时,氢气尚未达到饱和,不会液化,  $B$  中无液态氢;当  $B$  处的温度  $T < T_V = 25 \text{ K}$  时,氢气达到过饱和,于是氢气液化,气态氢减少,液态氢增加,气体压强亦减少,直到压强降到等于该温度下的饱和蒸汽压时气液两相达到平衡.在实际制作温度计时,为了保证当  $B$  处的温度  $T < T_V = 25 \text{ K}$  时,  $B$  中一定要有液态氢的存在,故一般都取  $V_M + V_E$  的体积比  $18V_B$  稍大一点.

3. 在室温下充入  $B$ 、 $M$ 、 $E$  的氢气的压强为  $p_0$ , 体积为  $V_B + V_M + V_E$ . 当压强为  $p_1 = 1.04 \times 10^5 \text{ Pa}$  时,由玻意耳定律,这些氢气在室温下的体积

$$V = \frac{p_0 (V_B + V_M + V_E)}{p_1} \quad (10)$$

由式⑩并代人有关数据得

$$V = 95V_B \quad (11)$$

因而相当于体积为  $V - (V_M + V_E) = 77V_B$  的室温氢气可进入  $B$ , 液化为液态氢;由题意,其体积为

$$\left(\frac{77}{800}\right)V_B = 0.09V_B \ll V_B$$

由此可知,即使  $V_M + V_B$  比  $18V_B$  稍大一点,液态氢亦不会溢出测温泡  $B$ .



**题 4** (2007·全国物理复赛题) 有一带活塞的汽缸,如 2-4-5 所示,缸内盛有一定质量的气体.缸内还有一可随轴转动的叶片,转轴伸到汽缸外,外界可使轴和叶片一起转动.叶片和轴以及汽缸壁和活塞都是绝热的,它们的热容量都不计.轴穿过汽缸处不漏气.

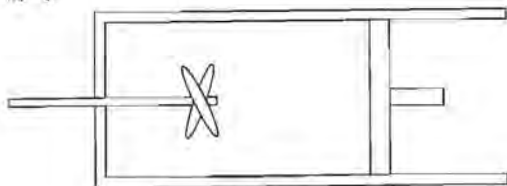


图 2-4-5

如果叶片和轴不转动,而令活塞缓慢移动,则在这种过程中,由实验测得,气体的压强  $p$  和体积  $V$  遵从以下的过程方程式

$$pV^\alpha = k.$$

其中  $\alpha, k$  均为常量,  $\alpha > 1$  (其值已知). 可以由上式导出,在此过程中外界对气体做的功为

$$W = \frac{k}{\alpha - 1} \left( \frac{1}{V_2^{\alpha-1}} - \frac{1}{V_1^{\alpha-1}} \right).$$

式中  $V_2$  和  $V_1$  分别表示末态和初态的体积.

如果保持活塞固定不动,而使叶片以角速度  $\omega$  做匀角速转动,已知在这种过程中,气体压强的改变量  $\Delta p$  和经过的时间  $\Delta t$  遵从以下的关系式

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\alpha - 1}{V} L \cdot \omega.$$

式中  $V$  为气体的体积,  $L$  表示气体对叶片阻力的力矩的大小.

上面并没有说气体是理想气体,现要求你不用理想气体的状态方程和理想气体的内能只与温度有关的知识,求出图 2-4-6 中气体原来所处的状态  $A$  与另一已知状态  $B$  之间的内能之差(结果要用状态  $A, B$  的压强  $p_A, p_B$  和体积  $V_A, V_B$  及常量  $\alpha$  表示).

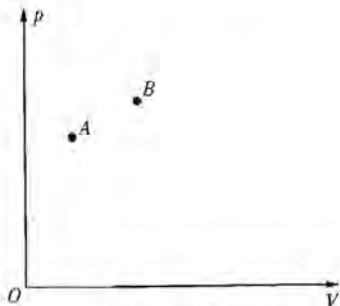


图 2-4-6

**【分析】** 由  $A, B$  状态在  $p-V$  图上位置可知:运用题给两种过程中的任何一个

单一过程是不可能满足要求的. 一种可能的路径是: 让气体做绝热膨胀(活塞移动而叶片不动), 到达中间状态  $C$  (此时  $V_C = V_B$ ) 后让活塞固定而叶片转动, 最终到达状态  $B$ . 求解过程中用到题给几个方程式以及热力学第一定律等.

【解】 由  $pV^\alpha = k$ . ( $\alpha > 1$ ) ①

可知, 当  $V$  增大时,  $p$  将随之减小(当  $V$  减小时,  $p$  将随之增大), 在  $p$ - $V$  图上过状态  $A$  所对应的曲线大致如图 2-4-7 所示. 在曲线上取体积与状态  $B$  的体积相同的状态  $C$ .

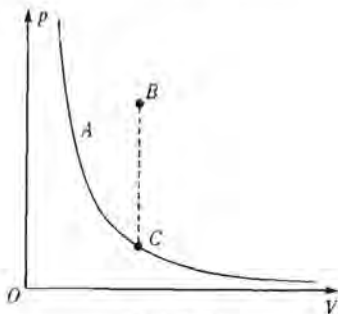


图 2-4-7

现在设想气体从状态  $A$  出发, 保持叶片不动, 而令活塞缓慢地向右移动, 使气体膨胀, 由状态  $A$  到达状态  $C$ , 在此过程中, 外界对气体做功

$$W = \frac{k}{\alpha - 1} \left( \frac{1}{V_C^{\alpha-1}} - \frac{1}{V_A^{\alpha-1}} \right). \quad ②$$

用  $U_A, U_C$  分别表示气体处于状态  $A, C$  时的内能. 因为是绝热过程, 所以内能的增量等于外界对气体做的功, 即

$$U_C - U_A = \frac{k}{\alpha - 1} \left( \frac{1}{V_C^{\alpha-1}} - \frac{1}{V_A^{\alpha-1}} \right). \quad ③$$

再设想气体处于状态  $C$  时, 保持其体积不变, 即保持活塞不动, 令叶片以角速度  $\omega$  做匀速转动, 这样叶片就要克服气体阻力而做功. 因为缸壁及活塞都是绝热的, 活塞又不动, 所以此功完全用来增加气体的内能. 因为气体体积不变, 所以它的温度和压强都会升高, 最后令它到达状态  $B$ . 这过程经过的时间用  $\Delta t$  表示, 则叶片克服气体阻力做功

$$W' = L\omega\Delta t. \quad ④$$

令  $U_B$  表示气体处于状态  $B$  时的内能, 由热力学第一定律得

$$U_B - U_C = L\omega\Delta t.$$

由题知

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\alpha - 1}{V} L \cdot \omega. \quad ⑤$$

由④⑤式得

$$U_B - U_C = \frac{V_B}{\alpha - 1} (p_B - p_C). \quad ⑥$$



⑥式加③式,得

$$U_B - U_A = \frac{V_B}{\alpha - 1} (p_B - p_C) + \frac{k}{\alpha - 1} \left( \frac{1}{V_C^{\alpha-1}} - \frac{1}{V_A^{\alpha-1}} \right). \quad (7)$$

利用  $pV^\alpha = k$  和  $V_C = V_B$  得

$$U_B - U_A = \frac{1}{\alpha - 1} (p_B V_B - p_A V_A).$$

**题 5** (2007·全国物理复赛题) 如图 2-4-8 所示,一容器左侧装有活门  $K_1$ , 右侧装有活塞  $B$ ,一厚度可以忽略的隔板  $M$  将容器隔成  $a, b$  两室,  $M$  上装有活门  $K_2$ . 容器、隔板、活塞及活门都是绝热的. 隔板和活塞可用销钉固定, 拔掉销钉即可在容器内左右平移, 移动时不受摩擦作用且不漏气. 整个容器置于压强为  $p_0$ 、温度为  $T_0$  的大气中. 初始时将活塞  $B$  用销钉固定在图示的位置, 隔板  $M$  固定在容器  $PQ$  处, 使  $a, b$  两室容积都等于  $V_0$ ,  $K_1, K_2$  关闭. 此时,  $b$  室真空,  $a$  室中装有一定量的空气(容器内外气体种类相同, 且均可视为理想气体), 其压强为  $\frac{4}{5} p_0$ , 温度为  $T_0$ . 已知 1 mol 空气温度升高 1 K 时内能的增量为  $C_v$ , 普适气体常量为  $R$ .

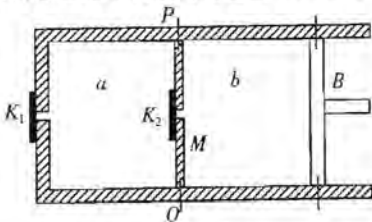


图 2-4-8

1. 现打开  $K_1$ , 待容器内外压强相等时迅速关闭  $K_1$  (假定此过程中处在容器内的气体与处在容器外的气体之间无热量交换). 求达到平衡时,  $a$  室中气体的温度.

2. 接着打开  $K_2$ , 待  $a, b$  两室中气体达到平衡后, 关闭  $K_2$ . 拔掉所有销钉, 缓慢推动活塞  $B$  直至到达容器的  $PQ$  位置. 求在推动活塞过程中隔板对  $a$  室气体所做的功. 已知在推动活塞过程中, 气体的压强  $p$  与体积  $V$  之间的关系为  $pV^\gamma = \text{恒量}$ ,

$$\text{其中 } \gamma = \frac{C_v + R}{C_v}.$$

**【分析】** 在第 1 问过程中有气体和能量(以做功的形式)流入  $a$  室, 运用理想气体状态方程和热力学第一定律便可求解. 而第 2 问中首先发生的是理想气体绝热自由膨胀, 此过程中注意温度不变, 其后的绝热压缩过程满足题给绝热方程式、气体方程和热力学第一定律等基本规律.

**【解】** 1. 设  $a$  室中原有气体为  $\nu$  mol, 打开  $K_1$  后, 有一部分空气进入  $a$  室; 直到  $K_1$  关闭时,  $a$  室中气体增加到  $\nu'$  mol. 又设  $a$  室中增加的  $(\nu' - \nu)$  mol 气体在进入容器前的体积为  $\Delta V$ . 气体进入  $a$  室的过程中, 大气对这部分气体所做的功为

$$A = p_0 \Delta V. \quad (1)$$

用  $T$  表示  $K_1$  关闭后  $a$  室中气体达到平衡时的温度, 则  $a$  室中气体内能增加量为

$$\Delta U = \nu' C_V (T - T_0). \quad (2)$$

由热力学第一定律, 可知

$$\Delta U = A. \quad (3)$$

由理想气体状态方程, 有

$$\frac{4}{5} p_0 V_0 = \nu R T_0. \quad (4)$$

$$p_0 \Delta V = (\nu' - \nu) R T_0. \quad (5)$$

$$p_0 V_0 = \nu' R T. \quad (6)$$

由以上各式解出

$$T = \frac{5(C_V + R)}{5C_V + 4R} T_0. \quad (7)$$

2.  $K_2$  打开后,  $a$  室中的气体向  $b$  室自由膨胀. 因系统绝热, 又无外界做功, 气体内能不变, 所以温度不变 (仍为  $T$ ), 而体积增大为原来的 2 倍. 由状态方程知, 气体压强变为

$$p = \frac{1}{2} p_0. \quad (8)$$

关闭  $K_2$ ,  $a$ 、 $b$  两室中的气体状态相同, 即

$$p_a = p_b = p, T_a = T_b = T,$$

$$V_a = V_b = V_0, \nu_a = \nu_b = \frac{1}{2} \nu'. \quad (9)$$

拔掉销钉后, 缓慢推动活塞  $B$ , 压缩气体的过程为绝热过程. 达到最终状态时, 设两室气体的压强、体积和温度分别为  $p_a'$ 、 $p_b'$ 、 $V_a'$ 、 $V_b'$ 、 $T_a'$ 、 $T_b'$ , 则有

$$p_a V_a^{\frac{(C_V+R)}{C_V}} = p_a' V_a'^{\frac{(C_V+R)}{C_V}}. \quad (10)$$

$$p_b V_b^{\frac{(C_V+R)}{C_V}} = p_b' V_b'^{\frac{(C_V+R)}{C_V}}. \quad (11)$$

由于隔板与容器内壁无摩擦, 故有

$$p_a' = p_b'. \quad (12)$$

由理想气体状态方程有

$$p_a' V_a' = \nu_a R T_a', \quad (13)$$

$$p_b' V_b' = \nu_b R T_b', \quad (14)$$

因

$$V_a' + V_b' = V_0, \quad (15)$$

由⑧~⑮式可得

$$V_a' = V_b' = \frac{1}{2} V_0, \quad (16)$$

$$T_a' = T_b' = 2 \frac{R}{C_V} T. \quad (17)$$

在推动活塞压缩气体这一绝热过程中, 隔板对  $a$  室气体做的功  $W$  等于  $a$  室中气体内能的增加, 即

$$W = \frac{1}{2} \nu' C_V (T_a' - T). \quad (18)$$



由⑥⑪⑬三式得

$$W = \frac{C_V}{2R} (2C_V - 1) p_0 V_0.$$

**题 6** (2005·全国物理竞赛题) 如图 2-4-9 所示, 水平放置的横截面积为  $S$  的带有活塞的圆筒形绝热容器中盛有  $1 \text{ mol}$  的理想气体. 其内能  $U = CT$ ,  $C$  为已知常量,  $T$  为热力学温度. 器壁和活塞之间不漏气且存在摩擦, 最大静摩擦力与滑动摩擦力相等且皆为  $F$ . 图中  $r$  为电阻丝, 通电时可对气体缓慢加热. 起始时, 气体压强与外界大气压强  $p_0$  相等, 气体的温度为  $T_0$ . 现开始对  $r$  通电, 已知当活塞运动时克服摩擦力做功所产生热量的一半被容器中的气体吸收. 若用  $Q$  表示气体从电阻丝吸收的热量,  $T$  表示气体的温度, 试以  $T$  为纵坐标,  $Q$  为横坐标, 画出在  $Q$  不断增加的过程中  $T$  和  $Q$  的关系图线. 并在图中用题给的已知量及普适气体常量  $R$  标出反映图线特征的各量(不要求写出推导过程).

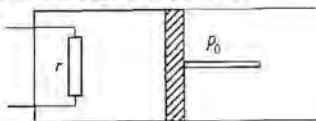


图 2-4-9

**【分析】** 此题虽是作图题, 但仍需定量求出表达  $T$ - $Q$  图线的各个相关参数. 首先要善于分析过程性质. 本题应划分为两个过程, 先是等容过程, 后是等压过程. 综合运用热力学第一定律, 气态方程和过程方程, 正确写出两个过程中  $T$ - $Q$  的函数式. 由于  $T$  与  $Q$  呈线性关系, 故只需找出表达直线方程的斜率与截距就可画出  $T$ - $Q$  图线.

**【解】** 如图 2-4-10 所示.

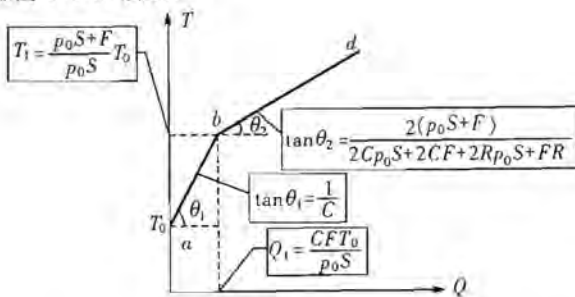


图 2-4-10

附计算过程:

电阻通电后对气体缓慢加热, 气体的温度升高, 压强增大, 活塞开始有向外运动的趋势, 但在气体对活塞的作用力尚未达到外界大气对活塞的作用力和器壁对活塞的最大静摩擦之和以前, 活塞不动, 即该过程为等容过程. 气体对外不做功时, 根据热力学第一定律可知, 在气体温度从  $T_0$  升高到  $T$  的过程中, 气体从电阻丝吸收的热量

$$Q=C(T-T_0). \quad (1)$$

此过程将持续到气体对活塞的作用力等于外界大气对活塞的作用力和器壁对活塞的最大静摩擦之和. 若用  $T_1$  表示此过程达到末态的温度,  $p$  表示末态的压强,  $Q_1$  表示此过程中气体从电阻丝吸收的热量, 由等容过程方程有

$$\frac{p}{p_0} = \frac{T_1}{T_0}. \quad (2)$$

由力的平衡可知

$$pS = p_0S + F. \quad (3)$$

由②③两式可得

$$T_1 = \frac{(p_0S + F)T_0}{p_0S}. \quad (4)$$

代入①式得

$$Q_1 = \frac{CF T_0}{p_0S}. \quad (5)$$

由以上讨论可知, 当  $Q \leq Q_1$  时,  $T$  与  $Q$  的关系为

$$T = \frac{Q}{C} + T_0. \quad (6)$$

在  $T$ - $Q$  图中为一直线如图 2-4-10 中  $ab$  所示, 其斜率

$$k_{ab} = \frac{1}{C}. \quad (7)$$

直线在  $T$  轴上的截距等于  $T_0$ , 直线  $ab$  的终点  $b$  的坐标为  $(T_1, Q_1)$ .

当电阻丝继续加热, 活塞开始向外运动以后, 因为过程是缓慢的, 外界大气压及摩擦力皆不变, 所以气体的压强不变, 仍是  $p$ , 气体经过的过程为等压过程. 在气体的体积从初始体积  $V_0$  增大到  $V$ , 温度由  $T_1$  升高到  $T$  的过程中, 设气体从电阻丝吸收的热量为  $Q'$ , 活塞运动过程中与器壁摩擦生热的一半热量为  $q$ , 由热力学第一定律可知

$$Q' + q = C(T - T_1) + p(V - V_0). \quad (8)$$

$q$  可由摩擦力做功求得, 即

$$q = \frac{1}{2} F \left( \frac{V - V_0}{S} \right). \quad (9)$$

代入⑧式得

$$Q' + \frac{F(V - V_0)}{2S} = C(T - T_1) + p(V - V_0). \quad (10)$$

由状态方程式可知

$$p(V - V_0) = R(T - T_1). \quad (11)$$

将⑪式和④式代入⑩式, 并注意到③式, 得

$$Q' = \left[ C + R - \frac{FR}{2(p_0S + F)} \right] (T - T_1).$$

即

$$T = \frac{2(p_0S + F)}{2Cp_0S + 2CF + 2Rp_0S + FR} Q' + T_1. \quad (12)$$



从开始对气体加热到气体温度升高到  $T(T > T_1)$  的过程中, 气体从电阻丝吸收的总热量

$$Q = Q_1 + Q' \quad (13)$$

把⑬式代入到⑫式, 并注意到④式和⑤式, 得

$$T = \frac{2(p_0 S + F)}{2Cp_0 S + 2CF + 2Rp_0 S + FR} \left( Q - \frac{CFT_0}{p_0 S} \right) + \frac{(p_0 S + F)T_0}{p_0 S} \quad (14)$$

由此可知, 当  $Q \geq Q_1 = \frac{CFT_0}{p_0 S}$  时,  $T$  与  $Q$  的关系仍有一直线, 此直线起点的坐标为  $Q = Q_1 = \frac{CFT_0}{p_0 S}$ ,  $T = T_1$ ; 斜率为

$$K_{bd} = \frac{2(p_0 S + F)}{2Cp_0 S + 2CF + 2Rp_0 S + FR} \quad (15)$$

在  $T$ - $Q$  图中, 就是直线  $bd$ .

当热量  $Q$  从零开始逐渐增大, 气体温度  $T$  将从起始温度  $T_0$  沿着斜率为  $K_{ab}$  的直线  $ab$  上升到温度为  $T_1$  的  $b$  时, 然后沿着斜率为  $K_{bd}$  的直线  $bd$  上升, 如图 2-4-11 所示.

**题 7** (2001·全国物理复赛题) 正确使用压力锅的方法是: 将已盖好密封锅盖的压力锅(如图 2-4-11)加热, 当锅内水沸腾时再加盖压力阀  $S$ , 此时可以认为锅内只有水的饱和蒸汽, 空气已全部排除. 然后继续加热, 直到压力阀被锅内的水蒸气顶起时, 锅内即已达到预期温度(即设计时希望达到的温度). 现有一压力锅, 在海平面处加热能达到的预期温度为  $120^\circ\text{C}$ . 某人在海拔  $5\,000\text{ m}$  的高山上使用此压力锅, 锅内有足量的水.

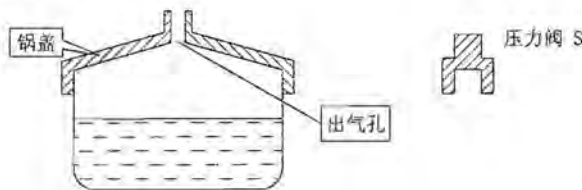


图 2-4-11

(1) 若不加盖压力阀, 锅内水的温度最高可达多少?

(2) 若按正确方法使用压力锅, 锅内水的温度最高可达多少?

(3) 若未按正确方法使用压力锅, 即盖好密封锅盖一段时间后, 在点火前就加上压力阀, 此时水温为  $27^\circ\text{C}$ , 那么加热到压力阀刚被顶起时, 锅内水的温度是多少? 若继续加热, 锅内水的温度最高可达多少? 假设空气不溶于水.

已知: 水的饱和蒸汽压  $p_w(t)$  与温度  $t$  的关系图线如图 2-4-12 所示. 大气压强  $p(z)$  与高度  $z$  的关系的简化图线如图 2-4-13 所示.  $t = 27^\circ\text{C}$  时,  $p_w(27^\circ\text{C}) = 3.6 \times 10^3\text{ Pa}$ ;  $z = 0$  处,  $p(0) = 1.013 \times 10^5\text{ Pa}$ .



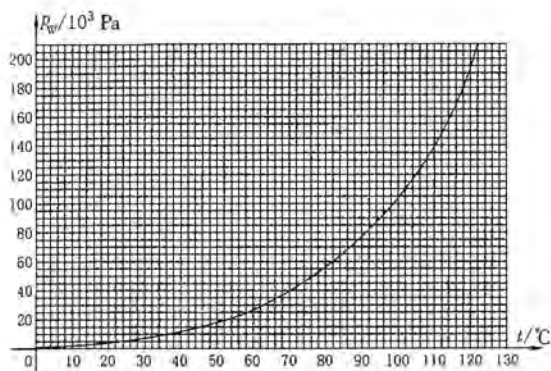


图 2-4-12

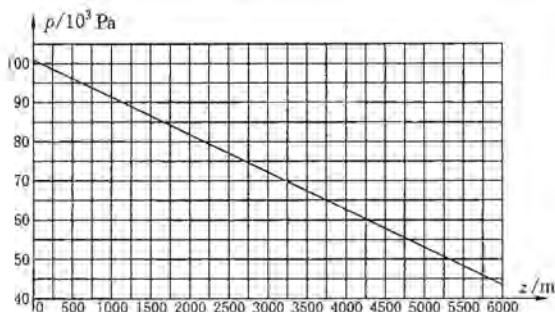


图 2-4-13

**【分析】** 压力锅中水沸腾时的温度,由相应饱和蒸汽压所能达到的最大压强决定。(1)问中该压强就是当地的大气压。(2)问中该压强为当地大气压和压力阀的压强之和,而在(3)问中则要扣除锅内空气的压强,因而求解  $p_w$  是本题的关键。

**【解】** (1)已知在海平面处,大气压强  $p(0) = 101.3 \times 10^3$  Pa。在  $z = 5000$  m 处,大气压强

$$p(5000) = 53 \times 10^3 \text{ Pa.} \quad \text{①}$$

此处水沸腾时的饱和蒸汽压  $p_w$  应等于此值。由图 2-4-14 可知,对应的温度即沸点为

$$t_1 = 82 \text{ } ^\circ\text{C.} \quad \text{②}$$

达到此温度时锅内水沸腾,温度不再升高,故在 5000 m 高山上,若不加盖压力阀,锅内温度最高可达 82  $^\circ\text{C}$ 。

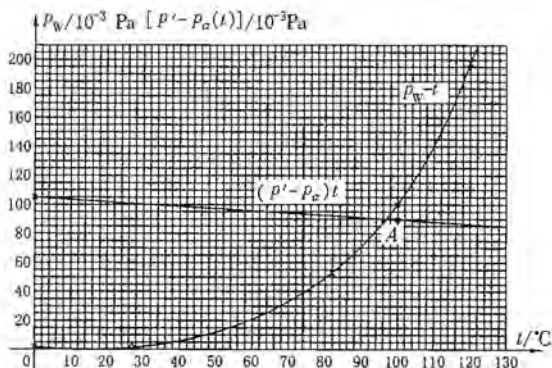


图 2-4-14

(2)由图 2-4-14 可知,在  $t=120\text{ }^\circ\text{C}$  时,水的饱和蒸汽压  $p_w(120)=198\times 10^3\text{ Pa}$ ,而在海平面处,大气压强  $p(0)=101.3\times 10^3\text{ Pa}$ .可见压力阀的附加压强为

$$\begin{aligned} p_s &= p_w(120) - p(0) = (198\times 10^3 - 101.3\times 10^3)\text{ Pa} \\ &= 96.7\times 10^3\text{ Pa}. \end{aligned} \quad (3)$$

在 5 000 m 高山上,大气压强与压力阀的附加压强之和为

$$\begin{aligned} p' &= p_s + p(5\ 000) = (96.7\times 10^3 + 53\times 10^3)\text{ Pa} \\ &= 149.7\times 10^3\text{ Pa}. \end{aligned} \quad (4)$$

若在  $t=t_2$  时阀被顶起,则此时的  $p_w$  应等于  $p'$ ,即

$$p_w = p'. \quad (5)$$

由图 2-4-14 可知

$$t_2 = 112\text{ }^\circ\text{C}. \quad (6)$$

此时锅内水开始沸腾,温度不再升高,按正确方法使用此压力锅,在 5 000 m 高山上锅内水的温度最高可达  $112\text{ }^\circ\text{C}$ .

(3)在未按正确方法使用压力锅时,锅内有空气,且设空气不溶于水.设加压力阀时,内部水蒸气已饱和.由图 2-4-13 可知,在  $t=27\text{ }^\circ\text{C}$  时,题中已给出水的饱和气压  $p_w(27)=3.6\times 10^3\text{ Pa}$ ,这时锅内空气的压强(用 Pa 表示)为

$$\begin{aligned} p_a(27) &= p(5\ 000) - p_w(27) = (53\times 10^3 - 3.6\times 10^3)\text{ Pa} \\ &= 49.4\times 10^3\text{ Pa}. \end{aligned} \quad (7)$$

当温度升高时,锅内空气的压强也随之升高,设在温度为  $t\text{ }^\circ\text{C}$  时,锅内空气压强为  $p_a(t)$ .则有

$$\begin{aligned} \frac{p_a(t)}{273+t} &= \frac{p_a(27)}{273+27}. \\ p_a(t) &= (164.7t + 45.0\times 10^3)\text{ Pa}. \end{aligned} \quad (8)$$

若在  $t=t'$  时压力阀刚好开始被顶起,则有

$$p_w(t') + p_a(t') = p'. \quad (9)$$

由此得

$$p_w(t') = p' - p_a(t') = (105 \times 10^3 - 164.7t') \text{ Pa.} \quad (10)$$

画出函数  $p' - p_a(t')$  的图线, 取

$$t = 0, p' - p_a(0) = 105 \times 10^3 \text{ Pa.}$$

$$t = 100^\circ\text{C}, p' - p_a(100) = 88.6 \times 10^3 \text{ Pa.}$$

由此二点便可在图 2-4-14 上画出直线, 此直线与该图中的  $p_w(t) - t$  曲线的交点为 A, A 即为所求的满足 (10) 式的点, 由图可看出与 A 点对应的温度为

$$t' = 97^\circ\text{C}. \quad (11)$$

即在压力阀刚开始被顶起时, 锅内水的温度是  $97^\circ\text{C}$ . 若继续加热, 压力阀被顶起后, 锅内空气随水蒸气一起被排出, 最终空气排净, 锅内水温仍可达  $112^\circ\text{C}$ .

**题 8** (2000 · 全国物理复赛题) 在一大水银槽中竖直插有一根玻璃管, 管上端封闭, 下端开口, 已知槽中水银液面以上的那部分玻璃管的长度  $l = 76 \text{ cm}$ , 管内封闭有  $n = 1.0 \times 10^{-3} \text{ mol}$  的空气, 保持水银槽与玻璃管都不动而设法使玻璃管内空气的温度缓慢地降低  $10^\circ\text{C}$ , 问在此过程中管内空气放出的热量为多少? 已知管外大气的压强为  $76 \text{ cmHg}$ , 每摩尔空气的内能  $E = C_V T$ , 其中  $T$  为绝对温度, 常量  $C_V = 20.5 \text{ J} \cdot (\text{mol} \cdot \text{K})^{-1}$ , 普适气体恒量  $R = 8.31 \text{ J} \cdot (\text{mol} \cdot \text{K})^{-1}$ .

**【分析】** 在温度降低过程中, 管内空气的内能减小, 外界对其做正功, 所求热量可由热力学第一定律计算, 其中功的数值可由  $p-V$  图上相关面积来表示.

**【解】** 设玻璃管内空气的长度为  $h$ , 大气压强为  $p_0$ , 管内空气的压强为  $p$ , 水银密度为  $\rho$ , 重力加速度为  $g$ , 由图 2-4-15(a) 可知

$$p + (l-h)\rho g = p_0. \quad (1)$$

根据题给的数据, 可知  $p_0 = l\rho g$ , 得

$$p = \rho gh. \quad (2)$$

若玻璃管的横截面积为  $S$ , 则管内空气的体积为

$$V = Sh. \quad (3)$$

由 (2)(3) 式得

$$p = \frac{V}{S} \rho g. \quad (4)$$

即管内空气的压强与其体积成正比. 由气态方程

$$pV = nRT,$$

得

$$\rho g \frac{V^2}{S} = nRT. \quad (5)$$

由 (5) 式可知, 随着温度降低, 管内空气的体积变小, 根据 (4) 式可知管内空气的压强也变小, 压强随体积的变化关系为  $p-V$  图上过原点的直线, 如图 2-4-15(b) 所示.

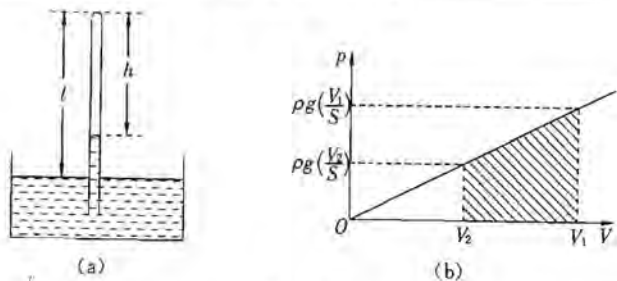


图 2-4-15

在管内气体的温度由  $T_1$  降到  $T_2$  的过程中, 气体的体积由  $V_1$  变到  $V_2$ , 体积缩小, 外界对气体做正功, 功的数值可用图中划有斜线的梯形面积来表示, 即有

$$W = \frac{1}{2} \rho g \left( \frac{V_1}{S} + \frac{V_2}{S} \right) (V_1 - V_2) = \rho g \left( \frac{V_1^2 - V_2^2}{2S} \right). \quad (6)$$

管内空气内能的变化

$$\Delta E = nC_V(T_2 - T_1). \quad (7)$$

设  $Q$  为外界传给气体的热量, 则由热力学第一定律  $W + Q = \Delta E$ , 有

$$Q = \Delta E - W. \quad (8)$$

由⑤⑥⑦⑧式代入得

$$Q = n(T_2 - T_1) \left( C_V + \frac{1}{2} R \right). \quad (9)$$

代入有关数据得

$$Q = -0.247 \text{ J}.$$

$Q < 0$ , 表示管内空气放出热量, 放出的热量为 0.247 J.

**题 9** (2007·全国物理竞赛题) 如图 2-4-16 所示, 在一个竖直放置的封闭的高为  $H$ 、内壁横截面积为  $S$  的绝热汽缸内, 有一质量为  $m$  的绝热活塞  $A$  把缸内分成上、下两部分. 活塞可在缸内贴着缸壁无摩擦地上下滑动. 缸内顶部与  $A$  之间串联着两个劲度系数分别为  $k_1$  和  $k_2$  ( $k_1 \neq k_2$ ) 的轻质弹簧.  $A$  的上方为真空;  $A$  的下方盛有一定质量的理想气体. 已知系统处于平衡状态,  $A$  所在处的高度 (其下表面与缸内底部的距离) 与两弹簧总共的压缩量相等皆为  $h_1 = \frac{H}{4}$ . 现给电炉丝  $R$  通电流对

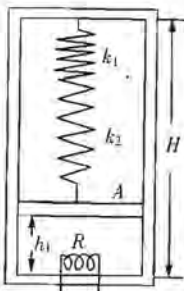


图 2-4-16

气体加热, 使  $A$  从高度  $h_1$  开始上升, 停止加热后系统达到平衡时活塞的高度为  $h_2 = \frac{3H}{4}$ . 求此过程中气体吸收的热量  $Q$ . 已知当体积不变时, 每摩尔该气体温度每升高 1 K 吸收的热量为  $\frac{3R}{2}$ ,  $R$  为普适气体恒量. 在整个过程中假设弹簧始终遵从胡克定律.

**【分析】** 这是一道热学与力学的综合题, 需要用到以下一系列物理规律: 一是

对气体加热前后的状态运用理想气体状态方程以及力学平衡条件,二是热力学第一定律,其中气体所做功可通过弹簧和活塞势能变化求得.

【解】两个弹簧串联时,作为一个弹簧来看,其劲度系数

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \quad (1)$$

设活塞 A 下面有  $\nu$  mol 气体. 当 A 的高度为  $h_1$  时,气体的压强为  $p_1$ , 温度为  $T_1$ . 由理想气体状态方程和平衡条件,可知

$$p_1 S h_1 = \nu R T_1. \quad (2)$$

$$p_1 S = k h_1 + m g. \quad (3)$$

对气体加热后,当 A 的高度为  $h_2$  时,设气体压强为  $p_2$ , 温度为  $T_2$ . 由理想气体状态方程和平衡条件,可知

$$p_2 S h_2 = \nu R T_2. \quad (4)$$

$$p_2 S = k h_2 + m g. \quad (5)$$

在 A 从高度  $h_1$  上升到  $h_2$  的过程中,气体内能的增量

$$\Delta U = \nu \frac{3}{2} R (T_2 - T_1). \quad (6)$$

气体对弹簧、活塞系统所做的功  $W$  等于弹簧弹性势能的增加和活塞重力势能的增加,即

$$W = \frac{1}{2} k (h_2^2 - h_1^2) + m g (h_2 - h_1). \quad (7)$$

根据热力学第一定律,有

$$Q = \Delta U + W. \quad (8)$$

由以上各式及已知数据可求得

$$Q = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} H^2 + \frac{5}{4} m g H.$$

**题 10** (2006·全国物理决赛题) 由于地球的自转及不同高度处的大气对太阳辐射吸收的差异,静止的大气中不同高度处气体的温度、密度都是不同的. 对于干燥的静止空气,在离地面的高度小于 20 km 的大气层内,大气温度  $T$ . 随高度的增大而降低,已知其变化率  $\frac{\Delta T}{\Delta z} = -6.0 \times 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $z$  为竖直向上的坐标.

现考查大气层中的一质量一定的微小空气团(在确定它在空间的位置时可当做质点处理),取其初始位置为坐标原点( $z=0$ ),这时气团的温度  $T$ 、密度  $\rho$ 、压强  $p$  都分别与周围大气的温度  $T_0$ 、密度  $\rho_0$ 、压强  $p_0$  相等. 由于某种原因,该微气团发生向上的小位移. 因为大气的压强随高度的增加而减小,微气团在向上移动的过程中,其体积要膨胀,温度要变化(温度随高度变化可视为线性的). 由于过程进行得不是非常快,微气团内气体的压强已来得及随时调整到与周围大气的压强相等,但尚来不及与周围大气发生热交换,因而可以把过程视为绝热过程. 现假定大气可视为理想气体,理想气体在绝热过程中,其压强  $p$  与体积  $V$  满足绝热过程方程  $pV^\gamma =$



C. 式中  $C$  和  $\gamma$  都是常量, 但  $\gamma$  与气体种类有关, 对空气,  $\gamma=1.40$ . 已知空气的摩尔质量  $\mu=0.029 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ , 普适气体恒量  $R=8.31 \text{ J} \cdot (\text{K} \cdot \text{mol})^{-1}$ . 试在上述条件下定量讨论微气团以后的运动.

设重力加速度  $g=9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $z=0$  处大气的温度  $T_0=300 \text{ K}$ .

**【分析】** 微气团的运动趋势取决于其小位移(用  $z$  表示)偏离初始位置(即平衡位置)后的受力状态. 该状态与大气中不同高度处的温度、密度等有关. 以微气团为研究对象运用热学中相关基本规律和牛顿定律, 正确写出作用于微气团上的加速度表达式, 对影响加速度因素作讨论即可判断其以后的运动.

**【解】** 设微气团中空气的质量为  $m$ , 当其位移为  $z$  时, 气团的体积为  $V$ , 气团内气体的密度为  $\rho$ , 气团周围大气的密度为  $\rho_c$ . 气团受到竖直向下的重力  $mg=V\rho g$  和竖直向上的浮力  $V\rho_c g$  作用, 若气团的加速度为  $a$ , 则由牛顿第二定律有

$$ma = -V\rho g + V\rho_c g = -V(\rho - \rho_c)g, \quad (1)$$

或有

$$a = -g \frac{\rho - \rho_c}{\rho}. \quad (2)$$

根据理想气体状态方程

$$pV = \frac{m}{\mu} RT. \quad (3)$$

可知气体的密度

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\mu p}{RT}. \quad (4)$$

利用④式, 注意到  $p = p_c$ , ②式可化成

$$a = -g \frac{T_c - T}{T_c}. \quad (5)$$

周围大气在  $z$  处的温度  $T_c$  等于  $z=0$  处的温度  $T_0$  加上从 0 到  $z$  温度的增量, 即

$$T_c = T_0 + \frac{\Delta T_c}{\Delta z} z. \quad (6)$$

若气团中气体温度随高度的变化率为  $\frac{\Delta T}{\Delta z}$ , 根据题意, 有

$$T = T_0 + \frac{\Delta T}{\Delta z} z. \quad (7)$$

$T_0$  为气团位于初始位置时气团中气体的温度. 根据题意  $T_0 = T_0$ , 把⑥、⑦式代入⑤式得

$$a = -\frac{g}{T_c} \left( \frac{\Delta T_c}{\Delta z} - \frac{\Delta T}{\Delta z} \right) z. \quad (8)$$

在⑧式中, 若  $\left( \frac{\Delta T_c}{\Delta z} - \frac{\Delta T}{\Delta z} \right) > 0$ , 则加速度方向向下, 作用于气团的力有使气团回到初始位置的趋势, 这样, 大气层中的大气就处于稳定状态; 反之, 气团将远离其

初始位置,大气层中的大气处在不稳定状态,因周围大气温度随高度的变化率  $\frac{\Delta T_e}{\Delta z}$  是已知的,故只要知道气团中气体温度随高度的变化率,便可对气团的运动作出判断.

大气的压强随高度的增加而减小,在高度为  $z$  和  $z + \Delta z$  处的压强差

$$\Delta p_c = -\rho_c g \Delta z. \quad (9)$$

式中  $\rho_c$  为  $z$  处的空气的密度,与温度、压强有关,由④式表示.式中负号表示高度增加时,大气压强是减小的.把④式代入⑨式得

$$\Delta p_c = -\frac{\mu p_c}{RT_c} g \Delta z. \quad (10)$$

质量为  $m$  的气团在上升过程中,其压强将随周围大气的压强的减小而减小,体积要增大,气团对周围空气做功.因为过程是绝热的,气团的内能要减少,因而温度要降低,温度、压强的变化应满足绝热过程的规律.试题给出的绝热过程方程是关于压强与体积间的关系,利用理想气体状态方程,可把绝热过程方程表示为温度与压强间的关系.

由③式得

$$V = \frac{mRT}{\mu p}. \quad (11)$$

把⑪式代入

$$pV = C.$$

得

$$T = C \frac{1}{\gamma} \frac{\mu}{mR} p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}. \quad (12)$$

当气团的压强由  $p$  变到  $p + \Delta p$  时,气团的温度将由  $T$  变到  $T + \Delta T$ .由⑫式

$$T + \Delta T = C \frac{1}{\gamma} \frac{\mu}{mR} (p + \Delta p)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

利用二项式定理,忽略  $\Delta p$  的高次项,并注意到⑫式得

$$T + \Delta T = C \frac{1}{\gamma} \frac{\mu}{mR} \left[ p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \frac{\gamma-1}{\gamma} p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}-1} (\Delta p) \right] = T + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{T}{p} \Delta p.$$

故有

$$\Delta T = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{T}{p} \Delta p. \quad (13)$$

根据题意,  $p = p_c$ ,  $\Delta p = \Delta p_c$ ,由⑦式、⑩式和⑬式得

$$\frac{\Delta T}{\Delta z} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu g}{R} \frac{T_0}{T_0 + \left( \frac{\Delta T_e}{\Delta z} + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu g}{R} \right) z}. \quad (14)$$

已知  $\frac{\Delta T_e}{\Delta z} = -6.0 \times 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}$ ,代入有关数据可求得

$$\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu g}{R} = 9.8 \times 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}.$$



当  $z$  不是很大时,有

$$T_{\infty} + \left( \frac{\Delta T_c}{\Delta z} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\rho g}{R} \right) z \approx T_0.$$

故有

$$\frac{\Delta T}{\Delta z} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\rho g}{R}. \quad (15)$$

代入题给的有关数据得

$$\frac{\Delta T}{\Delta z} = -9.8 \times 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}. \quad (16)$$

负号表示高度增加时,气团的温度要下降. 可见  $\left( \frac{\Delta T_c}{\Delta z} - \frac{\Delta T}{\Delta z} \right) > 0$ , 作用于气团的合力的方向与气团位移的方向相反, 指向气团的初始位置, 气团发生向上位移后, 将要回到初始位置. 当  $z$  不是很大时, ⑬式中的  $T_0$  可以用  $T_{\infty}$  代替, 可知气团将在初始位置附近做简谐振动. 振动的圆频率

$$\omega = \sqrt{\frac{R}{T_{\infty}} \left( \frac{\Delta T_c}{\Delta z} - \frac{\Delta T}{\Delta z} \right)}. \quad (17)$$

代入数据, 得

$$\omega = 1.1 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}.$$

**题 11** (2005·全国物理竞赛题) 如图 2-4-17 所示, A、B 是两个内径相同的圆柱形汽缸, 竖直放置在大气中, 大气压强为  $p_0$ . 质量都是  $m$  的活塞分别把都是  $n \text{ mol}$  的同种理想气体封闭在汽缸内, 汽缸横截面的面积为  $S$ . 汽缸 B 的活塞与一处在竖直状态的劲度系数为  $k$  的轻质弹簧相连, 弹簧的上端固定. 初始时, 两汽缸中气体的温度都是  $T_1$ , 活塞都处在平衡状态, 弹簧既未压缩亦未拉长. 现让两汽缸中的气体都缓慢降温至同一温度, 已知此时 B 中气体的体积为其初始体积的  $\alpha$  倍, 试求在此降温过程中汽缸 A 中气体传出的热量  $Q_A$  与汽缸 B 中气体传出的热量  $Q_B$  之差.

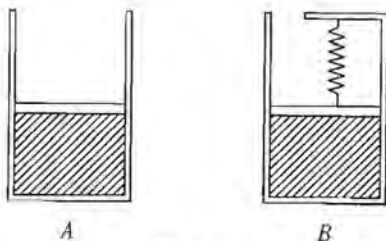


图 2-4-17

**【分析】** 由于两容器中气体内能变化量相同. 由热力学第一定律知, 有  $Q_A - Q_B = W_A - W_B$ . 对于本题求功要比求  $Q$  容易. 具体求解时应注意到 A 中气体经历的是等压过程, 而求  $W_B$  则应考虑弹簧拉力做的功.

**【解】** 当温度缓慢下降时, 根据题给的条件, 可以判定 B 中气体的体积将变



小,末态的体积应小于初态的体积,试题给出的  $\alpha$  是小于 1 的.

由于 A、B 两汽缸中的气体是同种、同摩尔数的理想气体,初态的温度相等,末态的温度也相等,故它们内能的改变相同. 根据热力学第一定律可知, A、B 中的气体放出的热量  $Q_A$  与  $Q_B$  之差应等于外界对它们做的功  $W_A$  与  $W_B$  之差,即有

$$Q_A - Q_B = W_A - W_B. \quad (1)$$

对汽缸 B 中的气体,当温度缓慢下降时,活塞缓慢下移,可以认为活塞时时处于平衡状态. 当活塞向下移动一段距离  $x$  时, B 中气体的压强

$$p_B = p_0 + \frac{mg}{S} - k \frac{x}{S}. \quad (2)$$

在 B 中气体的体积由初始值  $V_B$  变到末态值  $\alpha V_B$  的过程中,活塞向下移动的距离

$$x = \frac{1-\alpha}{S} V_B. \quad (3)$$

大气压力  $p_0 S$  和重力  $mg$  是恒力,弹簧的拉力  $kx$  与活塞下移的距离成正比,在此过程中外界对气体做的功

$$W_B = (p_0 S + mg)x - \frac{1}{2} k x^2. \quad (4)$$

由理想气体状态方程,当 B 中气体处在初态时有

$$\left(p_0 + \frac{mg}{S}\right) V_B = nRT_1. \quad (5)$$

由③④⑤式得

$$W_B = (1-\alpha)nRT_1 - \frac{1}{2} k \frac{(1-\alpha)^2}{S^2} \left[\frac{nRT_1}{p_0 + \frac{mg}{S}}\right]^2. \quad (6)$$

对于 A 中的气体,当温度缓慢下降时,气体的压强

$$p_A = p_0 + \frac{mg}{S}. \quad (7)$$

$p_A$  是恒量,气体经历的是等压过程. 若用  $V_{A1}$ 、 $V_{A2}$  分别表示 A 中气体初态和末态的体积,则外界对 A 中气体做的功

$$W_A = p_A (V_{A1} - V_{A2}). \quad (8)$$

因

$$p_A V_{A1} = nRT_1. \quad (9)$$

若末态的温度为  $T_2$ , 则

$$p_A V_{A2} = nRT_2. \quad (10)$$

因为 A、B 中气体初态的压强相等,温度亦相同,气体的摩尔数又相等,故有

$$V_{A1} = V_B. \quad (11)$$

又已知 A、B 中气体末态的温度也相同, B 中气体末态的状态方程

$$\left(p_0 + \frac{mg}{S} - \frac{k}{S}x\right) \alpha V_B = nRT_2. \quad (12)$$



由⑦~⑩式得

$$W_A = (1-a)nRT_1 + k \frac{(1-a)}{S^2} a \left( \frac{nRT_1}{p_0 + \frac{mg}{S}} \right)^2 \quad (13)$$

把⑥和⑬式代入①式得

$$Q_A - Q_B = \frac{k}{2} (1-a^2) \left( \frac{nRT_1}{p_0 S + mg} \right)^2.$$

**题 12** (2001·全国物理决赛题) 有一个用不会收缩也不会伸长的柔软的导热性能良好的材料制成的薄皮气球, 球皮质量  $M=12.000 \text{ kg}$ , 气球的最大容积为  $V_f=12.500 \text{ m}^3$ . 当气球位于地面时, 给气球充入  $n=500.00 \text{ mol}$  的氦气后, 释放气球. 问: 该气球上升的最大高度为多少? 气球上升过程中的加速度  $a$  与气球高度  $h$  的关系如何? 在图 2-4-18 中画出  $a-h$  图线并标明关键点的坐标数值.

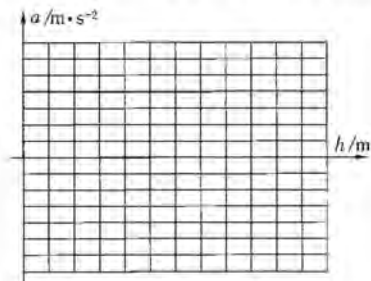


图 2-4-18

已知氦的摩尔质量  $\mu_{\text{He}}=4.0026 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ , 大气压强与地面高度  $h$  之间的关系为

$$p(h) = p_0 e^{-\sigma h}.$$

式中  $p_0=1.0000 \times 10^5 \text{ Pa}$  为地面处的大气压强,  $\sigma = \frac{\mu_0 g}{RT}$ , 其中  $\mu_0$  为大气的平均摩尔质量, 其数值为  $28.964 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ ,  $g=9.800 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  为重力加速度,  $R=8.315 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  为气体普适恒量,  $T$  为大气的温度. 为了使问题简化, 我们假设在气球上升的范围内, 大气温度和氦气的温度都没有变化, 其数值为  $T=289.64 \text{ K}$ , 由此, 可求得  $\sigma=1.179 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ , 假设气球上升过程中气球与空气间的摩擦可忽略不计.

提示: 在  $x \ll 1$  时, 指数函数  $e^x$  可用下面的近似公式进行计算, 即  $e^x = 1+x$ .

**【分析】** 气球在上升过程中经历了三个阶段: 开始时气球体积不断膨胀, 但所受浮力不变. 在其体积等于  $V_f$  以后, 体积不再变化. 然而大气密度不断减小, 气球所受浮力亦减小, 直至气球上升加速度为零. 以后气球所受浮力将小于其重力, 气球做减速运动. 当其速度下降为零时, 气球上升至最大高度, 因此  $V=V_f$ ,  $a=0$  和  $v=0$  应作为上述三个阶段的终点. 综合运用相关热学和力学知识并适当作物理近

似, 本题得出求解. 此外, 仔细观察气球加速度为零的上下两个区间, 可以发现气球近似满足简谐运动规律, 故本题还有第二种解法.

**【解】 方法一:**

1. 先求 500.00 mol 氦气在压强为  $p_0$ , 温度为  $T$  时的体积  $V_0$ . 已知理想气体的状态方程为

$$pV = \frac{m}{\mu}RT = nRT. \quad (1)$$

由此可求得

$$V_0 = \frac{nRT}{p_0}. \quad (2)$$

代入已知数据, 得

$$V_0 = \frac{500.00 \times 8.315 \times 289.64}{1.000 \times 10^5} \text{ m}^3 = 12.042 \text{ m}^3. \quad (3)$$

因  $V_0 < V_f$ , 可知气球体积未达到最大值, 在地面处其体积为  $V_0$ . 设此时它所受的重力为  $G$ , 浮力为  $F_{b0}$ , 则有

$$G = (M + n\mu_{He})g = 137.21 \text{ N}. \quad (4)$$

然后求浮力  $F_{b0}$ . 由于气球排开空气的体积、压强及温度均与氦气相同, 排开空气的摩尔数应等于氦气的摩尔数, 排开空气的质量为  $n\mu_a$ , 因而气球所受浮力为

$$F_{b0} = n\mu_a g = 141.92 \text{ N}. \quad (5)$$

由  $F_{b0} > G$ , 可知气球将上升, 上升力  $F_0$  及加速度  $a_0$  分别为

$$F_0 = F_{b0} - G = 4.71 \text{ N}. \quad (6)$$

$$a_0 = \frac{F_0}{M + n\mu_{He}} = 0.336 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}. \quad (7)$$

2. 气球从地面(高度  $h=0$ )上升时, 大气压强随高度  $h$  的增大而减小, 气球体积  $V$  (也就是排开空气的体积)膨胀, 直至气球体积  $V=V_f$  时为止. 在此过程中, 氦气的压强始终等于大气压强. 根据题设, 其温度也始终等于大气的温度, 所以排开空气的摩尔数始终为 500.00 mol, 所受浮力  $F_b$  也不变, 即

$$F_b = F_{b0}. \quad (8)$$

设  $V=V_f$  时气球的高度为  $h_1$ , 则在  $h=0$  到  $h=h_1$  的过程中, 气球所受的合力  $F_1$  为

$$F_1 = F_{b0} - G = F_0 = 4.71 \text{ N}. \quad (9)$$

其加速度为

$$a_1 = a_0 = 0.336 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}. \quad (10)$$

气球的运动为匀加速运动. 氦气做等温膨胀, 由玻意耳定律得

$$p_0 V_0 = p_f V_f = V_f p_0 e^{-gh_1}.$$

由上式可求得

$$h_1 = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{V_f}{V_0} = \frac{1}{1.179 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}} \ln \frac{12.500}{12.042} = 316.6 \text{ m}. \quad (11)$$



由动能定理可求得  $h=h_1$  时气球的动能  $E_{k1}$  为

$$E_{k1} = F_1 h_1 = 1491 \text{ J}. \quad (12)$$

3. 气球上升至高度  $h_1$  后将继续上升, 气球的体积保持定值  $V_f$ , 不再膨胀, 其温度及压强也保持不变. 大气压强  $p$  随高度  $h$  增大而减小,  $p = p_0 e^{-\sigma h}$ , 由理想气体状态方程可知气体的密度  $\rho = \frac{m}{V} = \frac{\mu p}{RT}$ , 温度不变时,  $\rho \propto p$ , 故气球上升时, 所受浮力将因大气密度  $\rho_0$  的减小而减小, 气体所受合力将随  $h$  的增大而减小. 因此, 气球做加速度大小逐渐减小的变加速运动.

设高度为  $h$  处的浮力为  $F_b'$ ,  $h=0$  处大气密度为  $\rho_{00}$ , 则有

$$F_b' = V_f \rho_0 g = V_f g \rho_{00} e^{-\sigma h}, \quad h > h_1. \quad (13)$$

气球受到的合力

$$F' = F_b' - G = V_f g \rho_{00} e^{-\sigma h} - G, \quad h > h_1. \quad (14)$$

设气球上升到高度  $h_2$  时, 作用于气球的合力等于零, 则有

$$G = V_f g \rho_{00} e^{-\sigma h_2}. \quad (15)$$

以  $\rho_{00} = \frac{n\mu_0}{V_0}$  代入, 得

$$G = n\mu_0 g \frac{V_f}{V_0} e^{-\sigma h_2}.$$

由此求得

$$h_2 = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{V_f n\mu_0 g}{V_0 G} = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{V_f}{V_0} + \frac{1}{\sigma} \ln \frac{n\mu_0 g}{G} = h_1 + \frac{1}{\sigma} \ln \frac{F_{k0}}{G}. \quad (16)$$

代入有关数据, 得

$$h_2 = 6.03 \times 10^2 \text{ m}. \quad (17)$$

在气球从高度  $h_1$  升到  $h_2$  的过程中, 作用于气球的浮力  $F_b'$  是变力, 利用⑮式可将⑬式改写为

$$F_b' = \rho_{00} V_f g e^{-\sigma h_2} e^{-\sigma(h-h_2)} = \tilde{G} e^{-\sigma(h-h_2)}.$$

作用于气体的合力为

$$F' = F_b' - G = G[e^{-\sigma(h-h_2)} - 1]. \quad (18)$$

加速度  $a_2$  与  $h$  的关系为

$$a_2 = g[e^{-\sigma(h-h_2)} - 1].$$

在  $h$  由  $h_1$  到  $h_2$  的过程中, 对应的  $(h-h_2)$  则由  $-(h_2-h_1)$  到 0, 因为

$$\sigma(h_2-h_1) = 1.179 \times 10^{-4} \times (604 - 316.6) = 3.4 \times 10^{-2} \ll 1.$$

可用近似关系式  $e^x = 1+x$  对  $F_b'$  和  $a_2$  进行计算. 故有

$$F' = \sigma G(h_2 - h). \quad (19)$$

即  $F'$  与高度  $h$  成线性关系, 在计算气球上升过程中  $F'$  对气球所做的功时, 可以用合力的算术平均值进行计算. 当  $h=h_1$  时, 合力最大, 由⑳式可知

$$F_{\max}' = F_0 = 4.71 \text{ N}.$$

当  $h=h_2$  时,合力最小且为零,即

$$F_{\min}'=0.$$

设气球在  $h=h_2$  处的动能为  $E_{k2}$ ,则由动能定理可得

$$E_{k2}-E_{k1}=\frac{1}{2}(F_{\max}' + F_{\min}') (h_2-h_1)=\frac{1}{2}F_0(h_2-h_1),$$

代入有关数据得

$$E_{k2}-E_{k1}=675 \text{ J}.$$

$$E_{k2}=(1.491 \times 10^3 + 675) \text{ J} = 2.166 \times 10^3 \text{ J}. \quad (20)$$

在气球从  $h=h_1$  到  $h=h_2$  的过程中的加速度  $a_2$  近似与  $h-h_2$  成指数关系,也可近似为与  $h$  成线性关系,即  $a_2 \approx \sigma g(h_2-h)$ , 在  $h=h_2$  处,  $a_2=0$ .

4. 气球由高度  $h_2$  处继续上升时,浮力小于重力,合力的方向向下,气球做减速运动,气球克服合力做功,以消耗自己的动能为代价.当气球的动能变为零时,上升的高度达到最大值,设此高度为  $H$ .由(19)式可知,向下的合力  $F''=G-F_b' \approx G\sigma(h-h_2)$ ,其大小与上升高度也成线性关系.当  $h=h_2$  时,合力等于零.当  $h=H$  时,向下合力的大小为

$$F''(H)=G\sigma(H-h_2). \quad (21)$$

由动能定理

$$E_{k2}=\frac{1}{2}F''(H-h_2)=\frac{1}{2}G\sigma(H-h_2)^2. \quad (22)$$

解得

$$H=\sqrt{\frac{2E_{k2}}{G\sigma}}+h_2=(517+603) \text{ m}=1120 \text{ m}. \quad (23)$$

气球从  $h=h_2$  上升到  $H$  的过程中,其加速度  $a_3$  与  $h$  也成线性关系,但其方向变为向下,在  $h=H$  处,  $a_3$  的大小为

$$|a_3(H)|=\frac{F''(H)}{M+n\mu_{\text{球}}} \approx g\sigma(H-h_2). \quad (24)$$

代入有关数值,得

$$a_3(H)=-0.597 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}. \quad (25)$$

5. 气球的加速度  $a$  与高度  $h$  的关系的图线.如图 2-4-19.

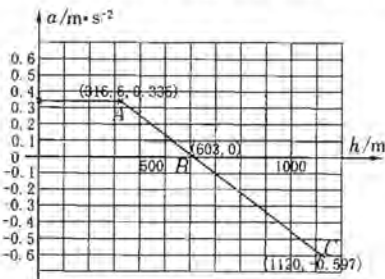


图 2-4-19



方法二 直到求出  $h_2$  的数值和⑬式为止,解法与第一种解法相同,此后可求解如下:

⑬式在  $h_1 \leq h \leq H$  的范围内均适用,  $h = h_2$  处浮力与重力相互平衡,  $h < h_2$  时合力向上,指向平衡点;  $h > h_2$  时合力向下,也指向平衡点. 当  $\sigma(h - h_2) \ll 1$  时,对  $e^{-\sigma(h-h_2)}$  可作近似计算,得

$$F' = -\sigma G(h - h_2).$$

令  $x$  为气球相对于平衡点的位移  $h - h_2$ , 则有

$$F' = -\sigma Gx. \quad (19')$$

由此可见气球的运动为简谐运动, 设气球到达最高点时的高度为  $H$ , 则振幅为

$$A = H - h_2. \quad (20')$$

在  $h = h_1$  处, 动能为  $E_{k1}$ .

$$x = h_1 - h_2. \quad (21')$$

由简谐运动的能量关系可得

$$\frac{1}{2} \sigma G (H - h_2)^2 = \frac{1}{2} \sigma G (h_1 - h_2)^2 + E_{k1}.$$

$$(H - h_2)^2 = (h_1 - h_2)^2 + \frac{2E_{k1}}{\sigma G},$$

$$H = \sqrt{(h_1 - h_2)^2 + \frac{2E_{k1}}{\sigma G}} + h_2.$$

以  $h_2 - h_1 = 286 \text{ m}$ ,  $E_{k1} = 1491 \text{ J}$ ,  $\sigma = 1.179 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ ,  $G = 137.21 \text{ N}$  代入, 得

$$H = (516 + 603) \text{ m} = 1.12 \times 10^3 \text{ m}. \quad (22')$$

在  $h = h_1$  到  $h = H$  的过程中, 加速度为

$$a = -\sigma g (h - h_2).$$

当  $h = H$  时, 其加速度为

$$a(H) = \sigma g (H - h_2) = 0.597 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}. \quad (23')$$

所得结果与第一种解法相同.

**题 13** (1999 · 全国物理竞赛题) 在如图 2-4-20 所示的装置中, 上下两个容器和连接它们的细长管都是用热容量很小的良导热体做成的, 管长为  $l$ ,  $K$  为阀门, 整个装置与外界绝热. 开始时, 阀门关闭, 两容器中都盛有质量为  $m$ , 单位质量的热容量为  $C$  的某种液体. 平衡时, 温度都是  $T_0$ . 由于该液体的蒸汽分子受到重力的作用, 所以平衡时, 在管内的气体分子并非均匀分布, 而是上疏下密, 已知其蒸汽压强是按指数规律分布,  $p_h = p_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}$ . 式中  $h$  是管内某点距下面容器中液面的高度,  $p_h$  是该点的蒸汽的压强,  $p_0$  是下面容器中液面处 (即  $h = 0$  处) 蒸汽的压强,  $m$  是一个蒸汽分子的质量,  $T$  是热力学温度,  $k$  是一个常数. 现在打开阀门, 试论述该系统的状态将发

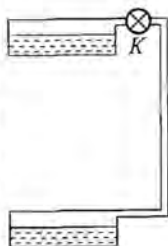


图 2-4-20

生怎样的变化,并估算出变化最后的结果.

**【分析】** 由饱和蒸汽压的概念和蒸汽压强的分布规律,可知阀门打开后,左边的蒸汽将不断地向右方迁移,导致上方液体不断汽化、下方蒸汽不断液化,其间还伴随重力势能与内能间的转化,从而使系统温度上升.

**【解】** (1) 在打开阀门前,平衡时,上下容器中液体表面处的蒸汽皆为饱和蒸汽. 因为温度相同,所以其饱和蒸汽压相同. 但在阀门两旁,由指数分布规律可知,蒸汽的蒸汽压不同. 在左边,因为容器内液面上方空间的高度差很小,所以蒸汽压几乎等于液面处的饱和蒸汽压;而在右边,由于管较长,所以蒸汽压明显小于下面容器内液面处的饱和蒸汽压,因而也小于阀门左边的蒸汽压. 这样,打开阀门后,左边蒸汽将向右边迁移. 按照指数分布规律,将使下面容器中表面处的蒸汽压大于饱和蒸汽压,从而有一部分蒸汽液化(凝结),使下方容器中的液量增加. 另一方面,上面容器中液面上升的蒸汽由于向阀门右边迁移,从而使蒸汽压降低,造成液面处的蒸汽压小于饱和蒸汽压. 这样,上面容器中液体将汽化(蒸发),使液量减少. 以上所述的过程将持续不断地进行,直到上面容器中的液体全部汽化而凝结在下面容器中为止,此后状态将不再变化.

(2) 由于最后结果是上面容器中的液体全部转移到下面容器中,所以从能量来看,就是上面质量为  $m$  的液体的重力势能  $mgL$  转化为总质量为  $2m$  的液体的内能,从而使系统温度上升. 若忽略容器、长管以及蒸汽等的热容量的影响,用  $T$  表示最后的温度,则由能量守恒定律可知

$$mgL = 2mC(T - T_0). \quad (1)$$

$$T = \frac{gL}{2C} + T_0. \quad (2)$$

#### 例 14 (2005·亚洲物理竞赛题)

##### 汽缸里的活塞(piston)与弹簧(spring)

考虑  $n=2$  mol 的理想气体氦气,置于一竖直放置的圆柱体汽缸中,如图 2-4-21 所示. 水平放置的活塞可以在汽缸中无摩擦地上下运动. 活塞质量为  $m=10$  kg(设  $g=9.8$  m/s<sup>2</sup>),汽缸截面积为  $A=500$  cm<sup>2</sup>. 活塞被一无质量的弹簧与汽缸上端连接,活塞向下运动时将氦气向下压缩,活塞上方为真空. 系统开始阶段活塞与氦气处于平衡状态时,弹簧处于未形变状态,氦气压强为  $p_0$ 、温度为  $T_0=300$  K、体积为  $V_0$ .

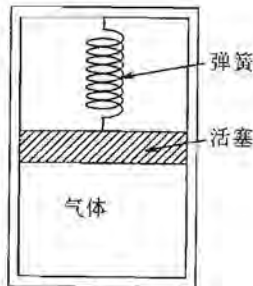


图 2-4-21

假定弹簧劲度系数  $k = \frac{mgA}{V_0}$ , 气体常数  $R = 8.314$  J

$\cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$ , 对于单原子氦气, 比热容(Laplace 常数)  $\gamma = \frac{5}{3}$ .

(a) 活塞在平衡位置上下作小幅谐振动, 计算其谐振频率  $f$ .



(b) 从初始平衡状态出发将活塞向下压缩气体至原来体积的一半, 无初速度释放活塞任其运动. 忽略气体渗漏, 也忽略汽缸、活塞、弹簧等热容量, 即所有过程都是绝热的. 计算在活塞速度为  $\sqrt{\frac{4gV_0}{5A}}$  时氦气体积的所有可能的数值.

**【分析】** 首先应正确分析振子(即活塞)在偏离平衡位置任意处(可设为  $x$ ) 时受到的各种力, 即重力、弹性力以及气体在绝热变化中作用于活塞的压力. 综合运用力学和热学两方面的物理知识以及小幅振动的近似条件(即  $Ax \ll V_0$ ), 只要导出简谐运动所满足的标准方程, 即可求得振动频率, 对于第 2 问可从能量守恒予以考虑. 正确写出振动过程中弹性势能、气体对活塞所做绝热功以及活塞的势能和动能(与速度相关)的表达式是求解第 2 问的关键.

**【解】** (a) 活塞的振动频率

当活塞偏离其平衡位置的位移为  $x$ (方向取向下为正, 向上为负) 时, 其运动方程式为

$$m \ddot{x} = -kx - pA + mg. \quad (1)$$

式中  $p$  为气体的压强. 由于题设汽缸内气体状态的变化皆为绝热过程, 故  $pV^\gamma = p_0V_0^\gamma$ , 得

$$p = \frac{p_0V_0^\gamma}{(V_0 - Ax)^\gamma} = \frac{p_0}{\left(1 - \frac{Ax}{V_0}\right)^\gamma}. \quad (2)$$

若活塞作小幅振动, 则  $Ax \ll V_0$ . ②式可近似为

$$p \approx p_0 \left(1 + \gamma \frac{Ax}{V_0}\right). \quad (3)$$

将③式代入①式, 可得

$$m \ddot{x} \approx -kx - p_0A \left(1 + \gamma \frac{Ax}{V_0}\right) + mg. \quad (4)$$

由于活塞处于静止平衡时, 弹簧无伸缩量, 故  $p_0A = mg$ , 因此④式可改写为

$$m \ddot{x} \approx - \left[ k + p_0A \left( \gamma \frac{A}{V_0} \right) \right] x. \quad (5)$$

代入  $k = \frac{mgA}{V_0}$ , 上式可写为

$$\begin{aligned} m \ddot{x} &\approx - \left[ \frac{mgA}{V_0} + mg \left( \gamma \frac{A}{V_0} \right) \right] x = - \frac{mgA}{V_0} (1 + \gamma) x, \\ \ddot{x} + \left[ (1 + \gamma) \frac{gA}{V_0} \right] x &\approx 0. \end{aligned} \quad (6)$$

上式为标准的简谐运动方程式, 其振动频率为

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{(1 + \gamma) \frac{gA}{V_0}}. \quad (7)$$

利用理想气体方程式  $p_0V_0 = nRT_0$ , 上式可改写为



$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{(1+\gamma) \frac{g p_0 A}{nRT_0}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{(1+\gamma) \frac{mg^2}{nRT_0}} \quad (8)$$

代入已知数据  $\gamma = \frac{5}{3}$ ,  $m = 10 \text{ kg}$ ,  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ,  $n = 2 \text{ mol}$ ,  $R = 8.314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ ,  $T_0 = 300 \text{ K}$ , 得活塞作小幅振动的频率为

$$f = 0.114 \text{ Hz}$$

(b) 活塞被下压释放后的气体体积

起始时活塞处于静止平衡状态, 弹簧的伸缩量为零, 故  $p_0 A = mg$ . 汽缸内的气体体积为

$$V_0 = \frac{nRT_0}{p_0} = \frac{nRT_0 A}{mg} \quad (9)$$

按题设活塞受外力作用下压, 先将汽缸内的气体压缩至  $\frac{1}{2}V_0$ , 然后自由释放.

当气体的体积由  $\frac{1}{2}V_0$  膨胀至  $V$  时, 气体对外界所做的功为

$$W_{\text{gas}} = \int_{\frac{V_0}{2}}^V p dV = \int_{\frac{V_0}{2}}^V \frac{p_0 V_0^\gamma}{V^\gamma} dV = \frac{p_0 V_0^\gamma}{1-\gamma} \left[ V^{1-\gamma} - \left(\frac{V_0}{2}\right)^{1-\gamma} \right] \quad (10)$$

注: (10) 式也可利用气体内能的变化得出, 即

$$W_{\text{gas}} = -\Delta E = -nC_V(T - T_0')$$

式中  $T_0'$  为气体体积等于  $\frac{1}{2}V_0$  时的温度. 由于  $C_p = C_V + R$ , 且  $\frac{C_p}{C_V} = \gamma$ ,

故  $C_V = \frac{R}{\gamma-1}$ . 代入上式, 得

$$W_{\text{gas}} = \frac{nR}{1-\gamma}(T - T_0') = \frac{1}{1-\gamma} \left[ pV - p_0' \left(\frac{V_0}{2}\right) \right],$$

利用绝热过程的气体状态方程式,  $pV^\gamma = p_0' \left(\frac{V_0}{2}\right)^\gamma = p_0 V_0^\gamma$ , 可得

$$W_{\text{gas}} = \frac{p_0 V_0^\gamma}{1-\gamma} \left[ V^{1-\gamma} - \left(\frac{V_0}{2}\right)^{1-\gamma} \right].$$

当气体的体积由  $\frac{1}{2}V_0$  膨胀至  $V$  时, 活塞的重力势能的变化为

$$\Delta U_g = mg\Delta h = mg \left( \frac{V - \frac{V_0}{2}}{A} \right) \quad (11)$$

弹簧的弹性势能变化为

$$\Delta U_e = \frac{1}{2} kx^2 - \frac{1}{2} kx_0^2$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{mgA}{V_0} \right) \left( \frac{V_0 - V}{A} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{mgA}{V_0} \right) \left( \frac{V_0 - \frac{V_0}{2}}{A} \right)^2$$



$$= \frac{1}{2} \left( \frac{mgV_0}{A} \right) \left( 1 - \frac{V}{V_0} \right)^2 - \frac{1}{8} \left( \frac{mgV_0}{A} \right). \quad (12)$$

当气体的体积为  $V$  时, 活塞的速率等于  $\sqrt{\frac{4gV_0}{5A}}$ , 故活塞的动能为

$$E_k = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{2mgV_0}{5A}. \quad (13)$$

利用能量守恒定律, 可得

$$W_{\text{gas}} = \Delta U_g + \Delta U_c + E_k. \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{p_0 V_0^\gamma}{1-\gamma} \left[ V^{1-\gamma} - \left( \frac{V_0}{2} \right)^{1-\gamma} \right] &= mg \left[ \frac{V - V_0}{2} \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{mgV_0}{A} \right) \left( 1 - \frac{V}{V_0} \right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{8} \frac{mgV_0}{A} + \frac{2mgV_0}{5A}. \end{aligned}$$

代入  $p_0 = \frac{mg}{A}$ , 上式可写为

$$\frac{mgV_0}{A(1-\gamma)} \left[ \frac{V^{1-\gamma}}{V_0^{1-\gamma}} - \left( \frac{1}{2} \right)^{1-\gamma} \right] = mg \left[ \frac{V - V_0}{2} \right] + \frac{mgV_0}{2A} \left( 1 - \frac{V}{V_0} \right)^2 + \frac{11}{40} \frac{mgV_0}{A}. \quad (15)$$

设  $s = \frac{V}{V_0}$ , 则上式可写为

$$\frac{1}{1-\gamma} \left[ s^{1-\gamma} - \left( \frac{1}{2} \right)^{1-\gamma} \right] = \left( s - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} (1-s)^2 + \frac{11}{40}. \quad (16)$$

代入  $\gamma = \frac{5}{3}$ , 得

$$\frac{1}{2} s^{\frac{2}{3}} + \frac{11}{40} + \frac{3}{2} \left[ s^{\frac{2}{3}} - \left( \frac{1}{2} \right)^{-\frac{2}{3}} \right] = 0. \quad (17)$$

上式的数值解为

$$s_1 = 0.74 \text{ 或 } s_2 = 1.30. \quad (18)$$

所对应的气体体积分别为

$$\begin{aligned} V_1 &= 0.74V_0 = 0.74 \frac{nRT_0 A}{mg} \\ &= 0.74 \times \frac{2 \times 8.314 \times 300 \times 500 \times 10^{-4}}{10 \times 9.8} \text{ m}^3 = 1.9 \text{ m}^3. \end{aligned}$$

$$V_2 = 1.30V_0 = 1.30 \frac{nRT_0 A}{mg} = 3.3 \text{ m}^3.$$

### 题 15 (2004 · 亚洲物理竞赛题)

#### 两种气体系统的压缩和膨胀

一汽缸被可移动的隔板  $NM$  分成两部分. 汽缸的左气室(隔板  $NM$  和汽缸底部之间, 如图 2-4-22) 里面有 1 摩尔的水蒸气. 右气室限制在隔板  $NM$  和活塞  $AB$  之间, 里面装有 1 摩尔的氮气( $N_2$ ).

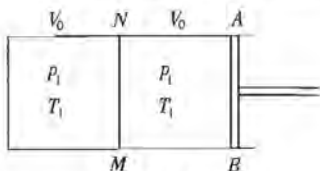


图 2-4-22

开始时,两个气室中的气体的温度和体积相等,隔板  $NM$  是良导热体,其自身的热容量很小,可以忽略不计。

在相同温度下,液态水的比容与水蒸气相比可以忽略不计。

汽化热  $L$  定义为单位质量的物质在同一温度下由液态汽化所需要的热量,对于水,在  $373\text{ K}$  时,  $L=2\,250\text{ kJ/kg}$ 。

1. 假设活塞和汽缸的壁都是导热的,隔板  $NM$  可以无摩擦地滑动. 气体的初始状态为: 压强  $p_1=0.5\text{ atm}$ , 总体积  $V_1=2V_0$ , 温度  $T_1=373\text{ K}$ 。

缓缓推动活塞  $AB$ , 使系统经历准静态(准平衡)的等温过程, 压缩至体积  $V_F=\frac{V_0}{4}$ 。

(a) 在  $p(V)$  图上画出汽缸内两种气体在  $T_1$  温度下的气体压强  $p$  和总体积  $V$  的关系曲线. 计算曲线上重要点的坐标。

气体常数  $R=8.31\text{ J}/(\text{mol}\cdot\text{K})$ , 或  $R=0.082\,0\text{ L}\cdot\text{atm}/(\text{mol}\cdot\text{K})$ ,  $1\text{ atm}=101.3\text{ kPa}$ 。

在  $p_0=1\text{ atm}$  压强下, 水的沸点为  $T_0=373\text{ K}$ 。

(b) 计算压缩气体过程中活塞所做的功。

$$\int \frac{dV}{V} = \ln V.$$

(c) 计算上述过程所释放的热量。

2. 假设隔板  $NM$  和汽缸壁之间有摩擦, 且只有当隔板两边的压强差大于或等于  $0.5\text{ atm}$  时, 隔板才可移动, 问题 1 中所有其他条件不变(假设动摩擦系数和静摩擦系数相等)。

(a) 画出在恒定温度  $T_1$  下, 右气室的压强  $p$  与汽缸里两种气体的总体积  $V$  的  $p(V)$  曲线。

(b) 计算压缩气体时活塞所做的功。

(c) 在气体达到  $V_F=\frac{V_0}{4}$  后, 活塞  $AB$  缓慢地向右移动, 两种物质(水和氮)经历准静态等温过程膨胀到初始时的总体积  $2V_0$ 。继续画出题 2(a) 所对应的过程曲线。

第 2 小题的提示

可以作类似于下面的一张表格, 据此可以画出题 2(a) 和题 2(c) 所要求的曲线。



状态	左气室		右气室		体积	活塞 AB 上的压强
	体积	压强	体积	压强		
初态	$V_0$	0.5 atm	$V_0$	0.5 atm	$2V_0$	0.5 atm
2						
3						
.						
.						
.						
.						
.						
终态					$2V_0$	

3. 假设整个汽缸和活塞是不导热的, 隔板  $NM$  固定不动, 且是热的良导体, 气体的初始状态与题 1 所描述的相同, 活塞  $AB$  缓慢地向右移动, 右气室的体积增加至左气室中的水蒸气开始凝结.

(a) 计算右气室最终的体积.

(b) 计算这一膨胀过程中气体所做的功.

等压、等容的热容比  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  是: 氮气  $\gamma_1 = \frac{7}{5}$ , 水蒸气  $\gamma_2 = \frac{8}{6}$ .

在 353 K 到 393 K 的温度区间, 可以用以下的近似公式

$$p = p_0 \exp \left[ -\frac{\mu L}{R} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right].$$

式中  $T$  是水在压强为  $p$  时的沸腾温度,  $\mu$  是摩尔质量,  $p_0$ 、 $L$ 、 $T_0$  与前面的定义相同.

**【分析】** 求解时应充分注意分析三种不同假设下给出的物理条件以及两种气体可能经历的各种过程. 此处需要区分两种气体的不同之处, 对于氮气可以视为理想气体, 而对于水蒸气则可能经历相变过程. 对于不同气体, 不同过程运用相关热学规律可对题目所问进行逐一求解.

**【解】** 1. 假设活塞和汽缸壁为热的良导体, 隔板  $NM$  可以无摩擦地自由滑动.

(a) 在定温  $T_1 = 373$  K 下, 汽缸内气体在整个等温压缩过程中的  $p$ - $V$  图如下

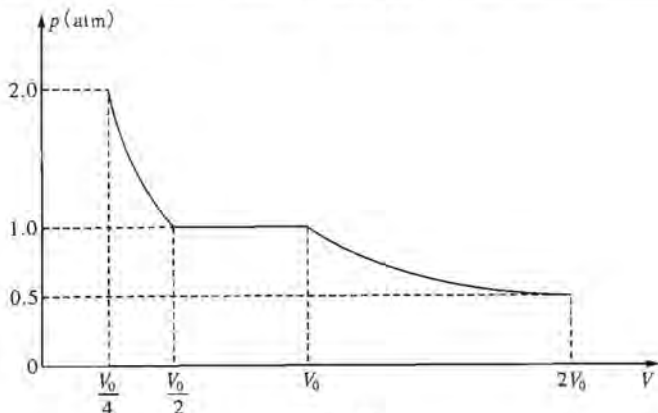


图 2-4-23

$$V_0 = \frac{RT_1}{p_1} = \frac{8.31 \times 373}{0.5 \times 1.013 \times 10^5} \text{ m}^3 = 0.0612 \text{ m}^3 = 61.2 \text{ dm}^3.$$

(b) 整个气体压缩的过程, 可以分成三个阶段:

$$(p_1, 2V_0) \rightarrow (2p_1, V_0) \rightarrow \left(2p_1, \frac{V_0}{2}\right) \rightarrow \left(4p_1, \frac{V_0}{4}\right)$$

(1)                      (2)                      (3)                      (4)

在每一阶段活塞对气体所做的功, 计算如下

$$A_{12} = - \int_{2V_0}^{V_0} p dV = 2RT_1 \int_{2V_0}^{V_0} \frac{dV}{V} = 2RT_1 \ln 2 = 4297 \text{ J}.$$

$$A_{23} = 2p_1 \left( V_0 - \frac{V_0}{2} \right) = RT_1 = 3100 \text{ J}.$$

$$A_{34} = - \int_{\frac{1}{2}V_0}^{\frac{1}{4}V_0} p dV = RT_1 \int_{\frac{1}{2}V_0}^{\frac{1}{4}V_0} \frac{dV}{V} = RT_1 \ln 2 = 2149 \text{ J}.$$

在整个压缩过程中, 活塞对气体所做的总功为

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} = 9545 \text{ J} \approx 9.55 \text{ kJ}. \quad \textcircled{1}$$

(c) 在气体压缩的第二阶段(2→3)中, 所有的水蒸气都凝结成水. 因此在整个压缩过程中所释放出的热量  $Q'$  等于下列两者之和: 一为活塞对气体所做的总功  $A$ ; 另为一摩尔水蒸气在凝结过程中所减少的内能  $\Delta U$ , 即

$$Q' = \Delta U + A_{12} + A_{23} + A_{34}.$$

式中  $\Delta U + A_{23}$  为一摩尔水蒸气在凝结过程中所放出的热量, 等于  $0.018 \times L$ , 故得

$$\begin{aligned} Q' &= \Delta U + A_{12} + A_{23} + A_{34} = 0.018 \times L + A_{12} + A_{34} \\ &= (0.018 \times 2250 + 4297 + 2149) \text{ kJ} \\ &= 46.946 \text{ kJ} \approx 47 \text{ kJ}. \end{aligned} \quad \textcircled{2}$$

2. 气体在各不同压缩过程[题 2(a)]和膨胀过程[题 2(c)]中, 各阶段的重要端



点状态.

状态	左气室		右气室		体积	作用于活塞的压强(atm)
	总体积	压强(atm)	体积	压强(atm)		
起始 1	$V_0$	0.5	$V_0$	0.5	$2V_0$	0.5
2	$V_0$	0.5	$0.5V_0$	1.0	$1.5V_0$	1.0
3	$0.5V_0$	1.0	$\frac{1}{3}V_0$	1.5	$\frac{5}{6}V_0$	1.5
4	0	1.0	$\frac{1}{3}V_0$	1.5	$\frac{1}{3}V_0$	1.5
5	0	1.5	$\frac{1}{4}V_0$	2.0	$\frac{1}{4}V_0$	2.0
6	0	1.5	$\frac{1}{3}V_0$	1.5	$\frac{1}{3}V_0$	1.5
7	0	1.0	$V_0$	0.5	$V_0$	0.5
8	$0.5V_0$	1.0	$V_0$	0.5	$1.5V_0$	0.5
最后 9	$(2-\sqrt{2})V_0$	$\frac{2+\sqrt{2}}{4}$	$\sqrt{2}V_0$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$2V_0$	$\frac{\sqrt{2}}{4}=0.35$

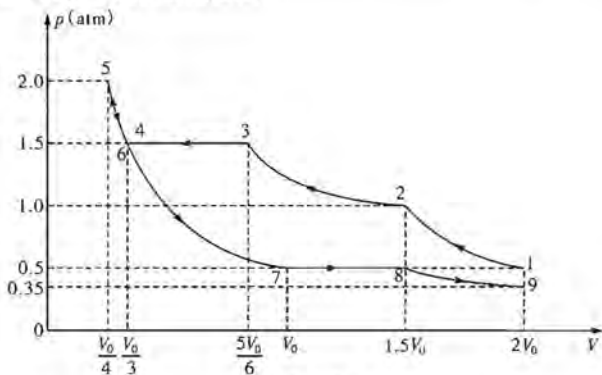
(a)上表中的  $p$ - $V$  关系曲线图如下

图 2-4-24

(b)在整个压缩过程中,活塞对气体所做的总功  $A_p$ ,等于题 1(b)中所计算的总功,加上摩擦力所做的功. 作用于隔板  $NM$  的摩擦力仅出现在  $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$  的过程,左室水蒸气的体积由  $V_0$  减至 0,因此摩擦力所做的功为  $(p_{右} - p_{左}) \times V_0 = (0.5 \text{ atm}) \times V_0$ . 由于右室(或左室)的起始状态为  $p_1 = 0.5 \text{ atm}, V_1 = V_0$ ,利用理想气体方程式,可得  $p_1 V_1 = (0.5 \text{ atm}) \times V_0 = RT_1$ ,故  $A_p$  可写为

$$\begin{aligned} A_p &= A + (p_{右} - p_{左}) \times V_0 = 9545 \text{ J} + 8.31 \times 373 \text{ J} \\ &= 1.265 \times 10^4 \text{ J} = 12.65 \text{ kJ}. \end{aligned}$$

(c) 在最后 8→9 的膨胀过程中, 左气室的压强一直大于右气室, 两者的压强差等于 0.5 atm. 设在最后状态时, 右和左两气室的气体压强和体积分别为  $(p_1', V_1')$  和  $(p_2', V_2')$ , 则

$$\begin{cases} p_2' - p_1' = 0.5 \text{ atm.} \\ V_1' + V_2' = 2V_0. \\ p_1' V_1' = p_2' V_2' = RT_1. \end{cases}$$

利用  $(0.5 \text{ atm}) \times V_0 = RT_1$ , 代入上式, 联解得

$$\frac{1}{p_1'} + \frac{1}{p_1' + 0.5} = 4.$$

$$p_1' = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ atm} = 0.35 \text{ atm}, p_2' = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \text{ atm} = 0.85 \text{ atm}.$$

$$V_1' = (2 - \sqrt{2})V_0, V_2' = \sqrt{2}V_0.$$

3. 假设整个汽缸和活塞都是热的绝缘体, 隔板 NM 固定不动, 且为热的良导体.

(a) 由于  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ , 且  $C_p = C_v + R$ , 故  $C_v = \frac{R}{\gamma - 1}$ , 故左室水蒸气和右室氮气的热容分别为

$$C_{v1} = \frac{R}{\gamma_1 - 1} = \frac{R}{\frac{7}{5} - 1} = \frac{5}{2}R,$$

$$C_{v2} = \frac{R}{\gamma_2 - 1} = \frac{R}{\frac{8}{6} - 1} = 3R. \quad (1)$$

设右室和左室的气体压强、体积和温度分别为  $(p_1'', V_1'', T_1'')$  和  $(p_2'', V_2'', T_2'')$ , 由于隔板 NM 固定不动, 故  $V_2'' = V_0$ , 又因隔板为热的良导体, 故两气室的温度相等, 即  $T_1'' = T_2'' = T_0''$ . 将两气室合视为一个系统, 由于整个汽缸和活塞为热的绝缘体, 利用热力学第一定律有  $dU = dQ - pdV$ , 那么可得

$$(C_{v1} + C_{v2})dT'' = -p_1''dV_1''. \quad (2)$$

由于题设活塞很缓慢地向右移动, 右室内的氮气可适用理想气体方程式  $p_1''V_1'' = RT''$ , 将之代入②式, 得

$$(C_{v1} + C_{v2})dT'' + \frac{RT''dV_1''}{V_1''} = 0. \quad (3)$$

利用①式, 上式改写为

$$\frac{11dT''}{2T''} + \frac{dV_1''}{V_1''} = 0,$$

$$T''(V_1'')^k = \text{常数}, \quad (4)$$

式中  $k = \frac{2}{11}$ . 再考虑左室中的水蒸气状态: 当右室中的活塞向右移动时, 根据



④式的结果,可知氮气的温度下降,因此左室中水蒸气的温度也随之下降而致凝结,其对应的压强  $p_2''$  可使用题设的近似公式(注:此式来自 Clausius-Clapeyron 方程式)

$$p_2'' = p_0 \exp\left[-\frac{\mu L}{R}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right]. \quad (5)$$

式中  $p_0 = 1 \text{ atm}$ ,  $T_0 = 373 \text{ K}$ . 左室中的水蒸气也适用理想气体方程式,  $p_2'' V_0 = RT''$ , 代入上式,得

$$\frac{RT''}{V_0} = p_0 \exp\left[-\frac{\mu L}{R}\left(\frac{1}{T''} - \frac{1}{T_0}\right)\right]. \quad (6)$$

由题 1(a)的结果知  $V_0 = \frac{RT_1}{p_1} = \frac{R \times 373}{0.5 \text{ atm}} = 0.0612 \text{ m}^3$ , 代入上式,得

$$\begin{aligned} \frac{T''}{2 \times 373} &= 1 \times \exp\left[-\frac{0.018 \times 2250 \times 10^3}{8.31}\left(\frac{1}{T''} - \frac{1}{373}\right)\right], \\ \ln\left(\frac{T''}{746}\right) &= -\frac{18 \times 2250}{8.31}\left(\frac{1}{T''} - \frac{1}{373}\right). \end{aligned} \quad (7)$$

应用逼近求根法,可得⑦式的数值解为  $T'' = 353 \text{ K}$ .

利用④式,可得当左室的水蒸气开始凝结时,右室的氮气体积为

$$T''(V_1'')^k = T_0(V_0)^k.$$

$$V_1'' = V_0 \left(\frac{T_0}{T''}\right)^{\frac{1}{k}} = 0.0612 \text{ m}^3 \times \left(\frac{373}{353}\right)^{\frac{1}{2}} = 0.0829 \text{ m}^3.$$

(b)在整个膨胀过程中,右室的气体对外界所做的功为

$$\begin{aligned} A'' &= \int_{V_0}^{V_1''} p_1'' dV'' = - \int_{373 \text{ K}}^{353 \text{ K}} (C_{V1} + C_{V2}) dT'' \\ &= \left(\frac{5}{2}R + 3R\right) \times (373 - 353) \text{ J} \\ &= \frac{11}{2} \times 8.31 \times 20 \text{ J} = 9.1 \times 10^2 \text{ J}. \end{aligned}$$

#### 题 16 (2001·亚洲物理奥赛题)

##### 表面原子的热振动

本问题考虑一种由单一元素构成的金属晶体,探讨其表面原子的热振动. 此晶体的晶格属于面心立方体(*fcc*)系统,其单位晶胞为一立方体,在各个顶点的位置上均有一个原子,而在各个侧面的中心处,也都有一个原子,如图 2-4-25 所示. 在  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴上的三个原子,其位置坐标分别以  $(a, 0, 0)$ 、 $(0, a, 0)$  及  $(0, 0, a)$  表示. 已知晶体的晶格常数  $a = 3.92 \text{ \AA}$  (即立方体的边长为  $3.92 \text{ \AA}$ ).



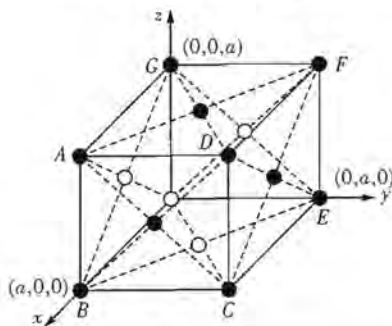


图 2-4-25

(1) 此晶体经切割,使  $ABCD$  所在的平面成为晶体样品的表面后,被用来从事低能量电子衍射实验.使动能为  $64.0 \text{ eV}$  的电子,形成准直的射束,以  $\phi_0 = 15.0^\circ$  的入射角 ( $\phi_0$  为电子束入射线与样品表面法线之夹角),射向此表面,其入射面为  $\overline{AC}$  与样品表面法线所形成的平面.为简化问题,假设入射的电子只被表面最外层的原子所散射.

(a) 入射的电子,其物质波的波长为多大?

(b) 若利用一探测器来探测衍射后仍不偏离入射面的电子,试问,探测方向与样品表面法线的夹角应取哪些值,方可测得衍射电子?

(2) 假设晶体表面原子的热振动可视为简谐运动.当温度升高时,热振动的振幅会增大,振动的平均振幅可用低能量电子衍射来探测.已知衍射电子束的强度  $I$  与每秒钟散射进入探测器的电子数成正比,而衍射强度  $I$  与表面原子的位移  $\vec{u}(t)$  有以下关系:

$$I = I_0 \exp\{-\langle [(\vec{K}' - \vec{K}) \cdot \vec{u}]^2 \rangle\}.$$

上式中  $I$  与  $I_0$  分别代表绝对温度为  $T$  与  $0$  时的衍射强度,  $\vec{K}$  与  $\vec{K}'$  分别代表电子在衍射前与衍射后的波矢量,式中的括号  $\langle \rangle$  表示对时间的平均值.注意:一粒子的波矢量  $\vec{K}$  与其动量  $\vec{p}$  的关系为  $\vec{K} = \frac{2\pi\vec{p}}{h}$ , 式中  $h$  为普朗克常数.

为测量表面原子振动的振幅,以一准直电子束对此金属晶体的表面入射,电子的动能为  $64.0 \text{ eV}$ ,入射角为  $15.0^\circ$ ,探测器被安排成仅测量在镜面反射方向上被弹性散射的电子.图 2-4-26 为此表面的  $\ln \frac{I}{I_0}$  与绝对温度  $T$  的关系图.

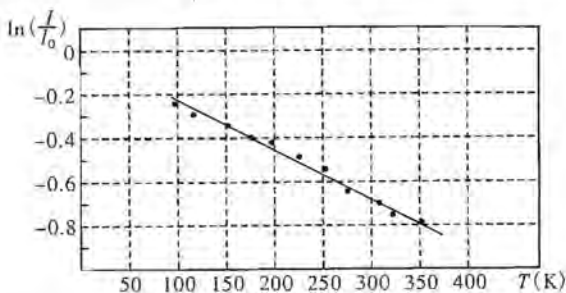


图 2-4-26

假设一个原子沿样品表面法线方向(即 $\hat{x}$ 方向)的热振动,其总能量为 $k_B T$ , $k_B$ 为波耳兹曼常数.

(a)试求表面的原子沿表面法线方向振动的频率.

(b)试求绝对温度为 300 K 时,表面的原子沿表面法线方向的振动,其位移的方均根值,亦即 $\sqrt{\langle u_x^2(t) \rangle}$ .

下列各值为已知:

金属元素的原子量  $M=195.1$ .

波耳兹曼常数  $k_B=1.38 \times 10^{-23}$  J/K.

电子的质量  $m=9.11 \times 10^{-31}$  kg.

电子的电荷量  $e=1.60 \times 10^{-19}$  C.

普朗克常数  $h=6.63 \times 10^{-34}$  J·s.

**【分析】** 本题是一个集振动、波动和波动光学等规律为一体的实际工程应用题.其中第 1 问涉及到电子波(即物质波)的概念和晶体衍射规律,而求波程差为关键.第 2 问则涉及到简谐运动的一系列规律,可根据题目所给出的影响衍射光强的众多因素和相关图进行求解.

**【解】** (1)(a)入射的电子,其物质波的波长为

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meU}} \\ &= \frac{6.63 \times 10^{-34}}{\sqrt{2 \times 9.11 \times 10^{-31} \times 1.60 \times 10^{-19} \times 64.0}} \text{ m} \\ &= 1.53 \times 10^{-10} \text{ m} = 1.53 \text{ \AA}. \end{aligned}$$

(b)由于假设低能量电子只被表面最外层的原子散射,故只需考虑表面最外层各原子列之间的相长干涉,如图 2-4-27 所示.

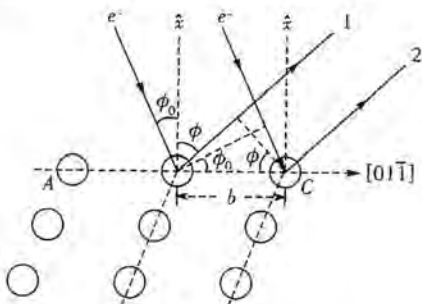


图 2-4-27

图 2-4-27 中散射电子沿相邻两路径 1 与 2 之波程差为

$$\Delta l = b(\sin\phi - \sin\phi_0) = n\lambda.$$

已知入射角  $\phi_0 = 15.0^\circ$ , 波长  $\lambda = 1.53\text{\AA}$ , 间距  $b = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{3.92}{\sqrt{2}}\text{\AA} = 2.77\text{\AA}$ ,

上式可有如下两解:

(i) 当  $n=0$ , 解得  $\phi = \phi_0 = 15.0^\circ$ .

(ii) 当  $n=1$ ,  $\Delta l = 2.77(\sin\phi - \sin 15^\circ) = 1 \times 1.53$ , 故  $\sin\phi = \frac{1.53 + 0.72}{2.77} =$

0.812, 解得  $\phi = 54.3^\circ$ .

当  $n \geq 2$ , 则无解, 因

$$\sin\phi = \sin 15^\circ + \frac{\Delta l}{2.77} = \frac{0.72 + n \times 1.53}{2.77} \geq \frac{0.72 + 2 \times 1.53}{2.77} = 1.36 > 1.$$

(2) 已知  $I = I_0 \exp(-(\vec{u} \cdot \Delta \vec{K})^2)$ .

因考虑的是沿镜面反射方向弹性散射的电子, 故在散射前后其波长相同, 即  $K' = K$ , 故图 2-4-28 中波矢量所形成的为等腰三角形, 满足下式

$$\Delta \vec{K} = \vec{K}' - \vec{K} = 2K \cos\theta \hat{x}. \quad (1)$$

式中之  $\hat{x}$  为表面法线方向的单位矢量. 取  $\vec{u}$  的  $x$  分量, 可得

$$I = I_0 e^{-(u_x^2 (\tau) \cdot 4K^2 \cos^2 \theta)} = I_0 e^{-4K^2 \cos^2 \theta (u_x^2 (\tau))}. \quad (2)$$

因表面原子沿法线方向之热振动可视为简谐运动, 故可令  $u_x(t) = A \cos \omega t$ , 而求得其平方之平均值为

$$\langle u_x^2(t) \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau u_x^2 dt = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau A^2 \cos^2 \omega t dt = \frac{A^2}{\tau} \cdot \frac{\tau}{2} = \frac{A^2}{2}.$$

亦即

$$A^2 = 2 \langle u_x^2(t) \rangle.$$

故振动总能量可表示为

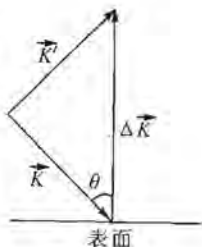


图 2-4-28



$$E = \frac{1}{2} CA^2 = \frac{1}{2} C \cdot 2 \langle u_x^2(t) \rangle = C \langle u_x^2(t) \rangle = m' \omega^2 \langle u_x^2(t) \rangle.$$

而得

$$\langle u_x^2(t) \rangle = \frac{E}{m' \omega^2}.$$

$$E = m' \omega^2 \langle u_x^2(t) \rangle = k_B T.$$

上式中  $m'$  为一个原子的质量. 由上式得

$$\langle u_x^2(t) \rangle = \frac{k_B T}{m' \omega^2} = \frac{k_B T}{m' 4\pi^2 f^2}. \quad (3)$$

综合式③与式②可得

$$I = I_0 e^{-4K^2 \cos^2 \theta \frac{k_B T}{m' 4\pi^2 f^2}}.$$

因上式中  $K = \frac{2\pi p}{h} = \frac{2\pi}{\lambda}$ , 故可将其改写为

$$I = I_0 e^{-\left(\frac{4k_B \cos^2 \theta}{m' f^2 \lambda^2}\right) T} = I_0 e^{-M' T}. \quad (4)$$

而得

$$\ln \frac{I}{I_0} = -M' T.$$

其中斜率  $M'$  为

$$M' = \frac{4k_B \cos^2 \theta}{m' f^2 \lambda^2}. \quad (5)$$

(a) 根据图 2-4-26 所示的  $\ln \frac{I}{I_0}$  对  $T$  的关系, 可得斜率为

$$M' = 2.3 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}.$$

将下列数据

$$k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}.$$

$$\lambda = 1.53 \times 10^{-10} \text{ m}.$$

$$m' = \frac{195.1 \times 10^{-3}}{6.02 \times 10^{23}} = 3.24 \times 10^{-25} \text{ kg}.$$

代入式⑤, 可得

$$2.3 \times 10^{-3} = \frac{4 \times 1.38 \times 10^{-23} \times \cos^2 15^\circ}{(3.24 \times 10^{-25}) \times f^2 \times (1.53 \times 10^{-10})^2}.$$

故振动的频率的平方为

$$f^2 = 3.0 \times 10^{24}.$$

而振动的频率为

$$f = 1.7 \times 10^{12} \text{ Hz}.$$

(b) 由  $\langle u_x^2(t) \rangle = \frac{k_B T}{m' 4\pi^2 f^2}$ ,  $T = 300 \text{ K}$ , 可得

$$\langle u_x^2(t) \rangle = \frac{1.38 \times 10^{-23} \times 300}{(3.24 \times 10^{-25}) \times 4\pi^2 \times 3.0 \times 10^{24}} \text{ m}^2 = 1.1 \times 10^{-22} \text{ m}^2.$$

故位移的方均根值为

$$\sqrt{\langle u_x^2(t) \rangle} = 1.0 \times 10^{-11} \text{ m} = 0.10 \text{ \AA}$$

题 17 (2006 · 国际物理竞赛题)

摩天大厦

在高度为 1000 m 的摩天大厦底部, 室外温度为  $T_{\text{bot}} = 30^\circ\text{C}$ . 本题的目标是估算摩天大厦顶部的温度  $T_{\text{top}}$ . 设想一片薄的空气切片(可近似为理想氮气, 其绝热系数为  $\gamma = \frac{7}{5}$ ) 慢慢上升到高度为  $z$  气压较低的地方, 并假设这空气切片绝热膨胀, 使得它的温度降低到周围空气的温度.

(1) 问随着压强的相对变化  $\frac{dp}{p}$ , 温度的相对变化  $\frac{dT}{T}$  是多少?

(2) 请用高度变化  $dz$  来表达压强差  $dp$ .

(3) 由此可得到楼顶温度是多少?

数据: 玻尔兹曼常量  $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

单个氮分子的质量  $m = 4.65 \times 10^{-26} \text{ kg}$

重力加速度  $g = 9.80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

**【分析】** 大厦外空气中的温度与压强分布可作如下理解: 地表处受热的一层空气切片(取分子数恒定)作绝热膨胀并缓慢上升到力平衡处(即上下压强差与空气切片的重力平衡), 求解中涉及理想气体的状态方程、绝热过程方程以及力平衡式等, 运算中还用到微分和积分操作.

**【解】** (1) 设高度为  $z$  的一片薄的空气切片的压强为  $p(z)$ , 温度为  $T(z)$ , 体积为  $V(z) = Ah(z)$ ,  $A$  是该空气薄片的面积,  $h(z)$  是其厚度. 应用绝热过程方程

$$pV^\gamma = \text{常量.}$$

以及理想气体方程

$$pV = NkT.$$

$N$  是该空气薄片里的分子数, 得到

$$\frac{p^{\gamma-1}}{T} = \text{常量.}$$

对其微分, 整理得

$$\frac{dT}{T} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{dp}{p}. \quad (1)$$

(2) 空气薄片上下的压力差用于平衡其重力, 即

$$Nmg + A[p(z+h) - p(z)] = \frac{pV}{kT}mg + \frac{V}{h} \frac{dp}{dz} h = 0.$$

所以

$$dp = -\frac{mg}{kT} p dz. \quad (2)$$



(3)由①②式得

$$dT = -\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{mg}{k} dz.$$

所以通过积分运算可得高度为  $H$  的楼顶温度为

$$T_{\text{top}} = T_{\text{bot}} - \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{mg}{k} H.$$

代入数值得

$$T_{\text{top}} = 20.6 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

**题 18** (2000·国际物理竞赛题) 一热机工作于两个相同材料的物体之间, 两物体的温度分别为  $T_A$  和  $T_B$  ( $T_A > T_B$ ), 每个物体的质量均为  $m$ , 比热容恒定, 均为  $c$ . 设两个物体的压强保持不变, 且不发生相变.

(1) 假定热机能从系统获得理论上允许的最大机械能, 求出两物体  $A$  和  $B$  最终达到的温度  $T_0$  的表达式, 给出解题全部过程.

(2) 由此得出允许获得的最大功的表达式.

(3) 假定热机工作于两箱水之间, 每箱水的体积为  $2.50 \text{ m}^3$ , 一箱水的温度为  $350 \text{ K}$ , 另一箱水的温度为  $300 \text{ K}$ . 计算可获得的最大机械能.

已知水的比热容  $= 4.19 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ , 水的密度  $= 1.00 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

**【分析】** 热机为获得最大功输出, 在理论上讲, 应选用卡诺热机. 在卡诺热机循环过程中满足基本关系式  $\frac{\Delta Q_1}{T_1} = \frac{\Delta Q_2}{T_2}$ , 式中  $\Delta Q$  为循环工质与两个高低温物体 (热源) 之间交换的热量, 其值由积分式  $\int mcdT$  计算. 题文所述的热机一直工作到原两高低温物体的温度相等时为止.

**【解】** 在计算可获得的功时, 忽略热机工作时的摩擦损耗.

设  $\Delta Q_1$  为从物体  $A$  吸收的热量,  $\Delta Q_2$  为释放给物体  $B$  的热量, 则

$$\Delta Q_1 = -mc\Delta T_1 \quad (\Delta T_1 < 0),$$

$$\Delta Q_2 = mc\Delta T_2 \quad (\Delta T_2 > 0).$$

(1) 为获得最大机械能, 设热机为卡诺热机. 由热力学第二定律, 在工作全过程中, 有

$$\frac{\Delta Q_1}{T_1} = \frac{\Delta Q_2}{T_2}.$$

$$\text{即} \quad -mc \int_{T_A}^{T_0} \frac{dT_1}{T_1} = mc \int_{T_B}^{T_0} \frac{dT_2}{T_2}.$$

$$\ln \frac{T_A}{T_0} = \ln \frac{T_0}{T_B}.$$

得

$$T_0 = \sqrt{T_A T_B}.$$

(2) 由此得出  $W = Q_1 - Q_2 = mc(T_A - T_0) - mc(T_0 - T_B)$

$$= mc(T_A + T_B - 2\sqrt{T_A T_B}).$$



或

$$W = mc(\sqrt{T_A} - \sqrt{T_B})^2.$$

(3)数值结果

$$\begin{aligned} W &= 2.50 \times 1.00 \times 10^3 \times 4.19 \times 10^3 \times (350 + 300 - 2\sqrt{350 \times 300}) \text{ J} \\ &= 2.0 \times 10^7 \text{ J} = 20 \text{ MJ}. \end{aligned}$$

**题 19** (1999 · 国际物理奥赛题)

### 气体对辐射的吸收

一个直立的圆筒形容器,内装有处于热平衡状态的一种分子气体.筒的上盖是一个可以自由上下移动的玻璃板.假设无气体泄漏,并假设玻璃板与筒壁之间的摩擦力恰可消除振动,但其能量损失比起其他能量来又可忽略.起初,气体温度等于环境温度,筒内气体可以认为是理想气体.假设圆筒(包括上盖和筒底)的热导率和热容量均很小,因此,气体和外界的热传递很缓慢,在解本题时可以忽略.

一束由功率固定的激光器发射的光穿透玻璃板照入圆筒.此光辐射很容易无吸收地穿过空气和玻璃板,却被筒内气体完全吸收.吸收辐射能后,筒内气体分子进到激发态,接着它们又很快放出红外辐射,逐步回到分子的基态.这种红外辐射又为其他分子吸收,并被筒壁、筒底和玻璃板反射.因此,从激光器中吸收的能量在很短的时间内就转化成热运动(分子混沌),随后较长时间地保留在气体中.我们观察到玻璃板向上运动,在辐照一定时间后,关掉激光器,测量玻璃板的位移.

(1)用题后的数据(必要的话,还可用附录的物理常数表)计算辐照后气体的温度和压强.

(2)计算气体吸收辐射后所做的机械功.

(3)计算在辐照过程中气体所吸收的辐射能.

(4)计算被气体吸收的辐射功率以及相应的单位时间内的光子数.

(5)计算光能转化为玻璃板的机械势能这一能量转化过程的效率.

然后把圆筒慢慢旋转  $90^\circ$ ,使其成水平方向,仍设气体和容器间的热交换可以忽略.

(6)说明这样旋转后气体的压强和温度是否会改变?如果改变了,新的值是多少?

数据:

室内大气压强	$p_0 = 101.3 \text{ kPa};$
室温	$T_0 = 293 \text{ K};$
玻璃板质量	$m = 800 \text{ g};$
筒内气体的量	$n = 0.100 \text{ mol};$
气体等容摩尔比热	$C_V = 20.8 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1};$
圆筒的内直径	$2r = 100 \text{ mm};$
激光波长	$\lambda = 514 \text{ nm};$
辐照时间	$\Delta t = 10.0 \text{ s};$
辐照后玻璃板的位移	$\Delta s = 30.0 \text{ mm}.$



**【分析】** 按题意可知,气体对外所做功和气体内能增量均来自气体所吸收的辐射能. 另在容器旋转这一绝热过程中遵循  $pV = \text{常数}$ , 利用气态方程和热力学第一定律本题即可求解.

**【解】** (1) 平衡时,筒内压强  $p$  必须等于室内压强加上由可移动的盖子产生的压强

$$p = p_0 + \frac{mg}{\pi r^2}.$$

这在辐射之前和辐射之后均如此. 开始时,气体温度为室温. 由理想气体状态方程知,开始时气体体积为  $V_1$ ,  $V_1 = \frac{nRT_0}{p}$  ( $R$  是气体常数), 因此,气体所占有筒形容器高度  $h_1$  为  $h_1 = \frac{V_1}{\pi r^2} = \frac{nRT_0}{p_0 \pi r^2 + mg}$ . 辐照后,此高度变为  $h_2 = h_1 + \Delta s$ , 因此新的温度为

$$T_2 = T_0 \left(1 + \frac{\Delta s}{h_1}\right) = T_0 + \frac{\Delta s (p_0 \pi r^2 + mg)}{nR}.$$

数值结果为:  $p = 102.32 \text{ kPa}$ ,  $T_2 = 322 \text{ K}$ .

(2) 气体对抗盖子重量做的机械功为  $mg \Delta s$ , 对抗室内压强做的功为  $p_0 \pi r^2 \Delta s$ , 因此总的功为

$$W = (mg + p_0 \pi r^2) \Delta s = 24.1 \text{ J}.$$

(3) 由于温度改变,气体内能的改变量为  $\Delta E = nC_V(T_2 - T_0)$ . 在辐照的  $\Delta t$  时间内送入系统的热量为

$$\begin{aligned} Q &= \Delta E + W = \frac{nC_V T_0 \Delta s}{h_1} + (mg + p_0 \pi r^2) \Delta s \\ &= \Delta s (p_0 \pi r^2 + mg) \left(1 + \frac{C_V}{R}\right). \end{aligned}$$

此热量纯由吸收光辐射而来,因此与吸收的光能一致,  $Q = 84 \text{ J}$ . 利用等压过程也可得到同样结果

$$\begin{aligned} Q &= nC_p(T_2 - T_0) = \frac{n(C_V + R) \Delta s (p_0 \pi r^2 + mg)}{nR} \\ &= \Delta s (p_0 \pi r^2 + mg) \left(1 + \frac{C_V}{R}\right). \end{aligned}$$

(4) 因为激光器的功率是恒定的,因此吸收的光的功率为

$$N = \frac{Q}{\Delta t} = (p_0 \pi r^2 + mg) \left(1 + \frac{C_V}{R}\right) \frac{\Delta s}{\Delta t} = 8.4 \text{ W}.$$

每一光子的能量为  $\frac{hc}{\lambda}$ , 因此单位时间吸收的光子数为

$$\frac{N\lambda}{hc} = 2.2 \times 10^{19} \text{ s}^{-1}.$$

(5) 势能的改变等于对盖子重量所做的机械功,因此能量转换的效率  $\eta$  为



$$\frac{mg\Delta s}{Q} = \frac{1}{\left(1 + \frac{p_0 \pi r^2}{mg}\right) \left(1 + \frac{C_V}{R}\right)} = 2.8 \times 10^{-3} \approx 0.3\%$$

(6) 柱形容器倒下, 这是一个绝热过程, 而压强由  $p$  变为  $p_0$ , 温度变为新的值  $T_3$ . 绝热变换过程中,  $pV^\gamma = \text{常数}$ , 利用气态方程我们可得

$$p^{\gamma-1} T_3^\gamma = p^{\gamma-1} \cdot T_2^\gamma,$$

即

$$T_3 = T_2 \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

其中

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{C_V + R}{C_V} = 1 + \frac{R}{C_V} = 1.399.$$

最后

$$T_3 = 321 \text{ K}.$$



# 第三章

## 电 磁 学

### 第一节 静 电 场

**题 1** (2002·全国物理预赛题) 图 3-1-1 所示电路中, 电池的电动势为  $E$ , 两个电容器的电容皆为  $C$ ,  $K$  为一单刀双掷开关, 开始时两电容器均不带电.

(1) 第一种情况, 先将  $K$  与  $a$  接通, 达到稳定, 此过程中电池内阻消耗的电能等于\_\_\_\_\_ ; 再将  $K$  与  $a$  断开而与  $b$  接通, 此过程中电池供给的电能等于\_\_\_\_\_ .

(2) 第二种情况, 先将  $K$  与  $b$  接通, 达到稳定, 此过程中电池内阻消耗的电能等于\_\_\_\_\_ ; 再将  $K$  与  $b$  断开而与  $a$  接通, 此过程中电池供给的电能等于\_\_\_\_\_ .

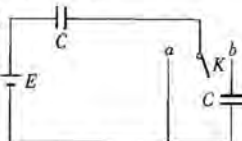


图 3-1-1

**【分析】** 当电源  $E$  对一个不带电的电容器  $C$  充电结束后, 电容器所带电荷量即为从电源流过电荷量, 此时电容器储存电能为  $\frac{1}{2}EQ$ , 电源输出的电能为  $EQ$ , 电源内阻消耗的电能即为两者之差. 两种情形中的第一问相似, 但第二问情况完全不同, 在情况(1)中的第二问中, 充电后的电容器将会维持现状不变.

**【解】** (1)  $\frac{1}{2}E^2C$ ; 0; (2)  $\frac{1}{4}E^2C$ ;  $\frac{1}{2}E^2C$ .

**题 2** (竞赛训练题) 半径分别为  $R_1$  和  $R_2$  的两个同心半球面相对放置(图 3-1-2). 两个半球面均匀带电, 电荷面密度分别为  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$ . 求大半球面的直径  $AOB$  上电势的分布.

**【分析】** 割补法是物理中常用的一种解题方法. 均匀带电球壳在球内、外产生的电势是大家熟悉的, 本题可先分别算出大、小半球面在  $AOB$  上产生的电势, 再用电势叠加原理求出最后结果.

**【解】** 半径为  $R$  的均匀带电球壳内部电势为  $k\frac{Q}{R}$ , 外部电势为

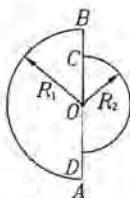


图 3-1-2



$k \frac{Q}{r}$  ( $r > R$ ). 这道题目要解决两个问题: (1) 半球壳的电势是多少? (2) 两个半球壳的电势如何叠加?

完整的半径为  $R_1$  的球壳在  $AOB$  上产生的电势为

$$U_1' = k \frac{Q_1}{R_1} = k \frac{4\pi R_1^2 \sigma_1}{R_1} = 4\pi k R_1 \sigma_1.$$

鉴于对称性, 半个球面对  $U_1'$  的贡献必为  $\frac{1}{2}$ , 因此, 它在  $AOB$  上产生的电势应为

$$U_1 = 2k\pi R_1 \sigma_1.$$

完整的半径为  $R_2$  的球壳在  $AOB$  上离  $O$  距离小于  $R_2$  的范围内(即图 3-1-2 中的  $COD$  段)的电势为

$$U_2' = k \frac{Q_2}{R_2} = 4\pi k R_2 \sigma_2.$$

在  $AOB$  上, 离  $O$  的距离大于  $R_2$  的范围内的电势为

$$U_2'' = k \frac{Q_2}{r} = \frac{4\pi k R_2^2 \sigma_2}{r}. \quad (R_2 < r < R_1)$$

半球的贡献同样必为  $U_2'$  和  $U_2''$  的  $\frac{1}{2}$ . 最后  $AOB$  上电势分布应为

$$U = U_1 + U_2 = \begin{cases} 2\pi k(R_1 \sigma_1 + R_2 \sigma_2), & (r \leq R_2) \\ 2\pi k \left( R_1 \sigma_1 + \frac{R_2^2 \sigma_2}{r} \right), & (R_2 < r \leq R_1) \end{cases}$$

**题 3** (2008·全国物理预赛题) 有两块无限大的均匀带电平面, 一块带正电, 一块带负电, 单位面积所带电荷量的数值相等. 现将两带电平面正交放置如图 3-1-3 所示. 图中直线  $A_1B_1$  和  $A_2B_2$  分别为带正电的平面和带负电的平面与纸面正交的交线,  $O$  为两交线的交点.

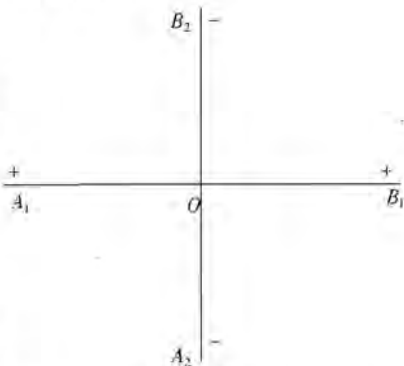


图 3-1-3

(1) 试根据每块无限大均匀带电平面产生的电场(场强和电势)具有对称性的特点, 并取  $O$  点为电势的零点, 在给出的整个图上画出电场(正、负电荷产生的总电场)中电势分别为  $0, 1\text{ V}, 2\text{ V}, 3\text{ V}, -1\text{ V}, -2\text{ V}, -3\text{ V}$  的等势面与纸面的交线的示意图, 并标出每个等势面的电势.

(2) 若每个带电平面单独产生的电场的场强是  $E_0 = 1.0\text{ V/m}$ , 则可求出(1)中相邻两等势面间的距离  $d =$  \_\_\_\_\_.

**【分析】** 本题首先根据无限大均匀带电平面所产生电场的特性(对称性和均



匀性)和场强叠加原理求得题述空间内的(合)场强分布,再考虑场强和电势间的关系求解。

**【解】** (1) 电场中等势面的电势分布如图 3-1-4。

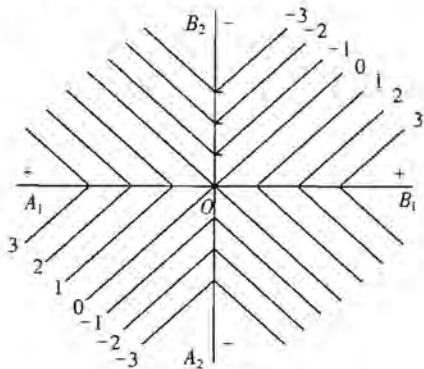


图 3-1-4

$$(2) \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ m.}$$

**题 4** (2006·全国物理预赛题) 1. 如图 3-1-5 所示, 电荷量为  $q_1$  的正点电荷固定在坐标原点  $O$  处, 电荷量为  $q_2$  的正点电荷固定在  $x$  轴上, 两电荷相距  $l$ . 已知  $q_2 = 2q_1$ .



图 3-1-5

(1) 求在  $x$  轴上场强为零的  $P$  点的坐标。

(2) 若把一电荷量为  $q_0$  的点电荷放在  $P$  点, 试讨论它的稳定性(只考虑  $q_0$  被限制在沿  $x$  轴运动和被限制在沿垂直于  $x$  轴方向运动这两种情况)。

2. 有一静电场, 其电势  $U$  随坐标  $x$  的改变而变化, 变化的图线如图 3-1-6 所示. 试在图 3-1-7 中画出该静电场的场强  $E$  随  $x$  变化的图线(设场强沿  $x$  轴正方向时取正值, 场强沿  $x$  轴负方向时取负值)。

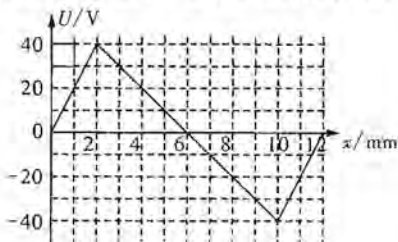


图 3-1-6

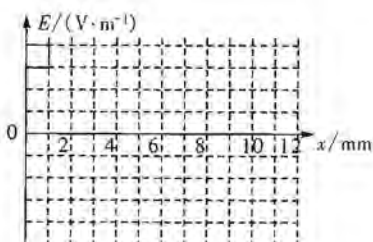


图 3-1-7

**【分析】** 本题第1问要讨论的稳定性问题,实质上取决于 $P$ 点(场强为零的点)周边邻域内的电场分布,当 $q_0$ (应分正负两种情况)受的力指向 $P$ 点,则 $P$ 点是 $q_0$ 的稳定平衡位置,反之则是不稳定平衡位置. 本题第2问则考查读者对匀强电场中 $U$ 与 $E$ 关系的理解.

**【解】** 1. (1)通过对点电荷场强方向的分析,场强为零的 $P$ 点只可能位于两点电荷之间. 设 $P$ 点的坐标为 $x_0$ ,则有

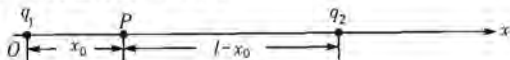


图 3-1-8

$$k \frac{q_1}{x_0^2} = k \frac{q_2}{(l-x_0)^2}, \quad (1)$$

已知

$$q_2 = 2q_1. \quad (2)$$

由①②两式解得

$$x_0 = (\sqrt{2}-1)l. \quad (3)$$

(2)先考虑点电荷 $q_0$ 被限制在沿 $x$ 轴运动的情况. $q_1$ 、 $q_2$ 两点电荷在 $P$ 点处产生的场强的大小分别为

$$E_{10} = k \frac{q_1}{x_0^2}, E_{20} = k \frac{q_2}{(l-x_0)^2}.$$

且有

$$E_{10} = E_{20}.$$

二者方向相反. 点电荷 $q_0$ 在 $P$ 点受到的合力为零,故 $P$ 点是 $q_0$ 的平衡位置. 在 $x$ 轴上 $P$ 点右侧 $x = x_0 + \Delta x$ 处, $q_1$ 、 $q_2$ 产生的场强的大小分别为

$$E_1' = k \frac{q_1}{(x_0 + \Delta x)^2} < E_{10}, \text{方向沿 } x \text{ 轴正方向};$$

$$E_2' = k \frac{q_2}{(l-x_0 - \Delta x)^2} > E_{20}, \text{方向沿 } x \text{ 轴负方向}.$$

由于 $E_2' > E_1'$ , $x = x_0 + \Delta x$ 处合场强沿 $x$ 轴的负方向,即指向 $P$ 点. 在 $x$ 轴上 $P$ 点左侧 $x = x_0 - \Delta x$ 处, $q_1$ 、 $q_2$ 的场强的大小分别为

$$E_1'' = k \frac{q_1}{(x_0 - \Delta x)^2} > E_{10}, \text{方向沿 } x \text{ 轴正方向};$$

$$E_2'' = k \frac{q_2}{(l-x_0 + \Delta x)^2} < E_{20}, \text{方向沿 } x \text{ 轴负方向}.$$

由于 $E_2'' < E_1''$ , $x = x_0 - \Delta x$ 处合场强的方向沿 $x$ 轴的正方向,即指向 $P$ 点.

由以上的讨论可知,在 $x$ 轴上,在 $P$ 点的两侧,点电荷 $q_1$ 和 $q_2$ 产生的电场的合场强的方向都指向 $P$ 点,带正电的点电荷在 $P$ 点附近受到的电场力都指向 $P$ 点,所以当 $q_0 > 0$ 时, $P$ 点是 $q_0$ 的稳定平衡位置. 带负电的点电荷在 $P$ 点附近受到的电场力都背离 $P$ 点,所以当 $q_0 < 0$ 时, $P$ 点是 $q_0$ 的不稳定平衡位置.



再考虑  $q_0$  被限制在沿垂直于  $x$  轴的方向运动的情况. 沿垂直于  $x$  轴的方向, 在  $P$  点两侧附近, 点电荷  $q_1$  和  $q_2$  产生的电场的合场强沿垂直  $x$  轴分量的方向都背离  $P$  点, 因而带正电的点电荷在  $P$  点附近受到沿垂直  $x$  轴的分量的电场力都背离  $P$  点. 所以, 当  $q_0 > 0$  时,  $P$  点是  $q_0$  的不稳定平衡位置. 带负电的点电荷在  $P$  点附近受到的电场力都指向  $P$  点, 所以当  $q_0 < 0$  时,  $P$  点是  $q_0$  的稳定平衡位置.

2. 如图 3-1-9 所示.

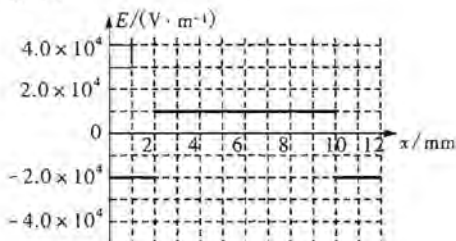


图 3-1-9

**题 5** (2005·全国物理预赛题) 三个电容器分别有不同的电容值  $C_1$ 、 $C_2$ 、 $C_3$ . 现把这三个电容器组成图 3-1-10 所示的 (a)、(b)、(c)、(d) 四种混联电路, 试论证: 是否可以通过适当选择  $C_1$ 、 $C_2$ 、 $C_3$  的数值, 使其中某两种混联电路 A、B 间的等效电容相等.

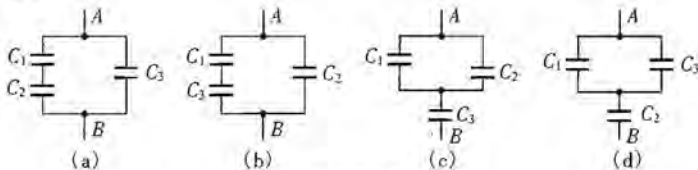


图 3-1-10

**【分析】** 写出题给 4 组电容器的等效电容表达式并不困难, 论证过程主要是重在分析, 并用到一定的数学分析技巧.

**【解】** 由电容  $C'$ 、 $C''$  组成的串联电路的等效电容

$$C_{串} = \frac{C'C''}{C'+C''}.$$

由电容  $C'$ 、 $C''$  组成的并联电路的等效电容

$$C_{并} = C' + C''.$$

利用此二公式可求得题给图示的 4 个混联电路 A、B 间的等效电容  $C_a$ 、 $C_b$ 、 $C_c$ 、 $C_d$  分别为

$$C_a = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} + C_3 = \frac{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3}{C_1 + C_2} > C_3. \quad (1)$$

$$C_b = \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} + C_2 = \frac{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3}{C_1 + C_3} > C_2. \quad (2)$$

$$C_c = \frac{(C_1 + C_2)C_3}{(C_1 + C_2) + C_3} = \frac{C_1 C_3 + C_2 C_3}{C_1 + C_2 + C_3} < C_3, \quad (3)$$

$$C_d = \frac{(C_1 + C_3)C_2}{(C_1 + C_3) + C_2} = \frac{C_1 C_2 + C_2 C_3}{C_1 + C_2 + C_3} < C_2. \quad (4)$$

由①③式可知

$$C_b \neq C_c. \quad (5)$$

由②④式可知

$$C_b \neq C_d. \quad (6)$$

由①②式可知

$$C_a \neq C_b. \quad (7)$$

由③④式可知

$$C_c \neq C_d. \quad (8)$$

若  $C_a = C_d$ , 由①④式可得

$$C_1^2 + 2C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3 = 0.$$

因为  $C_1$ 、 $C_2$  和  $C_3$  均大于 0, 上式不可能成立, 因此

$$C_a \neq C_d. \quad (9)$$

若  $C_b = C_c$ , 由②③式可得

$$C_1^2 + 2C_1 C_3 + C_1 C_2 + C_2 C_3 = 0.$$

因为  $C_1$ 、 $C_2$  和  $C_3$  均大于 0, 上式不可能成立, 因此

$$C_b \neq C_c. \quad (10)$$

综合以上分析, 可知这四个混联电路的等效电容没有一对是相等的.

**题 6** (2003·全国物理预赛题) 图 3-1-11 中 A 和 B 是真空中两块面积很大的平行金属板, 加上周期为  $T$  的交流电压, 在两板间产生交变的匀强电场. 已知 B 板电势为零, A 板电势  $U_A$  随时间变化的规律如图 3-1-12 所示, 其中  $U_A$  的最大值为  $U_0$ , 最小值为  $-2U_0$ . 在图 3-1-11 中, 虚线 MN 表示与 A、B 板平行等距的一个较小的面, 此面到 A 和 B 的距离皆为  $l$ . 在此面所在处, 不断地产生电荷量为  $q$ 、质量为  $m$  的带负电的微粒, 各个时刻产生带电微粒的机会均等.

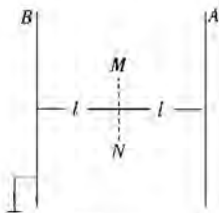


图 3-1-11

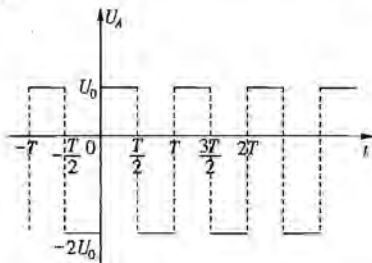


图 3-1-12

这种微粒产生后, 从静止出发在电场力的作用下运动. 设微粒一旦碰到金属板, 它



就附在板上不再运动,且其电荷量同时消失,不影响 A、B 板的电压. 已知上述的  $T$ 、 $U_0$ 、 $l$ 、 $q$  和  $m$  等各量的值正好满足等式

$$l^2 = \frac{3}{16} \frac{U_0 q}{2m} \left(\frac{T}{2}\right)^2.$$

若在交流电压变化的每个周期  $T$  内,平均产生 320 个上述微粒,试论证在  $t=0$  到  $t=\frac{T}{2}$  这段时间内产生的微粒中,有多少微粒可到达 A 板(不计重力,不考虑微粒之间的相互作用).

**【分析】** 在一个周期内,只有  $0 \sim \frac{T}{2}$  时间段内发出的微粒一开始就能被电场加速向 A 板运动,但也只有其中部分粒子能到达 A 板. 找出加速时间最短且到达 A 板速度恰为零所需时间  $t_1$  是解题的关键.

**【解】** 在电压为  $U_0$  时,微粒所受电场力为  $\frac{U_0 q}{2l}$ , 此时微粒的加速度为  $a_0 = \frac{U_0 q}{2lm}$ . 将此式代入题中所给的等式,可将该等式变为

$$l = \frac{3}{16} a_0 \left(\frac{T}{2}\right)^2. \quad (1)$$

现在分析从  $0$  到  $\frac{T}{2}$  时间内,何时产生的微粒在电场力的作用下能到达 A 板,然后计算这些微粒的数目.

在  $t=0$  时产生的微粒,将以加速度  $a_0$  向 A 板运动,经  $\frac{T}{2}$  后,移动的距离  $x$  与式①相比,可知

$$x = \frac{1}{2} a_0 \left(\frac{T}{2}\right)^2 > l. \quad (2)$$

即  $t=0$  时产生的微粒,在不到  $\frac{T}{2}$  时就可以到达 A 板. 在  $U_A = U_0$  的情况下,设刚能到达 A 板的微粒是产生在  $t = t_1$  时刻,则此微粒必然是先被电压  $U_0$  加速一段时间  $\Delta t_1$ ,然后再被电压  $-2U_0$  减速一段时间,到 A 板时刚好速度为零. 用  $d_1$  和  $d_2$  分别表示此两段时间内的位移,  $v_1$  表示微粒在  $\Delta t_1$  内的末速,也等于后一段时间的初速,由匀变速运动公式应有

$$d_1 = \frac{1}{2} a_0 (\Delta t_1)^2, \quad (3)$$

$$0 = v_1^2 + 2(-2a_0)d_2, \quad (4)$$

又因为  $v_1 = a_0 \Delta t_1, \quad (5)$

$$d_1 + d_2 = l, \quad (6)$$

$$t_1 + \Delta t_1 = \frac{T}{2}. \quad (7)$$



由式③~⑦及式①,可解得

$$t_1 = \frac{T}{4}. \quad (8)$$

这就是说,在  $U_A = U_0$  的情况下,从  $t=0$  到  $t = \frac{T}{4}$  这段时间内产生的微粒都可到达 A 板(确切地说,应当是  $t < \frac{T}{4}$ ).

为了讨论在  $\frac{T}{4} < t \leq \frac{T}{2}$  这段时间内产生的微粒的运动情况,先设想有一静止粒子在 A 板附近,在  $U_A = -2U_0$  电场作用下,由 A 板向 B 板运动,若到达 B 板经历的时间为  $\tau$ ,则有

$$2l = \frac{1}{2}(2a_0)\tau^2.$$

根据式①可求得

$$\tau = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{4} T.$$

由此可知,凡位于 MN 到 A 板这一区域中的静止微粒,如果它受  $U = -2U_0$  的电场作用时间大于  $\tau$ ,则这些微粒都将到达 B 板.

在  $t = \frac{T}{4}$  发出的微粒,在  $U_A = U_0$  的电场作用下,向 A 板加速运动,加速的时间为  $\frac{T}{4}$ ,接着在  $U_A = -2U_0$  的电场作用下减速,由于减速时的加速度为加速时的两倍,故经过  $\frac{T}{8}$  微粒速度减为零.由此可知微粒可继续在  $U_A = -2U_0$  的电场作用下向 B 板运动的时间为

$$\tau_1 = \frac{1}{2} T - \frac{1}{8} T = \frac{3}{8} T = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} T.$$

由于  $\tau_1 > \tau$ ,故在  $t = \frac{T}{4}$  时产生的微粒最终将到达 B 板(确切地说,应当是  $t < \frac{T}{4}$ ),不会再回到 A 板.

在  $t$  大于  $\frac{T}{4}$  但小于  $\frac{T}{2}$  时间内产生的微粒,被  $U_A = U_0$  的电场加速的时间小于  $\frac{T}{4}$ ,在  $U_A = -2U_0$  的电场作用下速度减到零的时间小于  $t = \frac{T}{8}$ ,故可在  $U_A = -2U_0$  的电场作用下向 B 板运动时间为

$$\tau' > \frac{1}{2} T - \frac{1}{8} T = \tau_1,$$

所以这些微粒最终都将打到 B 板上,不可能再回到 A 板.

由以上分析可知,在  $t=0$  到  $t = \frac{T}{2}$  时间内产生的微粒中,只有在  $t=0$  到  $t = \frac{T}{4}$



时间内产生的微粒能到达 A 板,因为各个时刻产生带电微粒的机会均等,所以到达 A 板的微粒数为

$$N = 320 \times \frac{1}{4} = 80.$$

**题 7** (2001·全国物理预赛题) 两块竖直放置的平行金属大平板 A、B 相距  $d$ , 两板间的电压为  $U$ . 一带正电的质点从两板间的 M 点开始以竖直向上的初速度  $v_0$  运动, 当它到达电场中某点 N 点时, 速度变为水平方向, 大小仍为  $v_0$ , 如图 3-1-13 所示. 求 M、N 两点间的电势差. (忽略带电质点对金属板上电荷均匀分布的影响)

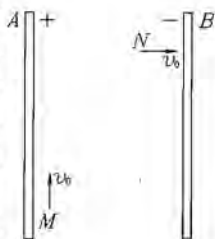


图 3-1-13

**【分析】** 在均匀电场中两点间的电势差与两点之间沿场强方向的距离成正比, 运用带电粒子在静电场中的分运动规律求得 M、N 两点间的水平距离是解题关键.

**【解】** 带电质点在竖直方向做匀减速运动, 加速度的大小为  $g$ ; 在水平方向因受电场力作用而做匀加速直线运动, 设加速度为  $a$ . 若质点从 M 到 N 经历的时间为  $t$ , 则有

$$v_x = at = v_0. \quad (1)$$

$$v_y = v_0 - gt = 0. \quad (2)$$

由以上两式得

$$a = g. \quad (3)$$

$$t = \frac{v_0}{g}. \quad (4)$$

M、N 两点间的水平距离

$$x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{v_0^2}{2g}. \quad (5)$$

于是 M、N 两点间的电势差

$$U_{MN} = \frac{U}{d}x = \frac{Uv_0^2}{2dg}. \quad (6)$$

**题 8** (2000·全国物理预赛题) 某些非电磁量的测量是可以通过一些相应的装置转化为电磁量来测量的. 一平板电容器的两个极板竖直放置在光滑的水平平台上, 极板的面积为  $S$ , 极板间的距离为  $d$ . 极板 1 固定不动, 与周围绝缘; 极板 2 接地, 且可在水平平台上滑动并始终与极板 1 保持平行. 极板 2 的两个侧边与劲度系数为  $k$ 、自然长度为  $L$  的两个完全相同的弹簧相连, 两弹簧的另一端固定. 图 3-1-14(a) 是这一装置的俯视图, 先将电容器充电至电压  $U$  后即与

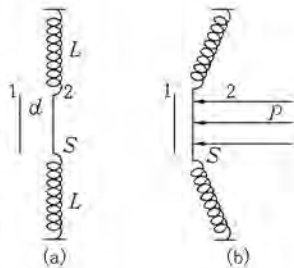


图 3-1-14

电源断开,再在极板2的右侧的整个表面上施以均匀的向左的待测压强 $p$ ,使两极板之间的距离发生微小的变化,如图3-1-14(b)所示.测得此时电容器的电压改变量为 $\Delta U$ .设作用在电容器极板2上的静电作用力不致引起弹簧的可测量到的形变,试求待测压强 $p$ .

**【分析】** 电容器右极板受向左的压力作用后会向左发生一微小位移,极板左移使两弹簧被拉长,右极板在两个弹力与一个向左的压力作用下平衡.由于电容器充电后与电源断开,所以带电荷量不变,板间电压与板间距离成正比.故本题可用电容器的知识与平衡时合力为零来求解.

**【解】** 电容器充电后与电源断开,极板上的电荷量保持不变,故两板间的电压 $U$ 应与其电容 $C$ 成反比;而平板电容器的电容 $C$ 又与极板间的距离 $d$ 成反比,故平板电容器的两板间电压与距离 $d$ 成正比,即

$$U = Ad, \quad (1)$$

式中 $A$ 为比例系数.

极板2受压强作用而向左移动,并使弹簧形变.设平衡时,极板2向左移动的距离为 $\Delta d$ ,电容器的电压减小了 $\Delta U$ ,则有

$$U - \Delta U = A(d - \Delta d). \quad (2)$$

由①与②,得

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{\Delta d}{d}. \quad (3)$$

极板2移动后,连接极板2的弹簧偏离其原来位置 $\theta$ 角,弹簧长度变为 $L'$ ,如图3-1-15所示.根据勾股定理有

$$\begin{aligned} L' &= \sqrt{L^2 + (\Delta d)^2} \\ &= L \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta d}{L}\right)^2} \\ &\approx L \left[ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta d}{L}\right)^2 \right] \\ &= L + \frac{(\Delta d)^2}{2L}. \end{aligned}$$

$$\text{弹簧伸长量} \quad \Delta L = L' - L = \frac{(\Delta d)^2}{2L}. \quad (4)$$

极板2平衡时,有

$$pS = 2k\Delta L \sin\theta. \quad (5)$$

而

$$\sin\theta \approx \tan\theta = \frac{\Delta d}{L}, \quad (6)$$

解③④⑤与⑥,得

$$p = \frac{kd^3}{L^2 S} \left(\frac{\Delta U}{U}\right)^3.$$

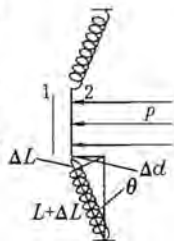


图 3-1-15

**题 9** (1998·全国物理预竞赛) 真空中,有五个电荷量均为 $q$ 的均匀带电薄



球壳, 它们的半径分别为  $R, \frac{R}{2}, \frac{R}{4}, \frac{R}{8}, \frac{R}{16}$ , 彼此内切于  $P$  点 (如图 3-1-16 所示). 球心分别为  $O_1, O_2, O_3, O_4, O_5$ . 求  $O_5$  与  $O_1$  间的电势差.

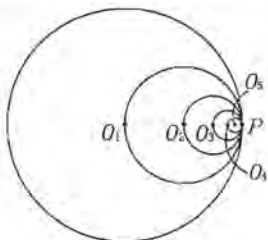


图 3-1-16

【分析】均匀带电球壳在球内外的电势是大家熟知的. 利用电势叠加原理可先分别求出球心  $O_5$  与  $O_1$  的电势, 再算  $O_5$  与  $O_1$  的电势差.

【解】 $O_5$  的电势为

$$\begin{aligned} U(O_5) &= k \left[ \frac{q}{R} + \frac{q}{\frac{1}{2}R} + \frac{q}{\frac{1}{4}R} + \frac{q}{\frac{1}{8}R} + \frac{q}{\frac{1}{16}R} \right] \\ &= k(1+2+2^2+2^3+2^4) \frac{q}{R} \\ &= 31k \frac{q}{R}. \end{aligned} \quad \text{①}$$

$O_1$  的电势为

$$\begin{aligned} U(O_1) &= k \left[ \frac{q}{R} + \frac{q}{\frac{R}{2}} + \frac{q}{\frac{R}{2} + \frac{R}{4}} + \frac{q}{\frac{R}{2} + \frac{R}{4} + \frac{R}{8}} + \frac{q}{\frac{R}{2} + \frac{R}{4} + \frac{R}{8} + \frac{R}{16}} \right] \\ &= k \left( 3 + \frac{372}{105} \right) \frac{q}{R} \\ &= 6.54k \frac{q}{R}. \end{aligned} \quad \text{②}$$

$O_5$  与  $O_1$  的电势差

$$U(O_5) - U(O_1) = 31k \frac{q}{R} - 6.54k \frac{q}{R} = 24.46k \frac{q}{R}.$$

**题 10** (1998 · 全国物理预赛题) 如图 3-1-17, 在  $x > 0$  的空间各点, 存在沿  $x$  轴正方向的电场, 其中在  $x \leq d$  的区域中, 电场是非匀强电场, 场强  $E$  的大小随  $x$  增大, 即  $E = bx, b > 0$ , 为已知常量; 在  $x \geq d$  的区域中, 电场是匀强的, 场强为  $E = bd$ . 在  $x < 0$  的空间各点, 电场的分布与  $x > 0$  的空间中分布对称, 只是场强的方向都沿  $x$  轴负方向.

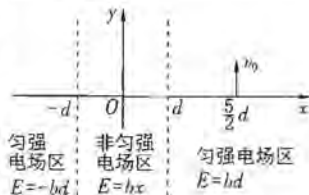


图 3-1-17

一电子带电荷为  $-e$ , 质量为  $m$ , 在  $x = \frac{5}{2}d$  处沿  $y$

轴正方向以初速度  $v_0$  开始运动, 如图 3-1-17 所示. 求:

(1) 电子在  $x$  方向分运动的周期;

(2) 电子运动的轨迹与  $y$  轴的各个交点中, 任意两个相邻交点间的距离.

【分析】物体的运动情况完全取决于初始条件及所受的合力. 电子在  $y$  方向

不受力所以做匀速运动。\$x\$ 方向,在 \$|x|>d\$ 电子受恒力作用,做匀加速(或匀减速)运动。在 \$|x|\leq d\$ 受力 \$F=-ebx\$, 做简谐运动。因此求解电子在 \$x\$ 方向的运动是解决本题的关键。

**【解】** (1)先研究电子在 \$x\$ 方向上的分运动。

电子沿 \$x\$ 方向运动的初速度为零,在电场力作用下开始向负 \$x\$ 方向做加速运动。在 \$d\leq x\leq \frac{5}{2}d\$ 区间,电子受到沿负 \$x\$ 方向的力,大小为

$$F=ebd.$$

电子的加速度的大小为  $a_1=\frac{ebd}{m}$ .

设电子由 \$\frac{5}{2}d\$ 到 \$d\$ 处需时 \$t\_1\$, 则有  $\frac{5}{2}d-d=\frac{1}{2}a_1t_1^2$ ,

得  $t_1=\sqrt{\frac{3m}{eb}}$ . ①

电子到 \$x=d\$ 处时,其 \$x\$ 方向分速度的大小为

$$v_1=\sqrt{\frac{3eb}{m}}d. \quad ②$$

在 \$-d\leq x\leq d\$ 区间,电子受力

$$F=-eE=-ebx=-kx,$$

其中 \$k=eb\$. 在此区间内电子的 \$x\$ 方向分运动是简谐运动,振动的角频率为

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{eb}{m}}.$$

因此,就 \$x\$ 方向上的分运动而言,在此区间内电子的运动是平衡位置在 \$x=0\$ 处,周期为 \$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{eb}}\$, 振幅为 \$A\$ 的

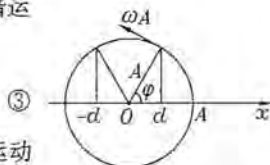


图 3-1-18

简谐运动的一部分;在 \$x=d\$ 处时,电子的速度为 \$v=v\_1=\sqrt{\frac{3eb}{m}}d=\sqrt{3}\omega d\$, 方向向左。设在半径为 \$A\$ 的参考圆(如图 3-1-18)上,这时旋转半径与 \$x\$ 轴的夹角为 \$\varphi\$, 则由图 3-1-18 有

$$x=A\cos\varphi=d,$$

$$v_1=\omega A\sin\varphi=\sqrt{3}\omega d.$$

可解得

$$A=2d, \quad ④$$

$$\varphi=\frac{\pi}{3}. \quad ⑤$$

设电子自 \$x=d\$ 运动到 \$x=-d\$ 所需时间为 \$t\_2\$, 则由图可得



$$\omega t_2 = \pi - 2\varphi = \frac{\pi}{3},$$

得

$$t_2 = \frac{\pi}{3\omega} = \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{m}{eb}}. \quad (6)$$

在  $x \leq -d$  区间内, 电子在  $x$  方向上以初速度  $v_1$  向左做匀减速运动, 到达  $x = -\frac{5}{2}d$  处时, 速度为零, 这一过程经历的时间为

$$t_3 = t_1.$$

此后电子在  $x$  方向上的分运动为在  $x = -\frac{5}{2}d$  与  $x = \frac{5}{2}d$  间的往复振动, 其周期为

$$T = 2(t_1 + t_2 + t_3) = \left(4\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}\right) \sqrt{\frac{m}{eb}}. \quad (7)$$

(2) 电子运动的轨迹与  $y$  轴的各交点中, 任意两相邻交点间的距离  $\Delta y$  都相等,

$$\Delta y = v_0 \frac{T}{2} = \left(2\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\right) \sqrt{\frac{m}{eb}} v_0. \quad (8)$$

**题 11** (2008·全国物理复赛题) 一很长、很细的圆柱形电子束由速度为  $v$  的匀速运动的低速电子组成. 电子在电子束中均匀分布, 沿电子束轴线每单位长度包含  $n$  个电子, 每个电子的电荷量为  $-e$  ( $e > 0$ ), 质量为  $m$ . 该电子束从远处沿垂直于平行板电容器极板的方向射向电容器, 其前端 [即图 3-1-19(a) 中的右端] 于  $t=0$  时刻刚好到达电容器的左极板 A. 电容器的两个极板 A、B 上各开一个小孔, 使电子束可以不受阻碍地穿过电容器. 两极板 A、B 之间加上了如图 3-1-19(b) 所示的周期性变化的电压  $U_{AB}$ :  $U_{AB} = U_A - U_B$  (图中只画出了一个周期的图线), 电压的最大值和最小值分别为  $U_0$  和  $-U_0$ , 周期为  $T$ . 若以  $\tau$  表示每个周期中电压处于最大值的时间间隔, 则电压处于最小值的时间间隔为  $T - \tau$ . 已知  $\tau$  的值恰好使在  $U_{AB}$  变化的第一个周期内通过电容器到达电容器右边的所有的电子, 能在某一时刻  $t_0$  形成均匀分布的一段段电子束. 设电容器两极板间的距离很小, 电子穿过电容器所需要的时间可以忽略, 且  $m\varphi^2 = 6eU_0$ , 不计电子之间的相互作用及重力作用.

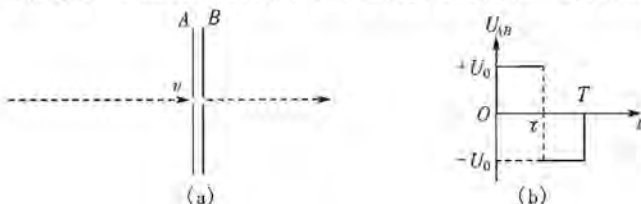


图 3-1-19

(1) 满足题目所给条件的  $\tau$  和  $t_0$  的值分别为  $\tau = \underline{\hspace{2cm}} T$ ,  $t_0 = \underline{\hspace{2cm}} T$ .

(2) 试在图 3-1-20 中画出  $t=2T$  时刻, 在  $0 \sim 2T$  时间内通过电容器的电子在电容器右侧空间形成的电流  $I$  随离开右极板的距离  $x$  的变化图线, 并在图上标出

图线特征点的纵、横坐标(坐标的数字保留到小数点后第2位),取+x方向为电流正方向,图中 $x=0$ 处为电容器的右极板B的小孔所在的位置,横坐标的单位 $s =$

$$T\sqrt{\frac{eU_0}{m}} \text{ (本题不需给出计算过程)}$$

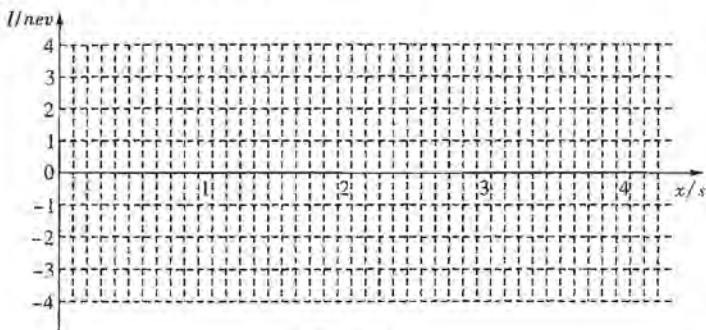


图 3-1-20

**【分析】** 首先应明确经电场作用后电子束在空间的分布情况(可先考察一个周期,再考察两个周期)。由题意知在每个周期内先进入电容器的一段电子束被减速,后进入的被加速,故一个周期后在电容器的右方会出现两段速度不同的电子束(前慢后快),满足题意要求的 $I$ 值应保证两段电子束有相同的空间长度, $t_b$ 则是指这两段电子束在空间完全重合所需的时间。对于第二问的作图题,应先理解纵横坐标的含义。其中 $nev$ 是被作用前的电子束的电流强度,横坐标显示的是2个周期时间内相关空间内电子束形成的电流情况,另外注意一段电子束的电流强度不会因被加速或减速而改变。

**【解】** (1)  $(2-\sqrt{2})$  或  $0.59; 2$ ; (2)  $I-x$  变化图线如图 3-1-21。

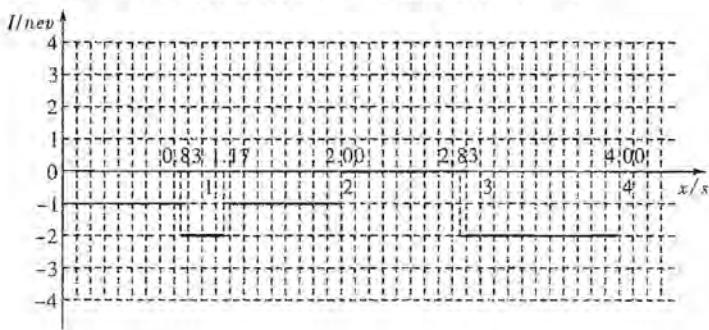


图 3-1-21

**题 12** (2006·全国物理复赛题) 串列静电加速器是加速质子、重离子进行核物理基础研究以及核技术应用研究的设备,其构造示意图如图 3-1-22。S 是产生负离子的装置,称为离子源;中间部分 N 为充有氦气的管道,通过高压装置 H 使其对



地有  $5.00 \times 10^6 \text{ V}$  的高压, 现将氢气通入离子源  $S$ ,  $S$  的作用是使氢分子变为氢原子, 并使氢原子粘附上一个电子, 成为带有一个电子电荷的氢负离子. 氢负离子(其初速度为零)在静电场的作用下, 形成高速运动的氢负离子束流. 氢负离子束射入管道  $N$  后将与氢气分子发生相互作用, 这种作用可使大部分的氢负离子失去粘附在它们上面的多余的电子而成为氢原子, 又可能进一步剥离掉氢原子的电子使它成为质子. 已知氢气与带电粒子的相互作用不会改变粒子的速度. 质子在电场的作用下继续飞向串联静电加速器的终端靶子  $T$ . 求在考虑相对论效应的情况下, 质子到达  $T$  时的速度  $v$ .

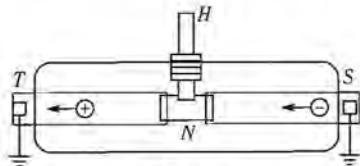


图 3-1-22

电子电荷  $q = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$ , 质子的静止质量  $m_0 = 1.673 \times 10^{-27} \text{ kg}$ .

**【分析】** 在串联静电加速器中, 带电粒子加速过程分为两个区间, 在  $SN$  区间是负带电粒子(含一个质子和二个电子)被加速, 在  $NT$  区间是正带电粒子(一个质子)被加速, 两次加速粒子获得的功能相同. 再考虑相对论质速关系和能量关系即可求解, 求解时电子的质量可略去不计.

**【解】** 带电粒子在静电场中从  $S$  到  $T$  的运动过程中, 经历了从  $S$  到  $N$  和从  $N$  到  $T$  的两次加速. 粒子带的电荷  $q$  的大小均为  $1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$ , 若以  $U$  表示  $N$  与地之间的电压, 则粒子获得的动能

$$E_k = 2qU. \quad (1)$$

质子在  $T$  处的质量

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \quad (2)$$

氢负离子在  $S$  处的能量为  $m_0 c^2$ , 质子到达  $T$  处时具有的能量为  $mc^2$ , 根据相对论能量关系有

$$mc^2 - m_0 c^2 = E_k. \quad (3)$$

①②③式联立, 得

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 1 + \frac{2qU}{m_0 c^2}.$$

代入数据解得

$$v = 4.34 \times 10^7 \text{ m/s}.$$



**题 13** (2005·全国物理复赛题) 如图 3-1-23 所示,  $O$  为半径等于  $R$  的原来不带电的导体球的球心,  $O_1, O_2, O_3$  为位于球内的三个半径皆为  $r$  的球形空腔的球心, 它们与  $O$  共面, 已知  $\overline{OO_1} = \overline{OO_2} = \overline{OO_3} = \frac{R}{2}$ , 在

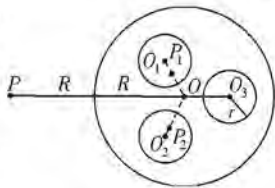


图 3-1-23

$\overline{OO_1}, \overline{OO_2}$  的连线上距  $O_1, O_3$  为  $\frac{r}{2}$  的  $P_1, P_2$  点处分别

放置电荷为  $q_1$  和  $q_2$  的线度很小的导体(视为点电荷), 在  $O_3$  处放置一电荷为  $q_3$  的点电荷, 设法使  $q_1, q_2$  和  $q_3$  固定不动. 在导体球外的  $P$  点放一个电荷为  $Q$  的点电荷,  $P$  点与  $O_1, O_2, O_3$  共面, 位于  $\overline{O_1O}$  的延长线上, 到  $O$  的距离  $\overline{OP} = 2R$ .

1. 求  $q_3$  的电势能.

2. 将带有电荷  $q_1, q_2$  的小导体释放, 当重新达到静电平衡时, 各表面上的电荷分布有何变化? 此时  $q_3$  的电势能为多少?

**【分析】** 要求  $q_3$  的电势能关键是要求出空间其他电荷(包括感应电荷)在  $O_3$  处产生的电势, 其中注意到  $q_1$  和  $q_2$  与其在相应空腔内表面的感应电荷在  $O_3$  处的电势之和为零, 以及  $Q$  和导体球外表面的感应电荷( $q_1 + q_2 + q_3$ ) 在  $O_3$  处电势与在  $O$  处电势相等(后者较易求得). 理解上述规律并运用电势叠加原理即可求解本题.

**【解】** 1. 由静电感应知空腔 1, 2 及 3 的表面分别出现电荷为  $-q_1, -q_2$  和  $-q_3$  的面电荷, 由电荷守恒定律可知, 在导体球的外表面呈现出电荷  $q_1 + q_2 + q_3$ . 由静电屏蔽可知, 点电荷  $q_1$  及感应电荷( $-q_1$ ) 在空腔外产生的电场为零; 点电荷  $q_2$  及感应电荷( $-q_2$ ) 在空腔外产生的电场为零; 点电荷  $q_3$  及感应电荷( $-q_3$ ) 在空腔外产生的电场为零. 因此, 在导体球外没有电荷时, 球表面的电荷  $q_1 + q_2 + q_3$  作球对称分布.

当球外  $P$  点处放置电荷  $Q$  后, 由于静电感应, 球面上的总电荷仍为  $(q_1 + q_2 + q_3)$ , 但这些电荷在球面上不再均匀分布, 由球外的  $Q$  和重新分布在球面上的电荷在导体球内各点产生的合场强为零.

$O_3$  处的电势由位于  $P$  点处的  $Q$ 、导体球表面的电荷( $q_1 + q_2 + q_3$ ) 及空腔 3 表面的感应电荷( $-q_3$ ) 共同产生. 无论  $(q_1 + q_2 + q_3)$  在球面上如何分布, 球面上的面电荷到  $O$  点的距离都是  $R$ , 因而在  $O$  点产生的电势为  $k \frac{q_1 + q_2 + q_3}{R}$ ,  $Q$  在  $O$  点产生的电势为  $k \frac{Q}{2R}$ , 这两部分电荷在  $O_3$  点产生的电势  $U'$  与它们在  $O$  点产生的电势相等, 即有

$$U' = k \left( \frac{q_1 + q_2 + q_3}{R} + \frac{Q}{2R} \right) = k \left( \frac{Q + 2q_1 + 2q_2 + 2q_3}{2R} \right). \quad (1)$$

因  $q_3$  放在空腔 3 的中心处, 其感应电荷  $-q_3$  在空腔 3 壁上均匀分布. 这些电荷在  $O_3$  点产生的电势为



$$U' = k \frac{-q_3}{r}. \quad (2)$$

根据电势叠加定理,  $O_1$  点的电势为

$$U = U' + U'' = k \left( \frac{Q + 2q_1 + 2q_2 + 2q_3}{2R} - \frac{q_3}{r} \right). \quad (3)$$

故  $q_3$  的电势能

$$W = q_3 U = k q_3 \left( \frac{Q + 2q_1 + 2q_2 + 2q_3}{2R} - \frac{q_3}{r} \right). \quad (4)$$

2. 由于静电屏蔽, 空腔 1 处所有电荷在空腔 1 内产生的合电场为零, 空腔 1 内的电荷  $q_1$  仅受到腔内壁感应电荷  $-q_1$  的静电力作用, 因  $q_1$  不在空腔 1 的中心  $O_1$  点, 所以感应电荷  $-q_1$  在空腔表面分布不均匀, 与  $q_1$  相距较近的区域电荷面密度较大, 对  $q_1$  的吸力较大, 在空腔表面感应电荷的静电力作用下,  $q_1$  最后到达空腔 1 表面, 与感应电荷  $-q_1$  中和. 同理, 空腔 2 中  $q_2$  也将空腔表面感应电荷  $-q_2$  的静电力作用下到达空腔 2 的表面与感应电荷  $-q_2$  中和. 达到平衡后, 腔 1、2 表面上无电荷分布, 腔 3 表面和导体球外表面的电荷分布没有变化.  $O_3$  的电势仍由球外的电荷  $Q$  和导体球外表面的电荷  $(q_1 + q_2 + q_3)$  及空腔 3 内壁的电荷  $-q_3$  共同产生, 故  $O_3$  处的电势  $U$  与  $q_3$  的电势能  $W$  仍如③式与④式所示.

**题 14** (2004·全国物理复赛题) 如图 3-1-24 所示, 接地的空心导体球壳内半径为  $R$ , 在空腔内一直径上的  $P_1$  和  $P_2$  处, 放置电荷量分别为  $q_1$  和  $q_2$  的点电荷,  $q_1 = q_2 = q$ , 两点电荷到球心的距离均为  $a$ , 由静电感应与静电屏蔽可知: 导体空腔内表面将出现感应电荷分布, 感应电荷电荷量等于  $-2q$ , 空腔内部的电场是由  $q_1$ 、 $q_2$  和两者在空腔内表面上的感应电荷共同产生的. 由于我们尚不知道这些感应电荷是怎样分布的, 所以很难用场强叠加原理直接求得腔内的电势或场强. 但理论上可以证明, 感应电荷对腔内电场的贡献, 可用假想的位于腔外的(等效)点电荷来代替 [在本题中假想(等效)点电荷应为两个], 只要假想的(等效)点电荷的位置和电荷量能满足这样的条件, 即: 设想将整个导体壳去掉, 由  $q_1$  在原空腔内表面的感应电荷的假想(等效)点电荷  $q_1'$  与  $q_1$  共同产生的电场在原空腔内表面所在位置处各点的电势皆为零; 由  $q_2$  在原空腔内表面的感应电荷的假想(等效)点电荷  $q_2'$  与  $q_2$  共同产生的电场在原空腔内表面所在位置处各点的电势皆为零. 这样确定的假想电荷叫做感应电荷的等效电荷, 而且这样确定的等效电荷是唯一的. 等效电荷取代感应电荷后, 可用等效电荷  $q_1'$ 、 $q_2'$  和  $q_1$ 、 $q_2$  来计算原来导体存在时空腔内任意点的电势和场强.

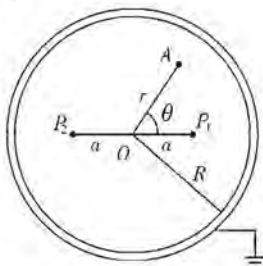


图 3-1-24

1. 试根据上述条件, 确定假想等效电荷  $q_1'$ 、 $q_2'$  的位置及电荷量.

2. 求空腔内任意点 A 的电势  $U_A$ . 已知 A 点到球心 O 的距离为  $r$ ,  $\overline{OA}$  与  $\overline{OP_1}$

的夹角为  $\theta$ 。

**【分析】** 第 1 问是求解本题的难点所在, 首先应仔细阅读原图, 深刻理解题目所揭示的等效原理的思想。具体求解应考虑对称性, 即等效电荷只可能在  $P_1P_2$  的延长线上, 运用电势叠加原理并认真分析满足腔的内表面电势为零 (这是因为导体空腔接地的原因) 所应满足的几何条件。本题第 1 问给出两种解法, 对于解法二所体现的解题方法, 建议读者不妨仔细体会一下。

**【解】** 1. 方法一: 如图 3-1-25 所示,  $S$  为原空腔内表所在位置,  $q_1'$  的位置应位于  $\overline{OP_1}$  的延长线上的某点  $B_1$  处,  $q_2'$  的位置应位于  $\overline{OP_2}$  的延长线上的某点  $B_2$  处。设  $A_1$  为  $S$  面上的任意一点, 根据题意有

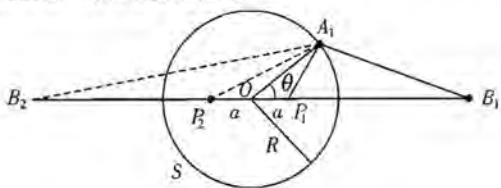


图 3-1-25

$$k \frac{q_1}{A_1P_1} + k \frac{q_1'}{A_1B_1} = 0. \quad (1)$$

$$k \frac{q_2}{A_1P_2} + k \frac{q_2'}{A_1B_2} = 0. \quad (2)$$

怎样才能使①式成立呢? 下面分析图 3-1-25 中  $\triangle OP_1A_1$  与  $\triangle OA_1B_1$  的关系。

若等效电荷  $q_1'$  的位置  $B_1$  使下式成立, 即

$$\overline{OP_1} \cdot \overline{OB_1} = R^2. \quad (3)$$

$$\text{即} \quad \frac{\overline{OP_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{OA_1}}{\overline{OB_1}}. \quad (4)$$

则  $\triangle OP_1A_1 \sim \triangle OA_1B_1$ 。

$$\text{有} \quad \frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{OP_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{a}{R}. \quad (5)$$

由①式和⑤式便可求得等效电荷

$$q_1' = -\frac{R}{a}q_1. \quad (6)$$

由③式知, 等效电荷  $q_1'$  的位置  $B_1$  到原球壳中心位置  $O$  的距离

$$\overline{OB_1} = \frac{R^2}{a}. \quad (7)$$

同理,  $B_2$  的位置应使  $\triangle OP_2A_1 \sim \triangle OA_1B_2$ , 用类似的方法可求得等效电荷

$$q_2' = -\frac{R}{a}q_2. \quad (8)$$



等效电荷  $q_2'$  的位置  $B_2$  到原球壳中心  $O$  位置的距离

$$\overline{OB_2} = \frac{R^2}{a}. \quad (9)$$

方法二: 在图 3-1-25 中, 设  $\overline{A_1P_1} = r_1$ ,  $\overline{A_1B_1} = r_1'$ ,  $\overline{OB_1} = d$ , 根据题意,  $q_1$  和  $q_1'$  两者在  $A_1$  点产生的电势和为零, 有

$$k \frac{q_1}{r_1} + k \frac{q_1'}{r_1'} = 0. \quad (1')$$

$$\text{式中} \quad r_1 = (R^2 + a^2 - 2Ra \cos \theta)^{\frac{1}{2}}. \quad (2')$$

$$r_1' = (R^2 + d^2 - 2Rd \cos \theta)^{\frac{1}{2}}. \quad (3')$$

由①'②'③'式得

$$q_1^2 (R^2 + d^2 - 2Rd \cos \theta) = q_1'^2 (R^2 + a^2 - 2Ra \cos \theta). \quad (4')$$

④'式是以  $\cos \theta$  为变量的一次多项式, 要使④'式对任意  $\theta$  均成立, 等号两边的相应系数应相等, 即

$$q_1^2 (R^2 + d^2) = q_1'^2 (R^2 + a^2). \quad (5')$$

$$q_1^2 d = q_1'^2 a. \quad (6')$$

$$\text{由⑤'⑥'可得} \quad ad^2 - (a^2 + R^2)d + aR^2 = 0. \quad (7')$$

$$\text{解得} \quad d = \frac{(a^2 + R^2) \pm (a^2 - R^2)}{2a}. \quad (8')$$

由于等效电荷位于空腔外部, 由⑧'式求得

$$d = \frac{R^2}{a}. \quad (9')$$

$$\text{由⑥'⑨'式有} \quad q_1'^2 = \frac{R^2}{a^2} q_1^2. \quad (10')$$

$$\text{考虑到①'式, 有} \quad q_1' = -\frac{R}{a} q_1. \quad (11')$$

$$\text{同理可求得} \quad \overline{OB_2} = \frac{R^2}{a}. \quad (12')$$

$$q_2' = -\frac{R}{a} q_2. \quad (13')$$

2. A 点的位置如图 3-1-26 所示, A 的电势由  $q_1, q_1', q_2, q_2'$  共同产生, 即

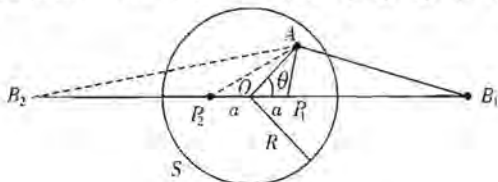


图 3-1-26

$$U_A = kq \left( \frac{1}{P_1A} - \frac{R}{a} \frac{1}{B_1A} + \frac{1}{P_2A} - \frac{R}{a} \frac{1}{B_2A} \right), \quad (10)$$

因

$$P_1 A = \sqrt{r^2 - 2ra \cos \theta + a^2}.$$

$$B_1 A = \sqrt{r^2 - 2r \left(\frac{R^2}{a}\right) \cos \theta + \left(\frac{R^2}{a}\right)^2}.$$

$$P_2 A = \sqrt{r^2 + 2ra \cos \theta + a^2}.$$

$$B_2 A = \sqrt{r^2 + 2r \left(\frac{R^2}{a}\right) \cos \theta + \left(\frac{R^2}{a}\right)^2}.$$

代入⑩式得

$$U_A = kq \left( \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2ra \cos \theta + a^2}} - \frac{R}{\sqrt{a^2 r^2 - 2raR^2 \cos \theta + R^4}} + \frac{1}{\sqrt{r^2 + 2ra \cos \theta + a^2}} - \frac{R}{\sqrt{a^2 r^2 + 2raR^2 \cos \theta + R^4}} \right).$$

**题 15** (2003·全国物理复赛题) 两个点电荷位于  $x$  轴上, 在它们形成的电场中, 若取无限远处的电势为零, 则在正  $x$  轴上各点的电势如图 3-1-27 中曲线所示, 当  $x \rightarrow 0$  时, 电势  $U \rightarrow \infty$ ; 当  $x \rightarrow \infty$  时, 电势  $U \rightarrow 0$ ; 电势为零的点的坐标为  $x_0$ , 电势为极小值  $-U_0$  的点的坐标为  $ax_0$  ( $a > 2$ ). 试根据图线提供的信息, 确定这两个电荷所带电荷的符号、电荷量的大小以及它们在  $x$  轴上的位置.

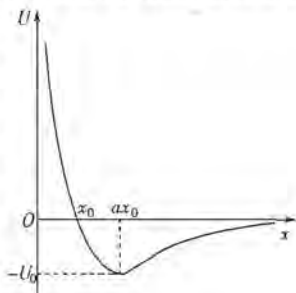


图 3-1-27

**【分析】** 首先应根据  $x$  轴上电势变化情况, 特别是  $x=0$ 、 $x=x_0$ 、 $x=ax_0$  以及  $x \rightarrow \infty$  这四个特征点的电势值, 并巧妙利用叠加思想判断出两个点电荷的电性以及在  $x$  轴上大致位置. 对于  $x=ax_0$  这个点来说电势为极小值, 表明该点还是一个检测电荷受力为零的点. 最后针对  $x=x_0$  和  $x=ax_0$  这两点列出相应公式求解.

**【解】** 在点电荷形成的电场中一点的电势与离开该点电荷的距离成反比. 因为取无限远处为电势的零点, 故正电荷在空间各点的电势为正; 负电荷在空间各点的电势为负. 现已知  $x=x_0$  处的电势为零, 故可知这两个电荷必定是一正一负. 根据所提供的电势的曲线, 当考查点离坐标原点很近时, 电势为正, 且随  $x$  的减小而很快趋向无限大, 故正的点电荷必定位于原点  $O$  处, 以  $Q_1$  表示该电荷的电荷量. 当  $x$  从零增大时, 电势没有出现负无限大, 即没有经过负的电荷, 这表明负的电荷必定在原点的左侧. 设它到原点的距离为  $b$ , 当  $x$  很大时, 电势一直为负, 且趋向于零, 这表明负的点电荷的电荷量的数值  $Q_2$  应大于  $Q_1$ . 即产生题目所给电势的两个点电荷, 一个是位于原点的正电荷, 电荷量为  $Q_1$ ; 另一个是位于负  $x$  轴上离原点距离  $b$  处的负电荷, 电荷量的大小为  $Q_2$ , 且  $Q_2 > Q_1$ . 按题目所给的条件有

$$k \frac{Q_1}{x_0} - k \frac{Q_2}{x_0 + b} = 0, \quad \text{①}$$



$$k \frac{Q_1}{ax_0} - k \frac{Q_2}{ax_0 + b} = -U_0. \quad (2)$$

因  $x=ax_0$  时, 电势为极小值, 故任一电荷量为  $q$  的正检测电荷位于  $x=ax_0$  处的电势能也为极小值, 这表明该点是检测电荷的平衡位置, 位于该点的检测电荷受到的电场力等于零, 因而有

$$k \frac{Q_1}{(ax_0)^2} - k \frac{Q_2}{(ax_0 + b)^2} = 0. \quad (3)$$

由式①②③可解得

$$b = a(a-2)x_0.$$

$$Q_1 = \frac{ax_0}{a-2} \frac{U_0}{k}.$$

$$Q_2 = \frac{a(a-1)^2}{a-2} \frac{U_0 x_0}{k}.$$

式中  $k$  为静电力常量.

**题 16.** (2003·全国物理复赛题) 图 3-1-28 中  $a$  为一固定放置的半径为  $R$  的均匀带电球体,  $O$  为其球心. 已知取无限远处的电势为零时, 球表面处的电势为  $U=1000\text{ V}$ . 在离球心  $O$  很远的  $O'$  点附近有一质子  $b$ , 它以  $E_k=2000\text{ eV}$  的动能沿与  $OO'$  平行的方向射向  $a$ . 以  $l$  表示  $b$  与  $OO'$  线之间的垂直距离, 要使质子  $b$  能够与带电球体  $a$  的表面相碰, 试求  $l$  的最大值. 把质子换成电子, 再求  $l$  的最大值.

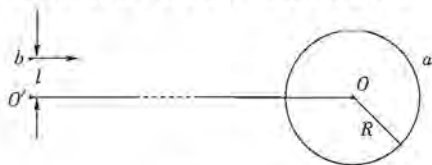


图 3-1-28

**【分析】** 解题时抓住以下两点: 一是能量守恒; 二是带电粒子对固定点  $O$  的角动量守恒. 至于把质子换成电子后仍然满足两个守恒. 只是电子所受库仑力与质子相反, 使得空间运动轨迹不同, 与带电球体表面的相切点也自然不同.

**【解】** 令  $m$  表示质子的质量,  $v_0$  和  $v$  分别表示质子的初速度和到达  $a$  球表面处的速度,  $e$  表示元电荷, 由能量守恒可知

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + eU. \quad (1)$$

因为  $a$  不动, 可取其球心  $O$  为原点, 由于质子所受的  $a$  球对它的静电库仑力总是通过  $a$  球的球心, 所以此力对原点的力矩始终为零, 质子对  $O$  点的角动量守恒. 所求  $l$  的最大值对应于质子到达  $a$  球表面处时其速度方向刚好与该处球面相切 (见图 3-1-29). 以  $l_{\max}$  表示  $l$  的最大值, 由角动量守恒有

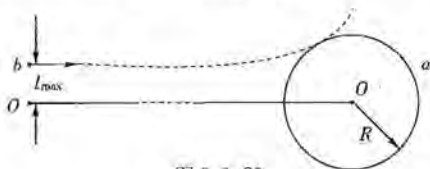


图 3-1-29

$$mv_0 l_{\max} = mvR. \quad (2)$$

由式①②可得

$$l_{\max} = \sqrt{1 - \frac{eU}{mv_0^2}} R. \quad (3)$$

代入数据, 可得

$$l_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{2} R. \quad (4)$$

若把质子换成电子, 则如图 3-1-30 所示, 此时式①中  $e$  改为  $-e$ . 同理可求得

$$l_{\max} = \frac{\sqrt{6}}{2} R. \quad (5)$$

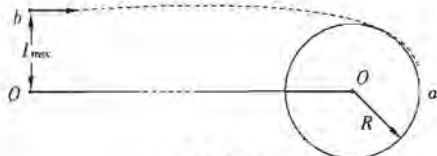


图 3-1-30

**题 17** (2002·全国物理复赛题) 如图 3-1-31 所示, 在水平光滑绝缘的桌面上, 有三个带正电的质点 1、2、3, 位于边长为  $l$  的等边三角形的三个顶点处,  $C$  为三角形的中心. 三个质点的质量皆为  $m$ , 带电荷量皆为  $q$ . 质点 1、3 之间和 2、3 之间用绝缘的轻而细的刚性杆相连,  $l$  在 3 的连接处为无摩擦的铰链. 已知开始时三个质点的速度为零, 在此后运动过程中, 当质点 3 运动到  $C$  处时, 其速度大小为多少?

**【分析】** 对一个初始状态静止的守恒系统来说, 其质心位置应保持不变的, 由此可判断当质点 3 运动到  $C$  处时 3 个质点的空间分布. 再考虑对称性、动量守恒以及能量守恒便可求出速度大小.

**【解】** 以三个质点为系统, 由对称性可知, 开始时其质心应位于  $C$  处. 因为质点系所受的合外力为零, 由质心运动定理可知, 质心总是固定不动的. 质点 1、2 在静电力作用下, 彼此间距离必增大, 但不可能保持在沿起始状态时 1、2 连线上运动. 若是那样运动, 由于杆不能伸长, 质点 3 必向左运动, 三者的质心势必亦向左运动, 这与“质心不动”相矛盾, 故不可能. 由此可知, 由于杆为刚性, 质点 1、2 在静电力作用下, 要保持质心不动, 质点 1、2 必将分别向题图中右上方和右下方运动, 而质点 3 将向左运动. 当 3 运动到

图 3-1-11



C处时,1、2将运动到A、B处,A、C、B三点在一直线上,1、2的速度方向向右,3的速度方向向左(如图3-1-32所示).令 $v_1$ 、 $v_2$ 、 $v_3$ 分别表示此时它们的速度大小,则由对称性可知此时三质点的总动能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv_3^2 + 2\left(\frac{1}{2}mv_1^2\right),$$

再由对称性及动量守恒可知

$$mv_3 = 2mv_1,$$

系统原来的电势能为  $E_p = 3k\frac{q^2}{l}$ .

其中 $k$ 为静电力常数.运动到图3-1-32所示的位置时的电势能为

$$E_p' = 2k\frac{q^2}{l} + k\frac{q^2}{2l}. \quad (4)$$

根据能量守恒有  $E_p = E_p' + E_k. \quad (5)$

由以上各式可解得  $v_3 = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{kq^2}{lm}}.$

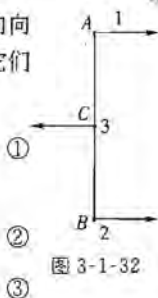


图 3-1-32

**题 18** (2001·全国物理复赛题) 如图3-1-33所示,一薄壁导体球壳(以下简称为球壳)的球心在O点.球壳通过一细导线与端电压 $V=90\text{ V}$ 的电池的正极相连,电池负极接地.在球壳外A点有一电荷量为 $q_1=10\times 10^{-9}\text{ C}$ 的点电荷,B点有一电荷量为 $q_2=16\times 10^{-9}\text{ C}$ 的点电荷.OA之间的距离 $d_1=20\text{ cm}$ ,OB之间的距离 $d_2=10\text{ cm}$ .现设想球壳的半径从 $a=10\text{ cm}$ 开始缓慢地增大到 $50\text{ cm}$ ,问:在此过程中的不同阶段,大地流向球壳的电荷量各是多少?已知静电力恒量 $k=9\times 10^9\text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}$ .假设点电荷能穿过球壳壁进入导体球内而不与导体壁接触.



图 3-1-33

**【分析】** 首先应确定若干特定位置,如球壳半径趋近于 $d_1$ 时, $q_1$ 进入球壳内后等等.运用电势叠加原理求出球壳此时的电荷量,则相邻特定位置之间球壳上电荷的变化量即为题目所求.解题注意划分下面两种情况:当 $q_1$ 和 $q_2$ 均在球壳外时,球壳内为等势区,即 $V_0=V$ .但当 $q_1$ 和 $q_2$ 先后进入球壳后,球壳内不再是等势区,但此时球壳外表面的电荷以及留在球壳外的电荷在O点的电势之和仍为 $V$ .

**【解】** 分以下几个阶段讨论:

(1)由于球壳外空间点电荷 $q_1$ 、 $q_2$ 的存在,球壳外壁的电荷分布不均匀,用 $\sigma$ 表示面电荷密度.设球壳半径 $a=10\text{ cm}$ 时球壳外壁带的电荷量为 $Q_1$ ,因为电荷 $q_1$ 、 $q_2$ 与球壳外壁的电荷量 $Q_1$ 在球壳内产生的合场强为零,球壳内为电势等于 $V$ 的等势区.在导体表面上的面元 $\Delta S$ 所带的电荷量为 $\sigma\Delta S$ ,它在球壳的球心O处产生的电势为 $\Delta V_1=k\frac{\sigma\Delta S}{a}$ .球壳外壁所有电荷在球心O产生的电势 $V_1$ 为

$$V_1 = \sum\Delta V_1 = k\frac{\sum\sigma\Delta S}{a} = k\frac{Q_1}{a}. \quad (1)$$



点电荷  $q_1, q_2$  在球壳的球心  $O$  处产生的电势分别为  $k \frac{q_1}{d_1}$  与  $k \frac{q_2}{d_2}$ , 因球心  $O$  处的电势等于球壳的电势, 按电势叠加原理, 即有

$$k \frac{q_1}{d_1} + k \frac{q_2}{d_2} + k \frac{Q_1}{a} = V. \quad (2)$$

代入数值后可解得球壳外壁的电荷量  $Q_1$  为

$$Q_1 = a \frac{V}{k} - a \left( \frac{q_1}{d_1} + \frac{q_2}{d_2} \right) = -8 \times 10^{-9} \text{ C}.$$

因球壳内壁无电荷, 所以球壳的电荷量  $Q_1$  等于球壳外壁的电荷量  $Q_1$ , 即

$$Q_1 = Q_1 = -8 \times 10^{-9} \text{ C}. \quad (3)$$

(2) 当球壳半径趋于  $d_1$  时 (点电荷仍在球壳外), 设球壳外壁的电荷量变为  $Q_2$ , 球壳外的电荷  $q_1, q_2$  与球壳外壁的电荷量  $Q_2$  在壳内产生的合场强仍为零, 因球壳内仍无电荷, 球壳内仍保持电势值为  $V$  的等势区, 则有

$$k \frac{q_1}{d_1} + k \frac{q_2}{d_2} + k \frac{Q_2}{d_1} = V. \quad (4)$$

解得球壳外壁的电荷量

$$Q_2 = d_1 \frac{V}{k} - d_1 \left( \frac{q_1}{d_1} + \frac{q_2}{d_2} \right) = -16 \times 10^{-9} \text{ C}.$$

因为此时球壳内壁电荷量仍为零, 所以球壳的电荷量就等于球壳外壁的电荷量, 即

$$Q_1 = Q_2 = -16 \times 10^{-9} \text{ C}. \quad (5)$$

在  $a=10 \text{ cm}$  到趋于  $d_1$  的过程中, 大地流向球壳的电荷为

$$\Delta Q_1 = Q_1 - Q_1 = -8 \times 10^{-9} \text{ C}. \quad (6)$$

(3) 当点电荷  $q_1$  穿过球壳, 刚进入球壳内 (导体半径仍为  $d_1$ ), 点电荷  $q_1$  在球壳内壁感应出电荷量  $-q_1$ , 因球壳的静电屏蔽, 球壳内电荷  $q_1$  与球壳内壁电荷  $-q_1$  在球壳外产生的合电场为零, 表明球壳外电场仅由球壳外电荷  $q_2$  与球壳外壁的电荷  $Q_3$  所决定. 由于球壳的静电屏蔽, 球壳外电荷  $q_2$  与球壳外壁的  $Q_3$  在球壳内产生的合电场为零, 表明对电荷  $q_2$  与  $Q_3$  产生的合电场而言, 球壳内空间是电势值为  $V$  的等势区.  $q_2$  与  $Q_3$  在球心  $O$  处产生的电势等于球壳的电势, 即

$$k \frac{q_2}{d_2} + k \frac{Q_3}{d_1} = V. \quad (7)$$

解得球壳外壁电荷量

$$Q_3 = d_1 \frac{V}{k} - d_1 \frac{q_2}{d_2} = -6 \times 10^{-9} \text{ C}. \quad (8)$$

球壳外壁和内壁带的总电荷量应为

$$Q_{\text{II}} = Q_3 + (-q_1) = -16 \times 10^{-9} \text{ C}. \quad (9)$$

在这个过程中, 大地流向球壳的电荷量为

$$\Delta Q_{\text{II}} = Q_{\text{II}} - Q_{\text{II}} = 0. \quad (10)$$



这个结果表明:电荷  $q_1$  由球壳外极近处的位置进入壳内,只是将它在球壳外壁感应的电荷量转至球壳内壁,整个球壳与大地没有电荷量交换。

(4)当球壳半径趋于  $d_2$  时(点电荷  $q_2$  仍在球壳外),令  $Q_4$  表示此时球壳外壁的电量,类似前面第(3)阶段中的分析,可得

$$k \frac{q_2}{d_2} + k \frac{Q_4}{d_2} = V, \quad (11)$$

由此得

$$Q_4 = d_2 \frac{V}{k} - d_2 \left( \frac{q_2}{d_2} \right) = -12 \times 10^{-9} \text{ C}.$$

球壳的电荷量  $Q_N$  等于球壳内外壁电荷量的和,即

$$Q_N = Q_4 + (-q_1) = -22 \times 10^{-9} \text{ C}. \quad (12)$$

大地流向球壳的电荷量为

$$\Delta Q_{\text{地}} = Q_N - Q_{\text{地}} = -6 \times 10^{-9} \text{ C}. \quad (13)$$

(5)当点电荷  $q_2$  穿过球壳,刚进入球壳内时(球壳半径仍为  $d_2$ ),球壳内壁的感应电荷变为一  $(q_1 + q_2)$ ,由于球壳的静电屏蔽,类似前面的分析可知,球壳外电场仅由球壳外壁的电荷量  $Q_5$  决定,即

$$k \frac{Q_5}{d_2} = V. \quad (14)$$

可得

$$Q_5 = d_2 \frac{V}{k} = 4 \times 10^{-9} \text{ C}.$$

球壳的总电荷量是

$$Q_V = Q_5 - (q_1 + q_2) = -22 \times 10^{-9} \text{ C}. \quad (15)$$

在这个过程中,大地流向球壳的电荷量是

$$\Delta Q_N = Q_V - Q_N = 0. \quad (16)$$

(6)当球壳的半径由  $d_2$  增至  $a_1 = 50 \text{ cm}$  时,令  $Q_6$  表示此时球壳外壁的电荷量,则有

$$k \frac{Q_6}{a_1} = V. \quad (17)$$

可得

$$Q_6 = a_1 \frac{V}{k} = 5 \times 10^{-9} \text{ C}.$$

球壳的总电荷量为

$$Q_N = Q_6 - (q_1 + q_2) = -21 \times 10^{-9} \text{ C}. \quad (18)$$

大地流向球壳的电荷量为

$$\Delta Q_V = Q_N - Q_V = 1 \times 10^{-9} \text{ C}. \quad (19)$$

**题 19** (1999·全国物理复赛题) 如图 3-1-34 所示,  $z$  轴竖直向上,  $xy$  平面是一绝缘的、固定的、刚性平面。在  $A(x_0, 0, 0)$  处放一带电荷量为  $-q$  ( $q > 0$ ) 的小物块,该物块与一细线相连,细线的另一端  $B$  穿过位于坐标原点  $O$  的光滑小孔,可通



过它牵引小物块. 现对该系统加一匀强电场, 场强方向垂直于  $x$  轴, 与  $z$  轴的夹角为  $\theta$  (如图 3-1-34 所示). 设小物块和绝缘平面间的动摩擦因数  $\mu = \tan\theta$ , 且静摩擦因数和动摩擦因数相同. 不计重力作用. 现通过细线来牵引小物块, 使之移动. 在牵引过程中, 我们约定: 细线的  $B$  端只准沿  $z$  轴向下缓慢移动, 不得沿  $z$  轴向上移动; 小物块的移动非常缓慢, 在任何时刻, 都可近似认为小物块处在力平衡状态. 若已知小物块的移动轨迹是一条二次曲线, 试求出此轨迹方程.

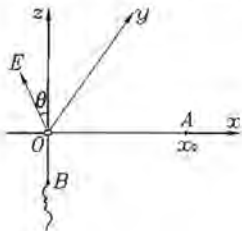


图 3-1-34

**【分析】** 带负电的小物块受到电场力、刚性平面的支持力、细线的拉力和摩擦力的作用. 由于物块是缓慢移动, 因此物块处于一系列的平衡状态, 利用平衡时合力为零, 可求出物块在某些点的摩擦力方向, 从而也就知道轨道的切线方向 (因为摩擦力方向与相对运动方向相反), 然后判断轨迹与哪种二次曲线相对应.

**【解】** 设所加匀强电场的场强为  $E$ , 它在  $y$  方向和  $z$  方向的分量分别为

$$E_y = -E \sin\theta, E_z = E \cos\theta.$$

由于物块带负电, 电场作用于物块的电场力的两个分量分别为

$$F_y = -qE_y = qE \sin\theta, \quad (1)$$

$$F_z = -qE_z = -qE \cos\theta. \quad (2)$$

$F_y$  在  $xy$  平面内, 方向沿  $y$  轴正方向.  $F_z$  垂直于  $xy$  平面, 被绝缘平面的支持力所平衡, 故物块对绝缘平面的正压力的大小  $N$  和  $F_z$  的大小相等, 即  $N = qE \cos\theta$ . 绝缘平面作用于物块的摩擦力

$$f = \mu N = qE \tan\theta \cos\theta = qE \sin\theta = F_y. \quad (3)$$

$f$  的方向决定于物块移动的方向.

根据题意, 物块在  $xy$  平面内的运动可看做是一种在力平衡下的缓慢移动. 作用于物块的三个力  $F_y$ 、 $f$  和线的拉力  $T$  都在  $xy$  平面内. 物块在任一位置达到平衡时的受力情况如图 3-1-35 所示.  $\varphi$  为细线与  $x$  轴的夹角. 把  $T$  沿  $x$  和  $y$  方向分解得

$$T_x = -T \cos\varphi, T_y = -T \sin\varphi.$$

用  $f_x$  和  $f_y$  表示  $f$  的两个分量, 物块平衡时, 有

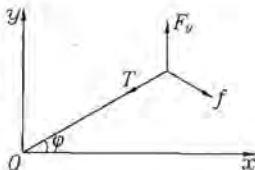


图 3-1-35



$$F_y - T \sin \varphi + f_y = 0, \quad (4)$$

$$-T \cos \varphi + f_x = 0, \quad (5)$$

由④⑤式得

$$(F_y - T \sin \varphi)^2 + T^2 \cos^2 \varphi = f^2.$$

注意到③式,得

$$T(T - 2F_y \sin \varphi) = 0,$$

得

$$T = 0 \text{ 或 } T = 2F_y \sin \varphi. \quad (6)$$

因要小物块缓慢移动,需要细线牵引, $T=0$ 不符合题意,应舍去.因  $0 < \varphi < \pi$ ,  $T = 2F_y \sin \varphi > 0$ ,将  $T$  代入④⑤式,有

$$f_y = T \sin \varphi - F_y = -F_y \cos 2\varphi.$$

$$f_x = T \cos \varphi = F_y \sin 2\varphi.$$

摩擦力方向的斜率

$$k = \frac{f_y}{f_x} = -\cot 2\varphi. \quad (7)$$

$k$  是摩擦力方向与  $x$  轴夹角的正切,即摩擦力方向的斜率,因摩擦力始终沿轨道的切线方向,故  $k$  也就是轨道切线的斜率.下面,通过对⑦式的分析来寻找轨道方程.

当  $\varphi = 0, k = \infty$ ,即在起点  $A$  时,轨道的切线与  $x$  轴垂直.

当  $\varphi = \frac{\pi}{2}, k = \infty$ ,一种情况是小物块运动到  $y$  轴上后,沿  $y$  轴做直线运动到  $O$  点,但这与题设轨迹移动是一条二次曲线不符,因而它一定表示轨道在  $O$  点的切线与  $x$  轴垂直.

在二次曲线中,曲线上两点切线相互平行的只有椭圆或圆.又因为  $A, O$  两点的切线与它们的连线相垂直,这连线应为曲线的轴线,且在  $Ox$  轴上,另一轴在它的垂直平分线上且与  $y$  轴平行.曲线与此轴线的交点的切线的斜率为 0.代入⑦式得  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ,故该曲线为圆,其方程为  $(x - \frac{x_0}{2})^2 + y^2 = \frac{x_0^2}{4}$ .

**题 20** (2008·全国物理决赛题) 图 3-1-36 所示器件由相

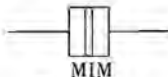
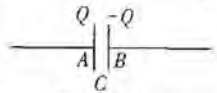


图 3-1-36

互紧密接触的金属层(M)、薄绝缘层(I)和金属层(M)构成.按照经典物理的观点,在 I 层绝缘性能理想的情况下,电子不可能从一个金属层穿过绝缘层到达另一个金属层.但是,按照量子物理的原理,在一定的条件下,这种穿越是有可能的,习惯上将这一过程称为隧穿,它是电子具有波动性的结果.隧穿是单个电子的过程,是分立的事件,通过绝缘层转移的电荷量只能是电子电荷量  $-e$  ( $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$ ) 的整数倍,因此也称为单电子隧穿, MIM 器件亦称为隧穿结或单电子隧穿结.本题涉及对单电子隧穿过程控制的库仑阻塞原理,由于据此可望制成尺寸很小的单电子器件,这是目前研究得很多、有应用前景的领域.

1. 显示库仑阻塞原理的最简单的做法是将图 3-1-36 的器件看成是一个电容为  $C$  的电容器, 如图 3-1-37 所示. 电容器极板上的电荷来源于金属极板上导电电子云相对于正电荷



背景的很小位移, 可以连续变化. 如前所述, 以隧穿方式通过绝缘层的只能是分立的单电子电荷. 如果隧穿过程会导致体系静电能量上升, 则此过程不能发生, 这种现象称为库仑阻塞. 试求出发生库仑阻塞的条件, 即电容器极板间的电势差  $V_{AB} = V_A - V_B$  在什么范围内单电子隧穿过程被禁止.

2. 假定  $V_{AB} = 0.10 \text{ mV}$  是刚能发生隧穿的电压, 试估算电容  $C$  的大小.

3. 图 3-1-36 的器件与电压为  $V$  的恒压源相接时, 通常采用图 3-1-38 所示的双结结构器件来观察单电子隧穿, 避免杂散电容的影响. 中间的金属块层称为单电子岛. 作为电极的左、右金属块层分别记为 S、D. 若已知岛中有净电荷量  $-ne$ , 其中净电子数  $n$  可为正、负整数或零,  $e$  为电子电荷量的大小, 两个 MIM 结的电容分别为  $C_S$  和  $C_D$ . 试证明双结结构器件的静电能与岛上净电荷量相关的静电能 (简称单电子岛的静电能) 为

$$U_n = \frac{(-ne)^2}{2(C_S + C_D)}$$

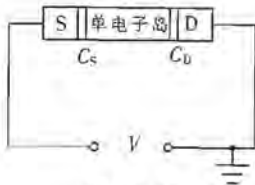


图 3-1-38

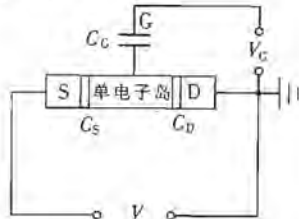


图 3-1-39

4. 在图 3-1-38 给出的具有源(S)、漏(D)电极双结结构的基础上, 通过和岛连接的电容  $C_G$  添加门电极(G)构成如图 3-1-39 给出的单电子三极管结构, 门电极和岛间没有单电子隧穿事件发生. 在  $V$  较小且固定的情况下, 通过门电压  $V_G$  可控制岛中的净电子数  $n$ . 对于  $V_G$  如何控制  $n$ , 简单的模型是将  $V_G$  的作用视为在岛中附加了等效电荷  $q_0 = C_G V_G$ . 这时, 单电子岛的静电能可近似为  $U_n = \frac{(-ne + q_0)^2}{2C_\Sigma}$ ,

式中  $C_\Sigma = C_S + C_D + C_G$ . 利用方格图 (图 3-1-40), 考虑库仑阻塞效应, 用粗线画出岛中净电子数从  $n=0$  开始,  $\frac{C_G V_G}{e}$  由 0 增大到 3 的过程中, 单电子岛的静电能  $U_n$

随  $C_G V_G$  变化的图线 (纵坐标表示  $U_n$ , 取  $U_n$  的单位为  $\frac{e^2}{2C_\Sigma}$ ; 横坐标表示  $C_G V_G$ , 取

$C_G V_G$  的单位为  $e$ ). 要求标出关键点的坐标, 并把  $n=0, 1, 2, 3$  时  $\frac{C_G V_G}{e}$  的变化范围填在表格中.

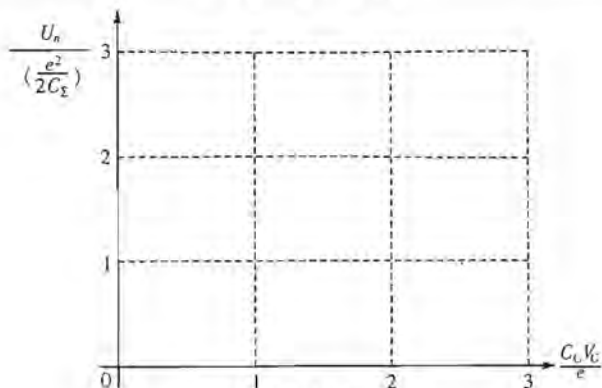


图 3-1-40

表 1

$n$	0	1	2	3
$\frac{C_G V_G}{e}$ 变化范围				

**【分析】** 首先应读懂题意,理解所谓 MIN 器件和双结结构器件的构造及物理图象.按照题目所提最简单方法处理,本题前 3 问涉及到仅仅是有关电容器方面的计算,但第 1 问需理解库仑阻塞的含义和条件,第 3 问则应先画出等效电路图.对于第 4 问来说,建议先将题给  $U_n$  表达式按照图中所给纵横坐标显示的物理量作适当变换后再去作图.

**【解】** 1. 先假设由于隧穿效应,单电子能从电容器的极板 A 隧穿到极板 B. 以  $Q$  表示单电子隧穿前极板 A 所带的电荷量,  $V_{AB}$  表示两极板间的电压,则有

$$V_{AB} = \frac{Q}{C}. \quad (1)$$

这时电容器储能

$$U = \frac{1}{2} C V_{AB}^2. \quad (2)$$

当单电子隧穿到极板 B 后,极板 A 所带的电荷量为

$$Q' = Q + e. \quad (3)$$

式中  $e$  为电子电荷量的大小.这时,电容器两极板间的电压和电容器分别储能为

$$V_{AB}' = \frac{Q+e}{C}, U' = \frac{1}{2} C V_{AB}'^2. \quad (4)$$

若发生库仑阻塞,即隧穿过程被禁止,则要求

$$U' - U > 0. \quad (5)$$

由①~⑤五式得

$$V_{AB} > -\frac{1}{2} \frac{e}{C}. \quad (6)$$

再假设单电子能从电容器的极板 B 隧穿到极板 A. 仍以 Q 表示单电子隧穿前极板 A 所带的电荷量,  $V_{AB}$  表示两极板间的电压. 当单电子从极板 B 隧穿到极板 A 时, 极板 A 所带的电荷量为  $Q' = Q - e$ . 经过类似的计算, 可得单电子从极板 B 到极板 A 的隧穿不能发生的条件是

$$V_{AB} < \frac{1}{2} \frac{e}{C}. \quad (7)$$

由⑥⑦两式知, 当电压  $V_{AB}$  在  $\frac{-e}{2C} \sim \frac{e}{2C}$  之间时, 单电子隧穿受到库仑阻塞, 即库仑阻塞的条件为

$$-\frac{1}{2} \frac{e}{C} < V_{AB} < \frac{1}{2} \frac{e}{C}. \quad (8)$$

2. 依题意和式⑧可知, 恰好能发生隧穿时有

$$V_{AB} = \frac{1}{2} \frac{e}{C} = 0.10 \text{ mV}. \quad (9)$$

由式⑨, 并代入有关数据得

$$C = 8.0 \times 10^{-16} \text{ F}. \quad (10)$$

3. 设双结结构体系中左边的 MIM 结的电容为  $C_s$ , 右边的 MIM 结的电容为  $C_D$ . 其等效电路如图 3-1-41 所示, 以  $Q_1$ 、 $Q_2$  分别表示电容  $C_s$ 、 $C_D$  所带的电荷量. 根据题意, 中间单电子岛上的电荷量为

$$-ne = Q_2 - Q_1. \quad (11)$$

体系的静电能为  $C_s$  和  $C_D$  中静电能的总和, 即

$$U = \frac{Q_1^2}{2C_s} + \frac{Q_2^2}{2C_D}; \quad (12)$$

电压

$$V = \frac{Q_1}{C_s} + \frac{Q_2}{C_D}. \quad (13)$$

由⑪~⑬三式解得

$$U = \frac{1}{2} CV^2 + \frac{(Q_2 - Q_1)^2}{2(C_s + C_D)}. \quad (14)$$

由于 V 为恒量, 从式⑬可知体系的静电能中与岛上净电荷相关的静电能  $U_n = \frac{(-ne)^2}{2(C_s + C_D)}$ .

4.  $U_n$  随  $C_G V_G$  变化的图线如图 3-1-42;  $\frac{C_G V_G}{e}$  的变化范围如表 2.

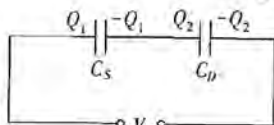


图 3-1-41

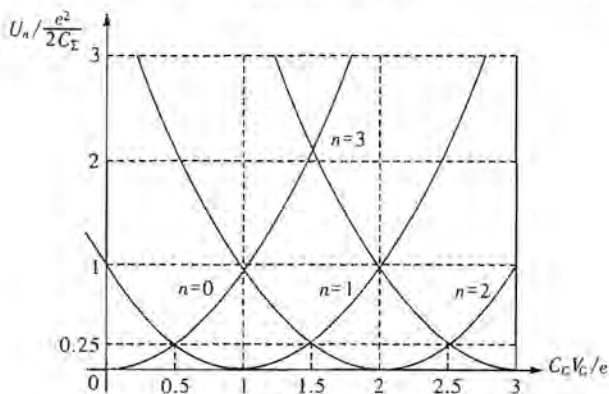


图 3-1-42

表 2

$n$	0	1	2	3
$C_G V_G / e$ 的变化范围	0~0.5	0.5~1.5	1.5~2.5	2.5~3.0

**题 21** (2007·全国物理竞赛题) 为了减少线路的输电损耗, 电力的远距离输送一般采用高压的交变电流传输方式, 在传输线路上建造一系列接地的铁塔, 把若干绝缘子连成串(称为绝缘子串, 见图 3-1-43), 其上端 A 挂在铁塔的横臂上, 高压输电线悬挂在其下端 B, 绝缘子的结构如图 3-1-44 所示: 在半径为  $R_1$  的导体球外紧包一层耐高压的半球形陶瓷绝缘介质, 介质外是一内半径为  $R_2$  的半球形导体球壳。已知当导体球与导体球壳间的电压为  $U$  时, 介质中离球心  $O$  的距离为  $r$  处的场强为  $E = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \frac{U}{r^2}$ , 场强方向沿径向。



图 3-1-43

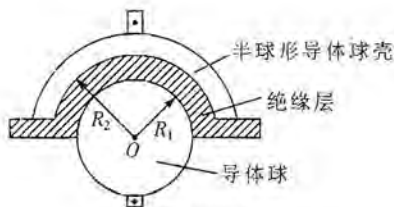


图 3-1-44

1. 已知绝缘子导体球壳的内半径  $R_2 = 4.6$  cm, 陶瓷介质的击穿强度  $E_k = 135$  kV/cm. 当介质中任一点的场强  $E > E_k$  时, 介质即被击穿, 失去绝缘性能. 为使



绝缘子所能承受的电压(即加在绝缘子的导体球和导体球壳间的电压)为最大,导体球的半径  $R_1$  应取什么数值?此时,对应的交流电压的有效值是多少?

2. 一个铁塔下挂有由四个绝缘子组成的绝缘子串(如图 3-1-43),每个绝缘子的两导体间有电容  $C_0$ . 每个绝缘子的下部导体(即导体球)对于铁塔(即对地)有分布电容  $C_1$ (导体球与铁塔相当于电容器的两个导体极板,它们之间有一定的电容,这种电容称为分布电容);每个绝缘子的上部导体(即导体球壳)对高压输电线有分布电容  $C_2$ . 若高压输电线对地电压的有效值为  $U_0$ ,试画出该系统等效电路图.

3. 若  $C_0 = 70 \text{ pF} = 7 \times 10^{-11} \text{ F}$ ,  $C_1 = 5 \text{ pF}$ ,  $C_2 = 1 \text{ pF}$ ,试计算该系统所能承受的最大电压(指有效值).

**【分析】** 这是一个应用电学知识解决实际问题的工程应用题. 第一问可直接对题给绝缘子中场强表达式求极值,第二问应读懂绝缘子和绝缘子间以及与铁塔和高压输电线间各种关系(本质上是  $C_0$  以及分布电容  $C_1$  和  $C_2$  之间的串并联关系). 正确画出系统等效电路图,针对电路图根据其间电荷和电压应满足关系可求解第三问.

**【解】** 1. 根据题意,当导体球与导体球壳间的电压为  $U$  时,在距球心  $r (R_1 < r < R_2)$  处,电场强度的大小为

$$E = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \frac{U}{r^2}. \quad (1)$$

在  $r = R_1$ , 即导体球表面处,电场强度最大. 以  $E(R_1)$  表示此场强,有

$$E(R_1) = \frac{R_2 U}{(R_2 - R_1) R_1}. \quad (2)$$

因为根据题意,  $E(R_1)$  的最大值不得超过  $E_k$ ,  $R_2$  为已知,故②式可写为

$$E_k = \frac{R_2 U}{(R_2 - R_1) R_1}. \quad (3)$$

或

$$U = E_k \frac{(R_2 - R_1) R_1}{R_2}. \quad (4)$$

由此式可知,选择适当的  $R_1$  值,使  $(R_2 - R_1) R_1$  最大,就可使绝缘子的耐压  $U$  为最大. 不难看出,当

$$R_1 = \frac{R_2}{2}. \quad (5)$$

时,  $U$  便是绝缘子能承受的电压的最大值  $U_k$ . 由④⑤两式得

$$U_k = \frac{E_k R_2}{4}, \quad (6)$$

代入有关数据,得

$$U_k = 155 \text{ kV}. \quad (7)$$

当交流电压的峰值等于  $U_k$  时,绝缘介质即被击穿. 这时,对应的交流电压的有



效值

$$U_c = \frac{U_k}{\sqrt{2}} = 110 \text{ kV.} \quad (8)$$

2. 系统的等效电路如图 3-1-45 所示.

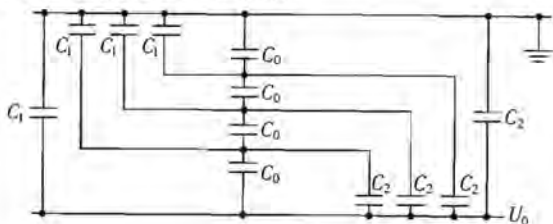


图 3-1-45

3. 设绝缘子串中间三点的电势分别为  $U_1$ 、 $U_2$ 、 $U_3$ , 如图 3-1-46 所示. 由等效电路可知, 与每个中间点相连的四块电容极板上的电荷量代数和都应为零, 即有

$$\begin{cases} (U_1 - U_2)C_0 + U_1 C_1 - (U_0 - U_1)C_0 - (U_0 - U_1)C_2 = 0, \\ (U_2 - U_3)C_0 + U_2 C_1 - (U_1 - U_2)C_0 - (U_0 - U_2)C_2 = 0, \\ U_3 C_0 + U_3 C_1 - (U_2 - U_3)C_0 - (U_0 - U_3)C_2 = 0. \end{cases} \quad (9)$$

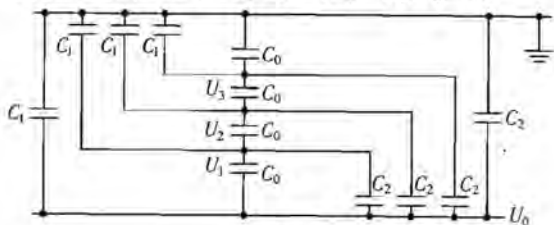


图 3-1-46

四个绝缘子上的电压之和应等于  $U_0$ , 即

$$(U_0 - U_1) + (U_1 - U_2) + (U_2 - U_3) + U_3 = U_0. \quad (10)$$

设  $\Delta U_1 = U_0 - U_1$ ,  $\Delta U_2 = U_1 - U_2$ ,

$$\Delta U_3 = U_2 - U_3, \Delta U_4 = U_3. \quad (11)$$

则可由⑨式整理得

$$\begin{cases} \Delta U_1 (C_0 + C_1 + C_2) - \Delta U_2 C_0 - U_0 C_1 = 0, \\ \Delta U_1 (C_1 + C_2) + \Delta U_2 (C_0 + C_1 + C_2) - \Delta U_3 C_0 - U_0 C_1 = 0, \\ \Delta U_1 (C_0 + C_1 + C_2) + \Delta U_2 (C_0 + C_1 + C_2) + \Delta U_3 (2C_0 + C_1 + C_2) - U_0 (C_0 + C_1) = 0; \end{cases}$$

代入数据, 得

$$\begin{cases} 76\Delta U_1 - 70\Delta U_2 - 5U_0 = 0, \\ 6\Delta U_1 + 76\Delta U_2 - 70\Delta U_3 - 5U_0 = 0, \\ 76\Delta U_1 + 76\Delta U_2 + 146\Delta U_3 - 75U_0 = 0. \end{cases} \quad (12)$$

解⑫式, 可得



$$\Delta U_1 = 0.298U_0, \Delta U_2 = 0.252U_0, \Delta U_3 = 0.228U_0. \quad (13)$$

由⑩~⑫式可得

$$\Delta U_4 = U_3 = 0.222U_0. \quad (14)$$

以上结果表明,各个绝缘子承受的电压不是均匀的;最靠近输电线的绝缘子承受的电压最大,此绝缘子最容易被击穿.当最靠近输电线的绝缘子承受的电压有效值

$$\Delta U_1 = U_c. \quad (15)$$

时,此绝缘子被击穿,整个绝缘子串损坏.由⑧⑬和⑮三式可知,绝缘子串承受的最大电压

$$U_{0\max} = \frac{U_c}{0.298} = 369 \text{ kV}.$$

**题 22** (2005·全国物理决赛题) 如图 3-1-47 所示,两个半径都为  $R$ 、带电荷都为  $Q(>0)$  的均匀带电细圆环,环的圆心位于  $z$  轴上,环面与  $z$  轴垂直,坐标原点  $O$  到两圆环的圆心  $O_1$  和  $O_2$  的距离相等,用  $D$  表示此距离(其大小可变,即可取任意值).

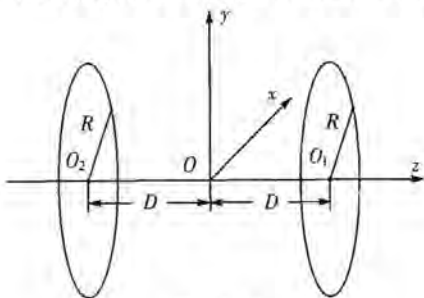


图 3-1-47

1. 一质量为  $m$ 、电荷为  $q(>0)$  的带电粒子,从  $z=-\infty$  处沿  $Oz$  轴正方向射向两个圆环,已知该粒子刚好能穿过两个圆环,试通过定性及半定量的分析,画出该粒子的动能  $E_k$  随  $z$  变化的图线,并求出与所画图线相应的  $D$  所满足的条件.

2. 若该粒子初始时位于坐标点  $z=0$  处,现给粒子一沿  $z$  轴方向的速度(大小不限),试尽可能详细讨论粒子可能做怎样的运动,不计重力的作用.

**【分析】** 由于带电粒子在静电场中运动满足能量守恒,因此可将粒子的动能以及速度变化问题转化为  $z$  轴上的电势分布问题,使得求解变得较为容易.由于本题是讨论题,故应全面考虑各个方面的细节,如电势沿  $z$  轴分布是否存在极大值和极小值,稳定平衡和不稳定平衡的位置,以及距离  $D$  取某些特定值时电势分布是否会出现截然不同的分布,如有则应分若干种情况分别讨论,此外,带电粒子在不同分布的电场中运动可能出现的多样性,如仅仅是速度大小发生变化的平动还是振动,只有全面细致分析,才可能使本题得到圆满解答.

**【解】** 带电粒子仅受静电力作用,在运动过程中能量守恒,粒子的动能与静电



势能之和是一个恒量。粒子的静电势能取决于粒子所在的电势,为此应先研究带电圆环产生的静电场的电势。由于电场分布是轴对称的,初速度沿  $z$  轴方向的粒子永远在  $z$  轴上运动,故只要研究  $z$  轴上的电势即可,两个带电圆环单独产生的电场在  $z$  轴上的电势分别为

$$V_1(z) = k \frac{Q}{\sqrt{R^2 + (z-D)^2}}$$

$$V_2(z) = k \frac{Q}{\sqrt{R^2 + (z+D)^2}}$$

$V_1(z)$ 、 $V_2(z)$  的图线如图 3-1-48 所示。 $V_1(z)$  在  $z=D$  处有极大值, $V_2(z)$  在  $z=-D$  处有极大值。两个圆环产生的电场在坐标为  $z$  处的电势

$$V(z) = V_1(z) + V_2(z) = kQ \left[ \frac{1}{\sqrt{R^2 + (z-D)^2}} + \frac{1}{\sqrt{R^2 + (z+D)^2}} \right] \quad (1)$$

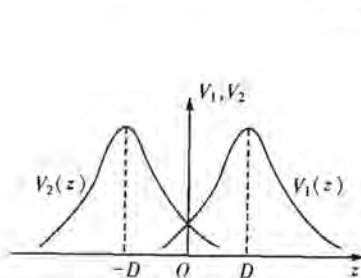


图 3-1-48

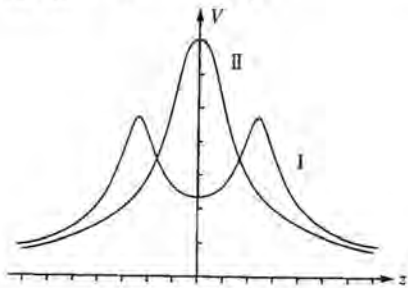


图 3-1-49

电势  $V(z)$  随  $z$  的变化的图线由  $V_1(z)$  的图线与  $V_2(z)$  的图线叠加而成。若  $D$  较大,即两个圆环间的距离较大, $V(z)$  的图线如图 3-1-49 中的曲线 I 所示:它有两个极大值和一个极小值,即两个峰和一个谷,峰对称也分布在坐标原点两侧处,谷底在  $z=0$  处,随着两个圆环间的距离变小,即  $D$  变小,两个峰相互靠近,谷底上升。当  $D$  小到某一值时,两峰消失,谷底上升为峰。当  $D$  继续变小时,曲线仍只有一个峰,位于  $z=0$  处,如图 3-1-49 中的曲线 II 所示。

$z=0$  处是峰还是谷,只需分析  $V(z)$  在  $z=0$  附近的行为了即可确定。由①式, $z=0$  处的电势

$$V(0) = kQ \left[ \frac{2}{\sqrt{R^2 + D^2}} \right] \quad (2)$$

注意到当  $z$  很小时有

$$\begin{aligned} [R^2 + (z+D)^2]^{-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\sqrt{R^2 + D^2}} \left( 1 \pm \frac{2Dz \pm z^2}{R^2 + D^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{R^2 + D^2}} \left[ 1 \mp \left( \frac{2Dz \pm z^2}{R^2 + D^2} \right) + \frac{3}{8} \left( \frac{2Dz \pm z^2}{R^2 + D^2} \right)^2 + \dots \right]. \end{aligned}$$

略去高次项并代入①式,注意到②式,有

$$V(z) = \frac{kQ}{\sqrt{R^2 + D^2}} \left[ 2 - \frac{z^2}{R^2 + D^2} + 3 \frac{D^2 z^2}{(R^2 + D^2)^2} \right] = V(0) - \frac{kQ(R^2 - 2D^2)}{(R^2 + D^2)^{\frac{3}{2}}} z^2. \quad (3)$$

由此可得,若

$$D > \frac{R}{\sqrt{2}}. \quad (4)$$

则  $V(0)$  为极小值,  $V(z)$  为双峰曲线, 如图 3-1-49 中曲线 I 的形状, 若

$$D < \frac{R}{\sqrt{2}}. \quad (5)$$

则  $V(0)$  为极大值,  $V(z)$  为单峰曲线, 如图 3-1-49 中曲线 II 的形状.

确定电势图线形状所对应条件的另一种分析方法:

若电势  $V(z)$  的图线具有图 3-1-49 中曲线 I 的形状, 则在  $z=0$  处是曲线的谷底, 电势为极小值, 该处是带电粒子的稳定平衡位置. 该处附近的场强的特点是: 当  $z > 0$  时, 场强应指向原点, 即场强沿  $z$  轴的负方向; 当  $z < 0$  时, 场强亦应指向原点, 即场强沿  $z$  轴的正方向. 若电势  $V(z)$  的图线具有图 3-1-49 中曲线 II 的形状, 则在  $z=0$  处是曲线的峰, 电势为极大值, 该处是带电粒子的不稳定平衡位置. 该处附近的场强的特点是: 当  $z > 0$  时, 场强应指向  $z$  轴的正方向; 当  $z < 0$  时, 场强应指向  $z$  轴的负方向. 原点附近的场强具有哪一种特点的条件, 也就是电势图线具有哪一种形状所对应的条件. 为此先应研究两个圆环产生的电场的场强在  $z$  轴上的分布情况.

$z$  轴上任一点坐标为  $z$  处的场强由圆环 1 产生的场强  $E_1$  与圆环 2 产生的场强  $E_2$  叠加而成. 圆环 1 的中心位于  $z=D$  处, 在  $z < D$  的范围内取坐标为  $z$  的考查点, 环 1 在考查点的场强是由环上所有电荷产生的场叠加而成的, 根据对称性, 可知该处的场强必沿  $z$  轴, 环上任一小段上的电荷  $Q$  产生的场强沿  $z$  轴的分量为

$$\Delta E_1(z) = k \frac{\Delta Q}{r^2} \cos\theta. \quad (1')$$

式中

$$r^2 = R^2 + (D-z)^2.$$

$r$  是考查的点到细环上任一点的距离,  $\theta$  是  $r$  与  $z$  轴的夹角

$$\cos\theta = \frac{z-D}{r}.$$

整个圆环 1 产生的场强

$$E_1(z) = k \frac{Q}{r^2} \cos\theta = kQ \frac{z-D}{[R^2 + (D-z)^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (2')$$

同理得圆环 2 在  $z$  处的场强

$$E_2(z) = kQ \frac{D+z}{[R^2 + (D+z)^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (3')$$

$z$  处的总场强



$$E(z) = kQ \frac{z-D}{[R^2 + (D-z)^2]^{\frac{3}{2}}} + kQ \frac{D+z}{[R^2 + (D+z)^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (4')$$

由于考查点都在原点附近, 上式中的坐标  $z$  是一个小量, 注意到当  $z$  很小时有  $[R^2 + (D \pm z)^2]^{-\frac{3}{2}} = [R^2 + D^2 \pm 2Dz + z^2]^{-\frac{3}{2}}$

$$\begin{aligned} &\approx \frac{1}{(R^2 + D^2)^{\frac{3}{2}}} \left(1 \pm \frac{2Dz}{R^2 + D^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \\ &\approx \frac{1}{(R^2 + D^2)^{\frac{3}{2}}} \left(1 \mp \frac{3Dz}{R^2 + D^2}\right). \end{aligned}$$

代入④'式得

$$E(z) = kQ \frac{2R^2 - 4D^2}{(R^2 + D^2)^{\frac{5}{2}}} z \quad (5')$$

若  $D > \frac{1}{\sqrt{2}}R$ ,  $E$  与  $-z$  成正比, 当  $z > 0$  时, 场强为负, 当  $z < 0$  时, 场强为正, 表示原点附近的场强方向都指向原点, 故  $z = 0$  处为带电粒子的稳定平衡位置, 电势  $V(z)$  的图线是曲线 I. 若  $D < \frac{1}{\sqrt{2}}R$ , 在原点附近的场强方向都从原点指向两侧, 故  $z = 0$  处为带电粒子的不稳定平衡位置, 电势  $V(z)$  的图线是曲线 II.

若带电粒子在  $z = -\infty$  处以某一初速沿  $z$  轴射向两个圆环, 以  $E_{k0}$  表示其初动能,  $E_k(z)$  表示粒子运动到坐标为  $z$  处时的动能, 则由能量守恒有

$$E_k(z) = E_{k0} - W(z) = E_{k0} - qV(z). \quad (7')$$

因粒子在坐标  $z$  处的动能等于一常量减去粒子在该处的静电势能, 可见  $E_k(z)$  的图线取决于静电势能  $W(z) = qV(z)$  的图线. 下面分两种情况进行讨论:

(i) 若  $D > \frac{1}{\sqrt{2}}R$ , 即两个圆环之间的距离比较大, 电势  $V(z)$  的图线具有两个峰和一个谷, 粒子电势能  $W(z)$  的图线亦具有两个峰和一个谷, 如图 3-1-50 中的曲线  $I_1$  所示. 已知该粒子刚能通过两个圆环, 故粒子的初动能  $E_{k0}$  应等于电势能  $W(z)$  的最大值, 即等于峰高. 在图 3-1-50 中与  $z$  轴平行并与电势能  $W(z)$  的图线的双峰相切的直线代表初动能  $E_{k0}$ , 由⑦'式和曲线  $I_1$  便可画出  $E_k(z)$  的图线, 如图 3-1-50 中的曲线  $I_2$  所示.

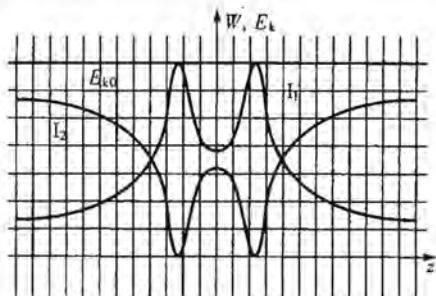


图 3-1-50

(ii) 若  $D < \frac{1}{\sqrt{2}}R$ , 即两个圆环间的距离比较小, 电势  $V(z)$  的图线只有位于  $z=0$  处的一个峰, 粒子的电势能  $W(z)$  的图线亦只有位于  $z=0$  处的一个峰, 如图 3-1-51 中的曲线  $\text{II}_1$  所示。

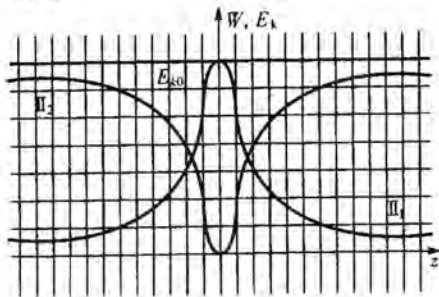


图 3-1-51

电势图线的峰高

$$V_{\max} = V(0) = k \frac{2Q}{\sqrt{R^2 + D^2}}$$

已知粒子刚能通过两个圆环, 故粒子的初动能

$$E_{k0} = qV(0) = k \frac{2qQ}{\sqrt{R^2 + D^2}}$$

在图 3-1-51 中与  $z$  轴平行且与曲线  $\text{II}_1$  的峰相切的直线代表初动能  $E_{k0}$ , 由⑦式和曲线  $\text{II}_1$  便可画出  $E_k(z)$  的图线, 如图 3-1-51 中的曲线  $\text{II}_2$  所示。

2. 粒子位于原点并获得沿  $z$  轴的速度后的运动情况亦与电势图线的形状密切相关。下面也分两种情况讨论:

(i) 若  $D > \frac{1}{\sqrt{2}}R$ , 即两个环之间的距离比较大, 电势  $V(z)$  的图线具有两个峰, 粒子电势能  $W(z)$  的图线亦具有两个峰, 即图 3-1-51 中的曲线  $\text{I}_1$ ,  $z=0$  处是谷底, 电势能具有极小值。当粒子获得沿  $z$  轴的速度后, 若其初动能大于两侧电势能的峰高的大小, 则粒子将越过势能峰, 运动到无限远处。若其初动能小于两侧电势能的峰值, 粒子只能在两峰之间往返运动, 若其初动能远小于势能的峰值, 则粒子以  $z=0$  为平衡位置做简谐振动。为此研究两个带电圆环产生的电场的场强在  $z$  轴上的分布情况。由前面知,

$$E(z) = kQ \frac{2R^2 - 4D^2}{(R^2 + D^2)^{\frac{5}{2}}} z.$$

因  $D > \frac{1}{\sqrt{2}}R$ ,  $2R^2 - 4D^2$  是负的, 故上式可改写成

$$E(z) = -kQ \frac{4D^2 - 2R^2}{(R^2 + D^2)^{\frac{5}{2}}} z.$$



位于原点附近的粒子受到的电场力

$$F(z) = qE(z) = -kqQ \frac{4D^2 - 2R^2}{(R^2 + D^2)^{\frac{3}{2}}} z.$$

它具有弹性力的性质,故粒子将以原点为平衡位置做简谐运动,振动的周期

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m(R^2 + D^2)^{\frac{3}{2}}}{kqQ(4D^2 - 2R^2)}}. \quad (9)$$

(II)若  $D < \frac{1}{\sqrt{2}}R$ , 即两个圆环间的距离比较小,电势  $V(z)$  的图线只有一个位于  $z=0$  处的峰,粒子的电势能  $W(z)$  的图线亦只有一个位于  $z=0$  处峰,即图 3-1-51 中的曲线 II, 粒子位于原点时其电势能最大,该处是粒子的不稳定平衡位置,即使粒子初始时静止在该处,一旦获得微小的速度,粒子便离开该处运动到电势能为零的无限远处.

**题 23** (2004·全国物理决赛题) 由如图 3-1-52 所示的电路,其中  $E$  为内阻可以忽略的电源电动势,  $R$  为电阻的阻值;  $S$  为开关;  $A$ 、 $B$  右边是由如图所示的 8 个完全相同容量均为  $C$  的理想电容器组成的电路. 问从合上  $S$  到各电容器充电完毕,电阻  $R$  上发热消耗的能量是多少? (在解题时,要求在图上标出你所设定的各个电容器极板上电荷的正负)

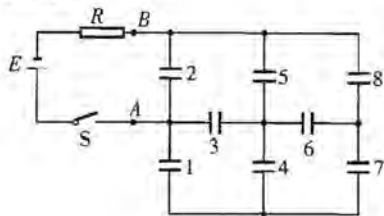


图 3-1-52

**【分析】** 电阻  $R$  上消耗的能量即为: 充电完毕前的过程中电源输出的能量 ( $W_0 = EQ$ ) 和电容器储存的能量 ( $W_1 = \frac{1}{2}EQ$ ) 之差. 这样求解充电完毕后电源从  $A$ 、 $B$  两点充入电容器组的电荷量  $Q$  成为解题的关键, 求解  $Q$  时用到节点电荷守恒, 回路电压方程以及每个电容器上电压与电荷、电容关系等一系列规律.

**【解】**  $A$ 、 $B$  右边 8 个电容器组成的电路(图 3-1-53)可视为一个等效电容  $C_{AB}$ , 整个电路可简化为图 3-1-54. 下面首先计算等效电容  $C_{AB}$ .

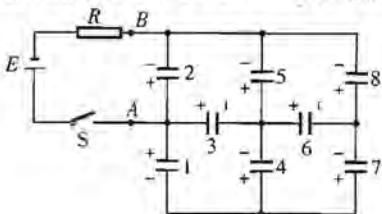


图 3-1-53

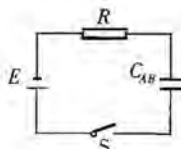


图 3-1-54



设合上 S 到充电完毕的过程中,从 A、B 两点充入 A、B 右边电路的电荷量为  $Q$ , A 正 B 负, 设第  $i$  个电容器所充的电荷量为  $q_i$ , 各电容器极板上电荷的正负如图 3-1-53 所示.

根据各节点的电荷守恒可列出下列 4 个独立方程:

$$q_1 + q_2 + q_3 = Q. \quad (1)$$

$$-q_1 + q_4 + q_7 = 0. \quad (2)$$

$$-q_3 - q_4 + q_5 + q_6 = 0. \quad (3)$$

$$-q_6 - q_7 + q_8 = 0. \quad (4)$$

下面再列出回路电压方程, 例如  $\frac{q_1}{C} + \frac{q_4}{C} - \frac{q_3}{C} = 0$  等等, 得

$$q_1 + q_4 - q_3 = 0. \quad (5)$$

$$q_4 + q_6 - q_7 = 0. \quad (6)$$

$$q_2 - q_3 - q_5 = 0. \quad (7)$$

$$q_5 - q_6 - q_8 = 0. \quad (8)$$

因电容 2 两端的电压与等效电容  $C_{AB}$  两端的电压都等于  $E$ , 故有

$$E = \frac{q_2}{C}. \quad (9)$$

$$E = \frac{Q}{C_{AB}}. \quad (10)$$

由方程①~⑧, 可解得

$$q_2 = \frac{8}{15}Q. \quad (11)$$

由⑨⑩⑪式, 得

$$C_{AB} = \frac{15}{8}C. \quad (12)$$

因在图 3-1-54 的电路中, 在整个充电的过程通过电路的电荷量为  $Q$ , 故电源对外所做的功为

$$W_0 = EQ. \quad (13)$$

等效电容器中的贮能  $W_1 = \frac{1}{2}QE, \quad (14)$

根据能量守恒定律, 电阻发热消耗的能量

$$W_2 = W_0 - W_1. \quad (15)$$

由以上有关各式, 得

$$W_2 = \frac{15}{16}E^2C.$$



## 题 24 (2007·亚洲物理竞赛题)

## 外电场中的介电球

将大量介电颗粒浸设在低粘滞性的液体中,体系形成悬浮液.将体系放置于电场中时,介电颗粒被外电场极化,诱导出电偶极矩.在极短的时间内,这些具有电偶极矩的颗粒通过相互作用团聚在一起,体系的粘滞系数突然显著增大(可近似看成固态),这种相变现象叫做“电流变”,这种体系相应地叫做电流变液.这种效应可以被用来制造汽车刹车等制动装置,其优点是响应速度比机械制动快几个数量级.下面我们将通过几个问题的解答,用简化的图象来逐步理解电流变现象的机理.

1. 当溶液中存在多个半径为  $a$  的相同的介电小球时,假设每个小球的电偶极矩  $p$  仅由外电场  $\vec{E}_0$  诱导,而与其他小球的存在与否及位置改变无关.(注:  $\vec{p} // \vec{E}_0$ )

(1) 当两个小球接触,球心连线与外电场方向夹角为  $\theta$  时(图 3-1-55, 写出两个小球的电偶极子的相互作用能的表达式.(结果以  $p, a$  和  $\theta$  表示)

(注: 计算中将介电小球视为位于球心的偶极子)

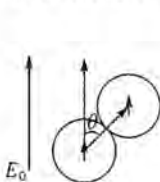


图 3-1-55

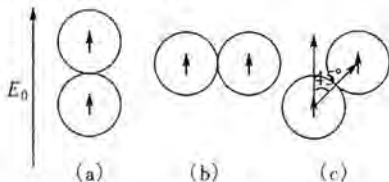


图 3-1-56

(2) 分别求图 3-1-56 中三种结构体系的电偶极子之间的相互作用能.

(3) 指出哪一种构型是体系最稳定的构型.

(注意: 计算中将介电小球视为位于球心的偶极子, 计算结果用  $p$  和  $a$  表示)

2. 当溶液中存在 3 个完全相同的介电小球时, 基于同问题 1 一样的假设,

(1) 分别计算下图中三种构型下的体系的偶极相互作用能.

(2) 指出哪一个构型最稳定.

(3) 指出哪一个构型最不稳定.

(计算中将介电小球视为位于球心的偶极子, 计算结果用  $p$  和  $a$  表示)

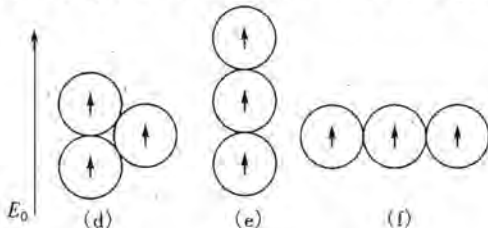


图 3-1-57

【分析】这是一道关于电场中的电偶极子的场强、能量等问题, 通过比较不同

构型的偶极子相互作用能,从而确定哪种构型最稳定.

**【解】** 1. (1) 在极坐标系中,一个处于原点的平行于  $z$  轴极化的偶极子在空间的电场的  $z$  分量为

$$E_z(\theta, \phi) = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{1-3\cos^2\theta}{r^3}. \quad (1)$$

因处在外场  $\vec{E}$  中的沿  $z$  轴极化的偶极子的能量为

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pE_z.$$

我们得到两个相距为  $\vec{r}$  的偶极子的相互作用能为

$$U_{12} = \frac{p^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1-3\cos^2\theta}{r^3}. \quad (2)$$

(2) 根据②,对(a)构型,我们得

$$U_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1-3}{(2a)^3} p^2 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p^2}{4a^3}. \quad (3)$$

对(b)构型

$$U_b = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1-0}{(2a)^3} p^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p^2}{8a^3}. \quad (4)$$

对(c)构型

$$U_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1-3\cos^2\frac{\pi}{4}}{(2a)^3} p^2 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p^2}{16a^3}. \quad (5)$$

(3) 比较③~⑤可知,(a)构型的能量最低,因此体系的基态为此构型.

2. 利用与上题同样的方法,我们可以计算三个构型的相互作用能.

对(d)构型

$$U_d = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{p^2}{4a^3} + 2 \times \frac{p^2}{32a^3} \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3p^2}{16a^3}. \quad (6)$$

对(e)构型,有

$$U_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{p^2}{4a^3} \times 2 - \frac{p^2}{32a^3} \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{17p^2}{32a^3}. \quad (7)$$

对(f)构型,有

$$U_f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{p^2}{8a^3} \times 2 + \frac{p^2}{64a^3} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{17p^2}{64a^3}. \quad (8)$$

比较⑥~⑧可知,构型(e)能量最低因此最稳定,构型(f)最不稳定.

**题 25** (2006·亚洲物理竞赛题) 两块理想导体板  $\alpha$  和  $\beta$  平行近距离放置,分别带有电荷量  $-Q$  和  $+q$  ( $Q > q > 0$ ). 另有一块理想导体板  $\gamma$  其质量为  $m$ ,带电荷量为  $+Q$ ,与导体板  $\beta$  距离为  $d$ ,平行放置(见图 3-1-58),平板面积均为  $S$ . 导体板  $\gamma$  从静止状态释放,设释放后能够自由运动,并设平板  $\alpha$  和

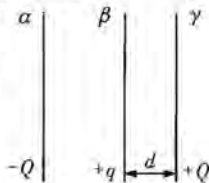


图 3-1-58



$\beta$  是固定的. 假定平板  $\beta$  和  $\gamma$  之间的碰撞是弹性的, 忽略装置的边缘效应和重力. 假定在两个板碰撞过程中, 平板  $\beta$  和  $\gamma$  之间的电荷量有足够的时间重新分布.

- (1) 在平板  $\gamma$  和平板  $\beta$  碰撞之前, 作用于平板  $\gamma$  的电场强度  $E_1$  为多大?
- (2) 碰撞后, 平板  $\beta$  和  $\gamma$  上的电荷量  $Q_\beta$  和  $Q_\gamma$  各是多少?
- (3) 碰撞后, 当与平板  $\beta$  的距离为  $d$  时, 平板  $\gamma$  的速度  $v$  为多大?

**【分析】** 本题求解时首先应用到以下规律: “无限大”均匀带电平面(本题中带电导体板)电场分布表达式、场强叠加原理以及导体板( $\beta$ 与 $\gamma$ 板)接触时电荷重新分布规律, 如电荷守恒, 导体中场强恒为零等. 至于 $\gamma$ 板碰撞前后的运动状态可用相关力学规律求解.

**【解】** (1) 均匀带电的大平板在其周围所产生的电场强度为  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ , 方向垂直于平板表面. 因此在 $\gamma$ 板和 $\beta$ 板碰撞前,  $\alpha$ 和 $\beta$ 两板分别作用在 $\gamma$ 板表面处的电场强度为

$$E_\alpha = \frac{\sigma_\alpha}{2\epsilon_0} = \frac{-Q}{2\epsilon_0 S}, E_\beta = \frac{\sigma_\beta}{2\epsilon_0} = \frac{q}{2\epsilon_0 S}.$$

故作用在 $\gamma$ 板的静电场  $E_1$  为

$$E_1 = E_\alpha + E_\beta = -\frac{Q-q}{2\epsilon_0 S}, \text{方向向左.} \quad (1)$$

(2) 当 $\beta$ 和 $\gamma$ 两导体平板完成碰撞, 仍然接触但即将分离时, 板上的电荷已重新调整分布. 这时两接合平板内部的电场为零, 两板原有的电荷分布在接合平板的表面上. 设分布在左表面( $\beta$ 板)的电荷量为  $Q_\beta$ , 在右表面( $\gamma$ 板)的电荷量为  $Q_\gamma$ , 则

$$\begin{cases} Q_\beta + Q_\gamma = Q + q, \\ \frac{-Q}{2\epsilon_0 S} + \frac{Q_\beta}{2\epsilon_0 S} - \frac{Q_\gamma}{2\epsilon_0 S} = 0. \end{cases}$$

联解上二式, 得

$$Q_\beta = Q + \frac{q}{2}, Q_\gamma = \frac{q}{2}. \quad (2)$$

在 $\beta$ 和 $\gamma$ 两平板分离后, 上式的电荷量仍然各自保留在这两平板上.

(3) 在 $\beta$ 和 $\gamma$ 两平板碰撞之前, 利用①式, 可得作用于 $\gamma$ 板的电场力为

$$F_1 = QE_1 = -\frac{(Q-q)Q}{2\epsilon_0 S}, \text{方向向左.} \quad (3)$$

此电场力吸引 $\gamma$ 板向左运动, 直至与 $\beta$ 板碰撞为止, 此力对 $\gamma$ 板做正功, 其值为

$$W_1 = \vec{F}_1 \cdot \vec{d}_1 = \frac{(Q-q)Qd}{2\epsilon_0 S}. \quad (4)$$

此正功转变为 $\gamma$ 板的动能, 故当 $\gamma$ 板开始碰撞 $\beta$ 板时的动能为

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = W_1 = \frac{(Q-q)Qd}{2\epsilon_0 S}. \quad (5)$$

由于题设  $\beta$  和  $\gamma$  板之间的碰撞为弹性的,故当两板完成碰撞刚要分离时, $\gamma$  板的动能恢复如⑤式.在两板分离后,由于板上的电荷重新分布,故作用在  $\gamma$  板的静电场  $E_2$  为

$$E_2 = \frac{-Q}{2\epsilon_0 S} + \frac{Q + \frac{q}{2}}{2\epsilon_0 S} = \frac{q}{4\epsilon_0 S}, \text{方向向右.} \quad (6)$$

作用于  $\gamma$  板的电场力为

$$F_2 = \left(\frac{q}{2}\right) E_2 = \frac{q^2}{8\epsilon_0 S}, \text{方向向右.} \quad (7)$$

此电场力对  $\gamma$  板做正功,当  $\gamma$  板和  $\beta$  板之间恢复相距  $d$  时,共做功  $W_2$ ,其值为

$$W_2 = \vec{F}_2 \cdot \vec{d}_2 = \frac{q^2 d}{8\epsilon_0 S}. \quad (8)$$

利用⑤和⑧两式,可得此时  $\gamma$  板的动能为

$$\frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + W_2 = \frac{(Q-q)Qd}{2\epsilon_0 S} + \frac{q^2 d}{8\epsilon_0 S} = \frac{d}{2\epsilon_0 S} \left(Q - \frac{q}{2}\right)^2. \quad (9)$$

由上式可得  $\gamma$  板的速度为

$$v_2 = \left(Q - \frac{q}{2}\right) \sqrt{\frac{d}{m\epsilon_0 S}}. \quad (10)$$

**题 26** (2006·国际物理竞赛题) 以下是闪电的简化模型.闪电是由云层中所累积的电荷引起的,其结果是云层底部通常带正电,而顶部则带负电,云层下的地面带负电.当电场强度积累到足以击穿空气时,突然的放电就会发生,形成闪电.

把电流看做时间的函数,利用图 3-1-59 简化的曲线和以下数据:

云层底部与地面之间的距离  $h=1 \text{ km}$ .

击穿湿润空气所需的电场  $E_0=300 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$ .

地球每年闪电数  $32 \times 10^6$ .

世界总人口  $6.5 \times 10^9$  人.

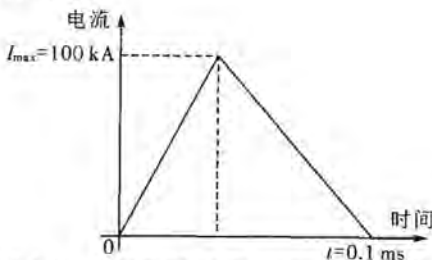


图 3-1-59 云层底部和地面之间的理想化电流脉冲

请回答下列问题:

- (1) 闪电释放的总电荷  $Q$  是多少?
- (2) 闪电时云层底部和地面之间的平均电流  $I$  是多少?



(3) 假设一年内所有闪电的总能量被收集起来, 并平均分配给每个人, 如你分得的这份能量用来点亮 100 W 的灯泡, 可以持续多长时间?

**【分析】** 根据闪电的简化模型, 可把带电云层与地面之间看成平板电容器, 闪电则可被理解为其间介质(湿润空气)被击穿时的一次漏电现象. 闪电释放的总电荷可由图解法求得.

**【解】** (1) 闪电的总电荷是题图曲线所包围的三角形面积

$$Q = \frac{I_0 t}{2} = 5 \text{ C.}$$

(2) 平均电流

$$I = \frac{Q}{t} = 50 \text{ kA.}$$

(3) 把云层与地面之间看做平行板电容器, 闪电之前储存的能量为  $\frac{QE_0 h}{2} = 7.5 \times 10^8 \text{ J}$ , 也就是一次闪电释放的能量.  $E_0 h$  是放电前极板间电压. 则

$$t' = \frac{32 \times 10^6 \times 7.5 \times 10^8 \text{ J}}{6.5 \times 10^9 \times 100 \text{ W}} \approx 10 \text{ h.}$$

**题 27** (2000 · 国际物理竞赛题) 真空中电荷  $Q$  均匀分布在半径为  $R$  的球体内.

(1) 对  $r \leq R$  和  $r > R$  两种情况导出距球心  $r$  处的电场强度;

(2) 导出与这一电荷分布相联系的总电能表达式.

**【分析】** 电场强度可由高斯定理求得, 总电能可由电场能量密度公式通过积分计算出来. 计算中注意场强分布的球对称性.

**【解】** (1) 电荷密度  $\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3Q}{4\pi R^3}$ . 由高斯定理得

$$E = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad (r \leq R),$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r > R).$$

(2) 能量密度为  $\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ . 对  $r \leq R$ , 半径为  $r$ , 厚为  $dr$  球壳内的能量为

$$dE = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R^6} r^4 dr.$$

储存在球体内的能量

$$E_{in} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R^6} \int_0^R r^4 dr = \frac{1}{40} \frac{Q^2}{\pi\epsilon_0 R}.$$

对  $r > R$ , 球壳内能量

$$dE = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r^4} r^2 dr.$$

在  $r > R$  区域内能量

$$E_{\text{out}} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{1}{8} \frac{Q^2}{\pi\epsilon_0 R}$$

故与电荷相联系的总能量为

$$E = E_{\text{in}} + E_{\text{out}} = \frac{3}{20} \frac{Q^2}{\pi\epsilon_0 R}$$

## 第二节 稳恒电流

**题 1** (2008·全国物理预赛题) 一电流表, 其内阻  $R_g = 10.0 \Omega$ , 如果将它与一阻值  $R_0 = 49\,990 \Omega$  的定值电阻串联, 便可成为一量程  $U_0 = 50 \text{ V}$  的电压表. 现将此电流表改装成一块双量程的电压表, 两个量程分别为  $U_{01} = 5 \text{ V}$  和  $U_{02} = 10 \text{ V}$ . 当用此电压表的  $5 \text{ V}$  挡去测量一直流电源两端的电压时, 电压表的示数为  $4.50 \text{ V}$ ; 当用此电压表的  $10 \text{ V}$  挡去测量该电源两端的电压时, 电压表的示数为  $4.80 \text{ V}$ . 问此电源的电动势为多少?

**【分析】** 理解电压表的内在结构和单量程和双量程的物理含义. 运用欧姆定律便可求解本题.

**【解】** 设电流表的量程为  $I_g$ . 当电流表与定值电阻  $R_0$  串联改装成电压表时, 此电压表的内阻

$$R_0' = R_g + R_0. \quad (1)$$

由于此电压表的量程  $U_0 = 50 \text{ V}$ , 故有

$$I_g R_0' = U_0. \quad (2)$$

由①②两式得

$$I_g = \frac{U_0}{R_g + R_0} = \frac{50 \text{ V}}{10 \Omega + 49\,990 \Omega} = 10^{-3} \text{ A}. \quad (3)$$

即电流表的量程为  $1 \text{ mA}$ . 电流表改装成的双量程电压表的电路如图 3-2-1 所示, 图中  $R_1$  和  $R_2$  是所需串联的电阻, 大小待求. 用  $R_1'$  表示电压表量程  $U_{01} = 5 \text{ V}$  挡的内阻, 则有

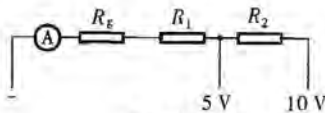


图 3-2-1

$$R_1' = R_g + R_1.$$

$$I_g R_1' = U_{01}.$$

而

由③④两式得

(4)



$$R_1' = \frac{U_{01}}{I_g} = \frac{5 \text{ V}}{10^{-3} \text{ mA}} = 5 \times 10^3 \Omega. \quad (5)$$

同理,得电压表量程  $U_{02} = 10 \text{ V}$  挡的内阻

$$R_2' = R_g + R_1 + R_2 = \frac{U_{02}}{I_g} = \frac{10 \text{ V}}{10^{-3} \text{ mA}} = 1.0 \times 10^4 \Omega. \quad (6)$$

设电源的电动势为  $E$ , 内阻为  $r$ . 当用电压表的  $5 \text{ V}$  挡测电源两端的电压时, 电压表的示数为  $U_1$ ; 已知  $U_1 = 4.50 \text{ V}$ . 设此时通过电压表的电流为  $I_1$ , 有

$$U_1 + I_1 r = E, U_1 = I_1 R_1'. \quad (7)$$

设当用电压表的  $10 \text{ V}$  挡测量该电源两端的电压时, 电压表的示数为  $U_2$ ; 已知  $U_2 = 4.80 \text{ V}$ . 设此时通过电压表的电流为  $I_2$ , 有

$$U_2 + I_2 r = E, U_2 = I_2 R_2'. \quad (8)$$

解式(7)(8), 并注意到(5)(6)两式, 得

$$E = 5.14 \text{ V}.$$

**题 2** (2004 · 全国物理预赛题) 如图 3-2-2 所示的电路中, 各电源的内阻均为零, 其中  $B$ 、 $C$  两点与其右方由  $1.0 \Omega$  的电阻和  $2.0 \Omega$  的电阻构成的无穷组合电路相接. 求图中  $10 \mu\text{F}$  的电容器与  $E$  点相接的极板上的电荷量.

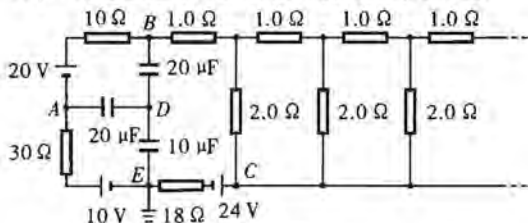


图 3-2-2

**【分析】** 本题首先应将无穷组合电路化简, 使题给电路化简为一个简单电路, 此外还应正确判断电容的极性, 正确写出  $A$ 、 $B$ 、 $C$  3 点中任意两点间电势差的表达式, 此外注意与  $D$  点相连 3 个电容器极板所带电荷的代数和应为零.

**【解】** 设  $B$ 、 $C$  右方无穷组合电路的等效电阻为  $R_{BC}$ , 则题图中通有电流的电路可以简化为图 3-2-3 中的电路,  $B$ 、 $C$  右方的电路又可简化为图 3-2-4 的电路, 其中  $R_{BC}$  是虚线右方电路的等效电阻. 由于  $B'$ 、 $C'$  右方的电路与  $B$ 、 $C$  右方的电路结构相同, 而且都是无穷组合电路, 故有

$$R_{BC} = R_{BC'}. \quad (1)$$

由电阻串、并联公式可得

$$R_{BC} = 1 + \frac{2R_{BC'}}{2 + R_{BC'}}. \quad (2)$$



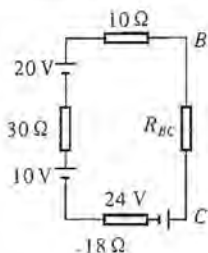


图 3-2-3

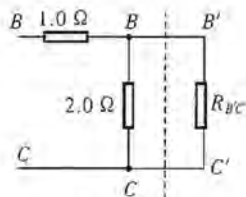


图 3-2-4

由①②两式得

$$R_{BC}^2 - R_{BC} - 2 = 0,$$

解得

$$R_{BC} = 2.0 \Omega.$$

③

图 3-2-3 所示回路中的电流为

$$I = \frac{20 + 10 - 24}{10 + 30 + 18 + 2} \text{ A} = 0.10 \text{ A}.$$

④

电流沿顺时针方向。

设电路中三个电容器的电容分别为  $C_1$ 、 $C_2$  和  $C_3$ ，各电容器极板上的电荷量分别为  $Q_1$ 、 $Q_2$  和  $Q_3$ ，极性如图 3-2-5 所示。由于电荷守恒，在虚线框内，三个极板上电荷的代数 and 应为零，即

$$Q_1 + Q_3 - Q_2 = 0,$$

⑤

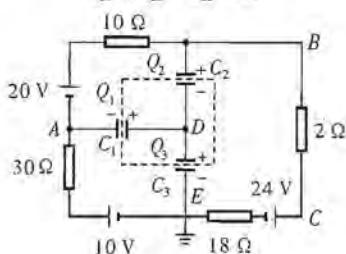


图 3-2-5

A、E 两点间的电势差

$$U_A - U_E = -\frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_3}{C_3}.$$

⑥

又有

$$U_A - U_E = (10 - 30 \times 0.10) \text{ V} = 7.0 \text{ V}.$$

⑦

B、E 两点间的电势差

$$U_B - U_E = \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3}.$$

⑧

又有

$$U_B - U_E = (24 + 20 \times 0.10) \text{ V} = 26 \text{ V}.$$

⑨

根据⑤⑥⑦⑧⑨式并代入  $C_1$ 、 $C_2$  和  $C_3$  之值后可得

$$Q_3 = 1.3 \times 10^{-4} \text{ C}.$$

即电容器  $C_3$  与 E 点相接的极板带负电，电荷量为  $1.3 \times 10^{-4} \text{ C}$ 。



**题3** (2008·全国物理复赛题) 零电阻是超导体的一个基本特性,但在确认这一事实时受到实验测量精确度的限制.为克服这一困难,最著名的实验是长时间监测浸泡在液态氦(温度  $T=4.2\text{ K}$ )中处于超导态的用铅丝做成的单匝线圈(超导转变温度  $T_c=7.19\text{ K}$ )内电流的变化.设铅丝粗细均匀,初始时通有  $I=100\text{ A}$  的电流,电流检测仪器的精度  $\Delta I=1.0\text{ mA}$ ,在持续一年的时间内电流检测仪器没有测量到电流的变化.根据这个实验,试估算对超导态铅的电阻率为零这一结论认定的上限为多大.设铅中参与导电的电子数密度  $n=8.00\times 10^{20}/\text{m}^3$ .已知电子质量  $m=9.11\times 10^{-31}\text{ kg}$ ,基本电荷  $e=1.60\times 10^{-19}\text{ C}$ .(采用的估算方法必须利用本题所给出的有关数据.)

**【分析】** 首先应对超导体“零电阻”的含义有正确理解,所谓一年内未测到电流变化是指即使有电流变化,其电流变化  $\Delta I$  至少小于仪器精度.因而本题应以仪器精度为切入点来计算相应电阻率,从而判断零电阻结论的上限,其间可用经典物理图象和规律来估算.

**【解】** 如果电流有衰减,意味着线圈有电阻,设其电阻为  $R$ ,则在一年时间  $t$  内电流通过线圈因发热而损失的能量为

$$\Delta E = I^2 R t. \quad (1)$$

以  $\rho$  表示铅的电阻率,  $S$  表示铅丝的横截面积,  $l$  表示铅丝的长度,则有

$$R = \frac{\rho l}{S}. \quad (2)$$

电流是铅丝中导电电子定向运动形成的.设导电电子的平均速率为  $v$ ,根据电流的定义有

$$I = S n e v. \quad (3)$$

所谓“在持续一年的时间内电流检测仪器没有测量到电流的变化”,并不等于电流一定没有变化,但这一变化不会超过电流检测仪器的精度  $\Delta I$ ,即电流变化的上限为  $\Delta I=1.0\text{ mA}$ .由于导电电子数密度  $n$  是不变的,电流的变小是电子平均速率变小的结果,一年内平均速率由  $v$  变为  $v-\Delta v$ ,对应的电流变化

$$\Delta I = n e S \Delta v. \quad (4)$$

导电电子平均速率变小,使得导电电子的平均动能减少.铅丝中所有导电电子减少的平均动能为

$$\Delta E_k = I S n \left[ \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m (v - \Delta v)^2 \right] \approx I S n m v \Delta v. \quad (5)$$

由于  $\Delta I \ll I$ ,所以  $\Delta v \ll v$ ,式中  $\Delta v$  的平方项已被略去.由式(3)解出  $v$ ,由式(4)解出  $\Delta v$ ,并代入式(5)得

$$\Delta E_k = \frac{I m I \Delta I}{n v^2 S}. \quad (6)$$

铅丝中所有导电电子减少的平均动能就是一年内因发热而损失的能量,即

$$\Delta E_k = \Delta E. \quad (7)$$

由①,②,⑥,⑦四式解得

$$\rho = \frac{m\Delta I}{ne^2 l t} \quad (8)$$

式中  $t = 365 \text{ d} \times 24 \text{ h/d} \times 3600 \text{ s/h} = 3.15 \times 10^7 \text{ s}$ .

在式⑧中代入有关数据得

$$\rho = 1.4 \times 10^{-26} \Omega \cdot \text{m} \quad (9)$$

所以“电阻率为零”的结论在这一实验中只能认定到

$$\rho \leq 1.4 \times 10^{-26} \Omega \cdot \text{m}$$

**题 4** (1999·全国物理竞赛题) 6个相同的电阻(阻值均为 $R$ )连成1个电阻环,6个接点依次为1、2、3、4、5和6,如图3-2-6所示.现有5个完全相同的这样的电阻环,分别称为 $D_1$ 、 $D_2$ 、 $\dots$ 、 $D_5$ .

现将将 $D_2$ 的1、3、5三点分别与 $D_1$ 的2、4、6三点用导线连接,如图3-2-7所示.然后将 $D_3$ 的1、3、5三点分别与 $D_2$ 的2、4、6三点用导线连接,……依此类推,最后将 $D_5$ 的1、3、5三点分别连接到 $D_4$ 的2、4、6三点上.

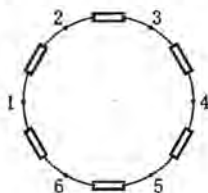


图 3-2-6

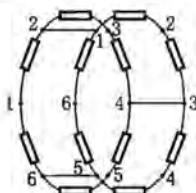


图 3-2-7

(1)证明:全部接好后,在 $D_1$ 上的1、3两点间的等效电阻为 $\frac{724}{627}R$ .

(2)求全部接好后,在 $D_5$ 上的1、3两点间的等效电阻.

**【分析】** 本题电阻较多、线路颇为复杂且环形电路看起来很习惯,因此可先将环形电路改画成三角形电路.改画后的电路非常规则,所以由内向外,利用对称性将电势相等点连接起来,逐个环地等效变换,求得阻值.

**【解】** 本题可能有多种解法,在此提供两种解法.

方法 1:(1)①电阻图变形.

此题连好的线路的平面图如图3-2-8所示.

现将电阻环改画成三角形,1、3、5三点为顶点,2、4、6三点为三边中点,如图3-2-9(a)与图3-2-9(b)所示.

整个连好的线路相当于把 $D_n$ 的3个顶点分别接到 $D_{n-1}$ 的3个中点上,图3-2-8变为图3-2-9(c).这样第1问归结为求图3-2-9(c)中最外层三角环任意两顶点间的等效电阻.

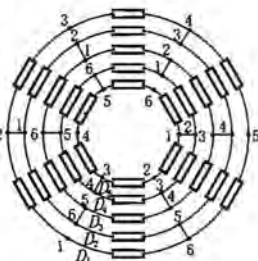


图 3-2-8

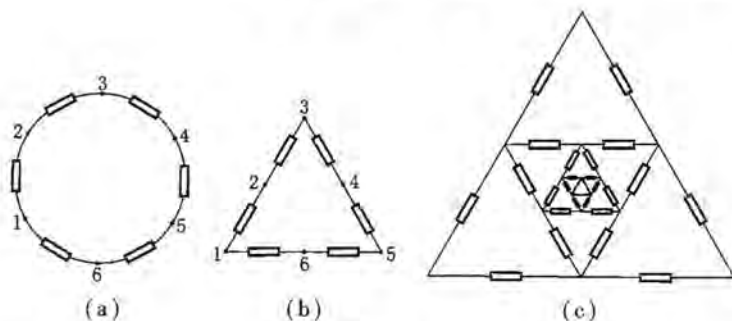


图 3-2-9

②递推公式.

为使图形简化,讨论如何将接好的 2 个电阻环化简成为 1 个单环.由 6 个阻值为  $r$  的电阻构成 1 个三角环,将其顶点接在另一由 6 个阻值为  $R$  的电阻构成的三角环的中点上(如图 3-2-10 所示).

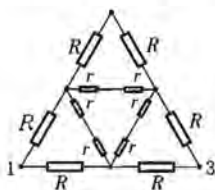


图 3-2-10

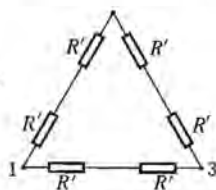


图 3-2-11

图 3-2-11 是由 6 个阻值为  $R'$  的电阻构成的三角环.若图 3-2-10 顶点 1,3 间的电阻与图 3-2-11 顶点 1,3 间的电阻阻值相等,我们称图 3-2-11 中的  $R'$  为等效单环电阻.

用符号“//”表示电阻的并联,如

$$R_A // R_B = \frac{1}{\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B}}$$

由图 3-2-10 中的对称性可知,1,3 两顶点间的电阻  $R_{1,3}$  等于图 3-2-12 中 1,0 间的电阻  $R_{1,0}$  的两倍,即

$$\begin{aligned} R_{1,3} &= 2R_{1,0} = 2\{[R // r // (2r)] + R\} // R \\ &= 2\left[\frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{r} + \frac{1}{2r}} + R\right] // R \\ &= 2\frac{4rR + 3R^2}{2r + 3R} // R \end{aligned}$$

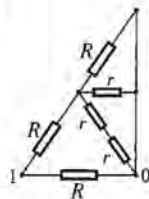


图 3-2-12

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{3} \frac{4r+3R}{r+R} R \\
 &= R + \frac{1}{3} (r//R). \quad \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

同理,图 3-2-11 中 1、3 两顶点间的电阻  $R_{1,3}$  为

$$R_{1,3} = 2[(2R')//R'] = \frac{4}{3} R'. \quad \textcircled{2}$$

由①②式得等效单环电阻  $R'$  为

$$R' = \frac{3}{4} R + \frac{1}{4} (r//R). \quad \textcircled{3}$$

(2) 现在考虑把  $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5$  按相反的次序,由内向外依次连接的情况. 首先将  $D_4$  接在  $D_5$  外面,求双环  $D_4-D_5$  的等效单环电阻  $R^{(2)}$  [即③式中的  $R'$ ], 这时  $r=R$ . 由③式得到  $R^{(2)}$  为

$$R^{(2)} = \frac{3}{4} R + \frac{1}{4} (R//R) = \frac{7}{8} R.$$

其次,在双环  $D_4-D_5$  外面接上  $D_3$ , 这时  $r=R^{(2)}$ . 三环  $D_3-D_4-D_5$  的等效单环电阻  $R^{(3)}$  为

$$R^{(3)} = \frac{3}{4} R + \frac{1}{4} [R//R^{(2)}] = \frac{3}{4} R + \frac{1}{4} \left[ R//\left(\frac{7}{8} R\right) \right] = \frac{13}{15} R.$$

由此可得一般公式,  $(s+1)$  环的等效单环电阻  $R^{(s+1)}$  可由  $R^{(s)}$  求出

$$R^{(s+1)} = \frac{3}{4} R + \frac{1}{4} [R//R^{(s)}]. \quad \textcircled{4}$$

于是

$$R^{(4)} = \frac{3}{4} R + \frac{1}{4} [R//R^{(3)}] = \frac{3}{4} R + \frac{1}{4} \left[ R//\left(\frac{13}{15} R\right) \right] = \frac{97}{112} R.$$

$$R^{(5)} = \frac{3}{4} R + \frac{1}{4} [R//R^{(4)}] = \frac{3}{4} R + \frac{1}{4} \left[ R//\left(\frac{97}{112} R\right) \right] = \frac{181}{209} R.$$

由②式  $R_{1,3} = \frac{4}{3} R'$  得出由 1 个环 ( $D_5$ )、2 个环 ( $D_5-D_4$ ) 直至 5 个环 ( $D_5-D_4-D_3-D_2-D_1$ ) 构成的线路 1、3 点间的电阻为

$$R_{1,3}^{(1)} = \frac{4}{3} R' = \frac{4}{3} R,$$

$$R_{1,3}^{(2)} = \frac{4}{3} \left(\frac{7}{8}\right) R = \frac{7}{6} R,$$

$$R_{1,3}^{(3)} = \frac{4}{3} \left(\frac{13}{15}\right) R = \frac{52}{45} R,$$

$$R_{1,3}^{(4)} = \frac{4}{3} \left(\frac{97}{112}\right) R = \frac{97}{84} R,$$

$$R_{1,3}^{(5)} = \frac{4}{3} \left(\frac{181}{209}\right) R = \frac{724}{627} R.$$



答:所求的 5 个环的 1 与 3 间的等效电阻确为  $\frac{724}{627}R$ . 证毕.

(3) 根据 5 个  $D$  组成的圆柱形网络的对称性,  $D_5$  的 1、3 两点等价于  $D_1$  的 2、4 两点. 等价线路如图 3-2-13 与图 3-2-14 所示. 设两图等价, 求图 3-2-14 中的  $R''$  即可.

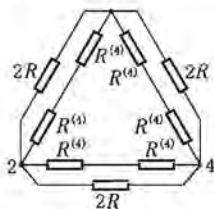


图 3-2-13

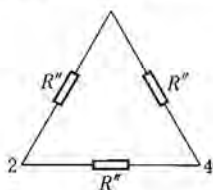


图 3-2-14

$$R'' = (2R) // (2R^{(4)}) = \frac{1}{\frac{1}{2R} + \frac{56}{97}} = \frac{194}{209}R,$$

所以  $R_{2,4}^{(5)} = R'' // 2R'' = \frac{2}{3}R'' = \frac{388}{627}R.$

答: 所求值为  $\frac{388}{627}R$ .

方法 2: (1) 图 3-2-9(b) 可看做  $D_5$  的接线图, 其一半如图 3-2-15 所示, 竖直粗线为一短路线, 1 个环 ( $D_5$ ) 构成线路的 1 与 0 点间的阻值用  $R_{1,0}^{(1)}$  表示, 根据对称性,

$$R_{1,0}^{(1)} = \frac{1}{2}R_{1,3}^{(1)} = \frac{2}{3}R.$$

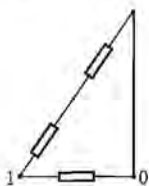


图 3-2-15

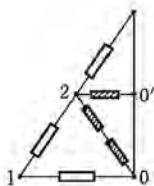


图 3-2-16

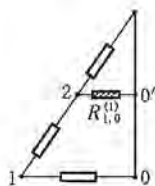


图 3-2-17

当  $D_5$  接入  $D_4$  后, 由 2 个环 (类似图 3-2-37) 构成线路图的一半如图 3-2-16 所示. 3 个带阴影的电阻与短路线围成的三角形 (2-0'-0) 中的 2 与 0' 间的阻值就是图 3-2-15 中 1 与 0 间的阻值  $R_{1,0}^{(1)}$ . 其等效电路如图 3-2-17 所示. 图 3-2-16 (或图 3-2-17) 中的 1 与 0 点间的阻值用  $R_{1,0}^{(2)}$  表示. 有

$$\begin{aligned} R_{1,0}^{(2)} &= [(R // R_{1,0}^{(1)}) + R] // R \\ &= \left[ \left( R // \frac{2}{3}R \right) + R \right] // R = \frac{7}{12}R. \end{aligned}$$

再将双环  $D_5$ - $D_4$  接入  $D_3$ , 其一半如图 3-2-18 所示, 3 个带阴影的电阻与短路线围成的三角形中含有 6 个电阻, 其 2 与 0' 间的阻值就对应为  $R_{1,0}^{(3)}$ , 参看图 3-2-17

的等效电路,得

$$\begin{aligned} R_{1,0}^{(3)} &= [(R // R_{1,0}^{(2)}) + R] // R \\ &= \left[ \left( R // \frac{7}{12} R \right) + R \right] // R = \frac{26}{45} R. \end{aligned}$$

同理,得

$$\begin{aligned} R_{1,0}^{(4)} &= [(R // R_{1,0}^{(3)}) + R] // R \\ &= \left[ \left( R // \frac{26}{45} R \right) + R \right] // R = \frac{97}{168} R, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{1,0}^{(5)} &= [(R // R_{1,0}^{(4)}) + R] // R \\ &= \left[ \left( R // \frac{97}{168} R \right) + R \right] // R = \frac{362}{627} R. \end{aligned}$$

由此得 
$$R_{1,0}^{(5)} = 2R_{1,0}^{(4)} = \frac{724}{627} R.$$

(2) 5个电阻环构成线路后,最外层环( $D_1$ )上2点与4点间的等效电阻可借用图3-2-44求得,将图中 $R_{1,0}^{(4)}$ 换成 $R_{2,0}^{(4)}$ ,5个环构成的线路中2与4间阻值可如下求得:因  $R_{2,0}^{(5)} = 2R // R_{1,0}^{(4)} // R = 2R // \frac{97}{168} R // R = \frac{194}{627} R,$

故 
$$R_{2,4}^{(5)} = 2R_{2,0}^{(5)} = \frac{388}{627} R.$$

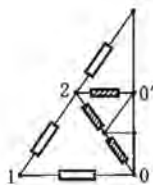


图 3-2-18

**题 5** (1998·全国物理复赛题) 在图3-2-19所示的网络中,已知部分支路上电流值及其方向,某些元件参数和支路交点的电势值(有关数值及参数已标在图上),请你利用所给的有关数值及参数求出含有电阻 $R_x$ 的支路上的电流值 $I_x$ 及其方向。

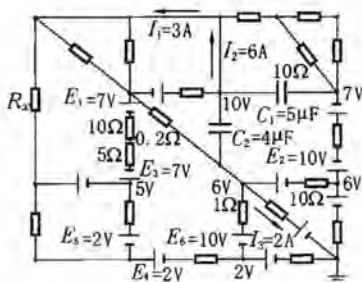


图 3-2-19

**【分析】** 此题乍看起来电路颇为复杂,但许多点的电势已知,因此可利用含源电路欧姆定律求出支路电流,然后作一闭合包围面,根据基尔霍夫定律,流入包围面的电流之和应等于流出去的电流之和,从而求出 $I_x$ 。

**【解】** 由稳恒电流性质可知,流入闭合包围面的电流值等于流出的电流值。在题所给定的电路中,作一与待求电流值所在支路相截的闭合包围面。如果被该包围



面所截的其他支路的电流值都已知,那么,待求支路的电流值就可以求得.

作包围面  $S$ , 被它所截的各支路  $I_a$ 、 $I_d$ 、 $I_c$  和  $I_x$  如图 3-2-20 所示. 图中待求有关支路中的电流  $I_a$ 、 $I_b$ 、 $I_c$ 、 $I_d$ 、 $I_e$  和  $I_x$  的电流方向如图中所设, 有关各支路的电流值计算如下:

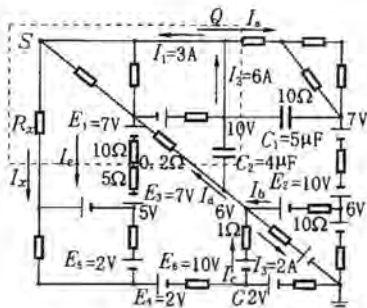


图 3-2-20

对图中的支路交点  $Q$  有  $I_a = I_2 - I_1 = 3A$ .

为了求得  $I_d$ , 考察含源支路  $FE$ , 有

$$U_E - U_F = E_2 - I_b \cdot 10.$$

$$I_b = \frac{E_2 - U_{EF}}{10} = 1A.$$

为了求得  $I_c$ , 考察含源支路  $EG$ , 有

$$U_E - U_G = E_6 - I_c \cdot 1.$$

$$I_c = \frac{E_6 - U_{EG}}{1} = 6A.$$

对支路交点  $E$ , 有  $I_d = I_b + I_c - I_3 = 5A$ .

为了求得  $I_e$ , 先考察  $P$  点电势, 因

$$U_E - U_P = I_d \cdot 0.2 = 1V.$$

故  $P$  点电势

$$U_P = 5V.$$

对含源支路  $PH$  有

$$U_H - U_P = (E_3 - E_1) - I_e \cdot (5 + 10).$$

$$I_e = \frac{[(E_3 - E_1) - U_{HP}]}{15} = 0.$$

因而对闭合包围面  $S$ , 有

$$I_x = I_d - I_e - I_a = (5 - 0 - 3)A = 2A.$$

电流方向与图中所标一致, 为由上至下.

**题 6** (2000·全国物理竞赛题) 波兰数学家谢尔宾斯基 1916 年研究了 1 个有趣的几何图形. 他将图 3-2-21 所示的一块黑色的等边三角形  $ABC$  的每 1 个边长平分之二, 再把平分点连起来, 此三角形被分成 4 个相等的等边三角形, 然后将中间



的等边三角形挖掉,得到如图 3-2-22 的图形;接着再将剩下的黑色的 3 个等边三角形按相同的方法处理,经过第 2 次分割就得到图 3-2-23 图的图形.经 3 次分割后,又得图 3-2-24 图的图形.这是带有自相似特征的图形,这样的图形又称为谢尔宾斯基镂垫.它的自相似性就是将其其中 1 个小单元(例如图 1-3-23 中  $\triangle BJK$ )适当放大后,就得到图 3-2-22 的图形.如果这个分割过程继续下去,直到无穷,谢尔宾斯基镂垫中的黑色部分被不断地镂空.



图 3-2-21

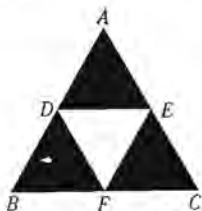


图 3-2-22

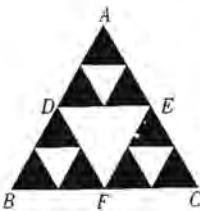


图 3-2-23

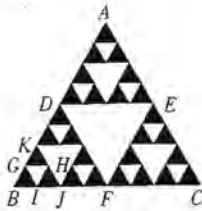


图 3-2-24

数学家对这类几何图形的自相似性进行了研究,创造和发展出了一门称为“分形几何学”的新学科.近 30 多年来,物理学家将分形何学的研究成果和方法用于有关的物理领域,取得了有意义的进展.

我们现在就在这个背景下研究按谢尔宾斯基镂垫图形的各边构成的电阻网络的等效电阻问题.设按如图 3-2-21 所示的三角形  $ABC$  的边长  $L_0$  的电阻均为  $r$ ;经一次分割得到如图 3-2-22 所示的图形,其中每个小三角形边长的电阻是原三角形  $ABC$  的边长的电阻  $r$  的二分之一;经二次分割得到如图 3-2-23 所示的图形,其中每个小三角形边长的电阻是原三角形  $ABC$  的边长的电阻  $r$  的四分之一;三次分割得到如图 3-2-24 所示的图形,其中每个小三角形边长的电阻是原三角形  $ABC$  的边长的电阻  $r$  的八分之一.

(1) 试求经三次分割后,三角形  $ABC$  任意 2 个顶点间的等效电阻.

(2) 试求按此规律作了  $n$  次分割后,三角形  $ABC$  任意 2 个顶点间的等效电阻.

(3) 由第(2)问可知,对边长均为  $L_0$ 、边长电阻均为  $r$  的电阻三角形  $ABC$ ,现用谢尔宾斯基镂垫的方法进行分割,分割的次数越多,  $\triangle ABC$  中每个小三角形的边长越短,参与计算等效电阻的小三角形的边数越多,分割后的  $\triangle ABC$  两顶点间的等效电阻与其中的小三角形的边长有关.为了从“分形几何学”的角度讨论这个问题,我们先介绍二端电阻网络的“指数”的概念.考虑一长、宽、高分别为  $a, b, c$  的均匀长方体导线,如图 3-2-25 所示,若电流沿平行于导体长度  $a$  的方向流进导体,则该导体的垂直于电流方向的 2 个端面间的电阻可表示为

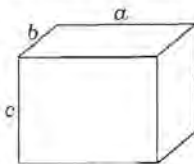


图 3-2-25



$$R = \rho \frac{a}{bc},$$

式中  $\rho$  为导体的电阻率. 若保持  $b, c$  不变, 使另一边  $a$  的长度变化, 并用  $L$  表示这一可改变的长度, 这样构成的一维导体的电阻与  $L$  成正比, 其电阻可表示为

$$R_{(1)}(L) = \rho \frac{L}{bc} \propto L^1,$$

式中 1 被称为一维导体的指数. 若保持  $c$  的长度不变, 但使  $a$  边和  $b$  边的长度相等且可以改变, 并用  $L$  表示这一可改变的长度, 即  $a = b = L$ , 这样构成的二维导体的电阻与可变的长度无关, 可表示为

$$R_{(0)}(L) = \rho \frac{1}{c} \propto L^0,$$

式中 0 被称为二维导体的指数. 若保持导体的三条边  $a, b, c$  的长度都相等且都可改变, 并用  $L$  表示可变的长度, 即  $a = b = c = L$ , 这样构成的三维导体的电阻与可变的长度的一次方成反比, 可表为

$$R_{(-1)}(L) = \rho \frac{1}{L} \propto L^{-1}.$$

式中 -1 被称为三维导体的指数, 可以将上述结论推广到一般情况, 若二端电阻网络的等效电阻与可变长度  $L$  的关系为

$$R_{(s)}(L) = kL^s.$$

式中比例系数  $k$  是与  $L$  和  $s$  都无关的恒量, 则称  $s$  为此二端电阻网络的指数.

从谢尔宾斯基毯垫图形看, 未经分割的三角形的边长为  $L_0$ , 经多次分割, 每个最小三角形的边长随分割次数而变, 可视为可变长度  $L$ . 求出经  $n$  次分割后的谢尔宾斯基毯垫图形  $A, B$  两点的等效电阻与可变长度  $L$  的关系, 并计算出相应的指数.

**【分析】** 本题题目文字较长, 背景也较复杂, 但图形具有对称性、重复性. 因此可从 1 个小单元入手. 图形中 1 个小黑三角形对应于 1 个  $\triangle$  形联接. 故可联想到将  $\triangle$  形联接代换成等效的  $Y$  形联接. 接着猜想三角形  $ABC$  经过一次分割后的电阻, 二次分割后的电阻, 以至递推出  $n$  次分割后的电阻表达式.

**【解】** (1) 先证明一个由 3 个阻值均为  $r$  的电阻接成的  $\triangle$  网络  $ABC$ , 其任意两顶点间的电阻与可以改接成由 3 个电阻值均为  $\frac{r}{3}$  的电阻接成  $Y$  状网络,  $ABC$  的任意两点间的电阻是相等的, 即将图 3-2-26 的  $\triangle$  形网络改换成图 3-2-27 的电阻  $Y$  形网络, 接入相同的外电路, 外电路的电路状态不会改变, 这种变换称为  $\triangle - Y$  等效变换.

图 3-2-27 中的

$$R_{AB}(\triangle) = \frac{r \cdot 2r}{r + 2r} = \frac{2}{3} r;$$

与图 3-2-27 中的

$$R_{AB}(Y) = \frac{1}{3}r + \frac{1}{3}r = \frac{2}{3}r.$$

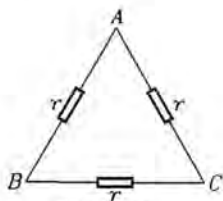


图 3-2-26

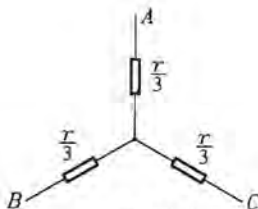


图 3-2-27

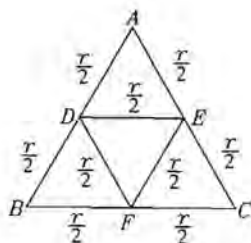


图 3-2-28

因而证得:3个电阻网络作了这样的替换后

$$R_{AB}(\triangle) = R_{AB}(Y).$$

三角形  $ABC$  经过一次分割,得到3个小三角形,即  $\triangle ADE$ 、 $\triangle DBF$ 、 $\triangle EFC$ ,每个边的电阻均为  $\frac{r}{2}$ ,构成的电阻网络如图 3-2-28 所示.将3个小三角形作  $Y$  变换得图 3-2-29,进而得图 3-2-30、图 3-2-31、图 3-2-32.

解得

$$R_{AB} = \frac{5}{9}r.$$

若将未经分割的三角形即图 3-2-26 中  $\triangle ABC$  任意两顶点间的等效电阻表示为  $R(0)$ ,则

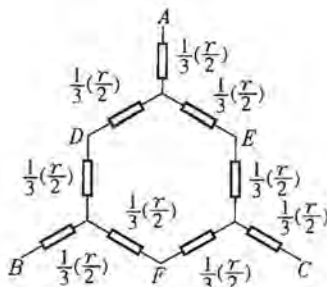


图 3-2-29

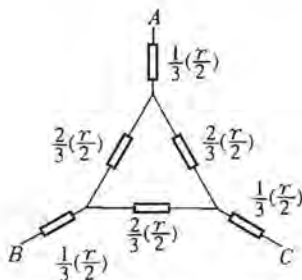


图 3-2-30

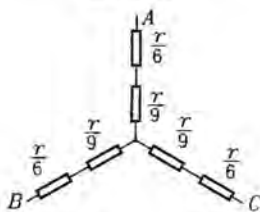


图 3-2-31

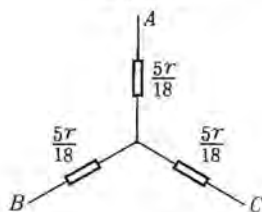


图 3-2-32



$$R(0) = \frac{2}{3}r. \quad (1)$$

若将三角形作了一次分割操作后得到的三角形网络即图 3-2-27 中两顶点 AB 间的等效电阻表示为  $R(1)$ , 则由上面的结果, 有

$$R(1) = \frac{5}{9}r = \left(\frac{5}{3}\right)^1 \left[\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^1 r\right] = \left[\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\right]^1 \frac{2}{3}r. \quad (2)$$

现将图 3-2-32 的 Y 形的电阻网络变换为图 3-2-33 的  $\triangle$  形的电阻网络, 三角形每边的电阻应为  $\frac{5r}{6}$ . 图 3-2-28 是将  $\triangle ABC$  作了第 2 次分割操作后的情况. 欲求第 2 次分割操作后  $\triangle ABC$  两顶点 AB 间的等效电阻, 只要将图 3-2-26 与图 3-2-28 相对比, 注意到图 3-2-28 每个小三角形的边长的电阻值是图 3-2-26 每个小三角形的边长的电阻的  $\frac{1}{2}$ , 所

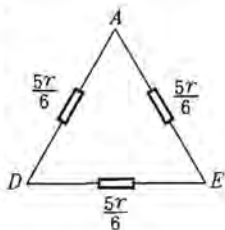


图 3-2-33

以只需将图 3-2-28 中上、左、右 3 个三角形每个边的电阻改为  $\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)r$  或  $\left(\frac{5}{6}\right)\frac{r}{2}$  即可. 根据②式, 得

$$R(2) = \left[\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 \left(\frac{2}{3}\right)\frac{5}{6}r = \left(\frac{5}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{2}{3}r. \quad (3)$$

经过 3 次分割,  $\triangle ABC$  两顶点 AB 间的等效电阻为

$$R(3) = \left(\frac{5}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{2}{3}r = \frac{250}{648}r. \quad (4)$$

(2) 仿照计算第一次分割操作后求  $\triangle ABC$  两端点 AB 间的等效电阻的方法, 就可求得经过  $n$  次分割, 三角形两端点间的等效电阻

$$R(n) = \left(\frac{5}{3}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{2}{3}r. \quad (5)$$

(3) 已知未分割时三角形 ABC 两顶点间对应的等效电阻可表示为

$$R(L_0) = \frac{2}{3}r = kL_0. \quad (6)$$

经  $n$  次分割后三角形 ABC 两顶点间对应的等效电阻可表示为

$$R\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n L_0\right] = \left(\frac{5}{3}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{2}{3}r\right) = k\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n L_0\right]. \quad (7)$$

由⑥⑦两式消去  $k$  得

$$\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n. \quad (8)$$

故得

$$\ln\left[\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \ln\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

$$s = 1 + \frac{\ln \frac{5}{3}}{\ln \frac{1}{2}} \approx 0.263.$$

⑨

### 题 7 (2006 · 国际物理竞赛题)

#### 毛细血管

把血液看做不可压缩的黏性液体,并把它的密度  $\mu$  视为和水一样,它的动态黏滞系数为  $\eta = 4.5 \text{ g} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ . 我们用圆柱形直筒作为血管模型,其半径为  $r$ , 长度为  $L$ , 并用泊肃叶定律来描述血流量

$$\Delta p = RD.$$

这一流体动力学公式与电学中的欧姆定律相似,这里  $\Delta p$  是血管入口和出口的压强差; $D = Sv$  是单位时间流经横截面积为  $S$  的血管的血液的体积, $v$  是血液流动的速度;血管阻抗  $R$  由下式给出

$$R = \frac{8\eta L}{\pi r^4}.$$

在体循环中(血液从左心室流经身体到右心房),处于平静状态的人,血流是  $D \approx 100 \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ . 假设所有毛细血管都并联,并且其半径  $r = 4 \mu\text{m}$ , 长度  $L = 1 \text{ mm}$ , 并在压强差  $\Delta p = 1 \text{ kPa}$  的情况下工作,回答下列问题:

- (1) 人体内共有多少根毛细血管?
- (2) 当血液流经毛细血管时,它的流速  $v$  是多少?

**【分析】** 由题意知,描述流体动力学的方程——泊肃叶定律与电学中的欧姆定律相似,因而我们可用类比法引用并联电路相关规律求解本题.

**【解】** (1) 总的阻抗为

$$R_{\text{总}} = \frac{\Delta p}{D} = 10^7 \text{ Pa} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}.$$

每一根毛细血管的阻抗为

$$R = \frac{8\eta L}{\pi r^4} \approx 4.5 \times 10^{16} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-4} \cdot \text{s}^{-1}.$$

设  $N$  是并联血管总数,与并联电阻相类似,  $R_{\text{总}} = \frac{R}{N}$ , 因而

$$N = \frac{R}{R_{\text{总}}} = \frac{4.5 \times 10^{16}}{10^7} = 4.5 \times 10^9.$$

(2) 每根血管的流量为

$$D' = \frac{D}{N} = Sv.$$

所以

$$v = \frac{D}{N\pi r^2} = 0.44 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}.$$



### 第三节 磁 场

**题 1** (2007·全国物理预赛题) 空间存在垂直于纸面方向的均匀磁场,其方向随时间做周期性变化,磁感应强度  $B$  随时间  $t$  变化的图线如图 3-3-1 所示. 规定  $B > 0$  时,磁场的方向穿出纸面. 现在磁场区域中建立一与磁场方向垂直的平面坐标  $Oxy$ , 如图 3-3-2 所示. 一电荷量  $q = 5\pi \times 10^{-7} \text{ C}$ 、质量  $m = 5 \times 10^{-10} \text{ kg}$  的带电粒子,位于原点  $O$  处,在  $t = 0$  时刻以初速度  $v_0 = \pi \text{ m/s}$  沿  $x$  轴正方向开始运动. 不计重力的作用,不计磁场的变化可能产生的一切其他影响.

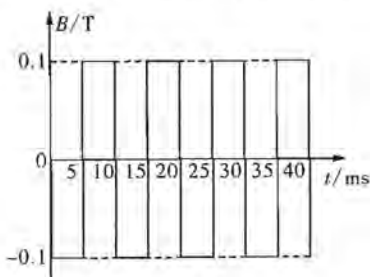


图 3-3-1

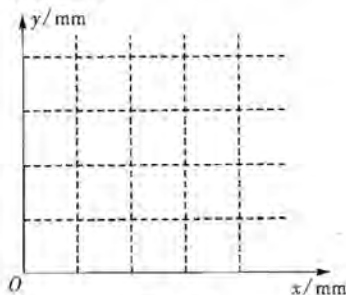


图 3-3-2

1. 试在图 3-3-2 中画出  $0 \sim 20 \text{ ms}$  时间内粒子在磁场中运动的轨迹,并标出图 3-3-2 中纵、横坐标的标度值(评分时只按图评分,不要求写出公式或说明).

2. 在磁场变化  $N$  个( $N$  为整数)周期的时间内带电粒子的平均速度的大小等于\_\_\_\_\_.

**【分析】** 由于磁场作周期性变化,因而粒子运动的空间轨迹也有一定规律性,因此只需分析在一个周期内的运动规律即可判断全部运动情况,平均速度大小的定义是:该时间段内位移大小除以相应的时间间隔,取一个周期计算即可.(与  $N$  次实际上无关)

**【解】** 1. 粒子在磁场中的运动轨迹如图 3-3-3 所示; 2.  $2\sqrt{2} \text{ m/s}$ .

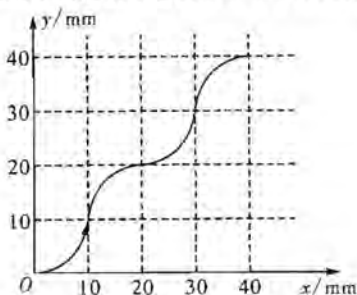


图 3-3-3



**题 2** (2007·全国物理预赛题) 如图 3-3-4 所示,  $M_1M_2$  和  $M_3M_4$  都是由无限多根无限长的外表面绝缘的细直导线紧密排列成的导线排横截面, 两导线排相交成  $120^\circ$ ,  $OO'$  为其角平分线. 每根细导线中都通有电流  $I$ , 两导线排中电流的方向相反, 其中  $M_1M_2$  中电流的方向垂直纸面向里. 导线排中单位长度上细导线的根数为  $\lambda$ . 图中的矩形  $abcd$  是用  $n$  型半导体材料做成的长直半导体片的横截面 ( $\overline{ab} \ll \overline{bc}$ ), 长直半导体片与导线排中的细导线平行, 并在片中通有均匀电流  $I_0$ , 电流方向垂直纸面向外. 已知  $ab$  边与  $OO'$  垂直,  $\overline{bc} = l$ , 该半导体材料内载流子密度为  $n$ , 每个载流子所带电荷量的大小为  $q$ . 求此半导体片的左右两个侧面之间的电势差. 已知当细的无限长的直导线中通有电流  $I$  时, 电流产生的磁场离直导线的距离为  $r$  处的磁感应强度的大小为  $B = \frac{kI}{r}$ , 式中  $k$  为已知常量.

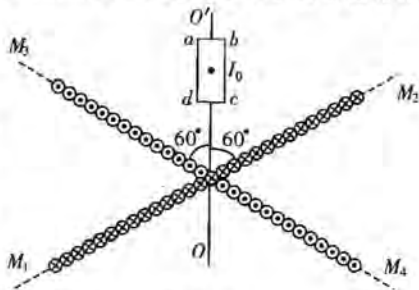


图 3-3-4

**【分析】** 求解可分二步操作, 首先用叠加法求出两通电导线排在半导体片所在位置处的磁感应强度, 其中用到微元思想并注意对称性问题, 至于半导体片中出现的物理现象实质上为霍尔效应. 令洛伦兹力等于电场力时所对应的电势差即为所求.

**【解】** 1. 两导线排的电流产生的磁场. 考查导线排  $M_1M_2$  中的电流产生的磁场, 取  $x$  轴与导线排  $M_1M_2$  重合,  $y$  轴与导线排  $M_1M_2$  垂直, 如图 3-3-5 所示. 位于  $x \sim x + \Delta x$  ( $\Delta x$  为小量) 之间的细导线可以看做是“一根”通有电流  $I\lambda\Delta x$  的长直导线, 它在  $y$  轴上  $P$  点产生的磁感应强度的大小为

$$\Delta B = k \frac{I\lambda\Delta x}{r} \quad (1)$$

式中  $r$  为  $P$  点到此长直导线的距离,  $\Delta B$  的方向与  $r$  垂直, 与电流构成右手螺旋系. 将  $\Delta B$  分解成沿  $x$  方向和  $y$  方向的两个分量  $\Delta B_x$  和  $\Delta B_y$ , 有

$$\Delta B_x = k \frac{I\lambda\Delta x}{r} \cos\theta \quad (2)$$

$$\Delta B_y = k \frac{I\lambda\Delta x}{r} \sin\theta \quad (3)$$

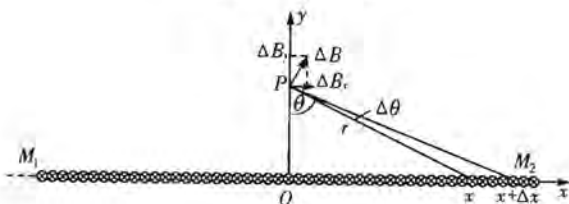


图 3-3-5



根据对称性,位于 $-(x+\Delta x)\sim -x$ 之间的细导线中电流产生的磁感应强度在 $y$ 方向的分量与 $\Delta B_y$ 大小相等,方向相反.可见,整个导线排中所有电流产生的磁场在 $y$ 方向的合磁场为0.由图3-3-5可看出

$$\frac{\Delta x \cos \theta}{r} = \Delta \theta. \quad (4)$$

把④式代入②式,得

$$\Delta B_x = k I \lambda \Delta \theta. \quad (5)$$

导线排上所有电流产生的磁感应强度

$$B = \sum \Delta B_x = \sum k I \lambda \Delta \theta. \quad (6)$$

注意到 $\sum \Delta \theta = \pi$ ,得

$$B = k \pi \lambda I. \quad (7)$$

即每个导线排中所有电流产生的磁场是匀强磁场,磁场的方向分别与 $M_1 M_2$ 和 $M_3 M_4$ 导线排平行.如图3-3-6所示,两导线排中电流产生的磁感应强度 $B$ ( $M_1 M_2$ )与 $B$ ( $M_3 M_4$ )成 $120^\circ$ ;其合磁场的磁感应强度的大小

$$B_0 = 2B \cos 60^\circ = k \pi \lambda I. \quad (8)$$

方向与 $OO'$ 平行,由 $O$ 点指向 $O'$ 点.

2. 半导体片左右两侧面间的电势差.当半导体片中通有均匀电流 $I_0$ 时,半导体片中的载流子做定向运动, $n$ 型半导体的载流子带负电荷,故其速度 $v$ 的方向与 $I_0$ 方向相反,垂直纸面向里,且有

$$I_0 = nqvS. \quad (9)$$

式中 $S$ 为半导体片横截面的面积:

$$S = ab. \quad (10)$$

载流子做定向运动时,要受到磁场洛伦兹力 $f_B$ 的作用,其大小为

$$f_B = qvB_0. \quad (11)$$

对带负电荷的载流子,此力的方向指向左侧,于是负电荷积聚在左侧面上,从而左侧面带负电,右侧面带正电,两侧面间出现电势差 $U = U_{右} - U_{左}$ .带负电荷的载流子所受到的静电力 $f_E$ 由左侧面指向右侧面.达到稳定时, $f_E$ 与 $f_B$ 平衡,即

$$f_E = \frac{U}{ab} q = f_B. \quad (12)$$

由⑧~⑫各式得

$$U = k \frac{\pi \lambda I I_0}{nql}.$$

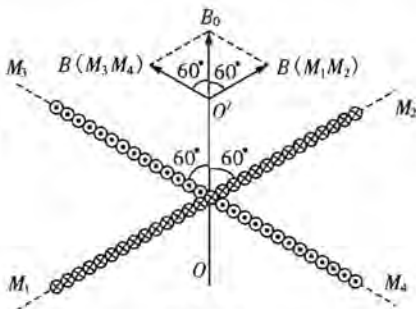


图 3-3-6



**题 3** (2006·全国物理预赛题) 图 3-3-7 为一固定不动的绝缘的圆筒形容器的横截面,其半径为  $R$ ,圆筒的轴线在  $O$  处.圆筒内有匀强磁场,磁场方向与圆筒的轴线平行,磁感应强度为  $B$ .筒壁的  $H$  处开有小孔,整个装置处在真空中.现有一质量为  $m$ 、电荷量为  $q$  的带电粒子  $P$  以某一初速度沿筒的半径方向从小孔射入圆筒,经与筒壁碰撞后又从小孔射出圆筒.设筒壁是光滑的, $P$  与筒壁碰撞是弹性的, $P$  与筒壁碰撞时其电荷量不变.若要使  $P$  与筒壁碰撞的次数最少,问:

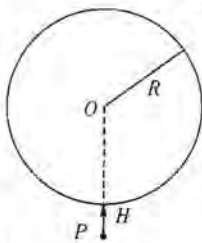


图 3-3-7

(1)  $P$  的速率应为多少?

(2)  $P$  从进入圆筒到射出圆筒经历的时间为多少?

**【分析】** 首先应正确确定最少碰撞次数和粒子在圆筒内相应的轨迹.求解时用到带电粒子在磁场中运动规律和由于对称性所包含的几何关系.

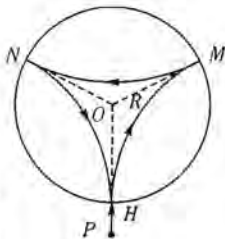


图 3-3-8

**【解】** (1) 如图 3-3-8 所示,设筒内磁场的方向垂直于纸面指向纸外,带电粒子  $P$  带正电,其速率为  $v$ .  $P$  从小孔射入圆筒中因受到磁场的作用力而偏离入射方向,若与筒壁只发生一次碰撞,是不可能从小孔射出圆筒的.但与筒壁碰撞两次,它就有可能从小孔射出.在此情形中, $P$  在筒内的路径由三段等长、等半径的圆弧  $HM$ 、 $MN$  和  $NH$  组成.现考察其中一段圆弧  $MN$ ,如图 3-3-9 所示.由于  $P$  沿筒的半径方向入射, $OM$  和  $ON$  均与轨道相切,两者的夹角

$$\alpha = \frac{2}{3}\pi,$$

设圆弧的圆半径为  $r$ ,则有

$$qvB = m \frac{v^2}{r}.$$

圆弧对轨道圆心  $O$  所张的圆心角

$$\beta = \frac{\pi}{3}.$$

由几何关系得

$$r = R \cot \frac{\beta}{2}. \quad (4)$$

解②③④式得

$$v = \frac{\sqrt{3}qBR}{m}. \quad (5)$$

(2)  $P$  由小孔射入到第一次与筒壁碰撞所通过的路径为

$$s = \beta r. \quad (6)$$

经历时间为

$$t_1 = \frac{s}{v}. \quad (7)$$

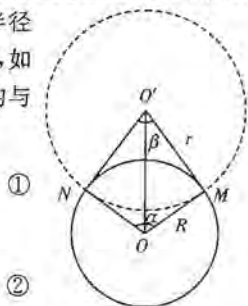


图 3-3-9



$P$  从射入小孔到射出小孔经历的时间为

$$t = 3t_1 \quad (8)$$

由以上有关各式得

$$t = \frac{\pi m}{qB}$$

**题 4** (2004·全国物理预赛题) 测定电子荷质比(电荷  $q$  与质量  $m$  之比  $\frac{q}{m}$ )

的实验装置如图 3-3-10 所示. 真空玻璃管内, 阴极  $K$  发出的电子, 经阳极  $A$  与阴极  $K$  之间的高电压加速后, 形成一束很细的电子流, 电子流以平行于平板电容器极板的速度进入两极板  $C$ 、 $D$  间的区域. 若两极板  $C$ 、 $D$  间无电压, 则离开极板区域的电子将打在荧光屏上的  $O$  点; 若在两极板间加上电压  $U$ , 则离开极板区域的电子将打在荧光屏上的  $P$  点; 若再在极板间加一方向垂直于纸面向外、磁感应强度为  $B$  的匀强磁场, 则打到荧光屏上的电子产生的光点又回到  $O$  点. 现知极板的长度  $l = 5.00 \text{ cm}$ ,  $C$ 、 $D$  间的距离  $d = 1.50 \text{ cm}$ , 极板区的中点  $M$  到荧光屏中点  $O$  的距离为  $L = 12.50 \text{ cm}$ ,  $U = 200 \text{ V}$ ,  $P$  点到  $O$  点的距离  $y = \overline{OP} = 3.0 \text{ cm}$ ,  $B = 6.3 \times 10^{-4} \text{ T}$ . 试求电子的荷质比. (不计重力影响)

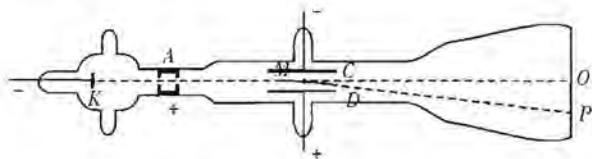


图 3-3-10

**【分析】** 电荷和质量是每一种带电粒子的基本属性. 在确定电场或磁场的空间内, 不同带电粒子因为基本属性不同而有不同的运动状态. 正确分析运动过程, 利用相关力学和电磁学规律就可反推出带电粒子的荷质比. 在现代分析技术中经常通过荷质比的测定来确定粒子的种类.

**【解】** 设电子刚进入平行板电容器极板间区域时的速度为  $v_0$ , 因为速度方向平行于电容器的极板, 通过长度为  $l$  的极板区域所需的时间

$$t_1 = \frac{l}{v_0} \quad (1)$$

当两极板之间加上电压时, 设两极板间的场强为  $E$ , 作用于电子的静电力的大小为  $qE$ , 方向垂直于极板由  $C$  指向  $D$ , 电子的加速度

$$a = \frac{qE}{m} \quad (2)$$

而

$$E = \frac{U}{d} \quad (3)$$

因电子在垂直于极板方向的初速度为零, 因而在时间  $t_1$  内垂直于极板方向的

位移

$$y_1 = \frac{1}{2} a t_1^2. \quad (4)$$

电子离开极板区域时,沿垂直于极板方向的末速度

$$v_y = a t_1. \quad (5)$$

设电子离开极板区域后,电子到达荧光屏上  $P$  点所需时间为  $t_2$ .

$$t_2 = \frac{L - \frac{l}{2}}{v_0}. \quad (6)$$

在  $t_2$  时间内,电子做匀速直线运动,在垂直于极板方向的位移

$$y_2 = v_y t_2. \quad (7)$$

 $P$  点离开  $O$  点的距离等于电子在垂直于极板方向的总位移

$$y = y_1 + y_2. \quad (8)$$

由以上各式得电子的荷质比为

$$\frac{q}{m} = \frac{v_0^2 d}{U l L} y. \quad (9)$$

加上磁场  $B$  后,荧光屏上的光点重新回到  $O$  点,表示在电子通过平行板电容器的过程中电子所受电场力与磁场力相等,即

$$qE = qv_0 B. \quad (10)$$

注意到③式,可得电子射入平行板电容器的速度

$$v_0 = \frac{U}{Bd}. \quad (11)$$

代入⑨式得

$$\frac{q}{m} = \frac{U}{B^2 l L d} y. \quad (12)$$

代入有关数据求得  $\frac{q}{m} = 1.6 \times 10^{11} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

**题 5** (2003·全国物理预赛题) 从  $z$  轴上的  $O$  点发射一束电荷量为  $q (> 0)$ 、质量为  $m$  的带电粒子,它们速度的方向分布在以  $O$  点为顶点、 $z$  轴为对称轴的一个顶角很小的锥体内(如图 3-3-11 所示),速度的大小都等于  $v$ . 试设计一种匀强磁场,能使这束带电粒子会聚于  $z$  轴上的另一点  $M$ ,  $M$  点离开  $O$  点的距离为  $d$ . 要求给出该磁场的方向、磁感应强度的大小和最小值. 不计粒子间的相互作用和重力的作用.



图 3-3-11

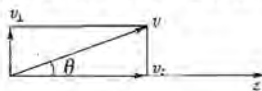


图 3-3-12

**【分析】** 本题所示情况称为“磁聚焦”,此时带电粒子绕  $z$  轴(即磁场方向)作螺旋线运动,当倾角较小时所有粒子在经过一个周期后都将经过  $z$  轴上距  $O$  点距离  $h = v_z T$  的点. 令  $d = nh$  并列相应公式即可求解.

**【解】** 设计的磁场为沿  $z$  轴方向的匀强磁场,  $O$  点和  $M$  点都处于这个磁场中.



下面我们根据题意求出这种磁场的磁感应强度的大小. 粒子由  $O$  点射出就进入了磁场, 可将与  $z$  轴成  $\theta$  角的速度分解成沿磁场方向的分速度  $v_z$  和垂直于磁场方向的分速度  $v_{\perp}$  (见图 3-3-12), 注意到  $\theta$  很小, 得

$$v_z = v \cos \theta \approx v. \quad (1)$$

$$v_{\perp} = v \sin \theta \approx v \theta. \quad (2)$$

粒子因具有垂直磁场方向的分速度, 在洛伦兹力作用下做圆周运动, 以  $R$  表示圆周的半径, 有

$$qBv_{\perp} = m \frac{v_{\perp}^2}{R}.$$

$$\text{圆周运动的周期 } T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}}.$$

$$\text{由此得 } T = \frac{2\pi m}{qB}.$$

可见周期与速度分量  $v_{\perp}$  无关.

粒子因具有沿磁场方向的分速度, 将沿磁场方向做匀速直线运动. 由于两种速度同时存在, 粒子将沿磁场方向作螺旋运动. 螺旋运动螺距为

$$h = v_z T = vT. \quad (4)$$

由于它们具有相同的  $v$ , 因而也就具有相同的螺距; 又由于这些粒子是从同一点射出的, 所以经过整数个螺距 (最小是一个螺距) 又必定会聚于同一点. 只要使  $OM$  等于一个螺距或一个螺距的  $n$  (整数) 倍, 由  $O$  点射出的粒子绕磁场方向旋转一周 (或若干周后) 必定会聚于  $M$  点, 如图 3-3-13 所示.

$$\text{则 } d = nh, n = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

$$\text{由式 } (3)(4)(5) \text{ 解得 } B = \frac{2\pi m v n}{qd}, n = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

这就是所要求磁场的磁感应强度的大小, 最小值应取  $n=1$ , 所以磁感应强度的最小值为

$$B = \frac{2\pi m v}{qd}.$$

**题 6** (2001·全国物理预赛题) 如图 3-3-14 所示, 在半径为  $a$  的圆柱空间中 (图中圆为其横截面) 充满磁感应强度大小为  $B$  的均匀磁场, 其方向平行于轴线远离读者. 在圆柱空间中垂直轴线平面内固定放置一绝缘材料制成的边长为  $L=1.6a$  的刚性等边三角形框架  $\triangle DEF$ , 其中心  $O$  位于圆柱的轴线上.  $DE$  边上  $S$  点 ( $\overline{DS} = \frac{1}{4}L$ ) 处有一发射带电粒子的源, 发射粒子的方向皆在图 3-3-14 中截面内且垂直于  $DE$  边向下. 发射粒子的电荷量皆为  $q$  ( $q>0$ ), 质量皆为  $m$ , 但速度  $v$  有各种不同的数值. 若这些粒子与三角形框架的碰撞均为完全弹性碰撞, 并要求每一次碰撞时速度方向垂直于被碰撞的边. 试问:

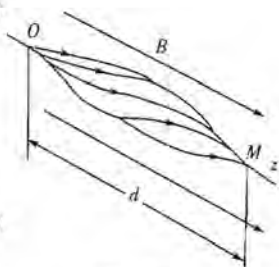


图 3-3-13

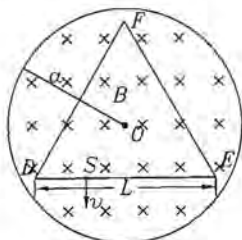


图 3-3-14

(1) 带电粒子速度  $v$  的大小取哪些数值时可使  $S$  点发出的粒子最终又回到  $S$  点?

(2) 这些粒子中, 回到  $S$  点所用的最短时间是多少?

**【分析】** 欲使粒子又回到  $S$  点应同时满足两个条件: 一是  $SE$  边和  $DS$  边的长度均为粒子运动半径  $R$  的奇数倍, 使得  $E, D, F$  三点成为粒子做圆周运动的若干圆心之一; 二是  $R$  应小于等于三角形顶点到磁场边界的距离. 据此可得粒子速度  $v$  应满足的条件, 进而求得最短时间.

**【解】** 带电粒子(以下简称粒子)从  $S$  点垂直于  $DE$  边以速度  $v$  射出后, 在洛伦兹力作用下做匀速圆周运动, 其圆心一定位于  $DE$  边上, 其半径  $R$  可由

$$qvB = \frac{mv^2}{R}$$

求得, 为

$$R = \frac{mv}{qB} \quad (1)$$

(1) 要求此粒子每次与  $\triangle DEF$  的三条边碰撞时都与边垂直, 且能回到  $S$  点, 则  $R$  和  $v$  应满足以下条件:

1) 与边垂直的条件

由于碰撞时速度  $v$  与边垂直, 粒子运动轨迹圆的圆心一定位于三角形的边上, 粒子绕过三角形顶点  $D, E, F$  时的圆弧的圆心就一定要在相邻边的交点(即  $D, E, F$ )上. 粒子从  $S$  点开始向右做圆周运动, 其轨迹为一系列半径为  $R$  的半圆. 在  $SE$  边上最后一轮的碰撞点与  $E$  点的距离应为  $R$ , 所以  $\overline{SE}$  的长度应是  $R$  的奇数倍. 粒子从  $FD$  边绕过  $D$  点转回到  $S$  点时, 情况类似, 即  $\overline{DS}$  的长度也应是轨道半径的奇数倍. 取  $\overline{DS} = R_n$ , 则当  $\overline{DS}$  的长度被奇数除所得的  $R$  也满足要求, 即

$$R = R_n = \frac{\overline{DS}}{(2n-1)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

因此为使粒子与三角形各边发生垂直碰撞,  $R$  必须满足下面的条件:

$$R = R_n = \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{L}{4} = \frac{2a}{5(2n-1)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

此时  $\overline{SE} = 3\overline{DS} = (6n-3)R_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$



$\overline{SE}$ 为 $R_n$ 的奇数倍的条件自然满足. 只要粒子绕过 $E$ 点与 $EF$ 边相碰, 由对称关系可知, 以后的碰撞都能与三角形的边垂直.

### 2) 粒子能绕过顶点与三角形的边相碰的条件

由于磁场局限于半径为 $a$ 的圆柱范围内, 如果粒子在绕 $E$ 点运动时圆轨迹与磁场边界相交, 它将在相交点处以此时的速度方向沿直线运动而不能返回, 所以粒子做圆周运动的半径 $R$ 不能太大. 由图 3-3-15 可见, 必须 $R \leq \overline{DM}$  (三角形的顶点沿圆柱半径到磁场边界的距离,  $R = \overline{DM}$  时, 粒子圆运动轨迹与圆柱磁场边界相切), 由给定的数据可算得

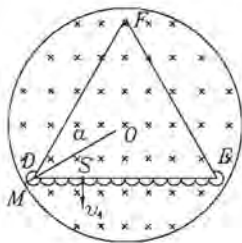


图 3-3-15

$$\overline{DM} = a - \frac{8\sqrt{3}}{15}a \approx 0.076a. \quad (3)$$

将 $n=1, 2, 3, \dots$ 分别代入②式, 得

$$n=1, \quad R_1 = \frac{2a}{5} = 0.400a.$$

$$n=2, \quad R_2 = \frac{2a}{15} = 0.133a.$$

$$n=3, \quad R_3 = \frac{2a}{25} = 0.080a.$$

$$n=4, \quad R_4 = \frac{2a}{35} = 0.057a.$$

由于 $R_1, R_2, R_3 < \overline{DM}$ , 这些粒子在绕过三角形的顶点 $E$ 时, 将从磁场边界逸出, 只有 $n \geq 4$ 的粒子能经多次碰撞绕过 $E, F, D$ 点, 最终回到 $S$ 点. 由此结论及①②两式可得与之相应的速度

$$v_n = \frac{qB}{m}R_n = \frac{qB}{m} \cdot \frac{2a}{5(2n-1)}, \quad n=4, 5, 6, \dots \quad (4)$$

这就是由 $S$ 点发出的粒子与三角形的三条边垂直碰撞并最终又回到 $S$ 点时, 其速度大小必须满足的条件.

(2) 这些粒子在磁场中做圆周运动的周期为

$$T = \frac{2\pi R}{v}.$$

将①式代入,得

$$T = \frac{2\pi m}{qB}. \quad (5)$$

可见在  $B$  及  $\frac{q}{m}$  给定时,  $T$  与  $v$  无关. 粒子从  $S$  点出发最后回到  $S$  点的过程中, 与三角形的边碰撞次数愈少, 所经历的时间就愈少, 所以应取  $n=4$ . 如图 3-3-34 所示(图中只画出在边框  $DE$  上的碰撞情况), 此时粒子的速度为  $v_1$ , 由图可看出该粒子的轨迹包括  $3 \times 13$  个半圆和 3 个圆心角为  $300^\circ$  的圆弧, 所需时间为

$$t = 3 \times 13 \times \frac{T}{2} + 3 \times \frac{5}{6} T = 22T. \quad (6)$$

将⑤式代入,得

$$t = 44 \frac{\pi m}{qB}. \quad (7)$$

**题 7** (2007·全国物理复赛题) 地球赤道表面附近处的重力加速度为  $g_0 = 9.8 \text{ m/s}^2$ , 磁场的磁感应强度的大小  $B_0 = 3.0 \times 10^{-5} \text{ T}$ , 方向沿经线向北. 赤道上空的磁感应强度的大小与  $r^2$  成反比( $r$  为考察点到地球中心的距离), 方向与赤道附近处的磁场方向平行. 假设在赤道上空离地心的距离  $r = 5R_c$  ( $R_c$  为地球半径)处, 存在厚度约为  $10 \text{ km}$  的由等数量的质子和电子组成的等离子层(层内的磁场可视为匀强磁场), 每种粒子的数密度均为  $n = 10^7 / \text{m}^3$ . 由于等离子体的数密度非常低, 带电粒子之间的相互作用可以忽略不计. 已知电子的质量  $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ , 质子的质量  $m_p = 1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$ , 电子电荷量为  $-1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ , 地球的半径  $R_c = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$ .

1. 所考察的等离子层中的电子和质子一方面做无规则运动, 另一方面因受地球引力和磁场的共同作用会形成位于赤道平面内的绕地心的环形电流. 试求此环形电流的电流密度.

2. 现设想等离子层中有些电子和质子, 它们初速度的方向都指向地心, 电子初速度的大小  $u_e = 1.4 \times 10^4 \text{ m/s}$ , 质子初速度的大小  $u_p = 3.4 \times 10^2 \text{ m/s}$ . 试通过定量计算说明这些电子和质子都不可能到达地球表面.

**【分析】** 等离子层中带电粒子运动相当复杂, 一方面是无规则的热运动, 同时又由于引力场和磁场的存在, 又会包含一种具有电流效应的定向漂移运动(与引力相平衡的洛伦兹力对应的速度  $v_0$ )成份, 形成所谓在赤道平面内环绕地心的环形电流. 求解时需建立一个合适的坐标系, 将热运动的速度分解, 仔细分析粒子在各个方向上的受力情况和运动状态, 找到平衡点.

**【解】** 方法 1: 1. 由于等离子层的厚度远小于地球半径, 故在所考察的等离子区域内引力场和磁场都可视为匀强场. 在该区域内, 磁场的磁感应强度

$$B = \left(\frac{R_c}{r}\right)^2 B_0 = \frac{3.0 \times 10^{-5}}{125} \text{ T} = 2.4 \times 10^{-7} \text{ T}. \quad (1)$$

引力加速度



$$g = \left(\frac{R_e}{r}\right)^2 g_0 = \frac{9.8}{25} \text{ m/s}^2 = 0.39 \text{ m/s}^2. \quad (2)$$

考察等离子层中的某一质量为  $m$ 、电荷量为  $q$ 、初速度为  $u$  的粒子,取粒子所在处为坐标原点  $O$ ,作一直角坐标系  $Oxyz$ ,  $Ox$  轴指向地球中心,  $Oz$  沿磁场方向,如图 3-3-16 所示.该粒子的初速度在坐标系中的三个分量分别为  $u_x$ 、 $u_y$  和  $u_z$ .因作用于粒子的引力沿  $x$  轴正方向,作用于粒子的洛伦兹力与  $z$  轴垂直,故粒子在  $z$  轴方向不受力的作用,沿  $z$  轴的分速度保持不变.现设想在初始时刻附加给粒子一沿  $y$  轴正方向、大小为  $v_0$  的速度,同时附加给粒子一沿  $y$  轴负方向、大小为  $v_0$  的速度,要求与其中一个  $v_0$  相联系的洛伦兹力正好与粒子所受的地球引力相平衡,即

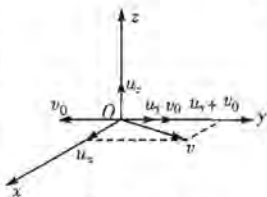


图 3-3-16

$$qv_0 B = mg.$$

得

$$v_0 = \frac{mg}{qB}. \quad (3)$$

用  $v$  表示  $u_x$  与沿  $y$  轴的速度  $u_y \pm v_0$  的合速度(对质子取“+”号,对电子取“-”号),有

$$v = \sqrt{u_x^2 + (u_y \pm v_0)^2}. \quad (4)$$

这样,所考察的粒子的速度可分为三部分:

(1)沿  $z$  轴的分速度  $u_z$ ,其大小和方向都保持不变,但对不同的粒子是不同的,属于等离子层中粒子无规则运动的速度分量.

(2)沿  $y$  轴的速度  $v_0$ :对带正电的粒子,速度的方向沿  $y$  轴负方向;对带负电的粒子,速度的方向沿  $y$  轴正方向.与这一速度联系的洛伦兹力正好和引力抵消,故粒子将以速率  $v_0$  沿  $y$  轴运动.由③式可知,  $v_0$  的大小是恒定的,与粒子的初速度无关,且对同种粒子是相同的.

(3)在  $Oxy$  平面内的速度  $v$ ,与其联系的洛伦兹力使粒子在  $Oxy$  平面内做速率为  $v$  的匀速圆周运动.若以  $R$  表示圆周轨道的半径,则有

$$qvB = m \frac{v^2}{R}.$$

得

$$R = \frac{mv}{qB}. \quad (5)$$

由④⑤两式可知,轨道半径不仅与粒子的质量有关,而且与粒子初速度的  $x$  分量  $u_x$  和  $y$  分量  $u_y$  有关.圆周运动的速度方向是随时间变化的,在圆周运动的一个周期内平均速度等于零.

由此可见,等离子层内电子和质子的运动虽然相当复杂,但每个粒子都具有由



③式给出的速度  $v_0$ , 其方向垂直于粒子所在处的地球引力方向, 对电子, 方向向西; 对质子, 方向向东. 电子和质子的这种运动称为漂移运动, 对应的速度称为漂移速度. 漂移运动是粒子的定向运动, 电子和质子的定向运动就形成了环绕地球中心的环形电流.

由③和①②三式以及有关数据可得, 电子和质子的漂移速度分别为

$$u_{0e} = 9.2 \times 10^{-6} \text{ m/s}, \quad (6)$$

$$u_{0p} = 1.7 \times 10^{-2} \text{ m/s}. \quad (7)$$

由于电子和质子漂移速度的方向相反, 电荷异号, 它们产生的电流方向相同, 均匀沿纬度向东. 根据电流密度的定义, 有

$$j = nq(v_{0p} + v_{0e}), \quad (8)$$

代入有关数据, 得

$$j = 2.8 \times 10^{-14} \text{ A/m}^2, \quad (9)$$

方向沿纬度向东.

2. 第1小题的讨论表明, 粒子在  $Oxy$  平面内做圆周运动; 运动的速率由(4)式给出, 它与粒子初速度有关. 对初速度方向指向地心的粒子, 圆周运动的速率为

$$v = \sqrt{u_x^2 + v_0^2}. \quad (10)$$

由①~③, ⑤, ⑩各式, 并代入题目所给的有关数据可得, 电子和质子的轨道半径分别为

$$R_e = 0.33 \text{ m}, \quad (11)$$

$$R_p = 14.8. \quad (12)$$

以上的计算表明, 虽然粒子具有沿引力方向的初速度, 但由于粒子还受到磁场的作用, 电子和质子在地球半径方向的最大下降距离分别为  $2R_e = 0.66 \text{ m}$  和  $2R_p = 29.6 \text{ m}$ , 均远小于等离子层的厚度; 所考察的电子和质子仍在等离子层内运动, 不会落到地面上.

方法 2: 1. 由于等离子层的厚度远小于地球半径, 故在所考察的等离子区域内引力场和磁场都可视为匀强场. 在该区域内, 磁场的磁感应强度

$$B = \left(\frac{R_0}{r}\right)^3 B_0 = \frac{3.0 \times 10^{-5}}{125} \text{ T} = 2.4 \times 10^{-7} \text{ T}. \quad (1)$$

引力加速度

$$g = \left(\frac{R_0}{r}\right)^2 g_0 = \frac{9.8}{25} \text{ m/s}^2 = 0.39 \text{ m/s}^2. \quad (2)$$

考查等离子层中的某一质量为  $m$ 、电荷量为  $q$ 、初速度为  $u$  的粒子, 取粒子所在处为坐标原点  $O$ , 作一直角坐标系  $Oxyz$ ,  $Ox$  轴指向地球中心,  $Oz$  沿磁场方向, 如图 3-3-17 所示. 该粒子的初速度在坐标系中的三个分量分别为  $u_x$ ,  $u_y$  和  $u_z$ . 若以  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  分别表示粒子在任意时刻  $t$  的速度  $v$  在  $x$ ,  $y$  和  $z$  轴方向的分速度, 则带电粒子在引力和洛伦兹力共同作用下的运动方程为



$$m \frac{dv_z}{dt} = mg + qv_y B = qB \left( v_y + \frac{mg}{qB} \right). \quad (3)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = -qv_x B. \quad (4)$$

$$m \frac{dv_x}{dt} = 0. \quad (5)$$

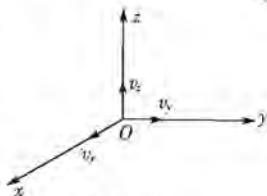


图 3-3-17

⑤式表明,所考察粒子的速度  $x$  轴上的分量保持不变,即

$$v_x = u_x. \quad (6)$$

做变量代换,令

$$V_x = v_x, V_y = v_y + v_0. \quad (7)$$

其中

$$v_0 = \frac{mg}{qB}. \quad (8)$$

把⑦⑧两式代入③④两式,得

$$m \frac{dV_x}{dt} = qBV_y, \quad (9)$$

$$m \frac{dV_y}{dt} = -qV_x B. \quad (10)$$

由⑨⑩两式可知,作用于粒子的力  $F$  在  $x$  和  $y$  方向的分量分别为

$$F_x = qBV_y, F_y = -qBV_x.$$

若用  $\theta_1$  表示  $F$  的方向与  $x$  轴的夹角,  $\theta_2$  表示  $V$  的方向与  $x$  轴的夹角,而  $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$ ,则有

$$\tan\theta_1 = \frac{F_y}{F_x} = -\frac{V_x}{V_y}, \tan\theta_2 = \frac{V_y}{V_x}.$$

可见,  $\tan\theta_1 \tan\theta_2 = -1$ ,表明  $F$  的方向与  $V$  的方向垂直,粒子将在  $F$  的作用下在  $Oxy$  平面内作速率为  $V$  的匀速圆周运动.若以  $R$  表示圆周的半径,则有

$$qVB = m \frac{V^2}{R},$$

即

$$R = \frac{mV}{qB}. \quad (11)$$

在匀速圆周运动中,  $V$  的大小是不变的,即任何时刻  $V$  的值也就是  $t=0$  时刻  $V$  的值.由⑦式和已知条件,在  $t=0$  时刻有

$$V_x = u_x, V_y = u_y + v_0,$$

故有

$$V = \sqrt{u_x^2 + (u_y + v_0)^2}. \quad (12)$$

以上讨论表明,粒子的运动可分成三部分:

(1)根据⑥式可知,粒子沿  $z$  轴的分速度大小和方向都保持不变,但对不同的粒子是不同的,属于等离子层中粒子无规则运动的速度分量.

(2)根据⑦式可得,  $v_x = V_x$ ,  $v_y = V_y - v_0$ . 这表明粒子在  $Oxy$  平面内以速率  $V$  做圆周运动的同时,又以速度  $v_0$  沿  $y$  轴运动.  $V_x$ 、 $V_y$  分别是圆周运动速度的  $x$  分量和  $y$  分量. 圆周运动的轨道半径不仅与粒子的质量有关,而且与粒子初速度的  $x$  分量  $u_x$  和  $y$  分量  $u_y$  有关. 圆周运动的速度方向是随时间变化的,在圆周运动的一个周期内的平均速度等于零.

(3)沿  $y$  轴的速度  $v_0$  由⑧式给出,其大小是恒定的,与粒子的初速度无关,且对同种粒子是相同的:对带正电的粒子,其方向沿  $y$  轴负方向;对带负电的粒子,其方向沿  $y$  轴正方向.

由此可见,等离子层内电子和质子的运动虽然相当复杂,但每个粒子都具有由⑧式给出的速度  $v_0$ ,其方向垂直于粒子所在处的地球引力方向:对于电子,方向向西;对于质子,方向向东. 电子和质子的这种运动称为漂移运动,对应的速度称为漂移速度. 漂移运动是粒子的定向运动,电子和质子的定向运动就形成了环绕地球中心的环形电流.

由⑧和①②三式以及有关数据可得,电子和质子的漂移速度分别为

$$v_{0e} = 9.2 \times 10^{-6} \text{ m/s.} \quad (13)$$

$$v_{0p} = 1.7 \times 10^{-2} \text{ m/s.} \quad (14)$$

由于电子和质子漂移速度的方向相反,电荷异号,它们产生的电流方向相同,均为沿纬度向东. 根据电流密度的定义,有

$$j = nq(v_{0p} + v_{0e}). \quad (15)$$

代入有关数据,得

$$j = 2.8 \times 10^{-11} \text{ A/m}^2, \quad (16)$$

方向沿纬度向东.

2. 第1小题的讨论表明,粒子在  $Oxy$  平面内做圆周运动;运动的速率由⑫式给出,它与粒子的初速度有关. 对初速度方向指向地心的粒子,圆周运动的速率为

$$V = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}. \quad (17)$$

因题目所给出的电子与质子的初速度  $u_x$  是不同的,电子和质子的质量也是不同的,故电子和质子在  $Oxy$  平面内做圆周运动的半径也是不同的. 由①②⑧⑩⑪各式,并代入有关数据可得,电子和质子的轨道半径分别为

$$R_e = 0.33 \text{ m.}$$

$$R_p = 14.8 \text{ m.}$$

以上的计算表明,虽然粒子具有沿引力方向的初速度,但由于粒子还受到磁场的作用,电子和质子在地球半径方向的最大下降距离分别为  $2R_e = 0.66 \text{ m}$  和  $2R_p = 29.6 \text{ m}$ ,均远小于电离层的厚度;所考察的电子和质子仍在等离子层内运动,不会落到地面上.



**题 8** (2000·全国物理复赛题) 如图 3-3-18 所示, 在真空中建立一坐标系, 以水平向右为  $x$  轴正方向, 竖直向下为  $y$  轴正方向,  $z$  轴垂直纸面向里. 在  $0 \leq y \leq L$  的区域内有匀强磁场,  $L=0.80 \text{ m}$ , 磁感应强度的方向沿  $z$  轴的正方向, 其大小  $B=0.10 \text{ T}$ . 今把一荷质比  $\frac{q}{m}=50 \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}$  的带

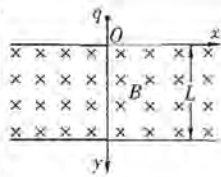


图 3-3-18

正电质点在  $x=0, y=-0.20 \text{ m}, z=0$  处静止释放, 将带电质点过原点的时刻定为  $t=0$  时刻, 求带电质点在磁场中任一时刻  $t$  的位置坐标. 并求它刚离开磁场时的位置和速度.  $g$  取  $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

**【分析】** 带电粒子进入磁场后, 在重力、洛伦兹力的作用下做曲线运动. 根据运动的合成与分解原理, 可把本题中的曲线运动看成沿  $x$  轴方向的匀速直线运动和  $xOy$  平面内的匀速圆周运动的合运动, 也可看成沿  $x$  轴方向的匀速直线运动和沿  $x$  轴、 $y$  轴两个简谐运动的合运动. 因此求解的关键是: 前者设法求出匀速运动的速度和匀速圆周运动的线速度、角速度、半径, 后者设法求出匀速运动的速度和简谐运动的振幅、角频率和初相.

**【解】** 方法 1: 带电质点静止释放时, 受重力作用做自由落体运动, 当它到达坐标原点时, 速度为

$$v_1 = \sqrt{2g|y|} = 2.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (1)$$

方向竖直向下. 带电质点进入磁场后, 除受重力作用外, 还受到洛伦兹力作用, 质点速度的大小和方向都将变化, 洛伦兹力的大小和方向亦随之变化. 我们可以设想: 在带电质点到达原点时, 给质点附加上沿  $x$  轴正方向和负方向两个大小都是  $v_0$  的初速度, 由于这两个方向相反的速度的合速度为零, 因而不影响带电质点以后的运动. 在  $t=0$  时刻, 带电质点因具有沿  $x$  轴正方向的初速度  $v_0$  而受洛伦兹力  $f_1$  的作用, 则

$$f_1 = qv_0B. \quad (2)$$

其方向与重力的方向相反. 适当选择  $v_0$  的大小, 使  $f_1$  等于重力, 即

$$qv_0B = mg. \quad (3)$$

$$v_0 = \frac{mg}{Bq} = 2.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (4)$$

只要带电质点保持④式决定的  $v_0$  沿  $x$  轴正方向运动,  $f_1$  与重力的合力永远等于零. 但此时, 位于坐标原点的带电质点还具有竖直向下的速度  $v_1$  和沿  $x$  轴负方向的速度  $v_0$ , 两者的合成速度大小为

$$v = \sqrt{v_0^2 + v_1^2} = 2.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (5)$$

方向指向左下方. 设它与  $x$  轴的负方向的夹角为  $\alpha$ , 如图 3-3-19 所示, 则

$$\tan \alpha = \frac{v_1}{v_0} = 1.$$

$$\text{得} \quad \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

因而带电质点从  $t=0$  时刻起的运动可以看做是速率为  $v_0$ , 沿  $x$  轴的正方向的匀速直线运动和在  $xOy$  平面内速率为  $v$  的匀速圆周运动的合成. 圆周半径

$$R = \frac{mv}{qB} = 0.56 \text{ m}. \quad (7)$$

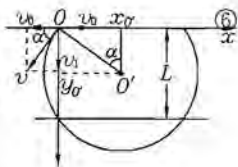


图 3-3-19

带电质点进入磁场瞬间所对应的圆周运动的圆心  $O'$  位于垂直于质点此时速度  $v$  的直线上, 由图 3-3-19 可知, 其坐标为

$$\begin{cases} x_{O'} = R \sin \alpha = 0.40 \text{ m}. \\ y_{O'} = R \cos \alpha = 0.40 \text{ m}. \end{cases} \quad (8)$$

圆周运动的角速度

$$\omega = \frac{v}{R} = 5.0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (9)$$

由图 3-3-19 可知, 在带电质点离开磁场区域前的任何时刻  $t$ , 质点位置的坐标为

$$x = v_0 t - [R \sin(\omega t + \alpha) - x_{O'}]. \quad (10)$$

$$y = y_{O'} - R \cos(\omega t + \alpha), \quad (11)$$

式中  $v_0, R, \omega, \alpha, x_{O'}, y_{O'}$  已分别由④⑦⑨⑥⑧各式给出.

带电质点到达磁场区域下边界时,  $y=L=0.80 \text{ m}$ , 代入⑪式, 再代入有关数值, 解得

$$t = 0.31 \text{ s}. \quad (12)$$

将⑫式代入⑩式, 再代入有关数值得

$$x = 0.63 \text{ m}. \quad (13)$$

所以带电质点离开磁场下边界时的位置的坐标为

$$x = 0.63 \text{ m}, y = 0.80 \text{ m}, z = 0. \quad (14)$$

带电质点在磁场内的运动可分解成 1 个速率为  $v$  的匀速圆周运动和 1 个速率为  $v_0$  的沿  $x$  轴正方向的匀速直线运动, 任何时刻  $t$ , 带电质点的速度  $V$  便是匀速圆周运动速度  $v$  与匀速直线运动的速度  $v_0$  的合速度. 若圆周运动的速度在  $x$  方向和  $y$  方向的分量为  $v_x, v_y$ , 则质点合速度在  $x$  方向和  $y$  方向的分速度分别为

$$V_x = v_x + v_0. \quad (15)$$

$$V_y = v_y. \quad (16)$$

虽然  $\sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v$ ,  $v$  由⑤式决定, 其大小是恒定不变的,  $v_0$  由④式决定, 也是恒定不变的, 但在质点运动过程中因  $v$  的方向不断变化, 它在  $x$  方向和  $y$  方向的分量  $v_x$  和  $v_y$  都随时间变化, 因此  $V_x$  和  $V_y$  也随时间变化, 取决于所考察时刻质点做圆周运动速度的方向. 由于圆周运动的圆心的  $y$  坐标恰为磁场区域宽度的一半, 由对称性可知, 带电质点离开磁场下边缘时, 圆周运动的速度方向应指向右下方,



与  $x$  轴正方向夹角  $\alpha' = \frac{\pi}{4}$ , 故代入数值得

$$v_x = v \cos \alpha' = 2.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$v_y = v \sin \alpha' = 2.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

将以上两式及④式代入⑮⑯式, 便得带电质点刚离开磁场区域时的速度分量, 它们分别为

$$V_x' = 4.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$V_y' = 2.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

速度大小为

$$V = \sqrt{V_x'^2 + V_y'^2} = 4.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

设  $V$  的方向与  $x$  轴的夹角为  $\beta$ , 如图 3-3-20 所示, 则

$$\tan \beta = \frac{V_y'}{V_x'} = \frac{1}{2}.$$

得

$$\beta = 27^\circ.$$

方法 2: 若以带电质点到达坐标原点  $O$  的时刻作为起始时刻 ( $t=0$ ), 则质点的初速度为

$$v_0 = \sqrt{2g|y|} = 2.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad (1')$$

方向沿  $y$  轴正方向. 进入磁场区后, 带电质点将受到洛伦兹力作用, 洛伦兹力在  $x$  方向的分力取决于质点在  $y$  方向的分速度, 因此质点动量在  $x$  方向的分量的增量为

$$m \Delta v_x = q v_y B \Delta t = q \Delta y B. \quad (2')$$

$\Delta y$  是带电质点在  $\Delta t$  时间内沿  $y$  方向的位移, 质点在磁场中运动的整个过程中, 此式对每一段  $\Delta t$  时间都成立, 所以在  $t=0$  到  $t=t$  时间内  $x$  方向的动量的改变为

$$m v_x - m v_{0x} = q B (y - y_0).$$

因初始时刻 ( $t=0$ ), 带电质点在  $x$  轴方向的动量  $m v_{0x}$  为零, 其位置在  $y_0 = 0$ , 因而得

$$m v_x = q y B,$$

即

$$v_x = \frac{qB}{m} y. \quad (3')$$

当带电质点具有  $x$  方向的分速度后, 便立即受到沿  $y$  负方向的洛伦兹力的作用. 根据牛顿第二定律, 在  $y$  方向上有加速度  $a_y$ , 则

$$m a_y = mg - q v_x B. \quad (4')$$

将③'式代入④'式, 得

$$m a_y = -\frac{(qB)^2}{m} \left( y - \frac{m^2}{q^2 B^2} g \right). \quad (5')$$

令

$$y' = y - D, \quad (6')$$

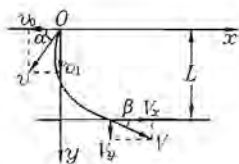


图 3-3-20

式中

$$D = \frac{m^2 g}{(qB)^2} = \frac{g}{\left(\frac{q}{m}\right)^2 B^2} = 0.40 \text{ m.} \quad (7')$$

即在  $y$  方向作用于带电质点的合力

$$F_y = -ky'.$$

其中

$$k = \frac{q^2 B^2}{m}.$$

$F_y$  是准弹性力, 在  $F_y$  作用下, 带电质点在  $y'$  方向的运动是简谐运动, 振动的角频率

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\left(\frac{qB}{m}\right)^2} = 5.0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (8')$$

$y'$  随时间变化的规律为

$$y' = A \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (9')$$

或

$$y = A \cos(\omega t + \varphi_0) + D. \quad (10')$$

$A$  与  $\varphi$  是待求的常量. 质点的简谐运动可以用参考圆来描写, 以所考查的简谐运动的振幅  $A$  为半径作一个圆. 过圆心  $O_1$  作一直角坐标系  $O_1 x' y'$ . 若有一质点  $M$  沿此圆周做匀速率圆周运动, 运动的角速度等于所考查简谐运动的角频率  $\omega$ , 且按逆时针方向转动, 在  $t=0$  时刻,  $M$  点在圆周上的位置恰使连线  $O_1 M$  与  $y'$  轴的夹角等于  $(9')$  式中的常量  $\varphi_0$ , 则在任意时刻  $t$ ,  $O_1$  与  $M$  的连线与  $y'$  轴的夹角等于  $\omega t + \varphi_0$ , 于是连线  $O_1 M$  在  $y'$  轴上的投影即为  $(9')$  式所示的简谐运动. 将  $x'$  轴平行下移

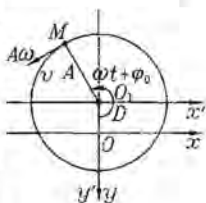


图 3-3-21

$D=0.40 \text{ m}$ , 连线  $O_1 M$  在  $y$  轴的投影即如  $(10')$  式所示 (参看图 3-3-21)  $M$  点做圆周运动的速度大小  $v=A\omega$ , 方向与  $O_1 M$  垂直, 速度  $v$  的  $y$  分量就是带电质点沿  $y$  轴做简谐运动的速度, 即

$$v_y = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (11')$$

$(10')$  和  $(11')$  两式中的  $A$  和  $\varphi_0$  可由下面的方法求得: 因为已知在  $t=0$  时, 带电质点位于  $y=0$  处, 速度  $v_y = v_1$ , 把这条件代入  $(10')$  式与  $(11')$  式得

$$A \cos \varphi_0 + D = 0.$$

$$v_1 = -A\omega \sin \varphi_0.$$

解上面两式, 结合  $(1)$ 、 $(7)$ 、 $(8)$  式, 注意到振幅  $A$  总是正的, 故得

$$\varphi_0 = \frac{5\pi}{4}, \quad (12')$$

$$A = 0.56 \text{ m.} \quad (13')$$

把  $(10')$  式代入  $(3)$  式, 使得带电质点沿  $x$  轴运动的速度

$$v_x = \omega D + A\omega \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (14')$$



⑭'式表示带电质点在  $x$  方向上的速度是由两个速度合成的,即沿  $x$  方向的匀速运动速度  $\omega D$  和  $x$  方向的简谐运动速度  $A\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$  的合成. 带电质点沿  $x$  方向的匀速运动的位移

$$x' = \omega Dt, \quad (15')$$

由沿  $x$  方向的简谐运动速度  $A\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$  可知,沿  $x$  方向振动位移的振幅等于速度的最大值与角频率的比值(参看图 3-3-21),即等于  $A$ . 由参考圆方法可知,沿  $x$  方向的振动的位移  $x''$  具有形式

$$A\cos\left(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right) = A\sin(\omega t + \varphi_0).$$

它可能是  $x'' = A\sin(\omega t + \varphi_0)$ ,亦可能是  $x'' - b = A\sin(\omega t + \varphi_0)$ . 在本题中,  $t=0$  时刻,  $x$  应为零,故前一表达式不符合题意;后一表达式中,  $b$  应取的值为  $b = -A\sin\varphi_0$ , 故有

$$x'' = -A\sin\varphi_0 + A\sin(\omega t + \varphi_0). \quad (16')$$

带电质点在  $x$  方向的合位移  $x = x' + x''$ , 由⑮'⑯'式,得

$$x = \omega Dt - A\sin\varphi_0 + A\sin(\omega t + \varphi_0). \quad (17')$$

⑰'⑱'⑲'⑳'式分别给出了带电质点在离开磁场区域前任何时刻  $t$  的位置坐标和速度的  $x$  分量与  $y$  分量,式中常量  $\omega$ 、 $A$ 、 $\varphi_0$ 、 $D$  已分别由⑧'⑬'⑭'和⑦'式给出.

当带电质点到达磁场的下边界时,

$$y = L = 0.80 \text{ m}. \quad (18')$$

将与⑱'式有关的数据代入⑲'式,可解得

$$t = 0.31 \text{ s}. \quad (19')$$

代入⑲'式,得

$$x \approx 0.63 \text{ m}.$$

将⑱'式分别代入⑲'式与⑳'式,得

$$v_x = 4.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, v_y = 2.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

速度大小为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 4.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

速度方向为

$$\alpha = \arctg\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = 27^\circ.$$

**【讨论】** 通过本题的求解,要学会研究物理的一种最基本的思维方法:把复杂运动看成几个简单运动(例如匀速直线运动、初速为零的匀加速直线运动、匀速圆周运动、简谐运动……)的合运动.

**题 9** (2004·全国物理竞赛题) 如图 3-3-22 所示,  $K$  为一带电粒子发生器,从中可以不断地射出各种不同速率的带电粒子,它们都带正电,电荷量为  $q$ , 质量为  $m$ , 速度的方向都沿图中的虚线,  $D_1$ 、 $D_2$  为两块挡板,可定时开启和关闭.  $C_1$ 、 $C_2$  为两扇“门”,  $C_1$  紧靠  $D_1$ , 两门之间的距离为  $l$ , 两个门上都加上交变电压  $u = U_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ ,  $T$  为交变电压的周期. 已知只有当门上电压的值为零附近的无限



短的时间内,粒子才能通过该门, $G$ 为能量增减器,它紧靠挡板 $D_2$ ,到门 $C_2$ 的距离为 $\frac{l}{2}$ .当带电粒子在 $t$ 时刻通过 $G$ 时,粒子可获得一定的能量 $\Delta E_t = E_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{4}\right)$ ,但速度的方向不变,式中 $E_0 = \frac{\sqrt{2}}{4} \times m \frac{l^2}{T^2}$ .通过 $G$ 的粒子从 $O$ 点进入 $G$ 右侧的匀强磁场区域,磁场的磁感应强度大小为 $B$ ,方向垂直纸面向里(整个装置都放在真空中).在磁场区建立以 $O$ 作为原点的如图3-3-22所示的直角坐标系 $xOy$ , $MN$ 为磁场区域的边界,它平行于 $x$ 轴.现在 $t=0$ 的时刻,同时打开 $D_1$ 与 $D_2$ ,让粒子进入 $C_1$ ,在 $t = \frac{3T}{4}$ 时刻,关闭挡板 $D_1$ ,使粒子无法进入 $C_1$ ;在 $t = \frac{10T}{4}$ 时刻,再关闭挡板 $D_2$ ,使粒子无法进入 $G$ .已知从 $O$ 进入磁场中速度最大的粒子经过坐标为 $(3, 3)$ 的 $Q$ 点.问:假如要使从 $O$ 进入磁场中速度最小的粒子能经过 $Q$ 点,则应将磁场边界 $MN$ 在 $xOy$ 平面内平移到什么位置?

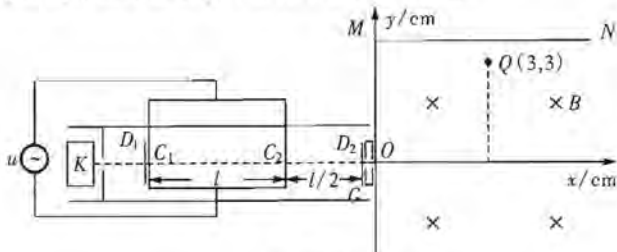


图3-3-22

**【分析】** 求解应分两步进行,首先确定能进入磁场的粒子速度情况,仔细研究挡板 $D_1$ 、 $D_2$ 及 $C_1$ 、 $C_2$ 两门的作用后发现:这些装置实际起到速率选择的作用.第二步确定磁场边界,不同速度的带电粒子进入同一磁场后将做半径不同的圆周运动,如速度最大的粒子经过 $Q$ 点,则其他速度的粒子就不可能经过 $Q$ 点,但如果将磁场边界向下平移,则有可能使速度较小的粒子未能完成半个圆周运动就穿出磁场,沿轨迹圆的切线方向到达 $Q$ 点,设磁场下移后的边界 $M'N'$ 与速度最小粒子的圆轨道的交点为 $P$ ,而过 $P$ 点的切线又恰能经过 $Q$ 点,寻找满足上述条件的 $P$ 点是求解第二步的关键.

**【解】** 1. 讨论进入磁场区域的粒子的速度

在 $t=0$ 的时刻打开 $D_1$ ,由 $u = U_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ 可知,此时 $C_1$ 的电压 $u=0$ ,各种不同速率的粒子都能通过 $C_1$ .如果通过 $C_1$ 的粒子到达 $C_2$ 的时刻为 $t = \frac{T}{2}$ 或 $\frac{T}{2}$ 的整数倍,则此时 $C_2$ 的电压恰好为零,这些粒子又能通过 $C_2$ ,故通过 $C_1$ 的粒子若能通过 $C_2$ ,其速度 $v_n$ 应满足条件

$$\frac{l}{v_n} = n \frac{T}{2}. \quad (n=1, 2, \dots) \quad \textcircled{1}$$



由此可得在  $t=0$  时刻通过  $C_1$  后又能通过  $C_2$  的这些粒子的速度为

$$v_n = \frac{2l}{nT}. \quad (n=1, 2, \dots) \quad (2)$$

速度为  $v_n$  的粒子由  $C_1$  到  $C_2$  经历时间

$$\Delta t_{n1} = \frac{1}{2} nT. \quad (3)$$

由  $C_2$  到  $G$  经历的时间 
$$\Delta t_{n2} = \frac{1}{2v_n}. \quad (4)$$

由此可得粒子到  $G$  的时刻

$$t_n = \Delta t_{n1} + \Delta t_{n2} = \frac{3}{4} nT. \quad (5)$$

因为当  $t = \frac{10T}{4}$  时,  $D_2$  关闭, 故只有当

$$t_n \leq \frac{10}{4} T. \quad (6)$$

粒子才能通过  $G$  并进入磁场区域. 根据⑤⑥式, 注意到  $n$  为整数, 可知  $n$  的最大值为

$$n_{\max} = 3. \quad (7)$$

这些粒子进入磁场时的能量为

$$E_n = \frac{1}{2} m v_n^2 + E_0 \sin \left[ \frac{2\pi}{T} \left( \frac{3\pi}{4} T \right) + \frac{\pi}{4} \right]. \quad (n=1, 2, 3) \quad (8)$$

这些粒子的能量分别为

$$E_1 = \frac{7}{4} \frac{ml^2}{T^2}, E_2 = \frac{1}{4} \frac{ml^2}{T^2}, E_3 = \frac{17}{36} \frac{ml^2}{T^2}. \quad (9)$$

在  $t = \frac{T}{2}$  时刻  $C_1$  的电压  $u=0$ , 各种不同速率的粒子又能通过  $C_1$ , 对速率  $v_n'$  满足条件

$$\frac{1}{v_n'} = \frac{n}{2} T. \quad (n=1, 2, \dots) \quad (10)$$

的粒子又能通过  $C_2$ , 这些粒子的速率为

$$v_n' = \frac{2l}{nT}. \quad (n=1, 2, \dots) \quad (11)$$

由  $C_1$  到  $C_2$  经历的时间和由  $C_2$  到  $G$  经历的时间分别为

$$\Delta t_{n1}' = \frac{n}{2} T, \Delta t_{n2}' = \frac{n}{4} T. \quad (12)$$

到达  $G$  的时刻

$$t_n' = \frac{T}{2} + \Delta t_{n1}' + \Delta t_{n2}' = \frac{3n+2}{4} T. \quad (13)$$

因为在  $t = \frac{10T}{4}$  时  $D_2$  关闭, 故有

$$t_n' \leq \frac{10}{4} T. \quad (14)$$

由⑬和⑭式,注意到  $n$  为整数,得

$$n_{\max} = 2. \quad (15)$$

这些粒子进入磁场时具有的能量为

$$E_n' = \frac{1}{2} m v_2'^2 + E_0 \sin \left[ \frac{2\pi}{T} \left( \frac{3n+2}{4} \right) T + \frac{\pi}{4} \right]. \quad (n=1,2) \quad (16)$$

进入磁场的粒子的能量分别为

$$E_1' = \frac{9}{4} \frac{m l^2}{T^2}, E_2' = \frac{3}{4} \frac{m l^2}{T^2}. \quad (17)$$

由于在  $t = \frac{3T}{4}$  时  $D_1$  已关闭,以后无粒子再能进入  $C_1$ ,由⑯⑰式可知,进入磁场的

粒子的能量的最大值为  $E_1'$ ,对应的速度  $v_1'$  最大,由  $E_1' = \frac{1}{2} M v_1'^2$ ,得

$$v_1' = \sqrt{\frac{9}{2}} \frac{l}{T}. \quad (18)$$

进入磁场的粒子的能量的最小值为  $E_2'$ ,对应的速度  $v_2$  最小,同理得

$$v_2 = \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{l}{T}. \quad (19)$$

## (2) 确定磁场边界

如图 3-3-23 所示,在磁场区建立的直角坐标系中,已知从  $O$  进入磁场速度最大的粒子经过坐标为  $(3,3)$  的  $Q$  点,由⑱⑲式知:进入磁场的粒子最大的速度  $v_1'$  是最小的速度  $v_2$  的 3 倍,此两粒子进入磁场后它们的圆轨迹半径  $R_1'$  和  $R_2$ ,有关系  $R_1' = 3R_2$  因速度为  $v_1'$  的粒子的圆轨道过坐标原点  $O$ ,且与  $x$  轴相切,又过  $Q$  点,由此可求得

$$R_1' = 3 \text{ cm}.$$

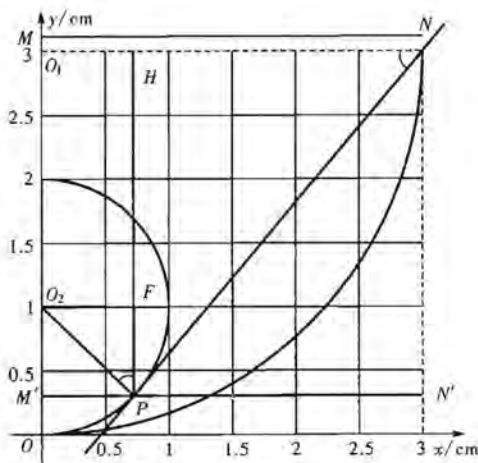


图 3-3-23



其圆心  $O_1'$  的坐标为  $(0, 3)$ , 故知速度最小粒子的圆轨道半径

$$R_2 = 1 \text{ cm.}$$

$O_2$  应在坐标为  $(0, 1)$  处, 其轨道圆方程为

$$x^2 + (y-1)^2 = 1. \quad (20)$$

过  $Q$  点作此圆的切线, 设切点  $P$  的坐标为  $(x_P, y_P)$ , 若此粒子在  $P$  点以速度  $v_2$  进入无磁场区域, 则它将沿直线  $PQ$  到达  $Q$  点,  $P$  点一定在磁场区域的边界上.

现在求  $P$  点的坐标. 因  $O_2P$  垂直于  $PQ$ , 由  $P$  点作  $O_1'Q$  的垂线交于  $H$  点, 由  $O_2$  点作  $PH$  的垂线交于  $F$  点,  $\triangle O_2PF$  与  $\triangle PQH$  相似, 因而有

$$\frac{O_2F}{PF} = \frac{PH}{HQ}. \quad (21)$$

$$\text{即} \quad \frac{x_P}{(1-x_P)} = \frac{(3-y_P)}{(3-x_P)}. \quad (22)$$

$$\text{得} \quad x_P^2 + y_P^2 - 4y_P = 3x_P - 3.$$

经配方得

$$x_P^2 + (y_P - 1)^2 - 2y_P - 1 = 3x_P - 3.$$

因  $P$  点坐标  $(x_P, y_P)$  满足 (20) 式, 故得

$$-2y_P = 3x_P - 3.$$

$$y_P = \frac{3}{2}(1-x_P). \quad (23)$$

代入 (20) 式, 可求得  $P$  点的  $y$  坐标为

$$y_P = 0.354 \text{ cm.}$$

因此, 只要将磁场的区域边界  $MN$  平行下移到过  $P$  点, 即图中的  $M'N'$ , 速度为  $v_2$  的粒子在  $P$  点穿出磁场, 它将沿轨迹圆的切线方向到达  $Q$  点.

**题 10** (2003·全国物理决赛题) 如 3-3-24 所示,  $y$  轴右边存在磁感应强度为  $2B_0$  的匀强磁场,  $y$  轴左边存在磁感应强度为  $B_0$  的匀强磁场, 它们的方向皆垂直于纸面向里. 在原点  $O$  处, 一个带正电的电荷量为  $q$ 、质量为  $m$  的粒子  $a$ , 在  $t=0$  时以大小为  $2v_0$  的初速度沿  $x$  轴方向运动. 在粒子  $a$  开始运动后, 另一质量和电荷量都与  $a$  相同的粒子  $b$  从原点  $O$  以大小为  $v_0$  的初速度沿负  $x$  轴方向开始运动. 要想使  $a$  和  $b$  能在运动过程中相遇, 试分析和计算它们出发的时间差的最小值应为多大, 并求出与此对应的相遇地点的坐标. 设整个磁场区域都处于真空中, 且不考虑重力及  $a, b$  两粒子之间的相互作用力.

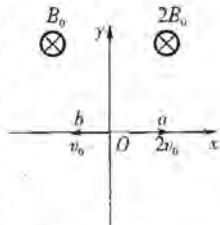


图 3-3-24

**【分析】** 粒子在  $y$  轴左右两侧做匀速圆周运动的周期  $T$  和半径  $R$  是不同的, 首先应根据题给条件正确画出  $a, b$  两粒子在  $xOy$  平面内运动的轨迹, 只有在两轨迹的交叉或相切的哪些点, 才有相遇的可能. 然后仔细寻找  $a, b$  两粒子通过哪个交

叉点或相切点的时间差最短(可先设  $a$ 、 $b$  两粒子同时出发), 并对此运用相关知识作定量分析, 所求得的最短时间差也就是本题所求。

**【解】** 带电荷量为  $q$ 、质量为  $m$ 、初速为  $v$  的粒子, 当它在磁感应强度为  $B$  的匀强磁场中运动时, 如果其初速度的方向与磁场方向垂直, 由洛伦兹力和牛顿定律可知, 它将在磁场中做匀速圆周运动。令  $T$  和  $R$  分别表示其周期和轨道半径, 则有

$$qvB = m \frac{v^2}{R} = mR \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 \quad (1)$$

$$\text{由此求得} \quad T = \frac{2\pi m}{qB} \quad (2)$$

$$R = \frac{mv}{qB} \quad (3)$$

把这些结论用到本题中, 可知  $a$  粒子开始在第一象限中运动 ( $y$  轴以右), 周期和轨道半径分别为

$$T_a = \frac{2\pi m}{q(2B_0)} = \frac{\pi m}{qB_0} \quad (4)$$

$$R_a = \frac{m(2v_0)}{q(2B_0)} = \frac{mv_0}{qB_0} \quad (5)$$

经半个周期 (即  $\frac{1}{2} T_a$ ) 后, 进入第二、三象限中 ( $y$  轴以左),

周期和轨道半径变为

$$T_a' = \frac{2\pi m}{qB_0} \quad (6)$$

$$R_a' = \frac{2mv_0}{qB_0} \quad (7)$$

以后就按此模式在  $xOy$  平面内沿图 3-3-25 中的虚线运动。

同理, 粒子  $b$  开始在第三象限 ( $y$  轴以左) 中运动

$$T_b = \frac{2\pi m}{qB_0} \quad (8)$$

$$R_b = \frac{mv_0}{qB_0} \quad (9)$$

经半个周期 (即  $\frac{1}{2} T_b$ ) 后, 进入第四象限 ( $y$  轴以右) 运动, 周期和轨道半径变为

$$T_b' = \frac{\pi m}{qB_0} \quad (10)$$

$$R_b' = \frac{mv_0}{2qB_0} \quad (11)$$

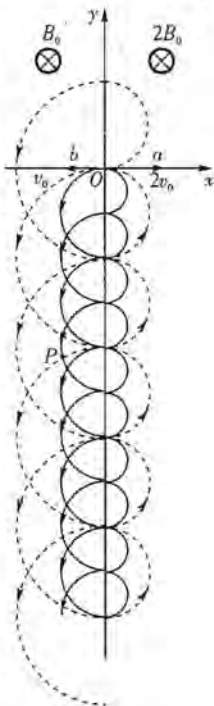


图 3-3-25



以后就按此模式在  $xOy$  平面内沿图 3-3-26 的实线运动. 由以上分析可知, 只要在右边, 不管  $a$  还是  $b$ , 周期皆为  $T_0 = \frac{\pi m}{qB_0}$ ; 只要在左边, 周期皆为  $2T_0$ .

由图 3-3-26 可见, 只有在两轨迹交叉或相切的那些点, 才有相遇的可能性. 为求得题中所说的时间差的最小值, 下面我们先假设, 如果  $a$ 、 $b$  同时开始运动, 分析经过哪个交叉或相切点时两者的时间差最短, 则这个时间差就应当等于题中所说的要  $a$ 、 $b$  在此交叉或相切点能相遇, 两者出发时间的的时间差. 为此, 结合图 3-3-26 分别考查  $a$ 、 $b$  的运动, 经分析就可看出, 在  $5T_0$  到  $5.25T_0$  之间的那个交叉点 (图 3-3-26 中的  $P$  点) 处,  $a$ 、 $b$  通过它的时间差最短 (在  $5T_0$  以前和  $5.25T_0$  以后的那些交叉或相切点,  $a$ 、 $b$  通过时的时间差都较长).

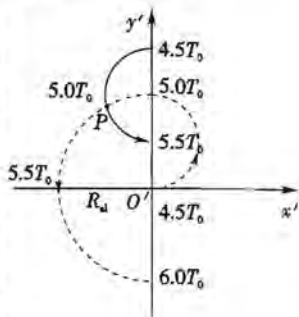


图 3-3-26

为了定量地求出时间差, 取负  $y$  轴上距原点  $O$  为  $3R_a$  (即  $6R_a$ ) 处为新的原点  $O'$ , 如图 3-3-26 所示. 取时间  $t = 5T_0$  为新的起始计时时刻, 对  $a$  用  $t' = 0$  表示, 对  $b$  用  $t'' = 0$  表示. 在  $y$  轴以左  $a$ 、 $b$  的周期相同, 所以角速度亦相同, 以  $\omega_1$  表示  $a$ 、 $b$  在  $y$  轴以左的角速度

$$\omega_1 = \frac{\pi}{T_0}. \quad (12)$$

对  $a$

$$x_a' = R_a \cos\left(\omega_1 t' + \frac{\pi}{2}\right), \quad (13)$$

$$y_a' = R_a \sin\left(\omega_1 t' + \frac{\pi}{2}\right). \quad (14)$$

对  $b$

$$x_b' = \frac{R_a}{2} \cos(\omega_1 t'' + \pi), \quad (15)$$

$$y_b' = R_a + \frac{R_a}{2} \sin(\omega_1 t'' + \pi). \quad (16)$$

对  $P$  点应有

$$x_a' = x_b', y_a' = y_b'. \quad (17)$$

由以上各式可解得所求的时间差应为

$$\Delta t = t' - t'' = 0.0802 \frac{\pi m}{qB_0}. \quad (18)$$

这个结果说明, 如果  $a$ 、 $b$  同时出发, 则  $a$  比  $b$  晚  $0.0802 \frac{\pi m}{qB_0}$  时间通过  $P$  点. 换成题目的要求, 就应当说, 要  $a$ 、 $b$  相遇, 则  $b$  的出发时间应比  $a$  晚  $0.0802 \frac{\pi m}{qB_0}$ .

由以上各式还可求得  $O$  点的坐标

$$x_P' = -\frac{\sqrt{15}}{8}R_d = -0.484R_d = -0.968 \frac{mv_0}{qB_0}, \quad (19)$$

$$y_P' = -\frac{7}{8}R_d = 1.75 \frac{mv_0}{qB_0}. \quad (20)$$

换为  $xOy$  坐标系

$$x_P = -0.968 \frac{mv_0}{qB_0}. \quad (21)$$

$$y_P = -3R_d + \frac{7}{8}R_d = -2.125R_d = -4.25 \frac{mv_0}{qB_0}.$$

**题 11** (2002·全国物理竞赛题) 在空间某区域中,可能存在匀强电场和匀强磁场,也可能只存在两者之一或都不存在. 现在此区域中,建立  $Oxyz$  坐标系如图 3-3-27 所示.

1. 已知一质量为  $m$  电荷量为  $q$  的质子 1 以大小为  $v_1$  的速度在该区域中沿  $z$  轴正方向运动时,测得其加速度  $a_1=0$ . 试根据质子 1 运动提供的信息,判断该区域中电场强度  $E$  和磁感应强度  $B$  的大小和方向有哪些可能. 解答时要求:若不存在电场或磁场,用  $E=0$  或  $B=0$  表示;若存在电场或磁场,电场强度和磁感应强度的大小分别用它在  $Oxyz$  坐标系中的分量  $E_x, E_y, E_z$  或  $B_x, B_y, B_z$  来表示;电场强度和磁感应强度的方向凡是可用它与坐标轴正方向之间的夹角来表示的都用它们来表示,规定夹角是由坐标轴正方向沿小于(或等于) $180^\circ$  的夹角转到要考查的矢量方向.(在本小题中,不要求写出理由或推理过程)

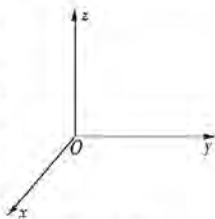


图 3-3-27

2. 简要写出得出以上结论的理由和推理过程.

3. 现又知另一质子 2 以大小为  $v_2 = \sqrt{2}v_1$  的速度在该区域中的  $yz$  平面内沿与  $y$  轴正方向和  $z$  轴正方向都成  $\alpha=45^\circ$  的方向运动时,测得此时质子 2 的加速度大小为  $a_2$ ,方向沿  $x$  轴的负方向. 试再结合质子 2 运动提供的信息,对上面第 1 小题中你所得的各种结论作进一步的分析,最后判断出该区域中电场强度  $E$  和磁感应强度  $B$  的大小和方向有哪些可能. 解答时电场强度和磁感应强度的大小和方向的表示方法与第 1 小题中的要求相同.(本小题不要求写理由或推理过程)

**【分析】** 本题要求读者对带电粒子在电场和磁场中的受力情况非常熟悉,结合题目提供的信息运用叠加方法对存在的多种可能性进行仔细分析.

**【解】** 1. (1)  $E=0, B=0$ .

(2)  $E=0, B_x=0, B_y=0, B_z$  可为任意值.

(3)  $E_x=0, E_z$  可为任意值,  $E_y$  可为任意值,即  $E$  与  $z$  垂直;  $B_x$  可为任意值,  $B_y$  可为任意值,但  $v_1 \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$ ,  $B_z$  可为任意值,  $B$  与  $E$  垂直且与  $z$



轴正方向的夹角  $\gamma_B = \arcsin \frac{E}{v_1 B}$ .

2. 由于质子 1 的加速度  $a_1 = 0$ , 故作用于质子 1 的电场力与洛伦兹力的合力必为零.

(1) 当该区域中既无电场又无磁场时, 作用于质子 1 的电场力与洛伦兹力的合力都为零, 故有第一种可能. 即  $E=0, B=0$ .

(2) 当该区域中无电场有磁场时, 因质子 1 沿  $z$  轴正方向运动, 只要磁场方向沿  $z$  轴, 作用于质子 1 的电场力为零, 洛伦兹力亦为零. 故有第二种可能. 即  $E=0, B_x=0, B_y=0, B_z$  可为任意值.

(3) 当该区域中存在磁场, 只要磁场的方向不沿  $z$  轴, 质子 1 便受到洛伦兹力作用, 故该区域中必存在电场, 才可能使质子 1 没有加速度. 由于洛伦兹力与  $z$  轴垂直, 故只有电场强度  $E$  亦与  $z$  轴垂直时, 电场力和洛伦兹力的合力才可能等于零, 故有  $E_z=0$ , 但  $E_x, E_y$  可以为任意值. 由于洛伦兹力垂直于  $z$  轴与  $B$  构成的平面, 故电场强度  $E$  亦垂直于  $z$  轴与  $B$  构成的平面, 即与  $B$  垂直. 当  $B$  的大小和方向不同时,  $B$  的三个分量  $B_x, B_y$  和  $B_z$  亦不同.  $E$  的方向与  $x$  轴正方向的夹角  $\alpha_E$  便取  $0 \sim 360^\circ$  间的不同的值, 使  $E$  与  $B$  保持相互垂直. 但洛伦兹力只决定于  $B$  的垂直于  $z$  轴方向的分量, 亦即只决定于  $B_x$  和  $B_y$ , 由  $B_x$  与  $B_y$  作用于质子 1 的洛伦兹力和电场力的合力为零, 可得  $v_1 \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$ . 若  $B$  与  $z$  轴正方向的夹角为  $\gamma_B$ , 则由  $qE = qv_1 B \sin \gamma_B$ , 可得  $\gamma_B = \arcsin \frac{E}{v_1 B}$ , 同时与  $E$  垂直. 这便是第三种可能.

3. (1)  $E=0, B_x=0, B_y=0, B_z = \frac{ma_2}{v_1 q}$ .  $B$  的方向与  $z$  轴正方向的夹角  $\gamma_B = 180^\circ$ .

(2)  $E_x$  可为不等于零的任意值,  $E_y=0, E_z=0$ .  $E$  的方向与  $x$  轴正方向的夹角  $\alpha_E=0$ , 或  $\alpha_E=180^\circ$ .  $B_x = \frac{E_x}{v_1}, B_z = -\frac{ma_2}{v_1 q}$  ( $B$  在  $O-xy$  平面).

当  $\alpha_E=0$  时,  $B$  与  $z$  轴正方向的夹角  $\gamma_B$  可在  $90^\circ \sim 180^\circ$  之间, 即  $90^\circ < \gamma_B < 180^\circ$ .

当  $\alpha_E=180^\circ$  时,  $B$  与  $z$  轴正方向的夹角  $\gamma_B$  可在  $180^\circ \sim 270^\circ$  之间, 即  $180^\circ < \gamma_B < 270^\circ$ .

**题 12** (2001·全国物理决赛题) 空间有半径为  $R$ 、长度  $L$  很短的圆柱形的磁场区域, 圆柱的轴线为  $z$  轴, 磁场中任一点的磁感应强度的方向沿以  $z$  轴为对称轴的圆的切线, 大小与该点离  $z$  轴的距离  $r$  成正比,  $B=Kr, K$  为常数, 如图 3-3-28 中“·”与“×”所示. 电荷量为  $q(q>0)$ 、质量为  $m$  的一束带电粒子流如图中一簇平行箭头所示, 以很高的速度  $v$  沿圆柱轴线方向, 穿过该磁场空间, 磁场区域外的磁场的大小可视为零. 试讨论这束带电粒子流穿过磁场区域后的运动情况.



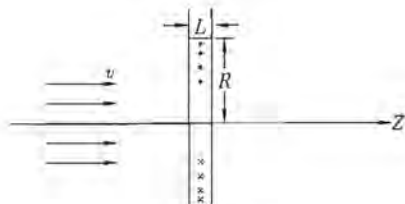


图 3-3-28

**【分析】** 粒子穿越磁场时将向  $z$  轴方向偏转, 考虑速度很高和磁场很短这两个因素, 可认为粒子在磁场区域内的运动轨迹近似为直线, 出磁场后将沿该直线方向运动. 运用相关力学规律和几何知识可求得粒子与  $z$  轴的交点  $M$ .

**【解】** 设想沿距  $z$  轴为  $r$  的平行线运动的带电粒子进入磁场区, 带电粒子受到指向  $z$  轴的径向洛伦兹力  $f$  向轴偏转,

$$f = qvB. \quad (1)$$

因粒子速度很快, 粒子经过磁场区的时间  $\Delta t$  很短,

$$\Delta t = \frac{L}{v}. \quad (2)$$

粒子经磁场区所受的冲量  $P_r$  为

$$P_r = f\Delta t = \frac{qvBL}{v} = qBL = qKLr. \quad (3)$$

粒子逸出磁场区后将沿直线方向运动. 运动的直线与  $z$  轴交于  $M$  点, 因为粒子沿轴向运动的动量  $P$  经过磁场区域发生的改变可以忽略, 由图 3-3-29 可见

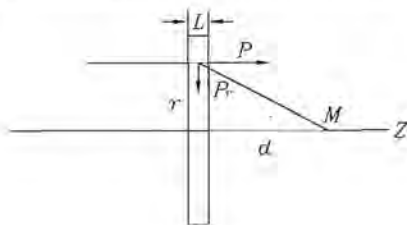


图 3-3-29

$$\frac{P}{P_r} = \frac{d}{r}. \quad (4)$$

代入③式, 得

$$d = \frac{P}{P_r} r = \frac{mv}{qKL} r. \quad (5)$$

由⑤式可见, 粒子与  $z$  轴交点  $M$  的位置与粒子距轴的距离无关, 因所有粒子均以速度  $v$  平行于  $z$  轴进入磁场区, 受到洛伦兹力后, 都折向  $M$  点, 但平行  $z$  轴的



速度分量基本不改变,所以粒子束经磁场区后,均会同时会聚于  $M$  点.

**题 13** (1999·全国物理竞赛题) 围绕地球周围的磁场是两极强、中间弱的空间分布.1958年,范·阿仑通过人造卫星搜集到的资料研究了带电粒子在地球磁场空间中的运动情况后,得出了在距地面几千公里和几万公里的高空存在着电磁辐射带(范·阿仑辐射带)的结论.有人在实验室中通过实验装置,形成了如图 3-3-30 所示的磁场分布区域  $MN$ ,在该区域中,磁感应强度  $B$  的大小沿  $z$  轴从左到右,由强变弱,由弱变强,对称面为  $PP'$ .已知  $z$  轴上  $O$  点磁感应强度  $B$  的大小为  $B_0$ ,右端  $M$  点的磁感应强度为  $B_M$ .现有一束质量均为  $m$ 、电荷量均为  $q$ 、速度大小均为  $v_0$  的粒子,在  $O$  点以与  $z$  轴成不同的投射角  $\alpha_0$  向右半空间发射.设磁场足够强,粒子只能在由紧邻  $z$  轴的磁感线围成的截面积极小的“磁力管”内运动.试分析说明具有不同的投射角  $\alpha_0$  的粒子在磁场区  $MN$  间的运动情况.

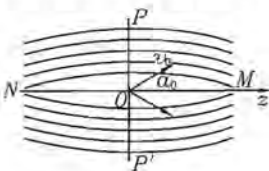


图 3-3-30

**提示:**理论上可证明:在细“磁力管”的管壁上粒子垂直磁场方向的速度  $v_{\perp}$  的平方与磁力管轴上的磁感应强度的大小  $B$  之比为一常量.

**【分析】**带电粒子斜射入匀强磁场后,做半径不变的等距螺旋运动,计算时,把它看做一个匀速直线运动和一个与其垂直的匀速圆周运动的合运动,而本题是分布“对称”的非匀强磁场,粒子斜射入磁场后,也做螺旋运动,不同的是沿  $z$  轴的直线运动的速度和垂直  $z$  轴的圆周运动的半径,随坐标  $z$  的变化而变化.本题的要求是,通过分析、比较,找出直线运动的速度和圆周运动的半径怎样随投射角  $\alpha$  的变化而变化,得到投射角  $\alpha$  不同时粒子的运动情况发生怎样的变化.

**【解】**(1)带电粒子沿  $z$  轴做螺旋运动时受到阻力而减速

设粒子达到磁感应强度为  $B$  处的速度为  $v$ ,其垂直和平行于磁场的方向的分速度分别为  $v_{\perp}$  和  $v_{\parallel}$ .粒子刚从  $O$  点射出时,其垂直磁场方向的分速度为  $v_{\perp 0} = v_0 \sin \alpha_0$ ,根据提示,粒子运动过程中,在细“磁力管”的管壁上垂直磁场方向的速度平方与磁力管轴上的磁场的强度  $B$  之比为一常量,即

$$\frac{v_{\perp}^2}{B} = \frac{v_{\perp 0}^2}{B_0} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{B_0} \quad (1)$$

因粒子还具有沿轴向的分速度,所以粒子在磁力管中做螺旋运动,由于洛伦兹力  $f$  垂直粒子的速度,对带电粒子不做功,因而粒子在任何点的速度的大小不变,均为  $v_0$ .按题意, $z$  轴上  $O$  点右侧磁场  $B$  逐渐变大,因而,粒子向右运动过程中,垂直磁场方向的速度  $v_{\perp}$  随之增大,平行于磁场方向的速度  $v_{\parallel}$  亦随之按下列规律变化

$$v_{\parallel} = \sqrt{v_0^2 - v_{\perp}^2} = v_0 \sqrt{1 - \frac{B}{B_0} \sin^2 \alpha_0} \quad (2)$$

由②式可知,随沿  $z$  轴磁场  $B$  的增大,平行于磁场方向的速度  $v_{\parallel}$  将随之减小.

轴向速度的减小是因为粒子沿轴向运动时受到阻力,因磁力管壁的磁场与 $z$ 轴不平行,粒子在运动过程中受到的洛伦兹力 $f$ 斜向指向 $z$ 轴,如图3-3-31所示。 $f_{//}$ 是 $f$ 平行于 $z$ 轴的分量,它成为阻碍粒子沿轴向运动的阻力。 $f_{\perp}$ 是洛伦兹力 $f$ 垂直于 $z$ 轴的分量,它为粒子做螺旋运动时提供粒子做圆周运动的向心力,圆周半径 $r = \frac{mv_{\perp}}{qB}$ ,由①式得

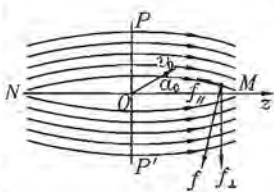


图 3-3-31

$$r = \frac{mv_{\perp}}{qB} = \frac{mv_0 \sin \alpha_0}{q} \sqrt{\frac{1}{BB_0}} \quad (3)$$

此式表明:螺旋半径随磁场 $B$ 的增大而减小.结合式②的讨论可知,螺旋运动的轴向速度逐渐减小,即螺旋螺距逐渐减小.到达 $M$ 端时,粒子以半径

$$r_M = \frac{mv_0 \sin \alpha_0}{q} \sqrt{\frac{1}{B_M B_0}} \text{ 做圆周运动.}$$

(2) 临界投射角

由②式知,以某个投射角 $\alpha_{0L}$ 发射的粒子到达 $M$ 点时,其平行于磁场方向的速度 $v_{M//}$ 恰等于零

$$\sqrt{1 - \frac{B_M}{B_0} \sin^2 \alpha_{0L}} = 0.$$

得

$$\sin \alpha_{0L} = \sqrt{\frac{B_0}{B_M}} \quad (4)$$

此式表明:投射角 $\alpha = \alpha_{0L}$ 时,粒子恰好在 $M$ 点轴向速度为零, $v_{zM} = v_0$ ,即垂直于磁场方向的分速度最大, $\alpha_{0L}$ 称为临界投射角.投射角 $\alpha < \alpha_{0L}$ 的粒子到达 $M$ 点时,因轴向速度尚未减至零,这些粒子就从 $M$ 处逸出,离开磁场区域.

(3) 投射角大于临界角的粒子的运动

当粒子在 $O$ 点以临界角 $\alpha_{0L}$ 发射,即做螺旋运动到达端点 $N$ 时,因轴向速度为零.粒子在此瞬间停止向右移动,只做圆周运动,但因沿 $z$ 轴磁场分布的非均匀性,磁场大小存在变化梯度.因而粒子在 $M$ 点仍受到向左的作用力,粒子即离开端点 $M$ 向左做螺旋运动(螺旋的方向不变).到达 $O$ 点时,向左运动的沿轴向速度达到最大,继续向左运动.离开 $O$ 点后,左半程运动的情况与右半程的运动情况相仿,到达左端点 $N$ 时,轴向速度亦为零,并受到指向 $O$ 点的洛伦兹力沿轴向的分量作用,向右运动.因此,左、右端点处,犹如镜面反射一样,粒子在邻近 $z$ 轴的细磁力管内,在两端面间做螺旋形往复周期运动.

投射角 $\alpha > \alpha_{0L}$ 的粒子在未达到 $M$ 点时,轴向速度已减至零,这些粒子将在小于 $MN$ 点距离间相对于对称面 $PP'$ 做周期的往复螺旋运动.投射角 $\alpha$ 愈大,往复运动的距离愈小,当投射角 $\alpha = 90^\circ$ 时,粒子不受轴向力,就在对称面 $PP'$ 上以半径 $r_0 = \frac{mv_0}{qB_0}$ 做圆周运动.



**【讨论】** 这是一道论述题,要求通过必要的计算,半定性、半定量地说明各个粒子怎样运动.解答这类题的关键是,分析清楚题中有哪些物理过程以及过程和过程间有哪些不同、哪些联系,分析清楚从现象的产生、发展到结果,引起了哪些物理量的变化以及怎样的变化.本题中粒子的投射角 $\alpha$ 不同,物理过程的共同点,都是做螺旋运动(除 $\alpha=90^\circ$ 外),不同点只是各个螺旋线的半径、螺距不同而已.

**题 14** (1999·国际物理奥赛题)

**V形长导线中电流产生的磁场**

对磁现象的成功解释最早是由安培提出的.作为一例,我们计算载流导线产生的磁场 $\vec{B}$ ,并与原先由毕奥和萨伐尔提出的假设作比较.

假设长直细导线通过稳恒电流 $i$ ,并被弯成V形,半张角为 $\alpha$ (本题中 $\alpha$ 用弧度表示),见图3-3-32.

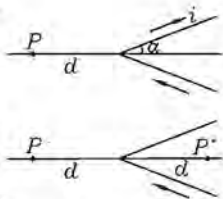


图 3-3-32

按照安培的计算,在V形导线包围面以外对称轴上的P点(P点到V形顶点的距离为 $d$ )的磁场 $\vec{B}$ 的大小正比于 $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ .安培的研究后来被总结到麦克斯韦电磁理论中而被普遍接受.

用我们今天的电磁学知识:

- (1) 求出P点磁感应强度 $\vec{B}$ 的方向.
- (2) 已知磁场 $\vec{B}$ 正比于 $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ ,  $|\vec{B}(P)| = k \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ , 计算式中的比例系数 $k$ .
- (3) 设 $P^*$ 点是在对称轴上关于顶点而与P点对称的点(在V形内,与顶点距离亦为 $d$ ), (见图3-3-31). 计算 $P^*$ 处的磁感应强度 $\vec{B}$ .
- (4) 为测量磁场,在P点放置1个细长的小磁针,其磁矩为 $\mu$ ,转动惯量为 $I$ .它在包含 $\vec{B}$ 的方向的平面内绕固定点振动.求出磁针做小振动时的周期与 $B$ 的函数关系.

同样的命题,毕奥和萨伐尔却认为P点的磁感应强度为 $\vec{B}(P) = \frac{i\mu_0\alpha}{\pi^2 d}$ , 其中 $\mu_0$ 为真空磁导率(这里我们引用了现代的表达法).实际上,他们想要测量磁针振动周期和V形导线半张角 $\alpha$ 的函数关系,以在安培与毕奥-萨伐尔两种解释中作出取舍.然而,对于某些 $\alpha$ 值,这种差别太小,很难测量.

(5) 如果要在实验上区分P点处小磁针振动周期 $T$ 的两种预测,我们至少需要10%的差别,即 $T_1 \geq 1.10 T_2$  ( $T_1$ 为安培预言,  $T_2$ 为毕奥-萨伐尔预言). 试论证, V形导线的半张角 $\alpha$ 近似在什么范围内才能做到这一点.

可能有用的公式  $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$ .



**【分析】** 第(1)(2)(3)小题,实质上是求载流导线产生的磁感应强度  $\vec{B}$ .  $\vec{B}$  的方向可用安培定则或右手参考系判定;  $\vec{B}$  的大小可用有限长载流导线的磁感应强度公式  $B = \frac{\mu_0 i}{4\pi h} (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$  和场的叠加原理求出. 第(4)小题可用角动量定理导出简谐运动微分方程  $\frac{d^2\beta}{dt^2} = -k\beta$ , 再根据公式  $\omega^2 = k$ ,  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  求出周期  $T$  和磁感应强度  $B$  的关系. 第(5)小题,将安培和毕奥-萨伐尔分别提出的计算  $\vec{B}$  的公式,代入第(4)小题求得的周期公式,即可求出半张角  $\alpha$  的范围.

**【解】** (1) V形线的每条边对磁感应强度  $B$  的贡献,其方向与相应的无限长直导线贡献的一样(电流方向如图 3-3-33 箭头所示). 假如取导线所在平面为  $xy$  平面,则磁场是垂直于此平面的. 在右手参考系里,  $\vec{B}(P)$  沿正  $z$  方向. 由于对称性,总场是每条边提供的场的两倍,方向不变.

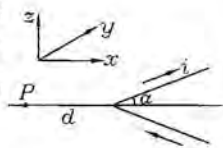


图 3-3-33

(2) 方法 1: 当  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  时,“V”变为无限长直导线,此时场  $\vec{B}(P)$  的大小应为

$$B = \frac{i}{2\pi\epsilon_0 c^2 d} = \frac{i\mu_0}{2\pi d}$$

因为  $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ , 因此因子  $k$  为  $\frac{i\mu_0}{2\pi d}$ .

方法 2: 如果学生知道,一段载流  $i$  的有限长直导线,在距它  $h$  地方的  $P$  点产生的磁场为

$$B = \frac{i\mu_0 (\cos\theta_1 - \cos\theta_2)}{4\pi h}$$

其中,  $\theta_1, \theta_2$  为从  $P$  点看导线两端的角,则可知 V 形线每边产生的磁场是

$$\frac{i\mu_0 (1 - \cos\alpha)}{4\pi d \sin\alpha}$$

因此,总场强为

$$B = i\mu_0 \frac{(1 - \cos\alpha)}{2\pi d \sin\alpha} = \frac{i\mu_0 \tan \frac{\alpha}{2}}{2\pi d}$$

(3) 方法 1:

和第(2)小题方法 2 一样,根据公式

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi h} (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$$

得

$$\begin{aligned} B(P^*) &= \frac{\mu_0 i}{4\pi d \sin\alpha} [\cos 0 - \cos(\pi - \alpha)] \cdot 2 \\ &= \frac{\mu_0 i (1 + \cos\alpha)}{2\pi d \sin\alpha} = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \cot \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$



方法 2: 为计算  $\vec{B}(P^*)$ , 可把 V 形等价于二条交叉的无限长直导线 (如图 3-3-34 中的  $a$  和  $b$ ), 加上另一个 V 形线, 它与前一 V 形对称 (在图上记为  $V'$ ), 流过同样大小而方向相反的电流  $i$ .

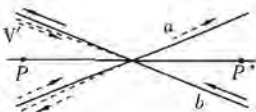


图 3-3-34

于是  $\vec{B}(P^*) = \vec{B}_a(P^*) + \vec{B}_b(P^*) + \vec{B}_{V'}(P^*)$ , 各个分量分别为  $B_a(P^*) = B_b(P^*) = i\mu_0 / (2\pi d \sin\alpha)$ , 沿负  $z$  方向;

$$B_{V'}(P^*) = \frac{i\mu_0}{2\pi d} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right), \text{沿正 } z \text{ 方向};$$

因此我们有

$$\begin{aligned} B(P^*) &= \frac{i\mu_0}{2\pi d} \left[ \frac{2}{\sin\alpha} - \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right] \\ &= \frac{k(1 + \cos\alpha)}{\sin\alpha} = k \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right), \end{aligned}$$

沿负  $z$  方向.

方法 3:

半张角为  $\alpha$  的 V 形线内的点  $P^*$  可当做半张角为  $\pi - \alpha$ , 载有相同大小而方向相反的电流的 V 形线外面的点, 于是场为

$$B(P^*) = k \tan \frac{\pi - \alpha}{2} = k \cot \frac{\alpha}{2}, \text{其方向沿负 } z \text{ 方向, 因为电流反向了.}$$

(4) 作用在置于  $P$  处的磁针上的力矩为  $\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$  ( $\times$  是矢量积). 如果磁针偏离其平衡位置 1 个小角  $\beta$  (此时可用近似  $\sin\beta \approx \beta$ ). 角动量定理给出

$$M = -\mu B \beta = \frac{dL}{dt} = I \frac{d^2\beta}{dt^2}.$$

即

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = -\frac{\mu B}{I} \beta.$$

这里有一负号是因为力矩总是阻止偏离平衡位置. 小振动的周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\mu B}}.$$

(并不要求写出微分方程, 学生应当认识到它与谐振子的异同.)

(5) 用下标  $A$  记根据安培解释的计算; 用下标  $BS$  记基于比奥-萨伐尔的假说的计算, 则有

$$\begin{aligned} B_A &= \frac{i\mu_0 \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2\pi d}, B_{BS} = \frac{i\mu_0 \alpha}{\pi^2 d}. \\ T_A &= 2\pi \sqrt{\frac{2\pi Id}{\mu\mu_0 i \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}, T_{BS} = 2\pi \sqrt{\frac{\pi^2 Id}{\mu\mu_0 i \alpha}}. \end{aligned}$$

$$\frac{T_A}{T_{IS}} = \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi \tan \frac{\alpha}{2}}}$$

对  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  (最大可能值),  $T_A = T_{IS}$ ;

对  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $T_A \rightarrow \frac{2T_{IS}}{\sqrt{\pi}} \approx 1.128T_{IS}$ .

由于在此范围内,  $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$  是  $\alpha$  的单调增函数, 因此  $\frac{T_A}{T_{IS}}$  是  $\alpha$  的单调降函数; 当

在某一  $\alpha$  值有  $T_A = 1.10T_{IS}$  (10% 的差别),  $\tan\left(\frac{\alpha_0}{2}\right) = \frac{4\alpha_0}{(2 \times 1.21\pi)} = \frac{1.05\alpha_0}{2}$ , 则当  $\alpha$  大于  $\alpha_0$  后, 用实验就无法区分这两种解释. 查三角函数表或利用计算器, 此  $\alpha_0 = 0.77 \text{ rad} \approx 44^\circ$ . 因此  $\alpha$  角的限制为  $44^\circ \geq \alpha > 0$ .

(用图解  $\alpha$  的方程亦可以, 级数展开则不能接受.)

**【讨论】** 第(3)小题给出了3种不同的解法, 表明了思维的多样性和方法的灵活性. 处理物理问题, 要注意从不同的层面去思考, 用不同的方法去求解, 对不同的解法进行比较、总结, 从而使思路更加开拓, 思维更加顺畅, 方法更加灵活.

## 第四节 电磁感应

**题 1** (2007·全国物理预赛题) 如图 3-4-1 所示, 用双线密绕在一个长直圆柱上, 形成两个螺线管线圈  $aa'$  和  $bb'$  (分别以实线和虚线表示), 已知两个线圈的自感都是  $L$ . 今若把  $a$  与  $b$  两端相连, 把  $a'$  和  $b'$  两端接入电路, 这时两个线圈的总自感等于 \_\_\_\_\_;

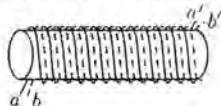


图 3-4-1

若把  $b$  与  $a'$  相连, 把  $a$  和  $b'$  两端接入电路, 这时两个线圈的总自感等于 \_\_\_\_\_; 若把  $a$  与  $b$  两端相连作为一端,  $a'$  与  $b'$  相连作为另一端, 把这两端接入电路, 这时两个线圈的总自感等于 \_\_\_\_\_.

**【分析】** 由题意知两线圈分别为反向串联, 正向串联和并联三种方式, 根据相关物理规律便可求解.

**【解】**  $0; 4L; L$ .

**题 2** (竞赛训练题) 一边长为  $l$  的正方形线圈 (线圈的横截面积为  $S$ , 电阻率为  $\rho$ ), 以  $v$  匀速通过均匀磁场区域 (线圈平面始终与磁场垂直), 速度的方向与水平方向成  $45^\circ$  夹角, 如图 3-4-2 所示. 磁场区域的宽为  $a$ , 高为  $b$ .

(1) 若  $b \gg l, a > l$ , 问线圈通过均匀磁场  $B$  后释放多少焦耳热?

(2) 如  $b \gg l, a < l$ , 问线圈通过均匀磁场  $B$  后释放多少焦耳热?



**【分析】** 把速度  $v$  正交分解成  $v_{//}$  与  $v_{\perp}$  ( $v_{//}$  平行于磁场上边界  $a$ ,  $v_{\perp}$  垂直于上边界  $a$ ), 并注意到线圈的感应电动势等于各边电动势的代数和.

**【解】** (1) 当  $b \gg l, a > l$  时, 放出的焦耳热为

$$Q = \frac{E^2}{R} t.$$

因为  $E = Blv \cos 45^\circ, R = 4\rho \frac{l}{S}, t = \frac{2l}{v \cos 45^\circ},$

所以  $Q = \frac{(Blv \cos 45^\circ)^2}{4\rho \frac{l}{S}} \cdot \frac{2l}{v \cos 45^\circ} = \frac{B^2 l^2 v S}{2\sqrt{2}\rho}.$

(2) 当  $b \gg l, a < l$  时, 放出的焦耳热为

$$Q = \frac{E^2}{R} t.$$

因为  $E = Blv \cos 45^\circ, R = 4\rho \frac{l}{S}, t = \frac{2a}{v \cos 45^\circ},$

所以  $Q = \frac{(Blv \cos 45^\circ)^2}{4\rho \frac{l}{S}} \cdot \frac{2a}{v \cos 45^\circ} = \frac{B^2 l v S a}{2\sqrt{2}\rho}.$

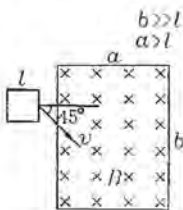


图 3-4-2

**题 3** (2007 · 全国物理预竞赛) 如图 3-4-3 所示,  $ACD$  是由均匀细导线制成的边长为  $d$  的等边三角形线框, 它以  $AD$  为转轴, 在磁感应强度为  $B$  的恒定的匀强磁场中以恒定的角速度  $\omega$  转动 (俯视为逆时针旋转), 磁场方向与  $AD$  垂直. 已知三角形每条边的电阻都等于  $R$ . 取图示线框平面转至与磁场平行的时刻为  $t=0$ .

1. 求任意时刻  $t$  线框中的电流.

2. 规定  $A$  点的电势为 0, 求  $t=0$  时, 三角形线框的  $AC$  边上任一点  $P$  (到  $A$  点的距离用  $x$  表示) 的电势  $U_P$ , 并画出  $U_P$  与  $x$  之间关系的图线.

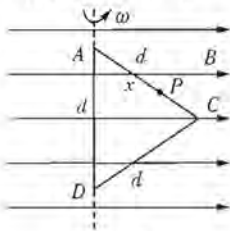


图 3-4-3

**【分析】** 在线框转动过程中,  $AC$  边和  $CD$  边以转动方式切割磁感线 (产生的效果相同), 由于磁场在空间作均匀分布且转动边上任一点切割速度与其位置呈线性关系, 故可用等效法处理相关问题. 如每条边的有效切割长度、平均切割速度等. 至于第 2 问则可利用求解第 1 问中某些结果求得  $t=0$  时的  $E_{AC}$  和  $I$ , 根据含源欧姆定律求解.

**【解】** 1. 在线框转动过程中, 三角形的  $AC$ 、 $CD$  两边因切割磁感线而产生感应电动势, 因长度为  $d$  的  $AC$  边和  $CD$  边都不与磁场方向垂直, 每条边切割磁感线的有效长度, 即垂直于磁场方向的长度为

$$l = d \sin 30^\circ = \frac{1}{2} d. \quad \textcircled{1}$$



因 AC 边上不同部分到转轴的距离不同,它们的速度随离开转轴的距离的增大而线性增大,故可认为 AC 边上各部分产生的总电动势在数值上等同于整条 AC 边均以 AC 边中点处的速度  $\bar{v}$  运动时产生的电动势;而

$$\bar{v} = \omega \frac{1}{2} d \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} \omega d. \quad (2)$$

设从零时刻至  $t$  时刻,三角形从平行于磁场方向的位置绕轴转过角度为  $\theta$ ,则

$$\theta = \omega t. \quad (3)$$

因而边上各点速度的方向不再与磁场方向垂直,  $\bar{v}$  沿垂直磁场方向的分量

$$\bar{v}_\perp = \bar{v} \cos \theta. \quad (4)$$

由此得到  $t$  时刻 AC 边中的感应电动势

$$E_{AC} = Bl \bar{v}_\perp. \quad (5)$$

其方向由 A 点指向 C 点. 由①~⑤各式得

$$E_{AC} = \frac{\sqrt{3}}{8} B \omega d^2 \cos(\omega t). \quad (6)$$

同理,可得

$$E_{CD} = \frac{\sqrt{3}}{8} B \omega d^2 \cos(\omega t). \quad (7)$$

其方向由 C 点指向 D 点. 三角形线框中的总电动势

$$E = E_{AC} + E_{CD} = \frac{\sqrt{3}}{4} B \omega d^2 \cos(\omega t). \quad (8)$$

其方向沿 A→C→D→A 回路方向. 因线框中的总电阻为  $3R$ , 故  $t$  时刻线框中的电流

$$i = \frac{E}{3R} = \frac{\sqrt{3}}{12R} B \omega d^2 \cos(\omega t). \quad (9)$$

2. 对于 AP 来说,长度为  $x$ ,在  $t=0$  时刻,  $\cos(\omega t)=1$ , 而以  $x$  代替⑥式中的  $d$ , 即可得 AP 段中的感应电动势的大小

$$E_{AP} = \frac{\sqrt{3}}{8} B \omega x^2. \quad (10)$$

方向由 A 点指向 P 点. 由⑨式,此时线框的电流

$$I = \frac{\sqrt{3}}{12R} B \omega d^2. \quad (11)$$

根据含源电路欧姆定律, P 点的电势

$$U_P = E_{AP} - I \frac{R}{d} x. \quad (12)$$

把⑩⑪两式代入⑫式,并经整理,得

$$U_P = \frac{\sqrt{3}}{8} B \omega \left( x^2 - \frac{2}{3} x d \right). \quad (13)$$



为了画出  $U_P(x)$  图线, 先求出若干特征点的电势值. ⑬式右侧是一个关于  $x$  的二次方程, 故  $U_P(x)$  图线为一抛物线, 如图 3-4-4 所示. ⑬式可改写为

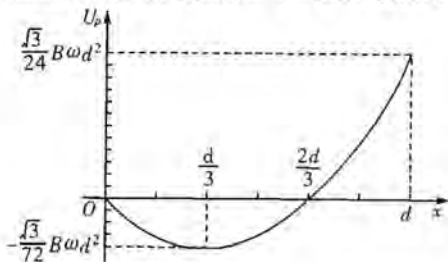


图 3-4-4

$$U_P + \frac{\sqrt{3}}{72} B \omega d^2 = \frac{\sqrt{3}}{8} B \omega \left(x - \frac{1}{3}d\right)^2. \quad (14)$$

由⑭式可知, 此抛物线具有以下性质:

- (1) 当  $x=0, \frac{2d}{3}$  时,  $U_P=0$ ;
- (2) 顶点坐标为  $x=\frac{d}{3}, U_P=-\left(\frac{\sqrt{3}}{72}\right) B \omega d^2$ ;
- (3) 当  $x=d$  时,  $U_P=\left(\frac{\sqrt{3}}{24}\right) B \omega d^2$ .

**题 4** (2004·全国物理预赛题) 如图 3-4-5 所示, 两条平行的长直金属细导轨  $KL, PQ$  固定于同一水平面内, 它们之间的距离为  $l$ , 电阻忽略不计;  $ab$  和  $cd$  是两根质量皆为  $m$  的金属细杆, 杆与导轨垂直, 且与导轨良好接触, 并可沿导轨无摩擦地滑动. 两杆的电阻皆为  $R$ . 杆  $cd$  的中点系一轻绳, 绳的另一端绕过轻的定滑轮悬挂一质量为  $M$  的物体, 滑轮与转轴之间的摩擦不计, 滑轮与杆  $cd$  之间的轻绳处于水平伸直状态并与导轨平行. 导轨和金属细杆都处于匀强磁场中, 磁场方向垂直于导轨所在平面向上. 磁感应强度的大小为  $B$ . 现两杆及悬物都从静止开始运动, 当  $ab$  杆及  $cd$  杆的速度分别达到  $v_1$  和  $v_2$  时, 两杆加速度的大小各为多少?

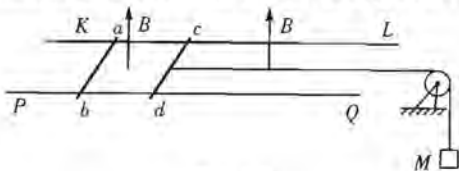


图 3-4-5

**【分析】** 杆  $cd$  在外力作用下滑动时, 会同时出现下列物理现象: 杆  $cd$  中产生电动势; 回路中出现感应电流; 因电流出现相应的安培力(其中对杆  $cd$  为阻力, 对杆  $ab$  则为动力); 杆  $ab$  运动时又会产生电动势, 全面考虑并综合运用相关物理规律本题即可求解.



**【解】** 用  $E$  和  $I$  分别表示  $abcd$  回路的感应电动势和感应电流的大小, 根据法拉第电磁感应定律和欧姆定律可知

$$E = Bl(v_2 - v_1), \quad (1)$$

$$I = \frac{E}{2R}. \quad (2)$$

令  $F$  表示磁场对每根杆的安培力的大小, 则

$$F = IBl. \quad (3)$$

令  $a_1$  和  $a_2$  分别表示  $ab$  杆、 $cd$  杆和物体  $M$  加速度的大小,  $T$  表示绳中张力的的大小, 由牛顿定律可知

$$F = ma_1, \quad (4)$$

$$Mg - T = ma_2. \quad (5)$$

$$T - F = ma_2. \quad (6)$$

由以上各式解得

$$a_1 = \frac{B^2 l^2 (v_2 - v_1)}{2Rm}.$$

$$a_2 = \frac{2MgR - B^2 l^2 (v_2 - v_1)}{2(M+m)R}.$$

**题 5** (2000·全国物理预竞赛) 如图 3-4-16 中(a)所示, 在正方形导线回路所围的区域  $A_1 A_2 A_3 A_4$  内分布有方向垂直于回路平面向里的匀强磁场, 磁感应强度  $B$  随时间以恒定的变化率增大, 回路中的感应电流为  $I = 1.0 \text{ mA}$ . 已知  $A_1 A_2$ 、 $A_3 A_4$  两边的电阻皆为零,  $A_1 A_4$  边的电阻  $R_1 = 3.0 \text{ k}\Omega$ ,  $A_2 A_3$  边的电阻  $R_2 = 7.0 \text{ k}\Omega$ .

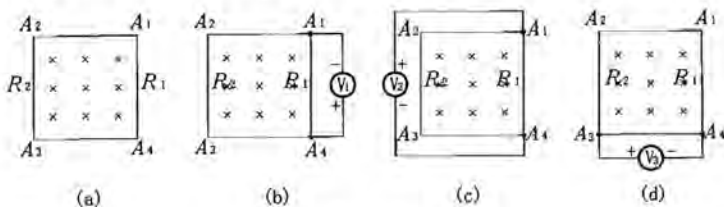


图 3-4-6

(1) 试求  $A_1$ 、 $A_2$  两点间的电压  $U_{12}$ 、 $A_2$ 、 $A_3$  两点间的电压  $U_{23}$ 、 $A_3$ 、 $A_4$  两点间的电压  $U_{34}$ 、 $A_4$ 、 $A_1$  两点间的电压  $U_{41}$ .

(2) 若一内阻可视为无限大的电压表  $V$  位于正方形导线回路所在的平面内, 其正、负端与连线位置分别如图 3-4-6 中(b)(c)(d)所示, 求 3 种情况下电压表的读数  $U_1$ 、 $U_2$ 、 $U_3$ .

**【分析】** 由磁场变化产生的感生电动势, 均匀分布于正方形导线回路的各边之中. 解题时, 画出等效电路图, 应用含源电路欧姆定律、基尔霍夫定律列出方程, 即可求得.



【解】 (1) 设回路中的总感应电动势为  $E$ , 根据楞次定律可知, 电路中的电流沿逆时针方向, 按欧姆定律有

$$E = I(R_1 + R_2) = 10 \text{ V.}$$

由对称性可知, 正方形回路每条边上的感应电动势相等, 设为

$$E_1, \text{ 如图 3-4-7 所示, } E_1 = \frac{1}{4} E = 2.5 \text{ V.}$$

根据含源电路欧姆定律, 并代入数值得

$$U_{12} = -E_1 = -2.5 \text{ V,}$$

$$U_{23} = IR_2 - E_1 = 4.5 \text{ V,}$$

$$U_{34} = -E_1 = -2.5 \text{ V,}$$

$$U_{41} = IR_1 - E_1 = 0.5 \text{ V.}$$

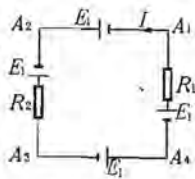


图 3-4-7

(2) 对图 3-4-8 中的  $A_1 V_1 A_4 A_1$  回路, 因磁通量变化率为零, 回路中的总电动势为零, 这表明连接  $A_4$ 、 $A_1$  两端电压表支路亦为含源电路, 图 3-4-6 中 (b) 的等效电路如图 3-4-8 所示. 电压表的读数等于由正端 (+) 到负端 (-) 流过电压表的电流  $I_V$  乘以电压表的内阻  $R_V$ , 因  $R_V$  阻值为无限大,  $I_V$  趋近于零 (但  $I_V R_V$  为有限值), 故由基尔霍夫定律得

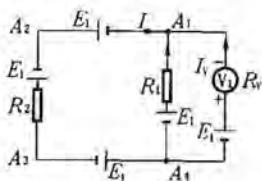


图 3-4-8

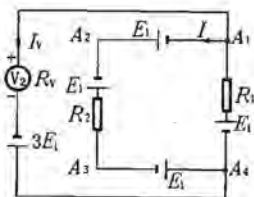


图 3-4-9

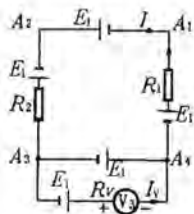


图 3-4-10

$$IR_1 - I_V R_V = IR_1 - U_1 = 0.$$

解得

$$U_1 = IR_1 = 3.0 \text{ V.}$$

同理, 图 3-4-6 中 (c) 的等效电路如图 3-4-9 所示, 回路  $A_1 V_2 A_4 A_1$  的总电动势为  $E$ , 故有

$$IR_1 + I_V R_V = IR_1 + U_2 = E.$$

解得

$$U_2 = E - IR_1.$$

代入数据得

$$U_2 = 7.0 \text{ V.}$$

图 3-4-6 中 (d) 的等效电路如图 3-4-10 所示, 回路  $A_3 V_3 A_1 A_3$  的总电动势为零, 而  $A_3 A_1$  边中的电阻又为零, 故有

$$U_3 = I_V R_V = 0.$$

题6 (2007·全国物理复赛题) 图3-4-11中  $Oxy$  是位于水平光滑桌面上的直角坐标系. 在  $x > 0$  的一侧, 存在匀强磁场, 磁场方向垂直于  $Oxy$  平面向里, 磁感应强度的大小为  $B$ . 在  $x < 0$  的一侧, 一边长分别为  $l_1$  和  $l_2$  的刚性矩形超导导线框位于桌面上, 框内无电流, 框的一对边与  $x$  轴平行. 线框的质量为  $m$ , 自感为  $L$ . 现让超导导线框沿  $x$  轴方向以初速度  $v_0$  进入磁场区域. 试定量地讨论线框以后可能发生的运动情况及与初速度  $v_0$  大小的关系(假定线框在运动过程中始终保持超导状态).

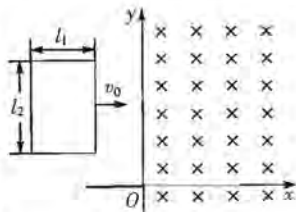


图3-4-11

【分析】 首先应分析超导(电阻  $R=0$ ) 线框刚进入磁场时的情形, 其间会涉及到动生电动势, 自感电动势以及安培力等. 由于所求得安培力具有“弹性力”的性质, 故应分二种情形讨论, 一是  $v_0$  较小, 线框未完全进入时线框速度已减为零, 二是  $v_0$  较大, 线框完全进入磁场时, 线框速度仍未减为零, 两种情形线框的运动情况是不一样的.

【解】 设某一时刻线框在磁场区域的深度为  $x$  ( $x \leq l_1$ ), 速度为  $v$  (图3-4-12). 因线框的一条边切割磁感应线产生的感应电动势为  $E_v = vBl_2$ . 它在线框中引起感应电流, 感应电流的变化又引起自感电动势. 又设线框的电动势和电流的正方向均为顺时针方向, 则切割磁感应线产生的电动势  $E_v$  与设定的正方向相反, 自感电动势  $E_L = -L \frac{\Delta i}{\Delta t}$  与设定的正方向相同. 因线框处于超导状态, 电阻  $R=0$ , 故有

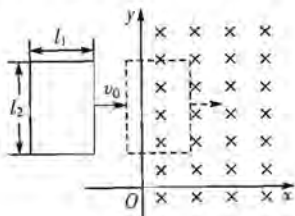


图3-4-12

$$E_L - E_v = -L \frac{\Delta i}{\Delta t} - vBl_2 = iR = 0. \quad (1)$$

即

$$L \frac{\Delta i}{\Delta t} + Bl_2 \frac{\Delta x}{\Delta t} = 0; \quad (2)$$

或

$$Bl_2 \Delta x = -L \Delta i. \quad (3)$$

即

$$\frac{\Delta i}{\Delta x} = -\frac{Bl_2}{L}. \quad (4)$$



可见,  $i$  与  $x$  成线性关系, 有

$$i = -\frac{Bl_2}{L}x + C. \quad (5)$$

式中  $C$  为一待定常数. 注意到  $x=0$  时,  $i=0$ , 可得  $C=0$ , 故有

$$i = -\frac{Bl_2}{L}x. \quad (6)$$

当  $x>0$  时,  $i<0$ ; 电流为负值表示线框中电流的方向与设定的正方向相反, 即在线框进入磁场区域时右侧边的电流的实际流向是向上的. 外磁场作用于线框的安培力

$$f = Bl_2 i = -\frac{B^2 l_2^2}{L}x, \quad (7)$$

其大小与线框位移  $x$  成正比, 方向与位移  $x$  相反, 具有“弹性力”的性质. 下面分两种情形做进一步分析:

(1) 若线框的初速度  $v_0$  较小, 在安培力的作用下, 当它的速度减为零时, 整个线框未全部进入磁场区. 这时, 在安培力的继续作用下, 线框将反向运动, 最后退出磁场区. 线框一进一出的运动是一个简谐振动在半个周期内的运动, 振动的圆频率

$$\omega = \sqrt{\frac{B^2 l_2^2}{Lm}}. \quad (8)$$

周期

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Lm}{B^2 l_2^2}}. \quad (9)$$

振动的振幅可由能量关系求得. 令  $x_m$  表示线框速度减为零时进入磁场区的深度. 这时, 线框的初始动能全部转换为“弹性力”的“弹性势能”. 由能量守恒可得

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{B^2 l_2^2}{L}\right)x_m^2. \quad (10)$$

可得

$$x_m = \sqrt{\frac{Lmv_0^2}{B^2 l_2^2}}. \quad (11)$$

故线框的运动方程为

$$x = \frac{v_0 \sqrt{Lm}}{Bl_2} \sin\left(\frac{Bl_2}{\sqrt{Lm}}t\right) \quad (0 \leq t \leq \pi \frac{\sqrt{Lm}}{Bl_2}). \quad (12)$$

半个周期后, 线框退出磁场区, 将以速度  $v_0$  向左匀速运动. 在这种情况下  $x_m$  的最大值是  $l_1$ , 即

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}\frac{B^2 l_2^2}{L}l_1^2. \quad (13)$$

由此可知, 发生第①种情况时,  $v_0$  的值要满足下式

$$\frac{1}{2}mv_0^2 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{B^2 l_2^2}{L}\right)l_1^2.$$

即

$$v_0 \leq \frac{Bl_1 l_2}{\sqrt{mL}} \quad (14)$$

(2)若线框的初速度  $v_0$  较大,整个线框能全部进入磁场区;当线框刚进入磁场区时,其速度仍大于零,这就要求  $v_0$  满足下式:

$$v_0 > \frac{Bl_2 l_1}{\sqrt{mL}} \quad (15)$$

当线框的初速度满足⑮式时,线框能全部进入磁场区,在全部进入磁场区域以前,线框的运动方程与⑫式相同,但位移区间是  $x=0 \sim l_1$ ,所以时间间隔与⑫式不同,而是从 0 到

$$t_1 = \frac{\sqrt{Lm}}{Bl_2} \left[ \arcsin \frac{Bl_1 l_2}{\sqrt{Lm} v_0^2} \right]. \quad (16)$$

因为线框的总电动势总是为零,所以一旦线框全部进入磁场区域,线框的两条边都切割磁感应线,所产生的电动势之和为零,因而自感电动势也为零.此后,线框中维持有最大的电流  $i_m = \frac{-Bl_2}{L} l_1$ ,磁场对线框两条边的安培力的合力等于零;线框将在磁场区域匀速前进,运动的速度可由下式决定.

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2 l_2^2}{L} l_1^2.$$

即

$$v = \sqrt{v_0^2 - \frac{B^2 l_1^2 l_2^2}{Lm}}.$$

**例 7** (2002·全国物理复赛题) 在图 3-4-13 中,半径为  $R$  的圆柱形区域内有匀强磁场,磁场方向垂直图面指向纸外,磁感应强度  $B$  随时间均匀变化,变化率  $\frac{\Delta B}{\Delta t} = K$  ( $K$  为一正值常量). 圆柱形区外空间中没有磁场,沿图中  $AC$  弦的方向画一直线,并向外延长,弦  $AC$  与半径  $OA$  的夹角  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ . 直线上有一任意点  $P$ , 设该点与  $A$  点的距离为  $x$ , 求从  $A$  沿直线到该点的电动势的大小.

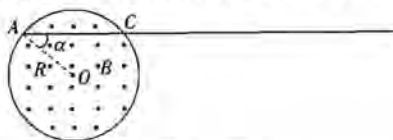


图 3-4-13

**【分析】** 求解时应明白:由对称性知涡旋电场为图线形,故不会在沿半径方向放置的导体中产生电动势.

**【解】** 由于圆柱形区域内存在变化磁场,在圆柱形区域内外空间中将产生涡



旋电场,电场线为圆,圆心在圆柱轴线上,圆面与轴线垂直,如图 3-4-14 中虚点线所示.在这样的电场中,沿任意半径方向移动电荷时,由于电场力与移动方向垂直,涡旋电场力做功为零,因此沿半径方向任意一段路径上的电动势均为零.

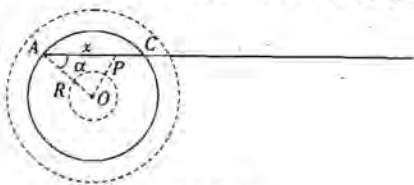


图 3-4-14

(1)任意点在磁场区域内:令  $P$  为任意点(见图 3-4-14),  $x \leq \sqrt{2}R$ . 在图中连直线  $OA$  与  $OP$ . 取闭合回路  $APOA$ , 可得回路电动势  $E_1 = E_{AP} + E_{PO} + E_{OA}$ , 式中  $E_{AP}$ 、 $E_{OP}$ 、 $E_{OA}$  分别为从  $A$  到  $P$ 、从  $P$  到  $O$ 、从  $O$  到  $A$  的电动势. 由前面的分析可知  $E_{PO} = 0$ ,  $E_{OA} = 0$ , 故

$$E_{AP} = E_1. \quad (1)$$

令  $\triangle AOP$  的面积为  $S_1$ , 此面积上磁通量  $\Phi_1 = BS_1$ , 由电磁感应定律, 回路的电动势大小为

$$E_1 = \frac{\Delta\Phi_1}{\Delta t} = S_1 \frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

根据题给的条件有

$$E_1 = S_1 K. \quad (2)$$

由图 3-4-14 可知

$$S_1 = \frac{1}{2} xR \sin\alpha = \frac{xR}{2\sqrt{2}}. \quad (3)$$

由①②③式可得沿  $AP$  线段的电动势大小为

$$E_{AP} = \frac{KR}{2\sqrt{2}} x. \quad (4)$$

2. 任意点在磁场区域外: 令  $Q$  为任意点(见图 3-4-15),  $x > \sqrt{2}R$ . 在图中连  $OA$ 、 $OQ$ . 取闭合回路  $AQOA$ , 设回路中电动势为  $E_2$ , 根据类似上面的讨论有

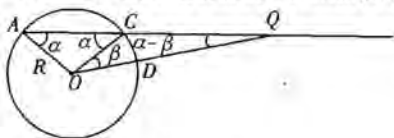


图 3-4-15

$$E_{AQ} = E_2. \quad (5)$$

对于回路  $AQOA$ , 回路中磁通量等于回路所包围的磁场区的面积的磁通量, 此面积为  $S_2$ , 通过它的磁通量  $\Phi_2 = BS_2$ . 根据电磁感应定律可知回路中电动势的大小



$$E_2 = S_2 K. \quad (6)$$

在图中连  $OC$ , 令  $\angle COQ = \beta$ , 则  $\angle OQC = \alpha - \beta$ , 于是

$$\begin{aligned} S_2 &= \triangle AOC \text{ 的面积} + \text{扇形 } OCD \text{ 的面积} = \left( \frac{1}{2} R \sin \alpha \right) \cdot 2R \cos \alpha + \frac{\beta}{2\pi} \pi R^2 \\ &= \frac{1}{2} R^2 (\sin 2\alpha + \beta). \end{aligned}$$

$$\text{当 } \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ 时,} \quad S_2 = \frac{1}{2} R^2 (1 + \beta).$$

$\triangle OCQ$  中有

$$\frac{x - \sqrt{2}R}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin\left(\frac{\pi - \beta}{4}\right)}.$$

$$R \sin \beta = (x - \sqrt{2}R) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) = (x - \sqrt{2}R) \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \beta - \sin \beta).$$

$$\left(R + \frac{x - \sqrt{2}R}{\sqrt{2}}\right) \sin \beta = \frac{(x - \sqrt{2}R)}{\sqrt{2}} \cos \beta.$$

$$\tan \beta = \frac{x - \sqrt{2}R}{x}.$$

于是得

$$S_2 = \frac{1}{2} R^2 \left(1 + \arctan \frac{x - \sqrt{2}R}{x}\right). \quad (7)$$

由⑤⑥⑦式可得沿  $AQ$  线的电动势的大小为

$$E_{AQ} = \frac{KR^2}{2} \left(1 + \arctan \frac{x - \sqrt{2}R}{x}\right).$$

**题 8** (1999·全国物理复赛题) 用直径为 1 mm 的超导材料制成的导线做成 1 个半径为 5 cm 的圆环. 圆环处于超导状态, 环内电流为 100 A. 经过一年, 经检测发现, 圆环内电流的变化量小于  $10^{-6}$  A. 试估算该超导材料电阻率数量级的上限.

**提示:** 半径为  $r$  的圆环中通以电流  $I$  后, 圆环中心的磁感应强度为  $B = \frac{\mu_0 I}{2r}$ , 式中  $B, I, r$  各量均用国际单位,  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$ .

**【分析】** 圆环内电流缓慢减小, 使穿过环面的磁通量发生变化, 由法拉第电磁感应定律不准算出环中的感应电动势大小, 再由闭合电路欧姆定律、电阻定律求得圆环导线的电阻和电阻率.

**【解】** 根据题中所给的条件, 当圆环内通过电流  $I$  时, 圆环中心的磁感应强度

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r}.$$

穿过圆环的磁通量可近似为



$$\Phi \approx BS = \frac{\mu_0}{2} \pi I r. \quad (1)$$

根据法拉第电磁感应定律, 电流变化产生的感应电动势的大小

$$E = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \frac{\mu_0}{2} \pi r \frac{\Delta I}{\Delta t}. \quad (2)$$

圆环的电阻

$$R = \frac{E}{I} = \frac{\mu_0 \pi r}{2I} \frac{\Delta I}{\Delta t}. \quad (3)$$

由题设条件  $r = 0.05 \text{ m}$ ,  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$ ,  $I = 100 \text{ A}$ ,  $\frac{\Delta I}{\Delta t} \leq 10^{-6} \text{ A} \cdot \text{y}^{-1} \approx 3 \times 10^{-14} \text{ A} \cdot \text{s}^{-1}$ , 代入③式得

$$R \leq 3 \times 10^{-23} \Omega. \quad (4)$$

由电阻与电阻率  $\rho$ 、导线截面积  $S$ 、长度  $l$  的关系  $R = \rho \frac{l}{S}$  及已知导线的直径  $d = 1 \text{ mm}$ 、环半径  $r = 5 \text{ cm}$ , 得电阻率

$$\rho = R \frac{S}{l} = R \frac{d^2}{8r} = 7.5 \times 10^{-29} \Omega \cdot \text{m}. \quad (5)$$

**【讨论】** 常温下金属导体的电阻率的数量级是  $10^{-6} \Omega \cdot \text{m} \sim 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ , 相比之下本题中的环形导线的电阻率可以为无限小, 处于超导状态。

**题 9** (2003·全国物理竞赛题) 如图 3-4-16 所示, 金属飞轮具有  $n$  条辐条, 每条辐条长  $l$ , 可绕转轴  $OO'$  旋转. 飞轮处在匀强磁场中, 磁场方向与转轴平行, 磁感应强度为  $B$ . 转轴与飞轮边缘通过电刷与电阻  $R$ 、电感  $L$  连成闭合回路. 飞轮及转轴的电阻和转动过程的摩擦均不计.

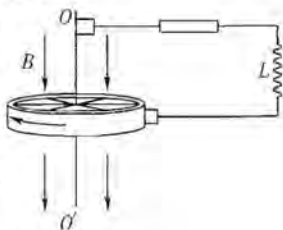


图 3-4-16

现用一恒定的外力矩  $M$  作用于飞轮, 使它由静止开始转动, 求当飞轮转动达到稳定时, 转动角速度  $\Omega_0$  和通过电阻  $R$  的电流  $I_0$ .

**【分析】** 本题应综合考虑辐条中的感应电动势和由此产生的安培力, 注意安培力对飞轮形成阻力矩  $M_B$ , 飞轮稳定时, 必有  $M = M_B$ . 撤去外力矩后, 飞轮将在逐渐减小的阻力矩下做变减速转动, 直至静止.

**【解】** 当飞轮的角速度为  $\Omega$  时, 每一辐条中的感应电动势为

$$E = \frac{1}{2} l^2 B \Omega. \quad (1)$$

当有电流  $I$  通过电阻  $R$  时, 每条辐条中的电流

$$I' = \frac{1}{n} I. \quad (2)$$

受到的安培力

$$F' = BI I'. \quad (3)$$



安培力对转轴的磁力矩

$$M_B' = \frac{1}{2} l F' \quad (4)$$

作用于整个飞轮的总磁力矩

$$M_B = n M_B' \quad (5)$$

当  $M = M_B$  时, 飞轮做匀速转动, 即转动达到稳定, 这时  $\Omega = \Omega_0$ ,  $I = I_0$ . 由以上各式得

$$M = \frac{1}{2} B l^2 I_0 \quad (6)$$

$$E = \frac{1}{2} B l^2 \Omega_0 \quad (7)$$

由欧姆定律有

$$E = I_0 R \quad (8)$$

解式⑥⑦和⑧得

$$I_0 = \frac{2M}{l^2 B}$$

$$\Omega_0 = \frac{4MR}{l^4 B^2}$$

**题 10.** (2001·全国物理决赛题) 圆形线圈  $C$  的轴线  $z$  沿水平方向. 有一用软铁硼材料制成的圆柱形强磁体  $M$ , 其圆形端分别为  $N$  极和  $S$  极, 将磁体  $M$  与线圈  $C$  共轴放置. 磁体的对称中心置于  $z$  轴的原点  $O$ .  $Q$  点是线圈  $C$  对称截面的圆心, 当  $Q$  点位于  $z$  轴不同位置时, 用实验的方法测得穿过线圈  $C$  的总磁通量  $\Phi$ . 由此测得的  $\Phi$  值沿  $z$  轴的分布函数图线如图 3-4-17 所示. 图中横轴上  $z$  值是  $Q$  点的坐标. 现令强磁体  $M$  沿线圈的轴线方向穿过该线圈  $C$ , 将  $C$  两端接一电阻, 其阻值  $R = 1000 \Omega$ , 远大于线圈的电阻阻值. 将接在电阻  $R$  两端的电压信号通过计算机实时处理[如图 3-4-17(b)所示], 可在计算机屏幕上显示出线圈  $C$  两端的电压信号如图 3-4-18 所示, 信号轨迹近似看做三角波形.

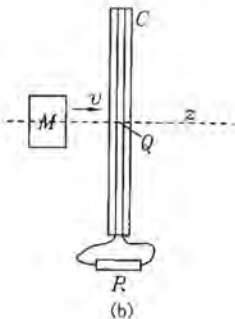
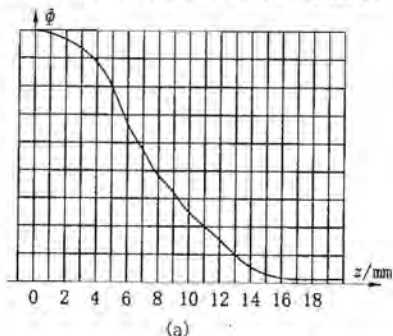


图 3-4-17

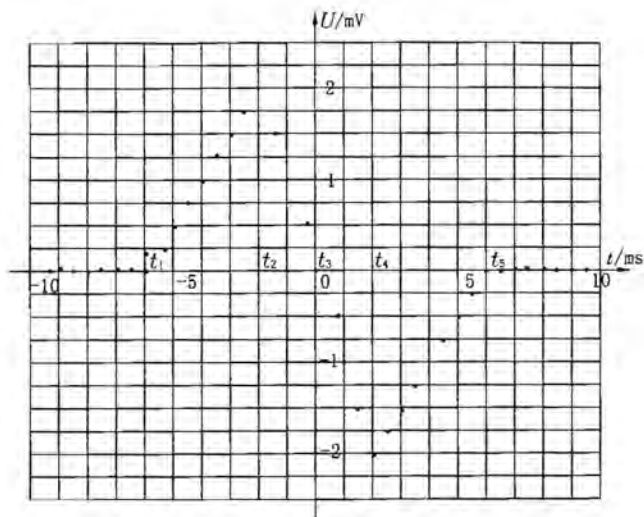


图 3-4-18

(1) 试估算强磁体  $M$  通过线圈时的速度。(不计线圈中的感应电流对运动磁体的影响)

(2) 试求题图 3-4-18 中,  $t_1$  至  $t_3$  期间流过电阻  $R$  的电荷量.

**【分析】** 当强磁体以恒定速度  $v$  通过线圈  $C$  时,产生的感应电动势  $E = \left| \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right| = \left| \frac{\Delta\Phi}{\Delta z} v \right|$ , 其大小与  $\left| \frac{\Delta\Phi}{\Delta z} \right|$  即题图 3-4-17(a) 中  $\Phi-z$  曲线的斜率成正比, 因此在题图 3-4-17(a) 和 3-4-18 中分别寻找  $E = E_m$  (本题中可认为  $E = U$ ) 的空间位置 and 对应时刻是解题的关键. 最后磁体的速度可由  $\frac{\Delta z}{\Delta t}$  计算.

在  $\Delta t$  时间内流过电阻  $R$  的电荷量  $\Delta Q = i\Delta t = \frac{U}{R} \Delta t$ . 而  $U\Delta t$  则为题图 3-4-18 中相应曲线下的面积. 图解法是本题求解的一个重要手段.

**【解】** (1) 当磁体  $M$  向线圈  $C$  靠拢时, 穿过线圈  $C$  的总磁通量  $\Phi$  随  $Q$  点的坐标  $z$  的改变而变化, 因而在线圈内产生感应电动势  $E$ , 其数值为

$$E = \left| \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right| \quad (1)$$

当磁体以速度  $v$  穿过线圈  $C$  时, 在  $\Delta t$  时间内  $z$  的改变量为  $\Delta z = v\Delta t$ , 代入①式得

$$E = \left| \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right| = \left| \frac{\Delta\Phi}{\Delta z} v \right| \quad (2)$$



所以  $E$  的大小与  $\Phi-z$  曲线各点的斜率的绝对值成正比,  $E$  的最大值与  $\frac{\Delta\Phi}{\Delta z}$  的最大值相对应. 用三角板与图 3-4-19 中的曲线的不同点相切, 在  $z=6\text{ mm}$  处斜率最大, 此点应对应于电动势最大值. 计算机实时测得的数据是电阻  $R$  两端的电压值  $U$ , 因其阻值远大于线圈  $C$  的阻值, 因而从  $U=E$ , 图 3-4-20 中的  $t_2$  时刻的  $U_M$  应对应于  $C$  位于  $z=6\text{ mm}$  处的电压值. 在  $t_1$  至  $t_2$  时间内, 随着磁体  $M$  向线圈  $C$  靠拢,  $\frac{\Delta\Phi}{\Delta z}$  的绝对

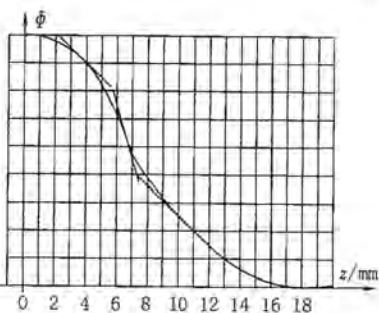


图 3-4-19

值逐渐增大,  $t_2$  时刻以后, 从图 3-4-32 可见, 在  $0 \leq z < 6\text{ mm}$  空间范围内, 磁通量  $\Phi$  虽继续增大, 但磁通量随空间的变化率却在减缓, 表明随着磁体  $M$  向前运动, 与  $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$  成正比的电压  $U$  逐渐减小. 当磁体  $M$  的中点与线圈的  $Q$  点重合时, 总磁通量  $\Phi$  增至最大, 但  $\frac{\Delta\Phi}{\Delta z}$  为零, 对应于图 3-4-20 中  $t_3$  时刻的  $U$  值为零. 当磁体  $M$  由左向右继续前进,  $\Phi$  的切线倾斜方向相反, 表明  $C$  中感应电动势反向, 流过电阻的电流反向,  $U$  数值变为负, 绝对值逐渐增大. 根据对称性, 在  $t_4$  时刻, 应对应于线圈  $C$  的  $Q$  点位于  $z=-6\text{ mm}$  处,  $\frac{\Delta\Phi}{\Delta z}$  的绝对值也是最大值, 对照图 3-4-19, 此时刻, 对应电压的绝对值最大.  $t_4$  时刻以后, 磁体  $M$  远离线圈  $C$ , 感应电动势  $E$  绝对值逐渐减小至零. 由图 3-4-20 可见,  $t_2$  至  $t_4$  时间间隔为  $4\text{ ms}$ , 磁体  $M$  通过距离应等于两个磁通量变化率最大值之间的距离  $\Delta s = 2 \times 6\text{ mm} = 0.012\text{ m}$ , 故

$$v = \frac{\Delta s}{t_4 - t_2} = 3\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (3)$$

$$(2) \text{ 通过电阻 } R \text{ 的电流 } i \text{ 为 } i = \frac{U}{R}. \quad (4)$$

由于  $U$  随时间  $t$  不断变化,  $i$  也随时间不断变化, 在很短时间间隔  $\Delta t$  内流过电阻  $R$  的电荷量  $\Delta Q$  为

$$\Delta Q = i \Delta t = \frac{U}{R} \Delta t. \quad (5)$$

$U \Delta t$  表示图 3-4-20 中三角形面积内一个很小时间间隔  $\Delta t$  的矩形面积, 在  $t_1$  到  $t_3$  时间间隔中流过电阻  $R$  的总电荷量  $Q$  应为所有这些  $\Delta Q$  之和, 即

$$Q = \sum \Delta Q = \frac{1}{R} \sum U \Delta t. \quad (6)$$

等式右端的取和值就是图 3-4-20 中  $t_1$  到  $t_3$  所对应的三角形面积, 因三角形

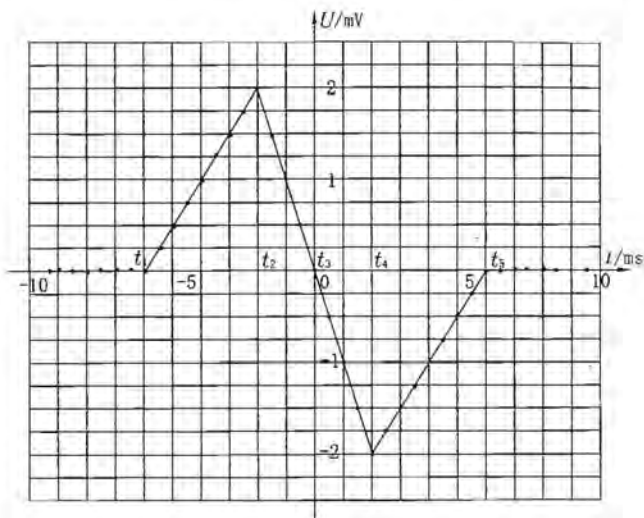


图 3-4-20

的顶点  $U=2\text{ mV}$ ,  $t_3-t_1=6\text{ ms}$ , 故三角形面积为

$$\frac{1}{2} [U_M(t_3-t_1)] = 6 \times 10^{-6}.$$

代入⑥式得

$$Q = 6 \times 10^{-9} \text{ C}.$$

⑦

## 第五节 交 变 电 流

**题 1** (1998·全国物理预赛题) 某电视台有一台用于智力竞赛的抢答显示系统(抢答机), 它可供红、黄、蓝三个参赛队使用. 抢答机用继电器控制, 其线路如图 3-5-1 所示(参见后附说明). 主持人宣布问题要求抢答, 然后说“现在开始”以后, 最先按下按钮的队的指示灯点亮, 其余任何一个队再按按钮则无任何反应. 而亮灯的队松开按钮后其指示灯依然点亮. 若在主持人说“现在开始”前任何一个队违规提前按按钮, 导致自己的指示灯点亮, 主持人即可判定该队犯规. 为了解除某队指示灯点亮的状态, 主持人只需按一下自己操作台上的按钮, 即可恢复初始的待命状态. 现在为能满足四个队参加比赛, 必须增加一个供绿队使用的绿灯线路, 为此需将原线路改装, 技术人员已将部分线路连好, 如图 3-5-2 所示. 请你将尚未完成的接线继续接受, 使其整体成为一台供四个队参赛用的抢答机.

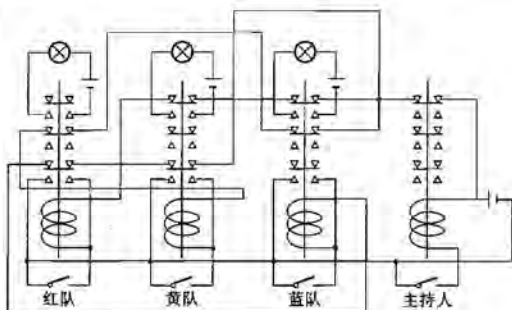


图 3-5-1

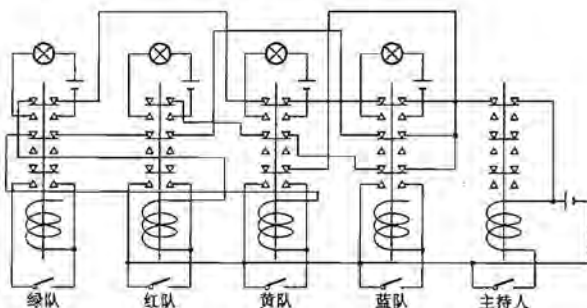


图 3-5-2

说明:

(1) 各图中——表示按钮开关,按下时为接通,松手时自动弹起为断开。

(2) 图 3-5-3 中  $L$  为电磁铁线圈,不通电时,继电器不吸合,如左图所示,这时三对常闭接点  $A_1$  与  $A_1'$  接通,  $A_2$  与  $A_2'$  接通,  $A_3$  与  $A_3'$  接通;三对常开接点  $B_1$  与  $B_1'$ ,  $B_2$  与  $B_2'$ ,  $B_3$  与  $B_3'$  均不接通。 $L$  通电时,继电器吸合,如右图所示。三对常闭接点断开,三对常开接点中  $B_1$  与  $B_1'$  接通,  $B_2$  与  $B_2'$  接通,  $B_3$  与  $B_3'$  接通。

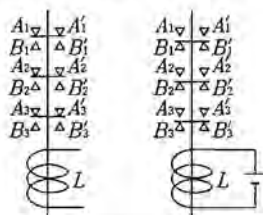


图 3-5-3

(3) 作图时,不连接的交叉线如图 3-5-4 所示。

(4) 两连接的交叉线,在连接处画上黑点,如图 3-5-5 所示。

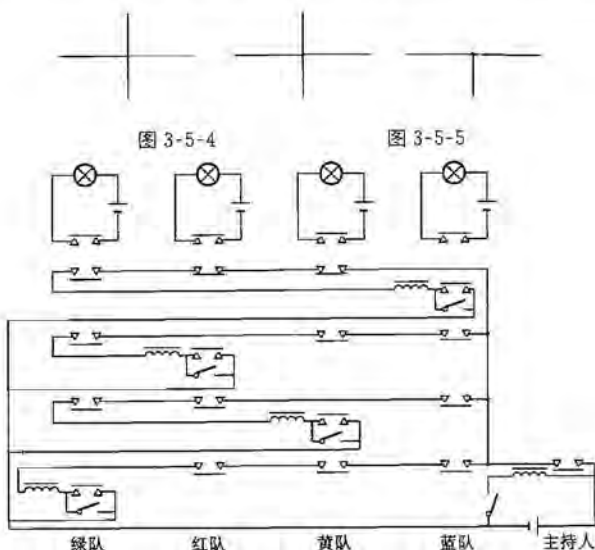


图 3-5-6

**【分析】** 图 3-5-6 是抢答机的工作原理图。

当蓝队按按钮时,蓝队的继电器线圈通电,衔铁吸合,一方面使两对常开接点闭合,点亮本队指示灯,同时保持线圈通电;另一方面使三对常闭接点断开,其他各队的继电器线圈就无法接通,指示灯也无法点亮。其余类推。

**【解】** 需补添的连线如图 3-5-7 中粗线所示。

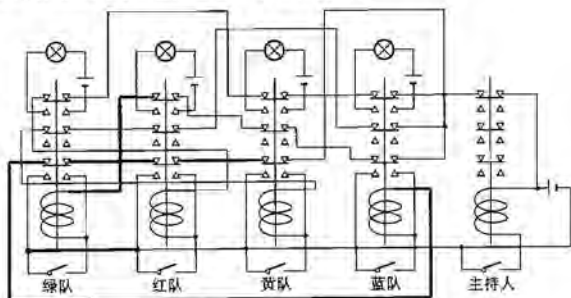


图 3-5-7

**【讨论】** 继电器是自动控制线路中的基本元件。本题涉及到继电器线圈通电后能自动保持吸合功能、常开接点和常闭接点的切换与实际紧密联系的新知识,对学生拓宽知识面、扩大思维空间、培养创造思维有很大的帮助。



## 第六节 电磁振荡和电磁波 非线性电路

**题 1** (1999·全国物理预赛题) 如图 3-6-1(a)所示, 电阻  $R_1=R_2=1\text{ k}\Omega$ , 电动势  $E=6\text{ V}$ , 2 个相同的二极管  $D$  串联在电路中, 二极管  $D$  的  $I_D-U_D$  特性曲线如图 3-6-1(b)所示. 试求:

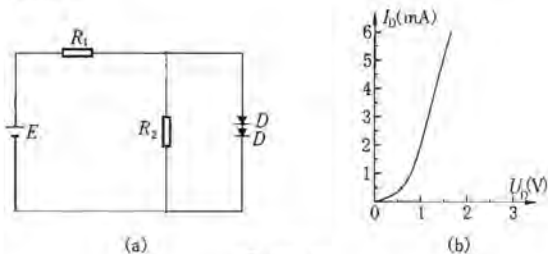


图 3-6-1

- (1) 通过二极管  $D$  的电流.
- (2) 电阻  $R_1$  消耗的功率.

**【分析】** 题中只给出了二极管的  $I_D-U_D$  特性曲线, 因此只能用图象法求解. 为此把电阻  $R_1$  看成电源的内阻, 写出电源的路端电压和电流的关系方程式, 并作出其对应的伏安特性曲线, 两图线的交点就是电路的工作点.

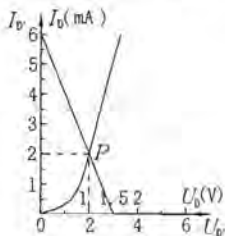


图 3-6-2

**【解】** 方法 1: 设每个二极管  $D$  两端的管压为  $U_D$ , 流过二极管的电流为  $I_D$ . 则有

$$2U_D = E - \left( I_D + \frac{2U_D}{R_2} \right) R_1. \quad (1)$$

代入数据解得  $U_D$  与  $I_D$  的关系为

$$U_D = (1.5 - 0.25I_D \times 10^3) \text{ V}. \quad (2)$$

这是一个在图 3-6-2 中横轴上截距为 1.5、纵轴上截距为 6、斜率为 -4 的直线方程(称为二极管的负载线). 因管压  $U_D$  与流过二极管电流  $I_D$  还受二极管  $D$  的  $I_D-U_D$  特性曲线的限制, 因而二极管就工作在负载线与  $I_D-U_D$  特性曲线的相交点



$P$  上(见图 3-6-2), 由此得二极管两端的管压和电流分别为

$$U_D = 1 \text{ V}, I_D = 2 \text{ mA}. \quad (3)$$

电阻  $R_1$  上的电压

$$U_1 = E - 2U_D = 4 \text{ V}.$$

其功率为

$$P_1 = \frac{U_1^2}{R_1} = 16 \text{ mW}. \quad (4)$$

方法 2: 设两个二极管用一个等效二极管  $D'$  代替, 当流过等效二极管的电流为  $I_{D'}$  时, 等效二极管的管压为  $U_{D'} = 2U_D$ . 即有

$$U_{D'} = E - \left( I_{D'} + \frac{U_{D'}}{R_2} \right) R_1. \quad (1')$$

代入数据解得  $U_{D'}$  与  $I_{D'}$  的关系为

$$U_{D'} = (3 - 0.5I_{D'} \times 10^3) \text{ V}. \quad (2')$$

这是一在横轴上截距为 3, 纵轴上截距为 6, 斜率为 -2 的负载线方程, 二极管  $D'$  的  $I_{D'} - U_{D'}$  特性曲线只要将图 3-6-2 的横坐标增大一倍即可. 用作图法, 求出负载线与管  $D'$  的特性曲线相交的  $P$  点得

$$U_{D'} = 2 \text{ V}, I_{D'} = 2 \text{ mA}. \quad (3')$$

电阻  $R_1$  上的电压

$$U_1 = E - U_{D'} = 4 \text{ V}.$$

其功率

$$P_1 = \frac{U_1^2}{R_1} = 16 \text{ mW}. \quad (4')$$

**【讨论】** 用图象法解题是求解物理问题的基本方法之一. 读者要理解并掌握这种方法的数学依据与物理思路.

**题 2** (2006·全国物理复赛题) 图 3-6-3 所示的电路具有把输入的交流电压变成直流电压并加以升压、输出的功能, 称为整流倍压电路. 图中  $D_1$  和  $D_2$  是理想的、点接触型二极管(不考虑二极管的电容),  $C_1$  和  $C_2$  是理想电容器, 它们的电容都为  $C$ , 初始时都不带电,  $G$  点接地. 现在  $A, G$  间接上一交电源, 其电压  $u_A$  随时间  $t$  变化的图线如图 3-6-4 所示. 试分别在图 3-6-5 和图 3-6-6 中准确地画出  $D$  点的电压  $u_D$  和  $B$  点的电压  $u_B$ , 在  $t=0$  到  $t=2T$  时间间隔内随时间  $t$  变化的图线.  $T$  为交流电压  $u_A$  的周期.

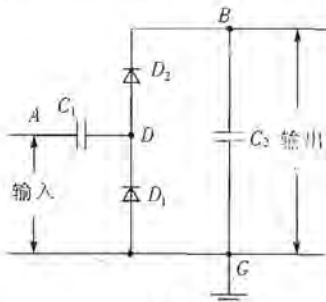


图 3-6-3

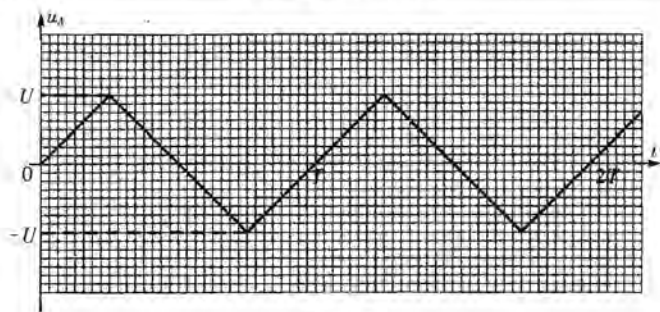


图 3-6-4

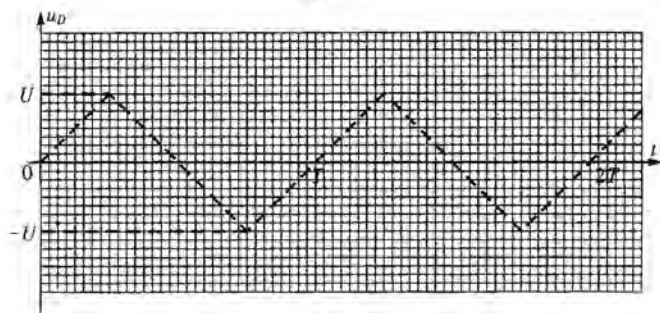


图 3-6-5

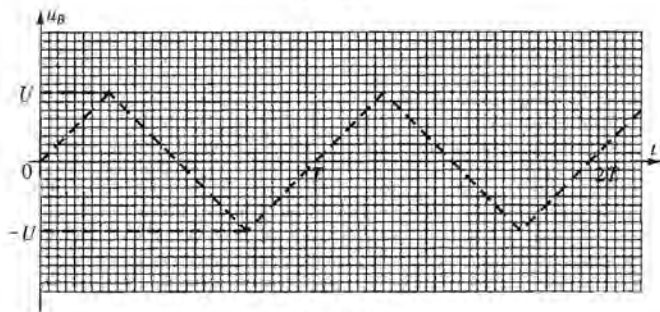


图 3-6-6

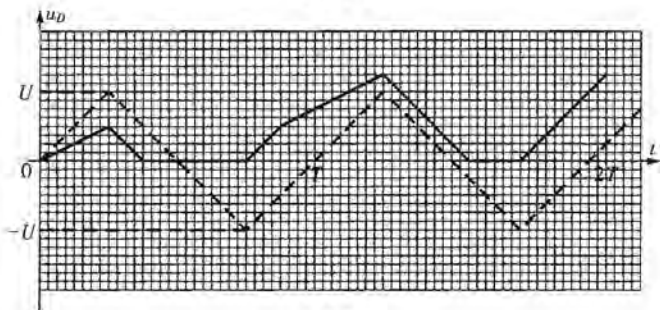


图 3-6-7

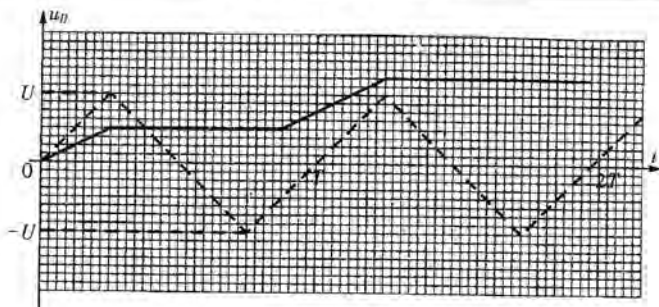


图 3-6-8

**【分析】** 本题虽是一个作图题,但实质考察了读者对二极管导通或截止时的特性,电容器的影响以及题给电路在不同输入电压情况时状态的理解.求解时可按  $D_1$  截止  $D_2$  导通、 $D_1$  和  $D_2$  均截止以及  $D_1$  导通  $D_2$  截止三种可能状态(画出等效电路)逐一仔细分析.

**【解】**  $u_D$  如图 3-6-7 所示,  $u_B$  如图 3-6-8 所示.

附参考解法:

二极管可以处在导通和截止两种不同的状态.不管  $D_1$  和  $D_2$  处在什么状态,若在时刻  $t$ , A 点的电压为  $u_A$ , D 点的电压为  $u_D$ , B 点的电压为  $u_B$ , 电容器  $C_1$  两极间的电压为  $u_{C1}$ , 电容器  $C_2$  两极间的电压为  $u_{C2}$ , 则有

$$u_D = u_A - u_{C1}. \quad (1)$$

$$u_B = u_{C2}. \quad (2)$$

$$u_{C1} = \frac{q_1}{C}. \quad (3)$$

$$u_{C2} = \frac{q_2}{C}. \quad (4)$$

式中  $q_1$  为  $C_1$  与 A 点连接的极板上的电荷,  $q_2$  为  $C_2$  与 B 点连接的极板上的电荷.

若二极管  $D_1$  截止,  $D_2$  导通, 则称电路处在状态 I. 当电路处在状态 I 时有

$$u_D = u_B, u_D > 0. \quad (5)$$

若二极管  $D_1$  和  $D_2$  都截止, 则称电路处在状态 II. 当电路处在状态 II 时有

$$u_D < u_B, u_D > 0. \quad (6)$$

若二极管  $D_1$  导通,  $D_2$  截止, 则称电路处在状态 III. 当电路处在状态 III 时有

$$u_D < u_B, u_D = 0. \quad (7)$$

电路处在不同状态时的等效电路如图 3-6-9 所示.

在  $t=0$  到  $t=2T$  时间间隔内,  $u_D$ 、 $u_B$  随时间  $t$  的变化情况分析如下:

1. 从  $t=0$  起,  $u_A$  从 0 开始增大, 电路处在状态 I,  $C_1$ 、 $C_2$  与电源组成闭合回路. 因  $C_1$ 、 $C_2$  的电容相等, 初始时两电容器都不带电, 故有

$$u_D = u_B = \frac{1}{2} u_A.$$

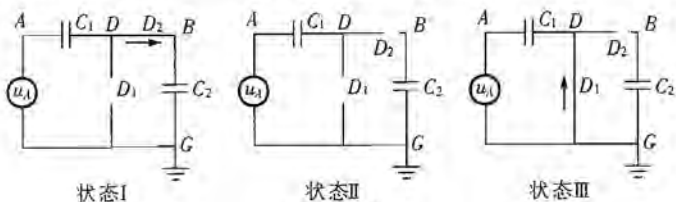


图 3-6-9

在  $u_A$  达到最大值即  $u_A = U$  时, 对应的时刻为  $t = \frac{1}{4}T$ , 这时  $u_D = u_B = \frac{1}{2}U$ , 也达到最大值.  $u_A$  达到最大值后将要减小, 由于  $D_2$  的单向导电性, 电容器  $C_1$ 、 $C_2$  都不会放电,  $u_D$  将要小于  $\frac{1}{2}U$ , 即将要小于  $u_B$ ,  $D_2$  将由导通变成截止, 电路不再处于状态 I. 所以从  $t=0$  到  $t = \frac{1}{4}T$  时间间隔内,  $u_D$ 、 $u_B$  随时间  $t$  变化的图线如图 3-6-10、图 3-6-11(见后面)中区域 I<sub>1</sub> 内的直线所示.

2. 从  $t = \frac{1}{4}T$  起, 因  $u_D$  小于  $u_B$ ,  $D_2$  处在截止状态, 电路从状态 I 变为状态 II. 因为二极管的反向电阻为无限大, 电容器  $C_1$ 、 $C_2$  都不会放电, 两极间的电压都保持不变. 当电路处在状态 II 时,  $D$  点的电压

$$u_D = u_A - \frac{1}{2}U.$$

$B$  点的电压

$$u_B = \frac{1}{2}U.$$

随着  $u_A$  从最大值  $U$  逐渐变小,  $u_D$  亦变小; 当  $u_A = \frac{1}{2}U$  时, 对应的时刻为  $t = \frac{3}{8}T$ ,  $u_D = 0$ . 如果  $u_A$  小于  $\frac{1}{2}U$ , 则  $u_D$  将小于零,  $D_1$  要从截止变成导通, 电路不再处于状态 II. 所以在  $t = \frac{1}{4}T$  到  $t = \frac{3}{8}T$  时间间隔内,  $u_D$ 、 $u_B$  随  $t$  变化的图线如图 3-6-10 和图 3-6-11 中区域 II<sub>1</sub> 内的直线所示.

3. 从  $t = \frac{3}{8}T$  起,  $u_A$  从  $\frac{1}{2}U$  开始减小,  $D_1$  导通, 但  $D_2$  仍是截止的, 电路从状态 II 变为状态 III. 当电路处在状态 III 时有

$$u_D = 0.$$

$$u_B = \frac{1}{2}U.$$

在  $u_A$  减小的过程中,  $C_1$  两极间的电压  $u_{C1}$  也随之改变, 从而维持  $u_D$  为零. 当  $u_A$  达到反向最大值即  $u_A = -U$  时, 对应的时刻为  $t = \frac{3}{4}T$ ,  $u_{C1} = -U$ . 若  $u_A$  从  $-U$  开始增大,  $u_D$  要大于零, 因  $D_1$  的单向导电性, 电容器  $C_1$  不会放电,  $D_1$  要从导通变



成截止,电路不再处于状态Ⅲ.所以在  $t = \frac{3}{8}T$  到  $t = \frac{3}{4}T$  时间间隔内,  $u_D$ 、 $u_B$  随  $t$  变化的图线如图 3-6-10 和图 3-6-11 中区域Ⅲ<sub>1</sub> 内的直线所示.

4. 从  $t = \frac{3}{4}T$  起,  $u_A$  从  $-U$  开始增大,  $D_1$  变为截止状态, 只要  $u_D$  仍小于  $u_B$ ,  $D_2$  仍是截止的, 电路从状态Ⅲ变为状态Ⅱ. 当电路处在状态Ⅱ时,  $C_1$  和  $C_2$  不会放电, 电容器两极间的电压保持不变. 故有

$$u_D = u_A + U.$$

$$u_B = \frac{1}{2}U.$$

当  $u_A$  增大至  $-\frac{1}{2}U$  时, 对应的时刻为  $t = \frac{7}{8}T$ ,  $u_D = u_B = \frac{1}{2}U$ . 若  $u_A$  再增大,  $u_D$  将要大于  $u_B$ ,  $D_2$  将要由截止变为导通, 电路不再处于状态Ⅱ. 所以在  $t = \frac{3}{4}T$  到  $t = \frac{7}{8}T$  时间间隔内,  $u_D$ 、 $u_B$  随  $t$  变化的图线如图 3-6-10 和图 3-6-11 中区域Ⅱ<sub>2</sub> 中的直线所示.

5. 从  $t = \frac{7}{8}T$  起,  $u_A$  要从  $-\frac{1}{2}U$  增大,  $D_2$  变为导通状态, 这时  $D_1$  仍是截止的, 电路又进入状态Ⅰ. 当电路处在状态Ⅰ时, 电源与  $C_1$ 、 $C_2$  构成闭合回路, 而

$$u_D = u_B.$$

$$u_A = \frac{q_1}{C} + \frac{q_2}{C}.$$

当  $u_A$  变化时,  $q_1 + q_2$  将随之变化, 但由导通的二极管  $D_2$  连接的  $C_1$ 、 $C_2$  的两块极板所带的总电荷  $-q_1 + q_2$  是恒定不变的. 由于在  $t = \frac{7}{8}T$  时刻,  $u_{C1} = -U$ ,  $u_{C2} = \frac{1}{2}U$ , 此时  $q_1 = -CU$ ,  $q_2 = \frac{1}{2}CU$ , 故有

$$-q_1 + q_2 = CU + \frac{1}{2}CU = \frac{3}{2}CU.$$

由以上有关各式得

$$u_D = \frac{3}{4}U + \frac{1}{2}u_A = u_B.$$

$u_D$ 、 $u_B$  随着  $u_A$  的增大而增大. 当  $u_A$  达到最大值即时, 对应的时刻为  $t = \frac{5}{4}T$ ,  $u_D = u_B = \frac{5}{4}U$ .  $u_A$  达到最大值后将要减小,  $u_D$  将要小于  $\frac{5}{4}U$ , 即要小于  $u_B$ ,  $D_2$  要从导通变成截止, 电路不再是状态Ⅰ. 所以在  $t = \frac{7}{8}T$  到  $t = \frac{5}{4}T$  时间间隔内,  $u_D$ 、 $u_B$  随  $t$  变化的图线如图 3-6-10 和图 3-6-11 中Ⅰ<sub>2</sub> 中的直线所示.

6. 从  $t = \frac{5}{4}T$  起,  $u_A$  从  $U$  开始减小,  $D_2$  变成截止状态, 这时  $D_1$  仍是截止的,

电路又进入状态 II。当电路处在状态 II 时,  $C_1$  和  $C_2$  不会放电, 电容器两极间的电压保持不变。由  $t = \frac{5}{4}T$  时刻的  $u_D$  和  $u_A$  的值可知此时  $u_{C1} = -\frac{1}{4}U$ 。故有

$$u_D = u_A + \frac{1}{4}U.$$

$$u_B = \frac{5}{4}U.$$

当  $u_A$  减少至  $-\frac{1}{4}U$  时, 对应的时刻为  $t = \frac{25}{16}T$ ,  $u_D = 0$ , 以后  $D_1$  将由截止变为导通, 电路不再处在状态 II。所以在  $t = \frac{5}{4}T$  到  $t = \frac{25}{16}T$  时间内,  $u_D$ 、 $u_B$  随  $t$  变化的图线如图 3-6-10 和图 3-6-11 中 II<sub>3</sub> 中的直线所示。

7. 从  $t = \frac{25}{16}T$  起,  $u_A$  从  $-\frac{1}{4}U$  开始减小,  $D_1$  变为导通状态, 但  $D_2$  仍是截止的, 电路又进入状态 III, 故有

$$u_D = 0.$$

$$u_B = \frac{5}{4}U.$$

在  $u_A$  减小的过程中,  $C_1$  两端的电压  $u_{C1}$  也随之改变, 从而维持  $u_D$  为零。当  $u_A$  减小至  $-U$  时, 对应的时刻为  $t = \frac{7}{4}T$ ,  $u_{C1} = U$ 。  $u_A$  到达  $-U$  后要增大,  $u_D$  要大于零,  $D_1$  要从导通变为截止, 电路不再处于状态 III。所以在  $t = \frac{25}{16}T$  到  $t = \frac{7}{4}T$  时间间隔内,  $u_D$ 、 $u_B$  随  $t$  变化的图线如图 3-6-10 和图 3-6-11 中 III<sub>2</sub> 内的直线所示。

8. 从  $t = \frac{7}{4}T$  起,  $u_A$  从  $-U$  开始增大,  $D_1$  变为截止状态, 但  $D_2$  仍是截止的, 电路又进入状态 II。当电路处于状态 II 时,  $C_1$  和  $C_2$  不会放电, 电容器两极间的电压保持不变。由  $t = \frac{7}{4}T$  时刻的  $u_D$  和  $u_A$  的值可知此时  $u_{C1} = -U$ 。故有

$$u_D = u_A + U.$$

$$u_B = \frac{5}{4}U.$$

$u_D$  将随着  $u_A$  的增大而增大。当  $u_A = \frac{1}{4}U$  时, 对应的时刻  $t = \frac{33}{16}T > 2T$ ,  $u_D = \frac{5}{4}U$ , 与  $u_B$  相等。以后  $u_D$  要大于  $\frac{5}{4}U$ ,  $D_2$  要从截止变为导通, 电路不再是状态 II。所以在  $t = \frac{7}{4}T$  到  $t = 2T$  时间间隔内,  $u_D$ 、 $u_B$  随  $t$  变化的图线如图 3-6-10 和图 3-6-11 中 II<sub>4</sub> 内的直线所示。

总结以上讨论, 各时段起讫时刻及  $u_D$  和  $u_B$  变化值如下表所示:



时段	1	2	3	4	5	6	7	8
	I <sub>1</sub>	II <sub>1</sub>	III <sub>1</sub>	II <sub>2</sub>	I <sub>2</sub>	II <sub>3</sub>	III <sub>2</sub>	II <sub>4</sub>
	$0 \rightarrow \frac{T}{4}$	$\frac{T}{4}$ $\rightarrow \frac{3T}{8}$	$\frac{3T}{7}$ $\rightarrow \frac{3T}{4}$	$\frac{3T}{4}$ $\rightarrow \frac{7T}{8}$	$\frac{7T}{8}$ $\rightarrow \frac{5T}{4}$	$\frac{5T}{4}$ $\rightarrow \frac{25T}{16}$	$\frac{25T}{16}$ $\rightarrow \frac{7T}{4}$	$\frac{7T}{4}$ $\rightarrow 2T$
$u_D$	$0 \rightarrow \frac{U}{2}$	$\frac{U}{2} \rightarrow 0$	0	$0 \rightarrow \frac{U}{2}$	$\frac{U}{2}$ $\rightarrow \frac{5U}{4}$	$\frac{5U}{4} \rightarrow 0$	0	$0 \rightarrow U$
$u_B$	$0 \rightarrow \frac{U}{2}$	$\frac{U}{2}$		$\frac{U}{2} \rightarrow \frac{5U}{4}$		$\frac{5U}{4}$		

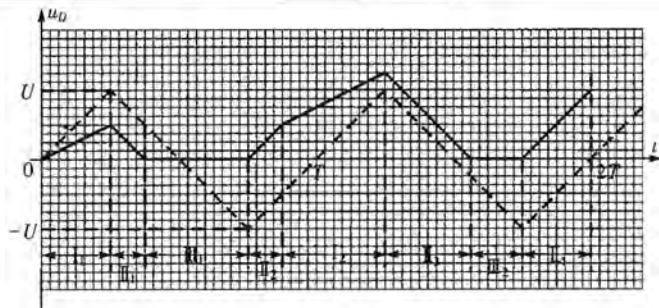


图 3-6-10

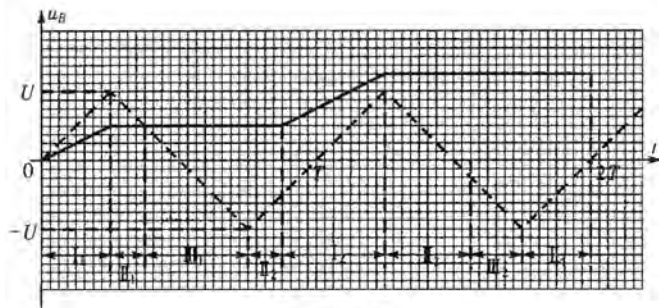


图 3-6-11



## 第七节 电磁学综合

**题 1** (2008·全国物理预赛题) (1)如图 3-7-1 所示,一 U 形光滑导轨串有一电阻  $R$ ,放置在匀强的外磁场中,导轨平面与磁场方向垂直.一电阻可忽略不计但有一定质量的金属杆  $ab$  跨接在导轨上,可沿导轨方向平移.现从静止开始对  $ab$  杆施以向右的恒力  $F$ .若忽略杆和 U 形导轨的自感,则在杆运动过程中,下列哪种说法是正确的? ( ).

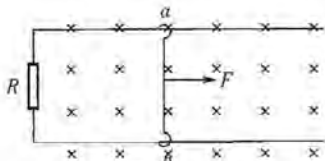


图 3-7-1

- A. 外磁场对载流杆  $ab$  的作用力对  $ab$  杆做功,但外磁场的能量是不变的  
 B. 外力  $F$  的功总是等于电阻  $R$  上消耗的功  
 C. 外磁场对载流杆  $ab$  作用力的功率与电阻  $R$  上消耗的功率,两者的大小是相等的  
 D. 电阻  $R$  上消耗的功率存在最大值

(2)图 3-7-2 中  $L$  是绕在铁心上的线圈,它与电阻  $R, R_0$ 、电键和电池  $E$  可构成闭合回路.线圈上的箭头表示线圈中电流的正方向:当电流的流向与箭头所示的方向相同时,该电流为正;否则为负.电键  $K_1$  和  $K_2$  都处于断开状态.设在  $t=0$  时刻,接通电键  $K_1$ ,经过一段时间,在  $t=t_1$  时刻,再接通电键  $K_2$ ,则能较正确地表示  $L$  中的电流  $I$  随时间  $t$  变化的图线是下面给出的四幅图中的哪幅图? ( ).

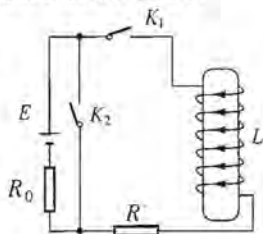


图 3-7-2

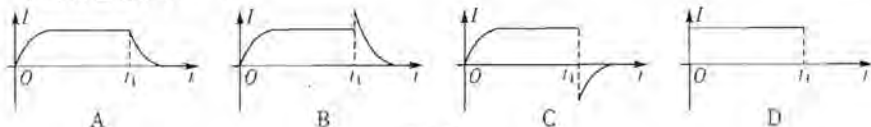


图 3-7-3

**【分析】** 第(1)小题涉及磁场、电磁感应以及电流等方面的概念和知识.第(2)小题考虑电键闭合瞬间自感电动势所起作用.

**【解】** (1)A、C、D;(2)A.

**题 2** (2008·全国物理复赛题) (1)在国际单位制中,库仑定律写成  $F = \frac{kq_1q_2}{r^2}$ ,式中静电力常量  $k = 8.98 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$ ,电荷量  $q_1$  和  $q_2$  的单位都是 C,距



高  $r$  的单位是  $m$ , 作用力  $F$  的单位是  $N$ . 若把库仑定律写成更简洁的形式  $F = \frac{q_1 q_2}{r^2}$ , 式中距离  $r$  的单位是  $m$ , 作用力  $F$  的单位是  $N$ , 由此式可定义一种电荷量  $q$  的新单位. 当用  $m, kg, s$  表示此新单位时, 电荷新单位 = \_\_\_\_\_; 新单位与库仑的关系为 1 新单位 = \_\_\_\_\_ C.

(2) 电子感应加速器 (betatron) 的基本原理如下: 一个圆环真空室处于分布在圆柱形体积内的磁场中, 磁场方向沿圆柱的轴线, 圆柱的轴线过圆环的圆心并与环面垂直. 图 3-7-4 中两个同心的实线圆代表圆环的边界, 与实线圆同心的虚线圆为电子在加速过程中运行的轨道. 已知磁场的磁感应强度  $B$  随时间  $t$  的变化规律为  $B = B_0 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$ , 其中  $T$  为磁

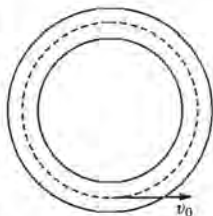


图 3-7-4

场变化的周期,  $B_0$  为大于零的常量. 当  $B$  为正时, 磁场的方向垂直于纸面指向纸外. 若持续地将初速度为  $v_0$  的电子沿虚线圆的切线方向注入到环内 (如图 3-7-4), 问电子在该磁场变化的一个周期内可能被加速的时间是从  $t =$  \_\_\_\_\_ 到  $t =$  \_\_\_\_\_.

**【分析】** 第(1)小题可根据量纲规律求解. 第(2)小题涉及到感应电场的规律, 由题意再根据对称性知, 由变化磁场激发的感应电场的分布就如题图中的虚线所示, 但电场线的绕行方向与磁场变化情况有关, 本小题由磁场变化规律和楞次定律便可判断.

**【解】** (1)  $kg^{\frac{1}{2}} \cdot m^{\frac{3}{2}}/s; 1.06 \times 10^{-5}; (2) \frac{3}{4} T; T$ .

**题 3** (2006 · 全国物理竞赛题) 图 3-7-5 中  $K$  为带电粒子发射源, 从中可持续不断地射出质量、电荷都相同的带正电的粒子流, 它们的速度方向都沿图中虚线  $O'O$ , 速度的大小具有一切可能值但都是有限的. 当粒子打在垂直于  $O'O$  的屏  $NN'$  上时, 会在屏上留下永久性的痕迹. 屏内有一与虚线垂直的坐标轴  $Y$ , 其原点位于屏与虚线的交点  $O$  处,  $Y$  的正方向由  $O$  指向  $N$ . 虚线上的  $A, B$  两处, 各有一电子阀门  $a$  和  $b$ . 阀门可以根据指令开启或关闭. 开始时两阀门都处于关闭状态, 挡住粒子流.  $M, M'$  是两块较大的平行金属平板, 到虚线  $O'O$  的距离都是  $d$ , 板  $M$  接地. 在两板间加上如图 3-7-6 所示的周期为  $2T$  的交变电压  $u$ ,  $u$  的正向最大值为  $2U$ , 负向最大值为  $U$ . 已知当带电粒子处在两平板间的空间时, 若两平板间的电压为  $U$ , 则粒子在电场作用下的加速度  $a$ 、电压  $u$  的半周期  $T$  和平板到虚线  $O'O$  的距离  $d$  满足以下关系

$$aT^2 = \frac{1}{5}d.$$

已知  $AB$  间的距离、 $B$  到金属板左端的距离、金属板的长度以及金属板右端到屏的距离都是  $l$ . 不计重力的作用, 不计带电粒子间的相互作用. 打在阀门上的粒子被阀门吸收, 不会影响以后带电粒子的运动. 只考虑  $MM'$  之间的电场并把它视为匀强电场.

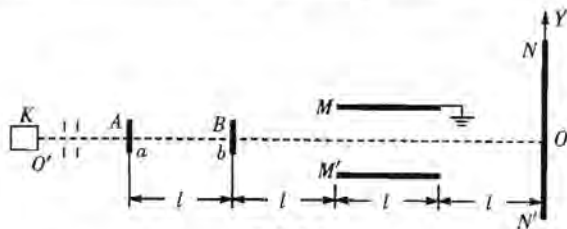


图 3-7-5

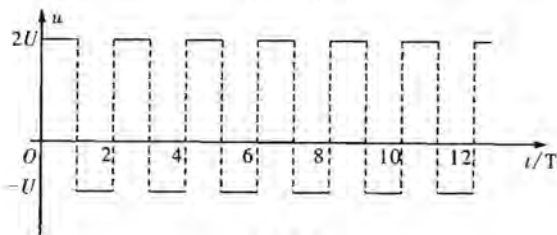


图 3-7-6

1. 假定阀门从开启到关闭经历的时间  $\delta$  比  $T$  小得多, 可忽略不计. 现在某时刻突然开启阀门  $a$  又立即关闭; 经过时间  $T$ , 再次开启阀门  $a$  又立即关闭; 再经过时间  $T$ , 第 3 次同时开启阀门  $a$  和阀门  $b$ , 又立即同时关闭  $a, b$ . 若以开启阀门  $b$  的时刻作为图 3-7-6 中  $t=0$  的时刻, 则屏上可能出现的粒子痕迹的  $Y$  坐标(只要写出结果, 不必写出计算过程)为 \_\_\_\_\_.

2. 假定阀门从开启到关闭经历的时间  $\delta = \frac{T}{10}$ , 现在某时刻突然开启阀门  $a$ , 经过时间  $\delta$  立即关闭  $a$ ; 从刚开启  $a$  的时刻起, 经过时间  $T$ , 突然开启阀门  $b$ , 经过时间  $\delta$  关闭  $b$ . 若以刚开启阀门  $b$  的时刻作为图 3-7-6 中  $t=0$  的时刻, 则从  $B$  处射出的具有最大速率的粒子射到屏上所产生的痕迹的  $Y$  坐标(只要写出结果, 不必写出计算过程)为 \_\_\_\_\_, 具有最小速率的粒子射到屏上所产生的痕迹的坐标(只要写出结果, 不必写出计算过程)为 \_\_\_\_\_.

**【分析】** 本题的关键是正确判断能通过阀门  $a, b$  的粒子, 然后再分析粒子在  $M, M'$  间匀强电场中的运动.

**【解】** 1.  $Y_1 = -0.3d, Y_2 = 0.9d$ ; 2.  $Y' = -0.138d, Y'' = -0.138d$ .

1. 当阀门  $a$  第 1 次开启时, 具有各种速率的粒子(称之为第一批粒子)从  $A$  处进入  $AB$  之间, 在  $a$  第 2 次开启时刻, 第一批粒子中速率为

$$v_1 = \frac{l}{T}. \quad (1)$$

的粒子正好射到  $B$  处, 被阀门  $b$  挡住. 与此同时, 第二批具有各种速率的粒子从  $A$  处进入  $AB$  之间. 在阀门  $a$  第 3 次开启的时刻, 第一批进入  $AB$  间的粒子中速率为

$$v_2 = \frac{l}{2T} = \frac{1}{2} v_1. \quad (2)$$



的粒子与第二批进入  $AB$  间的粒子中速率为  $v_1$  的粒子同时到达  $B$  处. 因此时阀门  $b$  已开启, 这些粒子都从  $B$  处沿虚线射向两平行板, 而第三批进入  $AB$  间的粒子在它们到达  $B$  处时, 被  $b$  挡住. 由此可知, 能从  $B$  处射向两平行板的粒子具有  $v_1$  和  $v_2$  两种不同的速率.

根据题意, 粒子从  $B$  处射出的时刻为  $t=0$ , 故速率为  $v_1$  的粒子在时刻

$$t_1 = \frac{l}{v_1} = T.$$

进入两平行板之间, 由图 3-7-6 可知, 两板间的电压

$$u = -U.$$

粒子在两板间的电场作用下的加速度为  $-a$ , 粒子通过两板经历的时间为

$$\Delta t_1 = \frac{l}{v_1} = T.$$

在  $\Delta t_1$  时间内粒子在  $Y$  方向获得的分速度和位移分别为

$$v_{1y} = -a\Delta t_1 = -aT. \quad (3)$$

$$y_1 = -\frac{1}{2}a(\Delta t_1)^2 = -\frac{1}{2}aT^2. \quad (4)$$

因  $aT^2 = \frac{1}{5}d$ , 故  $|y_1| = \frac{1}{10}d < d$ , 表明速率为  $v_1$  的粒子能穿出平板, 粒子穿出平板后做匀速运动. 在从射出平板至射到屏的时间内, 粒子在  $Y$  方向的位移

$$\Delta y_1 = v_{1y} \frac{l}{v_1} = -aT^2. \quad (5)$$

粒子在屏上产生的痕迹的  $Y$  坐标为

$$Y_1 = y_1 + \Delta y_1 = -\frac{1}{2}aT^2 - aT^2 = -\frac{3}{2}aT^2 = -0.3d. \quad (6)$$

速率为  $v_2$  的粒子在时刻

$$t_2 = \frac{l}{v_2} = 2T.$$

进入两平行板之间, 由图 3-7-6 可知, 两板间的电压

$$u = 2U.$$

粒子在电场作用下的加速度为  $2a$ , 粒子通过两板经历的时间为

$$\Delta t_2 = \frac{l}{v_2} = 2T.$$

因为两板间的电压在时间  $\Delta t_2$  内由  $2U$  变为  $-U$ , 粒子的加速度亦将从  $2a$  变成  $-a$ , 由此可求得在  $\Delta t_2$  时间内粒子在  $Y$  方向获得的分速度和位移分别为

$$v_{2y} = 2aT - aT = aT. \quad (7)$$

$$y_2 = \frac{1}{2}(2a)T^2 + (2aT)T - \frac{1}{2}aT^2 = \frac{5}{2}aT^2. \quad (8)$$

因  $aT^2 = \frac{1}{5}d$ , 故  $y_2 = \frac{1}{2}d < d$ , 表明速度为  $v_2$  的粒子亦能穿出平板. 粒子穿出平板后做匀速运动, 在从射出平板至射到屏的时间内, 粒子在  $Y$  方向的位移

$$\Delta y_2 = v_{2y} \frac{l}{v_2} = 2aT^2. \quad (9)$$

粒子打在屏上产生的痕迹的  $Y$  坐标为

$$Y_2 = y_2 + \Delta y_2 = \frac{5}{2}aT^2 + 2aT^2 = \frac{9}{2}aT^2 = 0.9d. \quad (10)$$

即粒子在屏上产生的痕迹是两个点, 它们的  $Y$  坐标分别为  $Y_1$  和  $Y_2$ .

2. 由于阀门从开启到关闭要经历一段时间, 在阀门  $a$  开启到关闭经历的  $\delta$  时间间隔内的不同时刻, 都有各种不同速率的粒子从  $A$  处进入  $AB$  间, 有的早进入, 有的晚进入. 由于阀门  $b$  从开启到关闭也要经历一段时间  $\delta$ , 粒子可能在最早的时刻即  $t=0$  的时刻从  $B$  处射出, 也可能在最晚的时刻即  $t=\delta$  时刻从  $B$  处射出. 在  $a$  刚开启的时刻从  $A$  处射入  $AB$  间, 并在  $t=\delta$  时刻从  $B$  处射出的粒子的速率最小, 这最小速率为

$$v_{\min} = \frac{l}{T+\delta}. \quad (11)$$

在阀门  $a$  刚要关闭时刻从  $A$  处射进  $AB$  间, 并在  $t=0$  的时刻从  $B$  处射出的粒子的速率最大, 这最大速率为

$$v_{\max} = \frac{l}{T-\delta}. \quad (12)$$

在  $t=0$  时刻从  $B$  处射出的速率为  $v_{\max}$  的粒子在时刻

$$t_1 = \frac{l}{v_{\max}} = T - \delta.$$

进入两平板之间, 在时刻

$$t_1' = t_1 + \frac{l}{v_{\max}} = 2T - 2\delta.$$

离开两平板. 由本题图 3-7-6 可知, 在  $T-\delta$  到  $T$  时间内, 两板间的电压为  $2U$ , 在  $T$  到  $2T-2\delta$  时间内, 两板间的电压为  $-U$ , 与电压对应的粒子的加速度分别为  $2a$  和  $-a$ . 在粒子通过平板的时间内, 粒子在  $Y$  方向获得的分速度和位移分别为

$$v_{1y} = 2a\delta - a(T-2\delta) = -aT + 4a\delta. \quad (13)$$

$$y_1 = \frac{1}{2}(2a)\delta^2 + (2a)\delta(T-2\delta) - \frac{1}{2}a(T-2\delta)^2 = -\frac{1}{2}aT^2 + 4a\delta T - 5a\delta^2. \quad (14)$$

粒子穿出平板后做匀速运动. 从射出平板至射到屏的时间内, 粒子在  $Y$  方向的位移

$$\Delta y_1 = v_{1y} \frac{l}{v_{\max}} = (-aT + 4a\delta)(T-\delta) = -aT^2 + 5aT\delta - 4a\delta^2. \quad (15)$$

粒子在屏上产生的痕迹的  $Y$  坐标为

$$Y_1 = y_1 + \Delta y_1 = -\frac{3}{2}aT^2 + 9aT\delta - 9a\delta^2. \quad (16)$$

根据题意, 代入数据得

$$Y_1 = -0.138d. \quad (17)$$

在  $t=\delta$  时刻从  $B$  处射出的速度为  $v_{\min}$  的粒子在时刻



$$t_2 = \delta + \frac{l}{v_{\min}} = T + 2\delta,$$

进入两平板之间. 在时刻

$$t_2' = t_2 + \frac{l}{v_{\min}} = 2T + 3\delta,$$

离开两平板. 由本题图 3-7-6 可知, 在  $T + 2\delta$  到  $2T$  时间内, 两板间的电压为一  $U$ , 在  $2T$  到  $2T + 3\delta$  时间内, 两板间的电压为  $2U$ , 与电压对应的粒子的加速度分别为  $-a$  和  $2a$ . 在粒子通过平板的时间内, 粒子在  $Y$  方向获得的分速度和位移分别为

$$v_{2y} = -a(T - 2\delta) + (2a)3\delta = -aT + 8a\delta, \quad (18)$$

$$y_2 = -\frac{1}{2}a(T - 2\delta)^2 - a(T - 2\delta)3\delta + \frac{1}{2}(2a)(3\delta)^2 = -\frac{1}{2}aT^2 - aT\delta + 13a\delta^2. \quad (19)$$

粒子穿出平板后做匀速运动. 在从粒子射出平板至射到屏的时间内, 粒子在  $Y$  方向上的位移

$$\Delta y_2 = v_{2y} \frac{l}{v_{\min}} = (-aT + 8a\delta)(T + \delta) = -aT^2 + 7aT\delta + 8a\delta^2. \quad (20)$$

粒子在屏上产生的痕迹的  $Y$  坐标为

$$Y_2 = y_2 + \Delta y_2 = -\frac{3}{2}aT^2 + 6aT\delta + 21a\delta^2. \quad (21)$$

根据题意, 代入数据得

$$Y_2 = -0.138d. \quad (22)$$

由以上分析可知, 速率最小和速率最大的粒子打在屏上产生的痕迹是位于  $Y$  轴上的同一点.

**题 4** (2008 · 全国物理预赛题) 设空间存在三个相互垂直的已知场: 电场强度为  $E$  的匀强电场、磁感应强度为  $B$  的匀强磁场和重力加速度为  $g$  的重力场. 一质量为  $m$ 、电荷量为  $q$  的带正电的质点在此空间运动, 已知在运动过程中, 质点速度的大小恒定不变.

(1) 试通过论证, 说明此质点做何种运动 (不必求出运动的轨迹方程).

(2) 若在某一时刻, 电场和磁场突然全部消失. 已知此后该质点在运动过程中的最小动能为其初始动能 (即电场和磁场刚要消失时的动能) 的一半, 试求在电场、磁场刚要消失时刻该质点的速度在三个场方向的分量.

**【分析】** 首先应正确分析带电粒子所受三种力的性质、方向以及相互关系 (经分析后得知三种力均在  $xOz$  平面内). 第一问从质点速度大小恒定不变入手, 对其速度分量的变化作逐一讨论, 其间用到洛伦兹力不做功的概念. 在得到质点做匀速直线运动的基础上, 从平衡条件来求解第二问.

**【解】** (1) 在空间取如图 3-7-7 所示的直角坐标系  $Oxyz$ , 其中  $Ox$  轴沿电场方向,  $Oy$  轴沿磁场方向,  $Oz$  轴与重力方向相反. 因为磁场作用于质点的洛伦兹力与磁场方向垂直, 即在  $Oxz$  平面内; 作用于质点的电场力和重力也在  $Oxz$  平面内, 故质点在  $y$  方向不受力, 其速度沿  $y$  方向的分

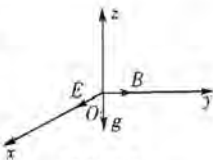


图 3-7-7

速度的大小和方向都是不变的. 根据题意, 质点速度的大小是恒定不变的; 而磁场作用于质点的洛伦兹力对质点不做功, 故质点的速度沿垂直磁场方向的分速度的大小一定也是恒定不变的. 此分速度必须与电场力和重力的合力垂直. 由于电场力和重力的合力方向不变, 故此分速度的方向也是不变的. 由此可得出结论: 质点速度的方向也是不变的; 即质点在给定的场中做匀速直线运动, 其轨迹是直线, 在  $Oxz$  平面内, 与电场力和重力的合力垂直.

(2) 质点做匀速直线运动, 表明电场、磁场和重力场对质点作用力的合力  $F=0$ . 设存在电场、磁场时质点速度的大小为  $v_0$ ; 它在坐标系中的三个分量分别为  $v_{0x}$ ,  $v_{0y}$  和  $v_{0z}$ , 即在电场、磁场刚要消失时质点在三个场方向相应的速度分量. 以  $F_x$ 、 $F_y$  和  $F_z$  分别表示  $F$  在坐标系  $Oxyz$  中的相应分量, 有

$$F_x = qE - qv_{0z}B = 0, \quad (1)$$

$$F_y = 0, \quad (2)$$

$$F_z = -mg + qv_{0x}B = 0. \quad (3)$$

由①③两式得

$$v_{0z} = \frac{E}{B}, v_{0x} = \frac{mg}{qB}. \quad (4)$$

若已知粒子的速率  $v_0$ , 粒子速度的  $y$  分量为

$$v_{0y}^2 = v_0^2 - v_{0x}^2 - v_{0z}^2. \quad (5)$$

因电场和磁场消失后, 粒子仅在重力作用下运动, 质点在任何时刻  $t$  的速度

$$v_x = v_{0x}, v_y = v_{0y}, v_z = v_{0z} - gt.$$

当  $v_z = 0$  时, 粒子的动能最小

$$E_{k,\min} = \frac{1}{2} m(v_{0x}^2 + v_{0y}^2). \quad (6)$$

根据题意有

$$E_{k,\min} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} m v_0^2 \right). \quad (7)$$

由⑥⑦两式得

$$v_0^2 = 2(v_{0x}^2 + v_{0y}^2). \quad (8)$$

由式④⑤⑧得

$$v_{0y} = \frac{1}{qB} [(qE)^2 - (mg)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

**题5** (2006·全国物理预赛题) 如图 3-7-8 所示, 两个金属轮  $A_1$ 、 $A_2$ , 可绕通过各自中心并与轮面垂直的固定的光滑金属细轴  $O_1$  和  $O_2$  转动,  $O_1$  和  $O_2$  相互平行, 水平放置. 每个金属轮由四根金属辐条和金属环组成,  $A_1$  轮的辐条长为  $a_1$ , 电阻为  $R_1$ ,  $A_2$  轮的辐条长为  $a_2$ , 电阻为  $R_2$ , 连接辐条的金属环的宽度与电阻都可以忽略. 半径为  $a_0$  的绝缘圆盘  $D$  与  $A_1$  同轴且固连在一起. 一轻细绳的一端固定在  $D$  边缘上的某

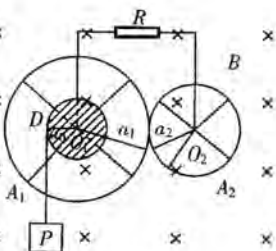


图 3-7-8





点,绳在  $D$  上绕足够匝数后,悬挂一质量为  $m$  的重物  $P$ 。当  $P$  下落时,通过细绳带动  $D$  和  $A_1$  绕  $O_1$  轴转动。转动过程中,  $A_1$ 、 $A_2$  保持接触,无相对滑动;两轮与各自细轴之间保持良好的电接触;两细轴通过导线与一阻值为  $R$  的电阻相连,除  $R$  和  $A_1$ 、 $A_2$  两轮中辐条的电阻外,所有金属的电阻都不计,整个装置处在磁感应强度为  $B$  的匀强磁场中,磁场方向与转轴平行。现将  $P$  释放,试求  $P$  匀速下落时的速度。

**【分析】** 当作用于两轮上的电磁阻力矩等于机械动力矩时,系统将达到稳定状态,此时,重力的功率( $mgv$ )等于所有电阻的焦耳热功率之和,具体求解时应正确分析两轮产生的感应电动势的大小和方向,以及回路中感应电流大小的表达式。

**【解】**  $P$  被释放后,细绳的张力对  $D$  产生机械力矩,带动  $D$  和  $A_1$  做逆时针的加速转动,通过两个轮子之间无相对运动的接触,  $A_1$  带动  $A_2$  做顺时针的加速转动。由于两个轮子的辐条切割磁感线,所以在  $A_1$  产生由周边沿辐条指向轴的电动势,在  $A_2$  产生由轴沿辐条指向周边的电动势,经电阻  $R$  构成闭合电路。  $A_1$ 、 $A_2$  中各辐条上流有沿电动势方向的电流,在磁场中辐条受到安培力。不难看出,安培力产生的电磁力矩是阻力矩,使  $A_1$ 、 $A_2$  加速转动的势头减缓。  $A_1$ 、 $A_2$  从起始的静止状态逐渐加速转动,电流随之逐渐增大,电磁阻力矩亦逐渐增大,直至电磁阻力矩与机械力矩相等,  $D$ 、 $A_1$  和  $A_2$  停止做加速转动,均做匀角速转动,此时  $P$  匀速下落,设其速度为  $v$ ,则  $A_1$  的角速度

$$\omega_1 = \frac{v}{a_0} \quad (1)$$

$A_1$  带动  $A_2$  转动,  $A_2$  的角速度  $\omega_2$  与  $A_1$  的角速度  $\omega_1$  之间的关系为

$$\omega_1 a_1 = \omega_2 a_2 \quad (2)$$

$A_1$  中每根辐条产生的感应电动势均为

$$E_1 = \frac{1}{2} B a_1^2 \omega_1 \quad (3)$$

轴与轮边之间的电动势就是  $A_1$  中四条辐条电动势的并联,其数值见③式。

同理,  $A_2$  中,轴与轮边之间的电动势就是  $A_2$  中四条辐条电动势的并联,其数值为

$$E_2 = \frac{1}{2} B a_2^2 \omega_2 \quad (4)$$

$A_1$  中,每根辐条的电阻为  $R_1$ ,轴与轮边之间的电阻是  $A_1$  中四条辐条电阻的并联,其数值为

$$R_{A1} = \frac{R_1}{4} \quad (5)$$

$A_2$  中,每根辐条的电阻为  $R_2$ ,轴与轮边之间的电阻是  $A_2$  中四条辐条电阻的并联,其数值为

$$R_{A2} = \frac{R_2}{4} \quad (6)$$

$A_1$  轮、 $A_2$  轮和电阻  $R$  构成串联回路,其中的电流为

$$I = \frac{E_1 + E_2}{R + R_{A1} + R_{A2}} \quad (7)$$

以①至⑥式代入⑦式,得





$$t = \frac{\left(\frac{1}{2a_0}\right)Ba_1(a_1+a_2)v}{R + \left(\frac{R_1}{4}\right) + \left(\frac{R_2}{4}\right)} \quad (9)$$

以⑧式代入⑨式得 
$$v = \frac{mg(4R+R_1+R_2)a_0^2}{B^2a_1^2(a_1+a_2)^2}$$

**题 6** (2005·全国物理预赛题) 如图

3-7-9所示,水平放置的金属细圆环半径为  $a$ , 竖直放置的金属细圆柱(其半径比  $a$  小得多)的端面与金属圆环的上表面在同一平面内,圆柱的细轴通过圆环的中心  $O$ . 一质量为  $m$ 、电阻为  $R$  的均匀导体细棒被圆环和细圆柱端面支撑,棒的一端有一小孔套在细轴  $O$  上,另一端  $A$  可绕轴线沿圆环做圆周运动,棒与圆环的动摩擦因数为  $\mu$ . 圆环处于磁感应强度大小为  $B=Kr$ 、

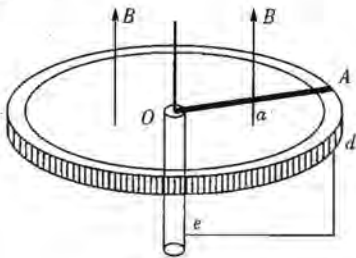


图 3-7-9

方向竖直向上的恒定磁场中,式中  $K$  为大于零的常量,  $r$  为场点到轴线的距离. 金属细圆柱与圆环用导线  $ed$  连接. 不计棒与轴及与细圆柱端面的摩擦,也不计细圆柱、圆环及导线的电阻和感应电流产生的磁场. 问沿垂直于棒的方向以多大的水平外力作用于棒的  $A$  端才能使棒以角速度  $\omega$  匀速转动.

注:  $(x+\Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$ .

**【分析】** 由于磁场在空间作非均匀分布,且杆  $OA$  上不同质元具有不同的线速度,因此求解本题的关键是正确运用“微元法”. 在杆  $OA$  上任意位置  $r$  处取一导体元  $\Delta r$ , 写出感应电动势表达式  $\Delta E$ , 用求和的方法求出总电动势, 用同样方法求出作用于杆  $OA$  的安培力对轴  $O$  的力矩, 欲使棒做匀速转动, 外力矩必须等于安培力矩与摩擦力矩之和.

**【解】** 将整个导体棒分割成  $n$  个小线元, 小线元端点到轴线的距离分别为  $r_0 (=0), r_1, r_2, \dots, r_{i-1}, r_i, \dots, r_{n-1}, r_n (=a)$ , 第  $i$  个线元的长度为  $\Delta r_i = r_i - r_{i-1}$ , 当  $\Delta r_i$  很小时, 可以认为该线元上各点的速度都为  $v_i = \omega r_i$ , 该线元因切割磁感应线而产生的电动势为

$$\Delta E = Bv_i \Delta r_i = K\Delta r_i \cdot \omega r_i \cdot \Delta r_i = K\omega r_i^2 \Delta r_i. \quad (1)$$

整个棒上的电动势为

$$E = \sum_{i=1}^n \Delta E_i = K\omega \sum_{i=1}^n r_i^2 \Delta r_i. \quad (2)$$

由  $(r+\Delta r)^3 = r^3 + 3r^2\Delta r + 3r(\Delta r)^2 + (\Delta r)^3$ .

略去高阶小量  $(\Delta r)^2$  及  $(\Delta r)^3$ , 可得

$$r^2 \Delta r = \frac{1}{3} [(r+\Delta r)^3 - r^3]$$

代人②式, 得

$$E = \frac{1}{3} K\omega \sum_{i=1}^n (r_i^3 - r_{i-1}^3)$$



$$= \frac{1}{3} K\omega [(r_1^3 - r_0^3) + (r_2^3 - r_1^3) + \dots + (r_n^3 - r_{n-1}^3)] = \frac{1}{3} K\omega a^3. \quad (3)$$

由全电路欧姆定律, 导体棒通过的电流为

$$I = \frac{E}{R} = \frac{K\omega a^3}{3R}. \quad (4)$$

导体棒受到的安培力方向与棒的运动方向相反.

第  $i$  个线元  $\Delta r_i$  受到的安培力为

$$\Delta f_{Ai} = BI\Delta r_i = K r_i I \Delta r_i. \quad (5)$$

作用于该线元的安培力对轴线的力矩

$$\Delta M_i = \Delta f_{Ai} \cdot r_i = K I r_i^2 \Delta r_i.$$

作用于棒上各线元的安培力对轴线的总力矩为

$$M = \sum_{i=1}^n \Delta M_i = K I \sum_{i=1}^n r_i^2 \Delta r_i = \frac{1}{3} K I \sum_{i=1}^n (r_i^3 - r_{i-1}^3) = \frac{1}{3} K I a^3.$$

即

$$M = \frac{K^2 \omega a^6}{9R}. \quad (6)$$

因棒  $A$  端对导体圆环的正压力为  $\frac{1}{2} mg$ , 所以摩擦力为  $\frac{1}{2} \mu mg$ , 对轴的摩擦力

$$\text{矩为} \quad M_\mu = \frac{1}{2} \mu m g a. \quad (7)$$

其方向与安培力矩相同, 均为阻力矩. 为使棒在水平面内做匀角速转动, 要求棒对于  $O$  轴所受的合力矩为零, 即外力矩与阻力矩相等. 设在  $A$  点施加垂直于棒的外力为  $f$ , 则有

$$f a = M + M_\mu. \quad (8)$$

由⑥⑦⑧式得

$$f = \frac{K^2 \omega a^5}{9R} + \frac{1}{2} \mu m g.$$

**题 7** (2002·全国物理预赛题) 一个长为  $L_1$ 、宽为  $L_2$ 、质量为  $m$  的矩形导线框, 由质量均匀分布的刚性杆构成, 静止放置在不导电的水平桌面上, 可绕与线框的一条边重合的光滑固定轴  $ab$  转动, 在此边中串接一能输出可变电流的电流源 (图中未画出). 线框处在匀强磁场中, 磁场的磁感应强度  $B$  沿水平方向且与转轴垂直, 俯视图如图 3-7-10 所示. 现让电流从零逐渐增大, 当电流大于某一最小值  $I_{\min}$  时, 线框将改变静止状态.

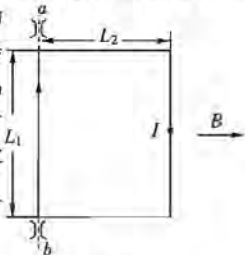


图 3-7-10

(1) 求电流值  $I_{\min}$ .

(2) 当线框改变静止状态后, 设该电流源具有始终保持恒定电流值  $I_0$  不变 ( $I_0 > I_{\min}$ ) 的功能. 已知在线框运动过程中存在空气阻力, 试分析线框的运动状况.

**【分析】** 线框的状态应由安培力矩和重力矩之间的关系来决定. 在恒流源  $I_0$  的作用下, 线框将做变速转动并在  $0 \sim \pi$  范围内反复摆动, 但由于空气阻力, 摆动将逐渐趋缓而最终静止在合力矩为零的位置处.

**【解】** (1) 方法 1:

导线框放在水平桌面上,俯视图如图 3-7-11 所示。由图可见,在线框没动之前,线框的  $PQ$  边与  $P'Q'$  边平行于磁场  $B$ , 因而不受磁场力作用,  $PP'$  边受的安培力的大小为  $IBL_1$ , 方向垂直于桌面向下, 但此力对轴的力矩为零。  $QQ'$  边受的安培力的大小为  $F_{QQ'} = IBL_1$ , 方向垂直桌面向上。此力对固定轴的力矩为

$$M_0 = IBL_1 L_2. \quad (1)$$

除此力矩外, 线框还受到重力矩作用。重力矩等于重力乘线框重心( $O$  点)到轴  $ab$  的距离, 即

$$\tau_0 = mg \left( \frac{L_2}{2} \right). \quad (2)$$

当  $M_0 = \tau_0$  时, 桌面对线框的支持力的力矩为零,  $M_0 > \tau_0$  时, 线框将改变静止状态, 开始绕轴  $ab$  向上翘起。根据题意及①②式, 由力矩平衡原理可知

$$I_{\min} BL_1 L_2 = \frac{1}{2} mg L_2. \quad (3)$$

$$\text{解得} \quad I_{\min} = \frac{mg}{2BL_1}. \quad (4)$$

方法 2:

线框所受的重力矩也可以由各边对  $ab$  轴的重力矩来求。  $PQ$  边与  $P'Q'$  边的重心均在  $(\frac{L_2}{2})$  处, 两条边对  $ab$  轴的合力矩为

$$\tau_1 = \frac{mgL_2}{L_1 + L_2} \left( \frac{L_2}{2} \right). \quad (1')$$

$QQ'$  边对  $ab$  轴的力矩为

$$\tau_2 = \frac{mgL_1}{2(L_1 + L_2)} L_2. \quad (2')$$

故线框所受的重力矩为

$$\tau_0 = \tau_1 + \tau_2 = \left( \frac{mg}{2} \right) L_2.$$

与解法一求得的②式一致。从而求得  $I_{\min}$  与④式相同。

(2) 线框处于静止状态时, 若电流  $I_0$  比  $I_{\min}$  稍大, 线框所受的电磁力矩  $M$  将大于重力矩  $\tau$ , 使线框绕  $ab$  轴向上翘起。  $PQ$  边和  $P'Q'$  边所受电磁力不等于零, 但二者相互抵消。当保持电流值  $I_0$  恒定不变时, 线框将从静止状态开始绕固定轴做加速转动。在加速转动过程中, 由于通过线框的磁通量发生变化, 线框内将产生感应电动势, 它有使线框中的电流变小的趋势, 题中已设电流源有保持电流恒定不变的功能, 所以当线框平面转至与桌面成  $\alpha$  角时, 如图 3-7-12 所示, 线框受到的合力矩为

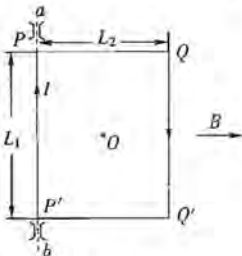


图 3-7-11

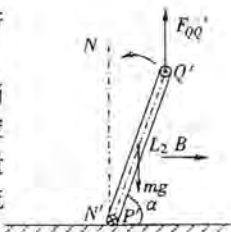


图 3-7-12



$$M - \tau = \left( I_0 B L_1 - \frac{1}{2} mg \right) L_2 \cos \alpha. \quad (5)$$

随着  $\alpha$  角逐渐增大, 合力矩随之减小, 但  $M - \tau$  始终大于零, 因而线框仍做逆时针加速转动, 角速度不断增大. 当线框平面转到竖直面  $NN'$  时, 合力矩为零, 角速度达到最大. 由于惯性, 线框将越过  $NN'$  面做逆时针转动, 此时, 合力矩与线框转动方向相反, 角速度将逐渐减小, 合力矩的大小随着  $\alpha$  角的增大而增大, 如图 3-7-13 所示.

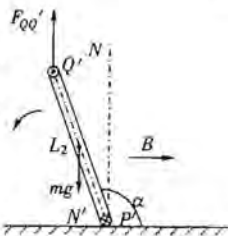


图 3-7-13

如果没有空气阻力,  $\alpha$  将增至  $180^\circ$ . 当  $\alpha$  角等于  $180^\circ$  时, 线框转动的角速度为零, 合力矩将使线框做顺时针加速转动. 结果线框将在  $\alpha$  角等于  $0^\circ$  与  $180^\circ$  之间往复摆动不止.

实际上, 由于空气阻力作用, 线框平面在  $NN'$  平面两侧摆动的幅度将逐渐变小, 最终静止在  $NN'$  面处, 此时, 电磁力矩与重力矩均为零. 如果线框稍偏离平衡位置  $NN'$ , 电磁力矩与重力矩均为零. 如果线框稍偏离平衡位置  $NN'$ , 电磁力矩与重力矩的合力矩将使线框回到  $NN'$  平面处, 故线框处于稳定平衡状态.

**题 8** (1999 · 全国物理预赛题) 位于竖直面内的矩形平面导线框  $abcd$ .  $ab$  长为  $l_1$ , 是水平的,  $bc$  长为  $l_2$ , 线框的质量为  $m$ , 电阻为  $R$ . 其下方有一匀强磁场区域, 该区域的上、下边界的  $PP'$  和  $QQ'$  均与  $ab$  平行, 两边界的距离为  $H$ ,  $H > l_2$ , 磁场的磁感应强度为  $B$ , 方向与线框平面垂直, 如图 3-7-14 所示. 令线框的  $dc$  边从离磁场区域上边界  $PP'$  的距离为  $h$  处自由下落, 已知在线框的  $dc$  边进入磁场以后,  $ab$  边达到边界  $PP'$  之前的某一时刻线框的速度已达到这一阶段的最大值. 问从线框开始下落到  $dc$  边刚刚达到磁场区域下边界  $QQ'$  的过程中, 磁场作用于线框的安培力做的总功为多少?

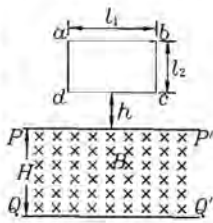


图 3-7-14

**【分析】** 线框  $dc$  边进入边界  $PP'$  后, 切割磁感线产生感应电流, 使线框受到向上的安培力, 且安培力不断增大. 本题中安培力一直增大到跟重力平衡, 所以线框先向下加速运动, 后匀速运动, 直到  $ab$  边进入边界  $PP'$ . 在这过程中, 线框克服安培力做功, 因安培力不断变化, 在中学物理中只能用动能定理或能量守恒定律来求解. 当线框  $ab$  边进入边界  $PP'$ , 至  $dc$  边到达边界  $QQ'$  的过程中, 线框中无感应电流, 线框不受安培力, 因此安培力做的功为零.

**【解】** 方法 1: 设线框的  $dc$  边刚到达磁场区域上边界  $PP'$  时的速度为  $v_1$ , 则有

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = mgh. \quad (1)$$

$dc$  边进入磁场后, 按题意线框虽然受安培阻力作用, 但依然加速下落. 设  $dc$  边下落到离  $PP'$  的距离为  $\Delta h_1$  时, 速度达到最大值, 以  $v_0$  表示这个最大速度, 这时线框中的感应电动势为

$$E = Bl_1 v_0.$$

线框中的电流  $I = \frac{E}{R} = \frac{Bl_1 v_0}{R}$ .

作用于线框的安培力为  $f = Bl_1 I = \frac{B^2 l_1^2 v_0}{R}$ . ②

速度达到最大的条件是安培力

$$f = mg.$$

由此得

$$v_0 = \frac{mgR}{B^2 l_1^2}. \quad ③$$

在  $dc$  边向下运动距离  $\Delta h_1$  的过程中, 重力做功  $A_1 = mg\Delta h_1$ , 安培力做功  $A_2$ , 由动能定理得

$$A_1 + A_2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_1^2.$$

将①③式代入得安培力做的功

$$A_2 = -mg\Delta h_1 + \frac{m^3 g^2 R^2}{2B^4 l_1^4} - mgh. \quad ④$$

线框速度达到  $v_0$  后, 做匀速运动. 当  $dc$  边匀速向下运动的距离为  $\Delta h_2 = l_2 - \Delta h_1$  时,  $ab$  边到达磁场的边界  $PP'$ , 整个线框进入磁场. 在线框  $dc$  边向下移动  $\Delta h_2$  的过程中, 重力做功  $A_1'$ , 安培力做功  $A_2'$ , 但线框速度未变化, 由动能定理, 得

$$A_1' + A_2' = 0.$$

$$A_2' = -A_1' = -mg\Delta h_2 = -mg(l_2 - \Delta h_1). \quad ⑤$$

整个线框进入磁场后, 直到  $dc$  边到达磁场的下边界  $QQ'$ , 作用于整个线框的安培力为零, 安培力做的功也为零, 线框只在重力作用下做加速运动.

所以, 整个过程中安培力做的总功

$$A = A_2 + A_2' = -mg(l_2 + h) + \frac{m^3 g^2 R^2}{2B^4 l_1^4}. \quad ⑥$$

方法 2: 设线框  $ab$  边刚进入边界  $PP'$  时, 线框的重力势能为零, 则线框  $dc$  边刚进入边界  $PP'$  时, 线框的机械能为

$$E_1 = mgl_2 + \frac{1}{2}mv_1^2 = mg(l_2 + h).$$

线框  $ab$  边到达边界  $PP'$  时, 线框的机械能为  $E_2 = \frac{1}{2}mv_0^2$ ,

式中  $v_0$  是这一过程中达到匀速运动时的速度, 由方法 1 求得.

线框进入磁场的过程中, 克服安培力做的功, 在数值上等于线框中产生的电能.

即  $A_{克服} = EI$ .

于是, 由能量守恒得  $E_1 - E_2 = EI$ .

即  $mg(l_2 + h) - \frac{1}{2}mv_0^2 = A_{克服}$ .

所以安培力做的功为

$$A = -A_{克服} = \frac{m^3 g^2 R^2}{2B^4 l_1^4} - mg(l_2 + h).$$



**【讨论】** 电磁感应过程和力学过程交织在一起,相互作用、相互制约.克服安培力做功的过程,就是机械能转化为电能的过程.当力学过程达到稳定的匀速运动状态时,如没有摩擦力做功,则机械功率等于电功率;如有摩擦力做功,则机械功率等于电功率与热功率(摩擦热)之和.解题的首选思路是能量守恒与动能定理.解题时,要弄清能量转化的过程,运动的状态,然后列方程求解.

**题 9** (2006·全国物理复赛题) 磁悬浮列车是一种高速运载工具,它具有两个重要系统.一是悬浮系统,利用磁力(可由超导电磁铁提供)使车体在导轨上悬浮起来与轨道脱离接触.另一是驱动系统,在沿轨道上安装的三相绕组(线圈)中,通上三相交流电,产生随时间、空间做周期性变化的磁场,磁场与固定连接在车体下端的感应金属板相互作用,使车体获得牵引力.

为了有助于了解磁悬浮列车的牵引力的来由,我们求解下面的问题.

设有一与轨道平面垂直的磁场,磁感应强度  $B$  随时间  $t$  和空间位置  $x$  的变化规律为

$$B(x, t) = B_0 \cos(\omega t - kx).$$

式中  $B_0$ 、 $\omega$ 、 $k$  均为已知常量,坐标轴  $x$  与轨道平行.在任一时刻  $t$ ,轨道平面上磁场沿  $x$  方向的分布是不均匀的,如图所示.图 3-7-15 中  $Oxy$  平面代表轨道平面,“ $\times$ ”表示磁场的方向垂直  $Oxy$  平面指向纸里,“ $\cdot$ ”表示磁场的方向垂直  $Oxy$  平面指向纸外.规定指向纸外时  $B$  取正值.“ $\times$ ”和“ $\cdot$ ”的疏密程度表示沿着  $x$  轴  $B$  的大小分布.一与轨道平面平行的具有一定质量的矩形金属框  $MNPQ$  处在该磁场中,已知与轨道垂直的金属框边  $MN$  的长度为  $l$ ,与轨道平行的金属框边  $MQ$  的长度为  $d$ ,金属框的电阻为  $R$ ,不计金属框的电感.

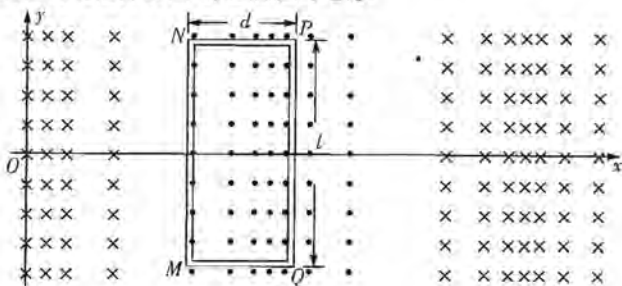


图 3-7-15

试利用此简化模型计算列车运行达到稳定、以已知的恒定速度  $v$  行驶时,牵引力在磁场随时间变化的一个周期内的平均值(磁场随时间变化的周期非常小,在这段时间内列车移动的距离非常小,可忽略不计),并讨论此平均牵引力与金属框几何尺寸的关系.

**【分析】** 求解本题的关键是弄清楚牵引力的来源,在本题提供的简化模型中的磁场是一种按余弦规律变化与时间和空间有关的运动磁场,如金属框平移速度与磁场的平移速度不同,则因电磁感应在金属框中产生感应电流,进而产生牵引力(即安培力),本题用到较多电磁学(含电磁波)规律和数学中求平均值的运算.

【解】 磁场随时间和空间的变化具有周期性,与简谐波有相同的形式.在  $x$  处,时刻  $t$  的磁感应强度  $B(x, t)$  与在  $x + \Delta x$  处,时刻  $t + \Delta t$  的磁感应强度  $B(x + \Delta x, t + \Delta t)$  如果相等,即

$$B_0 \cos(\omega t - kx) = B_0 \cos[\omega(t + \Delta t) - k(x + \Delta x)].$$

则有

$$\omega \Delta t = k \Delta x.$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{k} = v_0. \quad (1)$$

$\frac{\omega}{k}$  为一恒量,用  $v_0$  表示.由此可见,本题给出的磁场  $B(x, t) = B_0 \cos(\omega t - kx)$  可视为一在空间按余弦规律分布的随时间变化的非均匀磁场区域以速度  $v_0$  沿  $x$  方向平移.如果金属框移动的速度与磁场区域平移的速度不同,通过金属框的磁通量将随时间发生变化,从而在金属框中产生感应电流,感应电流受到磁场的作用力,就是牵引力.设在时刻  $t$ ,金属框  $MN$  边位于坐标  $x$  处,  $PQ$  边位于坐标  $x + d$  处.此时通过金属框的磁通量为  $\Phi$ ;经过一很短的时间间隔  $\Delta t$ ,整个磁场分布区域向  $x$  方向移动了一段距离  $v_0 \Delta t$ ,金属框向  $x$  方向移动了一段距离  $v \Delta t$ ,其结果是:  $MN$  边左侧穿过面积为  $(v_0 - v)l \Delta t$  的磁通量  $B(x, t)(v_0 - v)l \Delta t$  移进了金属框,  $PQ$  边左侧穿过面积为  $(v_0 - v)l \Delta t$  的磁通量  $B(x + d, t)(v_0 - v)l \Delta t$  移出了金属框,故在  $t + \Delta t$  时刻,通过金属框的磁通量为

$$\Phi' = \Phi + B(x, t)(v_0 - v)l \Delta t - B(x + d, t)(v_0 - v)l \Delta t.$$

在  $\Delta t$  时间间隔内,通过金属框的磁通变化量为

$$\Delta \Phi = \Phi' - \Phi = [B(x, t) - B(x + d, t)]l(v_0 - v)\Delta t. \quad (2)$$

由法拉第电磁感应定律得  $t$  时刻框内的感应电动势大小

$$E(t) = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}. \quad (3)$$

金属框内的感应电流

$$i(t) = \frac{E}{R}. \quad (4)$$

磁场作用于金属框的安培力的合力

$$f(t) = i(t)B(x, t)l - i(t)B(x + d, t)l.$$

在以上的讨论中,已规定垂直于  $Oxy$  平面指向纸外的方向为磁感应强度的正方向;并假定在所考察的时刻,金属框的边  $MN$  和  $PQ$  所在处的磁感应强度  $B(x, t)$  和  $B(x + d, t)$  都是正的;同时,又规定安培力的正方向沿  $x$  轴的正方向.由②③④式及题给定的磁场分布规律,得

$$f(t) = \frac{B_0^2 l^2 (v_0 - v)}{R} \{ \cos(\omega t - kx) - \cos[\omega t - kx - kd] \}^2. \quad (5)$$

利用三角学公式,得

$$f(t) = \frac{4B_0^2 l^2 (v_0 - v)}{R} \left[ \sin \frac{kd}{2} \sin \frac{2(\omega t - kx) - kd}{2} \right]^2. \quad (6)$$





⑥式表明,金属框受到的安培力方向始终沿  $x$  轴正方向,大小却随时间变化,将周期  $T$  分割成很多非常小的时间间隔  $\Delta t$ ,在  $t$  到  $t + \Delta t$  时间间隔的安培力为  $f(t)$ ,将所有时间间隔内的  $f(t)\Delta t$  累加的总和再除以周期  $T$  即为  $f(t)$  在一个周期  $T$  时间内的平均值,由下式表示

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \sum f(t) \Delta t.$$

由三角函数变换知

$$4 \sin^2 \frac{kd}{2} \sin^2 \frac{2(\omega t - kx) - kd}{2} = 4 \sin^2 \frac{kd}{2} \left\{ \frac{1 + \cos[2(\omega t - kx) - kd]}{2} \right\}.$$

注意到

$$\frac{1}{T} \sum \cos[2(\omega t - kx) - kd] \Delta t = 0,$$

以及①式便求得当列车以速度  $v$  做匀速行驶时的平均牵引力

$$\bar{f}_v = \frac{2B_0^2 l^2 \left( \frac{\omega}{k} - v \right)}{R} \sin^2 \frac{kd}{2}. \quad (7)$$

即平均牵引力与金属框长度  $l$  的平方成正比,亦与金属框的宽度  $d$  有关.

当  $kd = 2n\pi$ , 即  $d = \frac{2n\pi}{k}$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) 时

$$\bar{f}_v = 0. \quad (8)$$

当  $kd = (2n+1)\pi$ , 即  $d = \frac{(2n+1)\pi}{k}$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) 时

$$\bar{f}_v = \frac{2B_0^2 l^2 \left( \frac{\omega}{k} - v \right)}{R}. \quad (9)$$

这时,  $\bar{f}_v$  达到最大. 当  $d$  取其他值时,  $\bar{f}_v$  为介于零与最大值之间的其他值.

实际上列车行驶中总会受到阻力,当平均牵引力  $\bar{f}_v$  与阻力平衡,列车达到稳定速度  $v$ . 若阻力为零,列车在牵引力作用下,不断加速,当列车速度  $v$  与磁场区域移动的速度  $v_0$  相同,即 ( $v=v_0$ ) 时,金属框内磁通量不变,框内无感应电动势和感应电流,因而金属框任何时刻都不受力,平均牵引力  $\bar{f}_v=0$ . 列车以稳定速度  $v_0$  向前行驶.

阻力的来源和大小取决于比较复杂的因素,试题没有涉及,故这部分的讨论不作本题的要求. ⑧式的结果  $\bar{f}_v=0$  是由金属框宽度  $d$  取值所决定,不是阻力为零的原因.

**题 10** (2005·全国物理复赛题) 图 3-7-16 为一个用绝缘材料制成的扁平薄圆环,其内、外半径分别为  $a_1, a_2$ , 厚度可以忽略,两个表面都带有电荷,电荷面密度  $\sigma$  随离开环心距离  $r$  变化的规律均为  $\sigma(r) = \frac{\sigma_0}{r^2}$ ,  $\sigma_0$  为已知常量,薄圆环绕通过环心



垂直环面的轴以大小不变的角加速度  $\beta$  减速转动,  $t=0$  时刻的角速度为  $\omega_0$ . 将一半径为  $a_0$  ( $a_0 \ll a_1$ )、电阻为  $R$  并与薄圆环共面的导线圆环与薄圆环同心放置. 试求在薄圆环减速运动过程中导线圆环中的张力  $F$  与时间  $t$  的关系.

提示: 半径为  $r$ 、通有电流  $I$  的圆线圈(环形电流), 在圆心处产生的磁感应强度为  $B=k \frac{I}{r}$  ( $k$  为已知常量).

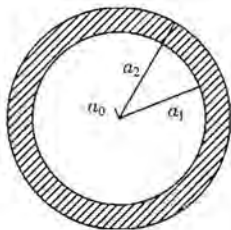


图 3-7-16

**【分析】** 本题应首先求得带电圆环减速旋转时在导线圆环中心处产生的磁感应强度  $B(t)$  的表达式, 此间用到微元思想和叠加方法, 第二步利用法拉第电磁感应求得导线圆环中的感应电动势和电流. 最后根据对称性求载流半圆环所受安培力, 此力在数值上等于另半个圆环对其拉力(即环中张力), 此题用到较多的物理学方法, 值得读者认真领会.

**【解】** 用半径分别为  $r_1 (>a_1)$ 、 $r_2 \cdots r_i \cdots r_{n-1} (<a_2)$  的  $n-1$  个同心圆把塑料薄圆环分割成  $n$  个细圆环. 第  $i$  个细圆环的宽度为  $\Delta r_i = r_i - r_{i-1}$ , 其环带面积

$$\Delta S_i = \pi r_i^2 - \pi (r_i - \Delta r_i)^2 = 2\pi r_i \Delta r_i.$$

式中已略去高阶小量  $(\Delta r_i)^2$ , 该细圆环带上下表面所带电荷量之和为

$$\Delta q_i = 2\sigma \Delta S_i = \frac{2\sigma_0}{r_i^2} 2\pi r_i \Delta r_i = \frac{4\pi\sigma_0 \Delta r_i}{r_i}.$$

设时刻  $t$ , 细圆环转动的角速度为  $\omega$ , 则

$$\omega = \omega_0 - \beta t.$$

单位时间内, 通过它的“横截面”的电荷, 即为电流

$$\Delta I_i = \Delta q_i \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2\omega\sigma_0 \Delta r_i}{r_i}.$$

由环形电流产生磁场的规律, 该细圆环的电流在环心产生的磁感应强度为

$$\Delta B_i = k \frac{\Delta I_i}{r_i} = k \frac{2\omega\sigma_0 \Delta r_i}{r_i^2}. \quad (1)$$

式中  $\Delta r_i$  是一个微量, 注意到  $r_i r_{i-1} = r_i (r_i - \Delta r_i) \approx r_i^2$ , 有

$$\frac{\Delta r_i}{r_i^2} = \frac{r_i - r_{i-1}}{r_i r_{i-1}} = \frac{1}{r_{i-1}} \frac{1}{r_i}. \quad (2)$$

将各细圆环产生的磁场叠加, 由①②式得出环心  $O$  点处的磁感应强度

$$B = \frac{2k\omega\sigma_0 (a_2 - a_1)}{a_1 a_2}. \quad (3)$$

由于  $a_0 \ll a_1$ , 可以认为在导线圆环所在小区域的磁场是匀强磁场, 可由  $O$  点的场表示. 磁场对导线环的磁通量

$$\Phi = BS = \frac{2k\omega\sigma_0 (a_2 - a_1)}{a_1 a_2} \pi a_0^2. \quad (4)$$

由于  $\omega$  是变化的, 所以上述磁通量是随时间变化的, 产生的感应电动势的大小为

$$E = \left| \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right| = \frac{2k\sigma_0 (a_2 - a_1) \pi a_0^2}{a_1 a_2} \left| \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \right| = \frac{2k\sigma_0 (a_2 - a_1) \pi a_0^2 \beta}{a_1 a_2}. \quad (5)$$



由全电路欧姆定律可知,导线环内感应电流的大小为

$$I = \frac{E}{R} = \frac{2k\sigma_0(a_2 - a_1)\pi a_0^2 \beta}{a_1 a_2 R} \quad (6)$$

设题图中薄圆环带正电做逆时针旋转,穿过导线圆环的磁场方向垂直纸面向外,由于薄圆环做减角速度转动,穿过导线圆环的磁场逐渐减小,根据楞次定律,导线圆环中的感应电流亦为逆时针方向,导线圆环各元段  $\Delta l$  所受的安培力都沿半径向外.

现取对于  $y$  轴两对称点  $U$ 、 $V$ ,对应的二段电流元  $I\Delta l$  所受的安培力的大小为

$$\Delta f = BI\Delta l. \quad (7)$$

方向如图 3-7-17 所示,它沿  $x$  及  $y$  方向的分量分别为

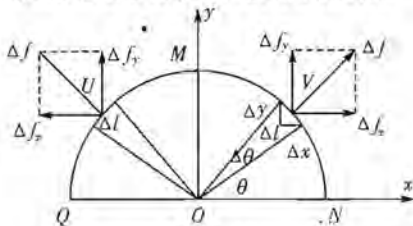


图 3-7-17

$$\Delta f_x = BI\Delta l \cdot \cos\theta = BI\Delta y. \quad (8)$$

$$\Delta f_y = BI\Delta l \cdot \sin\theta = BI\Delta x. \quad (9)$$

根据对称性,作用于沿半个导线圆环  $QMN$  上的各电流元的安培力的  $x$  分量之和相互抵消,即

$$f_x = \sum BI\Delta y = BI\sum\Delta y = 0. \quad (10)$$

(式中  $\Delta y = \Delta l \cos\theta$ , 当  $\theta < \frac{\pi}{2}$  时,  $\Delta y$  是正的; 当  $\theta > \frac{\pi}{2}$  时,  $\Delta y$  是负的, 故  $\sum\Delta y = 0$ ),

而作用于沿半个导线圆环  $QMN$  上的各电流元的安培力的  $y$  分量之和为

$$f_y = \sum BI\Delta x = BI\sum\Delta x = 2BIa_0. \quad (11)$$

(式中  $\Delta x = \Delta l \sin\theta$ , 由于  $\theta$  在  $0 \sim \pi$  之间  $\Delta x$  都是正的, 故  $\sum\Delta x = 2a_0$ ). 即半个导线圆环上受的总安培力的大小为  $2BIa_0$ , 方向沿  $y$  正方向. 由于半个圆环处于平衡状态, 所以在导线截面  $Q$ 、 $N$  处所受(来自另外半个圆环)的拉力(即张力)  $F$  应满足  $2F = 2BIa_0$ , 由③⑥两式得

$$F = BIa_0 = \frac{4k^2\sigma_0^2\pi a_0^3(a_2 - a_1)^2\beta}{a_1^2 a_2^2 R}(\omega_0 - \beta t).$$

由上式可见,张力  $F$  随时间  $t$  线性减小.

**题 11** (2004·全国物理复赛题) 如图 3-7-18 所示,有二平行金属导轨,相距  $l$ , 位于同一水平面内(图中纸面),处在磁感应强度为  $B$  的匀强磁场中,磁场方向竖直向下(垂直纸面向里).质量均为  $m$  的两金属杆  $ab$  和  $cd$  放在导轨上,与导轨垂直.初始时刻,金属杆  $ab$  和  $cd$  分别位于  $x = x_0$  和  $x = 0$  处.假设导轨及金属杆的电阻都为零,由两金属杆与导轨构成的回路的自感系数为  $L$ ,今对金属杆  $ab$  施以沿导轨向右的瞬时冲量,使它获得初速度  $v_0$ .设导轨足够长,  $x_0$  足够大,在运动过程

中,两金属杆之间距离的变化远小于两金属杆的初始间距  $x_0$ ,因而可以认为在杆运动过程中由两金属杆与导轨构成的回路的自感系数  $L$  是恒定不变的. 杆与导轨之间摩擦可不计. 求任意时刻两杆的位置  $x_{ab}$  和  $x_{cd}$  以及由两杆和导轨构成的回路中的电流  $i$  三者各自随时间  $t$  的变化关系.

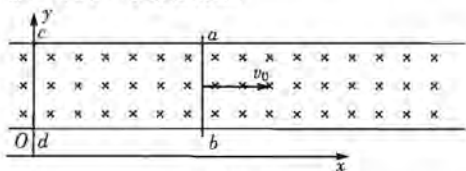


图 3-7-18

**【分析】** 本题涉及的物理过程比较复杂. 一方面两杆系统的质心做匀速直线运动. 另一方面每根杆相对系统质心做简谐运动. 前者是因为系统所受合外力为零, 后者是因为导体回路中既有动生电动势, 又有自感电动势, 致使回路中的感应电流做周期性变化, 进而作用在每根杆上的安培力也作周期性变化, 时而为动力, 时而为阻力, 具有弹性力的性质. 正确认识上述物理图象是求解本题的基础. 由于本题导体回路的电阻可视为零, 故系统无能量损耗. 故每个杆相对质心做等幅振动. 要想证明导体杆做简谐运动, 可有多种途径, 故本题提供了两种解法, 读者可多加体会.

**【解】** 方法一: 当金属杆  $ab$  获得沿  $x$  轴正方向的初速度  $v_0$  时, 因切割磁感线而产生感应电动势, 由两金属杆与导轨构成的回路中会出现感应电流. 由于回路具有自感系数, 感应电流的出现, 又会在回路中产生自感电动势, 自感电动势将阻碍电流的增大, 所以, 虽然回路的电阻为零, 但回路的电流并不会趋向无限大. 当回路中一旦有了电流, 磁场作用于杆  $ab$  的安培力将使  $ab$  杆减速, 作用于  $cd$  杆的安培力将使  $cd$  杆运动.

设在任意时刻  $t$ ,  $ab$  杆和  $cd$  杆的速度分别为  $v_1$  和  $v_2$  (相对地面参考系  $S$ ), 当  $v_1, v_2$  为正时, 表示速度沿  $x$  轴正方向; 若规定逆时针方向为回路中电流和电动势的正方向, 则因两杆做切割磁感线的运动而产生的感应电动势

$$E = Bl(v_1 - v_2). \quad (1)$$

当回路中的电流  $i$  随时间的变化率为  $\frac{\Delta i}{\Delta t}$  时, 回路中的自感电动势

$$E_L = -L \frac{\Delta i}{\Delta t}. \quad (2)$$

根据欧姆定律, 注意到回路没有电阻, 有

$$E + E_L = 0. \quad (3)$$

金属杆在导轨上运动过程中, 两杆构成的系统受到的水平方向的合外力为零, 系统的质心做匀速直线运动. 设系统质心的速度为  $v_c$ , 有

$$mv_0 = 2mv_c. \quad (4)$$

得

$$v_c = \frac{v_0}{2}. \quad (5)$$



$v_c$  方向与  $v_0$  相同,沿  $x$  轴的正方向.

现取一新的参考系  $S'$ ,它与质心固连在一起,并把质心作为坐标原点  $O'$ ,取坐标轴  $O'x'$  与  $x$  轴平行.设相对  $S'$  系,金属杆  $ab$  的速度为  $u$ , $cd$  杆的速度为  $u'$ ,则有

$$v_1 = v_c + u. \quad (6)$$

$$v_2 = v_c + u'. \quad (7)$$

因相对  $S'$  系,两杆的总动量为零,即有

$$mu + mu' = 0. \quad (8)$$

由①②③⑤⑥⑦⑧各式,得

$$2Blu = L \frac{\Delta i}{\Delta t}. \quad (9)$$

在  $S'$  系中,在  $t$  时刻,金属杆  $ab$  坐标为  $x'$ ,在  $t + \Delta t$  时刻,它的坐标为  $x' + \Delta x'$ ,则由速度的定义

$$u = \frac{\Delta x'}{\Delta t}. \quad (10)$$

代入⑨式得

$$2Bl\Delta x' = L\Delta i. \quad (11)$$

若将  $x'$  视为  $i$  的函数,由⑪式知  $\frac{\Delta x'}{\Delta i}$  为常量,所以  $x'$  与  $i$  的关系可用一直线方程表示

$$x' = \frac{L}{2Bl}i + b. \quad (12)$$

式中  $b$  为常数,其值待定.现已知在  $t=0$  时刻,金属杆  $ab$  在  $S'$  系中的坐标  $x' = \frac{1}{2}x_0$ ,这时  $i=0$ ,故得

$$x' = \frac{L}{2Bl}i + \frac{1}{2}x_0. \quad (13)$$

或

$$i = \frac{2Bl}{L}\left(x' - \frac{1}{2}x_0\right). \quad (14)$$

$\frac{1}{2}x_0$  表示  $t=0$  时刻金属杆  $ab$  的位置, $x'$  表示在任意时刻  $t$  杆  $ab$  的位置,故  $(x' - \frac{1}{2}x_0)$  就是杆  $ab$  在  $t$  时刻相对初始位置的位移,用  $x$  表示,

$$x = x' - \frac{1}{2}x_0. \quad (15)$$

当  $x > 0$  时, $ab$  杆位于其初始位置的右侧;当  $x < 0$  时, $ab$  杆位于其初始位置的左侧.代入⑭式,得

$$i = \frac{2Bl}{L}x. \quad (16)$$

这时作用于  $ab$  杆的安培力

$$F = -iBl = -\frac{2B^2 l^2}{L}x. \quad (17)$$

$ab$  杆在初始位置右侧时,安培力的方向指向左侧; $ab$  杆在初始位置左侧时,安培力的方向指向右侧,可知该安培力具有弹性力的性质,金属杆  $ab$  的运动是简谐运动,振动的周期

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\frac{2B^2 l^2}{L}}}. \quad (18)$$



在任意时刻  $t$ ,  $ab$  杆离开其初始位置的位移

$$x = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right). \quad (19)$$

$A$  为简谐运动的振幅,  $\varphi$  为初相位, 都是待定的常量. 通过参考圆可求得  $ab$  杆的振动速度

$$u = -A \left(\frac{2\pi}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right). \quad (20)$$

⑱⑳式分别表示任意时刻  $ab$  杆离开初始位置的位移和运动速度. 现已知在  $t=0$  时刻,  $ab$  杆位于初始位置, 即

$$x=0.$$

速度 
$$u = v_0 - v_c = v_0 - \frac{1}{2}v_0 = \frac{1}{2}v_0,$$

故有 
$$0 = A \cos\varphi.$$

$$\frac{v_0}{2} = -A \left(\frac{2\pi}{T}\right) \sin\varphi.$$

解这两式, 并注意到⑱式得

$$\varphi = \frac{3\pi}{2}. \quad (21)$$

$$A = \frac{v_0}{4\pi} T = \frac{v_0}{2Bl} \sqrt{\frac{mL}{2}}. \quad (22)$$

由此得  $ab$  杆的位移

$$x = \frac{v_0}{2Bl} \sqrt{\frac{mL}{2}} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{v_0}{2Bl} \sqrt{\frac{mL}{2}} \sin \frac{2\pi}{T}t. \quad (23)$$

由⑳式可求得  $ab$  杆在  $S'$  系中的位置

$$x_{ab}' = \frac{1}{2}x_0 + \frac{v_0}{2Bl} \sqrt{\frac{mL}{2}} \sin \frac{2\pi}{T}t. \quad (24)$$

因相对质心, 任意时刻  $ab$  杆和  $cd$  杆都在质心两侧, 到质心的距离相等, 故在  $S'$  系中,  $cd$  杆的位置

$$x_{cd}' = -\frac{1}{2}x_0 - \frac{v_0}{2Bl} \sqrt{\frac{mL}{2}} \sin \frac{2\pi}{T}t. \quad (25)$$

相对地面参考系  $S$ , 质心以  $v_c = \frac{1}{2}v_0$  的速度向右运动, 并注意到⑳式, 得  $ab$  杆在地面参考系中的位置

$$x_{ab} = x_0 + \frac{1}{2}v_0 t + \frac{v_0}{2Bl} \sqrt{\frac{mL}{2}} \sin\left(Bl \sqrt{\frac{2}{mL}}t\right). \quad (26)$$

$cd$  杆在  $S$  系中的位置

$$x_{cd} = \frac{1}{2}v_0 t - \frac{v_0}{2Bl} \sqrt{\frac{mL}{2}} \sin\left(Bl \sqrt{\frac{2}{mL}}t\right). \quad (27)$$

回路中的电流由⑳式得

$$i = \frac{2Bl v_0}{L} \frac{v_0}{2Bl} \sqrt{\frac{mL}{2}} \sin \frac{2\pi}{T}t = v_0 \sqrt{\frac{m}{2L}} \sin\left(Bl \sqrt{\frac{2}{mL}}t\right). \quad (28)$$



方法二:当金属杆在磁场中运动时,因切割磁感线而产生感应电动势,回路中出现电流时,两金属杆都要受到安培力的作用,安培力使  $ab$  杆的速度改变,使  $cd$  杆运动. 设任意时刻  $t$ , 两杆的速度分别为  $v_1$  和  $v_2$  (相对地面参考系  $S$ ), 若规定逆时针方向为回路电动势和电流的正方向, 则由两金属杆与导轨构成的回路中, 因杆在磁场中运动而出现的感应电动势为

$$E = Bl(v_1 - v_2). \quad (1')$$

令  $u$  表示  $ab$  杆相对于  $cd$  杆的速度, 有

$$E = Blu. \quad (2')$$

当回路中的电流  $i$  变化时, 回路中有自感电动势  $E_L$ , 其大小与电流的变化率成正比, 即有

$$E_L = -L \frac{\Delta i}{\Delta t}. \quad (3')$$

根据欧姆定律, 注意到回路没有电阻, 有

$$E + E_L = 0.$$

由式②'③'两式得

$$Blu = L \frac{\Delta i}{\Delta t}. \quad (4')$$

设在  $t$  时刻, 金属杆  $ab$  相对于  $cd$  杆的距离为  $x'$ , 在  $t + \Delta t$  时刻,  $ab$  相对于  $cd$  杆的距离为  $x' + \Delta x'$ , 则由速度的定义, 有

$$u = \frac{\Delta x'}{\Delta t}. \quad (5')$$

代入④'式得

$$Bl\Delta x' = L\Delta i. \quad (6')$$

若将  $x'$  视为  $i$  的函数, 由⑥'式可知,  $\frac{\Delta x'}{\Delta i}$  为常量, 所以  $x'$  与  $i$  的关系可以用一

直线方程表示, 即

$$x' = \frac{L}{Bl}i + b. \quad (7')$$

式中  $b$  为常数, 其值待定. 现已知在  $t=0$  时刻, 金属杆  $ab$  相对于  $cd$  杆的距离为  $x_0$ , 这时  $i=0$ , 故得

$$x' = \frac{L}{Bl}i + x_0. \quad (8')$$

或

$$i = \frac{Bl}{L}(x' - x_0). \quad (9')$$

$x_0$  表示  $t=0$  时刻金属杆  $ab$  相对于  $cd$  杆的位置,  $x'$  表示在任意时刻  $t$  时  $ab$  杆相对于  $cd$  杆的位置, 故  $(x' - x_0)$  就是杆  $ab$  在  $t$  时刻相对于  $cd$  杆的相对位置相对于它们在  $t=0$  时刻的相对位置的位移, 即从  $t=0$  到  $t=t$  时间内  $ab$  杆相对于  $cd$  杆的位移

$$x = x' - x_0. \quad (10')$$

于是有

$$i = \frac{Bl}{L}x. \quad (11')$$

任意时刻  $t$ ,  $ab$  杆和  $cd$  杆因受安培力作用而分别有加速度  $a_{ab}$  和  $a_{cd}$ , 由牛顿定律有

$$-iBl = ma_{ab}. \quad (12')$$

$$iBl = ma_{cd}. \quad (13')$$

两式相减并注意到⑪'式得

$$m(a_{ab} - a_{cd}) = -2iBl = -\frac{2B^2 l^2}{L}x. \quad (14')$$

式中 $(a_{ab} - a_{cd})$ 为金属杆 $ab$ 相对于 $cd$ 杆的加速度,而 $x$ 是 $ab$ 杆相对 $cd$ 杆相对位置的位移, $\frac{2B^2 l^2}{L}$ 是常数,表明这个相对运动是简谐运动,它的振动周期

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\frac{2B^2 l^2}{L}}}. \quad (15')$$

在任意时刻 $t$ , $ab$ 杆相对 $cd$ 杆相对位置相对它们初始位置的位移

$$x = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right). \quad (16')$$

$A$ 为简谐运动的振幅, $\varphi$ 为初相位,都是待定的常量,通过参考圆可求得 $x$ 随时间的变化率即速度

$$v = A\left(\frac{2\pi}{T}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right). \quad (17')$$

现已知在 $t=0$ 时刻,杆位于初始位置,即 $x=0$ ,速度 $v=v_0$ .

故有

$$0 = A \cos \varphi.$$

$$v_0 = -A\left(\frac{2\pi}{T}\right)\sin \varphi.$$

解这两式,并注意到⑮'式得

$$\varphi = \frac{3\pi}{2}.$$

$$A = \frac{v_0}{2\pi} T = \frac{v_0}{Bl} \sqrt{\frac{mL}{2}}.$$

由此得

$$x = \frac{v_0}{Bl} \sqrt{\frac{mL}{2}} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{v_0}{Bl} \sqrt{\frac{mL}{2}} \sin\left(Bl \sqrt{\frac{2}{mL}}\right)t. \quad (18')$$

因 $t=0$ 时刻, $cd$ 杆位于 $x=0$ 处, $ab$ 杆位于 $x=x_0$ 处,两者的相对位置由 $x_0$ 表示;设 $t$ 时刻, $cd$ 杆位于 $x=x_{cd}$ 处, $ab$ 杆位于 $x=x_{ab}$ 处,两者的相对位置由 $x_{ab} - x_{cd}$ 表示,故两杆的相对位置的位移又可表示为

$$x = x_{ab} - x_{cd} - x_0. \quad (19')$$

所以

$$x_{ab} - x_{cd} = x_0 + \frac{v_0}{Bl} \sqrt{\frac{mL}{2}} \sin\left(Bl \sqrt{\frac{2}{mL}}\right)t. \quad (20')$$

⑫'和⑬'式相加  $m(a_{ab} + a_{cd}) = -iBl + iBl = 0.$

得  $(a_{ab} + a_{cd}) = 0.$

由此可知,两杆速度之和为一常量即 $v_0$ ,所以两杆的位置 $x_{ab}$ 和 $x_{cd}$ 之和应为

$$x_{ab} + x_{cd} = x_0 + v_0 t. \quad (21')$$

由⑳'和㉑'式相加和相减,注意到⑮'式,得



$$x_{cd} = x_0 + \frac{1}{2} v_0 t + \frac{v_0}{2Bl} \sqrt{\frac{mL}{2}} \sin\left(Bl\sqrt{\frac{2}{mL}}\right)t. \quad (21')$$

$$x_{ad} = \frac{1}{2} v_0 t - \frac{v_0}{2Bl} \sqrt{\frac{mL}{2}} \sin\left(Bl\sqrt{\frac{2}{mL}}\right)t. \quad (23')$$

由①①'②②'③③'式得回路中电流

$$i = v_0 \sqrt{\frac{m}{2L}} \sin\left(Bl\sqrt{\frac{2}{mL}}\right)t.$$

**题 12** (2002·全国物理复赛题) 有人设计了下述装置用以测量线圈的自感系数. 在图 3-7-19 中,  $E$  为电压可调的直流电源,  $K$  为开关,  $L$  为待测线圈的自感系数,  $r_L$  为线圈的直流电阻,  $D$  为理想二极管,  $r$  为用电阻丝做成的电阻器的电阻,  $A$  为电流表. 将图 3-7-19 中  $a, b$  之间的电阻丝装进图 3-7-20 所示的试管 1 内. 图 3-7-20 中其他装置见图下说明. 其中注射器筒 5 和试管 1 组成的密闭容器内装有某种气体(可视为理想气体), 通过活塞 6 的上下移动可调节毛细管 8 中有色液柱的初始位置, 调节后将阀门 10 关闭, 使两边气体隔开. 毛细管 8 的内直径为  $d$ .

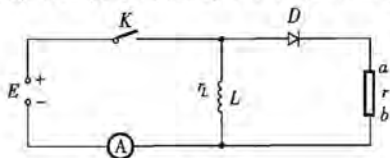
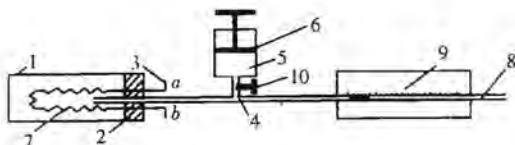


图 3-7-19



1. 试管 2. 橡皮塞 3. 铜导线 4. 三通管 5. 注射器筒 6. 活塞 7. 电阻丝  
8. 水平放置的毛细管, 内有一段有色液柱, 其右端与大气相通, 左端与试管相通 9. 画有刻度尺的底板 10. 阀门

图 3-7-20

已知在压强不变的条件下, 试管中每摩尔气体的温度升高  $1\text{ K}$  时, 需要吸收的热量为  $C_p$ , 大气压强为  $p$ . 设试管、三通管、注射器和毛细管皆为绝热的, 电阻丝的热容不计. 当接通开关  $K$  后, 线圈  $L$  中将产生磁场, 已知线圈中储存的磁场能量  $W = \frac{1}{2} LI^2$ ,  $I$  为通过线圈的电流, 其值可通过电流表  $A$  测量. 现利用此装置及合理的步骤测量线圈的自感系数  $L$ .

(1) 简要写出此实验的步骤.

(2) 用题中所给出的各已知量( $r, r_L, C_p, p, d$  等)及直接测得的量导出  $L$  的表达式.

**【分析】**  $K$  闭合后, 线圈储存的能量  $W = \frac{1}{2} LI^2$ , 断开  $K$  后, 这些能量又将在



电阻  $r$  和  $r_L$  上转变为热能,其中电流流过  $r$  所产生的热量会使试管中的气体做等压膨胀.上述过程包含了  $L$  的影响,也自然有测量  $L$  的方法.运用电磁学和理想气体所满足的规律便可求得  $L$ .

**【解】** (1) ①调整活塞 6 使毛细管 8 中有色液柱处于适当位置,将阀门 10 关闭使两边气体隔绝,记下有色液柱的位置;

②合上开关  $K$ ,测得电流  $I$ ;

③打开开关  $K$ ;

④测出有色液体右移的最远距离  $\Delta x$ ;

⑤改变电源电压,重复测量多次,记下  $I$  和  $\Delta x$  的值.

(2)合上开关  $K$  后,线圈贮有磁场能量  $W = \frac{1}{2}LI^2$ ,因  $D$  的存在, $r$  中无电流.

打开开关  $K$  后,由于  $L$  中有感应电动势,在线圈  $L$ 、电阻器  $ab$  和二极管  $D$  组成的回路中有电流通过,最后变为零.在此过程中原来线圈中储存的磁场能量将转化为  $r$  和  $r_L$  上放出的热量,其中  $r$  上放出的热量为

$$\Delta Q = \frac{1}{2}LI^2 \cdot \frac{r}{r+r_L}. \quad ①$$

此热量使试管中的气体加热、升温.因为是等压过程,所以气体吸热为

$$\Delta Q = \frac{m}{\mu}C_p\Delta T. \quad ②$$

式中  $m$  为气体质量, $\mu$  为其摩尔质量, $\Delta T$  为所升温度.因为是等压过程,设气体体积改变量为  $\Delta V$ ,则由理想气体状态方程可得

$$p\Delta V = \frac{m}{\mu}R\Delta T. \quad ③$$

而 
$$\Delta V = \frac{\pi d^2}{4}\Delta x. \quad ④$$

由以上各式可得 
$$L = \frac{\Delta x}{I^2} \cdot \frac{r_L+r}{2r} \cdot \frac{C_p p \pi d^2}{R}.$$

**题 13** (2001·全国物理复赛题) 如图3-7-21所示,均匀磁场的方向垂直纸面向里,磁感应强度  $B$  随时间  $t$  变化,  $B = B_0 - Kt$  ( $K$  为大于0的常数).现有两个完全相同的均匀金属圆环相互交叠并固定在图中所示位置,环面处于图中纸面内.圆环的半径为  $R$ ,电阻为  $r$ ,相交点的电接触良好.两个环的接触点  $A$  与  $C$  间的劣弧对圆心  $O$  的张角为  $60^\circ$ .求  $t = t_0$  时,每个环所受均匀磁场的作用力.不考虑感应电流之间的作用.

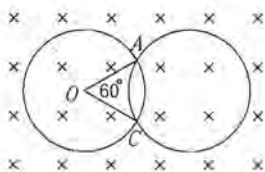


图 3-7-21

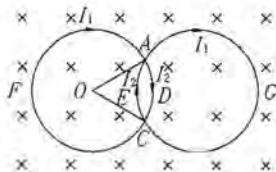


图 3-7-22



**【分析】** 首先应求出各支路电流. 求解应利用电路对称性以及回路电压方程和法拉第电磁感应定律. 在求解每个环所受作用力时有以下几点需要读者注意利用: (1) 左、右两环所受作用力大小相等, 只是方向相反, 因此只需求解一个环即可; (2) 以左环为例, A、C 两点所在水平位置以上和以下两段弧形电流所受作用力可以相互抵消; (3) 在均匀磁场中, 一段弧形电流所受作用力与其两端连线的直线电流(指电流相同)所受作用力大小和方向完全相同.

**【解】** (1) 求网络各支路的电流.

因磁感应强度大小随时间减少, 考虑到电路的对称性, 可设两环各支路的感应电流  $I_1$ 、 $I_2$  的方向如图 3-7-22 所示, 对左环电路 ADCFA 有关系

$$E = I_1 r_{CFA} + I_2 r_{ADC}.$$

$$\text{因} \quad r_{CFA} = \frac{5r}{6}, r_{ADC} = \frac{r}{6},$$

$$E = \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| = \frac{dB}{dt} \pi R^2 = K \pi R^2.$$

$$\text{故} \quad K \pi R^2 = I_1 \frac{5r}{6} + I_2 \frac{r}{6}. \quad (1)$$

因回路 ADCEA 所围的面积为  $2 \left( \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12} \right) R^2$ ,

故对该回路有

$$K \left[ 2 \left( \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12} \right) R^2 \right] = 2I_2 \frac{r}{6}. \quad (2)$$

解得

$$I_2 = \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})R^2}{2r} K. \quad (3)$$

代入①式, 得

$$I_1 = \frac{(10\pi + 3\sqrt{3})R^2}{10r} K. \quad (4)$$

(2) 求每个圆环所受的力.

先求左环所受的力, 如图 3-7-23 所示, 将圆环分割成很多小圆弧, 由左手定则可知, 每段圆弧所受的力的方向均为径向. 根据对称性分析, 因圆弧 PMA 与圆弧 CNQ 中的电流方向相反, 所以在磁场中受的安培力相互抵消. 而弧 PQ 与弧 AC 的电流相对  $x$  轴上下是对称的, 因而每段载流导体所受的安培力在  $y$  方向的合力为零. 以载流导体弧 PQ 上的线段  $\Delta l'$  为例, 安培力  $\Delta F$  为径向. 其  $x$  分量的大小表示为

$$|F_x| = I_1 B \Delta l' \cos \alpha. \quad (5)$$

因  $\Delta l' \cos \alpha = \Delta l$ , 故

$$|F_x| = I_1 B \Delta l.$$

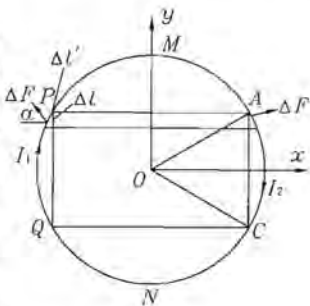


图 3-7-23

$$|\Delta F_z| = \sum I_1 B \Delta l = I_1 B \overline{PQ} = I_1 BR. \quad (6)$$

由于导体弧  $PQ$  在  $y$  方向的合力为零,所以在  $t_0$  时刻所受安培力的合力  $F_1$  仅有  $x$  分量,即

$$\begin{aligned} F_1 = |F_x| &= I_1 BR = \left[ \frac{(10\pi + 3\sqrt{3})R^2}{10r} K \right] BR \\ &= \left[ \frac{(10\pi + 3\sqrt{3})R^2}{10r} K \right] (B_0 - K t_0) R, \end{aligned} \quad (7)$$

方向向左.

同理,载导体弧  $AC$  在  $t_0$  时刻所受的安培力为

$$\begin{aligned} F_2 = I_2 BR &= \left[ \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})R^2}{2r} K \right] BR \\ &= \left[ \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})R^2}{10r} K \right] (B_0 - K t_0) R, \end{aligned} \quad (8)$$

方向向右.

左环所受的合力大小为

$$F = F_1 - F_2 = \frac{9\sqrt{3}}{5r} K (B_0 - K t_0) R^3, \quad (9)$$

方向向左.

对比右环与左环中电流流动情况,可知右环所受合力大小与左环相同,只是方向向右.

**【讨论】** 本题在解答中多处利用对称性,这给解题带来很大帮助,这是我们应该掌握的一种重要的物理学方法.

**题 14** (2007·全国物理决赛题) 如图 3-7-24 所示,  $G$  为一竖直放置的细长玻璃管,以其底端  $O$  为原点,建立一直角坐标系  $Oxy$ ,  $y$  轴与玻璃管的轴线重合. 在  $x$  轴上与原点  $O$  的距离为  $d$  处固定放置一电荷量为  $Q$  的正点电荷  $A$ , 一个电荷量为  $q(q>0)$  的粒子  $P$  位于管内,可沿  $y$  轴无摩擦地运动. 设两电荷之间的库仑相互作用力不受玻璃管的影响.

1. 求放在管内的带电粒子  $P$  的质量  $m$  满足什么条件时,可以在  $y>0$  的区域内存在平衡位置.

2. 上述平衡状态可以是稳定的,也可能是不稳定的;它依赖于粒子的质量  $m$ . 以  $y(m)$  表示质量为  $m$  的粒子  $P$  处于平衡位置时的  $y$  坐标. 当粒子  $P$  处于稳定平衡状态时,  $y(m)$  的取值区间是\_\_\_\_\_ ; 当粒子  $P$  处于不稳定平衡状态时,  $y(m)$  的取值区间是\_\_\_\_\_ .

3. 已知质量为  $m_1$  的粒子  $P$  处于稳定平衡位置,其  $y$  轴坐标为  $y_1$ . 现给  $P$  沿  $y$  轴一微小扰动. 试证明以后的运动为简谐运动,并求此简谐运动的周期.

4. 已知质量为  $m_2$  的粒子  $P$  的不稳定平衡位置的  $y$  坐标为  $y_2$ , 现设想把  $P$  放

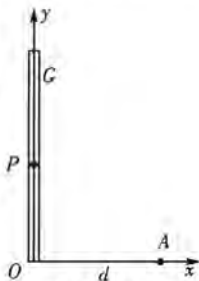


图 3-7-24



在坐标  $y_3$  处, 然后从静止开始释放  $P$ . 求释放后  $P$  能到达玻璃管底部的所有可能的  $y_3$  (只要列出  $y_3$  满足的关系式, 不必求解).

**【分析】** 带电粒子在玻璃管中运动状态取决于其重力和所受库仑斥力的  $y$  分量, 由于后者与位置有关, 故求解库仑斥力的最大值是求解本题前两问的关键. 在第 3 问中首先寻找带电粒子偏离平衡位置时其合外力与微小位移间的关系式, 而第 4 问则可换个角度考虑问题, 根据系统处于平衡状态 (分稳定平衡和不稳定平衡) 与其势能 (本题考查重力势能和静电势能) 所应满足规律求解. 本题求解过程中用到较多的数学计算方法, 如用数值计算方法求极值、对微小量的近似计算方法等等.

**【解】** 1. 如图 3-7-25 所示, 位于坐标  $y$  处的带电粒子  $P$  受到的库仑力  $F_E$  为斥力, 其  $y$  分量为

$$F_{Ey} = k \frac{Qq}{r^2} \sin\theta = k \frac{Qqy}{(d^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (1)$$

式中  $r$  为  $P$  到  $A$  的距离,  $\theta$  为  $r$  与  $x$  轴的夹角. 可以看出,  $F_{Ey}$  与  $y$  有关: 当  $y$  较小时, ①式分子中的  $y$  起主要作用,  $F_{Ey}$  随  $y$  的增大而增大; 当  $y$  较大时, ①式分母中的  $y$  起主要作用,  $F_{Ey}$  随  $y$  的增大而减小. 可见,  $F_{Ey}$  在随  $y$  由小变大的过程中会出现一个极大值. 通过数值计算法, 可求得  $F_{Ey}$  随  $y$  变化的情况. 令  $\tau = \frac{y}{d}$ , 得

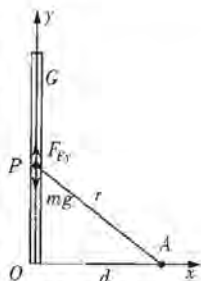


图 3-7-25

$$F_{Ey} = k \frac{Qq}{d^2} \frac{\tau}{(1 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2)$$

当  $\tau$  取不同数值时, 对应的  $\tau(1 + \tau^2)^{-\frac{3}{2}}$  的值不同. 经数值计算, 整理出的数据如下表所示.

$\tau$	0.100	0.500	0.600	0.650	0.700	0.707	0.710	0.750	0.800
$\tau(1 + \tau^2)^{-\frac{3}{2}}$	0.0985	0.356	0.378	0.382	0.385	0.385	0.385	0.384	0.381

由表中的数据可知, 当  $\tau = 0.707$  时, 即

$$y = y_0 = 0.707d. \quad (3)$$

库仑力的  $y$  分量有极大值, 此极大值为

$$F_{Ey\max} = 0.385k \frac{qQ}{d^2}. \quad (4)$$

由于带电粒子  $P$  在竖直方向除了受到竖直向上的  $F_{Ey}$  作用外, 还受到竖直向下的重力  $mg$  作用. 只有当重力的大小  $mg$  与库仑力的  $y$  分量相等时,  $P$  才能平衡. 当  $P$  所受的重力  $mg$  大于  $F_{Ey\max}$  时,  $P$  不可能达到平衡. 故质量为  $m$  的粒子存在平衡位置的条件是

$$mg \leq F_{Ey\max}.$$

由④式得

$$m \leq \frac{0.385}{g} k \frac{qQ}{d^2}. \quad (5)$$

$$2. y(m) > 0.707d; 0 < y(m) \leq 0.707d.$$

3. 根据题意, 当粒子  $P$  静止在  $y = y_1$  处时, 处于稳定平衡位置, 故有

$$k = \frac{Qqy_1}{(d^2 + y_1^2)^{\frac{3}{2}}} - m_1g = 0. \quad (6)$$

设想给粒子  $P$  沿  $y$  轴的一小扰动  $\Delta y$ , 则  $P$  在  $y$  方向所受的合力为

$$F_y = F_{Ey} - m_1g = k \frac{Qq(y_1 + \Delta y)}{[d^2 + (y_1 + \Delta y)^2]^{\frac{3}{2}}} - m_1g. \quad (7)$$

由于  $\Delta y$  为一小量, 可进行近似处理, 忽略高价小量, 有

$$\begin{aligned} F_y &= k \frac{Qq(y_1 + \Delta y)}{(d^2 + y_1^2 + 2y_1\Delta y)^{\frac{3}{2}}} - m_1g \\ &= k \frac{Qq(y_1 + \Delta y)}{(d^2 + y_1^2)^{\frac{3}{2}}} \left(1 - \frac{3y_1\Delta y}{d^2 + y_1^2}\right) - m_1g \\ &= k \frac{Qqy_1}{(d^2 + y_1^2)^{\frac{3}{2}}} + k \frac{Qq\Delta y}{(d^2 + y_1^2)^{\frac{3}{2}}} - k \frac{3qQy_1^2\Delta y}{(d^2 + y_1^2)^{\frac{5}{2}}} - m_1g. \end{aligned}$$

注意到⑥式, 得

$$F_y = -\frac{m_1g(2y_1^2 - d^2)}{(d^2 + y_1^2)y_1} \Delta y. \quad (8)$$

因  $y = y_1$  是粒子  $P$  的稳定平衡位置, 故  $y_1 > 0.707d$ ,  $2y_1^2 - d^2 > 0$ . 由⑧式可知, 粒子  $P$  在  $y$  方向受到合力具有恢复力的性质, 故在其稳定平衡位置附近的微小振动是简谐运动; 其圆周运动的角速度为

$$\omega = \sqrt{\frac{(2y_1^2 - d^2)}{(d^2 + y_1^2)y_1} g}, \quad (9)$$

周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{(d^2 + y_1^2)y_1}{(2y_1^2 - d^2)g}}. \quad (10)$$

4. 粒子  $P$  处在重力场中, 具有重力势能; 它又处在点电荷  $A$  的静电场中, 具有静电势能. 当  $P$  的坐标为  $y$  时, 其重力势能

$$W_g = m_2gy,$$

式中取坐标原点  $O$  处的重力势能为零; 静电势能

$$W_E = k \frac{qQ}{\sqrt{d^2 + y^2}}.$$

粒子的总势能

$$W = W_g + W_E = m_2gy + k \frac{qQ}{\sqrt{d^2 + y^2}}. \quad (11)$$

势能也与  $P$  的  $y$  坐标有关: 当  $y$  较小时, 静电势能起主要作用, 当  $y$  较大时, 重力势能起主要作用. 在  $P$  的稳定平衡位置处, 势能具有极小值; 在  $P$  的不稳定平衡位置处, 势能具有极大值. 根据题意,  $y = y_2$  处是质量为  $m_2$  的粒子的不稳定平衡位



置,故在  $y=y_2$  处,势能具有极大值,即

$$W(y_2) = W_{\max} = m_2 g y_2 + k \frac{qQ}{\sqrt{d^2 + y_2^2}}. \quad (12)$$

当粒子  $P$  的坐标为  $y_3$  时,粒子的势能为

$$W(y_3) = m_2 g y_3 + k \frac{qQ}{\sqrt{d^2 + y_3^2}}.$$

当  $y_3 < y_2$  时,不论  $y_3$  取何值,粒子从静止释放都能到达管底.若  $y_3 > y_2$ ,粒子从静止释放能够到达管底,则有

$$W(y_3) > W(y_2).$$

所以,  $y_3$  满足的关系式为  $y_3 < y_2$ ; (13)

或者  $y_3 > y_2$  且  $m_2 g y_3 + k \frac{qQ}{\sqrt{d^2 + y_3^2}} > m_2 g y_2 + k \frac{qQ}{\sqrt{d^2 + y_2^2}}$ . (14)

附:①式可表示为

$$F_{Ey} = k \frac{Qq}{r^2} \sin\theta = k \frac{Qq}{d^2} \cos^2\theta \sin\theta,$$

式中  $\theta$  为  $P, A$  之间的连线和  $x$  轴的夹角.由上式可知,带电粒子  $P$  在  $\theta=0, \frac{\pi}{2}$  时,  $F_{Ey}=0$ .在  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  区间,随着  $\theta$  的增大,  $\sin\theta$  是递增函数,  $\cos^2\theta$  是递减函数.在此区间内,  $F_{Ey}$  必存在一个极大值  $F_{Ey\max}$ ;用数值法求解,可求得极大值  $F_{Ey\max}$  所对应的角度  $\theta_0$ .经数值计算整理出的数据如下表所示.

$\theta/\text{rad}$	0.010	0.464	0.540	0.576	0.611	0.615	0.617	0.644	0.675
$\cos^2\theta \sin\theta$	0.029	0.367	0.378	0.383	0.385	0.385	0.385	0.384	0.381

由表中数值可知,当  $\theta = \theta_0 \approx 0.615 \text{ rad}$  (即  $35.26^\circ$ ) 时,  $F_{Ey}$  取极大值

$$F_{Ey\max} = k \frac{Qq}{d^2} \cos^2\theta_0 \sin\theta_0 = 0.385k \frac{Qq}{d^2}.$$

带电粒子  $P$  在竖直方向上还受到重力  $G$  的作用,其方向与  $F_{Ey}$  相反.故带电粒子  $P$  受到的合力

$$F = F_{Ey} - G = k \frac{Qq}{d^2} \cos^2\theta \sin\theta - mg.$$

当  $F=0$ ,即  $F_{Ey}=G$  时,  $P$  处于平衡状态.由此可见,当带电粒子的质量

$$m \leq \frac{F_{Ey\max}}{g} = \frac{k \left( \frac{qQ}{d^2} \right) \cos^2\theta_0 \sin\theta_0}{g}.$$

时,可以在  $y$  轴上找到平衡点.

**题 15** (2006·全国物理竞赛题) 如图 3-7-26 所示,坐标系  $Oxyz$  的  $x$  轴和  $z$  轴都位于纸面内,  $y$  轴垂直纸面向里.两无限大金属极板  $P$  和  $Q$  分别位于  $x=-d$  和  $x=d$  处.磁感应强度大小为  $B$  的匀强磁场的方向平行于  $Oxz$  坐标平面,与  $z$  轴的夹角为  $\alpha$ .在坐标原点  $O$  处,有一电荷为  $q$  ( $q>0$ )、质量为  $m$  的带电粒子,以沿  $y$

轴正方向的初速度  $v_0$  开始运动. 不计重力作用.

1. 若两极板间未加电场, 欲使该粒子在空间上恰好能到达极板(但与板不接触), 则初速度  $v_0$  应为多大? 所需最短时间  $t_0$  是多少?

2. 若在两极板间沿  $x$  轴正方向加上一场强为  $E$  的匀强电场, 使该粒子能在第 1 问中所得的时间  $t_0$  到达极板, 则该粒子的初速度  $v_0$  应为多大? 若  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ , 求粒子到达极板时粒子的坐标.

**【分析】** 在第 1 问中粒子在磁场力作用下做匀速圆周运动; 在第 2 问中需将坐标变换, 讨论在新坐标系中粒子在磁场、电场共同作用下的运动.

**【解】** 解法一: 1. 平行板间仅有磁场, 带电粒子初速度  $v_0$  的方向垂直于磁场, 在洛伦兹力的作用下, 粒子将在垂直于磁场方向的平面内做匀速圆周运动, 圆周半径

$$R_0 = \frac{mv_0}{qB}. \quad (1)$$

轨道平面与  $Oxz$  坐标平面的交线如图 3-7-27 中  $NN'$  所示. 要使粒子刚能到达极板  $Q$ (与板刚未接触), 圆心  $C$  应是  $ON'$  的中点, 有

$$CN' = R_0 = \frac{d}{2\cos\alpha}. \quad (2)$$

由①②式得

$$v_0 = \frac{dqB}{2m\cos\alpha}. \quad (3)$$

粒子由  $O$  经过半个圆周到达  $N'$ , 所经历的最短时间为圆周运动的半个周期

$$t_0 = \frac{T}{2} = \frac{\pi m}{qB}. \quad (4)$$

2. 以  $y$  轴为旋转轴, 顺时针转动  $\alpha$  角, 建立新坐标系  $Ox'y'z'$ , 如图 3-7-28 所示. 在新坐标系中电场强度  $E$  的分量为

$$f_{E_x} = E\cos\alpha, f_{E_y} = 0, f_{E_z} = E\sin\alpha. \quad (5)$$

磁感应强度  $B$  的分量为

$$B_x = 0, B_y = 0, B_z = B. \quad (6)$$

带电粒子所受到的电场力的分量为

$$f_{E_x'} = qE_x = qE\cos\alpha, \quad (7)$$

$$f_{E_y'} = 0, f_{E_z'} = qE_z = qE\sin\alpha.$$

当带电粒子速度为  $v$  时, 带电粒子所

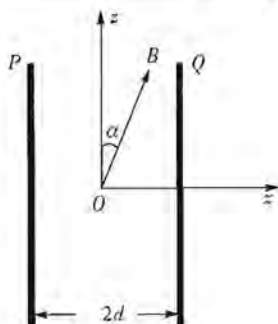


图 3-7-26

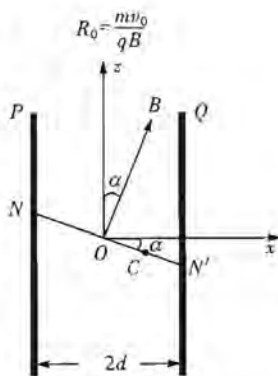


图 3-7-27

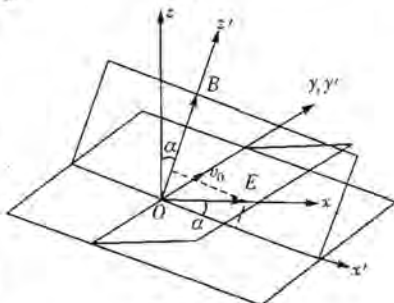


图 3-7-28



受到磁场力的分量为

$$f_{Bx'} = qv_{y'}B, f_{By'} = -qv_{x'}B, f_{Bz'} = 0. \quad (8)$$

(i) 关于带电粒子在  $Ox'y'$  平面内的分运动

现设想起始时刻带电粒子沿  $y'$  轴正方向的初速度  $v_0$  用下式表示

$$v_0 = v_0 + v_1 - v_1 = v_2 - v_1,$$

式中

$$v_2 = v_0 + v_1. \quad (9)$$

把  $v_0$  看成沿  $y'$  轴负方向运动的速度  $v_1$  和沿  $y'$  轴正方向运动的  $v_2$  的合成。这样,与前者联系的运动使带电粒子受到沿  $x'$  轴的负方向的磁场力作用,它与电场力的分量  $f_{Ex'}$  的方向相反,当  $v_1$  取数值

$$v_1 = \frac{E_{x'}}{B} = \frac{E}{B} \cos\alpha. \quad (10)$$

时,与  $-v_1$  相联系的磁场力与  $f_{Ex'}$  的合力为零,其效果是带电粒子沿  $y'$  轴的负方向以速度  $v_1$  做匀速运动;与后者联系的运动使带电粒子仅受到磁场力作用,此力的方向既垂直于磁场方向( $z'$  轴方向),又垂直于速度  $v_2$ ,即位于  $Ox'y'$  平面内,其大小为

$$f_{z'} = qv_2B. \quad (11)$$

如图 3-7-29 所示,粒子在此力作用下在平面内做速度为  $v_2$  的匀速圆周运动,圆周的半径

$$R = \frac{mv_2}{qB}. \quad (12)$$

其运动角速度

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{1}{T} = \frac{2\pi v_2}{2\pi R} = \frac{q}{m} B. \quad (13)$$

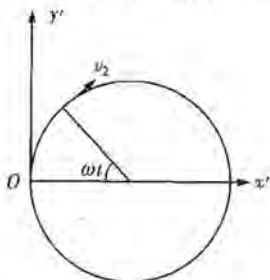


图 3-7-29

由以上分析可知带电粒子一方面在  $Ox'y'$  平面内做上述匀速圆周运动,另一方面圆心沿  $y'$  轴负方向以速度  $v_1 = \frac{E}{B} \cos\alpha$  做匀速直线运动。

(ii) 关于粒子沿  $z'$  轴的分运动

由⑦⑧两式可知,粒子在  $z'$  方向仅受电场力作用,其加速度



$$a_z = \frac{qE_z}{m} = \frac{qE}{m} \sin\alpha. \quad (14)$$

即粒子沿着  $z'$  轴以加速度  $a_z$  做匀加速直线运动。

(iii) 关于粒子在  $Ox'y'z'$  坐标系中的运动方程

在只考虑圆周运动的情况下, 粒子的坐标随时间变化的关系为

$$x' = R(1 - \cos\omega t). \quad (15)$$

$$y' = R\sin\omega t. \quad (16)$$

$$z' = 0. \quad (17)$$

考虑了圆周运动及粒子沿  $z'$  轴的运动并注意到⑨、⑩、⑫式, 在  $Ox'y'z'$  坐标系中, 粒子的运动方程为

$$x' = \frac{mv_0}{qB} (1 - \cos\omega t) = \left( \frac{mv_0}{qB} + \frac{mE_z}{qB^2} \right) (1 - \cos\omega t). \quad (18)$$

$$y' = R\sin\omega t - v_1 t = \left( \frac{mv_0}{qB} + \frac{mE_z}{qB^2} \right) \sin\omega t - \frac{E_z}{B} t. \quad (19)$$

$$z' = \frac{1}{2} \frac{qE_z}{m} t^2. \quad (20)$$

(iv) 粒子在  $Oxyz$  坐标系中的运动方程

利用坐标变换

$$x = x' \cos\alpha + z' \sin\alpha.$$

$$y = y'.$$

$$z = -x' \sin\alpha + z' \cos\alpha.$$

并注意到⑤⑨⑩⑬各式, 可将⑬⑱⑳式转换至  $Oxyz$  坐标系, 得到粒子在  $Oxyz$  坐标系中的运动方程式为

$$x = \frac{m}{qB} \left( v_0 \cos\alpha + \frac{E \cos^2 \alpha}{B} \right) \left( 1 - \cos \frac{q}{m} B t \right) + \frac{1}{2} \frac{qE \sin^2 \alpha}{m} t^2. \quad (21)$$

$$y = \frac{m}{qB} \left( v_0 + \frac{E \cos \alpha}{B} \right) \sin \frac{q}{m} B t - \frac{E \cos \alpha}{B} t. \quad (22)$$

$$z = -\frac{m}{qB} \left( v_0 \sin\alpha + \frac{E \sin 2\alpha}{2B} \right) \left( 1 - \cos \frac{q}{m} B t \right) + \frac{qE \sin 2\alpha}{4m} t^2. \quad (23)$$

根据题意, 将  $x=d$  和  $t=t_0 = \frac{T}{2} = \frac{\pi m}{qB}$  代入⑳式, 解得

$$v_0 = \frac{2qB^2 d - mE(4\cos^2 \alpha + \pi^2 \sin^2 \alpha)}{4mB \cos \alpha}. \quad (24)$$

将  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ,  $t=t_0 = \frac{\pi m}{qB}$  和⑳式代入⑲⑳㉑各式, 可得粒子到达极板  $Q$  时粒子的坐标为

$$x = d. \quad (25)$$

$$y = -\frac{\sqrt{2} \pi m E}{2qB^2}. \quad (26)$$

$$z = -d + \frac{\pi^2 m E}{2qB^2}. \quad (27)$$



解法二:1. 与解法一相同.

2. 以  $y$  轴为旋转轴, 顺时针转动  $\alpha$  角, 建立新坐标系  $Ox'y'z'$ , 设粒子速度在坐标系  $Ox'y'z'$  中分量分别为  $v_{x'}$ 、 $v_{y'}$ 、 $v_{z'}$ , 牛顿第二定律的三个分量形式为

$$m \frac{dv_{x'}}{dt} = qE_{x'} + qv_{y'}B. \quad (1)$$

$$m \frac{dv_{y'}}{dt} = -qv_{x'}B. \quad (2)$$

$$m \frac{dv_{z'}}{dt} = qE_{z'}. \quad (3)$$

将②式表示为

$$\frac{dv_{y'}}{dt} = -\frac{qB}{m} \frac{dx'}{dt}.$$

两边积分后得

$$v_{y'} = -\left(\frac{qB}{m}\right)x' + C_1.$$

$C_1$  为待定常量, 当  $t=0$  时,  $x'=0$ ,  $v_{y'}=v_0$ , 故求得  $C_1=v_0$ , 则上式应表示为

$$v_{y'} = -\frac{q}{m}Bx' + v_0. \quad (4)$$

将④式代入①式, 得

$$m \frac{d^2x'}{dt^2} = qE_{x'} + q\left(-\frac{qB}{m}x' + v_0\right)B. \quad (5)$$

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2x' + \left(\frac{qB}{m}\right)^2\left(\frac{mv_0}{qB} + \frac{mE_{x'}}{qB^2}\right).$$

令

$$R = \left(\frac{mv_0}{qB} + \frac{mE_{x'}}{qB^2}\right). \quad (6)$$

$$\omega = \frac{q}{m}B. \quad (7)$$

$$X' = x' - R. \quad (8)$$

⑤式可表为

$$\frac{d^2X'}{dt^2} = -\omega^2X'. \quad (9)$$

这是简谐运动方程, 其解为

$$X' = A\cos(\omega t + \theta). \quad (10)$$

由⑧式得

$$x' = A\cos(\omega t + \theta) + R. \quad (11)$$

$$\frac{dx'}{dt} = v_{x'} = -\omega A\sin(\omega t + \theta). \quad (12)$$

利用初始条件, 由⑪与⑫式, 得

$$-R = A\cos\theta.$$

$$0 = -\omega A\sin\theta.$$

解得

$$\begin{aligned} \theta &= 0, \\ A &= -R. \end{aligned} \quad (13)$$

再由⑥式,得

$$A = -\left(\frac{mv_0}{qB} + \frac{mE_x'}{qB^2}\right). \quad (14)$$

代入⑩式

$$x' = \left(\frac{mv_0}{qB} + \frac{mE_x'}{qB^2}\right)(1 - \cos\omega t). \quad (15)$$

将⑫式代入②式,整理后得

$$\frac{dv_y}{dt} = \omega^2 A \sin\omega t.$$

对上式积分,考虑初始条件,得

$$v_y = \frac{dy'}{dt} = -\omega A \cos\omega t - \frac{E_x'}{B}. \quad (16)$$

积分⑬式,考虑初始条件及⑭式,得

$$y' = \left(\frac{mv_0}{qB} + \frac{mE_x'}{qB^2}\right) \sin\omega t - \frac{E_x'}{B} t. \quad (17)$$

对③式积分可得

$$z' = \frac{qE_z'}{2m} t^2. \quad (18)$$

⑮⑰⑱式分别与解法一中的⑬⑱⑳式相同,接下去的讨论与解法一相同.

解法三:设粒子速度在  $Oxyz$  坐标中分量分别为  $v_x, v_y, v_z$ , 牛顿第二定律的三个分量方程为

$$m \frac{dv_x}{dt} = qE_x + qv_y B_z. \quad (1)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = -qv_x B_z + qv_z B_x. \quad (2)$$

$$m \frac{dv_z}{dt} = -qB_x v_y. \quad (3)$$

令

$$\omega = \frac{qB}{m}. \quad (4)$$

$$v_1 = \frac{E}{B} \cos\alpha. \quad (5)$$

方程变为如下形式

$$\frac{dv_x}{dt} = \omega v_y \cos\alpha + \frac{\omega v_1}{\cos\alpha}. \quad (6)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\omega v_x \cos\alpha + \omega v_2 \sin\alpha. \quad (7)$$



$$\frac{dv_z}{dt} = -\omega v_y \sin\alpha. \quad (8)$$

对⑧⑨两式积分,利用初始条件  $t=0$  时,  $v_z=0, x=0, y=0$ , 得

$$v_z = \omega y \cos\alpha + \omega \left( \frac{v_1}{\cos\alpha} \right) t. \quad (9)$$

$$v_z = -\omega y \sin\alpha. \quad (10)$$

将⑨⑩两式代入⑦式,得

$$\frac{dv_x}{dt} = -\omega^2 y - \omega^2 v_1 t = -\omega^2 (y + v_1 t).$$

$$\text{令} \quad Y = y + v_1 t. \quad (11)$$

$$\text{得} \quad \frac{d^2 Y}{dt^2} = -\omega^2 Y. \quad (12)$$

其解为

$$Y = A \cos(\omega t + \theta).$$

由⑪式可得

$$y = A \cos(\omega t + \theta) - v_1 t. \quad (13)$$

由⑬式得

$$v_y = -A\omega \sin(\omega t + \theta) - v_1. \quad (14)$$

由初始条件  $t=0$  时,  $v_y = v_0, y=0$ , 得

$$A \cos\theta = 0.$$

$$v_0 = -A\omega \sin\theta - v_1.$$

解得

$$\theta = \frac{\pi}{2}, A = -\frac{v_1 + v_0}{\omega}. \quad (15)$$

由⑮式,注意到④⑤式,得

$$y = \frac{m}{qB} \left( v_0 + \frac{E \cos\alpha}{B} \right) \sin \frac{q}{m} B t - \frac{E \cos\alpha}{B} t. \quad (16)$$

$$v_y = \left( v_0 + \frac{E \cos\alpha}{B} \right) \cos \frac{q}{m} B t - \frac{E \cos\alpha}{B}. \quad (17)$$

把⑰式代入①式,经积分并利用初始条件,可得

$$x = \frac{m}{qB} \left( v_0 \cos\alpha + \frac{E \cos^2 \alpha}{B} \right) \left( 1 - \cos \frac{q}{m} B t \right) + \frac{1}{2} \frac{q E \sin^2 \alpha}{m} t^2. \quad (18)$$

将⑰式代入⑧式,经积分并利用初始条件,得

$$z = -\frac{m}{qB} \left( v_0 \sin\alpha + \frac{E \sin 2\alpha}{2B} \right) \left( 1 - \cos \frac{q}{m} B t \right) + \frac{q E \sin 2\alpha}{4m} t^2. \quad (19)$$

⑱⑲⑳式分别与解法一中的⑲⑳㉑式相同,接下去的讨论与解法一相同.

**题 16** (2005·全国物理竞赛题) 如图 3-7-30 所示,  $OO'$  为一固定不动的半径为  $a_1$  的圆柱形金属轴,其电阻可忽略. 一个内半径为  $a_1$ 、外半径为  $a_2$ 、厚度为  $h$  ( $\ll a_1$ ) 的匀质环形导体圆盘套在  $OO'$  上,与  $OO'$  接触良好,并可绕  $OO'$  转动. 盘上距盘心  $r$  处的电阻率与  $r$  成正比,即  $\rho = \rho_0 r$ ,  $\rho_0$  为常量. 整个环形圆盘处在与环面垂

直的恒定匀强磁场中,磁感应强度的大小为  $B$ 。图中的电源  $S$  是一个不论负载如何变化,均能提供恒定不变的电流  $I$  的电源(称为恒流源),  $R_0$  是跨接在电源两端的固定电阻的阻值。电源的一端接在固定金属轴上端面的中心  $X$  处,另一端与环形电刷  $Y$  相连。环形电刷包围在圆盘的外缘,当圆盘绕金属轴转动时与盘保持良好接触。此装置可看做一“圆盘电动机”。当电源接通后,若它不带任何负载,称为空载状态,空载达到稳定时圆盘的转动角速度用  $\omega_0$  表示;带有负载(图中未画出)时,圆盘转动达到稳定时的角速度用  $\omega$  表示,不计一切摩擦,问:

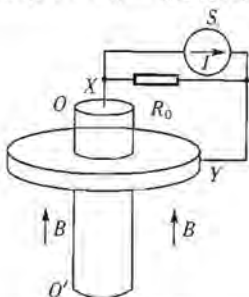


图 3-7-30

- (1) 当电动机输出机械功率  $P$  最大时,  $\omega$  与  $\omega_0$  之比等于多少?  
 (2) 在(1)的情况下,圆盘的发热功率为多少?

**【分析】** 在圆盘转动过程中,圆盘中的径向电流将包含两个成份,一个来自于恒流源,一个由圆盘中的感应电动势(即反电动势)提供,求解前应对“空载”“有负载”以及达到“稳定状态”的含义有充分理解。本题将多处涉及“微元法”,应将圆盘分割成无数个细圆环,由此计算圆盘的径向电阻、圆环所受磁力的功率等等。总之求解本题将需要读者综合运用电磁学多个方面的规律。

**【解】** (1) 接通电路后,恒流源提供恒定的电流  $I$  的一部分流经  $R_0$ , 另一部分流经圆盘。环形电刷、柱形金属轴决定了盘中的电流沿着盘的半径。盘中因有沿着半径的电流而受磁场力矩作用,磁力矩使盘克服负载所加的机械力矩而做加速转动。当圆盘在磁场中转动时,由于电磁感应,盘中出现感应电动势(反电动势),其等效电路如图 3-7-31 所示。图中  $R$  为圆盘的电阻,  $E$  为感应电动势,  $i$  为通过圆盘的总电流。圆盘所在支路的电路方程为

$$(I-i)R_0 - E = iR.$$

或

$$IR_0 - E = i(R_0 + R). \quad \text{①}$$

随着圆盘角速度的增大,感应电动势  $E$  亦增大,由①式可知通过圆盘的电流  $i$  将变小。当电流小到某一值时,磁场的磁力矩与负载的机械力矩平衡,转动达到稳定,盘做匀角速转动。此时的角速度就是有负载时达到稳定状态的角速度  $\omega$ 。如果没有机械负载,即处在空载状态,由于负载力矩为零,故达到稳定时磁力矩亦必须

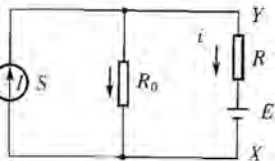


图 3-7-31



等于零, 在没有负载力矩作用的条件下, 圆盘转动的角速度可达到很大, 因而感应电动势亦很大, 致使圆盘中的电流为零, 磁力矩亦为零. 这时, 圆盘的角速度便是空载达到稳定时的角速度  $\omega_0$ .

(i) 环形圆盘中感应电动势的计算

圆盘在磁场中转动时, 它的每根半径都做切割磁感线的运动. 把圆盘看做是由无数根径向辐条组成的, 当盘的角速度为  $\omega$  时, 圆盘某根“辐条”在  $\Delta t$  时间内转过的角度为  $\Delta\theta$ , “辐条”扫过的面积为

$$\Delta S = \frac{1}{2}(a_2^2 - a_1^2)\Delta\theta.$$

磁通量为

$$\Delta\phi = B\Delta S.$$

由电磁感应定律可知, “辐条”中的感应电动势的大小为

$$E = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{1}{2}B(a_2^2 - a_1^2)\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{1}{2}B(a_2^2 - a_1^2)\omega.$$

每根辐条相当于一电源, 这些电源是并联的, 它们的电动势又相等, 故圆盘中的电动势的大小仍为

$$E = \frac{1}{2}\omega B(a_2^2 - a_1^2). \quad (2)$$

(ii) 环形圆盘电阻的计算

因环形圆盘中的电流沿着盘的半径, 故可将圆盘分成很多不同半径  $r_0 (= a_1)$ ,  $r_1, r_2, \dots, r_j, \dots, r_n (= a_2)$  的窄圆环, 第  $j$  个圆环的宽度为  $\Delta r_j = r_j - r_{j-1}$ , 其电阻为

$$\Delta R_j = \rho \frac{\Delta r_j}{S} = (\rho_l r_j) \frac{\Delta r_j}{2\pi r_j h} = \rho_l \frac{\Delta r_j}{2\pi h}.$$

整个圆盘的电阻  $R$  是由各窄圆环电阻串联而成, 即

$$R = \sum_j \Delta R_j = \frac{\rho_l}{2\pi h} \sum_j r_j = \frac{\rho_l}{2\pi h} (a_2 - a_1). \quad (3)$$

(iii) 空载达到稳定时的角速度

当电动机空载达到稳定时, 流过圆盘的电流  $i = 0$ , 这时圆盘的转动角速度为  $\omega_0$ , 由②式可知盘中的感应电动势

$$E_0 = \frac{1}{2}\omega_0 B(a_2^2 - a_1^2). \quad (4)$$

而恒流源的电流  $I$  全部流经电阻  $R_0$ , 由①式得

$$IR_0 = E_0. \quad (5)$$

由④⑤式得电动机空载达到稳定时的角速度

$$\omega_0 = \frac{2IR_0}{B(a_2^2 - a_1^2)}. \quad (6)$$

(iv) 输出最大的机械功率的计算

当有机械负载时, 若圆盘的角速度为  $\omega$ , 此时流过圆盘的电流为  $i$ , 则由①②式

可得 
$$i = \frac{IR_0}{R + R_0} - \frac{1}{2} \frac{B\omega(a_2^2 - a_1^2)}{R + R_0}. \quad (7)$$



第  $j$  个小圆环所受磁力的功率为

$$\Delta P_j = iB\Delta r_j \cdot v_j = iB\Delta r_j \cdot r_j\omega. \quad (8)$$

整个圆环受磁力的功率为

$$P = \sum \Delta P_j = (\sum iB\Delta r_j \cdot r_j)\omega = \frac{1}{2}iB(a_2^2 - a_1^2)\omega. \quad (9)$$

当电动机的转动达到稳定时,电动机输出的机械功率也就是磁力的功率,将⑦式代入⑨式,得

$$P = K_1\omega - K_2\omega^2. \quad (10)$$

其中 
$$K_1 = \frac{IR_0 B(a_2^2 - a_1^2)}{2(R + R_0)}, K_2 = \frac{B^2(a_2^2 - a_1^2)^2}{4(R + R_0)}. \quad (11)$$

⑩式可改写成

$$P = \frac{K_1^2}{4K_2} - K_2 \left( \omega - \frac{K_1}{2K_2} \right)^2. \quad (12)$$

当 
$$\omega = \frac{K_1}{2K_2}. \quad (13)$$

时,输出的机械功率  $P$  最大.由⑪式和⑬式得

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1}{2}. \quad (14)$$

(2)当电动机输出的机械功率最大时,圆盘转动的角速度为  $\omega = \frac{\omega_0}{2}$ ,设这时流经环形圆盘的电流为  $i'$ ,由①②⑥式得

$$i' = \frac{R_0 I}{2(R + R_0)}. \quad (15)$$

圆盘的电阻消耗的热功率

$$P_R = i'^2 R = \frac{1}{4} \frac{R_0^2 R I^2}{(R + R_0)^2}. \quad (16)$$

将⑬式代入⑬式得

$$P_R = \frac{\pi h \rho_0 (a_2 - a_1) R_0^2 I^2}{2[\rho_0 (a_2 - a_1) + 2\pi h R_0]^2}.$$

### 题 17 (2005·亚洲物理奥赛题)

#### 磁 聚 焦

实际应用中很多仪器都需要使用很细的带电粒子束,例如示波器、电视机和电子显微镜中的阴极射线管都需要聚焦的带电粒子束流.在这些仪器中,带电粒子束的聚焦和偏折与光学仪器中光束的调控很类似.

带电粒子束的聚焦可以通过电场和磁场来实现,在问题 A 和 B 中我们要探讨粒子流是如何被磁场聚焦的.

#### A. 螺线管磁聚焦

图 3-7-32 所示为长的螺线管中心的电子枪原理示意图.从阴极端小孔发射出来的电子其横向(即径向)速度比轴向速度小得多,电子将按照螺线管轨迹运动,每经历一个完整的螺旋运动后电子将回归到螺线管轴线上.调节螺线管线圈中的电



流,改变磁感应强度  $B$  的大小,可以使得电子经历一次螺旋运动后刚好回到轴线上的  $F$  点. 给定下述参数:

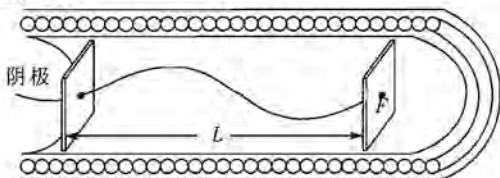


图 3-7-32

- 阴极枪的加速电压是  $U=10$  kV.
- 从阴极上的小孔到聚焦点  $F$  点的距离  $L=0.5$  m.
- 电子质量  $m=9.11 \times 10^{-31}$  kg.
- 电子电荷  $e=1.6 \times 10^{-19}$  C.
- $\mu_0=4\pi \times 10^{-7}$  H/m.
- 不考虑相对论效应.

(a) 为使电子经历一次螺旋运动后又回到轴线上  $F$  点,计算磁感应强度  $B$  的大小.

(b) 当螺线管的线圈匝数为 500 匝/米时,计算螺线管线圈中电流大小.

### B. 磁聚焦(边缘磁场)

如图 3-7-33 所示,两磁铁水平放置,磁极平面都是长方形,长为  $l$  宽为  $w$ ,相互之间间距固定. 磁铁之间的磁场沿垂直方向,强度为  $B$ . 考虑磁极面边缘处的边缘磁场(设磁场显然与边缘效应相联系),假定边缘磁场宽度仅为  $b$ , $x$  大于  $b$  时磁场为 0,如图 3-7-34 所示. 边缘磁场的两个分量分别为  $B_x i$  和  $B_z k$ . 为简单起见,我们假定  $|B_x| = \frac{B|z|}{b}$ ,  $z=0$  是间隙的中间平面. 也就是说:

当粒子从左边进入到磁铁左侧的边缘磁场中时,有  $B_x = +\frac{Bz}{b}$ .

当粒子穿越两磁极之间空间从右边进入到磁铁右侧的边缘磁场中时,有  $B_x = -\frac{Bz}{b}$ .

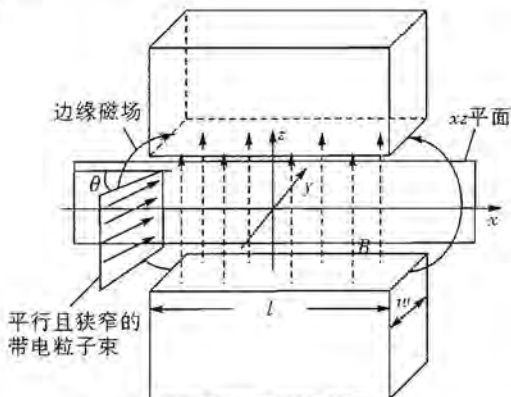


图 3-7-33 系统总览(注意: $\theta$  非常小)

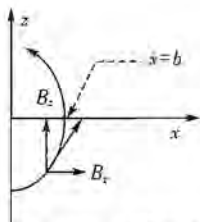


图 3-7-34 边缘磁场





现在一平行的带电粒子流以很高的速度  $v$  进入到两磁铁中间的空间(靠近中间位置),粒子流在图 3-7-33 所示的俯视图中看很窄,在图 3-7-34 所示的侧视图中看粒子流  $z$  方向的尺度(即高度)与两磁极面间距相当.粒子流速度  $v$  平行于水平面(即  $xy$  平面),但是与  $xz$  平面呈一个很小的夹角( $-\theta$ ),如图 3-7-35 所示.粒子流进入到磁极面之间空间后将沿与  $xz$  平面呈夹角  $\theta$  方向射出,

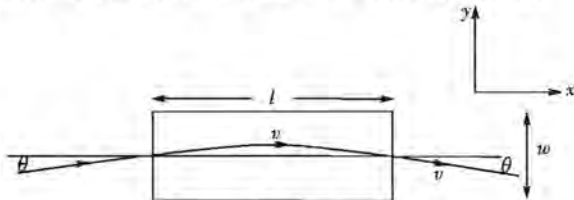


图 3-7-35

粒子流是由于边缘磁场导致聚焦的.我们定义图 3-7-36 中  $f$  为焦距,请计算这一焦距的近似值.(假定  $b \ll l$ ,并且假定在两磁极面之间的空间内粒子流偏转的  $z$  轴分量很小很小,即两磁极面之间的聚焦效应可以忽略)

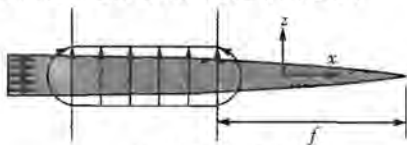


图 3-7-36 侧视图

**【分析】** 在第一问中只需将带电粒子的运动分解为轴向(匀速直线运动)和横向(匀速圆周运动),当横向运动完成一个圆周,其轴向位移即为磁聚焦的焦距.而对于第二问,平行带电粒子流首先进入的是非均匀分布的边缘磁场,正是边缘磁场导致聚焦的(经边缘磁场后的粒子运动方向不再与  $x$  轴平行),求解时应深入分析题给边缘磁场的空间分布规律,由此求得粒子进入匀强磁场时的初始状态.

**【解】** A. 螺线管磁场聚焦

(a) 进入磁场中的电子,受到洛伦兹力的作用,使其运动方向偏折并循螺旋形轨迹前进.设磁感应强度为  $B$ ,则洛伦兹力的大小为

$$\frac{mv_{\perp}^2}{R} = ev_{\perp} B. \quad (1)$$

式中  $v_{\perp}$  为电子的横向速度分量,  $R$  为其轨迹的曲率半径.由于电子在横向上做圆周运动,故  $v_{\perp} = \omega R$ .代入上式,得

$$m\omega = eB \quad \text{或} \quad m \frac{2\pi}{T} = eB. \quad (2)$$

式中  $T$  为电子做横向圆周运动的周期.若欲使电子束聚焦,则该周期必须等于  $\frac{L}{v_{\parallel}}$ ,即

$$T = \frac{L}{v_{\parallel}}. \quad (3)$$



式中  $v_{\parallel}$  为电子的纵向(平行管轴的方向)速度分量, 由于电子的动能来自于其加速电压  $U$ , 故得

$$eU = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2) \approx \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2. \quad (4)$$

由②③和④三式可得

$$B = 2^{\frac{3}{2}} \frac{\pi}{L} \left( \frac{mU}{e} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5)$$

代入已知的数据, 得

$$B = 2^{\frac{3}{2}} \times \frac{\pi}{0.500} \left( \frac{9.11 \times 10^{-31} \times 10.0}{1.60 \times 10^{-19}} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ T} \\ = 4.24 \times 10^{-3} \text{ T} = 4.24 \text{ mT}.$$

(b) 螺线管的磁感应强度为

$$B = \mu_0 n I, \quad I = \frac{B}{\mu_0 n}. \quad (6)$$

式中  $n$  为螺线管的线圈匝数密度, 代入已知的数据, 得

$$I = \frac{4.24 \times 10^{-3}}{4\pi \times 10^{-7} \times 500} \text{ A} = 6.75 \text{ A}.$$

### B. 边缘磁场聚焦

电荷  $q$  在边缘磁场  $\vec{B}$  中所受的洛伦兹力为

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}. \quad (7)$$

其中  $z$  方向上所受的分为

$$F_z = q(v_x B_y - v_y B_x). \quad (8)$$

按题设, 当粒子束从左方进入磁铁左方的边缘磁场时, 粒子在  $xy$  平面上的速度分量分别为  $v_x = v \cos \theta$  和  $v_y = v \sin \theta$ , 边缘磁场的强度  $\vec{B} = \left( B \frac{z}{b} \right) \vec{i} + B_z \vec{k}$ , 而  $B_z = +B \frac{z}{b}$ , 代入上式, 得

$$F_z = -qv_y B_z = -\frac{q(v \sin \theta) B z}{b}. \quad (9)$$

因此带电粒子在  $z$  方向所获得的动量为

$$\Delta p_z = \int F_z dt = F_z \Delta t = -\frac{q(v \sin \theta) B z}{b} \cdot \frac{b}{v \cos \theta} \\ = -qBz \tan \theta. \quad (10)$$

其后, 带电粒子进入两磁极之间的均匀磁场, 其运动轨迹为一圆弧, 故

$$\frac{mv^2}{R} = qvB, \quad v = \frac{qBR}{m}. \quad (11)$$

式中  $R$  为圆弧轨迹的半径, 从图 3-7-37 的几何关系可得

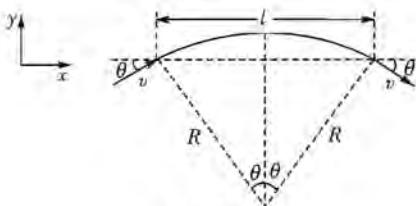


图 3-7-37

$$l = 2R\sin\theta, R = \frac{l}{2\sin\theta} \quad (12)$$

将⑫式代入⑪式,可得

$$v = \frac{qBl}{2m\sin\theta}, \sin\theta = \frac{qBl}{2mv} \quad (13)$$

当带电粒子离开均匀磁场,再度进入磁铁右方的边缘磁场时,这时粒子在  $xy$  平面上的速度分量变为  $v_x = v\cos\theta$  和  $v_y = -v\sin\theta$ , 边缘磁场的强度  $\vec{B} = \left(-B\frac{z}{b}\right)\vec{i} + B_z\vec{k}$ .

再利用③式,可得粒子在  $z$  方向上所受的分为

$$F_z = -qv_y B_z = -q(-v\sin\theta)\left(-\frac{Bz}{b}\right) = -\frac{q(v\sin\theta)Bz}{b} \quad (14)$$

和⑨式相同,因此带电粒子在穿越磁铁的前后,在  $z$  方向所获得的总动量为

$$(\Delta p_z)_{\text{total}} = 2\Delta p_z = -2qB_z \tan\theta \quad (15)$$

由于  $\theta$  很小,故  $\tan\theta \approx \sin\theta$ . 利用⑬式,可得

$$(\Delta p_z)_{\text{total}} \approx -2qB_z \left(\frac{qBl}{2mv}\right) = -\frac{q^2 B^2 z l}{mv} \quad (16)$$

带电粒子沿水平面( $xy$ 平面)运动的动量为

$$p = mv_{\parallel} \approx mv \quad (17)$$

参看相关题图的几何关系,可得

$$\left|\frac{\Delta p_z}{p}\right| = \frac{|z|}{f}, \frac{q^2 B^2 |z| l}{m^2 v^2} = \frac{|z|}{f}, f = \frac{m^2 v^2}{q^2 B^2 l}$$

#### 题 18 (2003·亚洲物理竞赛题)

##### 等离子体透镜

高强度粒子束的物理研究,不仅对基础研究,也对医学及工业上的应用产生很大的冲击.等离子体透镜是一个能在直线对撞机的终端,造成极强聚焦的装置.要凸显等离子体透镜的聚焦能力,可将它与磁透镜和静电透镜相比较.磁透镜的聚焦能力和磁场梯度成正比.磁四极聚焦透镜的实用上限为  $10^2$  T/m,然而等离子体透镜在当密度为  $10^{17}$   $\text{cm}^{-3}$  时,它的聚焦能力相当于磁场梯度为  $3 \times 10^6$  T/m(约为磁聚焦透镜的  $10^4$  倍).

在下面的问题中,我们将阐明为什么高强度的相对论性粒子束,在真空中能够自我聚焦,而不会散开来.

(a)考虑一长圆柱状电子束,电子均匀分布,其数量密度为  $n$ ,电子的平均速



率为  $v$  (此两值均为实验室坐标系的测量值). 利用经典电磁学, 推导出在电子束内, 距其中心轴为  $r$  处的电场强度

(b) 推导出在 (a) 题中同一点的磁感应强度.

(c) 当在电子束中的电子通过该点时, 所受向外的合力为多大?

(d) 假设在 (c) 题中所得的结果, 可适用于相对论性的速度, 则当电子的速度趋近于光速  $c$  时,  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ , 电子所受的力为多大?

(e) 等离子体为具有相同电荷密度的正离子和电子的游离气体. 正离子和电子的粒子数密度相等. 若半径为  $R$  的电子束进入一密度均匀, 离子数密度为  $n_0$  ( $n_0 < n$ ) 的等离子体中, 则当电子束进入等离子体经一段长时间后, 静止的等离子体离子在电子束外, 距电子束中心轴为  $r'$  处所受的合力为多大? 假设等离子体内的离子数密度和其圆柱状对称性维持不变.

(f) 在电子束进入等离子体一段长时间后, 电子束内距离电子束的中心轴为  $r$  的一个电子, 所受的合力为多大? 假设电子的速率  $v \rightarrow c$ , 且等离子体内的离子数密度和其圆柱状对称性维持不变.

**【分析】** 求解本题时应首先理解等离子透镜中所呈现的物理图象, 即电荷整体分布的方式被限制在圆柱形空间内, 利用对称性可由高斯定律求电场分布和环路定律求运动电荷的磁场分布, 进而可求电子束中的电子所受的电磁力. 另外注意当电子束进入等离子体所占据的空间后, 其中负离子 (即电子) 可被排斥出去, 留下的仅为正离子 (设为静止).

**【解】** (a) 在电子束内, 选取一半径为  $r$ , 长度为  $L$ , 对称于其中心轴的圆柱, 如图 3-7-38 所示. 由于电荷密度的圆柱形对称性, 在该圆柱侧表面上的电

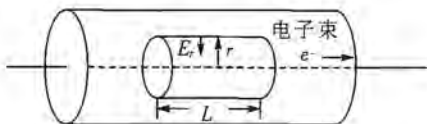


图 3-7-38

场强度大小皆相等, 其方向向内垂直于中心轴. 由高斯定律  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$ , 可得

$$E_r \cdot 2\pi r L = \frac{-ne(\pi r^2 L)}{\epsilon_0},$$

$$E_r = -\frac{ner}{2\epsilon_0} \text{ 或 } \vec{E} = -\frac{ner}{2\epsilon_0} \vec{e}_r.$$

(b) 在图 3-7-39 所示的电子束内, 选取一半径为  $r$ , 对称于中心轴的圆形封闭路径. 由封闭路径包围的电流, 在圆周上所产生的磁感应强度大小皆相

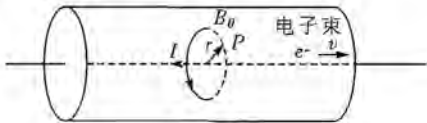


图 3-7-39

等, 其方向为顺时针方向 (面对电子束的前进方向). 由安培环路定律  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$ , 可得

$$B_\theta \cdot 2\pi r = \mu_0 (-nev)(\pi r^2),$$

$$B_{\theta} = -\frac{\mu_0 n e r v}{2} \text{ 或 } \vec{B} = -\frac{\mu_0 n e r v}{2} \vec{e}_{\theta}$$

(c) 电子所受的电磁力(洛伦兹力)为

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

其中电子所受的电场力为  $F_r = (-e)E_r = \frac{ne^2 r}{2\epsilon_0}$ , 方向垂直于中心轴向外。

电子所受的磁场力为  $F_m = evB_{\theta} = -\frac{\mu_0 ne^2 r v^2}{2}$ , 方向垂直于中心轴向内。

故电子所受的合力为

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = \left( \frac{ne^2 r}{2\epsilon_0} - \frac{\mu_0 ne^2 r v^2}{2} \right) \vec{e}_r = \frac{ne^2 r}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \vec{e}_r$$

式中  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$  为光在真空中的传播速率。

(d) 当电子的速度趋近于光速  $c$  时, 电子所受的合力  $F \rightarrow 0$ , 即电子所受的电场力和磁场力彼此抵消。

(e) 参考图 3-7-40 (背景为等离子体), 图中的圆柱代表射入的电子束(粒子数密度为  $n$ ), 其半径为  $R$ , 电子的平均速率为  $v$ 。在电子束进入等离子体经一段时间后, 靠近电子束的等离子体中的电子, 由于质量轻而被排斥出去, 只剩下正离子[离子数密度为  $n_0$  ( $n_0 < n$ )]被吸引在内。设  $Q$  为在电子束外的静止的等离子体离子, 距电子束中心轴为  $r'$ , 应用高斯定律, 可得该处的电场强度为

$$E_r \cdot 2\pi r' L = \frac{1}{\epsilon_0} [(-ne)(\pi R^2 L) + (n_0 e)(\pi r'^2 L)]$$

$$E_r = -\frac{neR^2}{2\epsilon_0 r'} + \frac{n_0 e r'}{2\epsilon_0}$$

由于题设等离子体离子静止, 不会受到磁力的作用, 所以该处正离子所受的合力为

$$F = eE_r = -\frac{ne^2 R^2}{2\epsilon_0 r'} + \frac{n_0 e^2 r'}{2\epsilon_0}$$

(f) 在等离子体内的电子束, 其内距中心轴的径向距离为  $r$  ( $r < R$ ) 的一个电子, 所受的电磁力为

$$\vec{F} = \frac{ne^2 r}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \vec{e}_r - \frac{n_0 e^2 r}{2\epsilon_0} \vec{e}_r$$

当电子的速度  $v \rightarrow c$  时,  $\vec{F} \approx -\frac{n_0 e^2 r}{2\epsilon_0} \vec{e}_r$ , 方向为垂直于中心轴向内。

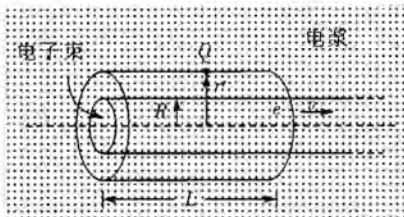


图 3-7-40



### 题 19 (2002·亚洲物理竞赛题)

#### 导 轨 枪

如图 3-7-41 所示,在  $P$  点有一位小伙子,在  $Q$  点有一位姑娘,他们深深相爱。 $P$  点和  $Q$  点由一宽度为  $w=1\ 000\text{ m}$  的海峡隔开,小伙子在课堂上学过导轨枪理论后,他立刻决定造一座导轨枪将自己发射到对岸去,如图 3-7-42 所示,他造了一个倾角可调的斜坡,在斜坡上平行放置间隔  $L=2.00\text{ m}$  的两根金属导轨,每根导轨的长度  $D=35.0\text{ m}$ 。他设法将一个  $2\ 424\text{ V}$  的直流电源与两根金属导轨端部相连,一根导电棒可以在金属导轨上自由滑动(保持与导轨垂直),当它滑动时,小伙子可安全地吊在上面。

一位技术高超的工程师被小伙子的这些努力所感动,设计了一个系统,它能产生  $B=10.0\text{ T}$  的磁场,磁场方向与导轨的平面垂直。小伙子重  $70\text{ kg}$ ,导电棒重  $10\text{ kg}$ ,导电棒的电阻  $R=1.0\ \Omega$ 。完工后,导轨枪可正常工作。此时他接到姑娘一个电话,姑娘哭着告诉他,她的父亲将她许配给一个富人,除非电话挂断后  $11\text{ s}$  内他能赶到  $Q$  点,说完后她就挂断了电话,小伙子立即行动并将自己发射到  $Q$  点。

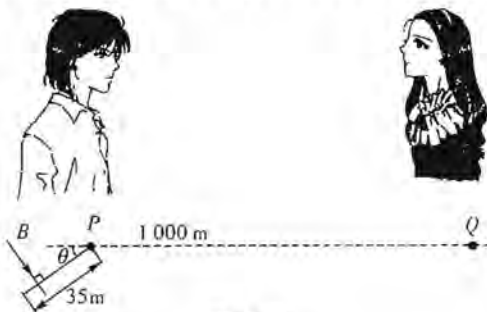


图 3-7-41

按照下列步骤,推断他能否按时完成此事?如果能,斜坡倾角应在什么范围内?

- 推导出小伙子平行于导轨的加速度。
- 用  $\theta$  的表达式写出小伙子在导轨上花去的时间  $t_1$  和在空中飞行花去的时间  $t_2$ 。
- 画出总时间  $T=t_1+t_2$  与倾角  $\theta$  的数值关系曲线。

(d) 考虑到导轨枪的相关参数,求出小伙子设置倾角  $\theta$  的允许范围。如果需要,再作一个数值关系图。

作下列假定:

- 接完电话后到发射前的所有准备时间(例如将倾角  $\theta$  调到合适的角度)可以忽略不计,也就是说,设棒(年轻小伙子吊在棒上)开始在斜坡上运动(发射)的时刻  $t=0$ 。

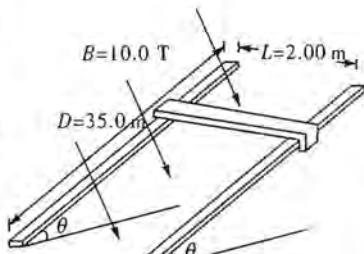


图 3-7-42

- 2) 小伙子可以在金属导轨的任意位置开始发射.
- 3) 斜坡的高端和 Q 点在同一水平高度, 两者相距  $w = 1000 \text{ m}$ .
- 4) 无任何安全问题, 例如可以安全落地, 无电击问题.
- 5) 金属导轨的电阻、导电棒与导轨间的摩擦力以及空气阻力都可以忽略不计.
- 6) 重力加速度  $g$  取  $10 \text{ m/s}^2$ .

几个数学公式:

$$1. \int e^{-ax} dx = -\frac{e^{-ax}}{a}.$$

2. 方程  $\frac{dx}{dt} = a + bx$  的解由下式给出

$$x(t) = \frac{a}{b}(e^{bt} - 1) + x(0)e^{bt}.$$

**【分析】** 求解本题的一种简单方法是: 不考虑电磁感应现象, 则金属棒(连同小伙子)在恒力(含重力和磁力)作用下做匀加速直线运动. 离开导轨后做斜上抛运动, 但与实际结果偏差较大, 而合适解法是: 考虑金属棒中的感应电流, 则磁力是一个与运动速度有关的变力, 此时必须注意位置、速度、时间等物理量应满足的微积分关系.

**【解】** 解法一: 考虑感应电动势的影响(合适的解法).

(a) 设在没有反电动势的情况下, 直流电源所供应的电流为  $I$ . 另设反电动势为  $\epsilon_0$ , 其所产生的感应电流为  $i$ , 则

$$\epsilon_0 = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d(BLx)}{dt} = BLv, i = \frac{BLv}{R}.$$

流经金属轨道的净电流为

$$I_N = I - i = I - \frac{BLv}{R}.$$

作用于金属棒的磁力为

$$F_c = BLI_N = BL\left(I - \frac{BLv}{R}\right) = BLI - \frac{B^2L^2v}{R}.$$

此磁场力的方向平行于金属轨道, 斜向上垂直于金属棒. 考虑小伙子挂在金属棒上, 随之滑行, 因此作用在棒上的合力为

$$F_N = F_c - mg \sin \theta. \quad (1)$$

由牛顿第二定律得

$$F_N = ma = m \frac{dv}{dt}. \quad (2)$$

由①和②两式可得男孩平行于轨道的加速度为

$$\frac{dv}{dt} = a - \frac{v}{\tau}, \quad (3)$$

式中

$$a = \frac{BIL}{m} - g \sin \theta, \tau = \frac{mR}{B^2L^2}.$$

(b) (i) 已知金属棒的初速为零, 由③式可解得金属棒在时刻  $t$  的速度为



$$v(t) = v_{\infty} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad (4)$$

式中 
$$v_{\infty}(\theta) = a\tau = \frac{IR}{BL} \left(1 - \frac{mg}{BLI} \sin\theta\right).$$

设男孩脱离轨道的速度为  $v$ , 在轨道上所经历的时间为  $t$ , 则

$$v_s = v(t_s) = v_{\infty} (1 - e^{-\frac{t_s}{\tau}}). \quad (5)$$

由上式解得

$$t_s = -\tau \ln \left(1 - \frac{v_s}{v_{\infty}}\right). \quad (6)$$

(b)(ii) 设男孩飞越海峡所经历的时间为  $t_f$ , 则

$$t_f = \frac{2v_s \sin\theta}{g}. \quad (7)$$

在  $t_f$  时间内, 他必须飞越的水平距离为  $w$ , 故

$$w = (v_s \cos\theta) t_f. \quad (8)$$

由⑦和⑧两式得

$$t_f = \frac{w}{v_s \cos\theta} = \frac{2v_s \sin\theta}{g}. \quad (9)$$

由⑨式可知  $v_s$  决定于金属棒的仰角  $\theta$  和海峡的宽度  $w$ , 即

$$v_s = \sqrt{\frac{gw}{\sin 2\theta}}. \quad (10)$$

将⑩式代入⑥式, 得

$$t_s = -\tau \ln \left(1 - \frac{1}{v_{\infty}} \sqrt{\frac{gw}{\sin 2\theta}}\right).$$

将⑩式代入⑨式, 得

$$t_f = \frac{2\sin\theta}{g} \sqrt{\frac{gw}{\sin 2\theta}} = \sqrt{\frac{2w \tan\theta}{g}}.$$

(c) 男孩历经全程的总时间为

$$T = t_s + t_f = -\tau \ln \left(1 - \frac{1}{v_{\infty}} \sqrt{\frac{gw}{\sin 2\theta}}\right) + \sqrt{\frac{2w \tan\theta}{g}}.$$

代入已知的参数值:  $B = 10.0 \text{ T}$ ,  $I = 2424 \text{ A}$ ,  $L = 2.00 \text{ m}$ ,  $R = 1.0 \Omega$ ,  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ,  $m = 80 \text{ kg}$ ,  $w = 1000 \text{ m}$ , 可得

$$\tau = \frac{mR}{B^2 L^2} = \frac{80 \times 1.0}{(10.0)^2 \times (2.00)^2} = 0.20 \text{ s},$$

$$\begin{aligned} v_{\infty}(\theta) &= \frac{2424}{10.0 \times 2.00} \left(1 - \frac{80 \times 10}{10.0 \times 2.00 \times 2424} \sin\theta\right) \\ &= 121(1 - 0.0165 \sin\theta), \end{aligned}$$

$$T = t_s + t_f = -0.20 \ln \left(1 - \frac{100}{v_{\infty}} \frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}\right) + 14.14 \sqrt{\tan\theta}.$$

$T$  对  $\theta$  的关系曲线如下图 3-7-43 所示.



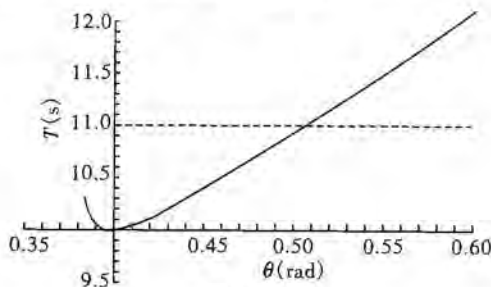


图 3-7-43

注意:在图 3-7-43 中的  $\theta$  值有一下限,这是由于对数的变量必须为正值,故  $\frac{v_t}{v_\infty} < 1$  或  $1 > \frac{100}{v_\infty} \frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}$ . 因为  $v_\infty \approx 121 \text{ m/s}$ , 得  $\sin(2\theta) > 0.68$ , 所以  $\theta > 0.37 \text{ rad}$ .

由图中可读出对应  $T \leq 11 \text{ s}$  的  $\theta$  角范围为  $0.38 \text{ rad}$  至  $0.505 \text{ rad}$  之间.

(d) 考虑这个发射器的相关参数,我们必须考虑轨道本身长度  $D$  的限制,即男孩在  $t_s$  的时间内,在轨道上滑行的距离必须小于或等于  $D$ .

$$D_s = \int_0^{t_s} v(t) dt = v_\infty \int_0^{t_s} (1 - e^{-t/\tau}) dt = v_\infty (t + \tau e^{-t/\tau}) \Big|_0^{t_s} \\ = v_\infty [t_s - \tau(1 - e^{-t_s/\tau})] = v_\infty t_s - v_s \tau.$$

$$D_s = -\tau \left[ v_\infty(\theta) \ln \left( 1 - \frac{1}{v_\infty(\theta)} \sqrt{\frac{g w}{\sin 2\theta}} \right) + \sqrt{\frac{g w}{\sin 2\theta}} \right].$$

图 3-7-44 为  $D_s$  对  $\theta$  的关系曲线.

由于限制条件为  $D_s \leq D$  ( $D = 35 \text{ m}$ ), 所以合适的  $\theta$  角必须在  $0.5 \text{ rad}$  至  $1.06 \text{ rad}$  之间.

为同时满足(c)和(d)的  $\theta$  角条件,合适的  $\theta$  角必须在  $0.5 \text{ rad}$  至  $0.505 \text{ rad}$  之间.

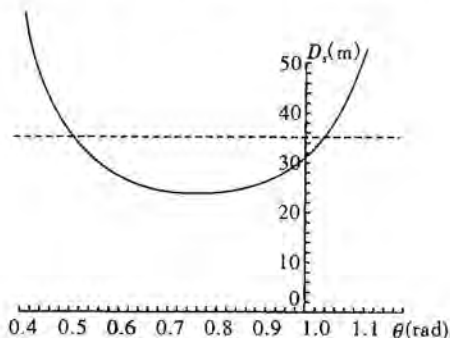


图 3-7-44

利用前述  $t_f$ 、 $t_s$ 、 $T$  和  $D_s$  的公式,可得



当  $\theta=0.507$ ,  $t_f=10.540$  s,  $t_s=0.466$  s, 得  $T=11.01$  s,  $D=34.3$  m;

当  $\theta=0.506$ ,  $t_f=10.527$  s,  $t_s=0.467$  s, 得  $T=10.99$  s,  $D=34.4$  m;

当  $\theta=0.502$ ,  $t_f=10.478$  s,  $t_s=0.472$  s, 得  $T=10.95$  s,  $D=34.96$  m;

当  $\theta=0.500$ ,  $t_f=10.453$  s,  $t_s=0.474$  s, 得  $T=10.93$  s,  $D=35.2$  m.

从上面的计算数据可知较精确的  $\theta$  角落在  $0.502$  rad 至  $0.507$  rad 之间, 相当于  $28.8^\circ$  至  $29.0^\circ$  之间.

若取两位有效数字, 则  $\theta$  角落在  $0.50$  至  $0.51$  rad 之间, 相当于  $28.6^\circ$  至  $29.2^\circ$ , 或取  $29^\circ$ .

解法二: 不考虑感应电动势的影响(近似的解法).

如果不考虑感应电动势, 则没有感应电流, 故作用于金属棒和男孩系统的合力为

$$F_N = BIL - mg \sin \theta.$$

男孩在轨道上运动的加速度为

$$\frac{dv}{dt} = a = \frac{BIL}{m} - g \sin \theta.$$

由上式得

$$v(t) = at.$$

男孩脱离轨道的速度为

$$v_s = v(t_s) = at_s.$$

式中  $t_s$  为男孩在轨道上所经历的时间. 男孩飞越海峡所经历的时间为

$$t_f = \frac{2v_s \sin \theta}{g} = \frac{2at_s \sin \theta}{g}.$$

若男孩能跨越海峡的宽度  $w$ , 则须满足下式

$$w = (v \cos \theta) t_f = \frac{a^2 t_s^2 \sin 2\theta}{g},$$

解得

$$t_s = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{gw}{\sin 2\theta}},$$

$$t_f = \sqrt{\frac{2w \tan \theta}{g}}.$$

男孩历经全程的总时间为

$$\begin{aligned} T &= t_s + t_f = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{gw}{\sin 2\theta}} + \sqrt{\frac{2w \tan \theta}{g}} \\ &= \frac{\sqrt{wg}}{a} \left[ 1 + 2 \left( \frac{a}{g} \right) \sin \theta \right] \sqrt{\sin 2\theta}. \end{aligned}$$

代入已知的参数值:  $B=10.0$  T,  $I=2424$  A,  $L=2.00$  m,  $R=1.0$   $\Omega$ ,  $g=10$  m/s<sup>2</sup>,  $m=80$  kg,  $w=1000$  m, 可得

$$T = \frac{100}{a} \frac{[1 + 0.20a \sin \theta]}{\sqrt{\sin 2\theta}}.$$

式中  $a = 606 - 10\sin\theta$ .

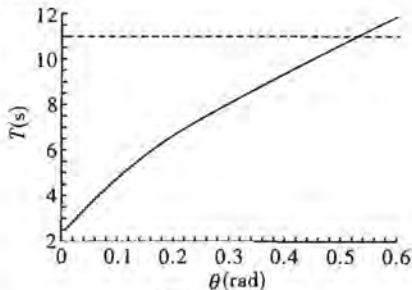


图 3-7-45

由图 3-7-45 中可读出对应  $T \leq 11$  s 的  $\theta$  角范围为 0 至 0.52 rad 之间。

再考虑另一限制条件,即轨道的长度  $D$ 。设  $D_t$  为男孩在  $t$  时间内,在轨道上所行的距离,则

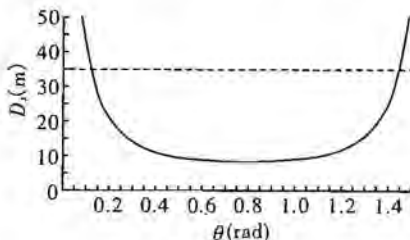


图 3-7-46

$$D_t = \frac{1}{2} at^2 = \frac{gw}{2a\sin 2\theta} = \frac{5000}{a\sin 2\theta}$$

由于限制条件为  $D_t \leq D$  ( $D = 35$  m),由图 3-7-46 可读出合适的  $\theta$  角必须在 0.11 rad 至 1.43 rad 之间。

为同时满足上述两项有关  $\theta$  角的条件,合适的  $\theta$  角必须在 0.11 rad 至 0.52 rad 之间,相当于  $6.3^\circ$  至  $30^\circ$  之间。

#### 题 20 (2000·亚洲物理竞赛题)

##### 斯泰瓦-托尔曼(Stewart-Tolman)效应

1917 年,斯泰瓦和托尔曼发现,一绕在圆柱上的闭合线圈,当该圆柱以一定角加速度绕轴旋转时,线圈中会有电流流过。

设有许多匝线圈,每匝线圈的半径为  $r$ ,每匝线圈均用电阻为  $R$  的细金属导线绕成,线圈均匀地绕在一很长的玻璃圆柱上,圆柱的内部为真空。每匝线圈的位置用粘胶固定在圆柱上,单位长度的线圈匝数为  $n$ ,包含每匝线圈的平面与圆柱的轴垂直。

从某一时刻开始,圆柱以角加速度  $\alpha$  绕其轴旋转,经过足够长时间后,求圆柱中心处的磁场的磁感应强度  $B$ 。(电子的电荷量  $e$  和质量  $m$  为已知)

**【分析】** 由于导体中部分价电子可以“自由”移动,因而当线圈(可视为长直螺



线管)转动时,这部分电子与正离子晶格出现相对运动从而产生电流.本题以正离子晶格为参考系,并引入惯性力和虚拟电场处理将较为简便.

**【解】**先考虑一个圆环.取环的一小部分,并引进该小部分在其中静止的参照系.环以恒定的角加速度  $\alpha$  运动,于是,我们引进的参照系不是惯性系,它具有一定的线加速度.此加速度的径向分量可不必考虑(因为环很细,观察不到任何径向效应),加速度的切向分量为  $r\alpha$ .在我们所取的参照系中,形成金属晶格的正离子处于静止状态.在此参照系中有惯性力作用在电子上,此力的大小为  $mra$ ,方向与上述切向加速度方向相反.

晶格与电子间的相互作用不允许电子无限制地增加速度.根据欧姆定律,此相互作用随电子相对晶格的速度增大而增大.某一时刻,惯性力与这种相互作用造成的阻力会达到平稳.结果,正离子与负的电子以不同的速度运动.这就是说,在正离子静止的参照系中将有电流流过.

此惯性力大小是常量,方向在环的每一部分均与环相切,它对电子的作用与一个在每一点上与环相切的虚拟电场相同.

现来求此虚拟电场的大小.显然,此电场的作用力应等于惯性力.由此

$$eE = mra.$$

因而

$$E = \frac{mra}{e}.$$

在电阻为  $R$  的环(静止)中,上述电场将产生电流

$$I = \frac{2\pi rE}{R}.$$

于是,在所考查的环中的电流应为

$$I = \frac{2\pi nr^2\alpha}{eR}.$$

诚然,场是虚拟的电场,但它描述了惯性力对电子的一种真实作用.环中的电流是真实的.

以上想法可用来处理题中所述单位长度有  $n$  匝线圈(沿对称轴)的很长螺线管的问题,其中流有电流  $I$ .大家知道,在此螺线管中,磁场  $B$  的大小均匀(在远离两端处),其值为

$$B = \mu_0 nI.$$

式中  $\mu_0$  为真空磁导率.由于轴上一点不转动,不论在转动非惯性系中还是在实验室参照系中均静止不动,因而在实验室参照系中,在轴的中心处的磁场为

$$B = \mu_0 nI = \frac{2\pi\mu_0 nmr^2\alpha}{eR}.$$

本题颇有启发性.因为,尽管环是电中性的,但出人意料,由于金属的特殊结构,螺线管中却会出现磁场.由此,英语里的电学名词“电动势(electromotive force)”中会含有力学名词“力(force)”也就变得容易理解了.

## 题 21 (2005·国际物理奥赛题)

## 电学量的绝对测量

经历了科学和技术变革时期的 19 世纪迫切需要一个标准电学量的通用标准. 人们认识到新绝对单位需要与标准长度、质量和时间单位有关. 从 1861 年直到 1912 年, 为了确定电学单位的值, 进行了深入的实验工作, 我们将提及其中的三项.

## 开尔文的确定 (Kelvin)

一个半径为  $a$ , 总电阻为  $R$  的  $N$  匝闭合圆线圈的水平磁场  $B_0 = B_0 i$  中绕垂直直径以匀角速度  $\omega$  旋转 (图 3-7-47).

(1) 计算线圈产生的感应电动势  $E$ , 以及维持线圈运动需要的平均功率  $\langle P \rangle$ , 忽略线圈的自感. (本题用符号  $\langle \rangle$  表示平均值)

一个小磁针放在线圈的中心, 如图 3-7-47, 它可以绕  $z$  轴在水平面上慢慢地自由转向, 但它跟不上线圈的快速旋转.

(2) 一旦达到稳定的状态, 磁针的方向与磁场  $B_0$  夹角为  $\theta$ , 给出线圈的电阻  $R$ , 用以上角度和其他系统参数表示之.

在 1860 年, 开尔文勋爵用这种方法确定了欧姆的标准. 为了避免旋转线圈, 洛伦兹设计了一个不同的方法, 后来被 Rayleigh, Sidgwick 采用, 这就是我们下一段要讨论的.

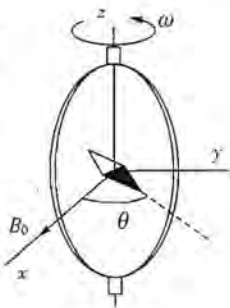


图 3-7-47

## 欧姆的确定 (Ohm)

实验装置如图 3-7-48, 它由两个半径为  $b$ , 相同的金属圆盘, 安装在导电的转轴  $SS'$  上, 一个转速为  $\omega$  的马达带动这个装置, 在测量电阻  $R$  时转速可以调节. 两个相同的线圈  $C$  和  $C'$  (它们的半径为  $a$ , 匝数为  $N$ ) 与圆盘同心放置. 连接后线圈中电流  $I$  方向相反, 整个装置用来测量电阻  $R$ .

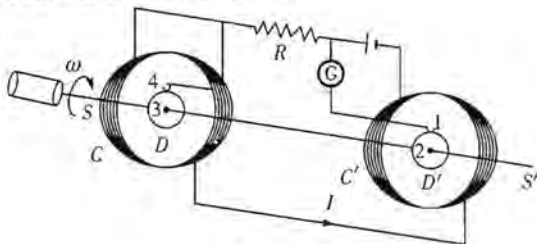


图 3-7-48

(3) 假设流过线圈的电流  $I$  在  $D$  和  $D'$  处产生均匀的磁场  $B$ , 它等于线圈中心处的磁场. 计算边缘 1 和 4 之间的感应电动势  $E$ . 假设线圈中心之间的距离远大于线圈的半径, 并且  $a \gg b$ . 两个圆盘在边缘 1 和 4 通过电刷与电路相连接, 检流计  $G$  测定流过回路 1—2—3—4 的电流.

(4) 当  $G$  读数为零时, 可以确定电阻的值, 给出电阻与系统物理参数的关系.



## 安培的确定(Ampere)

让电流通过两个导体,测量它们之间的作用力,是确定电流的绝对量度的方法.1882年开尔文勋爵利用这一方法设计了“电流秤”.它是由6个半径为 $a$ 的相同的单匝线圈 $C_1, \dots, C_6$ 串联而成,如图3-7-49所示.固定线圈 $C_1, C_3$ 以及 $C_4$ 和 $C_6$ 并水平放置,相距皆为 $2h, 2h$ 是小量,线圈 $C_2$ 和 $C_5$ 挂在天平两个臂上,臂长为 $d$ ,在平衡时,它们与上下固定线圈距离相等.

当电流 $I$ 按图示的方向流过不同线圈,磁力的方向是 $C_2$ 受力向上, $C_5$ 受力向下.一个质量为 $m$ 的砝码置于离支点 $O$ 距离 $x$ 处,用于电流存在时恢复上述的平衡位置.

(5)计算 $C_2$ 和 $C_1$ 的相互作用磁力 $F$ .为了简单起见,假设它们单位长度的相互作用力与载流平行长直导线的相同.

(6)当天平衡时,测量电流的值.用以上条件和参数表示出电流的值.装置的尺度保证了天平左臂的线圈与右臂线圈之间的作用力可以忽略.

$M$ 是天平的质量(砝码和悬挂物的质量除外), $G$ 是其质心, $l$ 是 $OG$ 之间的距离.

(7)当线圈 $C_2$ 产生一个小的偏移 $+\delta z$ , $C_5$ 产生 $-\delta z$ 的偏移时,天平的平衡是稳定的.试计算天平释放后仍能够返回平衡位置的最大偏移 $\delta z_{\max}$ .

(注:考虑到线圈中心近似共轴. $\beta \ll 1$ 时,利用以下近似:

$$\frac{1}{1 \pm \beta} \approx 1 \mp \beta + \beta^2 \quad \text{或} \quad \frac{1}{1 \pm \beta^2} \approx 1 \mp \beta^2; \quad \text{当 } \theta \text{ 小时, } \sin \theta \approx \tan \theta$$

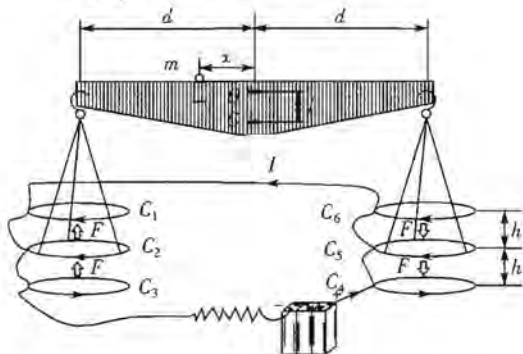


图 3-7-49

**【分析】** 本题展现了历史上三位著名物理学家为确定标准电学量的值而做过的实验工作.为解答实验每个环节中的物理问题,需要我们综合运用电磁学和力学中的若干知识和规律,也将使我们对上述电学量之间本质关系有了一个深入的理解.

**【解】** (1)在 $t$ 时刻线圈平面法线与磁场方向夹角为 $\omega t$ .通过线圈的磁通量为

$$\phi = NB_0 \cdot S.$$

$S$ 是面积矢量.

$$S = \pi a^2 (\cos \omega t i + \sin \omega t j).$$

$$\phi = N \pi a^2 B_0 \cos \omega t.$$

由法拉第定律得感应电动势

$$E = -\frac{d\phi}{dt} \rightarrow E = N \pi a^2 B_0 \sin \omega t.$$

瞬时功率  $P = \frac{E^2}{R}$ , 其平均值是

$$\langle P \rangle = \frac{(N \pi a^2 B_0 \omega)^2}{2R}.$$

(2) 在  $t$  时刻线圈中心的总场强为

$$B_t = B_0 + B_i.$$

$B_i$  是感应电流的磁场

$$B_i = B_i (\cos \omega t i + \sin \omega t j).$$

利用线圈磁场公式  $B_i = \frac{\mu_0 N I}{2a}$  以及  $I = \frac{E}{R}$ , 得到

$$B_i = \frac{\mu_0 N^2 \pi a B_0 \omega}{2R} \sin \omega t.$$

它的分量的平均值为

$$\langle B_{ix} \rangle = \frac{\mu_0 N^2 \pi a B_0 \omega}{2R} \langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0.$$

$$\langle B_{iy} \rangle = \frac{\mu_0 N^2 \pi a B_0 \omega}{2R} \langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{\mu_0 N^2 \pi a B_0 \omega}{4R}.$$

总磁场的平均值为

$$\langle B_t \rangle = B_0 i + \frac{\mu_0 N^2 \pi a B_0 \omega}{4R} j.$$

此针指向平均场的方向, 所以

$$\tan \theta = \frac{\mu_0 N^2 \pi a \omega}{4R}.$$

这种方法测量的电阻用  $\theta$  表示为

$$R = \frac{\mu_0 N^2 \pi a \omega}{4 \tan \theta}.$$

(3) 圆盘上单位正电荷受的力为

$$|v \times B| = vB = \omega r B.$$

$B$  是线圈中心处的磁场

$$B = N \frac{\mu_0 I}{2a}.$$

圆盘在磁场里的电动势为

$$E_D = E_D = B \omega \int_0^a r dr = \frac{1}{2} B \omega a^2.$$



1 和 4 之间总的电动势为  $E = E_D + E_V$ .

$$E = N \frac{\mu_0 b^2 \omega I}{2a}$$

(4) 当检流计 G 的读数为零时  $I_G = 0$ , 由 Kirchoff 定律可得

$$E = IR \Rightarrow R = N \frac{\mu_0 b^2 \omega}{2a}$$

(5) 两根相距为  $h$  的无限长平行直导线单位长度的作用力为

$$f = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{h}$$

$I_1 = I_2 = I$ , 取长度为  $2\pi a$ ,  $C_2$  受到相邻线圈  $C_1$  的作用力  $F$  为

$$F = \frac{\mu_0 a}{h} I^2$$

(6) 由力矩平衡条件

$$mgx = 4Fd$$

所以

$$mgx = \frac{4\mu_0 ad}{h} I^2$$

①

可以解得

$$I = \left( \frac{mghx}{4\mu_0 ad} \right)^{\frac{1}{2}}$$

(7) 当天平偏离平衡位置一个小的  $\delta\varphi$  (图 3-7-50), 如果重力矩大于磁力矩, 天平会返回平衡位置, 即

$$Mgl\sin\delta\varphi + mgx\cos\delta\varphi > 2\mu_0 a I^2 \left( \frac{1}{h-\delta z} + \frac{1}{h+\delta z} \right) d \cos\delta\varphi$$

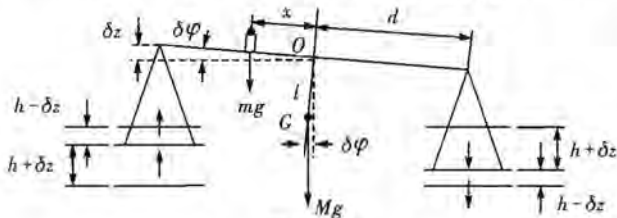


图 3-7-50

应用题目所给的近似, 得到

$$Mgl\sin\delta\varphi + mgx\cos\delta\varphi > \frac{4\mu_0 ad I^2}{h} \left( 1 + \frac{\delta z^2}{h^2} \right) \cos\delta\varphi$$

考虑到平衡条件①, 可得

$$Mgl\sin\delta\varphi > mgx \frac{\delta z^2}{h^2} \cos\delta\varphi$$

对于小的偏角

$$\tan\delta\varphi \approx \sin\delta\varphi = \frac{\delta z}{d}$$



$$\delta z < \frac{Mlh^2}{mxd} \Rightarrow \delta z_{\max} = \frac{Mlh^2}{mxd}$$

### 题 22 (2004 · 国际物理竞赛题)

#### “乒乓”电阻

如图 3-7-51(a)所示,一个电容器由两片半径为  $R$ ,相距为  $d$ ,平行放置的圆形导体平板构成, $d \ll R$ . 上板与电压为  $V$  的恒压源相连,下板接地. 然后,如图 3-7-51(b)所示,将一个很薄很小的导体圆片放置于电容器下板的中心. 小导体圆片的质量为  $m$ ,半径  $r (\ll R, d)$ ,厚度  $t (\ll r)$ .

假设电容器两板间为真空,电容率为  $\epsilon_0$ ,圆形导体平板和小导体圆片均为理想导体,忽略所有静电边界效应和整个电路中的所有电感效应,相对论效应和镜像电荷效应也忽略.

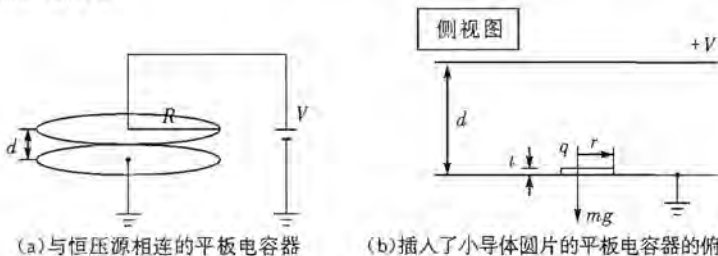


图 3-7-51

(a) 未插入小导体圆片时,计算如图 3-7-32(a)所示的平板电容器两板间相距为  $d$  时的静电压作用力  $F_p$ .

(b) 如图 3-7-32(b)所示,将小导体圆片放置于电容器下板的中心,小导体圆片上的电荷量  $q$  与两板间的电压  $V$  的关系为  $q = \chi V$ ,求  $\chi$  与  $r, d, \epsilon_0$  之间的关系.

(c) 平板电容器两板与均匀的重力场  $g$  垂直. 如果使位于下板中心的小导体圆片由静止开始向上运动,必须加大两板间的电压  $V$  至一个阈值电压  $V_{th}$ ,导出  $V_{th}$  与  $m, g, d, \chi$  的关系.

(d) 如果  $V$  大于  $V_{th}$ ,小导体圆片将在电容器两板间上下运动(假设小导体圆片只做垂直运动,没有摇摆). 小导体圆片与导体平板间的碰撞是非弹性的,恢复系数  $\eta = \frac{v_{after}}{v_{before}}$ ,这里  $v_{before}$  为碰撞前瞬间的速度, $v_{after}$  为碰撞后瞬间的速度,导体平板在碰撞中保持不动. 小导体圆片碰撞后瞬间的速度接近一个“稳态速度” $v_s$ , $v_s$  依赖于平板电容器两板间电压  $V$ , $v_s$  与  $V$  有如下关系

$$v_s = \sqrt{\alpha V^2 + \beta}. \quad (I.1)$$

导出系数  $\alpha$  和  $\beta$  与  $m, g, \chi, d, \eta$  的关系. 假设小导体圆片表面与平板间碰撞中的接触是均匀和瞬时的,因此,每一次碰撞小导体圆片和平板间的电荷交换在瞬时完成.

(e) 当达到一个稳态后,如果  $qV \gg mgd$ ,通过电容器两板间电流的时间平均值  $I$  可近似表示为  $I = \gamma V^2$ . 求系数  $\gamma$  与  $m, \chi, d, \eta$  的关系.



(f) 当电容器两板间电压  $V$  非常缓慢地下降时, 存在一个临界电压  $V_c$ . 如果  $V$  小于  $V_c$ , 电荷将在两板间停止流动. 求出  $V_c$  以及相应的临界电流  $I_c$  与  $m, g, \chi, d, \eta$  的关系. 比较  $V_c$  与问题(c)中的阈值电压  $V_{th}$ , 假设电压  $V$  在  $V=0 \sim 3V_{th}$  间循环上升和下降, 简略作出电容器的  $I-V$  特性曲线.

**【分析】** 本题所描述物理现象虽然只是发生在平板电容器中, 但需要综合运用静电学和力学方面的一系列规律, 且应从能量角度考虑问题, 例如对(a)问来说, 可先求电容器的能量, 然后利用静电能与静电力(保守力)的关系求  $F_p$ . 至于(a)(b)两问中涉及的电荷量则可利用高斯定理求解. 对(e)~(f)问来说首先应认识其物理图象, 即小圆片是在两板之间上下运动, 每一次与极板碰撞, 损失一部分机械能, 同时又补充了一部分静电能. 通过小圆片与极板间电荷交换, 电荷在两极板间“流动”, 理解这些后才可能进行正确的求解.

**【解】** (a) 利用高斯定理, 极板之间加电压  $V$  时所带的电荷量  $Q$  为

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q. \quad (\text{a1})$$

$$Q = \epsilon_0 E \pi R^2 = \epsilon_0 \frac{V}{d} \pi R^2. \quad (\text{a2})$$

电容器储存的能量为

$$U = \int_0^V V' dQ' = \int_0^V \epsilon_0 \pi R^2 \frac{V'}{d} dV' = \frac{1}{2} \epsilon_0 \pi R^2 \frac{V^2}{d}. \quad (\text{a3})$$

极板受到的作用力为

$$F_p = \frac{\partial U}{\partial d} = -\frac{1}{2} \epsilon_0 \pi R^2 \frac{V^2}{d^2}. \quad (\text{a4})$$

(b) 小圆片上的电荷量  $q$  也可以用高斯定理计算

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q. \quad (\text{b1})$$

由于导体圆片的一面与极板接触, 故

$$q = -\epsilon_0 E \pi r^2 = -\epsilon_0 \frac{\pi r^2 V}{d} = \chi V. \quad (\text{b2})$$

所以

$$\chi = -\epsilon_0 \frac{\pi r^2}{d}. \quad (\text{b3})$$

(c) 作用在小圆片上的净力为重力与静电力的合力, 即

$$F_{\text{net}} = F_g + F_e. \quad (\text{c1})$$

其中重力  $F_g = -mg$ . 忽略边缘效应, 静电力为

$$F_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \pi r^2 \frac{V^2}{d^2} = \frac{\chi}{2d} V^2. \quad (\text{c2})$$

为使小圆片提升起来, 须满足  $F_{\text{net}} > 0$ , 即

$$\frac{\chi}{2d} V^2 - mg > 0$$

所以

$$V_{th} = \sqrt{\frac{2mgd}{\chi}}. \quad (\text{c3})$$

(d)小导体圆片与下板碰撞后的“稳态速度”是  $v_s$ , 碰撞后的动能为

$$K_s = \frac{1}{2} m v_s^2. \quad (d1)$$

每一个来回小圆片获得的静电能为

$$\Delta U = 2qV. \quad (q2)$$

而每一次非弹性碰撞的动能损失为

$$\Delta K_{\text{loss}} = K_{\text{before}} - K_{\text{after}} = (1 - \eta^2) K_b = \left( \frac{1}{\eta^2} - 1 \right) K_s. \quad (d3)$$

$K_s$  是在和下板碰撞后的动能, 因而到达上板碰撞前的动能为

$$K_s + qV - mgd.$$

这样一个来回总的能量损失为

$$\Delta K_{\text{tot}} = \left( \frac{1}{\eta^2} - 1 \right) K_s + (1 - \eta^2) (K_s + qV - mgd). \quad (d4)$$

达到稳态的条件是小圆片获得的静电能  $\Delta U$  刚好补偿其他能量损失  $\Delta K_{\text{tot}}$ , 即

$$2qV = \left( \frac{1}{\eta^2} - 1 \right) K_s + (1 - \eta^2) (K_s + qV - mgd). \quad (d5)$$

由此式解出

$$K_s = \frac{1}{2} m v_s^2 = \frac{\eta^2}{1 - \eta^2} qV + \frac{\eta^2}{1 + \eta^2} mgd. \quad (d6)$$

因此

$$v_s = \sqrt{\frac{\eta^2}{1 - \eta^2} \left[ \frac{2qV}{m} + \frac{\eta^2}{1 + \eta^2} (2gd) \right]}. \quad (d7)$$

与  $v_s = \sqrt{\alpha V^2 + \beta}$  比较得

$$\alpha = \frac{\eta^2}{1 - \eta^2} \left( \frac{2q}{m} \right), \beta = \frac{\eta^2}{1 + \eta^2} (2gd). \quad (d8)$$

(e) 每个来回小圆片携带的电荷量为  $\Delta Q = 2q$ , 时间间隔为  $\Delta t = t_+ + t_-$ , 这里的  $t_+$ 、 $t_-$  分别为上升和下落过程所用的时间, 它们满足方程

$$\begin{aligned} v_0 + t_+ + \frac{1}{2} a_+ t_+^2 &= d, \\ v_0 - t_- + \frac{1}{2} a_- t_-^2 &= d. \end{aligned} \quad (e1)$$

这里的  $v_0+$ 、 $v_0-$  分别是向上和向下运动的初速度,  $a_+$ 、 $a_-$  分别为上升和下落过程的加速度. 圆片受到的作用力为

$$F = ma_{\pm} = qE \mp mg = \frac{qV}{d} \mp mg. \quad (e2)$$

在  $qV \gg mgd$  的极限下, 近似有

$$a_0 = a_+ = a_- \approx \frac{qV}{md}. \quad (e3)$$

可见向上和向下的运动是对称的. 方程(e1)可以简化为一个式子, 其中  $t_0 = t_+ = t_-$ ,  $v_0 = v_0+ = v_0-$ ,  $a_0 = a_+ = a_-$ . 因为在上下两个极板刚刚碰撞之后的速度需相



等,因而有

$$v_s = \eta(v_s + a_0 t_0), \quad (\text{e4})$$

由此可以解出时间间隔

$$\Delta t = 2t_0 = 2 \left( \frac{1-\eta}{\eta} \right) \frac{v_s}{a_0}. \quad (\text{e5})$$

由(d6)式,考虑到  $qV \gg mgd$  的条件,得到

$$K_s = \frac{1}{2} m v_s^2 \approx \frac{\eta^2}{1-\eta^2} qV. \quad (\text{e6})$$

把(e3)(e6)式的结果代入(e5)式,得到

$$\Delta t = 2 \left( \frac{1-\eta}{\eta} \right) \sqrt{\frac{2\eta^2}{1-\eta^2}} \sqrt{\frac{md^2}{qV}} = 2 \sqrt{\frac{1-\eta}{1+\eta}} \sqrt{\frac{2md^2}{\chi V^2}}. \quad (\text{e7})$$

因此

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{2q}{\Delta t} = \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} \sqrt{\frac{\chi^3}{2md^2}} V^2. \quad (\text{e8})$$

所以

$$\gamma = \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} \sqrt{\frac{\chi^3}{2md^2}}. \quad (\text{e9})$$

(f) 电流停止的条件是小圆片不能到达上板,则临界电压  $V_c$ . 由到达上板时动能  $\bar{K}_s$  为零给出,故有

$$\bar{K}_s = K_s + qV_c - mgd = 0, \quad (\text{f1})$$

其中  $K_s$  是稳态的动能

$$\frac{\eta^2}{1-\eta^2} qV + \frac{\eta^2}{1+\eta^2} mgd + qV_c - mgd = 0, \quad (\text{f2})$$

解得

$$qV_c = \frac{1-\eta^2}{1+\eta^2} mgd. \quad (\text{f3})$$

因为  $q = \chi V$ , 故有

$$V_c = \sqrt{\frac{1-\eta^2}{1+\eta^2}} \sqrt{\frac{mgd}{\chi}}. \quad (\text{f4})$$

为了与(c3)式的阈值电压比较,上式改写为

$$V_c = z_c V_{th}.$$

$$z_c = \sqrt{\frac{1-\eta^2}{2(1+\eta^2)}}. \quad (\text{f5})$$

[也可以由(d5)或(d6)式导出(f1)式]

以下计算时间间隔为

$$\Delta t = t_+ + t_-.$$

$$v_0 + t_+ + \frac{1}{2} a_+ t_+^2 = d. \quad (\text{f6})$$

$$v_0 - t_- + \frac{1}{2} a_- t_-^2 = d. \quad (\text{f7})$$

其中加速度分别为

$$a_- = \frac{qV_c}{md} + g = \left( \frac{2}{1+\eta^2} \right) g. \quad (f8)$$

$$a_+ = \frac{qV_c}{md} - g = \left( \frac{-2\eta^2}{1+\eta^2} \right) g. \quad (f9)$$

所以 
$$\frac{a_+}{a_-} = -\eta^2. \quad (f10)$$

因为  $v_{0-} = 0$ , 所以  $v_{0+} = \eta(a_- t_-)$ ,  $t_-^2 = \frac{2d}{a_-}$ .

$$t_- = \sqrt{\frac{2d}{a_-}} = \sqrt{(1+\eta^2) \frac{d}{g}}. \quad (f11)$$

利用  $v_{0-}^2 = -2da_+$ , 得

$$t_+ = -\frac{v_{0+}}{a_+} = \sqrt{-\frac{2d}{a_+}} = \sqrt{\frac{1+\eta^2}{\eta^2} \frac{d}{g}} = \frac{t_-}{\eta}. \quad (f12)$$

所以 
$$\Delta t = t_+ + t_- = \left[ 1 + \frac{1}{\eta} \sqrt{(1+\eta^2)} \right] \frac{d}{g}. \quad (f13)$$

$$I_c = \frac{2q}{\Delta t} = \frac{2\gamma u_c}{\Delta t} = \frac{2\eta \sqrt{1-\eta^2}}{(1+\eta)(1+\eta^2)} g \sqrt{m\chi}. \quad (f14)$$

$I$ - $V$  特性曲线如图 3-7-52 所示.

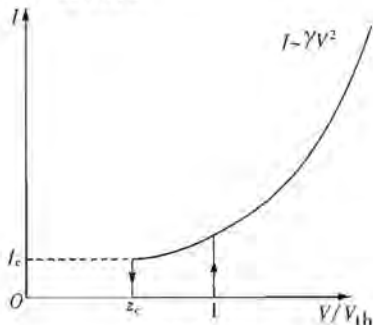


图 3-7-52

**题 23** (2000·国际物理奥赛题) (1) 一阴极射线管由一个电子枪和一个荧光屏组成, 放在磁感应强度为  $B$  的均匀恒定磁场中, 如图 3-7-53 所示, 磁场方向平行于电子枪的电子束的轴, 电子束从电子枪的阳极沿轴射出, 但有与轴至多成  $5^\circ$  的发散角, 如图 3-7-54 所示. 通常电子束将在荧光屏上呈现 1 个弥散的斑点, 但对一定大小的磁场则可得聚焦得很好的光点. 考虑某个电子离开电子枪时以角度  $\beta$  ( $0 < \beta < 5^\circ$ ) 偏离轴运动, 并考虑其垂直于轴和平行于轴的 2 个分量, 用下列参量导出电子的荷质比  $\frac{e}{m}$  的表达式:

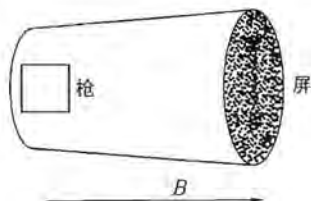


图 3-7-53

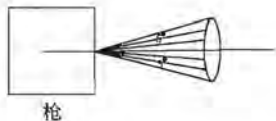


图 3-7-54

使电子束聚焦成一点的最小磁感应强度;电子枪加速电势差  $U$  (注意  $U < 2\text{kV}$ ), 从阳极到荧屏的距离  $D$ .

(2) 考虑另一种测量电子荷质比的方法. 图 3-7-55 为其实验装置的侧视图和俯视图, 图中还画出磁场  $B$  的方向. 在这一均匀磁场中放入二块相隔很小距离  $l$  的铜圆盘, 圆盘的半径为  $\rho$ . 两圆盘间保持电势差  $U$ , 两圆盘平行、同轴, 而且它们的轴垂直于磁场. 一照相底片同轴覆盖在半径为  $\rho + s$  的圆柱体的内侧面, 换句话说, 底片离圆盘边缘的径向距离为  $s$ , 整个装置放在真空中, 注意  $l$  远小于  $s$  和  $\rho$ .

一点状  $\beta$  粒子源放置于两圆盘的圆心之间, 沿各个方向均匀发射  $\beta$  粒子, 粒子的速率分布在一定的范围内, 同一底片在下列不同的实验条件下曝光:

情况 1  $B=0, U=0$ ;

情况 2  $B=B_0, U=U_0$ ;

情况 3  $B=-B_0, U=-U_0$ .

这里  $U_0$  和  $B_0$  为正的常数. 注意当  $U > 0$  时, 上面一块圆盘带正电 (当  $U < 0$  时上盘带负电). 当  $B > 0$ , 磁场方向规定为如图 3-7-55 所示的方向 (当  $B < 0$  时磁场沿相反的方向). 解这个小题时, 两圆盘的间隔可以忽略不计.

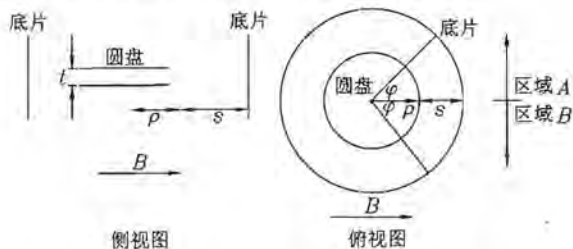


图 3-7-55

(a) 在图 3-7-55 的右图中, 底片的两个区域分别用 A 和 B 标出. 底片曝光并冲洗后, 两个区域中的某个区域的底片展开后显示的  $\beta$  粒子曝光线条如图 3-7-56 所示. 这部分底片是取自于什么区域 (A 还是 B)? 通过指出作用在电子上的力的方向论证你的答案.

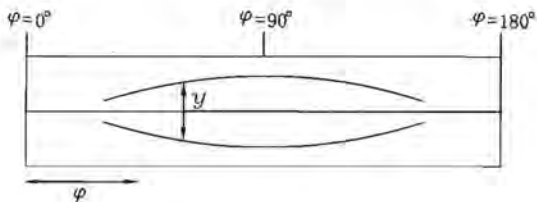


图 3-7-56

(b)曝光并冲洗后,底片的展开图如图 3-7-56 所示.利用显微镜测量两条最外面的轨迹的间距.[在某一特定角度下的间距( $y$ )已在图中标出].此测量结果由下表给出,角度  $\varphi$  定义为磁场方向与底片上某点和圆盘中心连线间的夹角,如图 3-7-56 所示.

与磁场夹角(度)	$\varphi$	90	60	50	40	30	23
间隔(mm)	$y$	17.4	12.7	9.7	6.4	3.3	轨迹终端

测量系统参数的数值如下:

$$B_0 = 6.91 \text{ mT}, U_0 = 580 \text{ V}, t = 0.80 \text{ mm}, s = 41.0 \text{ mm}.$$

另外,真空中光速可取为  $3.00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,电子的静止质量为  $9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ .计算出观测到的  $\beta$  粒子的最大动能(以 eV 为单位).

(c)利用上面部分给出的信息,求出电子的电荷与静质量的比值.这应通过在所给的坐标纸上画一合适的图求出.

写出所画图的横轴和纵轴所代表的量的代数表达式,并写出电子荷质比的量值.

请注意,由于观察的系统误差,你所得到的答案可能与公认的标准值不同.

**【分析】** (1)从电子枪射出的电子,沿着磁场  $B$  的方向做匀速直线运动,同时在垂直  $B$  的平面内做匀速圆周运动,它们的周期都相同.如要求所有电子在磁感应强度最小的情况下聚焦成一个亮点,就必须使它们在一个周期内到达荧光屏.

(2)由圆盘中心沿着各个方向射出的  $\beta$  粒子,在两盘面间受到电场力和洛伦兹力.如两力平衡, $\beta$  粒子就能射出两盘间,到达底片.由于方向不同,即角  $\varphi$  不同,从两盘间射出的  $\beta$  粒子的速度不同,因而受到的洛伦兹力(沿竖直方向)不同. $y$  的值也不同.只要写出包含  $y$  与  $\varphi$  的函数式,并适当选取纵轴和横轴所代表的量的表达式,作出其函数图象,就能求出荷质比  $\frac{e}{m}$ .

**【解】** (1)由题意,当电子回旋一周恰好到达光屏时,将在屏上清晰聚焦.

回旋角速度  $\omega = \frac{eB}{m}$ , 回旋一周时间

$$T = \frac{2\pi m}{eB}.$$

电子速率  $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$  (由  $U < 2\text{ kV}$ , 不难算得  $v < 2.65 \times 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , 所以不必



考虑相对论效应).

电子行进距离

$$D = Tv \cos \beta \approx Tv = \left( \frac{2\pi m}{eB} \right) \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

$$\text{故电子荷质比 } \frac{e}{m} = \frac{8\pi^2 U}{B^2 D^2}.$$

2. (a) 考虑情况 2: 电子受电场力方向向上.

在区域 A, 电子受磁场力方向也向上, 故电子打在盘上, 不能到达底片.

在区域 B, 电子受磁场力方向向下, 若磁场力与电场力相等, 电子将不受净力, 而从盘间射出, 使底片曝光.

情况 3 相仿, 故底片取自区域 B.

(b) 由盘间射出的电子受力平衡, 电子受电场力  $\frac{eU}{t}$ , 受磁力  $eUB \sin \varphi$ ,

$$\frac{eU}{t} = evB \sin \varphi,$$

$$\text{得电子速率 } v = \frac{U}{(Bt \sin \varphi)},$$

最大速率  $v_m$  对应于最小  $\varphi$  角:  $23^\circ$ , 由此得

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{U_0}{B_0 t \sin 23^\circ} \\ &= \frac{580}{6.91 \times 10^{-3} \times 0.80 \times 10^{-3} \times \sin 23^\circ} \\ &= 2.685 \times 10^8 \text{ m/s} = 0.895c. \end{aligned}$$

为相对论性的, 故电子最大动能

$$E_m = (\gamma - 1)mc^2 = \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right] mc^2 = 1.02 \times 10^{-13} \text{ J} = 637 \text{ keV}.$$

(c) 从盘间射出的电子仅受磁场力作用, 此力近似在竖直方向, 因为电子运动速度与水平方向夹角始终很小.

由磁场力引起的加速度  $a = \frac{Bev \sin \varphi}{\gamma m}$ , 电子水平初速为  $v$ , 电子从盘间射出到达底片需时  $t = s/v$ , 在此时间内竖直方向的位移为  $\frac{y}{2} = \frac{1}{2} a \left( \frac{s}{v} \right)^2$ , 即

$$y = \frac{Bes^2 \sin \varphi}{\gamma m v}.$$

由(b), 对从盘间射出的电子应有  $v = \frac{U}{(Bt \sin \varphi)}$ , 代入上式消去  $v$  (注意  $\gamma =$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \text{得}$$

$$y^2 = \left( \frac{eBs \sin \varphi}{m} \right)^2 \left[ \left( \frac{Bt \sin \varphi}{U} \right)^2 - \left( \frac{s}{c} \right)^2 \right].$$





以  $(\frac{v}{Bs \sin \varphi})^2$  为纵轴,  $(\frac{Bs \sin \varphi}{U})^2$  为横轴作图如图 3-7-57 所示, 所得直线的斜率为  $(\frac{e}{m})^2$ , 在纵轴上截距为  $-(\frac{eS}{mc})^2$ .

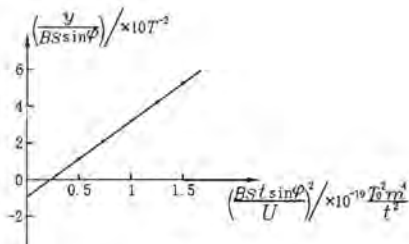


图 3-7-57

从所作图上读得截距为  $-537.7(\text{C} \cdot \text{kg}^{-1})^2$ , 得

$$\frac{e}{m} = 1.70 \times 10^{11} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1},$$

读得斜率为  $2.826 \times 10^{22} (\text{C} \cdot \text{kg}^{-1})^2$ , 得

$$\frac{e}{m} = 1.68 \times 10^{11} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

**题 24** (2000 · 国际物理奥赛题) 用细铜线构成的圆环在地磁场中绕其竖直直径转动, 铜环处的地磁场的磁感应强度为  $44.5 \mu\text{T}$ , 其方向与水平方向向下成  $60^\circ$  角. 已知铜的密度为  $8.90 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , 电阻率为  $1.70 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ , 计算其角速度从初始值降到其一半所需的时间(此时间比转动一次的时间长得多). 写出演算步骤, 设空气和轴承处的摩擦忽略不计, 并忽略自感效应(尽管这些效应本不应忽略).

**【分析】** 铜环切割磁感线产生感应电流, 使机械能逐渐减少. 因不考虑摩擦阻力, 减少的机械能全部转化为电能. 铜环所在区域的地磁场可看做匀强磁场, 且每转一周角速度的变化很小, 可近似看做匀速转动, 所以铜环中产生的电流是正弦式电流, 由此很易求得它消耗的电功率. 根据能量守恒, 每秒内铜环转动动能的减少量等于电功率, 由此可求出铜环的角速度  $\omega$  跟时间  $t$  的函数关系式, 从而求得角速度减小一半所需的时间.

**【解】** 环的转动动能因感应电流的热损耗而逐渐减少. 在环中产生感应电流的地磁场的水平分量

$$B = 44.5 \times 10^{-6} \cos 60^\circ \text{ T},$$

当环面与地磁场水平分量成  $\theta = \omega t$  角时, 通过环的磁通量

$$\Phi = B\pi a^2 \sin \omega t,$$

其中  $a$  为环半径.

瞬间感应电动势  $\frac{d\Phi}{dt} = B\pi a^2 \omega \cos \omega t.$

旋转一周在环的电阻  $R$  上消耗的平均热功率



$$P = \frac{B^2 \pi^2 a^4 \omega^2}{2R}.$$

环的转动惯量  $I = \frac{1}{2} ma^2$ , 其中  $m$  为环的质量, 转动动能则为

$$W = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{4} ma^2 \omega^2.$$

故有能量方程

$$\frac{dW}{dt} = -P.$$

即

$$\frac{1}{2} ma^2 \omega \frac{d\omega}{dt} = -\frac{B^2 \pi^2 a^4 \omega^2}{2R}.$$

或

$$\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{B^2 \pi^2 a^2}{mR} dt.$$

若  $T$  为角速度降到一半所需时间, 则有

$$\int_{\omega}^{\frac{1}{2}\omega} \frac{d\omega}{\omega} = -\int_0^T \frac{B^2 \pi^2 a^2}{mR} dt,$$

即

$$\ln 2 = \frac{B^2 \pi^2 a^2}{mR} T.$$

但  $R = \frac{2\pi a \rho}{A}$ ,  $m = 2\pi a A d$ , 其中  $A$  为铜丝横截面积,  $d$  为铜的密度,  $\rho$  为铜的电阻率, 代入上式得

$$T = \frac{4\rho d \ln 2}{B^2}.$$

代入数据得

$$T = 8.47 \times 10^3 \text{ s} = 235 \text{ h } 17 \text{ min}.$$



# 第四章

## 光 学

### 第一节 几何光学

**题 1** (2007·全国物理预赛题) 如图 4-1-1 所示,  $L$  是一焦距为  $f$  的薄凸透镜 ( $F$  与  $F'$  为其焦点), 在透镜右侧焦点  $F'$  处放置一曲率半径大小为  $R$  的球面反射镜 (其顶点位于  $F'$  处), 透镜和球面镜组成一轴对称的光学系统. 在透镜  $L$  左侧光轴上有限远处有一发光点  $P$ , 它发出的傍轴光线经此光学系统后, 恰好成像在  $P$  点. 试在下面第 (1)、(2) 小题中填空, 在第 (3) 小题中作图.

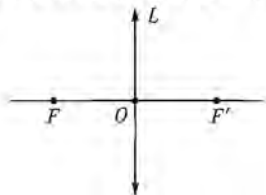


图 4-1-1

(1) 若球面镜为凹面镜, 则  $P$  点到透镜的距离等于 \_\_\_\_\_; 若球面镜为凸面镜, 则  $P$  点到透镜的距离等于 \_\_\_\_\_;

(2) 若将一短细杆垂直于光轴放置, 杆的下端位于  $P$  点, 则此细杆经上述光学系统所成的最后的像的大小与物的大小之比对凹面镜等于 \_\_\_\_\_; 对凸面镜等于 \_\_\_\_\_;

(3) 若球面镜的半径大小  $R=2f$ , 试按作图法的规范要求, 画出第 (2) 问中短杆对上述光学系统逐次成的像及成像光路图. (要求将凹面镜和凸面镜分别画在两张图上, 评分时只按图评分, 不要求写出作图理由和说明, 但须用已知量标出各个像在光轴上的具体位置)

**【分析】** 本题涉及透镜成像与球面镜成像, 需根据它们的成像规律进行分析.

**【解】** (1)  $\frac{f(R-f)}{R}$ ;  $\frac{f(R+f)}{R}$ ; (2) 1; 1; (3) 对凹面镜的光路图如图 4-1-2 所



示;对凸面镜的光路图如图 4-1-3 所示。

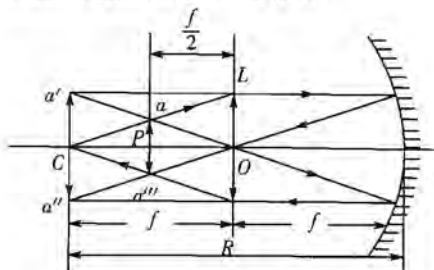


图 4-1-2

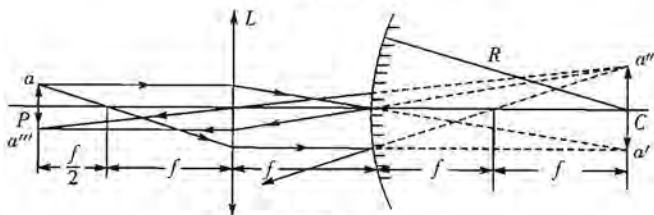


图 4-1-3

**题 2** (2006·全国物理预赛题) (1)老爷爷的眼睛是老花眼。

①一物体  $P$  放在明视距离处,老爷爷看不清楚,试在示意图 4-1-4 中画出此时  $P$  通过眼睛成像的光路示意图。

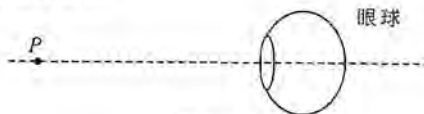


图 4-1-4

②戴了一副 300 度的老花镜后,老爷爷就能看清楚放在明视距离处的物体  $P$ ,试在示意图 4-1-5 中画出  $P$  通过老花镜和眼睛成像的光路示意图。

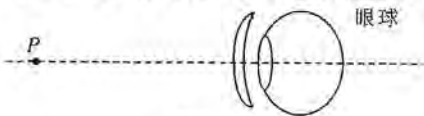


图 4-1-5

③300 度的老花镜的焦距  $f =$  \_\_\_\_\_ m。

(2)有两个凸透镜,它们的焦距分别为  $f_1$  和  $f_2$ ,还有两个凹透镜,它们的焦距分别为  $f_3$  和  $f_4$ ,已知,  $f_1 > f_2 > |f_3| > |f_4|$ 。如果要从这四个透镜中选取两个透镜,组成一架最简单的单筒望远镜,要求能看到放大倍数尽可能大的正立的像,则应选焦距为 \_\_\_\_\_ 的透镜作为物镜,应选焦距为 \_\_\_\_\_ 的透镜作为目镜。

**【分析】** (1)老爷爷是老花眼,晶状体的屈光能力减退了,因而成像在视网膜的后面。戴上一副老花镜(凸透镜)后屈光能力加强,可使物体的像成在视网膜上。

(2)要能看到放大的正立的像,就要组装成伽利略望远镜,即物镜用凸透镜,目镜用凹透镜,再根据望远镜视角放大率的表达式,就可正确地选取物镜与目镜.

【解】(1)①

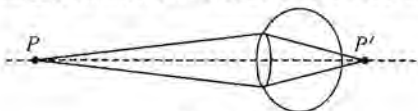


图 4-1-6

②

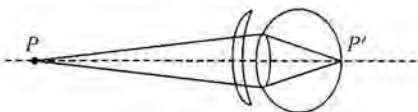


图 4-1-7

③300度的老花镜的焦距  $D = \frac{300}{100}$  屈光度 = 3 屈光度,

$$f = \frac{1}{D} = \frac{1}{3} \text{ m.}$$

(2)伽利略望远镜的视角放大率  $M = \frac{f}{|f'|}$ , 其中  $f$  为物镜凸透镜的焦距,  $f'$  为目镜凹透镜的焦距. 按题意要使  $M$  尽可能大, 则应选取  $f = f_1, f' = f_2$ .

**题 3** (2003·全国物理预赛题) 两个薄透镜  $L_1$  和  $L_2$  共轴放置, 如图 4-1-8 所示. 已知  $L_1$  的焦距  $f_1 = f, L_2$  的焦距  $f_2 = -f$ , 两透镜间距离也是  $f$ . 小物体位于物面  $P$  上, 物距  $u_1 = 3f$ .

(1)小物体经这两个透镜所成的像在  $L_2$  的 \_\_\_\_\_ 边, 到  $L_2$  的距离为 \_\_\_\_\_, 是 \_\_\_\_\_ 像 (填“虚”或“实”)、\_\_\_\_\_ 像 (填“正立”或“倒立”), 放大率为 \_\_\_\_\_.

(2)现在把两透镜位置调换, 若还要给定的原物体在原像处成像, 两透镜作为整体应沿光轴向 \_\_\_\_\_ 边移动距离 \_\_\_\_\_, 这个新的像是 \_\_\_\_\_ 像 (填“虚”或“实”)、\_\_\_\_\_ 像 (填“正立”或“倒立”), 放大率为 \_\_\_\_\_.

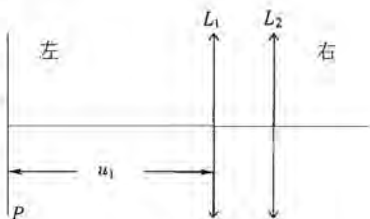


图 4-1-8

【分析】对于薄透镜组合的成像, 我们可运用透镜成像公式对透镜逐个进行计算, 前一个透镜成的像, 就是后一个透镜的物, 在运算过程中, 要注意正确选取焦距( $f$ )、物距( $u$ )、像距( $v$ )的正负号.

【解】(1)右;  $f$ ; 实; 倒立; 1; (2)左;  $2f$ ; 实; 倒立; 1;

(1)对于透镜  $L_1$  有  $u_1 = 3f, f_1 = f$ .

代入公式 
$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{v_1} = \frac{1}{f_1}$$



得 
$$v_1 = \frac{3}{2}f.$$

对于透镜  $L_2$  有:由  $v_1 = \frac{3}{2}f$  可知,  $L_1$  成的像应在  $L_2$  的右侧,故对  $L_2$  而言,这是它的虚物,

所以 
$$u_2 = \frac{3}{2}f - f = \frac{1}{2}f.$$

$$f_2 = -f.$$

代入公式 
$$\frac{1}{u_2} + \frac{1}{v_2} = \frac{1}{f_2}.$$

得 
$$v_2 = f.$$

可见为实像、倒立.

成像的放大率为 
$$m = m_1 \cdot m_2 = \frac{v_1}{u_1} \cdot \left| \frac{v_2}{u_2} \right| = 1.$$

(2) 设把两透镜位置调换后,再将两透镜整体沿光轴向左移动距离  $x$  后,新的像成在原像处.

对于透镜  $L_2$  有 
$$u_2 = 3f - x, f_2 = -f.$$

代入成像公式得 
$$\frac{1}{v_2} = \frac{1}{-f} - \frac{1}{3f - x}, \quad (1)$$

对于透镜  $L_1$  有 
$$u_1 = v_1 + f, f_1 = f.$$

代入成像公式得 
$$\frac{1}{f+x} = \frac{1}{f} - \frac{1}{v_1+f}, \quad (2)$$

由①、②式可求得 
$$x = 2f.$$

可见,应将两透镜整体沿光轴向左边移动  $2f$  距离.

**例 4** (2008·全国物理预赛题) 如图 4-1-9 所示,一细长的圆柱形均匀玻璃棒,其一个端面是平面(垂直于轴线),另一个端面是球面,球心位于轴线上.现有一很细的光束沿平行于轴线方向且很靠近轴线入射.当光从平端面射入棒内时,光线从另一端面射出后与轴线的交点到球面的距离为  $a$ ;当光线从球形端面射入棒内时,光线在棒内与轴线的交点到球面的距离为  $b$ .试近似地求出玻璃的折射率  $n$ .

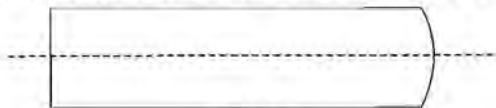


图 4-1-9

**【分析】** 这是一道几何光学有关光的折射问题,由于是小角度,因此在进行三角函数运算时可作相关的近似.

**【解】** 入射的两条线如图 4-1-10 所示,图中  $\alpha_1, \beta_1$  分别是从小端面入射的光线通过球形端面时的入射角和折射角,  $\alpha_2, \beta_2$  分别是从小球形端面入射的光线通过球面时的入射角和折射角.根据折射定律有

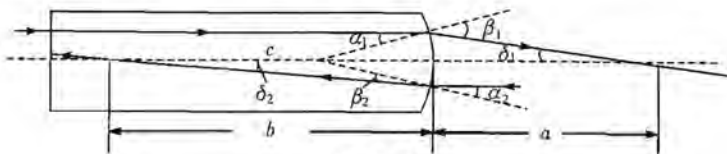


图 4-1-10

$$n \sin \alpha_1 = \sin \beta_1, \quad n \sin \alpha_2 = \sin \beta_2. \quad (1)$$

由几何关系有

$$\beta_1 = \alpha_1 + \delta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2 + \delta_2. \quad (2)$$

设球面的半径为  $R$ , 并注意到  $\alpha_1, \alpha_2, \delta_1, \delta_2$  都是小角度, 有

$$R \alpha_1 = a \delta_1, \quad R \alpha_2 = b \delta_2. \quad (3)$$

根据已知条件, 式①可近似表示成

$$n \alpha_1 \approx \beta_1, \quad \alpha_2 \approx n \beta_2. \quad (4)$$

由式②~④得

$$n \approx \frac{b}{a}.$$

**题 5** (2005·全国物理预赛题) 内表面只反射而不吸收光的圆筒内有一半径为  $R$  的黑球, 距球心为  $2R$  处有一点光源  $S$ , 球心  $O$  和光源  $S$  皆在圆筒轴线上, 如图 4-1-11 所示. 若使点光源向右半边发出的光最后全被黑球吸收, 则筒的内半径  $r$  最大为多少?

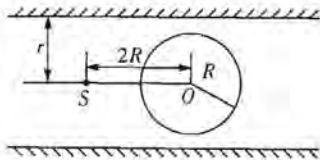


图 4-1-11

**【分析】** 此题是一道几何光学问题, 主要运用平面镜成像规律及光路的有关几何关系, 即可求出结果.

**【解】** 自  $S$  作球的切线  $SM$ , 并画出  $S$  经管壁反射形成的虚像点  $S'$ , 及由  $S'$  画出球面的切线  $S'N$ , 如图 4-1-12 所示. 由图可看出, 只要  $S'M$  和  $S'N$  之间有一夹角, 则筒壁对从  $S$  向右的光线的反射光线就有一部分进入球的右方, 不会完全落在球上被吸收.

由图 4-1-13 可看出, 如果  $r$  的大小恰能使  $S'N$  与  $S'M$  重合, 则  $r$  就是题所要求的筒的内半径的最大值. 这时  $SM$  与  $MN$  的交点到球心的距离  $MO$  就是所要求的筒的半径  $r$ . 由图 4-1-13 可得

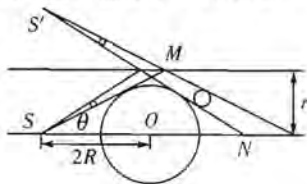


图 4-1-12

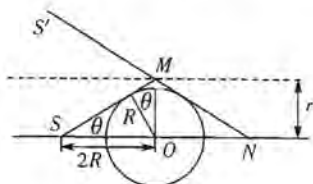


图 4-1-13

$$r = \frac{R}{\cos \theta} = \frac{R}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}. \quad (1)$$



由几何关系可知

$$\sin\theta = \frac{R}{2R}. \quad (2)$$

由①②式得

$$r = \frac{2\sqrt{3}}{3}R.$$

**题 6** (2004·全国物理预赛题) 有一种高脚酒杯,如图 4-1-14 所示. 杯内底面为一凸起的球面,球心在顶点  $O$  下方玻璃中的  $C$  点,球面的半径  $R=1.50\text{ cm}$ ,  $O$  到杯口平面的距离为  $8.0\text{ cm}$ . 在杯脚底中心处  $P$  点紧贴一张画片,  $P$  点距  $O$  点为  $6.3\text{ cm}$ . 这种酒杯未斟酒时,若在杯口处向杯底方向观看,看不出画片上的景物,但如果斟了酒,再在杯口处向杯底方向观看,将看到画片上的景物. 已知玻璃的折射率  $n_1=1.56$ , 酒的折射率  $n_2=1.34$ . 试通过分析计算与论证解释这一现象.



图 4-1-14

**【分析】** 此题为几何光学问题,我们可运用折射定律,结合成像光路的几何关系,可求出结果.

**【解】** 把酒杯放平,分析成像问题.

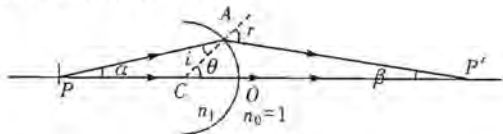


图 4-1-15

1. 未斟酒时,杯底凸球面的两侧介质的折射率分别为  $n_1$  和  $n_0=1$ . 在图 4-1-15 中,  $P$  为画片中心,由  $P$  发出经过球心  $C$  的光线  $PO$  经过顶点不变方向进入空气中;由  $P$  发出的与  $PO$  成  $\alpha$  角的另一光线  $PA$  在  $A$  处折射. 设  $A$  处入射角为  $i$ , 折射角为  $r$ ,半径  $CA$  与  $PO$  的夹角为  $\theta$ ,由折射定律和几何关系可得

$$n_1 \sin i = n_0 \sin r. \quad (1)$$

$$\theta = i + \alpha. \quad (2)$$

在  $\triangle PAC$  中,由正弦定理,有

$$\frac{R}{\sin \alpha} = \frac{PC}{\sin i}. \quad (3)$$

考虑近轴光线成像,  $\alpha, i, r$  都是小角度,则有

$$r = \frac{n_1}{n_0} i. \quad (4)$$

$$\alpha = \frac{R}{PC} i. \quad (5)$$

由②④⑤式,  $n_0, n_1, R$  的数值及  $\overline{PC} = \overline{PO} - \overline{CO} = 4.8\text{ cm}$ , 可得

$$\theta = 1.31i. \quad (6)$$

$$r = 1.56i. \quad (7)$$

由上式及图 4-1-15 可知,折射线将与  $PO$  延长线相交于  $P'$ ,  $P'$  即为  $P$  点的实像. 画面将成实像于  $P'$  处.



在 $\triangle CAP'$ 中,由正弦定理有

$$\frac{R}{\sin\beta} = \frac{\overline{CP'}}{\sin r} \quad (9)$$

又有

$$r = \theta + \beta \quad (10)$$

考虑到是近轴光线,由⑨⑩式可得

$$\overline{CP'} = \frac{r}{r - \theta} R \quad (11)$$

又有

$$\overline{OP'} = \overline{CP'} - R \quad (12)$$

由以上各式并代入数据,可得

$$\overline{OP'} = 7.9 \text{ cm} \quad (13)$$

由此可见,未斟酒时,画片上景物所成实像在杯口距 $O$ 点 $7.9 \text{ cm}$ 处.已知 $O$ 到杯口平面的距离为 $8.0 \text{ cm}$ ,当人眼在杯口处向杯底方向观看时,该实像离人眼太近,所以看不出画片上的景物.

2. 斟酒后,杯底凸球面两侧介质分别为玻璃和酒,折射率分别为 $n_1$ 和 $n_2$ ,如图4-1-16所示.考虑到近轴光线有

$$r = \frac{n_1}{n_2} i \quad (14)$$

代入 $n_1$ 和 $n_2$ 的值,可得

$$r = 1.16i \quad (15)$$

与⑥式比较,可知

$$r < \theta \quad (16)$$

由上式及图4-1-16可知,折射线将与 $OP$ 延长线相交于 $P'$ , $P'$ 即为 $P$ 点的虚像.画面将成虚像于 $P'$ 处.计算可得

$$\overline{CP'} = \frac{r}{\theta - r} R \quad (17)$$

又有

$$\overline{OP'} = \overline{CP'} + R \quad (18)$$

由以上各式并代入数据得

$$\overline{OP'} = 13 \text{ cm} \quad (19)$$

由此可见,斟酒后画片上景物成虚像于 $P'$ 处,距 $O$ 点 $13 \text{ cm}$ ,即距杯口 $21 \text{ cm}$ .虽然该虚像还要因酒液表面的折射而向杯口处拉近一定距离,但仍然离杯口处足够远,所以人眼在杯口处向杯底方向观看时,可以看到画片上景物的虚像.

**题7** (2002·全国物理预赛题) 图4-1-17中,三棱镜的顶角 $\alpha$ 为 $60^\circ$ ,在三棱镜两侧对称位置上放置焦距为 $f=30.0 \text{ cm}$ 的两个完全相同的凸透镜 $L_1$ 和 $L_2$ .若在 $L_1$ 的前焦面上距主光轴下方 $y=14.3 \text{ cm}$ 处放一单色点光源 $S$ ,已知其像 $S'$

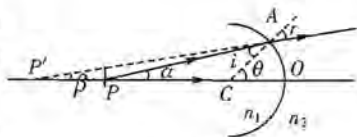


图4-1-16



与  $S$  对该光学系统是左右对称的. 试求该三棱镜的折射率.

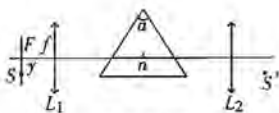


图 4-1-17

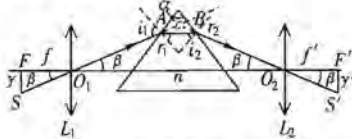


图 4-1-18

**【分析】** 根据光学系统是左右对称的,物、像又是左右对称的,可推知光路一定是左右对称的,再运用光路图中的一些几何关系,即可顺利解出结果.

**【解】** 由于光学系统是左右对称的,物、像又是左右对称的,光路一定是左右对称的,该光线在棱镜中的部分与光轴平行.由  $S$  射向  $L_1$  光心的光线的光路图如图 4-1-18 所示.由对称性可知

$$i_1 = r_2. \quad (1)$$

$$i_2 = r_1. \quad (2)$$

从几何关系得

$$r_1 + i_2 = \alpha = 60^\circ. \quad (3)$$

由图可见

$$i_1 = \beta + r_1. \quad (4)$$

又从  $\triangle FSO_1$  的边角关系得

$$\tan \beta = \frac{y}{f}. \quad (5)$$

代入数值得

$$\beta = \arctan\left(\frac{14.3}{30.0}\right) = 25.49^\circ. \quad (6)$$

由②③④⑥式得

$$r_1 = 30^\circ, i_1 = 55.49^\circ.$$

根据折射定律,求得

$$n = \frac{\sin i_1}{\sin r_1} = 1.65.$$

**题 8** (2001·全国物理预赛题) 一束平行光沿薄平凸透镜的主光轴入射,经透镜折射后,会聚于透镜后  $f=48\text{ cm}$  处,透镜的折射率  $n=1.5$ . 若将此透镜的凸面镀银,物置于平面前  $12\text{ cm}$  处,求最后所成像的位置.

**【分析】** 平凸透镜的凸面镀银后将成凹面镜,我们可根据平凸透镜平行光会聚的几何关系求出凸球面的曲率半径  $R$ ,即求出凹面镜的焦距,根据平面折射成像及凹面镜成像的规律可进一步求出最后所成像的位置.

**【解】** (1) 先求凸球面的曲率半径  $R$ . 平行于主光轴的光线与平面垂直,不发生折射,它在球面上发生折射,交主光轴于  $E$  点,如图 4-1-19 所示,  $C$  点为球面的球心,  $\overline{CO}=R$ ,由正弦定理可得

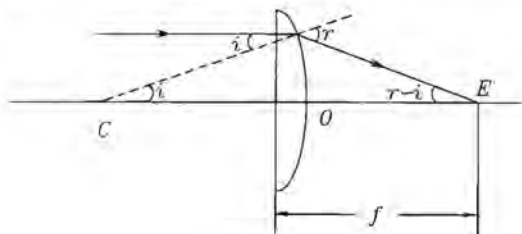


图 4-1-19

$$\frac{R+f}{R} = \frac{\sin r}{\sin(r-i)} \quad (1)$$

由折射定律知

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{1}{n} \quad (2)$$

当  $i, r$  很小时,  $\sin r \approx r, \sin(r-i) \approx r-i, \sin i \approx i$ , 由以上两式得

$$1 + \frac{f}{R} = \frac{r}{r-i} = \frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1} \quad (3)$$

所以

$$R = (n-1)f \quad (4)$$

(2) 凸面镀银后将成为半径为  $R$  的凹面镜, 如图 4-1-20 所示令  $P$  表示物所在位置,  $P$  点经平面折射成像于  $P'$ , 根据折射定律可推出

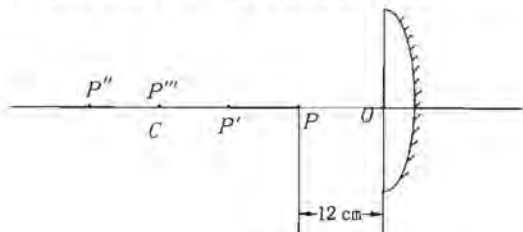


图 4-1-20

$$\overline{P'O} = n \overline{PO} \quad (5)$$

由于这是一个薄透镜,  $P'$  与凹面镜的距离可认为等于  $\overline{P'O}$ , 设反射后成像于  $P''$ , 则由球面镜成像公式可得

$$\frac{1}{\overline{P'O}} + \frac{1}{\overline{P'O}} = \frac{2}{R} \quad (6)$$

因此可解得  $\overline{P'O} = 36$  cm, 可知  $P'$  位于平面的左方. 对平面折射来说,  $P'$  是一个虚物, 经平面折射后, 成实像于  $P''$  点.

$$\frac{\overline{P''O}}{\overline{P'O}} = \frac{1}{n} \quad (7)$$

$$\overline{P''O} = 24 \text{ cm} \quad (8)$$

最后所成实像在透镜左方 24 cm 处.



**题 9** (2000·全国物理预赛题) 有一水平放置的平行平面玻璃板  $H$ , 厚  $3.0\text{ cm}$ , 折射率  $n=1.5$ . 在其下表面下  $2.0\text{ cm}$  处有一小物  $S$ ; 在玻璃板上表面有一薄凸透镜  $L$ , 其焦距  $f=30\text{ cm}$ , 透镜的主轴与玻璃板面垂直;  $S$  位于透镜的主轴上, 如图 4-1-21 所示. 若透镜上方的观察者顺着主轴方向观察到  $S$  的像就在  $S$  处, 问透镜与玻璃板上表面的距离为多少?

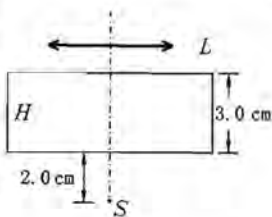


图 4-1-21

**【分析】** 这是一道光具组成像题, 物  $S$  经玻璃板下表面折射成像, 经玻璃板上表面折射成像, 再经凸透镜成像(共成三次像), 最后才被观察到. 因此, 我们要分别研究这三次成像, 才能解出最后结果.

**【解】** 物  $S$  通过平行玻璃板及透镜成三次像才能被观察到. 透镜的主轴与玻璃板下表面和上表面的交点分别为  $A$  和  $B$ ,  $S$  作为物, 通过  $H$  的下表面折射成像  $S_1$ , 由图 4-1-22, 根据折射定律

$$n' \sin i = n \sin r.$$

式中  $n'=1.0$  是空气的折射率, 对傍轴光线,  $i, r$  很小,  $\sin i \approx \tan i$ ,  $\sin r \approx \tan r$ .

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{SA}} = n \frac{\overline{AD}}{\overline{S_1A}},$$

式中  $\overline{SA}$  为物距,  $\overline{S_1A}$  为像距,

$$\overline{S_1A} = n \overline{SA}. \quad (1)$$

将  $S_1$  作为物, 再通过  $H$  的上表面折射成像  $S_2$ , 这时物距为  $\overline{S_1B} = \overline{S_1A} + \overline{AB}$ . 同样根据折射定律可得像距

$$\overline{S_2B} = \frac{\overline{S_1B}}{n}. \quad (2)$$

将  $S_2$  作为物, 通过透镜  $L$  成像. 设透镜与  $H$  上表面的距离为  $x$ , 则物距  $u = x + \overline{S_2B}$ . 根据题意知最后所成像的像距  $v = -(x + \overline{SA} + \overline{AB})$ , 代入透镜成像公式, 有

$$\frac{1}{x + \overline{S_2B}} - \frac{1}{x + \overline{SA} + \overline{AB}} = \frac{1}{f}. \quad (3)$$

由①②③式代入数据可求得

$$x = 1.0\text{ cm}.$$

即  $L$  应置于距  $H$  上表面  $1.0\text{ cm}$  处.

**题 10** (1999·全国物理预赛题) 一平凸透镜焦距为  $f$ , 其平面上镀了银, 现在其凸面一侧距它  $2f$  处, 垂直于主轴放置一高为  $H$  的物, 其下端在透镜的主轴上(图 4-1-23).

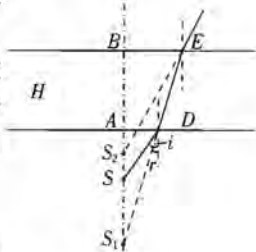


图 4-1-22

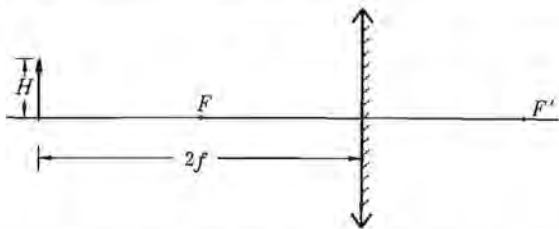


图 4-1-23

- (1) 用作图法画出物经镀膜透镜所成的像, 并标明该像是虚、是实。
- (2) 用计算法求出此像的位置和大小。

**【分析】** 这道题实质是一个凸透镜与一个紧密接合的平面镜的组合成像问题。虽然我们画不出光线经透镜折射后射向平面镜的光路, 但光路仍然遵守凸透镜与平面镜成像规律, 这是我们在具体分析光路时必须牢牢抓住的一点。成像的计算也是遵守凸透镜与平面镜的成像计算方法的。

**【解】** (1) 用作图法求得物  $AP$  的像  $A'P'$  及所用各条光线的光路如图 4-1-24 所示。

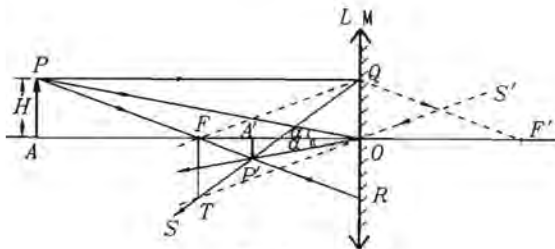


图 4-1-24

说明: 平薄凸透镜平面上镀膜后构成一个由会聚透镜  $L$  和与它密接的平面镜  $M$  组合  $LM$ , 如图 4-1-24 所示。图中  $O$  为  $L$  的光心,  $AOF'$  为主轴,  $F$  和  $F'$  为  $L$  的两个焦点,  $AP$  为物。作图时利用了下列三条特征光线:

① 由  $P$  射向  $O$  的人射光线, 它通过  $O$  后方向不变, 沿原方向射向平面镜  $M$ , 然后被  $M$  反射, 反射光线与主轴的夹角等于入射角, 均为  $\alpha$ 。反射光线射入透镜时通过光心  $O$ , 故由透镜射出时方向与上述反射光线相同, 即图中的  $OP'$ 。

② 由  $P$  发出且通过  $L$  左方焦点  $F$  的人射光线  $PFR$ , 它经过  $L$  折射后的出射光线与主轴平行, 垂直射向平面镜  $M$ , 然后被  $M$  反射, 反射光线平行于  $L$  的主轴, 并向左射入  $L$ , 经  $L$  折射后的出射光线通过焦点  $F$ , 即为图中的  $RFP$ 。

③ 由  $P$  发出的平行于主轴的人射光线  $PQ$ , 它经过  $L$  折射后的出射光线将射向  $L$  的焦点  $F'$ , 即沿图中的  $QF'$  方向射向平面镜, 然后被  $M$  反射, 反射光线指向与  $F'$  对称的  $F$  点, 即沿  $QF$  方向。此反射光线经  $L$  折射后的出射光线可用下法画出: 通过  $O$  作平行于  $QF$  的辅助线  $S'OS$ ,  $S'OS$  通过光心, 其方向保持不变, 与焦面相



交于  $T$  点. 由于入射平行光线经透镜后相交于焦面上的同一点, 故  $QF$  经  $L$  折射后的出射光线也通过  $T$  点, 图中的  $QT$  即为  $QF$  经  $L$  折射后的出射光线.

上列三条出射光线的交点  $P'$  即为  $LM$  组合所成的  $P$  点的像, 对应的  $A'$  即  $A$  的像点. 由图可判明, 像  $A'P'$  是倒立实像, 只要采取此三条光线中任意两条即可得  $A'P'$ , 即为正确的答案.

(2) 按陆续成像计算物  $AP$  经  $LM$  组合所成像的位置、大小.

物  $AP$  经透镜  $L$  成的像为第一像, 取  $u_1 = 2f$ , 由成像公式可得像距  $v_1 = 2f$ , 即在平面镜后距离  $2f$  处, 像的大小  $H'$  与原物相同,  $H' = H$ .

第一像作为物经反射镜  $M$  成的像为第二像. 第一像在反射镜  $M$  后  $2f$  处, 对  $M$  来说是虚物, 成实像于  $M$  前  $2f$  处. 像的大小  $H''$  也与原物相同,  $H'' = H' = H$ .

第二像作为物, 再经透镜  $L$  而成的像为第三像. 这是因为光线由  $L$  右方入射, 且物 (第二像) 位于  $L$  左方, 故为虚物, 取物距  $u_3 = -2f$ , 由透镜公式  $\frac{1}{u_3} + \frac{1}{v_3} = \frac{1}{f}$  可得像距

$$v_3 = \frac{fu_3}{u_3 - f} = \frac{2}{3}f > 0.$$

上述结果表明, 第三像, 即本题所求的像的位置在透镜左方距离  $\frac{2}{3}f$  处, 像的

大小  $H'''$  可由  $\frac{H'''}{H''} = \left| \frac{v_3}{u_3} \right| = \frac{1}{3}$  求得, 即

$$H''' = \frac{1}{3}H'' = \frac{1}{3}H.$$

像高为物高的  $\frac{1}{3}$ .

**例 11** (2006·全国物理复赛题) 有一种称为直视分光镜的光谱学仪器. 所有光学元件均放在一长直圆筒内. 筒内有三个

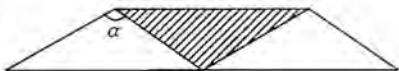


图 4-1-25

个焦距分别为  $f_1$ 、 $f_2$  和  $f_3$  的透镜  $L_1$ 、 $L_2$  和  $L_3$ ,  $f_1 = f_2 > f_3$ ; 观察屏  $P$ , 它是一块带有刻度的玻璃片; 由三块形状相同的等腰棱镜构成的分光元件 (如图 4-1-25 所示), 棱镜分别用折射率不同的玻璃制成, 两侧棱镜的质地相同, 中间棱镜则与它们不同, 棱镜底面与圆筒轴平行. 圆筒的一端有一与圆筒轴垂直的狭缝, 它与圆筒轴的交点为  $S$ , 缝平行于棱镜的底面. 当有狭缝的一端对准筒外的光源时, 位于圆筒另一端的人眼可观察到屏上的光谱.

已知: 当光源是钠光源时, 它的黄色谱线 (波长为  $589.3 \text{ nm}$ , 称为  $D$  线) 位于圆筒轴与观察屏相交处. 制作棱镜所用的玻璃, 一种为冕牌玻璃, 它对钠  $D$  线的折射率为  $n_D = 1.5170$ ; 另一种为火石玻璃, 它对钠  $D$  线的折射率为  $n_D' = 1.7200$ .

(1) 试在图 4-1-26 中绘出圆筒内诸光学元件相对位置的示意图并说出各元件的作用.



图 4-1-26

(2) 试论证三块棱镜各应由何种玻璃制成并求出三棱镜的顶角  $\alpha$  的数值。

**【分析】** 透镜可获取平行光束,也可使平行光束聚焦,棱镜对光线有色散作用,这是光学仪器中放置光学元件的基本出发点。

正确放置光学元件后,即可根据几何光学的折射定律求出结果。

**【解】** (1) 圆筒内光学元件的相对位置如图 4-1-27 所示,各元件的作用如下。

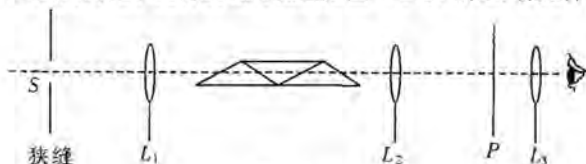


图 4-1-27

狭缝  $S$ : 光源的光由此进入分光镜,观察到的谱线就是狭缝的像。

透镜  $L_1$ : 与狭缝的距离为  $f_1$ ,使由狭缝射来的光束经  $L_1$  后成为平行光束。

分光棱镜: 使由  $L_1$  射来的平行光束中频率不同的单色光经棱镜后沿不同方向射出。

透镜  $L_2$ : 使各种单色平行光束经  $L_2$  成像在它的焦平面上,形成狭缝的像(即光谱线)。

观察屏  $P$ : 位于  $L_2$  焦平面上,供观察者聚焦在此平面上,读出谱线的位置。

透镜  $L_3$ : 与  $P$  的距离小于等于  $f_3$ ,是用于观察光谱线所用的放大镜(目镜)。

(2) 已知钠黄光的谱线位于  $P$  的中央,即  $S$  的像位于  $L_2$  的焦点上,由此可知,对分光棱镜系统来说,钠黄光的人射光束和出射光束都与轴平行。由于棱镜系统是左右对称的,因此钠黄光的光路应该是左右对称的,在中间棱镜中的光路应该与轴平行,分光元件中的光路如图 4-1-28 所示,左半部的光路如图 4-1-29 所示。用  $i_1$ 、 $r_1$ 、 $i_2$ 、 $r_2$  分别表示两次折射时的人射角和折射角,用  $n_1$ 、 $n_2$  分别表示两块棱镜对  $D$  线的折射率,由图 4-1-29 可以看出,在棱镜界面上发生折射,  $i_2 > r_2$ , 表明  $n_2 > n_1$ , 即中间的棱镜应用折射率较大的火石玻璃制成,两侧棱镜用冕牌玻璃制成,故有  $n_1 = n_D = 1.5170$ ,  $n_2 = n_D' = 1.7200$ 。

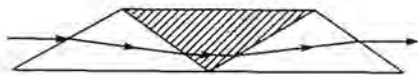


图 4-1-28

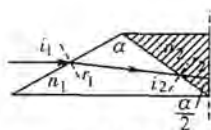


图 4-1-29

由几何关系可得



$$i_1 = r_2 = \frac{\alpha}{2}. \quad (1)$$

$$r_1 + i_2 = \alpha. \quad (2)$$

由折射定律可得

$$\sin i_1 = n_1 \sin r_1. \quad (3)$$

$$n_1 \sin i_2 = n_2 \sin r_2. \quad (4)$$

从以上各式中消去  $i_1, i_2, r_1$  和  $r_2$  得

$$2n_1 \sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \sqrt{1 - \frac{1}{n_1^2} \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} - 1 + 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = n_2. \quad (5)$$

解⑤式得

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{4n_1^2 - (n_2 + 1)^2}{4(n_1^2 - n_2)}. \quad (6)$$

以  $n_1 = 1.5170, n_2 = 1.7200$  代入, 得

$$\alpha = 123.6^\circ. \quad (7)$$

**题 12** (2004·全国物理复赛题) 目前, 大功率半导体激光器的主要结构形式是由许多发光区等距离地排列在一条直线上的长条状, 通常称为激光二极管条, 但这样的半导体激光器发出的是很多束发散光束, 光能分布很不集中, 不利于传输和应用, 为了解决这个问题, 需要根据具体应用的要求, 对光束进行必须的变换(或称整形), 如果把一个半导体激光二极管条发出的光变换成一束很细的平行光束, 对半导体激光的传输和应用将是非常有意义的, 为此, 有人提出了先把多束发散光束会聚到一点, 再变换为平行光的方案, 其基本原理可通过如下所述的简化了的情况来说明。

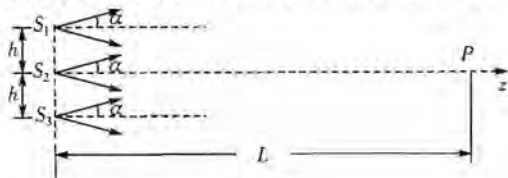


图 4-1-30

如图 4-1-30,  $S_1, S_2, S_3$  是等距离( $h$ )地排列在一直线上的三个点光源, 各自向垂直于它们的连线的同一方向发出半顶角为  $\alpha = \arctan \frac{1}{4}$  的圆锥形光束, 请使用三个完全相同的, 焦距为  $f = 1.50h$ , 半径为  $r = 0.75h$  的圆形薄凸透镜, 经加工、组装成一个三者在同一平面内的组合透镜, 使三束光都能全部投射到这个组合透镜上, 且经透镜折射后的光线能全部会聚于  $z$  轴(以  $S_2$  为起点, 垂直于三个点光源连线, 与光束中心线方向相同的射线)上距离  $S_2$  为  $L = 12.0h$  处的  $P$  点。(加工时可对透镜进行外形的改变, 但不能改变透镜焦距)

(1) 求出组合透镜中每个透镜光心的位置。

(2) 说明对三个透镜应如何加工和组装, 并求出有关数据。

**【分析】** 此题是一个几何光学问题, 可根据透镜成像公式进行有关计算, 但问





题的关键是如何保证三束光线都能全部投射到组合透镜上。

【解】(1)考虑到使三个点光源的三束光分别通过三个透镜都成实像于  $P$  点的要求,组合透镜所在的平面应垂直于  $z$  轴,三个光心  $O_1, O_2, O_3$  的连线平行于三个光源的连线,  $O_2$  位于  $z$  轴上,如图 4-1-31 所示。图中  $MM'$  表示组合透镜的平面,  $S_1', S_2', S_3'$  为三个光束中心光线与该平面的交点,  $\overline{S_2O_2} = u$  就是物距,根据透镜成像公式

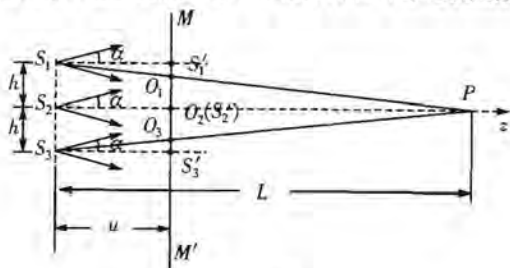


图 4-1-31

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{L-u} = \frac{1}{f}$$

可解得

$$u = \frac{1}{2}(L \pm \sqrt{L^2 - 4fL}) \quad (1)$$

因为要保证经透镜折射后的光线都能全部会聚于  $P$  点,来自各光源的光线在投射到透镜之前不能交叉,必须有  $2u \tan \alpha \leq h$  即  $u \leq 2h$ ,在上式中取“ $-$ ”号,代入  $f$  和  $L$  的值,算得

$$u = (6 - 3\sqrt{2})h \approx 1.757h \quad (2)$$

此解满足上面的条件。

分别作三个点光源与  $P$  点的连线,为使三个点光源都能同时成像于  $P$  点,三个透镜的光心  $O_1, O_2, O_3$  应分别位于这三条连线上(如图 4-1-31)。由几何关系知,有

$$\overline{O_1O_2} = \overline{O_2O_3} = \frac{L-u}{L}h = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}\right)h \approx 0.854h \quad (3)$$

即光心  $O_1$  的位置应在  $S_1'$  之下与  $S_1'$  的距离为

$$\overline{S_1'O_1} = h - \overline{O_1O_2} = 0.146h \quad (4)$$

同理,  $O_3$  的位置应在  $S_3'$  之上与  $S_3'$  的距离为  $0.146h$  处。由③式可知组合透镜中相邻薄透镜中心之间距离必须等于  $0.854h$ ,才能使  $S_1, S_2, S_3$  都能成像于  $P$  点。

(2)现在讨论如何把三个透镜  $L_1, L_2, L_3$  加工组装成组合透镜。

因为三个透镜的半径  $r = 0.75h$ ,将它们的光心分别放置到  $O_1, O_2, O_3$  处时,由于  $\overline{O_1O_2} = \overline{O_2O_3} = 0.854h < 2r$ ,透镜必然发生相互重叠,必须对透镜进行加工,各切去一部分,然后再将它们粘起来,才能满足③式的要求。由于对称关系,我们只需讨论上半部分的情况。

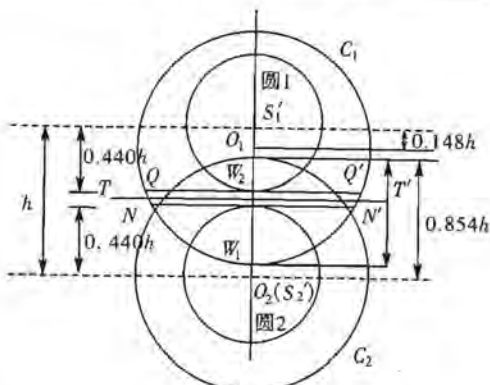


图 4-1-32

图 4-1-32 画出了  $L_1$ 、 $L_2$  放在  $MM'$  平面内时相互交叠的情况(纸面为  $MM'$  平面)。图中  $C_1$ 、 $C_2$  表示  $L_1$ 、 $L_2$  的边缘,  $S_1'$ 、 $S_2'$  为光束中心光线与透镜的交点,  $W_1$ 、 $W_2$  分别为  $C_1$ 、 $C_2$  与  $O_1O_2$  的交点, 以  $S_1'$  为圆心的圆 1 和以  $S_2'$  (与  $O_2$  重合) 为圆心的圆 2 分别是光源  $S_1$  和  $S_2$  投射到  $L_1$  和  $L_2$  时产生的光斑的边缘, 其半径均为

$$\rho = u \tan \alpha = 0.439h. \quad (5)$$

根据题意, 圆 1 和圆 2 内的光线必须能全部进入透镜。首先, 圆 1 的  $K$  点(见图 4-1-32)是否落在  $L_1$  上? 由几何关系可知

$$\overline{O_1K} = \rho + \overline{O_1S_1'} = (0.439 + 0.146)h = 0.585h < r = 0.75h. \quad (6)$$

故从  $S_1$  发出的光束能全部进入  $L_1$ 。为了保证全部光束能进入透镜组合, 对  $L_1$  和  $L_2$  进行加工时必须保留圆 1 和圆 2 内的透镜部分。

下面举出一种对透镜进行加工、组装的方法。在  $O_1$  和  $O_2$  之间作垂直于  $O_1O_2$  且分别与圆 1 和圆 2 相切的切线  $QQ'$  和  $NN'$ 。若沿位于  $QQ'$  和  $NN'$  之间且与它们平行的任意直线  $TT'$  对透镜  $L_1$  和  $L_2$  进行切割, 去掉两透镜的弓形部分, 然后把它们沿此线粘合就得到符合所需组合透镜的上半部。同理, 对  $L_2$  的下半部和  $L_3$  进行切割, 然后将  $L_2$  的下半部和  $L_3$  粘合起来, 就得到符合需要的整个组合透镜。这个组合透镜可以将  $S_1$ 、 $S_2$ 、 $S_3$  发出的全部光线都会聚到  $P$  点。

现在计算  $QQ'$  和  $NN'$  的位置以及对各个透镜切去部分的大小应符合的条件。设透镜  $L_1$  被切去部分沿  $O_1O_2$  方向的长度为  $x_1$ , 透镜  $L_2$  被切去部分沿  $O_1O_2$  方向的长度为  $x_2$ , 如图 4-1-32 所示, 则对任意一条切割线  $TT'$ ,  $x_1$ 、 $x_2$  之和为

$$d = x_1 + x_2 = 2r - \overline{O_1O_2} = 0.646h. \quad (7)$$

由于  $TT'$  必须在  $QQ'$  和  $NN'$  之间, 从图 4-1-32 可看出, 沿  $QQ'$  切割时,  $x_1$  达最大值( $x_{1M}$ ),  $x_2$  达最小值( $x_{2m}$ ),

$$x_{1M} = r + \overline{S_1'O_1} - \rho.$$

代入  $r$ 、 $\rho$  和  $\overline{S_1'O_1}$  的值, 得

$$x_{1M} = 0.457h. \quad (8)$$

代入⑦式,得

$$x_{2m} = d - x_{1m} = 0.189h. \quad (9)$$

由图 4-1-32 可看出,沿  $NN'$  切割时,  $x_2$  达最大值( $x_{2M}$ ),  $x_1$  达最小值( $x_{1m}$ ),

$$x_{2M} = r - \rho.$$

代入  $r$  和  $\rho$  的值,得

$$x_{2M} = 0.311h. \quad (10)$$

$$x_{1m} = d - x_{2M} = 0.335h.$$

由对称性,对  $L_3$  的加工与对  $L_1$  相同,对  $L_2$  下半部的加工与对上半部的加工相同.

**题 13** (2002·全国物理复赛题) 薄凸透镜放在空气中时,两侧焦点与透镜中心的距离相等.如果此薄透镜两侧的介质不同,其折射率分别为  $n_1$  和  $n_2$ ,则透镜两侧各有一焦点(设为  $F_1$  和  $F_2$ ),但  $F_1$ 、 $F_2$  和透镜中心的距离不相等,其值分别为  $f_1$  和  $f_2$ .现有一薄凸透镜  $L$ ,已知此凸透镜对平行光束起会聚作用,在其左右两侧介质的折射率及焦点的位置如图 4-1-33 所示.

(1)试求出此时物距  $u$ ,像距  $v$ ,焦距  $f_1$ 、 $f_2$  四者之间的关系式.

(2)若有一傍轴光线射向透镜中心,已知它与透镜主轴的夹角为  $\theta_1$ ,则与之相应的出射光线与主轴的夹角  $\theta_2$  多大?

(3) $f_1$ 、 $f_2$ 、 $n_1$ 、 $n_2$  四者之间有何关系?

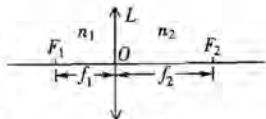


图 4-1-33

**【分析】** 此题首先要利用几何光学的特点,对光路图进行几何分析,同时再运用折射定律及数学的近似计算.

**【解】** (1)利用焦点的性质,用作图法可求得小物  $PQ$  的像  $P'Q'$ ,如图 4-1-34 所示.

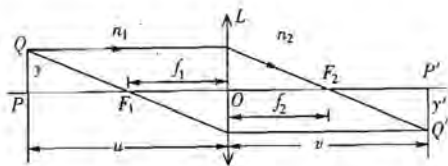


图 4-1-34

用  $y$  和  $y'$  分别表示物和像的大小,则由图中的几何关系可得

$$\frac{y}{y'} = \frac{u - f_1}{f_1} = \frac{f_2}{v - f_2}. \quad (1)$$

$$(u - f_1)(v - f_2) = f_1 f_2.$$

简化后即得物距像距公式,即  $u$ 、 $v$ 、 $f_1$ 、 $f_2$  之间的关系式.

$$\frac{f_1}{u} + \frac{f_2}{v} = 1. \quad (2)$$

(2)薄透镜中心附近可视为薄平行板,入射光线经过两次折射后射出,放大后



的光路如图 4-1-35 所示。图中  $\theta_1$  为入射角,  $\theta_2$  为与之相应的出射角,  $\gamma$  为平行板中的光线与法线的夹角。设透镜的折射率为  $n$ , 则由折射定律得

$$n_1 \sin \theta_1 = n \sin \gamma = n_2 \sin \theta_2. \quad (3)$$

对傍轴光线,  $\theta_1$ 、 $\theta_2$  非常小, 得  $\sin \theta_1 \approx \theta_1$ ,  $\sin \theta_2 \approx \theta_2$ , 因而得

$$\theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \theta_1. \quad (4)$$

(3) 由物点  $Q$  射向中心  $O$  的入射光线, 经  $L$  折射后, 出射光线应射向  $Q'$ , 如图 4-1-36.

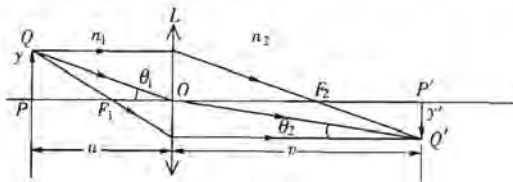


图 4-1-36

在傍轴的条件下, 有

$$\frac{y}{u} = \tan \theta_1 \approx \theta_1, \quad \frac{y'}{v} = \tan \theta_2 \approx \theta_2. \quad (5)$$

二式相除并利用④式, 得

$$\frac{y' u}{y v} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (6)$$

用①式的  $\frac{y'}{y} = \frac{f_1}{u - f_1}$  代入⑥式, 得

$$\frac{f_1 u}{(u - f_1) v} = \frac{n_1}{n_2}.$$

即

$$f_1 = \frac{n_1 u v}{n_2 u + n_1 v}. \quad (7)$$

用①式的  $\frac{y'}{y} = \frac{v - f_2}{f_2}$  代入⑥式, 得

$$\frac{(v - f_2) u}{f_2 v} = \frac{n_1}{n_2}.$$

即

$$f_2 = \frac{n_2 u v}{n_2 u + n_1 v}. \quad (8)$$

从而得  $f_1$ 、 $f_2$ 、 $n_1$ 、 $n_2$  之间关系式  $\frac{f_2}{f_1} = \frac{n_2}{n_1}$ .

**题 14** (2001·全国物理复赛题) 有一放在空气中的玻璃棒, 折射率  $n=1.5$ , 中心轴长  $L=45$  cm, 一端是半径为  $R_1=10$  cm 的凸球面.

(1) 要使玻璃棒的作用相当于一架理想的天文望远镜(使主光轴上无限远处物

成像于主光轴上无限远处的望远系统),取中心轴线为主光轴,玻璃棒另一端应磨成什么样的球面?

(2)对于这个玻璃棒,由无限远物点射来的平行入射光束与玻璃棒的主光轴成小角度  $\varphi_1$  时,从棒射出的平行光束与主光轴成小角度  $\varphi_2$ ,求  $\frac{\varphi_2}{\varphi_1}$  (此比值等于此玻璃棒的望远系统的视角放大率)。

**【分析】** 首先我们应知道对于一个望远系统来说,从主光轴上无限远处的物点发出的入射光线为平行于主光轴的光线,它经过系统后的出射光线也应与主光轴平行,即像点也在主光轴上无限远处,然后我们再运用正弦定理、折射定律及小角度近似计算,即可得出最后结果。

**【解】** (1) 对于一个望远系统来说,从主光轴上无限远处的物点发出的入射光为平行于主光轴的光线,它经过系统后的出射光线也应与主光轴平行,即像点也在主光轴上无限远处,如图 4-1-37 所示,图中  $C_1$  为左端球面的球心。

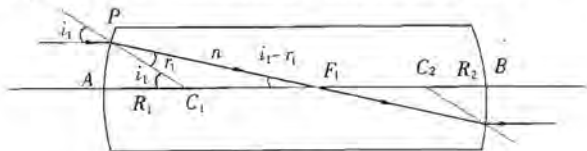


图 4-1-37

由正弦定理、折射定律和小角度近似得

$$\frac{AF_1 - R_1}{R_1} = \frac{\sin r_1}{\sin(i_1 - r_1)} \approx \frac{r_1}{i_1 - r_1} = \frac{1}{\frac{i_1}{r_1} - 1} \approx \frac{1}{n-1} \quad (1)$$

即

$$\frac{AF_1}{R_1} - 1 = \frac{1}{n-1} \quad (2)$$

光线  $PF_1$  射至另一端面时,其折射光线为平行于主光轴的光线,由此可知该端面的球心  $C_2$  一定在端面顶点  $B$  的左方,  $C_2B$  等于球面的半径  $R_2$ , 如图 4-1-37 所示。

仿照上面对左端球面上折射的关系可得

$$\frac{BF_1}{R_2} - 1 = \frac{1}{n-1} \quad (3)$$

又有

$$\overline{BF_1} = L - \overline{AF_1} \quad (4)$$

由②③④式并代入数值可得

$$R_2 = 5 \text{ cm} \quad (5)$$

即右端应为半径等于 5 cm 的向外凸的球面。

(2) 设从无限远处物点射入的平行光线用  $a, b$  表示, 令  $a$  过  $C_1$ ,  $b$  过  $A$ , 如图 4-1-38 所示, 则这两条光线经左端球面折射后的相交点  $M$ , 即为左端球面对此无限远物点成的像点。

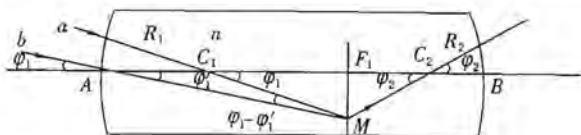


图 4-1-38

现在求  $M$  点的位置. 在  $\triangle AC_1M$  中

$$\frac{\overline{AM}}{\sin(\pi - \varphi_1)} = \frac{\overline{AM}}{\sin \varphi_1} = \frac{R_1}{\sin(\varphi_1 - \varphi_1')} \quad (6)$$

$$\text{又} \quad n \sin \varphi_1' = \sin \varphi_1 \quad (7)$$

已知  $\varphi_1, \varphi_1'$  均为小角度, 则有

$$\frac{\overline{AM}}{\varphi_1} \approx \frac{R_1}{\varphi_1 \left(1 - \frac{1}{n}\right)} \quad (8)$$

与②式比较可知,  $\overline{AM} \approx \overline{AF_1}$ , 即  $M$  位于过  $F_1$  垂直于主光轴的平面上. 上面已知, 玻璃棒为天文望远系统, 则凡是过  $M$  点的傍轴光线从棒的右端面射出时都是相互平行的光线. 容易看出, 从  $M$  射向  $C_2$  的光线将沿原方向射出, 这也就是过  $M$  点的任意光线(包括光线  $a, b$ )从玻璃棒射出的平行光线的方向. 此方向与主光轴的夹角即为  $\varphi_2$ , 由图 4-1-38 可得

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{C_1 F_1}{C_2 F_1} = \frac{\overline{AF_1} - R_1}{\overline{BF_1} - R_2} \quad (9)$$

由②③式可得

$$\frac{\overline{AF_1} - R_1}{\overline{BF_1} - R_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

$$\text{则} \quad \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{R_1}{R_2} = 2 \quad (10)$$

**题 15** (2000·全国物理竞赛题) 普通光纤是一种可传输光的圆柱形细丝, 由具有圆形截面的纤芯  $A$  和包层  $B$  组成,  $B$  的折射率小于  $A$  的折射率, 光纤的端面与圆柱体的轴垂直, 由一端面射入的光在很长的光纤中传播时, 在纤芯  $A$  和包层  $B$  的分界面上发生多次全反射. 现在利用普通光纤测量流体  $F$  的折射率. 实验方法如下: 让光纤的一端(出射端)浸在流体  $F$  中. 令与光纤轴平行的单色平行光束经凸透镜折射后会聚在光纤入射端面的中心  $O$ , 经端面折射进入光纤, 在光纤中传播. 由  $O$  点发出的光束为圆锥形, 已知其边缘光线和轴的夹角为  $\alpha_0$ , 如图 4-1-39 所示. 最后光从另一端面出射进入流体  $F$ . 在距出射端面  $h_1$  处放置一垂直于光纤轴的毛玻璃屏  $D$ , 在  $D$  上出现一圆形光斑, 测出其直径为  $d_1$ , 然后移动光屏  $D$  至距光纤出射端面  $h_2$  处, 再测出圆形光斑的直径  $d_2$ , 如图 4-1-40 所示.

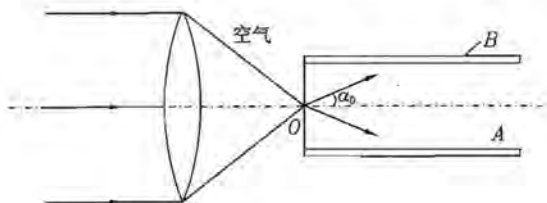


图 4-1-39

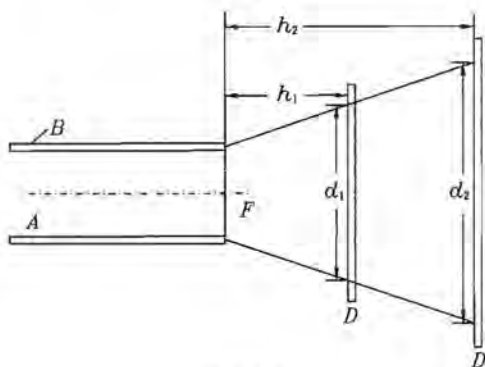


图 4-1-40

(1)若已知 A 和 B 的折射率分别为  $n_A$  与  $n_B$ , 求被测流体 F 的折射率  $n_F$  的表达式.

(2)若  $n_A$ 、 $n_B$  和  $\alpha_0$  均为未知量, 如何通过进一步的实验以测出  $n_F$  的值?

**【分析】** 光线在光纤中传播时, 只有在纤芯 A 与包层 B 的分界面上发生全反射的光线才能射出光纤的端面, 据此我们可以作出相应的光路图, 根据光的折射定律及几何关系, 最后可求出  $n_F$ .

**【解】** (1) 由于光纤内所有光线都从轴上的 O 点出发, 在光纤中传播的光线都与轴相交, 位于通过轴的纵剖面内, 图 4-1-41 为纵剖面内的光路图. 设由 O 点发出的与轴的夹角为  $\alpha$  的光线, 射至 A、B 分界面的入射角为  $i$ , 反射角也为  $i$ . 该光线在光纤中多次反射时的入射角均为  $i$ , 射至出射端面时的入射角为  $\alpha$ . 若该光线折射后的折射角为  $\theta$ , 则由几何关系和折射定律可得

$$i + \alpha = 90^\circ \quad (1)$$

$$n_A \sin \alpha = n_F \sin \theta \quad (2)$$



图 4-1-41



当  $i$  大于全反射临界角  $i_C$  时将发生全反射, 没有光能损失, 相应的光线将以不变的光强射向出射端面。而  $i < i_C$  的光线则因在发生反射时有部分光线通过折射进入  $B$ , 反射光强随着反射次数的增大而越来越弱, 以致在未达到出射端面之前就已经衰减为零了。因而能射向出射端面的光线的  $i$  的数值一定大于或等于  $i_C$ ,  $i_C$  的值由下式决定:

$$n_A \sin i_C = n_B. \quad (3)$$

与  $i_C$  对应的  $\alpha$  值为

$$\alpha_C = 90^\circ - i_C. \quad (4)$$

当  $\alpha_0 > \alpha_C$ , 即  $\sin \alpha_0 > \sin \alpha_C = \cos i_C = \sqrt{1 - \sin^2 i_C} = \sqrt{1 - (\frac{n_B}{n_A})^2}$  时, 或  $n_A \sin \alpha_0 > \sqrt{n_A^2 - n_B^2}$  时, 由  $O$  发出的光束中, 只有  $\alpha \leq \alpha_C$  的光线才满足  $i \geq i_C$  的条件, 才能射向端面, 此时出射端面处  $\alpha$  的最大值为

$$\alpha_{\max} = \alpha_C = 90^\circ - i_C. \quad (5)$$

若  $\alpha_0 < \alpha_C$ , 即  $n_A \sin \alpha_0 < \sqrt{n_A^2 - n_B^2}$  时, 则由  $O$  发出的光线都能满足  $i > i_C$  的条件, 因而都能射向端面, 此时出射端面处  $\alpha$  的最大值为

$$\alpha_{\max} = \alpha_0. \quad (6)$$

端面处入射角  $\alpha$  最大时, 折射角  $\theta$  也达最大值, 设为  $\theta_{\max}$ , 由②式可知

$$n_F \sin \theta_{\max} = n_A \sin \alpha_{\max}. \quad (7)$$

由⑥⑦式可得, 当  $\alpha_0 < \alpha_C$  时,

$$n_F = \frac{n_A \sin \alpha_0}{\sin \theta_{\max}}. \quad (8)$$

由③至⑦式可得, 当  $\alpha_0 \geq \alpha_C$  时,

$$n_F = \frac{n_A \cos i_C}{\sin \theta_{\max}} = \frac{\sqrt{n_A^2 - n_B^2}}{\sin \theta_{\max}}. \quad (9)$$

$\theta_{\max}$  的数值可由图 4-1-42 上的几何关系求得为

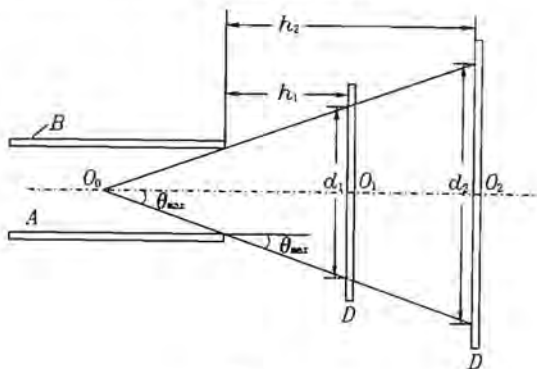


图 4-1-42



$$\sin\theta_{\max} = \frac{\frac{d_2 - d_1}{2}}{\sqrt{\left(\frac{d_2 - d_1}{2}\right)^2 + (h_2 - h_1)^2}} \quad (10)$$

于是  $n_F$  的表达式应为

$$n_F = n_A \sin\alpha \frac{\sqrt{\left(\frac{d_2 - d_1}{2}\right)^2 + (h_2 - h_1)^2}}{\frac{d_2 - d_1}{2}}, \quad (\alpha_0 < \alpha_c) \quad (11)$$

$$n_F = \sqrt{n_A^2 - n_B^2} \frac{\sqrt{\left(\frac{d_2 - d_1}{2}\right)^2 + (h_2 - h_1)^2}}{\frac{d_2 - d_1}{2}}, \quad (\alpha_0 \geq \alpha_c) \quad (12)$$

(2) 可将输出端介质改为空气, 光源保持不变, 按同样手续再做一次测量, 可测得  $h_1', h_2', d_1', d_2'$ , 这里打撇的量与前面未打撇的量意义相同. 已知空气的折射率等于 1, 故有

当  $\alpha_0 < \alpha_c$  时,

$$1 = n_A \sin\alpha_0 \frac{\sqrt{\left(\frac{d_2' - d_1'}{2}\right)^2 + (h_2' - h_1')^2}}{\frac{d_2' - d_1'}{2}}; \quad (13)$$

当  $\alpha_0 \geq \alpha_c$  时,

$$1 = \sqrt{n_A^2 - n_B^2} \frac{\sqrt{\left(\frac{d_2' - d_1'}{2}\right)^2 + (h_2' - h_1')^2}}{\frac{d_2' - d_1'}{2}}. \quad (14)$$

将⑪⑫两式分别与⑬⑭相除, 均得

$$n_F = \frac{d_2' - d_1'}{d_2 - d_1} \frac{\sqrt{\left(\frac{d_2 - d_1}{2}\right)^2 + (h_2 - h_1)^2}}{\sqrt{\left(\frac{d_2' - d_1'}{2}\right)^2 + (h_2' - h_1')^2}}. \quad (15)$$

此结果适用于  $\alpha_0$  为任何值的情况.

**题 16** (1999·全国物理竞赛题) 两个焦距分别是  $f_1$  和  $f_2$  的薄凸透镜  $L_1$  和  $L_2$ , 相距为  $d$ , 被共轴地安置在光具座上.

(1) 若要求入射光线和与之对应的出射光线相互平行, 问该入射光线应满足什么条件?

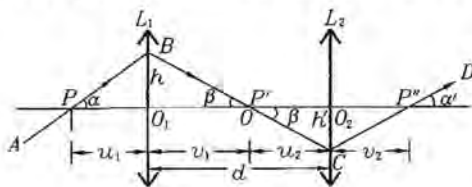
(2) 根据所得结果, 分别画出各种可能情况下的光路示意图.

**【分析】** 解这类题时, 应首先根据题目要求画出光路图, 然后再运用透镜成像公式及相似三角形关系进行分析、计算, 最后得出结果来.

**【解】** (1) 在所示的光路图 4-1-43 中, 入射光  $AB$  经透镜  $L_1$  折射后沿  $BC$  射向



$L_2$ , 经  $L_2$  折射后沿  $CD$  出射.  $AB$ 、 $BC$ 、 $CD$  与透镜主轴的交点分别为  $P$ 、 $P'$  和  $P''$ , 如果  $P$  为物点, 因由  $P$  沿主轴射向  $O_1$  的光线方向不变, 由透镜性质可知,  $P'$  为  $P$  经过  $L_1$  所成的像,  $P''$  为  $P'$  经  $L_2$  所成的像, 因而图中所示的  $u_1$ 、 $v_1$ 、 $u_2$ 、 $v_2$  之间有下列关系



$$d > f_1 + f_2$$

图 4-1-43

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{v_1} = \frac{1}{f_1}, \quad (1)$$

$$\frac{1}{u_2} + \frac{1}{v_2} = \frac{1}{f_2}, \quad (2)$$

$$d = u_2 + v_1. \quad (3)$$

当入射光线  $PB$  与出射光线平行时, 图中的  $\alpha = \alpha'$ , 利用相似三角形关系可求得

$$\frac{h'}{h} = \frac{v_2}{u_1}, \quad \frac{h'}{h} = \frac{u_2}{v_1},$$

从而求得 
$$\frac{v_2}{u_1} = \frac{u_2}{v_1}, \quad (4)$$

联立方程式①②③④, 消去  $v_1$ 、 $u_2$  和  $v_2$ , 可得

$$u_1 = \frac{f_1 d}{d - (f_1 + f_2)}. \quad (5)$$

具体运算过程如下

由①式可得 
$$\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_1}{f_1} - 1, \quad (1')$$

由②式可得 
$$\frac{u_2}{v_2} = \frac{u_2}{f_2} - 1. \quad (2')$$

由④式可得 
$$\frac{u_2}{v_2} = \frac{v_1}{u_1}. \quad (3')$$

由①'②'③'式可得 
$$\frac{v_1}{f_1} = \frac{u_2}{f_2}.$$

即 
$$u_2 = \frac{f_2}{f_1} v_1.$$

将上式代入③式可得 
$$d = 1 + \frac{f_2}{f_1} v_1.$$

即 
$$v_1 = \frac{f_1 d}{f_1 + f_2}. \quad (4')$$

将④'式代入①'式得

$$u_1 = \frac{f_1 v_1}{v_1 - f_1} = \frac{f_1^2 d}{f_1 d - f_1^2 - f_1 f_2} = \frac{f_1 d}{d - (f_1 + f_2)} \quad (5')$$

由于  $d, f_1, f_2$  均已给定, 所以  $u_1$  为一确定值, 这表明: 如果入射光线与出射光线平行, 则此入射光线必须通过主轴上一确定的点, 它在  $L_1$  的左方与  $L_1$  相距  $u_1 = \frac{f_1 d}{d - (f_1 + f_2)}$  处. 又由于  $u_1$  与  $\alpha$  无关, 凡是通过该点射向  $L_1$  的入射光线都和对应的出射光线相互平行.

(2) 由所得结果⑤式可以看出当  $d > f_1 + f_2$  时,  $u_1 > 0$ , 此情况下的光路图就是图 4-1-43.

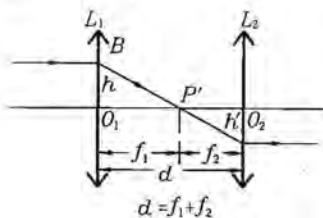


图 4-1-44

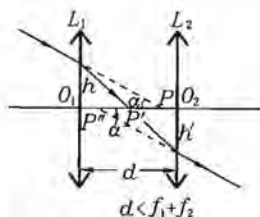


图 4-1-45

当  $d = f_1 + f_2$  时,  $u_1 \rightarrow \infty, \alpha = 0$ , 此时入射光线和出射光线均平行于主轴, 光路如图 4-1-44.

当  $d < f_1 + f_2$  时,  $u_1 < 0$ , 这表明  $P$  点在  $L_1$  的右方, 对  $L_1$  来说, 它是虚物. 由①式可知, 此时  $v_1 > 0$ , 由  $u_2 = \frac{f_2}{f_1} v_1$  可知,  $u_2 > 0$ , 又由  $\frac{u_2}{v_2} = \frac{v_1}{u_1} < 0$  可知,  $v_2 < 0$ , 所以此时的光路图如图 4-1-45.

**题 17** (2008·全国物理竞赛题) 折射率  $n=1.50$ 、半径为  $R$  的透明半圆柱体放在空气中, 其垂直于柱体轴线的横截面如图 4-1-46 所示, 图中  $O$  点为横截面与轴线的交点, 光仅允许从半圆柱体的平面  $AB$  进入, 一束足够宽的平行单色光沿垂直于圆柱轴的方向以入射角  $i$  射至  $AB$  整个平面上, 其中有一部分入射光束能通过半圆柱体从圆柱面射出. 这部分光束在入射到  $AB$  面上时沿  $y$  轴方向的长度用  $d$  表示. 本题不考虑光线在透明圆柱体内经一次或多次反射后再射出柱体的复杂情形.

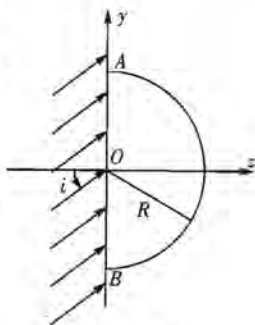


图 4-1-46

(1) 当平行入射光的入射角  $i$  在  $0^\circ \sim 90^\circ$  变化时, 试求  $d$  的最小值  $d_{\min}$  和最大值  $d_{\max}$ .

(2) 在如图 4-1-46 所示的平面内, 求出射光束与柱面相交的圆弧对  $O$  点的张角与入射角  $i$  的关系. 并求在掠入射时上述圆弧的位置.

**【分析】** 解答此题时需涉及全反射知识及三角知识中的正弦定理.

**【解】** (1) 在图 4-1-47 中,  $x$  轴垂直于  $AB$  面, 考查平行光束中两条光线分别



在  $AB$  面上  $C$  与  $C'$  点以入射角  $i$  射入透明圆柱时的情况,  $r$  为折射角, 在圆柱体中两折射光线分别射达圆柱面的  $D$  和  $D'$ , 对圆柱面其入射角分别为  $i_2$  与  $i_2'$ . 在  $\triangle OCD$  中,  $O$  点与入射点  $C$  的距离  $y_C$  由正弦定理得

$$\frac{y_C}{\sin i_2} = \frac{R}{\sin(90^\circ + r)}, \text{ 即 } y_C = \frac{\sin i_2}{\cos r} R. \quad (1)$$

同理, 在  $\triangle OC'D'$  中,  $O$  点与入射点  $C'$  的距离有

$$\frac{y_{C'}}{\sin i_2'} = \frac{R}{\sin(90^\circ - r)}, \text{ 即 } y_{C'} = \frac{\sin i_2'}{\cos r} R. \quad (2)$$

当改变入射角  $i$  时, 折射角  $r$  与柱面上的入射角  $i_2$  与  $i_2'$  亦随之变化. 在柱面上的入射角满足临界角

$$i_{20} = \arcsin \frac{1}{n} \approx 41.8^\circ. \quad (3)$$

此时, 发生全反射. 将  $i_2 = i_2' = i_{20}$  分别代入式①、②得

$$y_{0C} = y_{0C'} = \frac{\sin i_{20}}{\cos r} R. \quad (4)$$

$$\text{即 } d = 2y_{0C} = 2 \frac{\sin i_{20}}{\cos r} R. \quad (5)$$

当  $y_C > y_{0C}$  和  $y_{C'} > y_{0C}$  时, 入射光线进入柱体, 经过折射后射达柱面时的入射角大于临界角  $i_{20}$ , 由于发生全反射不能射出柱体. 因折射角  $r$  随入射角  $i$  增大而增大. 由式④知, 当  $r=0$ , 即  $i=0$  (垂直入射) 时,  $d$  取最小值

$$d_{\min} = 2R \sin i_{20} \approx 1.33R. \quad (6)$$

$$\text{当 } i \rightarrow 90^\circ \text{ (掠入射) 时, } r \rightarrow 41.8^\circ, \text{ 将 } r=41.8^\circ \text{ 代入式④得 } d_{\max} = 1.79R. \quad (7)$$

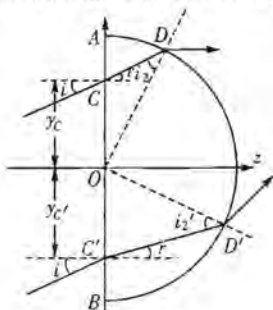


图 4-1-47

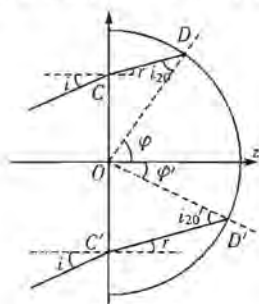


图 4-1-48

(2) 由图 4-1-48 可见,  $\varphi$  是  $Oz$  轴与线段  $OD$  的夹角,  $\varphi'$  是  $Oz$  轴与线段  $OD'$  的夹角. 发生全反射时, 有

$$\varphi = i_{20} + r. \quad (8)$$

$$\varphi' = i_{20} - r. \quad (9)$$

和

$$\theta = \varphi + \varphi' = 2i_{20} \approx 83.6^\circ. \quad (10)$$

由此可见,  $\theta$  与  $i$  无关, 即  $\theta$  独立于  $i$ . 在掠入射时,  $i \approx 90^\circ$ ,  $r = 41.8^\circ$ , 由式⑧⑨两式得

$$\varphi = 83.6^\circ, \varphi' = 0^\circ.$$

**题 18** (2007·全国物理竞赛题) 如图 4-1-49 所示,一半径为  $R$ , 折射率为  $n_k$  的透明球体置于折射率  $n_0 = 1$  的空气中, 其球心位于图中光轴的  $O$  处, 左、右球面与光轴的交点为  $O_1$  与  $O_2$ . 球体右半球面为一球面反射镜, 组成球形反射器. 光轴上  $O_1$  点左侧有一发光物点  $P$ ,  $P$  点到球面顶点  $O_1$  的距离为  $s$ . 由  $P$  点发出的光线满足傍轴条件, 不考虑在折射面上发生的反射.

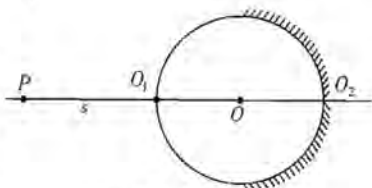


图 4-1-49

(1) 问发光物点  $P$  经此反射器, 最后的像点位于何处?

(2) 当  $P$  点沿光轴以大小为  $v$  的速度由左向右匀速运动时, 试问最后的像点将以怎样的速度运动? 并说明当球体的折射率  $n_k$  取何值时像点亦做匀速运动.

**【分析】** 这是一个二次折射成像, 一次反射成像的几何光学问题, 需根据相关成像规律, 研究逐次成像.

**【解】** (1) 单球面折射成像公式可写成

$$\frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r}. \quad (1)$$

式中  $s$  为物距,  $s'$  为像距,  $r$  为球面半径,  $n$  和  $n'$  分别为入射光和折射光所在介质的折射率.

在本题中, 物点  $P$  经反射器的成像过程是: 先经过左球面折射成像 (第一次成像); 再经右球面反射成像 (第二次成像); 最后再经左球面折射成像 (第三次成像).

① 第一次成像. 令  $s_1$  和  $s_1'$  分别表示物距和像距. 因  $s_1 = s$ ,  $n = n_0 = 1$ ,  $n' = n_k$ ,  $r = R$ , 有

$$\frac{n_k}{s_1'} + \frac{1}{s_1} = \frac{n_k - 1}{R}. \quad (2)$$

$$\text{即 } s_1' = \frac{n_k R s}{(n_k - 1)s - R}. \quad (3)$$

② 第二次成像. 用  $s_2$  表示物距,  $s_2'$  表示像距. 有

$$\frac{1}{s_2'} + \frac{1}{s_2} = \frac{2}{r}. \quad (4)$$

因  $s_2 = 2R - s_1'$ ,  $r = R$ , 由③, ④两式得

$$s_2' = \frac{(2s + 2R - n_k s)R}{3R + 3s - n_k s}. \quad (5)$$

③ 第三次成像. 用  $s_3$  表示物距,  $s_3'$  表示像距, 有

$$\frac{n_0}{s_3'} + \frac{n_k}{s_3} = \frac{n_0 - n_k}{r}. \quad (6)$$

因  $s_3 = 2R - s_2'$ ,  $n_0 = 1$ ,  $r = -R$ , 由⑤, ⑥两式得

$$s_3' = \frac{(4s - n_k s + 4R)R}{2n_k s - 4s + n_k R - 4R}. \quad (7)$$



(2) 以  $v'$  表示像的速度, 则

$$\begin{aligned} v' &= \frac{\Delta s_3'}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left\{ \frac{[4(s+\Delta s) - n_g(s+\Delta s) + 4R]R}{2n_g(s+\Delta s) - 4(s+\Delta s) + n_gR - 4R} - \frac{(4s - n_gR + 4R)R}{2n_g s - 4s + n_gR - 4R} \right\} \\ &= \frac{-n_g^2 R^2 \frac{\Delta s}{\Delta t}}{(2n_g s - 4s + n_g R - 4R)^2 + \Delta s(2n_g - 4)(2n_g s - 4s + n_g R - 4R)} \end{aligned} \quad (8)$$

由于  $\Delta s$  很小, 分母中含有  $\Delta s$  的项可以略去, 因而有

$$v' = \frac{-n_g^2 R^2}{(2n_g s - 4s + n_g R - 4R)^2} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (9)$$

根据题意,  $P$  从左向右运动, 速度大小为  $v$ , 则有

$$v = -\frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (10)$$

由此可得, 像的速度

$$v' = \frac{n_g^2 R^2 v}{(2n_g s - 4s + n_g R - 4R)^2} \quad (11)$$

可见, 像的速度与  $s$  有关, 一般不做匀速直线运动, 而做变速直线运动。

当  $n_g = 2$  时, ⑪式分母括号中的头两项相消,  $v'$  将与  $s$  无关。这表明像也将做匀速直线运动; 而且 ⑪式变为  $v' = v$ , 即像的速度和  $P$  的速度大小相等。

**题 19** (2005·全国物理决赛题) 如图 4-1-50 所示, 一细光束由空气中射到一透明平行平板的上表面, 经折射后由平板下面射出。此细光束由两种不同频率的单色光①和②构成。用  $i$  表示入射角, 用  $n_1$  和  $n_2$  分别表示平板对①和②的折射率, 且已知  $n_1 > n_2$ 。

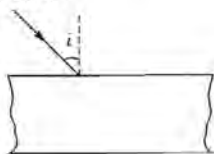


图 4-1-50

(1) 试分析讨论哪种单色光在穿过平板的过程中所用的时间较短。

(2) 若  $n_1 = 1.55, n_2 = 1.52$  可作出什么判断? 若  $n_1 = 1.40, n_2 = 1.38$ , 又可作出什么判断?

**【分析】** 此题需运用匀速运动速度公式及折射定律找出单色光穿过平板的时间表达式, 然后进行数学讨论。

**【解】** (1) 令  $d$  表示平板的厚度,  $v_1$  和  $v_2$  分别表示①和②在平板中的速度的大小,  $r_1$  和  $r_2$  分别表示它们的折射角, 如图 4-1-51 所示,  $t_1$  和  $t_2$  分别表示它们穿过平板所用的时间, 则有

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{d}{v_1 \cos r_1} \\ t_2 &= \frac{d}{v_2 \cos r_2} \end{aligned} \quad (1)$$

用  $c$  表示光在真空中的速度 (近似等于在空气中的速度), 有

$$n_1 = \frac{c}{v_1}, n_2 = \frac{c}{v_2}$$

由折射定律有

$$\sin i = n_1 \sin r_1, \sin i = n_2 \sin r_2$$

由①②③式得

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{\sin i}{n_2}\right)^2}}{n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\sin i}{n_1}\right)^2}} \quad (4)$$

当  $n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{\sin i}{n_2}\right)^2} < n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\sin i}{n_1}\right)^2}$  时,  $t_1 < t_2$ ;

当  $n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{\sin i}{n_2}\right)^2} > n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\sin i}{n_1}\right)^2}$  时,  $t_1 > t_2$ ;

当  $n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{\sin i}{n_2}\right)^2} = n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\sin i}{n_1}\right)^2}$  时,  $t_1 = t_2$ .

化简后得: 当

$$\sin i > \frac{n_1 n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \quad (5)$$

时,  $t_1 < t_2$ , 单色光①所用的时间较短; 当

$$\sin i < \frac{n_1 n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \quad (6)$$

时,  $t_1 > t_2$ , 单色光②所用的时间较短; 当

$$\sin i = \frac{n_1 n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \quad (7)$$

时,  $t_1 = t_2$ , 两种单色光所用的时间相等.

(2) 当  $n_1 = 1.55, n_2 = 1.52$  时可得

$$\frac{n_1 n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \approx 1.085 > 1.$$

因  $\sin i$  最大为 1, 由⑤式、⑥式可知, 一定是单色光②所用的时间较短, 不管入射角是多大.

当  $n_1 = 1.40, n_2 = 1.38$  时可得

$$\frac{n_1 n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \approx 0.983 < 1.$$

由⑤⑥式可知, 当入射角  $i$  较大时, 单色光①所用的时间较短; 当入射角  $i$  较小时, 单色光②所用的时间较短. 因为  $\frac{n_1 n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} < 1$ , 故存在某一入射角  $i'$  可使  $\sin i'$

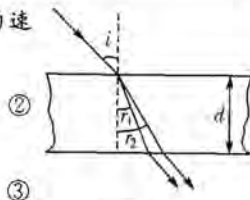


图 4-1-51



$= \frac{n_1 n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}$ , 当入射光以此入射角入射时, 由⑦式可知单色光①、②在平板中经历的时间相同。

**题 20** (2004·全国物理竞赛题) 有一光导纤维, 光芯为折射率  $n=1.500$  的透明度极好的介质, 其截面半径为  $r$ ; 光芯外面包层的折射率  $n'=1.400$ 。有一半导体激光器  $S$ , 位于光纤轴线的延长线上, 发出半角宽为  $30^\circ$  的光束。为便于使此光束全部进入光纤, 在光纤端面处烧结了一个其材料与光芯相同、半径为  $R$  的球冠  $QAQ'$ , 端面附近的结构如图 4-1-52 所示(包层未画出)。 $S$  可看做点光源, 光纤放在空气中, 空气的折射率  $n_0$  按 1.000 计算。

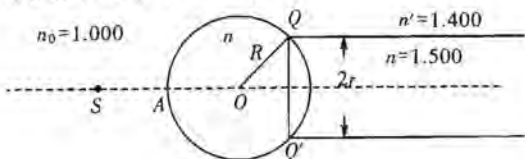


图 4-1-52

(1) 若要半导体激光器发出的光能够全部射到球冠上, 则光源  $S$  离  $A$  的距离  $x$  应满足什么条件?

(2) 如果  $R=1.8r$ , 光源  $S$  与  $A$  点的距离为  $R$ , 入射线与轴的夹角用  $\alpha$  表示, 则  $\alpha$  角分别为  $\alpha_1=30^\circ$ 、 $\alpha_2=25^\circ$  和  $\alpha_3=20^\circ$  的三根光线能否经过全反射在光纤中传播?

**【分析】** 此题为几何光学问题, 解题需运用折射定律结合光路图的几何关系进行分析。

**【解】** (1) 当发射光束刚好都能射到球面上时, 光束的边缘光线应与球面相切, 如图 4-1-53 所示,  $T$  为切点, 由几何关系可知

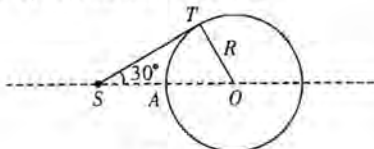


图 4-1-53

$$\sin 30^\circ = \frac{R}{SO}$$

由此求得

$$\overline{SA} = R.$$

若光源与  $A$  的距离大于  $R$ , 则有部分光线不能到达球面。全部光束能射到球面上的条件是光源与  $A$  点的距离

$$x \leq R. \quad \textcircled{1}$$

(2)  $x=R$  时与轴成  $\alpha$  角的入射光线的光路图如图 4-1-54 所示, 图中  $B$  点位于轴上, 用虚线画出的  $QBQ'$  与  $QAQ'$  构成一个球面。  $\theta$  和  $\theta'$  分别表示入射角和折射角



角. 设折射光线与球面交于  $P'$  点, 用  $\beta$  表示  $OP'$  与轴之间的夹角, 用  $\alpha'$  表示折射光线与轴之间的夹角.

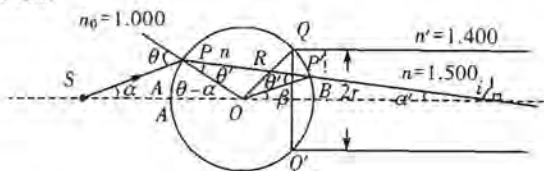


图 4-1-54

对  $\triangle OPS$ , 由正弦定理可得

$$\frac{2R}{\sin\theta} = \frac{R}{\sin\alpha} \quad (2)$$

由折射定律得

$$\sin\theta = 1.5\sin\theta' \quad (3)$$

由几何关系得

$$\beta = 2\theta' - \theta + \alpha \quad (4)$$

$$\alpha' = \theta - \alpha - \theta' \quad (5)$$

如果折射线的反向延长线与轴相交, 光路图如图 4-1-55 所示. 若对  $\alpha'$  的正负号作出如下规定: 折射线向靠近轴的方向偏折时,  $\alpha'$  取正值; 折射线的方向向远离轴的方向偏折时 (即折射光线的反向延长线与轴的交点在 A 点的左侧),  $\alpha'$  取负值, 则⑤式仍成立.

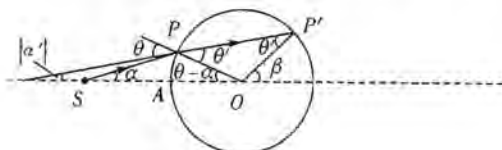


图 4-1-55

此外, 由几何关系可知, 折射光线能进入光纤的条件是

$$|\beta| \leq \angle QOB \quad (6)$$

$\beta$  可能为负值, 这表示  $P'$  在轴线以下.

而

$$\angle QOB = \arcsin \frac{r}{R}$$

代入数据, 可知折射光线能进入光纤的充要条件是

$$|\beta| \leq 33.75^\circ$$

下面分别讨论三条光线的情况.

(i)  $\alpha_1 = 30^\circ$  时.

a. 此入射光线的折射线能否进入光纤?

由②式得  $\sin\theta_1 = 2\sin\alpha_1 = 1$ , 得

$$\theta_1 = 90^\circ$$

代人③式得



$$\theta_1' = \arcsin \frac{2}{3} = 41.81^\circ.$$

代入④式得

$$\beta_1 = 2\theta_1' - \theta_1 + \alpha_1 = 23.62^\circ. \quad (7)$$

因为

$$\beta_1 < \angle QOB. \quad (8)$$

故此折射光线能进入光纤.

b. 此折射光线能否在光芯包层的界面上发生全反射?

设光纤内光线射至光芯与包层界面时发生全反射的临界角为  $i_c$ , 则

$$i_c = \arcsin \frac{1.400}{1.500} = 68.96^\circ. \quad (9)$$

因为  $i = 90^\circ - \alpha'$ , 所以当  $\alpha'$  满足下面条件时折射光线即能被全反射:

$$\alpha' \leq 90^\circ - 68.96^\circ = 21.04^\circ. \quad (10)$$

现在  $\alpha_1' = \theta_1 - \alpha_1 - \theta_1' = 18.19^\circ$ , 满足⑩式的要求. 故该光线能经过全反射在光纤中传播.

(ii)  $\alpha_2 = 25^\circ$  时.

由②式得  $\sin\theta_2 = 2\sin\alpha_2 = 2\sin 25^\circ$ ,  $\theta_2 = 57.70^\circ$ .

$$\sin\theta_2' = \frac{1}{1.5}\sin\theta_2, \theta_2' = 34.30^\circ.$$

$$\beta_2 = 2\theta_2' - \theta_2 + \alpha_2 = 35.90^\circ. \quad (11)$$

由⑥式可知, 该折射光线不能进入  $QQ'$  右面的光纤.

(iii)  $\alpha_3 = 20^\circ$  时.

由②式得  $\sin\theta_3 = 2\sin\alpha_3 = 2\sin 20^\circ$ ,  $\theta_3 = 43.16^\circ$ .

$$\sin\theta_3' = \frac{1}{1.5}\sin\theta_3, \theta_3' = 27.13^\circ.$$

$$\beta_3 = 2\theta_3' - \theta_3 + \alpha_3 = 31.10^\circ. \quad (12)$$

由⑥式可知, 此折射光线能进入  $QQ'$  右面的光纤.

此时

$$\alpha_3' = \theta_3 - \alpha_3 + \theta_3' = -3.97^\circ. \quad (13)$$

负号表示折射光线的延长线与轴相交于 A 点的左方, 它射至光纤的上半部的界面下, 如图 4-1-56 所示,  $|\alpha_3'| < 21.04^\circ$ , 所以此光线可以经过全反射在光纤中传播.

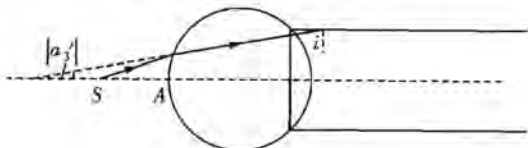


图 4-1-56



**题 21** (2003·全国物理竞赛题) 如图 4-1-57 所示,一半径为  $R$ 、折射率为  $n$  的玻璃半球,放在空气中,平表面中央半径为  $h_0$  的区域被涂黑.一平行光束垂直入射到此平面上,正好覆盖整个表面. $Ox$  为以球心  $O$  为原点,与平面垂直的坐标轴.通过计算,求出坐标轴  $Ox$  上玻璃半球右边有光线通过的各点(有光线段)和无光线通过的各点(无光线段)的分界点的坐标.

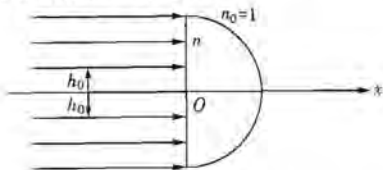


图 4-1-57

**【分析】** 这是一道关于光线折射的问题,解题需用到光的折射定律及有关几何关系.

**【解】** 图 4-1-58 中画出的是进入玻璃半球的任一光线的光路(图中阴影处是无光线进入的区域),光线在球面上的入射角和折射角分别为  $i$  和  $i'$ ,折射光线与坐标轴的交点在  $P$ .令轴上  $OP$  的距离为  $x$ ,  $MP$  的距离为  $l$ ,根据折射定律,有

$$\frac{\sin i'}{\sin i} = n. \quad (1)$$

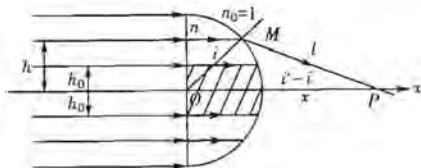


图 4-1-58

在  $\triangle OMP$  中

$$\frac{l}{\sin i} = \frac{x}{\sin i'}, \quad (2)$$

$$l^2 = R^2 + x^2 - 2Rx \cos i. \quad (3)$$

由式①和式②得

$$x = nl.$$

再由式③得

$$x^2 = n^2 (R^2 + x^2 - 2Rx \cos i).$$

设  $M$  点到  $Ox$  轴的距离为  $h$ , 有

$$h = R \sin i.$$

$$R \cos i = \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 i} = \sqrt{R^2 - h^2}.$$

得

$$\frac{x^2}{n^2} = R^2 + x^2 - 2x \sqrt{R^2 - h^2}.$$

$$x^2 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) - 2x \sqrt{R^2 - h^2} + R^2 = 0. \quad (4)$$



解式④可得

$$x = \frac{n^2 \sqrt{R^2 - h^2} \pm n \sqrt{R^2 - n^2 h^2}}{n^2 - 1} \quad (5)$$

为排除上式中应舍弃的解,令  $h \rightarrow 0$ , 则  $x$  处应为玻璃半球在光轴  $Ox$  上的傍轴焦点,由上式

$$x \rightarrow \frac{n(n \pm 1)}{n^2 - 1} R = \frac{n}{n-1} R \text{ 或 } \frac{n}{n+1} R.$$

由图可知,应有  $x > R$ , 故式⑤中应排除正负号中的负号,所以  $x$  应表示为

$$x = \frac{n^2 \sqrt{R^2 - h^2} + n \sqrt{R^2 - n^2 h^2}}{n^2 - 1} \quad (6)$$

上式给出  $x$  随  $h$  变化的关系.

因为半球平表面中心有涂黑的面积,所以进入玻璃半球的光线却有  $h \geq h_0$ , 其中折射光线与  $Ox$  轴交点最远处的坐标为

$$x_0 = \frac{n^2 \sqrt{R^2 - h_0^2} + n \sqrt{R^2 - n^2 h_0^2}}{n^2 - 1} \quad (7)$$

在轴上  $x > x_0$  处,无光线通过.

随  $h$  增大,球面上入射角  $i$  增大,当  $i$  大于临界角  $i_c$  时,即会发生全反射,没有折射光线.与临界角  $i_c$  相应的光线有

$$h_c = R \sin i_c = R \frac{1}{n}.$$

这光线的折射线与轴线的交点处于

$$x_c = \frac{n^2 R \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}}{n^2 - 1} = \frac{nR}{\sqrt{n^2 - 1}} \quad (8)$$

在轴  $Ox$  上  $R < x < x_c$  没有折射光线通过.

$$x_c \leq x \leq x_0 \quad (9)$$

由以上分析可知,在轴  $Ox$  上玻璃半球以右的一段有光线段,其他各点属于无光线段,  $x_0$  与  $x_c$  就是所要求的分界点,如图 4-1-59 所示.

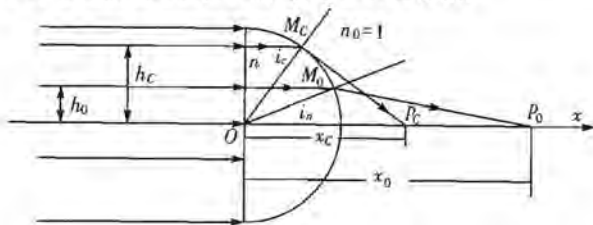


图 4-1-59

**题 22** (2002 · 全国物理竞赛题) 在折射率为  $n$  的介质 A 中有一半径为  $R$  的球形气泡,气体的折射率为  $n_0$ . 现在在气泡中再放一个与气泡同心的由透明介质 B 构成的球,并令一均匀平行光束射向气泡.

(1) 如果任意一条在介质 A 中射向气泡表面的入射光线在通过各介质界面时的入射角和折射角都满足  $\sin\theta \approx \theta$  的条件, 且该光线再进入介质 A 时能沿原入射光线方向行进, 如图 4-1-60 所示. 求介质 B 的折射率  $n'$  和 B 球的半径  $R'$  必须满足的关系式.

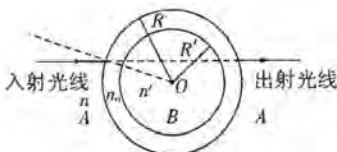


图 4-1-60

(2) 如果两球面间的介质不是气体而是一种透明液体(其折射率仍用  $n_0$  表示), 并要求任何入射角和折射角的数值都不大于 0.1 弧度, 则符合此条件的入射光束占射至外球面上的光束的百分比为多少?

**【分析】** 必须抓住题中光线及光学系统的对称性, 再运用折射定律及几何关系等即可求出结果.

**【解】** (1) 图 4-1-60 中取入射光线的一根任意的入射光线. 根据题设条件出射光线与入射光线在同一直线上, 通过球心 O 作一与此入射光线平行的直线. 由于入射光线和出射光线是左右对称的, 光学系统(球形气泡和球形介质 B)又是左右对称的, 在 B 球中的光线一定与入射光线平行, 因而光路图如图 4-1-61 所示.

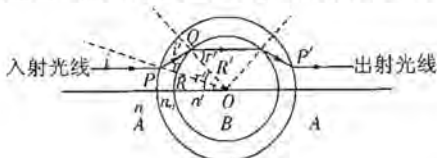


图 4-1-61

用  $i$  和  $r$  分别表示在 A 与气泡的界面上的入射角和折射角,  $i'$  和  $r'$  分别表示在气泡和 B 球的界面上的入射角和折射角, 则根据折射定律和  $\sin\theta \approx \theta$  的近似, 得

$$ni = n_0 r. \quad (1)$$

$$n_0 i' = n' r'. \quad (2)$$

对  $\triangle QPO$  应用正弦定理, 可得

$$i' = \frac{R}{R'} r = \frac{n}{n_0 R'} i. \quad (3)$$

由几何关系得

$$i' = r + r' - i. \quad (4)$$

由①②③④式可解得  $n'$  和  $R'$  应满足的关系式为

$$n' = \frac{n_0 n}{n - \frac{R'}{R} (n - n_0)}. \quad (5)$$

此关系式与  $i$  无关, 即满足题设要求的任一入射光线经过 4 次折射后都将沿原方向进入介质 A, 就像气泡和 B 球不存在似的.

注: 如果运用单球面折射的物像距公式逐面进行计算, 所得结果应与⑤式相同, 因为球面折射公式的形式跟对物距、像距和球面半径的正负号规定有关, 写出



的公式中的正负号很可能不同,但只要能正确使用,结果一定一样.

(2)  $i, r, i', r'$  的数值各不相同,只要其中数值最大的角满足  $\theta = 0.1 \text{ rad}$  的要求,其他角一定满足  $\theta < 0.1 \text{ rad}$  的要求. 至于哪个角数值最大,有下列两种情况:

(a)  $n_0 < n$ , 光路图如图 4-1-61, 显然  $i'$  最大.

$$i' = 0.1 \text{ rad.}$$

由③式可知,与之相应的  $i$  的数值为

$$i = \frac{n_0 R'}{n R} \times 0.1 \text{ rad.} \quad (6)$$

符合条件的人射平行光束的截面积为

$$A = \pi(Ri)^2 = 0.01\pi \left( \frac{n_0 R'}{n R} \right)^2. \quad (7)$$

射至外球面的平行光束的截面积  $A_0 = \pi R^2$ , 故所求百分比为

$$\frac{A}{A_0} = 0.01 \left( \frac{n_0 R'}{n R} \right)^2 \times 100\%.$$

(b)  $n_0 > n$ , 光路图如图 4-1-62 所示, 由图可看出  $r'$  最大, 由②③式可得

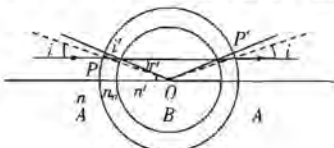


图 4-1-62

$$r' = \frac{n_0 i'}{n'} = \frac{n_0 n R}{n' n_0 R'} i.$$

令

$$r' = 0.1 \text{ rad.}$$

则有

$$i = \frac{n' R'}{n R} \times 0.1 \text{ rad.} \quad (8)$$

故所求百分比

$$\frac{A'}{A_0} = 0.01 \left( \frac{n' R'}{n R} \right)^2 \times 100\%. \quad (9)$$

以⑤式代入得

$$\frac{A'}{A_0} = 0.01 \left[ \frac{n_0 \frac{R'}{R}}{n - \frac{R'}{R}(n - n_0)} \right]^2 = 0.01 \left[ \frac{n_0 R'}{n(R - R') + n_0 R'} \right]^2 \times 100\%.$$

**题 23** (2001·全国物理竞赛题) 有一薄透镜如图 4-1-63,  $S_1$  面是旋转椭球面(椭圆绕长轴旋转而成的曲面), 其焦点为  $F_1$  和  $F_2$ ;  $S_2$  面是球面, 其球心  $C$  与  $F_2$  重合. 已知此透镜放在空气中时能使从无穷远处位于椭球长轴的物点射来的全部入射光线(不限于傍轴光线)会聚于一个像点上, 椭圆的偏心率为  $e$ .

(1) 求此透镜材料的折射率  $n$  (要论证);

(2) 如果将此透镜置于折射率为  $n'$  的介质中, 并能达到上述的同样的要求, 椭

圆应满足什么条件?

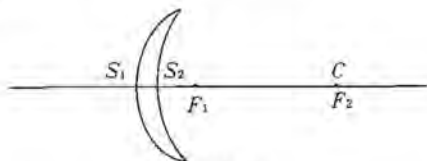


图 4-1-63

**【分析】** 解此题的关键是正确地运用椭圆的几何性质及折射定律.

**【解】** (1) 根据题设,所有平行于旋转椭球长轴的入射光线经旋转椭球面和球面两次折射后全部都能会聚于同一像点,可作出如下论证:如果经椭球面折射后射向球面的光线都射向球心  $C$ ,即射向旋转椭球面的第二焦点  $F_2$ ,则可满足题设要求.光路图如图 4-1-64 所示; $PA$  为入射线, $AC$  为经椭球面折射后的折射线, $BN$  为  $A$  点处椭球面的法线, $i$  为入射角, $r$  为折射角.根据椭圆的性质,法线  $BN$  平分  $\angle F_1AF_2$ ,故  $AF_1$  与法线的夹角也是  $r$ ,由正弦定理可得

$$\frac{F_1A}{F_1B} = \frac{\sin i}{\sin r} = n, \quad \frac{F_2A}{F_2B} = \frac{\sin i}{\sin r} = n.$$

从而可求得

$$n = \frac{F_1A + F_2A}{F_1B + F_2B} = \frac{2a}{2c} = \frac{1}{e}.$$

$2a$  为长轴的长度, $2c$  为焦点间的距离;即只要  $n$  满足以上条件,任意入射角为  $i$  的平行于旋转椭球长轴的入射光线都能会聚于  $C$  (即  $F_2$ ) 点.

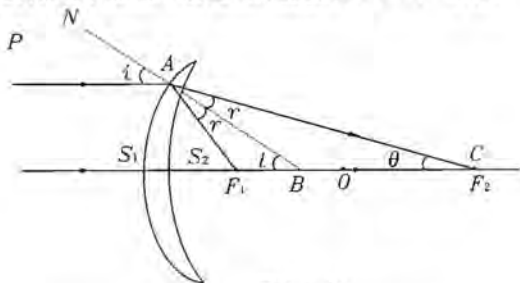


图 4-1-64

(2) 如果透镜置于折射率为  $n'$  的介质中,则要求

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n}{n'} = \frac{1}{e}.$$

即椭圆的偏心率  $e$  应满足  $e = \frac{n'}{n}$ .

由于椭圆的  $e < 1$ ,如果  $n' > n$  就无解.只要  $n' < n$ ,总可以找到一个椭球面能满足要求.

**题 24** (2000·全国物理竞赛题) 两个光学元件共轴放置,位置固定不动,每个光学元件都可能是薄透镜或平面反射镜.一小物垂直于主轴.已知当小物位于两



元件之间的任何位置时,由这光学系统成的像是有限多个,且两个最后的像大小相同.试通过对各种可能情况的分析,论证什么样的光学系统能满足上面的要求,什么样的光学系统不能满足上面的要求.

**【分析】** 我们应首先找出两种光学元件配置的三种可能方法,再分别根据平面镜、透镜成像规律对系统的成像情况进行讨论,结果与题意相符合的是正确的,否则光学元件的组合、配置就是不正确的.

**【解】** 分别考虑以下各种情况:

(1) 两平面反射镜,相向放置. 这情形,对于两平面反射镜之间的实物,系统能成无限多个像,不符合题意.

(2) 焦距为  $f$  的薄透镜  $L$  和平面反射镜  $M$  如图 4-1-65 放置.

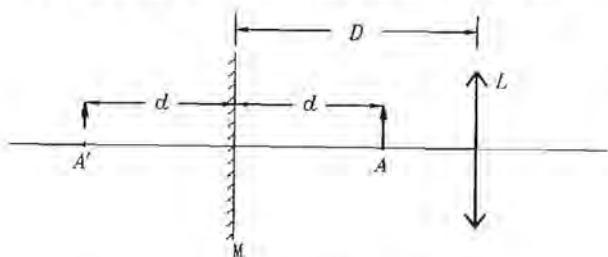


图 4-1-65

由物  $A$  发出的向右光线经  $L$  成的像,由成像公式  $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$  可得光学系统所成的第一个最后像的位置  $v_1$ .

$$u_1 = D - d, \quad v_1 = \frac{(D - d)f}{D - d - f}$$

式中  $v_1$  (下面  $v_2$  的意义相同) 表示从  $L$  向右的距离 ( $v_1 > 0$  表示像在  $L$  的右方).

由物  $A$  发出的向左光线先经反射镜  $M$  成像在  $A'$ , 反射光线再向右经  $L$  成像, 这就是光学系统所成的第二个最后像, 其位置  $v_2$  按如下方式求得.

$$u_2 = D + d, \quad v_2 = \frac{(D + d)f}{D + d - f}$$

两个像的放大率分别为  $\frac{v_1}{u_1}$  和  $\frac{v_2}{u_2}$ , 按题给条件, 两像大小相等, 应有

$$\frac{v_1}{u_1} = \pm \frac{v_2}{u_2}$$

即  $D - d - f = \pm (D + d - f)$ . ①

若①式中取“+”号, 则  $2d = 0$ , 即  $d = 0$ , 这要求物处于一特殊位置, 不能满足题目要求.

若①式中取“-”号, 则  $D - d - f = -D - d + f$ , 即  $2D = 2f$ ,  $D = f$ , 此式表明, 两元件间距离等于透镜焦距. 同时解法中要求  $D > 0$ , 故满足要求的透镜的焦距  $f$  也应大于 0, 即此透镜应为凸透镜. 此结果与  $d$  的取值无关. 因此, 两个元件为一个



薄凸透镜,一个平面反射镜,两者距离等于透镜焦距,则不论物放在何处,两个最后像的大小都相等.

(3) 焦距分别为  $f_1$  和  $f_2$  的两个薄透镜  $L_1$  和  $L_2$ .

由物  $A$  发出的向右光线经  $L_1$  成第一个最后像.

$$v_1 = \frac{u_1 f_1}{u_1 - f_1}$$

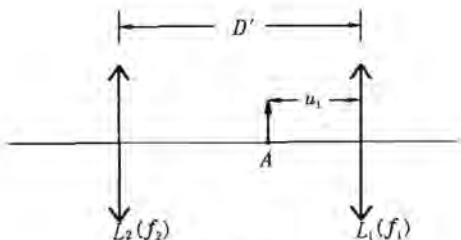


图 4-1-66

式中  $v_1$  表示从  $L_1$  向右的距离 ( $v_1 > 0$  表示像在  $L_1$  的右方).

由物  $A$  发出的向左光线经  $L_2$  成第二个最后像.

$$u_2 = D' - u_1, \quad v_2 = \frac{(D' - u_1) f_2}{D' - u_1 - f_2}$$

$v_2$  表示从  $L_2$  向左的距离 ( $v_2 < 0$  时表示像在  $L_2$  的右方). 两个像大小相等, 则

应有

$$\frac{v_1}{u_1} = \pm \frac{v_2}{u_2}$$

$$\frac{f_1}{u_1 - f_1} = \pm \frac{f_2}{D' - u_1 - f_2} \quad (2)$$

若②式中取“+”号,

$$f_1 (D' - u_1 - f_2) = f_2 (u_1 - f_1)$$

$$f_1 (D' - u_1) = f_2 u_1$$

$$D' = \frac{f_1 + f_2}{f_1} u_1$$

这表示  $u_1$  必须满足上式才能得到两个等大的像, 与题目要求不一致, 即这种组合与配置不符合要求.

若②式中取“-”号,

$$\frac{f_1}{u_1 - f_1} = - \frac{f_2}{D' - u_1 - f_2}$$

$$f_1 (D' - u_1 - f_2) = - f_2 (u_1 - f_1)$$

$$f_1 D' = (f_1 - f_2) u_1 + 2 f_1 f_2$$

$$D' = \frac{f_1 - f_2}{f_1} u_1 + 2 f_2$$

按题意, 上式应对所有的  $u_1$  值均成立, 故要求  $f_1 = f_2$ , 从而  $D' = 2 f_2 = 2 f_1$ , 且



由  $D' > 0$  可知

$$f_1 = f_2 > 0.$$

透镜应为凸透镜. 因此, 两个元件也可以是两个焦距相等的薄凸透镜, 两者距离等于其焦距的 2 倍时, 物放在两元件间任何位置, 均能满足两个最后像的大小都相等的要求.

**题 25** (1999·全国物理竞赛题) 在光导纤维制造过程中, 由于拉伸速度不均匀, 会使拉出的光纤偏离均匀的圆柱体, 而呈圆锥状. 现把一段长为  $L$ , 折射率为  $n = 1.5$  的光纤简化为细长圆锥体的一部分, 其顶角很小, 两端截面的半径分别是  $R_1$  和  $R_2$ ,  $R_1$  略大于  $R_2$ . 图 4-1-67 是过光纤轴线的剖面图.

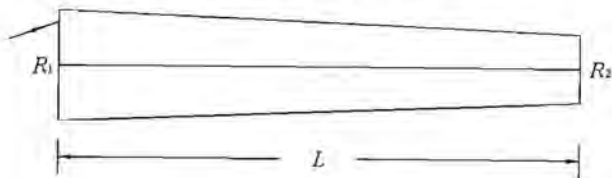


图 4-1-67

(1) 若将该光纤置于空气中, 求在图示平面内从大头入射并能从小头出射的光线的最大入射角.

(2) 计算以最大的入射角入射的光线在光纤中的反射次数.

**【分析】** 由于光线在光导纤维中是利用全反射传输的, 根据反射光线的特点, 我们可用等效法将问题简化. 在解题过程中要注意正确运用几何关系及三角函数的有关公式.

**【解】** (1) 设光纤的半顶角为  $\alpha$ , 光线从  $X$  处入射, 经多次反射, 从  $Y'$  处出射, 可利用反射光线的特点, 用等效法等效为从  $Y$  处出射, 如图 4-1-68.

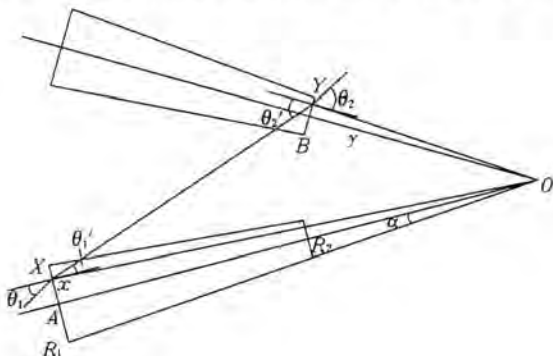


图 4-1-68

在  $\triangle OXY$  中, 应用正弦定理有

$$OX \sin \angle OXY = OY \sin \angle OYX. \quad (1)$$

由于  $X$  点法线平行于  $OA$ ,  $Y$  点的法线平行于  $OB$ , 有

$$\angle OXY = \theta_1' + \angle AOX.$$

$$\angle OYX = \frac{\pi}{2} - \theta_2' + \angle OYB.$$

将①式展开

$$OX(\sin\theta_1' \cos\angle AOX + \cos\theta_1' \sin\angle AOX) = OY(\cos\theta_2' \cos\angle OYB + \sin\theta_2' \sin\angle OYB). \quad (2)$$

因为

$$OX \cos\angle AOX = OA = R_1 \cot\alpha,$$

$$OX \sin\angle AOX = x,$$

$$OY \sin\angle OYB = y. \quad (3)$$

$$OY \cos\angle OYB = OB = R_2 \cot\alpha.$$

将③式代入②式.

$$\text{得} \quad R_1 \sin\theta_1' \cot\alpha + x \cos\theta_1' = y \cos\theta_2' + R_2 \sin\theta_2' \cot\alpha.$$

$$\text{或} \quad R_1 \sin\theta_1' + x \cos\theta_1' \tan\alpha = y \cos\theta_2' \tan\alpha + R_2 \sin\theta_2'.$$

由于  $x \cos\theta_1' < R_1$ ,  $y \cos\theta_2' < R_2$ ,  $\alpha$  很小, 故有

$$R_1 \sin\theta_1' = R_2 \sin\theta_2'.$$

再两边乘  $n(n_0=1)$

$$R_1 \sin\theta_1 = R_2 \sin\theta_2. \quad (4)$$

最大入射角: 从④可知  $R_2 < R_1$ ,  $\theta_2 > \theta_1$ .

决定  $R_1$  处最大入射角将依赖于  $\theta_2$ . 在  $R_2$  处, 其侧面边界的全反射角  $i'$  为

$$\sin i' = \frac{1}{n}.$$

$$\text{可得} \quad \sin\theta_2' = \sin(90^\circ - i') = \cos i' = (1 - \sin^2 i') = \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n}.$$

$$\sin\theta_2 = \sqrt{n^2 - 1}.$$

因为  $n=1.5$ , 故取  $\sin\theta_2=1$ . 则  $R_1$  处入射光线的最大入射角为

$$\sin\theta_1 = \frac{R_2}{R_1}. \quad (5)$$

(2) 计算反射的次数

$$\alpha = \frac{R_1 - R_2}{L}.$$

光线每反射一次, 则角度变化

$$\theta_{i+1}' = \theta_i' + 2\alpha. \quad (6)$$

反射次数

$$N = \frac{\theta_2' - \theta_1'}{2\alpha}.$$

$$\sin\theta_2' = \frac{1}{n}, \sin\theta_1' = \frac{R_1}{nR_2}.$$

$$N = \frac{\arcsin \frac{1}{n} - \arcsin \frac{R_1}{nR_2}}{2(R_1 - R_2)} L.$$



### 题 26 (2007·亚洲物理竞赛题)

#### 一种奇异介质的光学性质

介质的光学性质是由其相对介电常数( $\epsilon_r$ )及相对磁导率( $\mu_r$ )描述的. 常规介质(如水、玻璃等)的 $\epsilon_r$ 及 $\mu_r$ 均大于0, 这些介质对光来说通常是透明的, 当光线由空气入射到常规介质的表面上时会产生折射现象. 1967年, 前苏联物理学家 V. G. Veselago 证明: 假设有一种介质的 $\epsilon_r$ 和 $\mu_r$ 均为负数, 这种介质具有许多与众不同的甚至是不可思议的光学性质. 21世纪以来, 经过科学家们的不懈努力, 这种奇异的光学介质终于在实验室中被研制出来了. 现在, 对这种奇异介质的研究是当前科学上的一个前沿课题. 下面, 我们通过对几个问题的解答, 初步了解一下这种奇异光学介质的基本的光学性质. 可以严格证明,  $\epsilon_r$ 和 $\mu_r$ 均小于0的奇异介质有如下重要性质: 在此介质中, 当一束光波向前传播一段距离 $\Delta$ 时, 光波的相位减少 $\sqrt{\epsilon_r \mu_r} k \Delta$ ; 而同样的情况在 $\epsilon_r$ 和 $\mu_r$ 均大于0的常规介质中发生时, 光波的相位增加 $\sqrt{\epsilon_r \mu_r} k \Delta$ . 这里开根号时取正根,  $k$ 是光波的波矢. 在下面的题目中, 我们假设空气的相对介电常数及相对磁导率均为1.

1. (1) 根据上述性质, 证明图 4-1-69 所示的折射光束对于从空气中入射到奇异介质(相对介电常数为 $\epsilon_r < 0$ , 相对磁导率为 $\mu_r < 0$ )是合理的.

(2) 对于图 4-1-69, 写出折射角 $\theta_r$ (折射光与法线的夹角)与入射角 $\theta_i$ 的关系.

(3) 当光波从奇异介质中入射到空气中时, 证明图 4-1-70 所示的折射光束的方向是合理的.

(4) 对于图 4-1-70, 写出折射角 $\theta_r$ (折射光与法线的夹角)与入射角 $\theta_i$ 的关系.

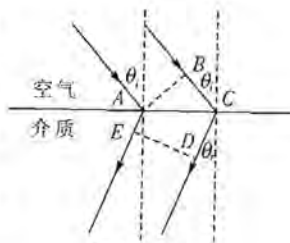


图 4-1-69

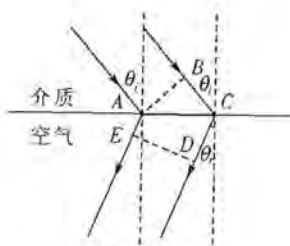


图 4-1-70

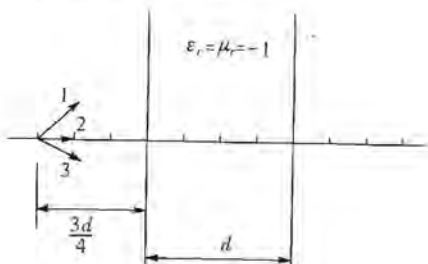


图 4-1-71

2. 如图 4-1-71 所示, 空气中放置一块厚度为 $d$ 的 $\epsilon_r = \mu_r = -1$ 的平板. 在其左边 $\frac{3d}{4}$ 处放置一个点光源, 准确画出由此光源发射出来的三条光线的光路图. (注意: 在题目所设的条件下光线在介质的表面不发生反射)

3. 如图 4-1-72 所示, 平行板谐振腔是由一块全反射的平板(图中板 1)与一块高反射的平板(图中板 2)平行放置组成的. 可设想平行光波从位于板 1 处的光源发

出,则光波在腔中多次反射,因光波在板2上不发生全反射,光波每次到达板2时都会透射出一些来(如示意图所示的1,2,3,...).若这些透射出来的波的相位相同,它们就会干涉相长,产生谐振.假设光波在两块板上反射时,反射波比入射波增加相位 $\pi$ .现在,我们在谐振腔的内部平行于两板放置一块厚度为 $0.4d$ 的 $\epsilon_r = \mu_r = -0.5$ 的奇异介质板(图4-1-72中阴影部分),谐振腔的其他部分为空气.我们只考虑光波垂直于平行板的方向传播的情况(图中所画的光路图仅为示意图),试求此谐振腔中所有满足干涉相长的谐振条件的光波的波长(提示:在本题所设的条件下,光波在经过奇异介质板表面时没有反射发生).

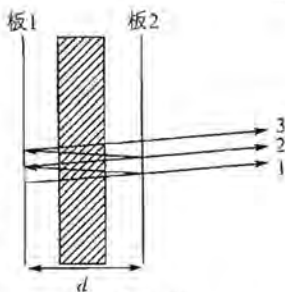


图 4-1-72

4. 如图4-1-73所示,空气中放置一半径为 $R$ 的无限长圆柱(阴影部分),圆柱由一种奇异介质(其 $\epsilon_r = \mu_r = -1$ )构成,圆柱的中心在 $Y$ 轴上.假设在 $X$ 轴上有一激光光源,沿 $Y$ 方向发射细光束,光源的位置由坐标 $x$ 表示.求当 $x$ 满足什么条件时,位于圆柱另一侧的无限大的接收面上不能接收到由光源发出的光信号.

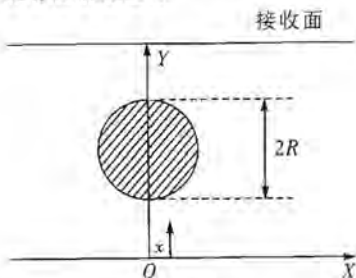


图 4-1-73

**【分析】**这是一道几何光学题,但光是在奇异介质中传播的,因而出现奇特的光学现象.解题涉及相位差等知识.

**【解】** 1. (1) 折射光如图4-1-74所示.

证明:假设 $E-D$ 为折射光的等相位面,根据惠更斯原理,则 $A$ 到 $E$ 点的相位差应与 $B$ 经 $C$ 到 $D$ 的相位差相等.

$$\phi_{AE} = \phi_{BC} + \phi_{CD}. \quad (1)$$

根据提示可以分别计算出这些相位差,有

$$-\sqrt{\epsilon_r \mu_r} k d_{AE} = k d_{BC} - \sqrt{\epsilon_r \mu_r} k d_{CD}. \quad (2)$$

简化可得

$$-\sqrt{\epsilon_r \mu_r} (d_{AE} - d_{CD}) = d_{BC}. \quad (3)$$

因 $d_{BC} > 0$ 及 $\sqrt{\epsilon_r \mu_r} > 0$ ,有

$$d_{AE} < d_{CD}. \quad (4)$$

所以上图画出的折射光示意图是合理的.

(2) 根据图4-1-74,折射角 $\theta_r$ 和入射角 $\theta_i$ 分别满足

$$d_{BE} = d_{AC} \sin \theta_i, \quad d_{CD} - d_{AE} = d_{AC} \sin \theta_r. \quad (5)$$

将⑤代入③可得

$$\sqrt{\epsilon_r \mu_r} \sin \theta_r = \sin \theta_i. \quad (6)$$

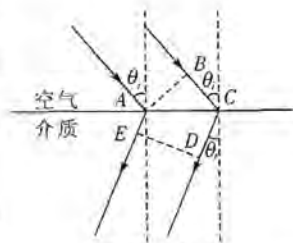


图 4-1-74



(3) 折射光如图 4-1-75 所示.

证明: 假设  $E-D$  为折射光的等相面, 根据惠更斯原理, 则  $A$  到  $E$  点的相位差应与  $B$  经  $C$  到  $D$  的相位差相等.

$$\phi_{AE} = \phi_{BC} + \phi_{CD}. \quad (7)$$

根据提示可以分别计算出这些相位差, 有

$$kd_{AE} = -\sqrt{\epsilon_r \mu_r} kd_{BC} + kd_{CD}. \quad (8)$$

简化可得

$$d_{AE} - d_{CD} = -\sqrt{\epsilon_r \mu_r} d_{BC}. \quad (9)$$

因  $d_{BC} > 0$  及  $\sqrt{\epsilon_r \mu_r} > 0$ , 有

$$d_{AE} < d_{CD}. \quad (10)$$

所以上图画出的折射光示意图是合理的.

(4) 根据图 4-1-75, 折射角  $\theta_r$  和入射角  $\theta_i$  分别满足

$$d_{BC} = d_{AC} \sin \theta_i, \quad d_{CD} - d_{AE} = d_{AC} \sin \theta_r. \quad (11)$$

将⑪代入⑧可得

$$\sin \theta_r = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \sin \theta_i. \quad (12)$$

2. 光路如图 4-1-76 所示.

说明: 光在两个界面处均发生负折射, 且折射角与入射角大小相等. 又据提示, 在两个界面上均没有反射光. 根据这两点, 最后的光路图如图 4-1-76 所示, 即光线在介质内严格会聚到与光源成镜面对称的一点, 又在介质板的另一端严格会聚到与介质内像点成镜面对称的一点.

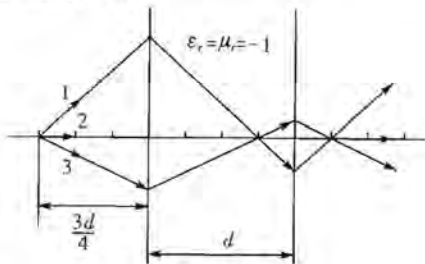


图 4-1-76

3. 相邻两次从右板透射出来的波的相位差为

$$\Delta\phi = 2k(d - 0.4d) - 2 \cdot 0.5k \cdot 0.4d + 2\pi. \quad (13)$$

其中第一项是光波在空气中传播时积累的相位差, 第二项是在奇异介质中传播时积累的相位差, 第三项是光波两次在板上反射时积累的相位差. 利用  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , 上式变为

$$\Delta\phi = 0.8 \times \frac{2\pi}{\lambda} d + 2\pi. \quad (14)$$

根据谐振条件,谐振时波长满足

$$0.8 \times \frac{2\pi}{\lambda} d + 2\pi = m \cdot 2\pi, \quad (15)$$

$$\text{解之可得 } \lambda = \frac{0.8d}{m-1} (m=2, 3, 4, \dots), \quad (16)$$

4. 根据题意,可以画出光路图.考虑当  $x > 0$  时,光路示意图如图 4-1-77 所示.因为奇异介质的  $\epsilon_r = \mu_r = -1$ ,根据第 1 题的结论,我们知道  $\theta_i = \theta_r = \theta'_i = \theta'_r$ .因此,最后的出射光与人射光相比偏折了  $4\theta_i$  的角度.

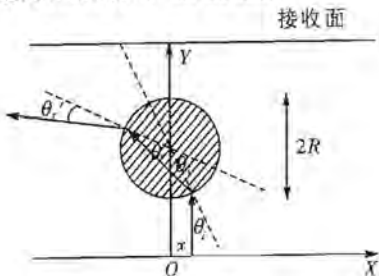


图 4-1-77

已知入射光的方向是朝  $y$  方向,则只有当

$$\frac{\pi}{2} \leq 4\theta_i \leq \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{8} \leq \theta_i \leq \frac{3\pi}{8}. \quad (17)$$

条件满足时,接收平面上不能接收到光信号.注意到

$$\sin\theta_i = \frac{x}{R}. \quad (18)$$

以及  $\sin\theta$  与  $\theta$  在  $[0, \frac{\pi}{2}]$  区间内的单调性一致,可将⑰变为

$$\sin \frac{\pi}{8} \leq \frac{x}{R} \leq \sin \frac{3\pi}{8}. \quad (19)$$

进一步考虑  $\pm x$  的对称性,我们得知,在如下条件

$$R \sin \frac{\pi}{8} \leq |x| \leq R \sin \frac{3\pi}{8}. \quad (20)$$

满足时,由  $X$  轴上发出的光不能到达接收平面.

**题 27** (2006·亚洲物理奥赛题) 两个光焦度(光焦度是透镜焦距的倒数)分别为  $D_1$  和  $D_2$  的薄透镜同轴放置,相距  $L=25$  cm.这个系统能使位于主光轴上接近于  $D_1$  的物形成正立的实像,放大倍数  $\Gamma'=1$ ,如果两个透镜的位置交换,系统仍然形成正立的实像,这时放大倍数为  $\Gamma''=4$ .

(1) 试问两透镜的类型怎样?

(2) 求出两透镜的光焦度差  $\Delta D = D_1 - D_2$ .

**【分析】** 这是一道几何光学问题,解题关键是正确分析两个透镜的组合成像的几种可能性,从而找出符合题设条件的组合.



**【解】** (1) 两透镜的组合有下列三种情形:

- ① 若两者皆为凹透镜, 则所生成的像为一正立的虚像, 和题设不合。  
 ② 若一为凸透镜, 另一为凹透镜, 不论其左右的顺序为何, 则所生成的像有三种可能性: 倒立的实像、正立的虚像或倒立的虚像。这三种结果皆和题设不合。

③ 若两者皆为凸透镜, 则有可能产生正立的实像。

综上所述, 透镜组合的排列如图 4-1-78 所示。

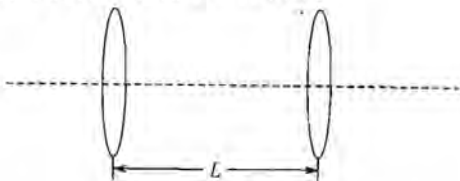


图 4-1-78

(2) 利用薄透镜成像公式  $\frac{1}{l} + \frac{1}{l'} = \frac{1}{f}$ , 可得放大倍数  $m = \frac{l'}{l} = \frac{f}{l-f}$ . 设第一(左)和第二(右)透镜的焦距分别为  $f_1$  和  $f_2$ ,  $l_1$  和  $l_1'$  分别为物体相对于第一透镜的物距和像距, 第一透镜所生成的像转而为第二透镜的物,  $l_2$  和  $l_2'$  分别为相对于第二透镜的物距和像距, 则

$$\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_1'} = \frac{1}{f_1} \quad (1)$$

$$\frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_2'} = \frac{1}{f_2} \quad (2)$$

式中  $l_2 = L - l_1'$ . 由(1)式解出  $l_1'$ , 可得

$$l_2 = L - \frac{l_1 f_1}{l_1 - f_1} = \frac{l_1(L - f_1) - L f_1}{l_1 - f_1} \quad (3)$$

两透镜的放大倍数分别为

$$m_1 = \frac{f_1}{l_1 - f_1} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} m_2 &= \frac{f_2}{l_2 - f_2} = \frac{f_2}{\frac{l_1(L - f_1) - L f_1}{l_1 - f_1} - f_2} \\ &= \frac{f_2(l_1 - f_1)}{l_1(L - f_1 - f_2) - L f_1 + f_1 f_2} \end{aligned} \quad (5)$$

由(4)和(5)两式得该透镜组合的总放大倍数为

$$\Gamma' = m_1 m_2 = \frac{f_1 f_2}{l_1(L - f_1 - f_2) - L f_1 + f_1 f_2} \quad (6)$$

其倒数为

$$\frac{1}{\Gamma'} = \frac{l_1(L - f_1 - f_2) - L f_1}{f_1 f_2} + 1 \quad (7)$$

若将第一和第二透镜对调位置, 则新透镜组合的总放大倍数, 可得自(6)式, 仅



需将其中的  $f_1$  和  $f_2$  互换, 即

$$\Gamma'' = m_1 m_2 = \frac{f_2 f_1}{L_1(L - f_2 - f_1) - L f_2 + f_2 f_1} \quad (8)$$

其倒数为

$$\frac{1}{\Gamma''} = \frac{L_1(L - f_1 - f_2)}{f_1 f_2} - \frac{L}{f_1} + 1. \quad (9)$$

由⑦~⑨式可得

$$\frac{1}{\Gamma'} - \frac{1}{\Gamma''} = L \left( \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} \right) = L(D_1 - D_2). \quad (10)$$

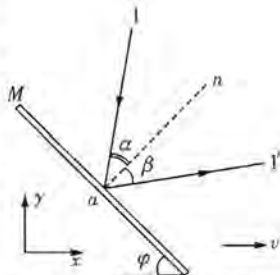
将题设  $\Gamma' = 1$  和  $\Gamma'' = 4$  代入上式, 得

$$D_1 - D_2 = \frac{1}{0.25} \times \left( 1 - \frac{1}{4} \right) = 3 \text{ m}^{-1}.$$

### 题 28 (2005 · 亚洲物理竞赛题)

#### 运动平面镜的光反射

高速运动的平面镜的反射在理论上已经不是什么问题. 爱因斯坦利用洛伦兹变换导出了以速度  $\vec{v}$  移动镜子时的波反射公式. 这个公式也可以用非相对论的方法导出. 考虑如图 4-1-79 所示的反射过程, 平面反射镜以速度  $\vec{v} = v\hat{e}_x$  运动,  $\hat{e}_x$  是实验室参考系  $F$  在  $x$  方向的单位矢量, 镜面相对于其运动方向的角度为  $\varphi$  (注意  $\varphi \leq 90^\circ$ , 参见图 4-1-79).  $n$  是镜面的法线方向. 光线的入射角是  $\alpha$ , 反射角为  $\beta$ , 分别是入射光  $l$  及反射光  $l'$  与镜面法线之间的夹角, 入射角和反射角都是相对实验室坐标系而言的. 可以证明



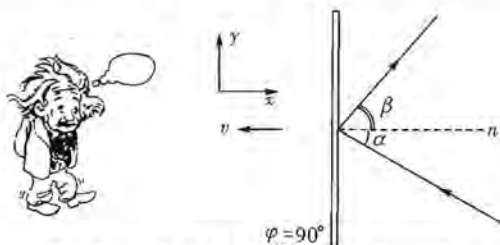
$$\sin\alpha - \sin\beta = \frac{v}{c} \sin\varphi \sin(\alpha + \beta). \quad (1)$$

#### A. 爱因斯坦镜子

大约一个世纪以前, 爱因斯坦导出了被以恒定速度  $\vec{v} = -v\hat{e}_x$  (见图 4-1-80) 运动的平面镜反射的电磁波反射定律. 在以运动的反射镜为参考系的情况下, 爱因斯坦应用洛伦兹变换导出了

$$\cos\beta = \frac{\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \cos\alpha - 2 \frac{v}{c}}{1 - 2 \frac{v}{c} \cos\alpha + \frac{v^2}{c^2}}. \quad (2)$$

请你在不使用洛伦兹变换的前提下由方程①导出上式.

图 4-1-80 以速度  $v$  向左运动的爱因斯坦镜

## B. 频移问题

在与 A 相同的情况下,如果入射到  $M$  的入射光是频率为  $f$  的单色光,求单色光经运动的反射镜反射之间的频率  $f'$ . 如果图 4-1-80 中的  $\alpha=30^\circ$ ,  $v=0.6c$ , 求频移  $\Delta f$  相对于  $f$  的百分比.

## C. 运动镜子的方程

图 4-1-81 表示的是平面镜在  $t_0$  和  $t$  时刻的位置. 由于观察者向左运动,故镜子相对而言向右运动. 光线 1 在  $t_0$  时刻到达  $a$  点,其反射光线为  $1'$ . 光线 2 在  $t$  时刻到达  $b$  点,其反射光线为  $2'$ .  $\overline{ab}$  是入射光在  $t_0$  时刻的波前. 波前  $\overline{ab}$  引起原子的扰动并向外发出子波. 在  $t$  时刻当光束到达  $d$  点时,波前  $\overline{ab}$  引起的扰动即消失.

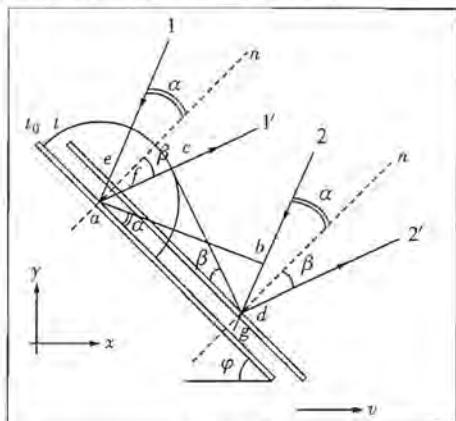


图 4-1-81

参照图 4-1-81 所给的光传播图像或利用其他方法导出方程①.

**【分析】** 这是一道几何光学中由于平面镜的运动引起的反射光线的几个有关问题. 解题涉及光子的动量守恒等知识. 解题过程中尤其应注意的是和角公式、二次方程求解等数学知识的运用.

**【解】** A. 爱因斯坦镜子

在试题所给的①式中,取  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , 并将速度  $v$  改为  $-v$ , 得

$$\sin\alpha - \sin\beta = -\frac{v}{c} \sin(\alpha + \beta). \quad (1)$$

利用和角公式  $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$ , 上式可改写为

$$\left(1 + \frac{v}{c} \cos\beta\right) \sin\alpha = \left(1 - \frac{v}{c} \cos\alpha\right) \sin\beta. \quad (2)$$

将上式平方, 并写成  $\cos\beta$  的二次方程式, 可得

$$\left(1 - 2\frac{v}{c} \cos\alpha + \frac{v^2}{c^2}\right) \cos^2\beta + 2\frac{v}{c} (1 - \cos^2\alpha) \cos\beta + 2\frac{v}{c} \cos\alpha - \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \cos^2\alpha = 0.$$

解之, 得两个根, 分别为

$$(\cos\beta)_1 = \frac{2\frac{v}{c} \cos^2\alpha - \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \cos\alpha}{1 - 2\frac{v}{c} \cos\alpha + \frac{v^2}{c^2}}, \quad (3)$$

和

$$(\cos\beta)_2 = \frac{-2\frac{v}{c} + \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \cos\alpha}{1 - 2\frac{v}{c} \cos\alpha + \frac{v^2}{c^2}}. \quad (4)$$

若平面镜处于静止状态, 即  $v=0$ , 则  $\cos\alpha = \cos\beta$ . 以此检验上面的两个根, 可知④式才是合适的解, 故得

$$\cos\beta = \frac{\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \cos\alpha - 2\frac{v}{c}}{1 - 2\frac{v}{c} \cos\alpha + \frac{v^2}{c^2}}. \quad (5)$$

### B. 频移问题

光在镜面上的反射现象, 可以视为一束光子和镜面之间的碰撞结果. 每一个入射光子的频率为  $f$ , 反射后的频率变为  $f'$ , 因此入射和反射光子的动量分别为

$$p_f = \frac{hf}{c}, \quad p_{f'} = \frac{hf'}{c}. \quad (6)$$

在平行于镜面的方向上, 因光子不受力, 故光子在此方向上的动量分量在碰撞过程中守恒, 得

$$p_f \sin\alpha = p_{f'} \sin\beta, \quad f \sin\alpha = f' \sin\beta. \quad (7)$$

利用⑤式, 可得

$$f \sin\alpha = f' \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \sin\alpha}{\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) - 2\frac{v}{c} \cos\alpha},$$

$$f' = f \frac{1 + \frac{v^2}{c^2} - 2\frac{v}{c} \cos\alpha}{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (8)$$

若取  $\alpha=30^\circ$  和  $v=0.6c$ , 代入上式, 计算得



$$f' = f \frac{1 + 0.36 - 2 \times 0.6 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - 0.36} = 0.50f,$$

$$\frac{\Delta f}{f} = 50\%,$$

## C. 运动镜子的方程

参看上图 4-1-81, 由于  $\overline{ab}$  和  $\overline{cd}$  分别是光波在时刻  $t_0$  和  $t$  时的波前位置, 故

$$\overline{ac} = \overline{bd} = c(t - t_0), \quad (9)$$

又由图上的几何关系, 可得

$$\overline{ed} = \overline{ag}, \sin\alpha = \frac{\overline{bd} + \overline{dg}}{\overline{ag}}, \sin\beta = \frac{\overline{ac} - \overline{af}}{\overline{ag} - \overline{ef}}. \quad (10)$$

参看图 4-1-81 的部分放大图 (见图 4-1-82), 可得

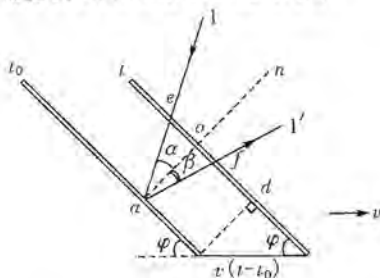


图 4-1-82

$$\overline{dg} = \overline{ae} = \frac{\overline{ao}}{\cos\alpha} = \frac{v(t-t_0)\sin\varphi}{\cos\alpha}. \quad (11)$$

$$\overline{af} = \frac{\overline{ao}}{\cos\beta} = \frac{v(t-t_0)\sin\varphi}{\cos\beta}. \quad (12)$$

在上图的两三角形  $aeo$  和  $afo$  中, 可得

$$\overline{eo} = \overline{ao}\tan\alpha, \overline{of} = \overline{ao}\tan\beta. \quad (13)$$

由于  $\overline{ef} = \overline{eo} + \overline{of}$ , 故

$$\overline{ef} = \overline{ao}(\tan\alpha + \tan\beta) = v(t-t_0)\sin\varphi(\tan\alpha + \tan\beta). \quad (14)$$

将⑨⑪⑫⑭四式代入⑩式, 可得

$$\sin\alpha = \frac{c+v}{c-v} \frac{\sin\varphi}{\cos\alpha} \frac{\overline{ag}}{t-t_0}. \quad (15)$$

$$\sin\beta = \frac{c-v}{c+v} \frac{\sin\varphi}{\cos\beta} \frac{\overline{ag}}{t-t_0} - v\sin\varphi(\tan\alpha + \tan\beta). \quad (16)$$

从⑮和⑯两式中消去  $\frac{\overline{ag}}{t-t_0}$ , 得

$$v \sin \varphi (\tan \alpha + \tan \beta) = c \left( \frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\sin \beta} \right) + v \sin \varphi \left( \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} + \frac{1}{\sin \beta \cos \beta} \right). \quad (17)$$

归并含  $v \sin \varphi$  的各项后,得

$$\frac{v}{c} \sin \varphi \left( \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \right) = \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin \alpha \sin \beta}. \quad (18)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = \frac{v}{c} \sin \varphi \sin(\alpha + \beta).$$

**题 29** (2004·亚洲物理竞赛题) 光纤由半径为  $a$  的圆柱形纤芯和折射率为  $n_2$  的外包层构成. 纤芯由渐变折射率的材料构成, 折射率在  $n=n_1$  到  $n=n_2$  之间 ( $1 < n_2 < n_1$ ),  $n_1$  为轴线上的折射率,  $n_2$  为距轴线  $a$  处的折射率. 渐变折射率满足下列公式

$$n=n(x)=n_1 \sqrt{1-a^2 x^2}.$$

式中  $x$  是离光纤轴线的距离,  $a$  为常数. 光纤置于折射率为  $n_0$  的空气中.

取  $Ox$  轴沿光纤的轴线方向,  $O$  是光纤端点的中心, 如图 4-1-83 所示.

给定  $n_0=1.000$ ,  $n_1=1.500$ ,  $n_2=1.460$ ,  $a=25 \mu\text{m}$ .

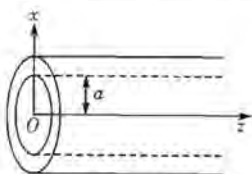


图 4-1-83

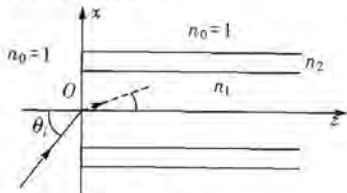


图 4-1-84

1. 一束单色光从  $O$  点以入射角  $\theta_1$  进入光纤, 入射面为  $xOz$  平面, 如图 4-1-84 所示.

(a) 证明光线在光纤中传播轨迹的各点满足关系  $n \cos \theta = C$ . 其中  $n$  是折射率,  $\theta$  是光线与  $Oz$  轴夹角, 并给出  $C$  与  $n_1$  和  $\theta_1$  的关系式.

(b) 利用(a)的结果和三角函数关系  $\cos \theta = (1 + \tan^2 \theta)^{-1/2}$ , 这里  $\tan \theta = \frac{dx}{dz} = x'$  是光线轨迹在点  $(x, z)$  处切线的斜率, 导出  $x'$  的方程, 并用  $n_1, n_2, a$  表示  $a$ . 再将方程两边对  $z$  求导, 导出二阶导数  $x''$ .

(c) 导出满足上述方程的  $x$  与  $z$  的函数关系  $x=f(z)$ , 即光线在光纤里的轨迹方程.

(d) 画出两个不同入射角  $\theta_1$  进入光纤所对应的一个完整周期的轨迹.

2. 光在光纤内的传播.

(a) 求出光可以在光纤纤芯中传播的最大入射角  $\theta_m$ .

(b) 确定  $\theta_1 \neq 0$  时光线与  $Oz$  轴交点的  $z$  的表达式.

3. 在光纤内, 光常以极短的光脉冲形式传递信号(脉冲宽度可以忽略).

(a) 在入射角  $\theta_1 \neq 0$  和  $\theta_1 \leq \theta_m$  的条件下, 确定光由  $O$  点入射传播到与  $Oz$  轴的



第一个交点的时间  $\tau$ 。

第一个交点的坐标  $z$  与时间  $\tau$  的比值称为光信号沿光纤的传播速度。假定该速度随  $\theta$  是单调变化的。

求出  $\theta_i = \theta_{im}$  时的传播速度  $v_m$ 。

再求出光线沿轴线  $Oz$  的传播速度  $v_0$ 。

比较这两个速度。

(b) 会聚于  $O$  点的载波光束以不同的入射角  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \theta_m$ ) 入射, 导出在  $z$  处最高重复频率  $f$  的表达式 (即光脉冲不交叠)。计算在 1 000 m 处两个相继信号脉冲可以分辨的最高重复频率  $f$ 。

注意:

(1) 本题不考虑光的波动性质。

(2) 忽略光纤中光的色散。

(3) 真空中的光速为  $c = 2.998 \times 10^8$  m/s。

(4) 可以使用以下公式

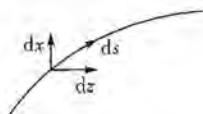


图 4-1-85

① 如图 4-1-85, 在  $xOz$  平面内小弧度元的长度是  $ds = dz \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}$ ;

$$\textcircled{2} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} = \frac{1}{b} \arcsin \frac{bx}{a};$$

$$\textcircled{3} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} = -\frac{x \sqrt{a^2 - b^2 x^2}}{2b^2} + \frac{a^2 \arcsin \frac{bx}{a}}{2b^3}.$$

④  $\arcsin x = \sin^{-1} x$  是正弦函数的反函数, 它取值是正弦为  $x$  的角度中的较小值, 即如果  $y = \arcsin x$ , 那么  $\sin y = x$ 。

**【分析】** 这是一道几何光学的题, 主要涉及光的折射定律, 但解题过程需正确运用三角公式、微积分等数学知识。

**【解】** 1. 一束单色光从  $O$  点以入射角  $\theta_i$  射入光纤, 入射面为  $xOz$  平面

(a) 光从空气经由光纤界面上的  $O$  点, 射入光纤内部, 根据斯涅尔定律, 得

$$n_0 \sin \theta_i = n_1 \sin \theta_1. \quad \textcircled{1}$$

式中  $\theta_1$  是光进入光纤内部的前进方向和  $z$  轴之间的夹角。参看图 4-1-86 由于光纤介质的折射率  $n$  随  $x$  变化, 光的传播轨迹为一曲线。取  $x$  轴上一极小段长度  $dx$  的光纤介质,  $i$  为光轨迹切线方向和  $x$  轴方向之间的夹角,  $\theta$  则为其和  $z$  轴方向之间的夹角,  $i + \theta = \frac{\pi}{2}$ 。由斯涅尔定律可得

$$n \sin i = (n + dn) \sin(i + di). \quad \textcircled{2}$$

$$n \cos \theta = (n + dn) \cos(\theta + d\theta). \quad \textcircled{3}$$

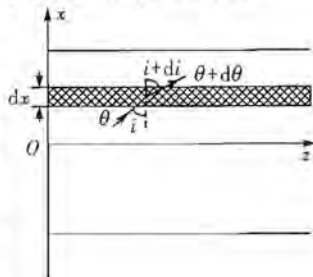


图 4-1-86

在光的轨迹上任一点,皆可写为

$$n \cos \theta = n_1 \sqrt{1 - \alpha^2 x^2} \cos \theta = n_1 \cos \theta_1. \quad (4)$$

利用①式和  $n_0 = 1$ , 得

$$\cos \theta_1 = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_1} = \sqrt{1 - \frac{n_0^2 \sin^2 \theta_1}{n_1^2}} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_1}{n_1^2}}. \quad (5)$$

将⑤式代入④式得

$$n \cos \theta = n_1 \cos \theta_1 = n_1 \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_1}{n_1^2}} = \sqrt{n_1^2 - \sin^2 \theta_1}.$$

即 
$$n \cos \theta = C = \sqrt{n_1^2 - \sin^2 \theta_1}. \quad (6)$$

(b) 利用三角公式  $\cos \theta = (1 + \tan^2 \theta)^{-\frac{1}{2}}$ , ⑥式可写为

$$n_1 \sqrt{1 - \alpha^2 x^2} (1 + \tan^2 \theta)^{-\frac{1}{2}} = C. \quad (7)$$

将上式两边平方, 得

$$(1 - \alpha^2 x^2)(1 + \tan^2 \theta)^{-1} = \frac{C^2}{n_1^2}.$$

由于  $x' = \frac{dx}{dz} = \tan \theta$ , 将其代入上式, 得

$$1 + x'^2 = (1 - \alpha^2 x^2) \frac{n_1^2}{C^2}. \quad (8)$$

将上式对  $z$  微分, 得

$$x'' = \left( \frac{\alpha^2 n_1^2}{C^2} \right) x = 0. \quad (9)$$

由于  $n = n_1 \sqrt{1 - \alpha^2 x^2}$ , 当  $x = 0$  时,  $n = n_1$ ; 而当  $x = a$  时,  $n = n_2 = n_1 \sqrt{1 - \alpha^2 a^2}$ , 可得

$$a = \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{\alpha n_1}.$$

将  $a$  代入⑨式, 得

$$x'' + \left[ \frac{n_1^2 - n_2^2}{\alpha^2 (n_1^2 - \sin^2 \theta_1)} \right] x = 0. \quad (10)$$

(c) ⑩式为标准的简谐运动方程式, 其一般解可写为

$$x = x_0 \sin(pz + q). \quad (11)$$

式中  $p = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2 - \sin^2 \theta_1}}$ , 而常数  $x_0$  和  $q$  决定于边界条件:

当  $z = 0$  时,  $x = 0$ , 得  $q = 0$ ;

在光纤内部, 当  $z = 0$  时,  $x' = \frac{dx}{dz} \Big|_{z=0} = \tan \theta_1$ , 得  $x_0 = \frac{\tan \theta_1}{p}$ .

利用⑥式, 得  $\cos \theta_1 = \frac{\sqrt{n_1^2 - \sin^2 \theta_1}}{n_1}$ , 因此  $x_0$  可写为



$$x_0 = \frac{a(n_1 \sin \theta_1)}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} = \frac{a(n_0 \sin \theta_0)}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} = \frac{a \sin \theta_0}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} \quad (12)$$

在光纤内部的光传播轨迹方程式为

$$x = \frac{a \sin \theta_0}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} \sin \left( \sqrt{\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2 - \sin^2 \theta_0}} \cdot \frac{z}{a} \right) \quad (13)$$

(d) 图 4-1-87 为两条以不同的人射角, 从光纤界面上  $O$  点入射的光线, 在光纤内部的传播轨迹。

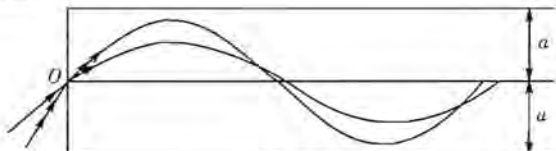


图 4-1-87

## 2. 光在光纤内的传播

(a) 光可在光纤内芯传播的条件为  $x_0 \leq a$ , 由⑫式可得

$$\frac{a \sin \theta_0}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} \leq a, \sin \theta_0 \leq \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (14)$$

因此从空气入射到光纤界面的入射角有一上限  $\theta_{0m}$ , 即

$$\begin{aligned} \sin \theta_{0m} &= \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = \sqrt{1.500^2 - 1.460^2} = 0.3441, \\ \theta_0 &\leq \theta_{0m} = \sin^{-1} 0.3441 = 20.13^\circ. \end{aligned}$$

(b) 光轨迹和  $z$  轴的相交点必须满足  $\rho z = k\pi$ , 式中  $k$  为正整数。当  $\theta_0 \neq 0$  时, 由⑬式可得这些交点的  $z$  坐标为

$$z = \frac{k\pi}{p} = k\pi a \sqrt{\frac{n_1^2 - \sin^2 \theta_0}{n_1^2 - n_2^2}} \quad (15)$$

## 3. 在光纤内, 光常以极短的光脉波形式传递讯号(脉波宽度可以忽略)

(a) 由⑬式可知, 光在光纤内部传播的轨迹, 随不同的入射角而异。因此光的传播速率会因之而有差异。设  $\tau$  代表光从射入的  $O$  点开始, 传播至第一个和  $z$  轴的相交点所需的时间, 这等于光从  $O$  点传播至第一个偏离  $z$  轴最远处所需时间的两倍。参看图 4-1-88, 光沿其传播轨迹前进一极小段长度  $ds$  所需的时间为

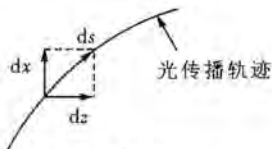


图 4-1-88

$$\begin{aligned} dt &= \frac{ds}{c} = \frac{n}{c} \sqrt{(dx)^2 + (dz)^2} = \frac{n}{c} \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx \\ &= \frac{n}{c} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\tan \theta}\right)^2} dx = \frac{n}{c} \frac{dx}{\sin \theta} \end{aligned}$$

利用⑥式, 并代入  $n = n_1 \sqrt{1 - a^2 x^2}$ , 上式可写为



$$dt = \frac{n_1^2(1-a^2x^2)}{c\sqrt{\sin^2\theta_i - n_1^2a^2x^2}} dx.$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{2} &= \int_0^{x_0} dt \\ &= \frac{n_1^2}{c} \left[ \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\sin^2\theta_i - n_1^2a^2x^2}} - a^2 \int_0^{x_0} \frac{x^2 dx}{\sqrt{\sin^2\theta_i - n_1^2a^2x^2}} \right] \\ &= \frac{n_1^2}{c} (I_1 - a^2 I_2). \end{aligned} \quad (16)$$

式中

$$I_1 = \frac{1}{n_1 a} \sin^{-1} \left( \frac{n_1 a x}{\sin \theta_i} \right) \Big|_0^{x_0} = \frac{\pi a}{2 \sqrt{n_1^2 - n_2^2}}. \quad (17)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{x \sqrt{\sin^2\theta_i - n_1^2a^2x^2}}{2n_1^2a^2} \Big|_0^{x_0} + \frac{\sin^2\theta_i \cdot \sin^{-1} \left( \frac{n_1 a x}{\sin \theta_i} \right)}{2n_1^3a^3} \Big|_0^{x_0} \\ &= \frac{\pi \sin^2\theta_i}{4n_1^3a^3}. \end{aligned} \quad (18)$$

由⑯⑰⑱三式得

$$\tau = \frac{\pi a n_1^2}{c \sqrt{n_1^2 - n_2^2}} \left( 1 - \frac{\sin^2\theta_i}{2n_1^2} \right). \quad (19)$$

按题设,光讯号沿光纤的传播速率定义为  $v = \frac{z_1}{t}$ ,式中  $z_1$  为光轨迹和  $z$  轴第一个相交点的  $z$  坐标,其值可由⑱式中取  $k=1$  得出,即  $z_1 = \frac{\pi}{p} = \pi a \sqrt{\frac{n_1^2 - \sin^2\theta_i}{n_1^2 - n_2^2}}$ . 利用⑱式,可得

$$v = \frac{2c \sqrt{n_1^2 - \sin^2\theta_i}}{2n_1^2 - \sin^2\theta_i}. \quad (20)$$

上式显示光在光纤内部的传播速率,随入射角的不同而呈现单调性的变化.当  $\theta_i = \theta_m$ ,可得讯号的传播速率为

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{2c \sqrt{n_1^2 - \sin^2\theta_m}}{2n_1^2 - \sin^2\theta_m} = \frac{2c \sqrt{n_1^2 - (n_1^2 - n_2^2)}}{2n_1^2 - (n_1^2 - n_2^2)} = \frac{2cn_2}{n_1^2 + n_2^2} \\ &= \frac{2 \times 2.998 \times 10^8 \times 1.460}{1.500^2 + 1.460^2} \text{ m/s} = 1.998 \times 10^8 \text{ m/s}. \end{aligned} \quad (21)$$

由于在  $z$  轴处的折射率为  $n_1$ ,故光沿着  $z$  轴前进的传播速率为

$$v_0 = \frac{c}{n_1}. \quad (22)$$

$$v_0 = \frac{2.998 \times 10^8}{1.500} \text{ m/s} = 1.999 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

$$v_0 > v_m.$$

(b)若入射光纤的光讯号,是以锥形光束的形式会聚在  $O$  点,则这些光线以不同的人射角进入光纤,因而在光纤内部以不同的速率传播.比较入射角分别为  $\theta_i =$



0 和  $\theta_i = \theta_m$  的两束光,首次到达  $z$  轴上同一点的时间差为

$$\begin{aligned}\Delta t &= \frac{z}{v_m} - \frac{z}{v_0} = z \left( \frac{n_1^2 + n_2^2}{2cn_2} \right) - z \left( \frac{n_1}{c} \right) \\ &= \frac{z}{c} \cdot \frac{(n_1 - n_2)^2}{2n_2}.\end{aligned}\quad (23)$$

上式意指一个脉宽很短的光讯号脉波,在进入光纤后首次回复到  $z$  轴时,会形成脉宽为  $\Delta t$  的脉冲.若两个连接射入光纤的光讯号脉波的相隔时间(即延迟)大于  $\Delta t$ ,则这两个讯号将可分开(即分辨).因此光讯号脉波传送频率  $f$  的最大值为

$$f_m = \frac{1}{\Delta t} = \frac{2cn_2}{z(n_1 - n_2)^2}.\quad (24)$$

若取  $z = 1\,000\text{ m}$ , 则

$$f_m = \frac{2 \times 2.998 \times 10^8 \times 1.460}{1\,000 \times (1.500 - 1.460)^2} \text{ MHz} = 547.1 \text{ MHz}.$$

## 第二节 波动光学 光的本性

**题 1** (2008·全国物理预赛题) 光子不仅具有能量,而且还具有动量,频率为  $\nu$  的光子的能量为  $h\nu$ , 动量为  $\frac{h\nu}{c}$ , 其中  $h$  为普朗克常量,  $c$  为光速, 光子射到物体表面时将产生压力作用, 这就是光压. 设想有一宇宙尘埃, 可视为一半径  $R = 10.0\text{ cm}$  的小球, 其材料与地球的相同, 它到太阳的距离与地球到太阳的距离相等. 试计算太阳辐射对此尘埃作用力的大小与太阳对它万有引力大小的比值. 假定太阳辐射射到尘埃时被尘埃全部吸收. 已知地球绕太阳的运动可视为圆周运动, 太阳辐射在单位时间内射到位于地球轨道处的垂直于太阳光线方向的单位面积上的辐射能  $S = 1.37 \times 10^3 \text{ W/m}^2$ , 地球到太阳中心的距离  $r_{SE} = 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$ , 地球表面附近的重力加速度  $g$  取  $10 \text{ m/s}^2$ , 地球半径  $R_E = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$ , 引力恒量  $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ .

**【分析】** 本题涉及万有引力、圆周运动、光子的能量与动量等知识, 分析问题时要应用数学求和的知识.

**【解】** 设宇宙尘埃的质量为  $m$ , 太阳的质量为  $M$ , 则太阳作用于尘埃的万有引力

$$f = G \frac{Mm}{r_{SE}^2}.\quad (1)$$

设地球的密度为  $\rho$ , 地球的质量为  $m_E$ . 按题意有

$$\rho = \frac{m_E}{\frac{4}{3}\pi R_E^3}.\quad (2)$$

另有  $G \frac{m_E}{R_E^2} = g$  和  $G \frac{Mm_E}{r_{SE}^2} = m_E \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 r_{SE}.\quad (3)$

式中  $T$  为地球绕太阳做圆周运动的周期,

$$T = 365 \text{ d} \times 24 \text{ h/d} \times 60 \text{ min/h} \times 60 \text{ s/min} = 3.15 \times 10^7 \text{ s}.$$

由式①~③得

$$f = \frac{gR^3}{GR_E} \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 r_{SE}. \quad (4)$$

太阳辐射中含有各种频率的光子. 设单位时间内, 射到尘埃所在处的与太阳辐射垂直的单位面积上频率为  $\nu_i$  的光子数为  $N_i$ , 根据题目所给的  $S$  的定义, 有

$$S = \sum_i N_i h\nu_i. \quad (5)$$

光子不仅具有能量, 还具有动量. 由题意可知, 频率为  $\nu_i$  的光子的动量

$$p_i = \frac{h\nu_i}{c}. \quad (6)$$

光子射到尘埃表面被尘埃吸收, 故光子作用于尘埃的冲量

$$\Delta I_i = p_i. \quad (7)$$

单位时间内射到尘埃单位面积上的各种频率的光子对尘埃的总冲量

$$\Delta I = \sum_i N_i \Delta I_i = \sum_i N_i p_i. \quad (8)$$

也就是压强. 由于尘埃的表面是球面, 球面上各部分并不都与太阳辐射垂直, 但射到球面上的光辐射等于射到垂直于太阳辐射的球面上大圆面的光辐射, 故太阳辐射作用于尘埃的力

$$F = \pi R^2 \Delta I. \quad (9)$$

由式⑤~⑨得

$$F = \frac{\pi R^2}{c} S. \quad (10)$$

由④⑩两式得

$$\frac{F}{f} = \frac{GR_E ST^2}{4\pi g R c r_{SE}}. \quad (11)$$

代入有关数据得

$$\frac{F}{f} = 1.0 \times 10^{-6}. \quad (12)$$

**题 2** (2007·全国物理复赛题) 图 4-2-1 所示为杨氏双缝干涉实验的示意图. 取纸面为  $Oyz$  平面,  $y, z$  轴的方向如图所示. 线光源  $S$  通过  $z$  轴, 双缝  $S_1, S_2$  对称分布在  $z$  轴两侧, 它们以及屏  $P$  都垂直于纸面. 双缝间距为  $d$ , 光源  $S$  到双缝的距离为  $l$ , 双缝到屏的距离为  $D, d \ll D, d \ll l$ .

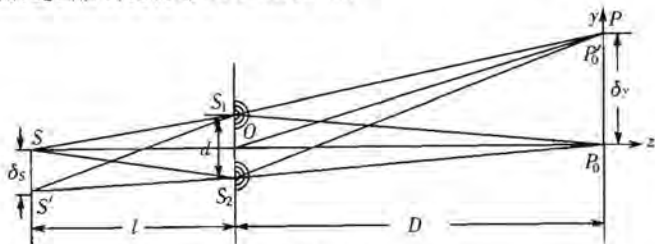


图 4-2-1

(1) 从  $z$  轴上的线光源  $S$  出发经  $S_1, S_2$  不同路径到  $P_0$  点的光程差为零, 相干的结果产生一亮纹, 称为零级亮纹. 为了研究有一定宽度的扩展光源对干涉条纹清



晰度的影响,我们先研究位于轴外的线光源  $S'$  形成的另一套干涉条纹.  $S'$  位于垂直于  $x$  轴的方向上且与  $S$  平行,两者相距  $\delta$ ,则由线光源  $S'$  出发分别经  $S_1$ 、 $S_2$  产生的零级亮纹  $P_0'$  与  $P_0$  的距离  $\delta_y =$  \_\_\_\_\_.

(2)当光源是宽度为  $\omega$  的扩展光源时,可将扩展光源看做由一系列连续的彼此独立的非相干的线光源组成.这样,各线光源对应的干涉条纹将彼此错开,在屏上看到的将是这些干涉条纹的光强相加的结果,干涉条纹图像将趋于模糊,条纹的清晰度下降.假设扩展光源各处发出的光强相同、波长皆为  $\lambda$ .当  $\omega$  增大导致零级亮纹错开到一个干涉条纹间距时,干涉条纹的亮暗将完全不可分辨,则此时光源的宽度  $\omega =$  \_\_\_\_\_.

(3)在天文观测中,可用上述干涉原理来测量星体的微小角直径.遥远星体上每一点发出的光到达地球处都可视为平行光,从星体相对的两边缘点发来的两组平行光之间的夹角  $\theta$  就是星体的角直径.遥远星体的角直径很小.为测量如此微小的角直径,迈克耳孙设计了测星干涉仪,其装置简化为如图 4-2-2 所示.  $M_1$ 、 $M_2$ 、 $M_3$ 、 $M_4$  是四个平面反射镜,它们两两平行,对称放置,与入射光 ( $a$ 、 $a'$ ) 方向成  $45^\circ$  角.  $S_1$  和  $S_2$  是一对小孔,它们之间的距离是  $d$ .  $M_1$  和  $M_2$  可以同步对称调节来改变其中心间的距离  $h$ . 双孔屏到观察屏之间的距离是  $D$ .  $a$ 、 $a'$  和  $b$ 、 $b'$  分别是星体上相对着的两边缘点发来的平行光束. 设光线  $a$ 、 $a'$  垂直双孔屏和像屏,星光的波长是  $\lambda$ . 试导出星体角直径  $\theta$  的计算式.

注:将星体作为圆形扩展光源处理时,研究扩展光源的线度对干涉条纹图像清晰度的影响会遇到数学困难,为简化讨论,本题拟将扩展光源作为宽度为  $\omega$  的矩形光源处理.

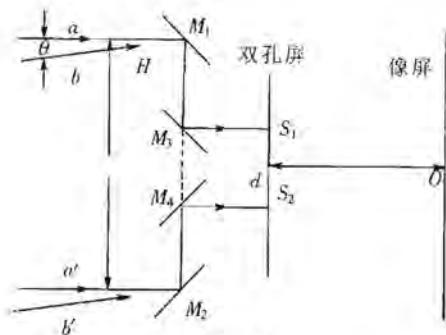


图 4-2-2

**【分析】** 这是一道有关光的双缝干涉问题,要依据双缝干涉的规律解题.

**【解】** (1)求  $S'$  经双缝产生的干涉图像的零级亮纹  $P_0'$  的位置. 设  $P_0'$  点的坐标为  $y_0'$ , 它也就是光源  $S'$  与  $S$  分别对应的干涉条纹的零级亮纹之间的距离,即

$$P_0'P_0 = \delta_y = y_0' - 0 = y_0'.$$

由双缝的  $P_0'$  点的光程差  $\Delta_0 = \overline{S_2P_0'} - \overline{S_1P_0'}$ . 从  $S_1$  作  $S_2P_0'$  的垂线交于  $H$  点,  $\triangle OP_0'P_0'$  与  $\triangle S_1HS_2$  相似(见图 4-2-3). 因  $D \gg d$ , 故有

$$\Delta_1 = \frac{d}{D} y_0' = \frac{d}{D} \delta_y. \quad (1)$$

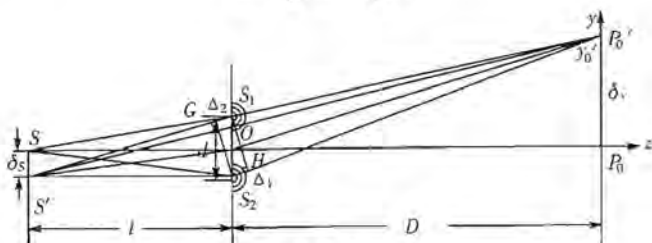


图 4-2-3

从  $S_2$  作  $S'S_1$  的垂线交于  $G$ ,  $S'$  到双缝的光程差

$$\Delta_2 = \overline{S'S_2} - \overline{S'S_1}. \quad (2)$$

$\triangle SOS'$  和  $\triangle S_1GS_2$  相似(见图 4-2-3). 因  $l \gg d$ , 故有

$$\Delta_2 = \overline{S'S_2} - (\overline{S'G} + \overline{GS_1}) = -\overline{GS_1} = -\frac{d}{l} \delta_y. \quad (3)$$

对满足零光程差条件的  $P_0'$  而言, 有

$$(\overline{S'S_2} + \overline{S_2P_0'}) - (\overline{S'S_1} + \overline{S_1P_0'}) = \Delta_1 + \Delta_2 = \frac{d}{D} \delta_y - \frac{d \delta_y}{l} = 0.$$

由此得

$$\delta_y = \frac{D}{l} \delta_y. \quad (4)$$

(2) 在线光源情况下, 可以导出双缝干涉的相邻两亮纹的间距为

$$\Delta y = \frac{D}{d} \lambda. \quad (5)$$

不同的  $\delta_y$  值对应着扩展光源中不同位置的线光源. 不难证明, 它们经双缝产生干涉条纹的间距  $\Delta y$  均如⑤式所示. 宽度为  $\omega$  的扩展光源是由一系列  $\delta_y$  值不同的连续分布的相互独立的线光源构成. 因此, 扩展光源在观察屏上产生的干涉图像的结果是由每个线光源产生干涉条纹的强度相加而成. 当扩展光源宽度为  $\omega$ , 对于光源最边缘点有

$$\delta_y = \omega. \quad (6)$$

代入④式, 得

$$\delta_y = \frac{D}{l} \omega. \quad (7)$$

若

$$\Delta y = \delta_y, \quad (8)$$

则相当于扩展光源最边缘的线光源产生的干涉条纹错开了一个条纹间距. 由于扩展光源各部分产生的干涉条纹的光强分布都相同, 各套干涉条纹强度相加的结果使屏上各处光强相等, 变得一片模糊而无法分辨. 由⑤⑦两式求得, 为使条纹能被分辨, 扩展光源允许的最大宽度



$$\omega = \frac{l}{d} \lambda.$$

⑨

(3)解法一:如图 4-2-4 所示,  $aa'$  是由扩展光源上端边缘发出的平行光,  $bb'$  是由扩展光源下端边缘发出的平行光.

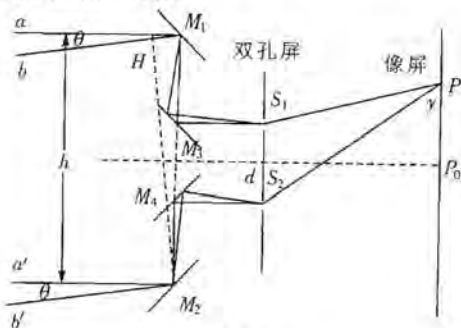


图 4-2-4

设  $ab$  光线交于  $M_1$  点,  $a'b'$  光线交于  $M_2$  点. 在  $aa'$  光束中, 光线  $a$  经过  $M_1 \rightarrow M_3 \rightarrow S_1 \rightarrow P$  到达观察屏上的  $P$  点; 光线  $a'$  经过  $M_2 \rightarrow M_4 \rightarrow S_2 \rightarrow P$  也到达观察屏上的  $P$  点. 两相干光波产生干涉, 在观察屏上产生一套干涉条纹. 同理, 平行光束  $bb'$  在观察屏上产生另一套干涉条纹. 从扩展光源不同部位发出的倾角在  $0 \sim \theta$  之间不同角度入射的平行光束, 经迈克耳孙测星仪相应的反射镜走过不同路径到双孔, 然后在观察屏上产生很多套干涉条纹. 这些干涉条纹光强度彼此相加, 屏幕上就形成了光强度的分布图像. 根据第(2)小题的结果, 其清晰度取决于来自扩展光源上下边缘发出的平行光  $aa'$  与  $bb'$  分别在屏幕上产生两套干涉条纹的相对位置的错开程度.

由对称性考虑, 平行光束  $aa'$  中两条光线  $a$  和  $a'$  在观察屏上  $P_0$  点处的光程差为零, 即平行光  $aa'$  产生的那套干涉条纹的零级亮纹就在  $P_0$  点处. 再讨论以倾角  $\theta$  斜入射的平行光束  $bb'$  通过整个光学装置后在观察屏上某点发生干涉时的光程差. 在光束  $bb'$  中, 光线  $b$  入射到  $M_1$  点的光线经在  $M_3$  点处反射到达  $S_1$  点; 从  $M_1$  点算起所经光程为  $\overline{M_1 M_3} + \overline{M_3 S_1}$ ; 光线  $b'$  入射到  $M_2$  点的光线经在  $M_4$  点处反射到达  $S_2$  点, 从  $M_2$  点算起所经光程为  $\overline{M_2 M_4} + \overline{M_4 S_2}$ . 由对称性可得

$$\overline{M_1 M_3} + \overline{M_3 S_1} = \overline{M_2 M_4} + \overline{M_4 S_2}. \quad (1)$$

也就是说, 从  $M_1$  和  $M_2$  算起, 光线  $b$  和  $b'$  到达  $S_1$ 、 $S_2$  两点的光程是相等的, 但在到达  $M_1$ 、 $M_2$  两点时两者的相位却不同. 由  $M_2$  点作斜入射光线  $bM_1$  的垂线并与  $bM_1$  交于  $H$  点,  $M_2$  与  $H$  点的相位相等. 因此, 斜入射的两条平行光线  $b$  和  $b'$  到达  $S_1$ 、 $S_2$  两点时的相位差是光程差  $\overline{HM_1}$  引起的:

$$\Delta l' = \Delta(\overline{M_2 M_4 S_2}) - \Delta(\overline{HM_1 M_3 S_1}) = -\overline{HM_1} = -h\theta. \quad (2)$$

从扩展光源下边缘发出的平行光束斜入射到测星干涉仪, 经双孔后发出的相干光在观察屏上坐标为  $y$  (坐标原点取为  $P_0$  点) 的  $P$  点处引起的光程差

$$\Delta = \Delta_1' + \Delta_1 \approx -h\theta + \frac{d}{D}y, \quad (3)$$

其零级亮纹所在位置  $P_0'$  对应的光程差  $\Delta = 0$ . 故  $P_0'$  的坐标

$$y_0' = h\theta \frac{D}{d}. \quad (4)$$

即平行光  $aa'$  与  $bb'$  产生的干涉条纹的零级亮纹(也是两套条纹)错开的距离

$$\delta_y = h\theta \frac{D}{d}. \quad (5)$$

在线光源情况下,可以导出双孔干涉的相邻两亮纹的间距为

$$\Delta y = \frac{D}{d}\lambda. \quad (6)$$

当两者错开一个条纹间隔,即  $\Delta y = \delta_y$  时,代入⑥式(星光波长采用  $\bar{\lambda}$ ),得

$$\theta = \frac{\bar{\lambda}}{h}. \quad (7)$$

远处的星体作为扩展光源发出的光(把实际星体都看做均匀亮度的圆形扩展光源,通过调节  $h$  使屏幕上的干涉条纹消失,即各处强度完全相等.此时,通过数学计算,用迈克耳孙测星仪测量得的星体角直径  $\theta = \frac{1.22\bar{\lambda}}{h}$ ),经过测量仪到达双孔,在屏上观察到干涉条纹的清晰度下降.由小到大调节  $M_1$ 、 $M_2$  两点之间的距离  $h$ ,当屏幕上条纹消失时,记下此时  $h$  的值并代入⑦式,就可能确定扩展光源角直径  $\theta$  的大小.

解法二:如图 4-2-5 所示,对反射镜  $M_1$  和  $M_3$  而言,找出  $S_1$  对  $M_3$  的中间像  $S_1''$  和对  $M_1$  所成的像  $S_1'$  以及光线  $a$  分别在  $M_1$ 、 $M_3$  上的反射点  $F$  和  $G$ . 由物像对称性可知,  $\overline{GS_1} = \overline{GS_1''}$ ,  $\overline{FS_1'} = \overline{FS_1''}$ , 故

$$\overline{FS_1'} = \overline{FG} + \overline{GS_1'}$$

即从光线  $a$  上一点到  $S_1'$  和到  $S_1$  的光程相等. 同理可证,从光线  $b$  上某点到  $S_1'$  和到  $S_1$  的光程相等. 对  $M_2$  和  $M_4$  (图中未画出)而言,从光线  $a'$  上一点到  $S_2'$  和  $S_2$  的光程相等;从光线  $b'$  上某点到  $S_2'$  和到  $S_2$  的光程相等.

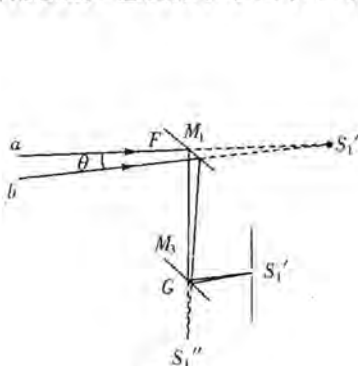


图 4-2-5



图 4-2-6



因此,光线  $a$  到  $S_1$  处与光线  $a'$  到  $S_2$  处引起的光程差  $\Delta L_a$  与没有反射镜  $M_1$  和  $M_2$  时两光线到  $S_1'$ 、 $S_2'$  处的光程相等,因  $a$  和  $a'$  垂直双孔屏,故

$$\Delta L_a = 0. \quad (1)$$

通过双孔  $S_1$  和  $S_2$  后,光线  $a$  和  $a'$  在  $P_0$  的光程差

$$\Delta L_a' = 0. \quad (2)$$

平行光束  $bb'$  斜入射时,可从  $S_1'$  和  $S_2'$  处求  $b$ 、 $b'$  两光线到达  $S_1$  和  $S_2$  处的光程差  $\Delta L_b$ . 由  $S_2'$  作  $bS_1'$  的垂线  $S_2'H$  (见图 4-2-6), 有

$$\Delta L_b = \overline{HS_1'} = h \sin \theta \approx h\theta. \quad (3)$$

这说明光线  $b'$  超前于光线  $b$ . 通过双孔  $S_1$ 、 $S_2$  后光线  $b$  和  $b'$  射出的相干光线在屏幕上形成的零级亮纹不可能位于  $P_0$  点处,因为两者到达双孔前光线  $b'$  已超前了光线  $b$ , 如图 4-2-7 所示.

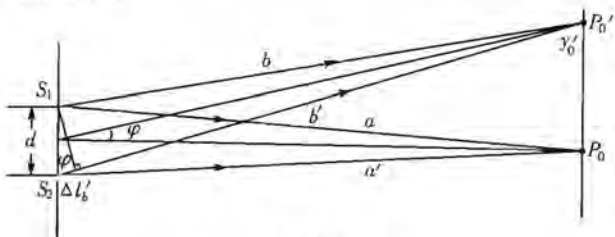


图 4-2-7

光线  $b'$  经过  $S_2$  孔后要多走一段光程来抵消前面的相位差,以达到与光线  $b$  在没有光程差的情况下相交于远方屏幕上,形成干涉零级亮纹. 该点所对应的  $b'$  经过  $S_2$  孔后多走的光程

$$\Delta L_b' = \overline{S_2 P_0'} - \overline{S_1 P_0'} = d \sin \varphi \approx d\varphi. \quad (4)$$

从  $\Delta L_b = \Delta L_b'$  可求得平行光束  $bb'$  经双孔后在观察屏上的干涉零级条纹位置  $P_0'$ . 由③、④两式得

$$\varphi = \frac{h}{d} \theta. \quad (5)$$

$P_0'$  点的位置坐标

$$y_0' = D \tan \varphi \approx D\varphi. \quad (6)$$

由小到大调节反射镜  $M_1$  和  $M_2$  之间的距离(即  $S_1'$ 、 $S_2'$  之间的距离)  $h$ , 直到屏幕上的干涉条纹消失,即各处强度完全相等,记下此时  $h$  的值. 这时,相干光  $bb'$  在屏幕上零级亮纹位置  $P_0'$  与  $P_0$  点的距离

$$\overline{P_0 P_0'} = y_0' - 0 = \delta_y = D\varphi. \quad (7)$$

当  $\overline{P_0 P_0'}$  等于条纹间隔  $\Delta y$ , 即

$$\overline{P_0 P_0'} = \frac{D}{d} \lambda. \quad (8)$$

时,代入⑦式,得



$$\varphi = \frac{\bar{\lambda}}{d} \quad (9)$$

由⑤⑨两式得

$$\theta = \frac{\bar{\lambda}}{h} \quad (10)$$

**解法三** 根据第(2)小题的结果,为使条纹能被分辨,扩展光源的允许宽度  $\omega = \frac{l}{d}\lambda$ ,从而扩展光源对双缝中心的张角

$$\theta' = \frac{\omega}{l} = \frac{\lambda}{d} \quad (1)$$

如图 4-2-5 所示,对平面镜  $M_1$  和  $M_2$  而言,找出  $S_1$  对  $M_2$  的中间像  $S_1''$  和对  $M_1$  所成的像  $S_1'$  以及光线  $a$  分别在  $M_1$ 、 $M_2$  上的反射点  $F$  和  $G$ . 由物像对称性可知,  $\overline{GS_1} = \overline{GS_1''}$ ,  $\overline{FS_1'} = \overline{FS_1''}$ , 故

$$\overline{FS_1'} = \overline{FG} + \overline{GS_1''}$$

即从光线  $a$  上一点到  $S_1'$  和到  $S_1$  的光程相等. 同理可证,从光线  $b$  上某点到  $S_1'$  和到  $S_1$  的光程相等. 对  $M_2$  和  $M_1$  (图中未画出)而言,从光线  $a'$  上一点到  $S_2'$  和到  $S_2$  的光程相等;从光线  $b'$  上某点到  $S_2'$  和到  $S_2$  的光程相等. 从分析可知,  $S_1'$  为  $S_1$  经  $M_2$  和  $M_1$  反射的等效像点,  $S_2'$  为  $S_2$  经  $M_1$  和  $M_2$  反射的等效像点,从而可将测星干涉看做是经双孔  $S_1'$ 、 $S_2'$  的等效杨氏双缝干涉,其缝距为

$$\overline{S_1'S_2'} = h \quad (2)$$

由小到大调节反射镜  $M_1$  和  $M_2$  之间的距离(即  $S_1'$  和  $S_2'$  之间的距离)  $h$ ,直到屏幕上的干涉条纹消失,即各处强度完全相等. 这时,只需将测得的  $h$  直接替换①式中的  $d$ ,即可得计算星体角直径的公式

$$\theta = \frac{\bar{\lambda}}{h} \quad (3)$$

与前两种解法的结果相同.

**题 3** (2002·全国物理竞赛题) 在相对于实验室静止的平面直角坐标系  $S$  中,有一个光子,沿  $x$  轴正方向射向一个静止于坐标原点  $O$  的电子. 在  $y$  轴方向探测到一个散射光子. 已知电子的静止质量为  $m_0$ ,光速为  $c$ ,入射光子的能量与散射光子的能量之差等于电子静止能量的  $\frac{1}{10}$ .

(1) 试求电子运动速度的大小  $v$ ; 电子运动的方向与  $x$  轴的夹角  $\theta$ ; 电子运动到离原点距离为  $L_0$  (作为已知量)的  $A$  点所经历的时间  $\Delta t$ .

(2) 在电子以(1)中的速度  $v$  开始运动时,一观察者  $S'$  相对于坐标系  $S$  也以速度  $v$  沿  $S$  中电子运动的方向运动(即  $S'$  相对于电子静止),试求  $S'$  测出的  $OA$  的长度.

**【分析】** 此题需用狭义相对论的规律对问题进行分析.

**【解】** (1) 由能量与速度关系及题给条件可知运动电子的能量为



$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 1.10 m_0 c^2. \quad (1)$$

由此可解得

$$v = \frac{\sqrt{0.21}}{1.10} c = 0.417c \approx 0.42c. \quad (2)$$

入射光子和散射光子的动量分别为  $p = \frac{h\nu}{c}$  和  $p' = \frac{h\nu'}{c}$ , 方向如图 4-2-8 所示, 电子的动量为  $mv$ ,  $m$  为运动电子的相对论质量. 由动量守恒定律可得

$$\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cos\theta = \frac{h\nu}{c}. \quad (3)$$

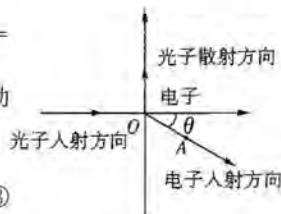


图 4-2-8

$$\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \sin\theta = \frac{h\nu'}{c}. \quad (4)$$

已知

$$h\nu - h\nu' = 0.10 m_0 c^2. \quad (5)$$

由②③④⑤式可解得

$$v = 0.37 m_0 \frac{c^2}{h}.$$

$$v' = 0.27 m_0 \frac{c^2}{h}.$$

$$\theta = \arctan \frac{v'}{v} = \arctan \left( \frac{27}{37} \right) = 36.1^\circ.$$

电子从 O 点运动到 A 所需时间为

$$\Delta t = \frac{L_0}{v} = \frac{2.4L_0}{c}.$$

(2) 当观察者相对于 S 沿 OA 方向以速度  $v$  运动时, 由狭义相对论的长度收缩效应得

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

$$L = 0.91 L_0.$$

**题 4** (2000·全国物理复赛题) 如图 4-2-9 所示, 在真空中有一个折射率为  $n$  ( $n > n_0$ ,  $n_0$  为真空的折射率)、半径为  $r$  的质地均匀的小球. 频率为  $\nu$  的细激光束在真空中沿直线 BC 传播, 直线 BC 与小球球心 O 的距离为  $l$  ( $l < r$ ), 光束于小球体表面的 C 点经折射进入小球 (小球成为光传播的介质), 并于小球表面的 D 点又

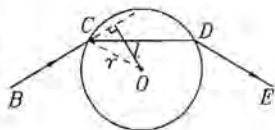


图 4-2-9

经折射进入真空. 设激光束的频率在上述两次折射后保持不变, 求在两次折射过程中激光束中一个光子对小球作用的平均力的大小.

**【分析】** 激光束经介质小球发生两次折射, 传播方向改变了, 即光子的动量发生了变化, 由动量定理  $Ft = \Delta p$ , 即可求得光子所受介质小球的平均作用力, 其反作用力即为光子对小球的平均作用力.

**【解】** 在由直线  $BC$  与小球球心  $O$  所确定的平面中, 激光束两次折射的光路  $BCDE$  如图 4-2-10 所示, 图中入射光线  $BC$  与出射光线  $DE$  的延长线交于  $G$  点. 按照光的折射定律有

$$n_0 \sin \alpha = n \sin \beta. \quad (1)$$

式中  $\alpha$  与  $\beta$  分别是相应的入射角和折射角, 由几何关系还可知

$$\sin \alpha = \frac{l}{r}. \quad (2)$$

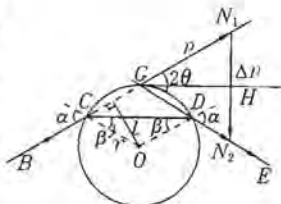


图 4-2-10

激光束经两次折射, 其频率  $\nu$  保持不变, 故在两次折射前后, 光束中一个光子的动量的大小  $p$  和  $p'$  相等, 即

$$p = \frac{h\nu}{c} = p'. \quad (3)$$

式中  $c$  为真空中的光速,  $h$  为普朗克常量, 因射入小球的光束中光子的动量  $p$  沿  $BC$  方向, 射出小球的光束中光子的动量  $p'$  沿  $DE$  方向, 光子动量的方向由于光束的折射而偏转了一个角度  $2\theta$ , 由图中几何关系可知

$$2\theta = 2(\alpha - \beta). \quad (4)$$

若取线段  $GN_1$  的长度正比于光子动量  $p$ ,  $GN_2$  的长度正比于光子动量  $p'$ , 则线段  $N_1N_2$  的长度正比于光子动量的改变量  $\Delta p$ . 由几何关系得

$$\Delta p = 2p \sin \theta = 2 \frac{h\nu}{c} \sin \theta. \quad (5)$$

$\triangle GN_1N_2$  为等腰三角形, 其底边上的高  $GH$  与  $CD$  平行, 故光子动量的改变量  $\Delta p$  的方向, 沿垂直  $CD$  的方向, 且由  $G$  指向球心  $O$ .

光子与小球作用的时间可认为是光束在小球内的传播时间, 即

$$\Delta t = \frac{2r \cos \beta}{\frac{cn_0}{n}}. \quad (6)$$

式中  $\frac{cn_0}{n}$  是光在小球内的传播速率.

按照牛顿第二定律, 光子所受小球作用平均力的大小为

$$f = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{n_0 h \nu \sin \theta}{nr \cos \beta}. \quad (7)$$

按照牛顿第三定律, 光子对小球作用的平均力的大小  $F = f$ , 即

$$F = \frac{n_0 h \nu \sin \theta}{nr \cos \beta}. \quad (8)$$



力的方向由  $O$  指向  $G$ 。由①②④⑧式, 经过三角函数关系运算, 最后可得

$$F = \frac{n_0 l h \nu}{n r^2} \left[ 1 - \sqrt{\frac{r^2 - l^2}{\left(\frac{n r}{n_0}\right)^2 - l^2}} \right].$$

**题 5** (2003·全国物理竞赛题) 一位近视眼朋友不戴眼镜时, 能看清的物体都在距眼睛  $a=20$  cm 以内。他发现, 如果在眼前靠近眼睛处放一个有小圆孔的卡片, 通过小圆孔不戴眼镜看远处的物体时也能看得清晰些。

(1) 若小圆孔直径为  $D$ , 试根据几何光学原理求出近视眼直视远处的一个点物时, 眼的视网膜上产生的光斑的直径。

(2) 再考虑小圆孔的衍射效应, 求小圆孔直径最恰当的大小, 计算时可取可见光的平均波长为 600 nm。

**【分析】** (1) 人眼是一个结构比较复杂的光学系统, 在本题中, 可将人眼简化成一个焦距  $f$  可调的薄透镜和一个可成像的视网膜, 透镜的边缘为瞳孔, 两侧介质均为空气, 视网膜与透镜距离为  $b$ 。

(2) 小圆孔的存在对透镜成像的影响介绍如下: 在几何光学中, 从远处物点射向透镜的、平行于光轴的平行光束将会聚于透镜的焦点上, 这就是像。如果在透镜前放一直径为  $D$  的小圆孔, 则将发生光的衍射, 在焦点处像屏上将出现如图 4-2-11



图 4-2-11

所示的衍射图样, 其中央是一个明亮的圆斑, 圆斑外周是一组亮度逐渐减弱的亮暗相间的同心圆环, 由于这些圆环亮度比中央圆斑弱得多, 观察时可以不予考虑。中央圆斑的半径对薄透镜中心的张角  $\Delta\theta$  的大小与  $D$  有关。理论计算得到

$$\Delta\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}.$$

式中  $\lambda$  是所用光的波长, 这圆斑就是有小圆孔时观察到的物点的“像”, 如图 4-2-12 所示, 由上式可见,  $D$  越大, 像斑就越小, 点物的像就越接近一个点, 物体的像越清晰。反之,  $D$  越小, 点物的衍射像斑就越大, 物体的像就越不清晰。如果观察屏不在焦点处而在焦点附近, 屏上将出现类似的衍射图样, 其中央亮斑对透镜中心的张角  $\Delta\theta$  可近似地用上式计算。

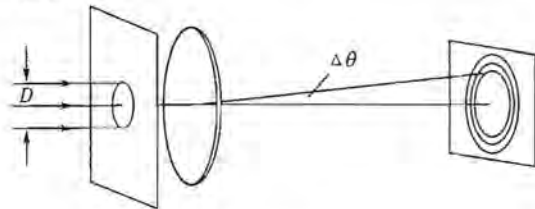


图 4-2-12

**【解】** (1) 图 4-2-13 是近视眼观察能看清的最远的物时的成像光路图, 对近

视眼,通过眼睛调节,能看清的物到眼睛的最大距离为  $a$ ,位于光轴上的物点,将成像在视网膜上;离眼睛无限远,位于光轴上的物点,只能成像在焦点  $F$ ,在视网膜上是一个光斑,这光斑就是物点在视网膜上的模糊的“像”.如果在眼前靠近眼睛处放一个有小圆孔的卡片,小孔使视网膜上的光斑变小,如图 4-2-13 所示.光斑越小,即模糊像点越小,眼睛感觉到的像越清晰.因此,在靠近眼睛处放一个小于瞳孔的小圆孔会使模糊像斑比由瞳孔决定的模糊像斑小,能看得清晰些.

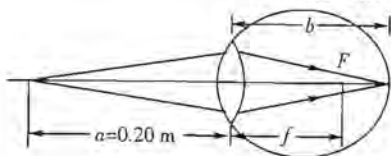


图 4-2-13

下面计算视网膜上光斑的直径.由图 4-2-13,根据透镜公式

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (1)$$

可求得此时的焦距为

$$f = \frac{ab}{a+b} \quad (2)$$

当眼睛处于图 4-2-14 状态观察远物时,从光轴上一物点射来的平行光,经过直径为  $D$  的小孔后将会聚焦点  $F$ ,在网膜上出现直径为  $D'$  的光斑,如图 4-2-14 所示.

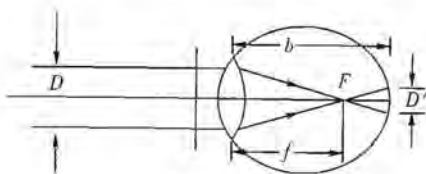


图 4-2-14

由几何关系和式②,可得光斑的直径  $D'$ .

$$D' = \frac{b-f}{f} D = \frac{b}{a} D \quad (3)$$

由式③可知,从几何光学的角度考虑, $D$  越小, $D'$  越小.

(2) 现在考虑衍射问题.入射的平行光束经小孔后在透镜后的网膜上产生衍射光斑,设其直径为  $D''$ ,则根据题给公式的近似,可得

$$D'' = 2b\Delta\theta = 2.44 \frac{\lambda b}{D} \quad (4)$$

由式④可知, $D$  越小, $D''$  越大.将使“像点”变得更为模糊.所以不能用太小的圆孔.最恰当的圆孔直径  $D$  的大小应使视网膜上几何光学模糊的光斑和衍射光斑一样大,即



$$D' = D''.$$

此时“像”最为清晰. 设此时小孔的直径为  $D_0$ , 则有

$$\frac{b}{a} D_0 = 2.44 \frac{\lambda b}{D_0}.$$

$$D_0 = \sqrt{2.44 \lambda a}.$$

以  $\lambda = 600 \times 10^{-9} \text{ m}$ ,  $a = 0.20 \text{ m}$  代入得

$$D_0 = 0.54 \times 10^{-3} \text{ m}.$$

#### 例 6 (2003 · 亚洲物理竞赛题)

##### 光学陀螺仪(回转仪)

1913 年乔治·沙克那(George Sagnac, 1869~1926)利用一环状共振仪, 寻找相对于转动坐标系的以太漂移. 他所获得的结果, 一如历史上所常发生的, 演变成沙克那所未曾想到的一些用途. 其中的一种应用就是光纤陀螺仪(FOG), 它是基于沙克那首先发现的简单物理现象. 与沙克那效应有关的主要物理原理如下: 令两束同频率光绕着旋转的环状光纤反向行进, 它们会有相差(相移). 此相差也可用来测定环的角速度.

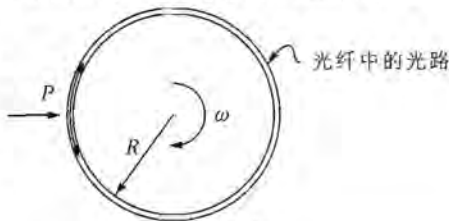


图 4-2-15

如图 4-2-15 所示, 一束光自  $P$  点进入一半径为  $R$  的圆环形光纤, 此光纤置于一沿顺时针方向做等角速度  $\omega$  转动的平台上. 光波在  $P$  点分成两束, 在圆环中反向行进, 其中一束沿顺时针(CW)方向, 另一束沿逆时针(CCW)方向. 光纤材料的折射率为  $\mu$ .

(a) 环转动的线速度比光速小很多, 以致  $(R\omega)^2 \ll c^2$ , 试求时间差  $\Delta t = t^+ - t^-$ , 式中  $t^+$  和  $t^-$  分别代表 CW 和 CCW 光束在环状光纤中绕行一圈(由  $P$  点回到  $P$  点)的时间. 将你的答案以圆环所包围的面积表示.

(b) 求 CW 和 CCW 二光束在转动中的光纤环内绕行一圈的光程差  $\Delta L$ .

(c) 对于半径  $R = 1.0 \text{ m}$  的圆环形光纤,  $\mu = 1.5$ , 求其随地球转动(地球自转)时的最大光程差  $\Delta L$ .

(d) 在(b)题中的测量值, 我们可利用增加光纤的匝数  $N$  的方式, 加以放大. 试求光绕行全部匝数的相位差  $\Delta \theta$ .

第二种光学陀螺仪是“环型激光陀螺仪”(Ring Laser Gyroscope, RLG). 这是将一个发光的激光空腔, 包含在一个总边长为  $L$  的等边三角环中而构成, 如图 4-2-16 所示. 此处的激光光源产生两个放大且反向行进的同频率光. 为维持激光在三角环中继续共振, 环的总边长须等于波长  $\lambda$  的整数倍. 环中另加的“光学标准具”(Etalon), 可导致“环共振器”内频率选择性的耗失, 藉此可以消除或减弱不想要的频率模式.

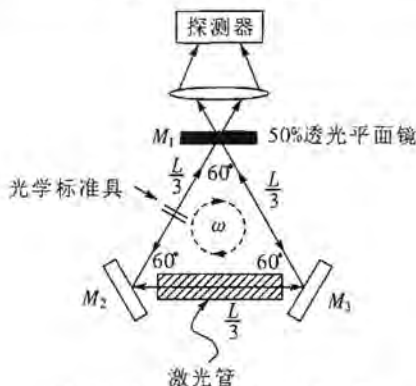


图 4-2-16 环路激光陀螺仪示意图



图 4-2-17 本题所讨论的环路激光陀螺仪实体图

(e) 试求在图 4-2-16 所示的三角环中, 沿顺时针方向和逆时针方向绕行一圈的时间差. 将你的答案以角速度  $\omega$  和三角环所包围的面积  $A$  表示, 并证明此结果和圆形环的结果相同.

(f) 当此三角环以角速度  $\omega$  旋转时(如图 4-2-16 所示), 沿 CW 和 CCW 方向测得的频率会有差异. 试求 CW 和 CCW 两光束之间的拍频  $\Delta f$ , 以  $L$ 、 $\omega$ 、 $\lambda$  表示.

**【分析】** 这是一道关于激光在特定的环状路径中传播, 求时间差、光程差等的问题. 问题的关键是要弄清两束光由于绕行的方向不同致使时间、光程产生差别.

**【解】** (a) 光在静止介质中的速率为  $c' = \frac{c}{\mu}$ , 光在真空中的传播速率为  $c$ . 当介质以速度  $v$  (相对于实验室坐标系) 运动时, 利用相对论的相对速度公式, 可得实验室的静止观察者所见光在介质中的速率为

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} = \frac{c' + v}{1 + \frac{c'v}{c^2}}$$

当环状光纤绕其圆心以等速率  $v = R\omega$ 、沿顺时针(CW)方向转动时, 若激光束沿顺时针方向绕行该光纤, 则应用上式, 可得实验室观察者所见光在介质中的速率为



$$u^+ = \frac{c' + R\omega}{1 + \frac{c'R\omega}{c^2}}$$

若激光束沿逆时针方向(CCW)绕行环状光纤,则实验室观察者所见光在介质中的速率为

$$u^- = \frac{c' - R\omega}{1 - \frac{c'R\omega}{c^2}}$$

参看图 4-2-18,入射光从  $P$  点(分光镜)进入环状光纤,分别沿 CW 和 CCW 两个方向环绕,就实验室的静止观察者而言,由于  $P$  点随光纤转动,故沿 CCW 的激光将在  $P_1$  处再遇到分光镜而透出,设所经历的时间为  $t^-$ ,其所经的路径小于圆周长,等于  $2\pi R - \Delta s_1$ ,式中  $\Delta s_1 = (R\omega)t^-$ ;沿 CW 的激光将行经较圆周长更长的路径,才能在  $P_2$  点再遇分光镜而透出,设所经历的时间为  $t^+$ ,其所经的路径长等于  $2\pi R + \Delta s_2$ ,式中  $\Delta s_2 = (R\omega)t^+$ .由上述可得 CW 光束从进入至离开环状光纤,绕行一圈的时间为

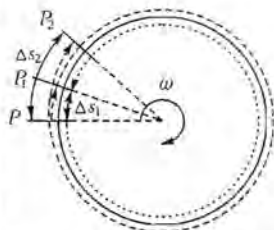


图 4-2-18

由上述可得 CW 光束从进入至离开环状光纤,绕行一圈的时间为

$$\begin{aligned} t^+ &= \frac{2\pi R + \Delta s_2}{u^+} = \frac{2\pi R + (R\omega)t^+}{u^+} \\ &= \frac{2\pi R}{u^+ - R\omega} = \frac{2\pi R}{\frac{c' + R\omega}{1 + \frac{c'R\omega}{c^2}} - R\omega} \\ &= \frac{2\pi R \left[ 1 + \frac{c'(R\omega)}{c^2} \right]}{c' \left[ 1 - \frac{(R\omega)^2}{c^2} \right]} \approx \frac{2\pi R \left[ 1 + \frac{c'(R\omega)}{c^2} \right]}{c'} \end{aligned}$$

CCW 光束从进入至离开环状光纤,绕行一圈的时间为

$$\begin{aligned} t^- &= \frac{2\pi R - \Delta s_1}{u^-} = \frac{2\pi R - (R\omega)t^-}{u^-} \\ &= \frac{2\pi R}{u^- + R\omega} = \frac{2\pi R}{\frac{c' - R\omega}{1 - \frac{c'R\omega}{c^2}} + R\omega} \\ &= \frac{2\pi R \left[ 1 - \frac{c'(R\omega)}{c^2} \right]}{c' \left[ 1 - \frac{(R\omega)^2}{c^2} \right]} \approx \frac{2\pi R \left[ 1 - \frac{c'(R\omega)}{c^2} \right]}{c'} \end{aligned}$$

$t^+$  和  $t^-$  的差值为

$$\Delta t = t^+ - t^- \approx \frac{2\pi R}{c'} \left[ \frac{2c'(R\omega)}{c^2} \right] = \frac{4\pi R^2 \omega}{c^2} = \frac{4A\omega}{c^2}$$

式中  $A = \pi R^2$  为环状光纤所包围的面积.



(b) CW 和 CCW 二光束在转动中的光纤环内, 绕行一圈的光程差为

$$\Delta L = c\Delta t = c \left( \frac{4\pi R^2 \omega}{c^2} \right) = \frac{4\pi R^2 \omega}{c}$$

注: 光程差为光在真空中所行进等效距离。

(c) 当圆环形光纤放置在地球的南极或北极处时, 可得随地球转动(地球自转)时的最大光程差为

$$\Delta L = \frac{4\pi \times 1.0^2}{3.0 \times 10^8} \times \frac{2\pi}{24 \times 60 \times 60} \text{ m} = 3.0 \times 10^{-12} \text{ m}$$

(d) 光绕行  $N$  匝光纤环的相位差为

$$\Delta\theta = \frac{2\pi(N\Delta L)}{\lambda} = \frac{8\pi^2 R^2 N\omega}{c\lambda}$$

式中  $\lambda$  为光在真空中的波长。

(e) 图 4-2-19 显示三角环以等角速率  $\omega$  沿顺时针方向绕中心  $O$  点转动。在  $AC$  线段上任取一点  $P$ , 考虑光在  $P$  点沿该直线方向行进的速度。  $P$  点相对于  $O$  点的速度量值为  $R\omega$ , 其在  $AC$  方向的速度分量为  $R\omega \cos\theta = h\omega$ 。此速度分量为一常数, 和  $P$  点所在的位置无关, 因此就实验室观察者而言, 光在  $AC$  方向上以等速度  $h\omega$  运动。

当光束沿顺时针方向从  $A$  点向  $C$  点前进时, 实验室观察者所见的光速为

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} = \frac{c + v}{1 + \frac{cv}{c^2}} = c$$

这是因为光在三角环上绕行时, 所行经的介质为空气, 其光速几乎等于在真空中的光速, 而光在真空中的传播速率  $c$  为一常数, 和观察者所在的坐标系无关。就实验室观察者而言, CW 光束从  $A$  点前进至  $C$  点所需的时间为

$$\tau^+ = \frac{\frac{L}{3} + (h\omega)\tau^+}{c}, \quad \tau^+ = \frac{\frac{L}{3}}{c - h\omega}$$

同理, CCW 光束从  $A$  点前进至  $C$  点所需的时间为

$$\tau^- = \frac{\frac{L}{3} - (h\omega)\tau^-}{c}, \quad \tau^- = \frac{\frac{L}{3}}{c + h\omega}$$

CW 和 CCW 激光束绕三角环一圈所需的时间, 分别为

$$t^+ = \frac{L}{c - h\omega}, \quad t^- = \frac{L}{c + h\omega}$$

$t^+$  和  $t^-$  的差值为

$$\Delta t = t^+ - t^- = \frac{L}{c - h\omega} - \frac{L}{c + h\omega} = \frac{2Lh\omega}{c^2 - (h\omega)^2} \approx \frac{2Lh\omega}{c^2} = \frac{4A\omega}{c^2}$$

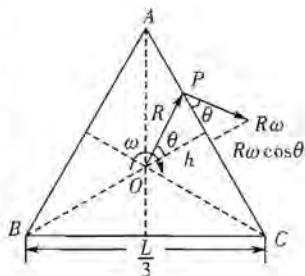


图 4-2-19



式中  $A = \frac{1}{2}Lh =$  三角环的面积. 上式和(a)小题中所得环状光纤的结果相同.

(f) 光在三角环中沿顺时针方向或逆时针方向绕一圈的有效光程分别为

$$L^+ = ct^+ = \frac{cL}{c-h\omega}$$

$$L^- = ct^- = \frac{cL}{c+h\omega}$$

得两者之差为

$$\Delta L = L^+ - L^- = \frac{cL}{c-h\omega} - \frac{cL}{c+h\omega} = \frac{2cLh\omega}{c^2 - (h\omega)^2} \approx 2L \left( \frac{h\omega}{c} \right).$$

维持激光在三角环中共振的条件为, 光绕一圈的光程必须等于波长  $\lambda$  的整数倍, 即  $L^\pm = m\lambda^\pm$ , 或以频率  $f$  表示为

$$f^\pm = \frac{mc}{L^\pm}, \quad (m=1, 2, 3, \dots)$$

CW 和 CCW 两光束之间的拍频为

$$\Delta f = f^+ - f^- = \frac{m}{L^+}c - \frac{m}{L^-}c = mc \left( \frac{L^- - L^+}{L^+L^-} \right) \approx -mc \frac{2L \left( \frac{h\omega}{c} \right)}{L^2}$$

$$\Delta f \approx \frac{mc}{L} \left( \frac{2h\omega}{c} \right) = f \left( \frac{2h\omega}{c} \right) = \frac{c}{\lambda} \left( \frac{2h\omega}{c} \right) = \frac{2h\omega}{\lambda} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \left( \frac{L\omega}{\lambda} \right) = \frac{\sqrt{3}}{9} \left( \frac{L\omega}{\lambda} \right).$$

### 题 7 (2006 · 国际物理竞赛题)

#### 数码相机

一数码相机装有边长为  $L = 35 \text{ mm}$  的正方形 CCD 芯片, 像素为  $N_p = 5 \text{ Mpix}$  ( $1 \text{ Mpix} = 10^6 \text{ pixels}$ ), 其透镜焦距为  $f = 38 \text{ mm}$ . 出现在透镜上的著名数列 (2, 2.8, 4, 5.6, 8, 11, 16, 22) 叫做  $F$ -数, 记作  $F\#$ , 定义为透镜焦距和孔径 (即光圈直径) 之比, 即  $F\# = \frac{f}{D}$ .

(1) 由于相机镜头所限, 求芯片所能达到的最佳空间分辨率  $\Delta x_{\min}$ , 请用波长  $\lambda$  和  $F$ -数 (即  $F\#$ ) 来表达. 当波长  $\lambda = 500 \text{ nm}$  时, 求空间分辨率的数值.

(2) 若 CCD 芯片要达到此最佳的分辨率, 求此 CCD 芯片所必须拥有的像素数  $N \text{ Mpix}$ .

(3) 一般摄影师尽量选用可供使用的最小孔径. 如果现在我们有一个像素为  $N_0 = 16 \text{ Mpix}$  的数码相机, 其芯片大小和透镜焦距如前面所述, 那么应选择的  $F\#$  值是多少才能使得图片清晰度不受光学装置的限制?

(4) 已知人类肉眼的角度分辨率大约是  $\varphi = 2 \text{ arcmin}$  (分), 普通照片打印机的分辨率为  $300 \text{ dpi}$  (每英寸打印 300 点). 求你的眼睛和打印出的纸张之间的最小距离  $z$ , 以确保你看到的不是单个分开的点.

注:  $1 \text{ inch}$  (英寸)  $= 25.4 \text{ mm}$ .

$1 \text{ arcmin}$  (分)  $= 2.91 \times 10^{-4} \text{ rad}$ .



**【分析】** 如对数码相机的若干参数的含义以及参数间相互关系有所理解, 求解本题应该不难. 求解中用到若干波动光学的基本规律.

**【解】** (1) 圆孔衍射的最小分辨角  $\theta_R = 1.22 \frac{\lambda}{D}$ ,  $\lambda$  是波长,  $D$  是镜头孔径. CCD 芯片放置在镜头焦平面上, 所以

$$\Delta x = f\theta_R = 1.22\lambda F\#.$$

最佳空间分辨率对应于最大光圈, 即最小的  $F$ -数,  $F\# = 2$ , 代入数值得

$$\Delta x_{\min} = 1.22 \mu\text{m}.$$

(2) 像素间的间隔  $l = \frac{L}{\sqrt{N_P}}$  应该与光学分辨率相匹配, 所以

$$N = \left( \frac{L}{\Delta x_{\min}} \right)^2 \approx 823 \text{ Mpix}.$$

(3) 题意要求光学分辨率不低于像素间隔, 即  $l \geq \Delta x$ , 所以

$$F\# \leq \frac{L}{1.22\lambda \sqrt{N_0}} = 14.34.$$

满足该条件最接近的  $F$ -数是  $F\# = 11$ .

(4) 最小距离为

$$z = \frac{l}{\varphi} = 14.55 \text{ cm}.$$



# 原子和原子核

## 第一节 原子

**题 1** (2008·全国物理预赛题) 用光照射处在基态的氢原子,有可能使氢原子电离,下列说法中正确的是( )。

- A. 只要光的光强足够大,就一定可以使氢原子电离
- B. 只要光的频率足够高,就一定可以使氢原子电离
- C. 只要光子的能量足够大,就一定可以使氢原子电离
- D. 只要光照的时间足够长,就一定可以使氢原子电离

**【分析】** 本题用到光电效应和光的粒子性方面的知识。

**【解】** B、C。

**题 2** (2006·全国物理预赛题) 一对正、负电子可形成一种寿命比较短的称为电子偶素的新粒子,电子偶素中的正电子与负电子都以速率  $v$  绕它们连线的中点做圆周运动,假定玻尔关于氢原子的理论可用于电子偶素,电子的质量  $m$ 、速率  $v$  和正、负电子间的距离  $r$  的乘积也满足量子化条件,即

$$mrv = n \frac{h}{2\pi}$$

式中  $n$  称为量子数,可取整数值  $1, 2, 3, \dots$ ;  $h$  为普朗克常量,试求电子偶素处在各定态时的  $r$  和能量以及第一激发态与基态能量之差。

**【分析】** 玻尔关于氢原子的理论被称为旧量子论,它是经典与量子理论(即题给量子化条件)的一种混合理论。

本题用到的经典理论主要是圆周运动的动力学规律和正、负电子的动能及相互作用能(即电势能),再考虑题给的量子化条件,即可求得该理论所得结果,该结果可以大致描绘电子偶素的状态。

**【解】** 正、负电子绕它们连线的中点做半径为  $\frac{r}{2}$  的圆周运动,电子的电荷量为  $e$ ,正、负电子间的库仑力是电子做圆周运动所需的向心力,即

$$k \frac{e^2}{r^2} = m \frac{v^2}{\frac{r}{2}} \quad ①$$

正、负电子的动能分别为  $E_{k+}$  和  $E_{k-}$ , 有

$$E_{k+} = E_{k-} = \frac{1}{2} m v^2. \quad ②$$

正、负电子间相互作用的势能

$$E_p = -k \frac{e^2}{r}. \quad ③$$

电子偶素的总能量

$$E = E_{k+} + E_{k-} + E_p. \quad ④$$

由①②③④各式得

$$E = -\frac{1}{2} k \frac{e^2}{r}. \quad ⑤$$

根据量子化条件

$$mrv = n \frac{h}{2\pi}, \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad ⑥$$

⑥式表明  $r$  与量子数  $n$  有关. 由①和⑥式得与量子数  $n$  对应的定态  $r$  为

$$r_n = \frac{n^2 h^2}{2\pi^2 k e^2 m}, \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

代入⑤式得与量子数  $n$  对应的定态的  $E$  值为

$$E_n = -\frac{\pi^2 k^2 e^4 m}{n^2 h^2}, \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$n=1$  时, 电子偶素的能量最小, 对应于基态. 基态的能量为

$$E_1 = -\frac{\pi^2 k^2 e^4 m}{h^2}.$$

$n=2$  是第一激发态, 与基态的能量差

$$\Delta E = \frac{3}{4} \frac{\pi^2 k^2 e^4 m}{h^2}.$$

**题 3** (2005·全国物理预赛题) 处在激发态的氢原子向能量较低的状态跃迁时会发出一系列不同频率的光, 称为氢光谱. 氢光谱线的波长  $\lambda$  可以用下面的巴耳末—里德伯公式来表示:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$

$n, k$  分别表示氢原子跃迁前后所处状态的量子数.  $k=1, 2, 3, \dots$  对于每一个  $k$ , 有  $n=k+1, k+2, k+3, \dots$   $R$  称为里德伯常量, 是一已知量. 对于  $k=1$  的一系列谱线, 其波长处在紫外线区, 称为赖曼系; 对于  $k=2$  的一系列谱线, 其波长处在可见光区, 称为巴耳末系.

用氢原子发出的光照射某种金属进行光电效应实验, 当用赖曼系中波长最长的光照射时, 遏止电压的大小为  $U_1$ ; 当用巴耳末系中波长最短的光照射时, 遏止电



压的大小为  $U_2$ 。已知电子电荷为  $e$ ，真空中的光速为  $c$ ，试求：普朗克常量和该种金属的逸出功。

**【分析】** 此题是一道关于氢原子跃迁的问题，我们运用巴耳末—里德伯公式，结合爱因斯坦光电效应方程即可顺利解答。

**【解】** 由巴耳末—里德伯公式

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$

可知赖曼系中波长最长的光是氢原子由  $n=2 \rightarrow k=1$  跃迁时发出的，其波长的倒数

$$\frac{1}{\lambda_{12}} = \frac{3R}{4}. \quad (1)$$

对应的光子能量为

$$E_{12} = hc \frac{1}{\lambda_{12}} = \frac{3Rhc}{4}. \quad (2)$$

式中  $h$  为普朗克常量。巴耳末系中波长最短的光是氢原子由  $n=\infty \rightarrow k=2$  跃迁时发出的，其波长的倒数

$$\frac{1}{\lambda_{2\infty}} = \frac{R}{4}. \quad (3)$$

对应的光子能量

$$E_{2\infty} = \frac{Rhc}{4}. \quad (4)$$

用  $A$  表示该金属的逸出功，则  $eU_1$  和  $eU_2$  分别为光电子的最大初动能。由爱因斯坦光电效应方程得

$$\frac{3Rhc}{4} = eU_1 + A. \quad (5)$$

$$\frac{Rhc}{4} = eU_2 + A. \quad (6)$$

解得

$$A = \frac{e}{2} (U_1 - 3U_2).$$

$$h = \frac{2e(U_1 - U_2)}{Rc}.$$

**题 4.** (2003·全国物理预赛题) 一个氢放电管发光，在其产生的光谱中测得一条谱线的波长为  $4.86 \times 10^{-7} \text{ m}$ 。试计算这是氢原子中电子从哪一个能级向哪一个能级(用量子数  $n$  表示)跃迁时发出的；已知氢原子基态( $n=1$ )的能量为  $E_1 = -13.6 \text{ eV} = -2.18 \times 10^{-18} \text{ J}$ ，普朗克常量为  $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ 。

**【分析】** 这是一道关于氢原子光谱的题，我们只要正确运用氢原子能级公式，即可求出结果。

**【解】** 波长  $\lambda$  与频率  $\nu$  的关系为

$$v = \frac{c}{\lambda} \quad ①$$

光子的能量为

$$E_\nu = h\nu \quad ②$$

由式①②可求得产生波长  $\lambda = 4.86 \times 10^{-7} \text{ m}$  谱线的光子的能量

$$E_\nu = 4.09 \times 10^{-19} \text{ J} \quad ③$$

氢原子的能级能量为负值并与量子数  $n$  的平方成反比

$$E_n = -k \frac{1}{n^2}, (n=1, 2, 3, \dots) \quad ④$$

式中  $k$  为正的比例常数. 氢原子基态的量子数  $n=1$ , 基态能量  $E_1$  已知, 由式④可得出

$$k = -E_1 \quad ⑤$$

把式⑤代入式④, 便可求得氢原子  $n=2, 3, 4, 5, \dots$  各能级的能量, 它们是

$$E_2 = -\frac{1}{2^2} k = -5.45 \times 10^{-19} \text{ J},$$

$$E_3 = -\frac{1}{3^2} k = -2.42 \times 10^{-19} \text{ J},$$

$$E_4 = -\frac{1}{4^2} k = -1.36 \times 10^{-19} \text{ J},$$

$$E_5 = -\frac{1}{5^2} k = -8.72 \times 10^{-20} \text{ J}.$$

比较以上数据, 发现

$$E_\nu = E_1 - E_2 = 4.09 \times 10^{-19} \text{ J}.$$

所以, 这条谱线是电子从  $n=4$  的能级跃迁到  $n=2$  的能级时发出的.

**题 5** (2001·全国物理竞赛题) 有两个处于基态的氢原子 A、B, A 静止, B 以速度  $v_0$  与之发生碰撞. 已知: 碰撞后二者的速度  $v_A$  和  $v_B$  在一条直线上, 碰撞过程中部分动能有可能被某一氢原子吸收, 从而使该原子由基态跃迁到激发态, 然后, 此原子向低能级跃迁, 并发出光子. 如欲碰后发出一个光子, 试计算: 速度  $v_0$  至少需要多大(以 m/s 表示)? 已知电子电荷量为  $e=1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ , 质子质量为  $m_p=1.673 \times 10^{-27} \text{ kg}$ , 电子质量为  $m_e=0.911 \times 10^{-31} \text{ kg}$ . 氢原子的基态能量为  $E_1 = -13.58 \text{ eV}$ .

**【分析】** 根据玻尔理论, 我们可求出氢原子 A、B 碰后发出的光子的能量. 再根据动量守恒定律与能量守恒定律及运用数学运算技巧, 即可求出最后结果.

**【解】** 为使氢原子从基态跃迁到激发态, 需要能量最小的激发态是  $n=2$  的第一激发态, 已知氢原子的能量与其量子数的平方成反比, 即有

$$E_n = K \frac{1}{n^2} \quad ①$$

又知基态( $n=1$ )的能量为  $-13.58 \text{ eV}$ , 即



$$E_1 = K \frac{1}{1^2} = -13.58 \text{ eV}.$$

所以  $K = -13.58 \text{ eV}.$

$n=2$  的第一激发态的能量为

$$E_2 = K \frac{1}{2^2} = -13.58 \times \frac{1}{4} \text{ eV} = -3.39 \text{ eV}. \quad (2)$$

为使基态的氢原子激发到第一激发态所需能量为

$$E_{\text{内}} = E_2 - E_1 = (-3.39 + 13.58) \text{ eV} = 10.19 \text{ eV}. \quad (3)$$

这就是氢原子从第一激发态跃迁到基态时发出的光子的能量,即

$$h\nu = E_{\text{内}} = 10.19 \text{ eV} = 10.19 \times 1.602 \times 10^{-19} \text{ J} = 1.632 \times 10^{-18} \text{ J}. \quad (4)$$

式中  $\nu$  为光子的频率. 从开始碰撞到发射出光子, 根据动量和能量守恒定律有

$$mv_0 = mv_A + mv_B + \text{光子的动量}. \quad (5)$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m(v_A^2 + v_B^2) + h\nu. \quad (6)$$

光子的动量  $p_\nu = \frac{h\nu}{c}$ . 由⑥式可推得  $mv_0 > \frac{2h\nu}{v_0}$ , 因为  $v_0 \ll c$ , 所以  $mv_0 \gg \frac{h\nu}{c}$ , 故⑤

式中光子的动量与  $mv_0$  相比较可忽略不计, ⑤式变为

$$mv_0 = mv_A + mv_B = m(v_A + v_B). \quad (7)$$

符合⑥⑦两式的  $v_0$  的最小值可推导如下: 由⑥式及⑦式可推得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_0^2 &= \frac{1}{2}m(v_A + v_B)^2 - mv_Av_B + h\nu \\ &= \frac{1}{2}mv_0^2 - mv_A(v_0 - v_A) + h\nu. \\ mv_A^2 - mv_Av_0 + h\nu &= 0. \end{aligned}$$

经配方得

$$\begin{aligned} m\left(v_A - \frac{1}{2}v_0\right)^2 - \frac{1}{4}mv_0^2 + h\nu &= 0. \\ \frac{1}{4}mv_0^2 &= h\nu + m\left(v_A - \frac{1}{2}v_0\right)^2. \end{aligned} \quad (8)$$

由⑧式可看出, 当  $v_A = \frac{1}{2}v_0$  时,  $v_0$  达到最小值  $v_{0\text{min}}$ , 此时

$$\begin{aligned} v_A &= v_B. \\ v_{0\text{min}} &= 2\sqrt{\frac{h\nu}{m}}. \end{aligned}$$

代入有关数值, 得

$$v_{0\text{min}} = 6.25 \times 10^4 \text{ m/s}.$$

### 题 6 (2008 · 全国物理决赛题)

(1) 假设对氢原子基态采用玻尔模型, 认为每个电子都在以氢核为中心的圆周上运动, 半径相同, 角动量均为  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ , 其中  $h$  是普朗克常量.



(I) 如果忽略电子间的相互作用, 氦原子的一级电离能是多少电子伏? 一级电离能是指把其中一个电子移到无限远所需要的能量.

(II) 实验测得的氦原子一级电离能是 24.6 eV. 若在上述玻尔模型的基础上考虑电子之间的相互作用, 进一步假设两个电子总处于通过氦核的一条直径的两端. 试用此模型和假设, 求出电子运动轨道的半径  $r_0$ 、基态能量  $E_0$  以及一级电离能  $E^+$ , 并与实验测得的氦原子一级电离能相比较.

已知电子质量  $m=0.511 \text{ MeV}/c^2$ ,  $c$  是光速, 组合常量  $\hbar c=197.3 \text{ MeV} \cdot \text{fm}=197.3 \text{ eV} \cdot \text{nm}$ ,  $ke^2=1.44 \text{ MeV} \cdot \text{fm}=1.44 \text{ eV} \cdot \text{nm}$ ,  $k$  是静电力常量,  $e$  是基本电荷量.

(2) 图 5-1-1 是某种粒子穿过云室留下的径迹的照片. 径迹在纸面内, 图的中间是一块与纸面垂直的铅板, 外加的恒定匀强磁场的方向垂直纸面向里. 假设粒子电荷的大小是一个基本电荷量  $e$ ,  $e=1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$ , 铅板下部径迹的曲率半径  $r_d=210 \text{ mm}$ , 铅板上部径迹的曲率半径  $r_u=76.0 \text{ mm}$ , 铅板内的径迹与铅板法线成  $\theta=15.0^\circ$ , 铅板厚度  $d=6.00 \text{ mm}$ , 磁感应强度  $B=1.00 \text{ T}$ , 粒子质量  $m=9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}=0.511 \text{ MeV}/c^2$ . 不考虑云室中气体对粒子的阻力.

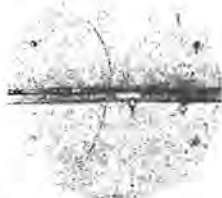


图 5-1-1

(I) 写出粒子运动的方向和电荷的正负;

(II) 试问铅板在粒子穿过期间所受的力平均为多少牛?

(III) 假设射向铅板的不是一个粒子, 而是从加速器引出的流量为  $j=5.00 \times 10^{18}/\text{s}$  的脉冲粒子束, 一个脉冲持续时间为  $\tau=2.50 \text{ ns}$ . 试问铅板在此脉冲粒子束穿过期间所受的力平均为多少牛? 铅板在此期间吸收的热量又是多少焦?

**【分析】** 此题解答涉及圆周运动与玻尔量子化条件等知识.

**【解】** (1)(I) 氦原子中有两个电子, 一级电离能  $E^+$  是把其中一个电子移到无限远处所需要的能量满足  $\text{He}+E^+ \rightarrow \text{He}^+ + e^-$ . 为了得到氦原子的一级电离能  $E^+$ , 需要求出一个电子电离以后氦离子体系的能量  $E^+$ . 这是一个电子围绕氦核运动的体系, 下面给出两种解法.

解法一: 在力学方程

$$\frac{2ke^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

中,  $r$  是轨道半径,  $v$  是电子速度. 对基态, 用玻尔量子化条件(角动量为  $\hbar$ )可以解出

$$r_0 = \frac{\hbar^2}{2ke^2 m} \quad (1)$$

于是氦离子能量

$$E^+ = \frac{p_0^2}{2m} - \frac{2ke^2}{r_0} = -\frac{2k^2 e^4 m}{\hbar^2} \quad (2)$$

其中  $p_0$  为基态电子动量的大小, 代入数值得



$$E^* = -\frac{2(ke^2)^2 mc^2}{(\hbar c)^2} \approx -54.4 \text{ eV}. \quad (3)$$

由于不计电子间的相互作用, 氦原子基态的能量  $E_0$  是该值的 2 倍, 即

$$E_0 = 2E^* \approx -108.8 \text{ eV}. \quad (4)$$

氦离子能量  $E^+$  与氦原子基态能量  $E_0$  之差就是氦原子的一级电离能

$$E^+ = E^* - E_0 = -E^* \approx 54.4 \text{ eV}. \quad (5)$$

解法二: 氦离子能量

$$E^* = \frac{p^2}{2m} - \frac{2ke^2}{r}.$$

把基态的角动量关系  $rp = \hbar$  代入, 式(3)可以改写成

$$E^* = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{2ke^2}{r} = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{1}{r} - \frac{2ke^2 m}{\hbar^2} \right)^2 - \frac{2k^2 e^4 m}{\hbar^2}.$$

因基态的能量最小, 式(4)等号右边的第一项为零, 所以半径和能量

$$r_0 = \frac{\hbar^2}{2ke^2 m}, \quad E^* = -\frac{2k^2 e^4 m}{\hbar^2}.$$

分别与(1)(2)两式相同.

(II) 下面, 同样给出求氦原子基态能量  $E_0$  和半径  $r_0$  的两种解法.

解法一: 利用力学方程

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{2ke^2}{r^2} - \frac{ke^2}{(2r)^2} = \frac{7ke^2}{4r^2}.$$

和基态量子化条件  $rmv = \hbar$ , 可以解出半径

$$r_0 = \frac{4\hbar^2}{7ke^2 m}. \quad (6)$$

于是氦原子基态能量

$$E_0 = 2 \left( \frac{p_0^2}{2m} - \frac{2ke^2}{r_0} \right) + \frac{ke^2}{2r_0} = -\frac{49k^2 e^4 m}{16\hbar^2}. \quad (7)$$

代入数值算得

$$E_0 = -\frac{49(ke^2)^2 mc^2}{16(\hbar c)^2} \approx -83.4 \text{ eV}. \quad (8)$$

$$r_0 = \frac{4(\hbar c)^2}{7ke^2 mc^2} \approx 0.0302 \text{ nm}.$$

所以, 氦原子的一级电离能

$$E^+ = E^* - E_0 \approx 29.0 \text{ eV}. \quad (9)$$

这仍比实验测得的氦原子一级电离能 24.6 eV 高出 4.4 eV.

解法二: 氦原子能量

$$E = 2 \left( \frac{p^2}{2m} - \frac{2ke^2}{r} \right) + \frac{ke^2}{2r} = \frac{\hbar^2}{mr^2} - \frac{7ke^2}{2r}.$$

可以化成

$$E = \frac{\hbar^2}{m} \left( \frac{1}{r} - \frac{7ke^2 m}{4\hbar^2} \right)^2 - \frac{49k^2 e^4 m}{16\hbar^2}.$$

当上式等号右边第一项为零时,能量最小,由此可知,基态能量与半径

$$E_0 = -\frac{49k^2 e^4 m}{16\hbar^2}, \quad r_0 = \frac{4\hbar^2}{7ke^2 m}.$$

分别与⑦⑧两式相同.

(2)(I)粒子从下部射向并穿过铅板向上运动,其电荷为正.

(II)如图 5-1-1 所示,粒子的运动速度  $v$  与磁场方向垂直,洛伦兹力在纸面内;磁力不改变荷电粒子动量的大小,只改变其方向.若不考虑云室中气体对粒子的阻力,荷电粒子在恒定磁场作用下的运动轨迹就是曲率半径为一定值的圆弧;可以写出其运动方程

$$qBv = \left| \frac{\Delta p}{\Delta t} \right| = \frac{p\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{pv}{r}. \quad (1)$$

其中  $q$  是粒子电荷,  $v$  是粒子速度的大小,  $p$  是粒子动量的大小,  $\Delta\phi$  是粒子在  $\Delta t$  时间内转过的角度,  $r$  是轨迹曲率半径. 于是有

$$p = qBr. \quad (2)$$

按题意,  $q = e$ . 用  $p_d$  和  $p_u$  分别表示粒子射入铅板和自铅板射出时动量的大小,并在式①中代入有关数据,可以算得

$$p_d = 63.0 \text{ MeV}/c, \quad p_u = 22.8 \text{ MeV}/c. \quad (3)$$

注意到当  $pc \gg mc^2$  时应使用狭义相对论,从

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \quad (4)$$

中可以得到

$$v = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{mc}{p}\right)^2}}. \quad (5)$$

用  $v_d$  和  $v_u$  分别表示粒子进入和离开铅板时的速度大小.把式②以及  $m = 0.511 \text{ MeV}/c^2$  代入式③,可得

$$v_d \approx c, \quad v_u \approx c. \quad (6)$$

于是,粒子穿过铅板的平均速度  $\bar{v} = \frac{1}{2}(v_d + v_u) \approx c$ . 用  $\Delta t$  表示粒子穿过铅板的时间,则有

$$\bar{v} \cos\theta \Delta t = d. \quad (7)$$

再用  $\Delta p_{\perp}$  表示粒子穿过铅板动量改变量的大小,铅板所受到的平均力的大小

$$f = \frac{\Delta p_{\perp}}{\Delta t} = \frac{p_d - p_u}{\frac{d}{\bar{v} \cos\theta}} \approx \frac{(p_d - p_u) c \cos\theta}{d}. \quad (8)$$

代入有关数值得

$$f \approx 1.04 \times 10^{-9} \text{ N}. \quad (9)$$

(III)一个粒子穿过铅板的时间



$$\Delta t = \frac{d}{v \cos \theta} \approx \frac{d}{c \cos \theta} \approx 2.07 \times 10^{-11} \text{ s} = 0.0207 \text{ ns.} \quad (10)$$

比粒子束流的脉冲周期  $\tau = 2.50 \text{ ns}$  小得多. 铅板在此脉冲粒子束穿过期间所受的力的平均大小

$$F \approx (p_d - p_u) j. \quad (11)$$

代入数据得

$$F = 0.107 \text{ N.} \quad (12)$$

运用式④, 可把粒子能量写成

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}. \quad (13)$$

所以粒子穿过铅板前后的能量分别为

$$E_d = \sqrt{p_d^2 c^2 + m^2 c^4} = 63.0 \text{ MeV}, \quad E_u = \sqrt{p_u^2 c^2 + m^2 c^4} = 22.8 \text{ MeV.} \quad (14)$$

于是, 铅板在脉冲粒子束穿过期间所吸收的热量

$$Q = (E_d - E_u) j \tau. \quad (15)$$

代入数据得

$$Q = 8.04 \times 10^{-2} \text{ J.}$$

**题7** (2007·全国物理决赛题) 已知钠原子从激发态(记做  $P_{\frac{3}{2}}$ ) 跃迁到基态(记做  $S_{\frac{1}{2}}$ ) 所发出的光谱线波长  $\lambda_0 = 588.9665 \text{ nm}$ . 现有一团钠原子气, 其中的钠原子做无规则热运动(钠原子的运动不必考虑相对论效应), 被一束沿  $z$  轴负方向传播的波长为  $\lambda = 589.0080 \text{ nm}$  的激光照射. 以  $\theta$  表示钠原子运动方向与  $z$  轴正方向之间的夹角(如图 5-1-2). 问在  $30^\circ < \theta < 45^\circ$  角度区间内的钠原子中速率  $u$  在什么范围内能产生共振吸收, 从  $S_{\frac{1}{2}}$  态激发到  $P_{\frac{3}{2}}$  态? 并求共振吸收前后钠原子速度(矢量)变化的大小. 已知钠原子质量为  $M = 3.79 \times 10^{-26} \text{ kg}$ , 普朗克常量  $h = 6.626069 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ , 真空中的光速  $c = 2.997925 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .



图 5-1-2

**【分析】** 这是一道原子对激光共振吸收的问题, 关键是要了解原子发光的光谱线波长与照射的激光波长(需考虑多普勒效应)相等时才能发生共振吸收.

**【解】** 解法一: 根据已知条件, 射向钠原子的激光的频率

$$\nu = \frac{c}{\lambda}. \quad (1)$$

对运动方向与  $z$  轴正方向的夹角为  $\theta$ 、速率为  $u$  的钠原子, 由于多普勒效应, 它接收的激光频率

$$\nu' = \nu \left( 1 + \frac{u}{c} \cos \theta \right). \quad (2)$$

改用波长表示, 有

$$\lambda' = \frac{\lambda}{1 + \frac{u}{c} \cos\theta} \quad (3)$$

发生共振吸收时,应有  $\lambda' = \lambda_0$ , 即

$$\frac{\lambda}{1 + \frac{u}{c} \cos\theta} = \lambda_0 \quad (4)$$

解④式,是

$$u \cos\theta = c \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \quad (5)$$

代入有关数据,得

$$u \cos\theta = 5.85 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (6)$$

由⑥式,对  $\theta = 30^\circ$  的钠原子,其速率

$$u_1 = 6.76 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

对  $\theta = 45^\circ$  的钠原子,其速率

$$u_2 = 8.28 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

运动方向与  $z$  轴的夹角在  $30^\circ \sim 45^\circ$  区域内的原子中,能发生共振吸收的钠原子的速率范围为

$$6.76 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} < u < 8.28 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (7)$$

共振吸收前后,动量守恒. 设钠原子的反冲速度为  $v$ , 则有

$$Mu - \frac{h}{\lambda} e_z = Mv \quad (8)$$

其中  $e_z$  为  $z$  轴方向的单位矢量. 由⑧式得

$$u - v = \frac{h}{M\lambda} e_z \quad (9)$$

钠原子速度(矢量)变化的大小为

$$|u - v| = \frac{h}{M\lambda} \quad (10)$$

代入数据,得

$$|u - v| = 2.9 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (11)$$

解法二: 根据已知条件, 钠原子从激发态  $P_{\frac{3}{2}}$  跃迁到基态  $S_{\frac{1}{2}}$  发出的光谱线的频率

$$\nu_0 = \frac{c}{\lambda_0} \quad (1)$$

入射激光的频率

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \quad (2)$$

考查运动方向与  $z$  轴的正方向成  $\theta$  角的某个钠原子. 它在共振吸收过程中动量守恒, 能量守恒. 以  $u$  表示该钠原子在共振吸收前的速率,  $v$  表示该钠原子共振吸收后的速度, 则有



$$Mu - \frac{h\nu}{c}e_z = Mv. \quad (3)$$

$$\frac{1}{2}Mu^2 + h\nu = \frac{1}{2}Mv^2 + h\nu_0. \quad (4)$$

把③式写成分量形式,并注意到共振吸收前后钠原子在垂直于 $z$ 轴方向的动量不变,有

$$Musin\theta = Mv\sin\theta'. \quad (5)$$

$$Mucos\theta - \frac{h\nu}{c} = Mv\cos\theta'. \quad (6)$$

式中 $\theta'$ 为激发态钠原子速度方向与 $z$ 轴正方向的夹角,从⑤⑥两式中消去 $\theta'$ ,得

$$M^2u^2 - M^2v^2 = -\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + 2Mu\frac{h\nu}{c}\cos\theta. \quad (7)$$

由④⑦两式可得

$$2h\nu_0 - 2h\nu = -\frac{1}{M}\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + 2h\nu\frac{u}{c}\cos\theta. \quad (8)$$

注意到 $\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 \ll M$ ,得

$$u_0 = v\left(1 + \frac{u}{c}\cos\theta\right). \quad (9)$$

改用波长表示,有

$$\lambda_0 = \frac{\lambda}{1 + \frac{u}{c}\cos\theta}. \quad (10)$$

解⑩式,得

$$ucos\theta = c\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}. \quad (11)$$

代入有关数据,得

$$ucos\theta = 5.85 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (12)$$

由⑫式,对 $\theta=30^\circ$ 的钠原子,其速率

$$u_1 = 6.76 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1};$$

对 $\theta=45^\circ$ 的钠原子,其速率

$$u_2 = 8.28 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

运动方向与 $z$ 轴的夹角在 $30^\circ \sim 45^\circ$ 区域内的原子中,能发生共振吸收的钠原子的速率范围为

$$6.76 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} < u < 8.28 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

由③式可知,钠原子共振吸收前后速度(矢量)的变化为

$$u - v = \frac{h}{M\lambda}e_z.$$

速度(矢量)大小的变化为



$$|u-v| = \frac{h}{M\lambda}$$

代入数据,得

$$|u-v| = 2.9 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

### 题 8 (2006·亚洲物理竞赛题)

#### 原子的激光冷却

这道题是关于激光辐射下的原子冷却的机理.这一领域的研究大大地促进了人们对冷原子量子气属性的理解,并被授予1997年和2001年的诺贝尔奖.

#### 理论介绍

考虑一个简化的原子两能级模型,其中基态能量  $E_g$ 、激发态能量  $E_e$ . 能量差  $E_e - E_g = \hbar\omega_0$ , 所用的激光的角频率是  $\omega$ , 激光频率失谐为  $\delta = \omega - \omega_0 \ll \omega_0$ . 假定所有原子的速度满足  $v \ll c$ , 其中  $c$  是光速. 对所有的计算要求考虑到用  $\frac{v}{c}$  和  $\frac{\delta}{\omega_0}$  表示的适当的小量. 由于自发辐射引起的激发态  $E_e$  的自然展宽是  $\gamma \ll \omega_0$ ,  $\gamma$  是单位时间内处于激发态的原子返回基态的几率. 当原子返回基态时,会在某方向随机辐射一个频率接近  $\omega_0$  的光子.

根据量子力学,当原子受到低强度的激光辐射时,单位时间内原子受激发的几率依赖于在原子坐标系中的辐射频率  $\omega_0$ , 它可以表达为

$$\gamma_p = s_0 \frac{\frac{\gamma}{2}}{1 + 4(\omega_0 - \omega)^2} \ll \gamma_0$$

其中  $s_0 \ll 1$  是个参数,依赖于原子的性质和激光的强度.

本题中,在忽略原子间的相互作用力的前提下考虑钠原子气的性质. 激光的强度足够小,以致于处于激发态的原子数总是远小于基态原子数. 可以忽略重力的作用,实际的实验中用一附加磁场来补偿重力的作用.

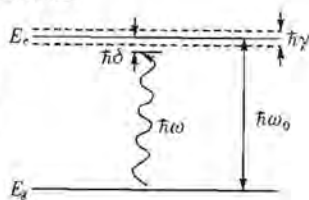


图 5-1-3

注意: 图中参数未按比例标注

#### 物理量的数值

普朗克常数  $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

玻尔兹曼常数  $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

钠原子的质量  $m = 3.81 \times 10^{-26} \text{ kg}$

使用的跃迁频率  $\omega_0 = 2\pi \times 5.08 \times 10^{14} \text{ Hz}$

激发态的线宽  $\gamma = 2\pi \times 9.80 \times 10^6 \text{ Hz}$

原子的密度  $n = 10^{14} \text{ cm}^{-3}$

#### 问题

(a) 假定原子以速度  $v_x$ , 沿  $x$  轴的正方向运动, 频率为  $\omega$  的激光沿  $x$  轴的负方向传播. 在原子参考系中, 激光的频率是多大?



(b) 假定原子以速度  $v_x$  沿  $x$  轴的正方向运动, 两束相同的激光从原子的两侧沿  $x$  轴照射. 激光的频率是  $\omega$ , 强度参数为  $s_0$ . 写出作用在原子上的平均作用力  $F(v_x)$  的表达式. 当  $v_x$  足够小的时候, 这个作用力可以写为  $F(v_x) = -\beta v_x$ , 求出  $\beta$  的表达式. 要使原子速度的绝对值减小,  $\delta = \omega - \omega_0$  应取什么符号? 假设原子的动量远大于光子的动量.

下面, 我们假定原子的速度足够小, 以致我们可以认为平均作用力与它成线性关系.

(c) 如果 6 束激光分别沿着  $x$ 、 $y$  和  $z$  轴的正负方向照射原子, 对  $\beta > 0$ , 有耗散力作用在原子上, 使得原子的平均能量减小. 由于这时气体温度可以用平均能量来表示, 气体温度会减小. 根据上面给出的原子密度, 当量子效应不能将原子看做实物粒子时, 估算气体温度  $T_0$  的数值.

接下来, 我们假定实际温度远大于  $T_0$ , 如(c)部分所述, 采用分别沿着  $x$ 、 $y$  和  $z$  轴的正负向照射原子的 6 束激光.

在(b)部分, 你已计算了作用在原子上的平均作用力. 然而由于光子的量子特性, 在每个光子的吸收和发射过程中, 原子的动量都会由于反冲过程随机地在某个方向上改变一个不连续的值.

(d) 确定一次吸收或发射事件引起的原子动量改变值的平方  $(\Delta p)^2$ .

(e) 因为反冲效应, 即使经历很长的时间, 气体的平均温度并不会变为绝对零度, 而是达到一个有限值. 原子动量的演化过程可以用动量空间中一个平均步长为  $\sqrt{(\Delta p)^2}$  的随机行走过程, 以及一个耗散力所致的冷却过程来描述. 稳态的温度由这两个不同过程的共同作用来确定. 证明稳态温度  $T_d$  可以表示为  $T_d = \frac{\hbar \gamma \left(x + \frac{1}{x}\right)}{4k_B}$ . 确定  $x$  的表达式. 假设  $T_d$  远大于  $\frac{(\Delta p)^2}{2k_B m}$ .

注: 如果矢量  $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$  是统计上相互不相关的, 那么它们满足

$$\langle (\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_n)^2 \rangle = \langle \vec{P}_1^2 \rangle + \langle \vec{P}_2^2 \rangle + \dots + \langle \vec{P}_n^2 \rangle.$$

(f) 由于反冲效应, 温度存在一个最小值, 请计算该最小值. 这一最小值在  $\frac{\delta}{\gamma}$  取何值时出现?

**【分析】** 这是一道关于原子受到激光辐射的问题, 解题涉及相对论的多普勒效应、原子的动量、动能、德布罗意的物质波波长等知识, 并要正确运用数学的微分、近似计算等知识.

**【解】** (a) 在原子参考系中, 按相对论的多普勒效应公式, 激光的频率为

$$\omega_0 = \omega \sqrt{\frac{1 + \frac{v_x}{c}}{1 - \frac{v_x}{c}}} = \omega \frac{1 + \frac{v_x}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_x}{c}\right)^2}} \approx \omega \left(1 + \frac{v_x}{c}\right). \quad (1)$$

当原子以速度  $v_x$  沿  $+x$  方向运动时, 吸收一个逆向(沿  $-x$  方向)而来的光子,



所产生的动量变化为  $(\Delta p)_+ = -\frac{\hbar\omega}{c}$ ; 而吸收一个同向(沿  $+x$  方向)而来的光子, 则为  $(\Delta p)_- = \frac{\hbar\omega}{c}$ , 从原子参考系来看, 由于多普勒效应, 逆向的光子频率升高为  $\omega_+ = \omega\left(1 + \frac{v_x}{c}\right)$ , 而同向的光子频率则降低为  $\omega_- = \omega\left(1 - \frac{v_x}{c}\right)$ . 由于多普勒的频率偏移, 使得原子吸收光子而被激发至受激态的几率, 因入射光子的运动方向不同而有差异. 设原子在每单位时间内吸收逆向或顺向光子的几率, 分别为  $(\gamma_p)_+$  或  $(\gamma_p)_-$ , 则

$$(\gamma_p)_+ = s_0 \frac{\frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{4(\omega_+ - \omega_0)^2}{\gamma^2}} = s_0 \frac{\frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{4\left(\delta + \frac{\omega v_x}{c}\right)^2}{\gamma^2}}, \quad (2)$$

$$(\gamma_p)_- = s_0 \frac{\frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{4(\omega_- - \omega_0)^2}{\gamma^2}} = s_0 \frac{\frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{4\left(\delta - \frac{\omega v_x}{c}\right)^2}{\gamma^2}}. \quad (3)$$

式中  $\delta = \omega - \omega_0$ . 在吸收光子的过程中, 原子所受的合力为

$$\begin{aligned} F &= F_+ + F_- = (\Delta p)_+ (\gamma_p)_+ + (\Delta p)_- (\gamma_p)_- \\ &= -\frac{\hbar\omega}{c} \left[ s_0 \frac{\frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{4\left(\delta + \frac{\omega v_x}{c}\right)^2}{\gamma^2}} \right] + \frac{\hbar\omega}{c} \left[ s_0 \frac{\frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{4\left(\delta - \frac{\omega v_x}{c}\right)^2}{\gamma^2}} \right] \\ &= -\left(\frac{\hbar\omega}{c}\right) \left(\frac{s_0 \gamma}{2}\right) \left[ \frac{1}{1 + \frac{4\left(\delta + \frac{\omega v_x}{c}\right)^2}{\gamma^2}} - \frac{1}{1 + \frac{4\left(\delta - \frac{\omega v_x}{c}\right)^2}{\gamma^2}} \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

因为  $\delta \gg \frac{\omega v_x}{c}$ , 故上式可近似为

$$\begin{aligned} F &= -\left(\frac{\hbar\omega}{c}\right) \left(\frac{s_0 \gamma}{2}\right) \left[ \frac{1}{1 + \frac{4\delta^2 \left(1 + \frac{2\omega v_x}{\delta c}\right)}{\gamma^2}} - \frac{1}{1 + \frac{4\delta^2 \left(1 - \frac{2\omega v_x}{\delta c}\right)}{\gamma^2}} \right] \\ &= -\left(\frac{\hbar\omega}{c}\right) \left(\frac{s_0 \gamma}{2}\right) \left[ \frac{-16\delta \frac{\omega v_x}{c \gamma^2}}{\left(1 + \frac{4\delta^2}{\gamma^2}\right)^2 - \left(8\delta \frac{\omega v_x}{c \gamma^2}\right)^2} \right] \\ &\approx -\left[ \frac{-8\hbar\omega^2 \delta s_0}{\gamma c^2 \left(1 + \frac{4\delta^2}{\gamma^2}\right)^2} \right] v_x. \end{aligned} \quad (5)$$

在上式中已将激光的频率  $\omega$  近似为  $\omega_0$ , 比较  $F = -\beta v_x$ , 可得



$$\beta = -\frac{8\hbar\omega^2\delta s_0}{\gamma c^2\left(1 + \frac{4\delta^2}{\gamma^2}\right)^2}. \quad (6)$$

为使原子的速度减慢,要求  $\beta > 0$ ,从上式可知必须  $\delta < 0$ ,即  $\omega - \omega_0 < 0$ ,或  $\omega < \omega_0$ .

(b) 德布罗意的物质波波长为  $\lambda = \frac{h}{p}$ . 原子在绝对温度  $T$  时的平均动能为

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{3}{2}k_B T, \quad \frac{1}{2m}\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 = \frac{3}{2}k_B T, \\ \lambda = \frac{h}{\sqrt{3mk_B T}}. \quad (7)$$

作用于原子的阻尼力,使原子的平均能量减少,因此其对应的温度降低,导致原子的物质波波长增长.当温度降至  $T_Q$  时,若物质波的波长等于两相邻原子之间的距离,则由于量子效应,原子不能再被视为粒子性的质点.已知原子的数密度为  $n = 10^{14} \text{ cm}^{-3} = 10^{20} \text{ m}^{-3}$ ,故相邻原子的间距等于  $\frac{1}{n^{1/3}}$ ,得

$$\frac{h}{\sqrt{3mk_B T_Q}} = \frac{1}{n^{1/3}}. \\ T_Q = \frac{h^2 n^{2/3}}{3mk_B} = \frac{(2\pi \times 1.05 \times 10^{-34})^2 \times (10^{20})^{2/3}}{3 \times 3.81 \times 10^{-26} \times 1.38 \times 10^{-23}} \text{ K} \approx 10^{-5} \text{ K}. \quad (8)$$

(c) 原子经吸收或发射一个光子后,其动量变化量的平方值为

$$(\Delta p)^2 = \left(\frac{\hbar\omega}{c}\right)^2 \approx \left(\frac{\hbar\omega_0}{c}\right)^2 = \left(\frac{1.05 \times 10^{-34} \times 2\pi \times 5.08 \times 10^{14}}{3.0 \times 10^8}\right)^2 \text{ kg}^2 \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 \\ = 1.2 \times 10^{-54} \text{ kg}^2 \cdot \text{m}^2/\text{s}^2.$$

(d) 原子吸收入射的激光光子,由于多普勒效应,造成阻尼效果,使原子的速度减慢,因此原子的温度随之降低.由(b)题的结果知阻尼力为  $\vec{F} = -\beta\vec{v}$ ,式中  $\vec{v}$  为该原子的平均速度,故原子能量随时间而减小的速率,或原子的冷却速率为

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{冷却}} = -\vec{F} \cdot \vec{v} = -\beta v^2 = -\left(\frac{3\beta k_B}{m}\right)T. \quad (9)$$

式中  $T$  为原子气体的平均温度,且

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_B T. \quad (10)$$

从另一方面来看,原子吸收激光光子后,被激发至受激态,再经由自发辐射回至基态,并发射出光子.原子在每一次吸收和发射光子的过程中,都会产生反弹而使其动量产生变化,该动量变化量的平方值  $(\Delta p)^2$  即为(d)小题所计算者,但是它的方向则是任意的.因此就反弹效应而言,原子动量的演变相当于在动量空间(mo-

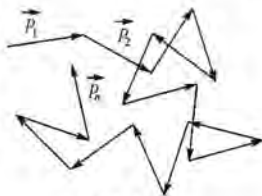


图 5-1-4

mentum space)的无规则行走(random walk),每一次行走的步距等于 $\sqrt{(\Delta p)^2}$ ,如图 5-1-4 所示.设原子在此动量空间中的位移,依序为 $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n$ ,则由于这些位移皆为随机量,彼此没有任何关联,故

$$\langle (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n)^2 \rangle = \langle p_1^2 \rangle + \langle p_2^2 \rangle + \dots + \langle p_n^2 \rangle. \quad (11)$$

设 $\vec{p}_t$ 为原子在时间 $t$ 内历经 $N$ 次吸收和放射光子的过程中所得的平均动量,则上式可写为

$$\vec{p}_t^2 = 2N(\Delta p)^2. \quad (12)$$

式中的因子2是由于原子在每一次吸收和发射光子的过程中,造成两次的动量变化,相当于两次在动量空间中的无规则行走,其中一次来自于吸收光子,另一次则来自于发射光子.题设当一原子受到低强度的激光照射时,每单位时间内将原子激发至受激态的几率为 $\gamma_p$ ,且共有六道激光照射原子,故 $N=6\gamma_p t \gg 1$ ,代入上式,得

$$\vec{p}_t^2 = 12\gamma_p t \left( \frac{\hbar\omega}{c} \right)^2. \quad (13)$$

由上式可知原子的自发辐射,使原子获得动量,其结果使原子的能量增加,造成增温的效果.原子能量随时间而增加的速率,或原子的增温速率为

$$\left( \frac{dE}{dt} \right)_{\text{加热}} = \frac{d}{dt} \left( \frac{p_t^2}{2m} \right) = \frac{6\gamma_p}{m} \left( \frac{\hbar\omega}{c} \right)^2. \quad (14)$$

原子气体的温度决定于上述的两种效应,即⑬和⑭两式.设原子气体在稳定状态时的温度为 $T_d$ ,则

$$\begin{aligned} \left( \frac{dE}{dt} \right)_{\text{冷却}} + \left( \frac{dE}{dt} \right)_{\text{加热}} &= 0. \\ - \left( \frac{3\beta k_B}{m} \right) T_d + \frac{6\gamma_p}{m} \left( \frac{\hbar\omega}{c} \right)^2 &= 0. \\ T_d &= \left( \frac{2\gamma_p}{k_B\beta} \right) \left( \frac{\hbar\omega}{c} \right)^2. \end{aligned} \quad (15)$$

将 $\gamma_p$ 和 $\beta$ 的数学式代入上式,得

$$\begin{aligned} T_d &= \frac{2}{k_B} \left( \frac{\hbar\omega}{c} \right)^2 \left[ s_0 \frac{\frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{4\delta^2}{\gamma^2}} \right] \left[ \frac{\gamma c^2 (1 + \frac{4\delta^2}{\gamma^2})^2}{8\hbar\omega^2 |\delta| s_0} \right] \\ &= \frac{\hbar\gamma}{4k_B} \left( \frac{2|\delta|}{\gamma} + \frac{\gamma}{2|\delta|} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

比较  $T_d = \frac{\hbar\gamma}{4k_B} \left( x + \frac{1}{x} \right)$ , 得  $x = \frac{2|\delta|}{\gamma}$ .

(e)⑯式可改写为

$$T_d = \frac{\hbar\gamma}{4k_B} \left[ \left( \sqrt{\frac{2|\delta|}{\gamma}} - \sqrt{\frac{\gamma}{2|\delta|}} \right)^2 + 2 \right]. \quad (17)$$



由上式可看出,当 $|\delta| = \frac{1}{2}\gamma$ 时, $T_d$ 为最小值,即

$$(T_d)_{\min} = \frac{\hbar\gamma}{2k_B} = \frac{1.05 \times 10^{-34} \times 2\pi \times 9.80 \times 10^8}{2 \times 1.38 \times 10^{-23}} \text{ K} \\ = 2.34 \times 10^{-1} \text{ K}.$$

## 第二节 原子核

**题 1** (2008·全国物理预赛题) 为了估算水库中水的体积,可取一瓶无毒的放射性同位素的水溶液,测得瓶内溶液每分钟衰变 $6 \times 10^7$ 次,已知这种同位素的半衰期为2天,现将这瓶溶液倒入水库,8天后可以认为溶液已均匀分布在水库中,这时取 $1.0 \text{ m}^3$ 水库中的水样,测得水样每分钟衰变20次,由此可知,水库中水的体积约为\_\_\_\_\_  $\text{m}^3$ .

**【分析】** 本题涉及同位素衰变方面的规律.

**【解】**  $1.9 \times 10^5$ .

**题 2** (1998·全国物理预赛题) 一个由日本和印度物理学家组成的工作小组做了如下实验:

将 $6 \times 10^4 \text{ kg}$ 铁放在很深的矿井中,以完全隔断宇宙射线的影响,在铁旁有很多很多探测器,只要铁核中有核子(质子和中子)发生衰变,这个事件总能被记录下来.

实验从1980年冬开始到1982年夏结束,历时1.5年,一共记录了3个核子衰变的事例.

已知 $N_0$ 个平均寿命为 $\tau$ 的粒子经过 $t$ 时间后的数目为 $N = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ 个,根据以上事实,试估算出核子的平均寿命.

(已知核子的质量 $m = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ,当 $0 < x \ll 1$ 时, $e^{-x} \approx 1 - x$ )

**【分析】** 本题的关键是正确求出 $6 \times 10^4 \text{ kg}$ 铁中的总核子数,然后利用题目给出的核子数衰变公式及近似计算,即可求得核子的平均寿命 $\tau$ 的表达式.

**【解】** 从 $t=0$ 开始做实验,总核子数为 $N_0$ ,到 $t$ 时刻核子数为 $N$ ,设核子的平均寿命为 $\tau$ ,则

$$N = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

因 
$$\frac{t}{\tau} \ll 1,$$

得 
$$N \approx N_0 \left(1 - \frac{t}{\tau}\right). \quad \text{①}$$

$$N_0 = \frac{6 \times 10^4}{1.66 \times 10^{-27}} = 3.6 \times 10^{31}. \quad \text{②}$$

得 
$$\tau = \frac{N_0}{N_0 - N} \cdot t = 1.8 \times 10^{21} \text{ 年}. \quad \text{③}$$

**题 3** (1995·全国物理预赛题) 已知太阳每秒辐射出  $3.8 \times 10^{26}$  J 的能量. 问:

(1) 太阳每秒钟损失多少吨质量?

(2) 假设太阳放射出的能量是由于“燃烧氢”的核反应  $4\text{H} \rightarrow \text{He} + 2\text{e} + 2\nu$  提供, 这一核反应放出 28 MeV (百万电子伏特) 的能量. 式中 e 为电子,  $\nu$  为中微子. 中微子是一种质量远小于电子质量、穿透力极强的中性粒子. 试计算地球上在与太阳光垂直的每平方米面积上每秒钟有多少中微子到达.

(3) 假设原始的太阳全部由  $\text{H}$  和电子组成, 且仅有 10% 的  $\text{H}$  可供“燃烧”, 试估算太阳的寿命.

已知: 太阳质量  $M_{\text{日}} = 2.0 \times 10^{30}$  kg; 日地距离  $R = 1.5 \times 10^{11}$  m; 电子电荷量  $e = 1.6 \times 10^{-19}$  C; 质子质量  $m_{\text{p}} = 1.7 \times 10^{-27}$  kg.

**【分析】** 由爱因斯坦质能方程可计算出太阳质量损失与光辐射能量间的关系.

**【解】** (1) 由于太阳的辐射功率  $L_{\text{日}} = 3.8 \times 10^{26}$  J/s.

$$\text{得 } \frac{\Delta M}{\Delta t} = \frac{L_{\text{日}}}{c^2} = \frac{3.8 \times 10^{26}}{(3 \times 10^8)^2} \text{ kg/s} = 4.2 \times 10^9 \text{ kg/s} = 4.2 \times 10^6 \text{ t/s}.$$

(2) 由题意知, 太阳每辐射出 14 MeV 能量放出一个中微子. 故太阳每秒放出的中微子数目为  $n = \frac{L_{\text{日}}}{14 \text{ MeV}}$ , 日地距离为  $R = 1.5 \times 10^{11}$  m, 故到达地面上的中微子

$$\begin{aligned} \text{数量为 } \Phi &= \frac{n}{4\pi R^2} = \frac{L_{\text{日}}}{14 \times 1.6 \times 10^{-13} \times 4\pi \times (1.5 \times 10^{11})^2} \text{ 个}/(\text{m}^2 \cdot \text{s}) \\ &= 6 \times 10^{11} \text{ 个}/(\text{m}^2 \cdot \text{s}). \end{aligned}$$

(3) 太阳一生可放出能量

$$E = \frac{M_{\text{日}}}{m_{\text{p}}} \times 10\% \times \frac{28}{4} \text{ MeV} = 8.2 \times 10^{56} \text{ MeV}.$$

$$\begin{aligned} \text{太阳寿命 } T &\approx \frac{E}{L_{\text{日}}} = \frac{8.2 \times 10^{56} \times 1.6 \times 10^{-13}}{3.8 \times 10^{26}} \text{ s} = 3.5 \times 10^{17} \text{ s} \\ &= 1.1 \times 10^{10} \text{ y}. \end{aligned}$$

**题 4** (2008·全国物理复赛题) 质子数与中子数互换的核互为镜像核, 例如  ${}^3\text{He}$  是  ${}^3\text{H}$  的镜像核, 同样  ${}^3\text{H}$  是  ${}^3\text{He}$  的镜像核. 已知  ${}^3\text{H}$  和  ${}^3\text{He}$  原子的质量分别是  $m({}^3\text{H}) = 3.016050 \text{ u}$  和  $m({}^3\text{He}) = 3.016029 \text{ u}$ , 中子质量是  $m_{\text{n}} = 1.008665 \text{ u}$ , 氢原子的质量  $m_{\text{H}} = 1.007825 \text{ u}$ .  $1 \text{ u} = 931.5/c^2 \text{ MeV}$ , 式中  $c$  为光速; 静电力常量  $k = 1.44/e^2 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$ , 式中  $e$  为电子的电荷量.

(1) 试计算  ${}^3\text{H}$  和  ${}^3\text{He}$  的结合能之差为多少兆电子伏.

(2) 已知核子间相互作用的“核力”与电荷几乎没有关系, 又知质子和中子的半径近似相等, 试说明上面所求的结合能差主要是由什么原因造成的, 并由此结合能之差来估计核子半径  $r_{\text{N}}$ .

(3) 实验表明, 核子可以被近似地看成是半径  $r_{\text{N}}$  恒定的球体; 核子数  $A$  较大的



原子核可以近似地被看成是半径为  $R$  的球体. 根据这两点, 试用一个简单模型找出  $R$  与  $A$  的关系式; 利用本题第(2)小题所求得的  $r_N$  的估计值求出此关系式中的系数; 用所求得的关系式计算  $^{208}\text{Pb}$  核的半径  $R_{\text{Pb}}$ .

**【分析】** 这是一道有关原子核结合能及估算核子半径的问题. 解题需涉及爱因斯坦质能关系及核子球体模型.

**【解】** (1) 根据爱因斯坦质能关系,  $^3\text{H}$  和  $^3\text{He}$  的结合能差

$$\Delta B = (m_n - m_{\text{H}} - m_{^3\text{H}} + m_{^3\text{He}})c^2, \quad (1)$$

代入已知数据得

$$\Delta B = 0.763 \text{ MeV}. \quad (2)$$

(2)  $^3\text{He}$  的两个质子之间有库仑排斥能, 而  $^3\text{H}$  没有, 所以  $^3\text{H}$  和  $^3\text{He}$  的结合能差主要来自它们的库仑能差. 依题意, 质子的半径为  $r_N$ , 则  $^3\text{He}$  核中两个质子间的库仑排斥能为

$$E_C = \frac{ke^2}{2r_N}. \quad (3)$$

若这个库仑能等于上述结合能差, 即  $E_C = \Delta B$ , 则有

$$r_N = \frac{ke^2}{2\Delta B}. \quad (4)$$

代入数据得

$$r_N = 0.944 \text{ fm}. \quad (5)$$

(3) 粗略地说, 原子核中每个核子占据的空间体积是  $(2r_N)^3$ . 根据这个简单的模型, 核子数为  $A$  的原子核的体积近似为

$$V = A(2r_N)^3 = 8Ar_N^3. \quad (6)$$

另外, 当  $A$  较大时, 有

$$V = \frac{4\pi}{3}R^3. \quad (7)$$

由⑥⑦两式可得  $R$  和  $A$  的关系为

$$R = \left(\frac{6}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} r_N A^{\frac{1}{3}} = r_0 A^{\frac{1}{3}}. \quad (8)$$

其中系数

$$r_0 = \left(\frac{6}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} r_N. \quad (9)$$

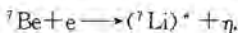
把式⑧代入式⑨得

$$r_0 = 1.17 \text{ fm}. \quad (10)$$

由⑧⑨两式可以算出  $^{208}\text{Pb}$  的半径

$$R_{\text{Pb}} = 6.93 \text{ fm}.$$

**题 5** (2007·全国物理复赛题) 今年是我国著名物理学家、曾任浙江大学物理系主任的王淦昌先生诞辰一百周年. 王先生早在 1941 年就发表论文, 提出了一种探测中微子的方案:  $^7\text{Be}$  原子核可以俘获原子的 K 层电子而成为  $^7\text{Li}$  的激发态 ( $^7\text{Li}$ ) $^*$ , 并放出中微子(当时写做  $\eta$ ):



而  $({}^7\text{Li})^*$  又可以放出光子  $\gamma$  而回到基态  ${}^7\text{Li}$ :



由于中微子本身很难直接观测,通过对上述过程相关物理量的测量,就可以确定中微子的存在.1942年起,美国物理学家艾伦(J. S. Allen)、戴维斯(R. Davis)等人根据王淦昌方案先后进行了实验,初步证实了中微子的存在.1953年美国人莱因斯(F. Reines)在实验中首次发现了中微子.莱因斯与发现轻子的美国物理学家佩尔(M. L. Perl)分享了1995年诺贝尔物理学奖.

现用王淦昌的方案来估算中微子的质量和动量.若实验测得锂核( ${}^7\text{Li}$ )反冲能量(即 ${}^7\text{Li}$ 的动能)的最大值  $E_R = 56.6 \text{ eV}$ ,  $\gamma$ 光子的能量  $h\nu = 0.48 \text{ MeV}$ .已知有关原子核和电子静止能量的数据为  $m_{\text{Li}}c^2 = 6533.84 \text{ MeV}$ ,  $m_{\text{Be}}c^2 = 6534.19 \text{ MeV}$ ,  $m_e c^2 = 0.51 \text{ MeV}$ .设在第一个过程中, ${}^7\text{Be}$ 核是静止的,K层电子的动能也可忽略不计.由以上数据算出的中微子的动量  $p_\eta$  和静止质量  $m_\eta$  各为多少?

**【分析】** 解题时需用到微观粒子的动量守恒与能量守恒及有关相对论知识.

**【解】** 根据题意, ${}^7\text{Be}$ 核和K层电子的动量都为零.在第一个反应中,若用  $p_{\text{Li}}^*$  表示激发态锂核  $({}^7\text{Li})^*$  的动量,  $p_\eta$  表示中微子  $\eta$  的动量,则由动量守恒定律,有

$$p_{\text{Li}}^* + p_\eta = 0. \quad (1)$$

即激发态锂核的动量与中微子的动量大小相等,方向相反.在第二个反应中,若用  $p_{\text{Li}}$  表示反冲锂核  ${}^7\text{Li}$  的动量,  $p_\gamma$  表示光子的动量,则由动量守恒定律有

$$p_{\text{Li}}^* = p_{\text{Li}} + p_\gamma. \quad (2)$$

由①②两式得

$$p_{\text{Li}} = -(p_\gamma + p_\eta). \quad (3)$$

当锂核的反冲动量值  $p_{\text{Li}}$  最大时,其反冲能量也最大.由③式可知,当中微子的动量与  $\gamma$  光子的动量同方向时,锂核的反冲动量达最大值.注意到  $\gamma$  光子的动量大小为

$$p_\gamma = \frac{h\nu}{c}, \quad (4)$$

有

$$p_{\text{Li}} = p_\eta + \frac{h\nu}{c}. \quad (5)$$

由于锂核的反冲能量比其静能小得多,锂核的动能与其动量的关系不必用相对论关系表示,这时有

$$E_R = \frac{p_{\text{Li}}^2}{2m_{\text{Li}}}. \quad (6)$$

由⑤⑥两式得

$$p_\eta c = \sqrt{2m_{\text{Li}}c^2 E_R} - h\nu. \quad (7)$$

代入有关数据,得

$$p_\eta = 0.38 \text{ MeV}/c. \quad (8)$$

用  $E_\eta$  表示中微子的能量,根据相对论,有



$$E_{\gamma} = \sqrt{m_{\gamma}^2 c^4 + p_{\gamma}^2 c^2}. \quad (9)$$

根据能量守恒定律,有

$$m_{B_0} c^2 + m_e c^2 = m_{L_1} c^2 + E_R + h\nu + E_{\gamma}. \quad (10)$$

由⑨⑩两式得

$$m_{\gamma} c^2 = [(m_{B_0} c^2 + m_e c^2 - m_{L_1} c^2 - E_R - h\nu)^2 - p_{\gamma}^2 c^2]^{\frac{1}{2}}. \quad (11)$$

由⑨式和已知数据得

$$m_{\gamma} \approx 0.00 \text{ MeV}/c^2. \quad (12)$$

由⑫式可知,所算出的中微子静止质量的数值在题目所给数据的误差范围之内,故不能确定中微子的静止质量;如果存在,其质量一定小于  $0.01 \text{ MeV}/c^2$ .

### 题 6 (2000·全国物理竞赛题)

(1)质量不为零的  $\omega$  介子静止时衰变为三个质量相同的  $\pi$  介子,即  $\omega \rightarrow 3\pi$ .

试讨论每次衰变产生的三个  $\pi$  介子的动能  $T_1, T_2, T_3$  可能取的全部值.通常表示每一组动能值  $(T_1, T_2, T_3)$  的方法如下:作一个等边三角形  $A_1 A_2 A_3$ , 取其高  $Q$  为三个  $\pi$  介子的动能之和:  $Q = T_1 + T_2 + T_3$ . 在三角形内取一点  $P$ , 令  $P$  点到顶点  $A_i$  的对边的距离为  $T_i (i=1, 2, 3)$ , 则每一点对应一组动能值  $(T_1, T_2, T_3)$ . 衰变时可以实现的全部  $(T_1, T_2, T_3)$  的可能取值, 可以用  $P$  点的可能存在的区域来表示. 这个区域称为运动学允许区. 试在  $\triangle A_1 A_2 A_3$  中找出  $\omega \rightarrow 3\pi$  的运动学允许区. (设衰变后  $\pi$  介子的速度比光速小得多)

(2)正电子偶素是由一个电子与一个正电子组成的束缚态粒子, 记为  $\text{Ps}$ . 它在静止时可以衰变为三个  $\gamma$  光子, 即  $\text{Ps} \rightarrow 3\gamma$ . 试在  $\triangle A_1 A_2 A_3$  中找出三个  $\gamma$  光子的运动学允许区域.

**【分析】** 对此题进行分析, 讨论时的基本出发点是能量守恒与动量守恒, 并且在讨论  $P$  点的可能区域时取极坐标系较为方便. 在讨论  $\gamma$  光子的能量与动量时必须要用相对论的关系来计算.

**【解】** (1) 设衰变产生的 3 个  $\pi$  介子的动量为  $p_1, p_2, p_3$ , 相应的动能为  $T_1, T_2, T_3$ , 则它们必须满足下列条件

$$\text{能量守恒} \quad T_1 + T_2 + T_3 = m_0 c^2 - 3m_{\pi} c^2 = Q. \quad (1)$$

$$\text{动量守恒} \quad p_1 + p_2 + p_3 = 0. \quad (2)$$

$\triangle A_1 A_2 A_3$  内部任一点均已满足②式, 现只需求满足①的  $P$  点的位置范围.

$$\text{由②式可知} \quad p_3^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 \cos\theta_{12}. \quad (3)$$

式中  $p_i = |p_i|$ , 于是有

$$\cos\theta_{12} = \frac{p_3^2 - p_1^2 - p_2^2}{2p_1 p_2}. \quad (4)$$

因  $|\cos\theta_{12}| \leq 1$ , 于是条件②成为

$$\left( \frac{p_3^2 - p_1^2 - p_2^2}{2p_1 p_2} \right)^2 \leq 1. \quad (5)$$

由题意知, 可以使用非相对论的关系





$$T = \frac{P^2}{2m}. \quad (6)$$

上式为

$$\frac{(T_3 - T_1 - T_2)^2}{4T_1 T_2} \leq 1.$$

即

$$(T_3 - T_1 - T_2)^2 \leq 4T_1 T_2. \quad (7)$$

现在 $\triangle A_1 A_2 A_3$ 中取一点 $P$ ,表示其位置用极坐标系 $(\rho, \varphi)$ 比较方便,取三角形的垂心 $O$ 为极坐标系的原点, $OA_1$ 为极轴的正方向, $\overline{OA_1} = \frac{2}{3}Q$ ,则由图5-2-1知

$$T_3 = \frac{Q}{3} + \rho \cos \varphi. \quad (8)$$

$$\text{因而 } T_1 = \frac{Q}{3} - \rho \cos(\varphi - 60^\circ). \quad (9)$$

$$T_2 = \frac{Q}{3} - \rho \cos(\varphi + 60^\circ). \quad (10)$$

将⑧⑨⑩式代入⑦式,得

$$\text{⑦式左边} = \left(-\frac{Q}{3} + 2\rho \cos \varphi\right)^2. \quad (11)$$

$$\text{⑦式右边} = -\frac{4Q^2}{9} - \frac{4}{3}Q\rho \cos \varphi - 4\rho^2 \cos^2 \varphi - 3\rho^2. \quad (12)$$

于是得

$$0 \leq \frac{1}{3}Q^2 - 3\rho^2.$$

即

$$\rho \leq \frac{Q}{3}. \quad (13)$$

于是得3个 $\pi$ 介子的运动学允许区为 $\triangle A_1 A_2 A_3$ 的内切圆的圆周及圆内,如图5-2-2中画有斜线的圆所示.

(2)对于电子偶衰变为三个 $\gamma$ 光子的情况,上面的①~⑤式同样适用.但光子的速度为 $c$ ,其能量和动量必须用相对论的关系来计算.因光子没有静止质量,故其动能 $T$ 应理解为光子的能量 $E$ .而 $E = h\nu, p = \frac{h\nu}{c}$ ,因此

$$T = E = cp. \quad (14)$$

式中 $h$ 为普朗克常量, $c$ 为光速.因此⑤式成为

$$\left| \frac{T_3^2 - T_1^2 - T_2^2}{2T_1 T_2} \right| \leq 1.$$

即

$$T_3^2 - T_1^2 - T_2^2 \leq 2T_1 T_2.$$

或

$$T_3^2 \leq (T_1 + T_2)^2.$$

此即

$$T_3 \leq \pm(T_1 + T_2).$$

同理有

(15)

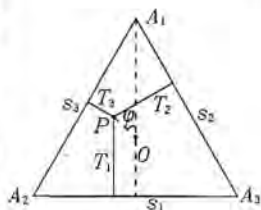


图 5-2-1

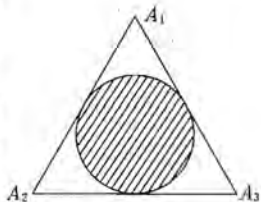


图 5-2-2



$$T_1 \leq \pm(T_2 + T_3). \quad (16)$$

$$T_2 \leq \pm(T_3 + T_1). \quad (17)$$

⑮式有两个解

$$T_3 \leq T_1 + T_2; \quad (18)$$

$$T_3 + T_1 + T_2 \leq 0. \quad (19)$$

⑱式不合理,应该舍弃.⑲式又可写成

$$2T_3 \leq T_1 + T_2 + T_3 = Q,$$

所以 
$$T_3 \leq \frac{Q}{2}. \quad (20)$$

同理,由⑯⑰两式可得

$$T_2 \leq \frac{Q}{2}. \quad (21)$$

$$T_1 \leq \frac{Q}{2}. \quad (22)$$

⑳㉑㉒三式即是  $P$  点所应满足的条件.由图 5-2-3 可知,同时满足上述三条件的  $P$  点在图中阴影区中,它是连接  $\triangle A_1A_2A_3$  各边中点的三角形的内部及三边,此即是 3 个  $\gamma$  光子的运动学允许区.

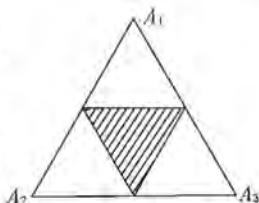


图 5-2-3

#### 题 7 (2000 · 国际物理竞赛题)

#### 放射性与地球年龄

假定地球形成时同位素  $^{238}\text{U}$  和  $^{235}\text{U}$  已经存在,但不存在它们的衰变产物.  $^{238}\text{U}$  和  $^{235}\text{U}$  的衰变被用来确定地球的年龄  $T$ .

(1) 同位素  $^{238}\text{U}$  以  $4.50 \times 10^9$  年为半衰期衰变,衰变过程中其余放射性衰变产物的半衰期比这都短得多,作为一级近似,可忽略这些衰变产物的存在,衰变过程终止于铅的同位素  $^{206}\text{Pb}$ . 用  $^{238}\text{U}$  的半衰期,现在  $^{238}\text{U}$  的数目  $^{238}N$  表示出由放射衰变产生的  $^{206}\text{Pb}$  原子的数目  $^{206}n$ . (运算中以  $10^9$  年为单位为宜)

(2) 类似地,  $^{235}\text{U}$  在通过一系列较短半衰期产物后,以  $0.710 \times 10^9$  年为半衰期衰变,终止于稳定的同位素  $^{207}\text{Pb}$ . 写出  $^{207}n$  与  $^{235}N$  和  $^{235}\text{U}$  半衰期的关系式.

(3) 一种铅和铀的混合矿石,用质谱仪对它进行分析,测得这种矿石中铅同位素  $^{204}\text{Pb}$ ,  $^{206}\text{Pb}$  和  $^{207}\text{Pb}$  的相对浓度比为 1.00 : 29.6 : 22.6. 由于同位素  $^{204}\text{Pb}$  不是放射性的,可以用作分析时的参考. 分析一种纯铅矿石,给出这三种同位素的相对浓度之比 1.00 : 17.9 : 15.5. 已知比值  $^{238}N : ^{235}N$  为 137 : 1, 试导出包含  $T$  的关系式.

(4) 假定地球的年龄  $T$  比这两种铀的半衰期都大得多,由此求出  $T$  的近似值.

(5) 显然上述近似值并不明显大于同位素中较长的半衰期,但用这个近似值可以获得精确度更高的  $T$  值. 由此在精度 2% 以内估算地球的年龄  $T$ .

【分析】 解答本题的关键是正确理解原子衰变的半衰期概念,运用公式  $N = N_0 2^{-\frac{t}{T}}$ , 辅以数学的对数运算,即可得出结果.

【解】(1)  $N = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{\tau}}$ , 其中  $N_0$  为原始原子数,  $\tau$  为半衰期.

$$n = N_0 - N_0 2^{-\frac{t}{\tau}} = N_0 (1 - 2^{-\frac{t}{\tau}}).$$

用现在原子数  $N$  表示, 则为  $n = N(2^{\frac{t}{\tau}} - 1)$ .

所以  $^{206}\text{n} = ^{238}\text{N}(2^{\frac{t}{4.50}} - 1)$ , 其中  $t$  以  $10^9$  年为单位.

(2) 同理,  $^{207}\text{n} = ^{235}\text{N}(2^{\frac{t}{0.710}} - 1)$ .

$$(3) \quad \frac{^{206}\text{n}}{^{207}\text{n}} = \frac{^{238}\text{N}}{^{235}\text{N}} \cdot \frac{2^{\frac{t}{4.50}} - 1}{2^{\frac{t}{0.710}} - 1}.$$

$$\text{即} \quad \frac{29.6 - 17.9}{22.6 - 15.5} = 137 \times \frac{2^{\frac{t}{4.50}} - 1}{2^{\frac{t}{0.710}} - 1} \text{ 或 } 0.012(2^{\frac{t}{0.710}} - 1) = (2^{\frac{t}{4.50}} - 1).$$

(4) 设  $T \gg 4.50$ , 在上式中可略去 1, 而有

$$0.012 \cdot 2^{\frac{T}{0.710}} = 2^{\frac{T}{4.50}},$$

$$\text{即} \quad 0.012 = 2^{T(\frac{1}{4.50} - \frac{1}{0.710})}.$$

$$T = \frac{\ln 0.012}{\ln 2 \cdot \left( \frac{1}{4.50} - \frac{1}{0.71} \right)} = 5.38.$$

$$T = 5.38 \times 10^9 \text{ 年}.$$

(5)  $T$  并不  $\gg 4.5 \times 10^9$  年, 但  $T > 0.710 \times 10^9$  年, 可以用  $T$  的近似值 (称为  $T^*$   $= 5.38 \times 10^9$  年) 代入 (3) 中未略去 1 的方程的  $2^{\frac{T}{4.50}}$  项中, 计算  $2^{\frac{T}{0.71}}$  项中的  $T$ , 以得到  $T$  的较好近似值, 再重复以上运算, 得出更好的  $T$  近似值.

$$0.012(2^{\frac{T}{0.71}} - 1) = 2^{\frac{T^*}{4.50}} - 1.$$

$$2^{\frac{T}{0.71}} - 1 = \frac{2^{\frac{5.38}{4.50}} - 1}{0.012} = 107.5.$$

$$\text{得} \quad T = 0.71 \frac{\ln 108.5}{\ln 2} = 4.80.$$

$$\text{再取} \quad T^* = 4.80.$$

$$2^{\frac{T}{0.71}} - 1 = \frac{2^{\frac{4.80}{4.50}} - 1}{0.012} = 91.2.$$

$$T = 0.71 \frac{\ln 92.2}{\ln 2} = 4.63.$$

再作一次运算得  $T = 4.58$ . 故  $T$  的更精确答案在  $4.5 \times 10^9$  年到  $4.6 \times 10^9$  年范围内 (两个值都算对).



## 第六章

# 其 他

## 第一节 物理学史和当代科技报道

### 题 1 (2007·全国物理预赛题)

(1)2006年诺贝尔物理学奖授予美国科学家约翰·马瑟和乔治·斯穆特,以表彰他们发现了宇宙微波背景辐射的黑体辐射形式和各向异性,这一发现为有关宇宙起源的\_\_\_\_\_理论提供了进一步的支持,使宇宙学进入了“精确研究”时代.

(2)恒星演化到了后期,某些恒星在其内部核燃料耗尽时,会发生强烈的爆发;在短短的几天中,亮度陡增千万倍甚至上亿倍.我国《宋史》第56卷中对当时观测到的上述现象做了详细记载.2006年5月是我国发现此现象1000周年,为此在杭州召开了有关的国际学术研讨会.天文学上把演化到这一阶段的恒星称为\_\_\_\_\_.恒星演变到这一阶段,预示着一颗恒星的终结.此后,它可能成为\_\_\_\_\_或\_\_\_\_\_.

(3)2006年11月21日,中国、欧盟、美国、日本、韩国、俄罗斯和印度七方在法国总统府正式签署一个能源方面的联合实施协定及相关文件,该协定中的能源是指\_\_\_\_\_能源.

(4)潮汐是一种常见的自然现象,发生在杭州湾钱塘江入海口的“钱江潮”是闻名世界的潮汐现象.在农历初一和十五前后各有一次大潮,在两次大潮之间又各有一次小潮.

试把每月中出现两次大潮时地球、月球和太阳的相对位置示意图定性地画在下面:

试把每月中出现两次小潮时地球、月球和太阳的相对位置示意图定性地画在下面:

**【解】** (1)大爆炸;(2)超新星;中子星;黑洞;(3)核聚变;(4)大潮时如图6-1-1所示;小潮时如图6-1-2所示.

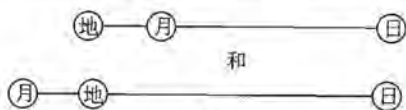


图 6-1-1



图 6-1-2

**题 2** (2005·全国物理预赛题) 在横线上填上恰当的内容。

在 2004 年 6 月 10 日联合国大会第 58 次会议上,鼓掌通过一项决议。决议摘录如下:

联合国大会,

承认物理学为了解自然界提供了重要基础,

注意到物理学及其应用是当今众多技术进步的基石,

确信物理教育提供了建设人类发展所必需的科学基础设施的工具,

意识到 2005 年是爱因斯坦科学发现一百周年,这些发现为现代物理学奠定了基础,

i. ....;

ii. ....;

iii. 宣告 2005 年为\_\_\_\_\_年。

爱因斯坦在现代物理学领域作出了很多重要贡献,试举出其中两项:

\_\_\_\_\_;

**【解】** 国际物理(或世界物理);相对论;光的量子性。

**题 3** (2000·全国物理预赛题) 我国在 1999 年 11 月 20 日用新型运载火箭成功地发射了一艘实验航天飞行器,它被命名为\_\_\_\_\_号,它的目的是为\_\_\_\_\_作准备。

**【解】** 神舟;载人飞行。

**题 4** (1999·全国物理预赛题) 1998 年 6 月 3 日,美国发射的航天飞机“发现者”号搭载了一台  $\alpha$  磁谱仪,其中一个关键部件是由中国科学院电工研究所设计制造的直径 1 200 mm、高 800 mm、中心磁感应强度为 0.134 0 T 的永久磁体。用这个  $\alpha$  磁谱仪期望探测到宇宙空间中可能存在的\_\_\_\_\_。

**【解】** 反物质。

**题 5** (1999·全国物理预赛题) 到 1998 年底为止,获得诺贝尔物理学奖的华人共有\_\_\_\_\_位,他们的姓名分别是\_\_\_\_\_。



【解】 5; 杨振宁、李政道、丁肇中、朱棣文、崔琦。

题6 (1999·全国物理预赛题) 到1998年底为止,人类到达过的地球以外的星球有\_\_\_\_\_ ;由地球上发射的探测器到达过的地球以外的星球有\_\_\_\_\_。

【解】 月球;月球、火星。

题7 (2002·全国物理决赛题) (1)一根长为 $l_0$ 、横截面积为 $S$ 的匀质圆柱体,在地面上静止时测得其密度为 $\rho_0$ 。当圆柱体沿轴线方向以速度 $v=0.9c$ 相对于地面做匀速运动时,相对地面上的观测者再计算其密度 $\rho$ 等于多少。(c为光速)

(2)有一个电子,已知它的德布罗意波(物质波)是波长为 $\lambda$ 、向 $x$ 的正方向传播的平面波。它的动量 $p_x$ 等于多少? 它的坐标 $x$ 如何?

【分析】 本题第(1)问应考虑相对论长度收缩效应,第(2)问则由德布罗意关系和不确定关系式求解。

【解】 (1)对于地面上的观察者,圆柱体沿运动方向上的长度为

$$l = l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = l_0 \sqrt{1 - 0.81} = 0.436l_0. \quad (1)$$

圆柱体的质量为

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \quad (2)$$

圆柱体的密度

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m_0}{V \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \quad (3)$$

式中 $V$ 为圆柱体的体积,垂直于运动方向的横截面积 $S$ ,在运动过程中不发生改变,有

$$V = Sl = Sl_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}. \quad (4)$$

所以

$$\rho = \frac{m_0}{Sl_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right]^2 = \frac{\rho_0}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = 5.26\rho_0. \quad (5)$$

(2)根据德布罗意关系

$$p_x = \frac{h}{\lambda}. \quad (6)$$

现 $\Delta p_x = 0$ ,根据不确定关系 $\Delta x \Delta p_x > h$ ,即电子的坐标 $x$ ,取各值都有可能,坐标 $x$ 值不确定。

## 第二节 自然、技术与前沿

**题 1** (2004·全国物理预赛题) (1)a. 原子大小的数量级为\_\_\_\_\_m.

b. 原子核大小的数量级为\_\_\_\_\_m.

c. 氦原子的质量约为\_\_\_\_\_kg.

d. 一个可见光光子的能量的数量级为\_\_\_\_\_J.

e. 在标准状态下,  $1\text{ cm}^3$  气体中的分子数约为\_\_\_\_\_.

(普朗克常量  $h=6.63\times 10^{-34}\text{ J}\cdot\text{s}$ ; 阿伏加德罗常数  $N_A=6.02\times 10^{23}\text{ mol}^{-1}$ )

(2) 已知某个平面镜反射的光能量为入射光能量的 80%. 试判断下列说法是否正确, 并简述理由.

a. 反射光子数为入射光子数的 80%;

b. 每个反射光子的能量是入射光子能量的 80%.

**【解】** (1)a.  $10^{-10}$ ; b.  $10^{-15}$ ; c.  $6.6\times 10^{-27}$ ; d.  $10^{-19}$ ; e.  $2.7\times 10^{19}$ ;

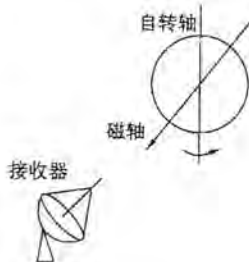
(2)a 正确, b 不正确. 理由: 反射时光频率  $\nu$  不变, 这表明每个光子能量  $h\nu$  不变.

**题 2** (2000·全国物理预赛题) 当质量为  $m$  的质点距离一个质量为  $M$ 、半径为  $R$  的质量均匀分布的致密天体中心的距离为  $r$  ( $r\geq R$ ) 时, 其引力势能为  $E_p = -\frac{GMm}{r}$ , 其中  $G=6.67\times 10^{-11}\text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$  为万有引力常量. 设致密天体是中子星, 其半径  $R=10\text{ km}$ , 质量  $M=1.5M_\odot$  ( $1M_\odot=2.0\times 10^{30}\text{ kg}$ , 为太阳的质量).

(1)  $1\text{ kg}$  的物质从无限远处被吸引到中子星的表面时所释放的引力势能为多少?

(2) 在氢核聚变反应中, 若参加核反应的原料的质量为  $m$ , 则反应中的质量亏损为  $0.0072m$ , 问  $1\text{ kg}$  的原料通过核聚变提供的能量与第(1)问中所释放的引力势能之比为多少?

(3) 天文学家认为: 脉冲星是旋转中子星, 中子星的电磁辐射是连续的且沿磁轴方向最强, 磁轴与自转方向有一夹角(如图 6-2-1 所示), 在地球上的接受器接收的一连串周期出现的脉冲是脉冲星的电磁辐射, 试由上述看法估算地球上接收到的两个脉冲之间的时间间隔的下限.



6-2-1

**【分析】** 当中子星的磁轴方向转到正对接受器时, 接受器接收到的电磁辐射最强, 因而接受器接收到的是一系列脉冲信号, 相邻两个脉冲信号之间的时间间隔就等于中子星的自转周期. 对于做高速自转运动的中子星来说, 其上任一质元做圆



周运动所需向心力应由万有引力提供,由此可求得自转的最小周期。

【解】(1)根据能量守恒定律,质量为  $m$  的物质从无限远处被吸引到中子星的表面时所释放的引力势能  $\Delta E_1$  应等于对应始末位置的引力势能的变化,故有

$$\Delta E_1 = 0 - \left( -\frac{GMm}{R} \right) = \frac{GMm}{R}. \quad (1)$$

代入有关数据,得到

$$\Delta E_1 \approx 2.0 \times 10^{16} \text{ J}. \quad (2)$$

(2)在氢核聚变反应中,每千克核反应原料提供的能量为

$$\Delta E_2 = 0.0072mc^2. \quad (3)$$

所求能量比为

$$\frac{\Delta E_1}{\Delta E_2} \approx 31. \quad (4)$$

(3)根据题意,可知接收到的两个脉冲之间的时间间隔即为中子星的自转周期,中子星做高速自转时,位于赤道处质量为  $\Delta M$  的中子星质元所需的向心力不能超过对应的万有引力,否则将会因不能保持匀速圆周运动而使中子星破裂。因此有

$$\Delta m\omega^2 R \leq \frac{GM\Delta m}{R^2}, \quad (5)$$

式中

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau}, \quad (6)$$

为中子星的自转角速度,  $\tau$  为中子星的自转周期,由⑤⑥式得到

$$\tau \geq 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{MG}}. \quad (7)$$

代入数据得到

$$\tau \geq 4.4 \times 10^{-4} \text{ s}. \quad (8)$$

故时间间隔的下限为  $4.4 \times 10^{-4} \text{ s}$ 。

**题 3** (2005·全国物理竞赛题) 封闭的车厢中有一点光源  $S$ ,在距光源  $l$  处有一半半径为  $r$  的圆孔,其圆心为  $O_1$ ,光源一直在发光,并通过圆孔射出。车厢以高速  $v$  沿固定在水平地面上的  $x$  轴正方向匀速运动,如图 6-2-2 所示。某一时刻,点光源  $S$  恰位于  $x$  轴的原点  $O$  的正上方,取此时刻作为车厢参考系与地面参考系的时间零点。在地面参考系中坐标为  $x_A$  处放一半径为  $R$  ( $R > r$ ) 的不透光的圆形挡板,板面与圆孔所在的平面都与  $x$  轴垂直。板的圆心  $O_2$  与  $S, O_1$  都等高。起始时刻经圆孔射出的光束会有部分从挡板周围射到挡板后面大屏幕(图中未画出)上。由于车厢在运动,将会出现挡板将光束完全遮住,即没有光射到屏上的情况。不考虑光的衍射。试求:

1. 车厢参考系中(所测出的)刚出现这种情况的时刻。
2. 地面参考系中(所测出的)刚出现这种情况的时刻。

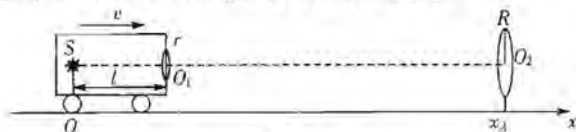


图 6-2-2



【分析】 本题需要用到相对论规律,只要正确运用长度收缩效应求得有关距离并分析相关几何关系即可求解.

【解】 1. 相对于车厢参考系,地面连同挡板以速度  $v$  趋向光源  $S$  运动. 由  $S$  发出的光经小孔射出后成锥形光束,随离开光源距离的增大,其横截面积逐渐扩大. 若距  $S$  的距离为  $L$  处光束的横截面正好是半径为  $R$  的圆面,如图 6-2-3 所示,则有

$$\frac{r}{l} = \frac{R}{L}.$$

可得

$$L = \frac{Rl}{r}.$$

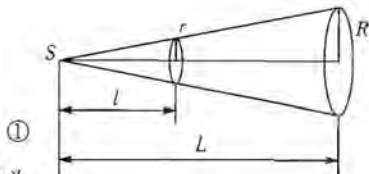


图 6-2-3

设想车厢足够长,并设想在车厢前端距  $S$  为  $L$  处放置一个半径为  $R$  的环,相对车厢静止,则光束恰好从环内射出. 当挡板运动到与此环相遇时,挡板就会将光束完全遮住. 此时,在车厢参考系中挡板离光源  $S$  的距离就是  $L$ . 在车厢参考系中,初始时,根据相对论,挡板离光源的距离为

$$x_A \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (2)$$

故出现挡板完全遮住光束的时刻为

$$t = \frac{x_A \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - L}{v}. \quad (3)$$

由①③式得

$$t = \frac{x_A \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{v} - \frac{Rl}{rv}. \quad (4)$$

2. 相对于地面参考系,光源与车厢以速度  $v$  向挡板运动. 光源与孔之间的距离缩短为

$$l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (5)$$

而孔半径  $r$  不变,所以锥形光束的顶角变大,环到  $S$  的距离即挡板完全遮光时距离应为

$$L' = \frac{Rl'}{r} = \frac{Rl}{r} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (6)$$

初始时,挡板离  $S$  的距离为  $x_A$ ,出现挡板完全遮住光束的时刻为

$$t' = \frac{x_A - L'}{v} = \frac{x_A}{v} - \frac{Rl}{rv} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$



**题 4** (2004·全国物理复赛题)  $\mu$  子在相对自身静止的惯性参考系中的平均寿命  $\tau_0 \approx 2.0 \times 10^{-6} \text{ s}$ . 宇宙射线与大气在高空某处发生核反应产生一批  $\mu$  子, 以  $v=0.99c$  的速度 ( $c$  为真空中的光速) 向下运动并衰变. 根据放射性衰变定律, 相对给定惯性参考系, 若  $t=0$  时刻的粒子数为  $N(0)$ ,  $t$  时刻剩余的粒子数为  $N(t)$ , 则有  $N(t) = N(0)e^{-\frac{t}{\tau}}$ , 式中  $\tau$  为相对该惯性系粒子的平均寿命. 若能到达地面的  $\mu$  子数为原来的 5%, 试估算  $\mu$  子产生处相对于地面的高度  $h$ . 不考虑重力和地磁场对  $\mu$  子运动的影响.

**【分析】** 此题需用到狭义相对论的知识进行有关计算.

**【解】** 因  $\mu$  子在相对自身静止的惯性系中的平均寿命

$$\tau_0 \approx 2.0 \times 10^{-6} \text{ s}.$$

根据时间膨胀效应, 在地球上观测到的  $\mu$  子平均寿命为  $\tau$ ,

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}. \quad (1)$$

代入数据得

$$\tau = 1.4 \times 10^{-5} \text{ s}. \quad (2)$$

相对地面, 若  $\mu$  子到达地面所需时间为  $t$ , 则在  $t$  时刻剩余的  $\mu$  子数为

$$N(t) = N(0)e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (3)$$

根据题意有

$$\frac{N(t)}{N(0)} = e^{-\frac{t}{\tau}} = 5\%. \quad (4)$$

对上式等号两边取  $e$  为底的对数得

$$t = -\tau \ln \frac{5}{100}. \quad (5)$$

代入数据得

$$t = 4.19 \times 10^{-5} \text{ s}. \quad (6)$$

根据题意, 可以把  $\mu$  子的运动看做匀速直线运动, 有

$$h = vt. \quad (7)$$

代入数据得

$$h = 1.24 \times 10^4 \text{ m}. \quad (8)$$

**题 5** (2000·全国物理复赛题) 1995 年, 美国费米国家实验室 CDF 实验组和 D0 实验组在质子反质子对撞机 TEVATRON 的实验中, 观察到了顶夸克, 测得它的静止质量  $m_t = 1.75 \times 10^{11} \text{ eV}/c^2 = 3.1 \times 10^{-25} \text{ kg}$ , 寿命  $\tau = 0.4 \times 10^{-24} \text{ s}$ , 这是近十几年来粒子物理研究最重要的实验进展之一.

(1) 正反顶夸克之间的强相互作用势能可写为  $V(r) = -k \frac{4a_s}{3r}$ , 式中  $r$  是正反顶夸克之间的距离,  $a_s = 0.12$  是强相互作用耦合常数,  $k$  是与单位制有关的常数, 在国际单位制中  $k = 0.319 \times 10^{-25} \text{ J} \cdot \text{m}$ . 为估算正反顶夸克能否构成一个处在束

缚状态的系统,可把束缚状态设想为正反顶夸克在彼此间的吸收力作用下绕它们连线的中点做匀速圆周运动.如能构成束缚态,试用玻尔理论确定系统处于基态中正反顶夸克之间的距离 $r_0$ .已知处于束缚态的正反顶夸克粒子满足量子化条件

$$2mv\left(\frac{r_0}{2}\right) = n\frac{h}{2\pi}, n=1,2,3\cdots$$

式中 $mv\left(\frac{r_0}{2}\right)$ 为一个粒子的动量 $mv$ 与其轨道半径 $\frac{r_0}{2}$ 的乘积, $n$ 为量子数. $h=6.63\times 10^{-34}\text{ J}\cdot\text{s}$ 为普朗克常量.

(2)试求正反顶夸克在上述设想的基态中做匀速圆周运动的周期 $T$ .你认为正反顶夸克的这种束缚态能存在吗?

**【分析】** 求解过程首先注意以下两点:

(1)由于正反顶夸克间的强相互作用势能与两个点电荷之间库仑势能具有相同形式,由此可用类比法求得其相互作用力.

(2)按照玻尔理论,粒子系统的状态是量子化的,当其处于基态时,量子数 $n$ 应取1.

注意以上两点,再利用圆周运动的规律,本题可以得解.

**【解】** (1)相距为 $r$ 的电荷量为 $Q_1$ 与 $Q_2$ 的两点电荷之间的库仑力 $F_Q$ 与库仑势能 $V_Q$ 公式为

$$F_Q = k_Q \frac{Q_1 Q_2}{r^2}, V_Q = -k_Q \frac{Q_1 Q_2}{r}. \quad (1)$$

现在已知正反顶夸克之间的强相互作用势能为

$$V(r) = -k \frac{4a_s}{3r}.$$

根据直接类比可知,正反顶夸克之间的强相互作用力为

$$F(r) = -k \frac{4a_s}{3r^2}. \quad (2)$$

设正反顶夸克绕其连线的中点做匀速圆周运动的速率为 $v$ ,因两者相距 $r_0$ ,两者所受的向心力均为 $F(r_0)$ ,两者的运动方程均为

$$\frac{m_t v^2}{\frac{r_0}{2}} = k \frac{4a_s}{3r_0^2}. \quad (3)$$

由题给的量子化条件,粒子处于基态时,取量子数 $n=1$ ,得

$$2m_t v \left(\frac{r_0}{2}\right) = \frac{h}{2\pi}. \quad (4)$$

由③④两式解得

$$r_0 = \frac{3h^2}{8\pi^2 m_t a_s k}. \quad (5)$$

代入数值得

$$r_0 = 1.4 \times 10^{-17} \text{ m}. \quad (6)$$



(2)由③④两式,可得

$$v = \frac{\pi}{h} \left( k \frac{4a_1}{3} \right). \quad (7)$$

由  $v$  和  $r_0$  可算出正反顶夸克做匀速圆周运动的周期  $T$  为

$$T = \frac{2\pi \left( \frac{r_0}{2} \right)}{v} = \frac{h^3}{2\pi^2 m_c \left( \frac{k4a_1}{3} \right)^2}, \quad (8)$$

代入数值得

$$T = 1.8 \times 10^{-24} \text{ s}. \quad (9)$$

由此可知

$$\frac{r}{T} = 0.2. \quad (10)$$

因正反顶夸克的寿命只有它们组成的束缚系统的周期的  $\frac{1}{5}$ , 故正反顶夸克的束缚态通常是不存在的.

**题 6** (2008·全国物理决赛题) 根据广义相对论, 光线在星体的引力场中会发生弯曲, 在包含引力中心的平面内是一条在引力中心附近微弯的曲线. 它距离引力中心最近的点称为光线的近星点. 通过近星点与引力中心的直线是光线的对称轴. 若在光线所在平面内选择引力中心为平面极坐标  $(r, \varphi)$  的原点, 选取光线的对称轴为坐标极轴, 则光线方程(光子的轨迹方程)为

$$r = \frac{\frac{GM}{c^2}}{a \cos \varphi + a^2 (1 + \sin^2 \varphi)},$$

$G$  是万有引力恒量,  $M$  是星体质量,  $c$  是光速,  $a$  是绝对值远小于 1 的参数. 现在假设离地球 80.0 光年处有一星体, 在它与地球连线的中点处有一白矮星. 如果经过该白矮星两侧的星光对地球上的观测者所张的视角是  $1.80 \times 10^{-7} \text{ rad}$ , 试问此白矮星的质量是多少千克? 已知  $G = 6.673 \times 10^{-11} \text{ m}^3 / (\text{kg} \cdot \text{s}^2)$ .

**【分析】** 根据广义相对论所得的光线方程式中包含了引力中心星体(本题为白矮星)的质量, 故可用观测方式来测量白矮星的质量. 本题首先弄明白发光体( $S$ ), 白矮星( $O$ ), 地球( $E$  即观察者)以及光线在题给坐标系中位置关系, 作出题解中所示的简图后再做计算, 其间包含对光线方程具有偶函数这一数学特性的理解, 运算过程中注意近似统计好方法的合理和灵活运用, 此外由于光线对观察者所张视角可有不同的表达式, 故本题可有多种解法.

**【解】** 由于方程

$$r = \frac{\frac{GM}{c^2}}{a \cos \varphi + a^2 (1 + \sin^2 \varphi)}. \quad (1)$$

是  $\varphi$  的偶函数, 光线关于极轴对称. 光线在坐标原点左侧的情形对应于  $a < 0$ ; 光线在坐标原点右侧的情形对应于  $a > 0$ . 图 6-2-4 是  $a < 0$  的情形, 图中极轴为

$Ox$ , 白矮星在原点  $O$  处. 在式①中代入近星点坐标  $r=r_m, \varphi=\pi$ , 并注意到  $a^2 \ll |a|$ , 有

$$a \approx -\frac{GM}{c^2 r_m} \quad (2)$$

经过白矮星两侧的星光对观测者所张的视角  $\theta$  可以有不同的表达方式, 相应的问题有不同的解法.

解法一 若从白矮星到地球的距离为  $d$ , 则可近似地写出

$$\theta_i \approx \frac{2r_m}{d} \quad (3)$$

在式①中代入观测者的坐标  $r=d, \varphi=-\frac{\pi}{2}$ , 有

$$a^2 \approx \frac{GM}{2c^2 d} \quad (4)$$

由②与④两式消去  $a$ , 可以解出

$$r_m = \sqrt{\frac{2GMd}{c^2}} \quad (5)$$

把式⑤代入式③得

$$\theta_i \approx \sqrt{\frac{8GM}{c^2 d}} \quad (6)$$

即

$$M \approx \frac{\theta_i^2 c^2 d}{8G} \quad (7)$$

其中  $d=3.787 \times 10^{17} \text{ m}$ , 代入数值就可算出

$$M \approx 2.07 \times 10^{30} \text{ kg}$$

解法二 光线射向无限远处的坐标可以写成

$$r \rightarrow \infty, \varphi = -\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2} \quad (8)$$

近似地取  $\theta_i \approx \theta$ , 把式⑧代入式①, 要求式①分母为零, 并注意到  $\theta \ll 1$ , 有

$$\frac{a\theta}{2} + 2a^2 = 0.$$

所以

$$\theta_i \approx \theta = -4a = \sqrt{\frac{8GM}{c^2 d}} \quad (9)$$

其中用到式④, 并注意到  $a < 0$ . 式⑩与式⑥相同, 从而也有式③.

解法三 星光对观测者所张的视角  $\theta$  应等于两条光线在观测者处切线的夹角, 有

$$\sin \frac{\theta_i}{2} = \frac{\Delta(r \cos \varphi)}{\Delta r} = \cos \varphi - r \sin \varphi \frac{\Delta \varphi}{\Delta r} \quad (10)$$

由光线方程①算出  $\frac{\Delta \varphi}{\Delta r}$  有

$$\sin \frac{\theta_i}{2} = \cos \varphi - r \sin \varphi \frac{\frac{GM}{c^2}}{r^2 a \sin \varphi} = \cos \varphi - \frac{GM}{c^2 r a}$$

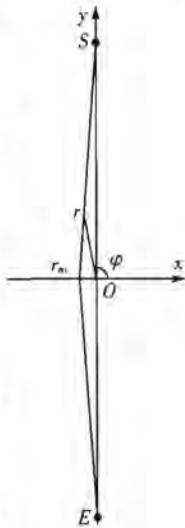


图 6-2-4



代入观测者的坐标  $r=d, \varphi=-\frac{\pi}{2}$  以及  $a$  的表达式④, 并注意到  $\theta_s$  很小, 就有

$$\theta_s \approx \frac{2GM}{c^2 d} \sqrt{\frac{2c^2 d}{GM}} = \sqrt{\frac{8GM}{c^2 d}}$$

与式⑥相同, 所以也得到了式⑧.

**解法四** 用式②把方程①改写成

$$-r_m = r \cos \varphi - \frac{GM}{c^2 r_m r} [(r \cos \varphi)^2 + 2(r \sin \varphi)^2],$$

即

$$x = -r_m + \frac{GM}{c^2 r_m r} (x^2 + 2y^2). \quad (12)$$

当  $y \rightarrow -\infty$  时, 式⑫的渐近式为

$$x = -r_m - \frac{2GM}{c^2 r_m} y.$$

这是直线方程, 它在  $x$  轴上的截距为  $-r_m$ , 斜率为

$$\frac{1}{-\frac{2GM}{c^2 r_m}} \approx \frac{1}{-\tan(\frac{\theta_s}{2})} \approx -\frac{2}{\theta_s}$$

于是有  $\theta_s \approx \frac{4GM}{c^2 r_m}$ ,  $r_m$  用式⑤代入后, 得到式⑥, 从而也有式⑧.

**例 7** (2006·全国物理竞赛题) 在高能物理中, 实验证明, 在实验室参考系中, 一个运动的质子与一个静止的质子相碰时, 碰后可能再产生一个质子和一个反质子, 即总共存在三个质子和一个反质子. 试求发生这一情况时, 碰前那个运动质子的能量(对实验室参考系)的最小值(即阈值)是多少.

已知质子和反质子的静止质量都是  $m_0 = 1.67 \times 10^{-27}$  kg. 不考虑粒子间的静电作用.

**【分析】** 由于题目并没有给出作用后粒子可能的状态(如运动方向间的关系), 则应先设想几种可能情况, 但无论哪种情况上述过程都满足相对论能量和动量守恒, 以及相对论中能量和动量间的基本关系式, 运用这些规律仔细分析哪种情况满足题目要求后再深入求解.

**【解】** 从实验室参考系来看, 碰前系统的总动量等于运动的那个质子的动量, 设其方向沿  $x$  轴正方向, 碰撞前后系统的总动量守恒, 总能量守恒. 若要碰后能存在三个质子和一个反质子且总能量为最小值, 则可论证这四个粒子的动量必定相等.

(1) 先讨论碰后四个粒子的动量都沿  $x$  轴正方向的情况.

令  $p_1, p_2, p_3, p_4$  分别表示它们动量的大小, 这四个动量中, 若有任何两个不相等, 如  $p_1 \neq p_2$ , 设  $p_1 < p_2$ , 则若将  $p_1$  增加  $\Delta p$  ( $\Delta p < p_2 - p_1$ ) 而将  $p_2$  减少  $\Delta p$  (这时总动量不变), 则有

$$(p_1 + \Delta p)^2 - p_1^2 = 2p_1 \Delta p + (\Delta p)^2.$$

$$p_2^2 - (p_2 - \Delta p)^2 = 2p_2 \Delta p - (\Delta p)^2.$$

这样一来,第一个粒子能量的平方增加了  $c^2[2p_1\Delta p + (\Delta p)^2]$ ,而第二个粒子能量的平方减少了  $c^2[2p_2\Delta p - (\Delta p)^2]$ ,两个粒子能量平方的净增量为

$$c^2[2p_1\Delta p + (\Delta p)^2] - c^2[2p_2\Delta p - (\Delta p)^2] = c^2[2\Delta p(p_1 - p_2 + \Delta p)]. \quad (1)$$

因已设  $p_1 < p_2$ ,且  $\Delta p < p_2 - p_1$ ,所以净增量是负的,总能量将减少.这就是说,设  $p_1 \neq p_2$  时对应的总能量并不是最小值.由此可判断,四个粒子的动量必相等.

(2)若四个粒子中,有一个粒子其动量  $p_1$  沿  $x$  轴的负方向,因为总动量守恒,则必有沿  $x$  轴正方向运动的另一粒子的动量增加了  $p_1$ ,因为能量的平方与  $p^2$  成线性关系,所以这时的总能量必然大于  $p_1$  沿  $x$  轴的正方向运动时的能量.也就是说,只要四个粒子中,有沿  $x$  轴的负方向运动的,则总能量必不是最小值.

(3)若四个粒子的动量的方向不在同一直线上,这时将它们沿  $x$  轴方向和垂直于  $x$  轴方向分解,沿  $x$  轴方向总动量守恒;垂直于  $x$  轴方向的动量互相抵消,但它们却使粒子的能量增大了,也就是说,这时的能量也不是最小值.

总结以上可见,要想碰后四个粒子的总能量最小,根据总动量守恒、能量守恒及相对论能量和动量关系式可知,碰后四个粒子的动量必相等.

设碰前运动质子的动量为  $p$ ,质量为  $m$ ,碰后四个粒子的动量为  $p_1, p_2, p_3$  和  $p_4$ ,四个粒子的质量分别为  $m_1, m_2, m_3$  和  $m_4$ ,根据动量守恒和能量守恒,有

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + p_4. \quad (2)$$

$$mc^2 + m_0c^2 = m_1c^2 + m_2c^2 + m_3c^2 + m_4c^2. \quad (3)$$

由上面论述可知

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{p}{4}. \quad (4)$$

再由上面论述可知,碰后四个粒子的质量必相等,以  $m'$  表示碰后四个粒子中每个粒子的质量,由③式得

$$mc^2 + m_0c^2 = 4m'c^2. \quad (5)$$

对碰前那个运动的质子,由相对论能量和动量关系有

$$(mc^2)^2 = c^2p^2 + m_0^2c^4. \quad (6)$$

对四个粒子中任一个粒子,由相对论能量和动量关系有

$$(m'c^2)^2 = c^2\left(\frac{p}{4}\right)^2 + m_0^2c^4. \quad (7)$$

由⑤⑥⑦式可得

$$mc^2 = 7m_0c^2. \quad (8)$$

代入数据得

$$mc^2 = 1.05 \times 10^{-9} \text{ J}.$$

**题 8** (2005·全国物理决赛题) 设某原子核处于基态时的静止质量为  $m_0$ ,处于激发态时其能量与基态能量之差为  $\Delta E$ ,且受激原子核处于自由状态.

(1)假设处于激发态的原子核原先静止,在发射一个光子后回到基态,试求其发射光子的波长  $\lambda_0$ .



(2) 由于无规则热运动,大量处于激发态的原子核原先不是静止的,可以沿任何方向运动,且速度的大小也是无规则的,可具有任何值.现只考查那些相对实验室是向着或背着仪器做直线运动的激发态原子核,假定它们速度的最大值是  $u$ ,试求这些受激核所发射光子的最大波长和最小波长之差  $\Delta\lambda$  与  $\lambda_0$  之比.

已知普朗克常量为  $h$ ,真空中的光速为  $c$ .

**【分析】** 此题需从动量守恒、能量守恒入手进行讨论,并要考虑到相对论效应.

**【解】** (1) 激发态核的能量为

$$E = m_0 c^2 + \Delta E. \quad (1)$$

在发射光子的过程中系统动量守恒,用  $p$  表示发射光子后核的动量,  $\nu_0$  表示光子的频率,取光子运动方向为正方向,有

$$0 = p + \frac{h\nu_0}{c}. \quad (2)$$

基态核因反冲具有的动量为

$$p = -\frac{h\nu_0}{c}. \quad (3)$$

因发射过程中的能量守恒,有

$$m_0 c^2 + \Delta E = mc^2 + h\nu_0. \quad (4)$$

式中  $m$  表示基态核的动质量.若用  $v$  表示基态核因反冲具有的速度,则基态核的动量和动质量可表示成

$$p = mv. \quad (5)$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (6)$$

由③~⑥各式可得

$$h\nu_0 = \frac{\Delta E(2m_0 c^2 + \Delta E)}{2(m_0 c^2 + \Delta E)}. \quad (7)$$

因

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0}. \quad (8)$$

故得

$$\lambda_0 = \frac{2hc(m_0 c^2 + \Delta E)}{\Delta E(2m_0 c^2 + \Delta E)}. \quad (9)$$

(2) 考虑激发态核向着仪器运动的情况.对于以最大速度  $u$  向仪器运动的激发态核,若用  $p_1$  表示发射光子后核的动量,用  $\nu_1$  表示光子的频率,则由动量守恒有

$$\left(m_0 + \frac{\Delta E}{c^2}\right)u = p_1 + \frac{h\nu_1}{c}. \quad (10)$$

由能量守恒



$$\frac{\left(m_0 + \frac{\Delta E}{c^2}\right) c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = m_1 c^2 + h\nu_1. \quad (11)$$

其中  $m_1$  表示基态核的动质量, 若用  $v_1$  表示基态核的速度, 则有

$$p_1 = m_1 v_1. \quad (12)$$

$$m_1 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}. \quad (13)$$

由⑨~⑬式可得

$$h\nu_1 = h\nu_0 \sqrt{\frac{c+u}{c-u}}. \quad (14)$$

注意到⑧式, 有

$$\lambda_1 = \lambda_0 \sqrt{\frac{c-u}{c+u}}. \quad (15)$$

由⑮式可看出, 向着仪器运动且速度小于  $u$  的激发态核, 它们发出的光子的波长比  $\lambda_1$  大, 速度大小分布在零与  $u$  之间的激发态核发出的光子的波长分布在  $\lambda_0$  与  $\lambda_1$  之间.

再考虑激发态核背离仪器运动的情况, 对于以最大速度  $u$  背离仪器运动的激发态核, 用类似于上面的讨论有

$$-\frac{\left(m_0 + \frac{\Delta E}{c^2}\right) u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = p_2 + \frac{h\nu_2}{c}. \quad (16)$$

$$\frac{\left(m_0 + \frac{\Delta E}{c^2}\right) c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = m_2 c^2 + h\nu_2. \quad (17)$$

式中  $p_2$  为发射光子后基态核的动量,  $\nu_2$  为光子的频率,  $m_2$  为基态核的动质量. 若基态核的速度为  $v_2$ , 则有

$$p_2 = m_2 v_2. \quad (18)$$

$$m_2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}}. \quad (19)$$

由⑯~⑱各式解得

$$h\nu_2 = h\nu_0 \sqrt{\frac{c-u}{c+u}}. \quad (20)$$

注意到⑧式, 得

$$\lambda_2 = \lambda_0 \sqrt{\frac{c+u}{c-u}}. \quad (21)$$



由②式可以看出,背离仪器运动且速度小于  $u$  的激发态核,它们发出的光子的波长都比  $\lambda_2$  小,速度大小分布在  $u$  与零之间的激发态核发出的光子的波长分布在  $\lambda_2$  与  $\lambda_0$  之间.由此可知

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_0 \left( \sqrt{\frac{c+u}{c-u}} - \sqrt{\frac{c-u}{c+u}} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{2u}{\sqrt{c^2 - u^2}}.$$

### 题 9 (2004·全国物理决赛题)

#### 升空的气球

一个充满氦气的橡皮气球从地面上升到高空时,大气压强和温度随高度而下降.在下列问题中,即使有负载,也假设气球始终保持球形,并忽略负载的体积.同时假设在气球内部氦气的温度与周围大气温度总是相同的,且作为理想气体处理.气体的普适常量是  $R = 8.31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ ,氦气和空气的摩尔质量分别为  $M_{\text{H}} = 4.00 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$  和  $M_{\text{A}} = 28.9 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ ,重力加速度是  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ .

#### A 部分

(a)假设气球周围的大气压强是  $p$ ,温度是  $T$ .由于气球表面存在张力,气球内部的压强高于外部的压强,气球含有  $n$  摩尔的氦气,内部压强是  $p + \Delta p$ .求出气球受到的浮力  $F_B$  与  $p$ 、 $\Delta p$  的函数关系.

(b)在韩国的夏天,在  $0 < z < 15 \text{ km}$  的范围内,距海平面高度为  $z$  处的温度满足  $T(z) = T_0 \left( 1 - \frac{z}{z_0} \right)$  的关系,式中  $z_0 = 49 \text{ km}$ ,  $T_0 = 303 \text{ K}$ .在海平面上大气压强和密度分别为  $p_0 = 1 \text{ atm} = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ ,  $\rho_0 = 1.16 \text{ kg/m}^3$ .在上述高度范围内,压强满足以下公式

$$p(z) = p_0 \left( 1 - \frac{z}{z_0} \right)^\eta. \quad (1)$$

求出  $\eta$  与  $z_0$ 、 $\rho_0$ 、 $p_0$  以及  $g$  的关系,计算  $\eta$  的值到 2 位有效数字.设重力加速度是不随高度变化的常量.

#### B 部分

当橡皮球未撑开时半径为  $r_0$ ,充气后球的半径增加到  $r$  ( $r \geq r_0$ ).气球表面撑开时具有弹性能量,在一个简化理论下,温度是常数时,弹性能量可用下式描述

$$U = 4\pi r_0^2 \kappa RT \left( 2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4} - 3 \right). \quad (2)$$

这里  $\lambda = \frac{r}{r_0}$  ( $\lambda \geq 1$ ) 是尺寸膨胀率,  $\kappa$  是单位为  $\text{mol/m}^2$  的常量.

(c)求  $\Delta p$ ,用②式中的参量表示之.作简图表示  $\Delta p$  与  $\lambda$  的关系.

(d)常量  $\kappa$  可以用撑开气球需要气体的量来确定.在  $T_0 = 303 \text{ K}$  以及  $p_0 = 1.0 \text{ atm}$  条件下,未撑开的气球 ( $\lambda = 1$ ) 中有  $n_0 = 12.5 \text{ mol}$  的氦气.在相同的  $T_0$  和  $p_0$  条件下,把气球充气到  $\lambda = 1.5$  需要的气体总量是  $n = 3.6n_0 = 45 \text{ mol}$ .定义  $\alpha =$

$\frac{\kappa}{\kappa_0}$ , 其中  $\kappa_0 \equiv \frac{r_0 p_0}{4RT_0}$ , 用  $n, n_0$  以及  $\lambda$  表示气球参数  $\alpha$ , 并计算  $\alpha$  的值(保留 2 位有效数字).

### C 部分

设在(d)条件下置备的气球(气球充气到  $\lambda = 1.5$ , 氦气总量是  $n = 3.6n_0 = 45 \text{ mol}$ ,  $T_0 = 303 \text{ K}$ ,  $p_0 = 1 \text{ atm} = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ ), 包括气体、气球自重以及负载的总质量为  $M_T = 1.12 \text{ kg}$ . 让该气球从海平面上升.

(e) 假设气球最终静止在  $z_f$  高度上, 这时浮力与总重力平衡, 求高度  $z_f$  以及该高度上的膨胀率  $\lambda_f$ . 用 2 位有效数字表示数值结果. 假设上升过程中气球没有漏气, 也没有横向漂移运动.

**【分析】** 本题给出了气球在上升过程遇到的各种实际问题. 虽然模型作了一定的简化, 但仍需考虑以下各个方面: 如随气球高度的变化, 气球所处的环境(压强、温度)也发生相应变化, 造成气球体积的变化, 这就带来诸如浮力、做功以及气球弹性势能变化等诸多问题, 灵活运用气态方程以及题给的几个关系式方可进行一系列求解.

#### 【解】 A 部分

(a) 利用理想气体状态方程,  $n$  摩尔的氦气的压强  $p + \Delta p$ , 温度  $T$  时体积为

$$V = \frac{nRT}{p + \Delta p} \quad (1)$$

而  $n'$  摩尔的空气在压强  $p$ , 温度  $T$  时体积为

$$V = \frac{n'RT}{p} \quad (2)$$

因此气球占据了  $n' = \frac{np}{p + \Delta p}$  摩尔的air的体积, 其浮力等于  $M_A n' g$ , 即

$$F_B = M_A n g \frac{p}{p + \Delta p} \quad (3)$$

(b) 压强与高度的关系满足

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{\rho_0 T_0}{p_0} \frac{p}{T} g \quad (4)$$

其中用到了理想气体状态方程  $\frac{\rho T}{p} = \text{常量}$ . 将  $T(z) = T_0 (1 - \frac{z}{z_0})$  和  $p(z) = p_0 (1 - \frac{z}{z_0})^\eta$  代入上式, 得

$$\eta = \frac{\rho_0 z_0 g}{p_0} = 5.5 \quad (5)$$

### B 部分

(c) 在压强差为  $\Delta p$  时, 将气球半径从  $r$  增加到  $r + dr$  需做功

$$dW = 4\pi r^2 \Delta p dr \quad (6)$$

它应该与半径从  $r$  增加到  $r + dr$  气球弹性势能的增量相等, 即



$$dW = dU = 4\pi\kappa RT \left( 4r - 4 \frac{r_0^6}{r^5} \right) dr. \quad (7)$$

因此 
$$\Delta p = \frac{4\kappa RT}{r_0} \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7} \right). \quad (8)$$

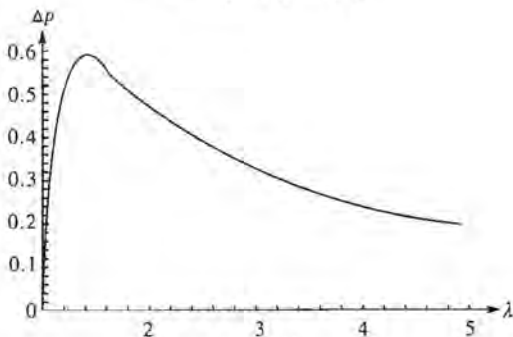


图 6-2-5

$\Delta p$  与  $\lambda$  的关系如图 6-2-5 所示. 它在  $\lambda > 1$  时增加得很快, 在  $\lambda = 7^{\frac{1}{6}} = 1.38$  时达到极大值,  $\lambda$  继续增大时则按  $\lambda^{-1}$  衰减.

(d) 理想气体状态方程是

$$p_0 V_0 = n_0 RT_0. \quad (9)$$

以及

$$p_n V = nRT_0. \quad (10)$$

这里的  $V = \lambda^3 V_0$ . 这两个式子给出的压强差即为(c)问的结果

$$\Delta p = \left( \frac{n}{n_0 \lambda^3} - 1 \right) p_0 = \frac{4\kappa RT_0}{r_0} \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7} \right) = \alpha p_0 \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7} \right). \quad (11)$$

$$\alpha = \frac{\frac{n}{n_0 \lambda^3} - 1}{\frac{1}{\lambda^{-1}} - \frac{1}{\lambda^{-7}}} = 0.11. \quad (12)$$

C 部分

(e) 利用(a)的结果

$$M_{TG} = M_A n g \frac{\rho}{\rho + \Delta p}. \quad (13)$$

根据状态方程有

$$(p + \Delta p) \lambda^3 = \frac{nRT}{V_0} = p_0 \frac{T}{T_0} \frac{n}{n_0}. \quad (14)$$

另外⑧式给出

$$\Delta p = \frac{4\kappa RT}{r_0} \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7} \right) = \alpha \frac{T}{T_0} \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7} \right). \quad (15)$$

将⑭与⑮两式相除得到

$$\frac{p+\Delta p}{\Delta p} = \frac{n}{\alpha \lambda^2 (1-\lambda^{-6})}. \quad (16)$$

结合⑬式得

$$\lambda^2 (1-\lambda^{-6}) = \frac{1}{\alpha n_0} \left( n - \frac{M_T}{M_A} \right) = 4.54. \quad (17)$$

用迭代方法近似求解,得

$$\lambda^2 \approx \frac{4.54}{1-4.54^{-3}} \approx 4.54, \quad (18)$$

$$\lambda_f \approx 2.1.$$

由⑬和⑭式还容易得到

$$\frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T} \lambda^3 = \frac{M_T}{M_A n_0}. \quad (19)$$

利用  $T(z) = T_0 (1 - \frac{z}{z_0})$  以及  $p(z) = p_0 (1 - \frac{z}{z_0})^\eta$ ,

$$\frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T} \lambda^3 = (1 - \frac{z_f}{z_0})^{\eta-1} \lambda_f^3 = \frac{M_T}{M_A n_0} = 3.10. \quad (20)$$

代入  $\lambda_f = 2.1, \eta - 1 = 4.5$ , 得

$$z_f = 49 \times \left[ 1 - \left( \frac{3.10}{2.1^3} \right)^{\frac{1}{4.5}} \right] \text{km} = 11 \text{ km}. \quad (21)$$

**题 10** (2004·全国物理竞赛题) 试从相对论能量和动量的角度分析论证:

(1) 一个光子与真空中处于静止状态的自由电子碰撞时, 光子的能量不可能完全被电子吸收.

(2) 光子射到金属表面时, 其能量有可能完全被吸收并使电子逸出金属表面, 产生光电效应.

**【分析】** 此题的第(1)小题可从能量守恒的角度用反证法加以论证. 第(2)小题的关键是论证入射光子的能量  $h\nu \geq W$  (逸出功).

**【解】** (1) 设电子处于静止状态时的质量为  $m_0$ , 光子的频率为  $\nu$ , 假定电子能完全吸收光子的能量, 吸收光子后, 电子以速度  $v$  运动, 则这一过程应遵循动量守恒定律, 有

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (1)$$

碰撞后系统的总能量为

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2)$$

由①②式消去  $v$ , 得

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + h^2 \nu^2}. \quad (3)$$



碰撞前电子与光子的总能量为

$$E_0 = h\nu + m_0 c^2, \quad (4)$$

由③④式

$$E^2 - E_0^2 = (m_0^2 c^4 + h^2 \nu^2) - (h\nu + m_0 c^2)^2 = -2h\nu m_0 c^2 \neq 0. \quad (5)$$

这表明,所假设的过程不符合能量守恒定律,因此这一过程实际上不可能发生.

(2)束缚在金属中的电子和射入金属的光子二者构成的系统在发生光电效应的过程中动量不守恒,只需考虑能量转换问题.

设电子摆脱金属的束缚而逸出,需要对它做功至少为  $W$  (逸出功),逸出金属表面后电子的速度为  $v$ ,入射光子的能量为  $h\nu$ ,电子的静止质量为  $m_0$ ,若能产生光电效应,则有

$$h\nu \geq \left[ \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 \right] + W. \quad (6)$$

逸出电子的速度  $v$  一般都比光速小很多,故有

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots. \quad (7)$$

忽略高阶小量,只取⑦式中的前两项,代入⑥式,可得到

$$h\nu \geq \frac{1}{2} m_0 v^2 + W. \quad (8)$$

可见,只要  $h\nu \geq W$ ,⑧式就能成立,光电效应就能产生.

**题 11** (2003·全国物理竞赛题) 设地球是一个半径为 6 370 km 的球体.在赤道上空离地面 1 千多公里处和赤道共面的圆与赤道形成的环形区域内,地磁场可看做是均匀的,其磁感应强度为  $B = 3.20 \times 10^{-5}$  T. 某种带电宇宙射线粒子,其静质量为  $m_0 = 6.68 \times 10^{-27}$  kg,其电荷量为  $q = 3.20 \times 10^{-19}$  C,在地球赤道上空的均匀地磁场中围绕地心做半径为  $R = 7\,370$  km 的圆周运动.

已知在相对论中只要作用于粒子的力  $F$  的方向始终与粒子运动的速度  $v$  的方向垂直,则运动粒子的质量  $m$  和加速度  $a$  与力  $F$  的关系仍为  $F = ma$ ,但式中的质量  $m$  为粒子的相对论质量,问:

(1)该粒子的动能为多大?

(2)该粒子在圆形轨道上运动时与一个不带电的静质量为  $m_2 = 4m_0$  的静止粒子发生碰撞,并被其吸收形成一个复合粒子,试求复合粒子的静质量  $m_1$ .

**【分析】**依题意粒子在洛伦兹力作用下做圆周运动.但粒子质量、能量、动量等都应按相对论规律表示.粒子间的相互碰撞满足相对论能量和动量守恒.

**【解】**(1)设带电宇宙射线粒子速度为  $v$ ,在地磁场的洛伦兹力作用下做圆周运动,其运动方程为

$$qvB = m \frac{v^2}{R}. \quad (1)$$

式中  $m$  为运动粒子的相对论质量, 与静止质量的关系为

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2)$$

该粒子的动能

$$E_k = mc^2 - m_0c^2. \quad (3)$$

由①式, 可求得

$$v = \frac{qBRc}{\sqrt{q^2B^2R^2 + m_0^2c^2}}. \quad (4)$$

代入数据, 得

$$v = 2.90 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (5)$$

由②③式, 得

$$E_k = m_0c^2 \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right]. \quad (6)$$

代入数据, 注意到⑤式, 得

$$E_k = 1.74 \times 10^{-9} \text{ J}. \quad (7)$$

(2) 用  $p$ 、 $E$  分别表示宇宙射线粒子动量和能量, 有

$$p = \frac{m_0v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (8)$$

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (9)$$

设复合粒子的速度为  $v_1$ , 动量和能量分别为  $p_1$  和  $E_1$ , 有

$$p_1 = \frac{m_1v_1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}. \quad (10)$$

$$E_1 = \frac{m_1c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}. \quad (11)$$

粒子复合过程中动量、能量守恒, 有

$$p_1 = p. \quad (12)$$

$$E_1 = E + m_2c^2. \quad (13)$$

由以上各式及已知条件  $m_2 = 4m_0$ , 得

$$v_1 = \frac{v}{1 + 4\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (14)$$

把⑤式代入⑭式, 得

$$v_1 = 1.43 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

由⑨⑩⑬式,得

$$m_1 = \frac{m_0 \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + m_2 \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}, \quad (16)$$

由⑮式及有关数据,得

$$m_1 = 46.4 \times 10^{-27} \text{ kg}.$$

**题 12** (2000·全国物理竞赛题) 太阳风是从太阳大气外层(称为日冕)不断向星际空间发射的稳定的、由相同数目的质子和电子构成的带电粒子流,它使太阳每年减少的质量相对于太阳质量  $M_s$  可忽略不计. 观测表明,太阳风的速度  $v$  的大小随着与太阳中心的距离  $r$  的增加而增大. 现提出一简单的模型来解释太阳风的速度变化的机制:假定日冕中的大量电子可视为理想气体;日冕中的电子气是等温(温度为  $T$ )的、各向同性的,以球对称的速率  $v(r)$ (太阳风的速率)向外膨胀;太阳风中质子的定向运动速度比电子的小得多,太阳风的速度其实是电子定向运动的速度,太阳风可解释为日冕中的电子气向外的等温膨胀. 记太阳风的速率  $v$  随着与太阳中心的距离  $r$  变化的变化率为  $\tau = \frac{\Delta v}{\Delta r}$ . 若不考虑质子和电子间的相互碰撞,试求  $\tau$  随  $r$  变化的关系式  $\tau(r)$ .

**【分析】** 求解本题的基本出发点是在球坐标  $A$  中取一块薄层电子流,考查它在周围力的作用下的运动情况. 这些力来自于太阳引力以及周围电子流对其的压力,运用动量定理,可得到求解本题的基本方程式. 由于电子流可视为理想气体,而气体压强有多种描述方法,故本题可有多种解法. 求解过程还应注意近似计算方法的运用.

**【解】** 方法 1:如图 6-2-6 所示,在太阳风中,考查  $t$  时刻位于到太阳中心的距离为  $r$  和  $r + \Delta r$  的两个球面之间的一块薄层电子流,其厚度为  $\Delta r$ ,质量为  $m$ ,速度为  $v$ . 位于半径为  $r$  的球面上的薄层后缘的面积为  $S$ ,位于半径为  $r + \Delta r$  的球面上薄层前缘的面积为  $S'$ ,如图 6-2-6 中划有左斜线的区域所示. 经过时间  $\Delta t$ ,它的后缘移动了一段距离  $\Delta r$ ,到达前缘所在处,而其前缘移动了一段距离  $\Delta r'$ ,即在  $t + \Delta t$  时刻,所观察的那块薄层电子流的厚度为  $\Delta r'$ ,速度为  $v'$ ,如图 6-2-6 中划有右斜线的区域所示. 在  $t$  到  $t + \Delta t$  时间内,此薄片的动量的改变为

$$\Delta p = mv' - mv. \quad (1)$$

在这过程中,太阳对它引力的冲量为

$$I_1 = G \frac{M_s m}{r^2} \Delta t. \quad (2)$$



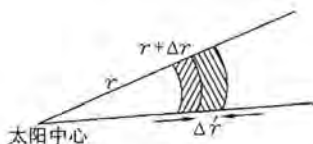


图 6-2-6

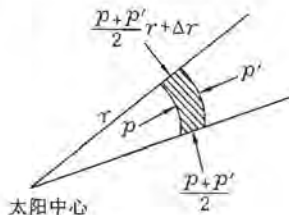


图 6-2-7

现分析所考虑的薄片所受的压力. 如图 6-2-7 所示, 设  $p'$  与  $p$  分别表示这块薄片前缘与后缘截面上所受到的压强, 则  $\frac{1}{2}(p+p')$  是这块薄片侧面上所受到的压强(由于  $\Delta r$  很小, 侧面压强取两端面压强之平均值是一个合理的近似). 令后缘截面与前缘截面的半径分别为  $h$  和  $h'$ , 则薄片表面上所受压力的合力  $F$  是

$$\begin{aligned} F &= p\pi^2 h - p'\pi h'^2 + \left(\frac{p+p'}{2}\right) \left(\Delta r \frac{2\pi h + 2\pi h'}{2}\right) \left(\frac{h'-h}{\Delta r}\right) \\ &= p\pi h^2 - p'\pi h'^2 + \left(\frac{p+p'}{2}\right) (\pi h'^2 - \pi h^2) \\ &= pS - p'S' + \left(\frac{p+p'}{2}\right) (S' - S), \end{aligned}$$

$$\text{即} \quad F = (p-p') \left(\frac{S+S'}{2}\right). \quad (3)$$

式中  $S = \pi h^2$ ,  $S' = \pi h'^2$ . 注意: 在导出③式时, 已考虑到薄片所受到的侧面压强在垂直于合力  $F$  方向上相互抵消的事实. 于是这块薄片前后的电子流对它的压力的冲量为

$$I_z = (p-p') \left(\frac{S+S'}{2}\right) \Delta t. \quad (4)$$

根据题意, 可以将带电粒子流视为理想气体, 由理想气体状态方程

$$p = \frac{mRT}{m_e N_0 V} = \frac{mRT}{m_e N_0 \frac{S+S'}{2} \Delta r}, \quad (5)$$

$$p' = \frac{mRT}{m_e N_0 V'} = \frac{mRT}{m_e N_0 \frac{S'+S''}{2} \Delta r'}. \quad (6)$$

式中  $m_e$  为电子质量,  $N_0$  为阿伏加德罗恒量,  $S'$  是位于半径为  $r + \Delta r + \Delta r'$  的球面上的截面(如图 6-2-6 中所示). 根据动量定理有

$$m\Delta v = (p-p') \left(\frac{S+S'}{2}\right) \Delta t - G \frac{M_S m}{r^2} \Delta t. \quad (7)$$

代入以上各式得

$$m\Delta v = \frac{mRT\Delta t}{m_e N_0 \Delta r} - \frac{mRT\Delta t}{m_e N_0 \Delta r'} \left(\frac{S+S'}{S'+S''}\right) - G \frac{M_S m}{r^2} \Delta t. \quad (8)$$



$$\text{又} \quad \frac{S'}{S} = \left(\frac{r+\Delta r}{r}\right)^2 = 1 + 2\frac{\Delta r}{r}. \quad (9)$$

$$\frac{S''}{S'} = \left(\frac{r+\Delta r+\Delta r'}{r+\Delta r}\right)^2 = 1 + 2\frac{\Delta r'}{r+\Delta r} = 1 + 2\frac{\Delta r'}{r}. \quad (10)$$

$$\text{所以} \quad \frac{S+S'}{S'+S''} = \frac{1+\frac{S'}{S}}{1+\frac{S''}{S'}} = \frac{2-2\frac{\Delta r}{r}}{2+2\frac{\Delta r'}{r}} = 1 - \frac{\Delta r}{r} - \frac{\Delta r'}{r} = 1 - 2\frac{\Delta r}{r}. \quad (11)$$

故⑧式成为

$$m\Delta v = \frac{mRT}{m_e N_0 v} - \frac{mRT}{m_e N_0 v'} + 2\frac{mRT}{m_e N_0 r} \Delta t - G \frac{M_S m}{r^2} \Delta t,$$

或

$$\begin{aligned} \Delta v &= \frac{RT}{m_e N_0} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v'}\right) + \left(\frac{2RT}{m_e N_0 r} - G \frac{M_S}{r^2}\right) \Delta t \\ &= \frac{RT}{m_e N_0} \left(\frac{\Delta v}{v^2}\right) + \left(\frac{2RT}{m_e N_0 r} - G \frac{M_S}{r^2}\right) \Delta t. \end{aligned}$$

解得

$$\Delta v = \frac{\left(\frac{2RT}{m_e N_0 r} - G \frac{M_S}{r^2}\right) \Delta t}{1 - \frac{RT}{m_e N_0 v^2}}. \quad (12)$$

两边除以  $\Delta r$  得

$$\tau = \frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{\left(\frac{2RT}{m_e N_0 r} - G \frac{M_S}{r^2}\right) v^2}{v^2 - \frac{RT}{m_e N_0}}. \quad (13)$$

方法 2: ①②③④式得出如方法 1 所示.

据题意, 带电粒子流可视为理想气体, 于是由克拉珀龙方程得

$$p(r) = n(r)kT, \quad (5')$$

$$\text{或} \quad p - p' = [(n(r) - n(r+\Delta r))]kT = \Delta n kT. \quad (6')$$

式中  $n(r)$  是距太阳中心为  $r$  处的单位体积中的电子数,  $k = \frac{R}{N_0}$  是玻尔兹曼恒量,  $R$  是普适气体常量,  $N_0$  是阿伏加德罗恒量.

由动量定理有

$$m\Delta v = (p - p') \left(\frac{S+S'}{2}\right) \Delta t - G \frac{M_S m}{r^2} \Delta t. \quad (7')$$

由于质量守恒, 每单位时间通过球壳  $S$ , 发射出的物质的质量是一个恒量

$$4\pi(r+\Delta r)^2 (n+\Delta n)(v+\Delta v) = 4\pi r^2 nv.$$

由于  $\Delta r$  是小量,  $\Delta n$  与  $\Delta v$  也应是小量. 将上式左端展开, 忽略小量的乘积项, 得到

$$2r\nu\Delta r + r^2 v\Delta n + r^2 n\Delta v = 0.$$

此即

$$\Delta n = -2\frac{n}{r}\Delta r - \frac{n}{v}\Delta v. \quad (8')$$

⑨⑩⑪如方法 1 所示,故从⑦'可得⑫⑬式如方法 1 所示.

方法 3:

此薄片受到四周压力的冲量为

$$\begin{aligned} I_2 &= (pS + f_{\text{侧面}} - p'S')\Delta t \\ &= [pS + f_{\text{侧面}} - p'(S + \Delta S)]\Delta t \\ &= (p - p')S\Delta t. \end{aligned} \quad (1'')$$

式中  $p$  和  $p'$  分别表示这一块薄片电子流后缘截面和前缘截面所受到的压强,  $f_{\text{侧面}}$  是薄片侧面受到的压力,它不为零,沿径向,恰与式中  $p'\Delta S$  项抵消. 根据题意,将日冕视为理想气体,应用克拉珀龙方程有

$$p = \frac{m}{m_e N_0} \frac{RT}{V} = \frac{RT}{m_e N_0 S \Delta r} \quad (2'')$$

$$p' = \frac{m}{m_e N_0} \frac{RT}{V'} = \frac{RT}{m_e N_0 S' \Delta r'}. \quad (3'')$$

式中  $m_e$  是电子的质量,  $N_0$  为阿伏加德罗恒量. 根据动量定理有

$$m\Delta v = (p - p')S\Delta t - G \frac{M_S m}{r^2} \Delta t. \quad (4'')$$

代入④和⑤式得

$$\begin{aligned} \Delta v &= \frac{RT}{m_e N_0} \left( \frac{\Delta t}{\Delta r} - \frac{S \Delta t}{S' \Delta r'} \right) - \frac{GM_S}{r^2} \Delta t \\ &= \frac{RT}{m_e N_0} \left[ \frac{1}{v} - \frac{S}{S + \Delta S} \frac{1}{v'} \right] - \frac{GM_S}{r^2} \Delta t \\ &= \frac{RT}{m_e N_0} \left[ \frac{1}{v} - \left( 1 - \frac{\Delta S}{S} \right) \frac{1}{v} \left( 1 - \frac{\Delta v}{v} \right) \right] - \frac{GM_S}{r^2} \Delta t \\ &= \frac{RT}{m_e N_0} \left[ \frac{\Delta v}{v^2} + \frac{1}{v} \frac{\Delta S}{S} \right] - \frac{GM_S}{r^2} \Delta t. \end{aligned} \quad (5'')$$

式中  $\frac{\Delta S}{S}$  按几何关系为

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{4\pi(r + \Delta r)^2 - 4\pi r^2}{4\pi r^2} = \frac{2\Delta r}{r}. \quad (6'')$$

$$\Delta v = \frac{RT}{m_e N_0} \left( \frac{\Delta v}{v^2} + \frac{2\Delta r}{vr} \right) - \frac{GM_S}{r^2} \Delta t. \quad (7'')$$

故解出

$$\Delta v = \frac{GM_S \Delta t}{r^2} \frac{2RT \Delta r}{m_e N_0 vr}. \quad (8'')$$

于是得

$$r = \frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{GM_S}{RT} \frac{v}{v^2} \frac{2RT}{m_e N_0} \frac{v}{r} = \frac{v}{r^2} \frac{GM_S - 2rv_0^2}{v^2 - v^2}. \quad (9'')$$



式中

$$v_c = \sqrt{\frac{RT}{m_e N_0}} \quad (10')$$

它实际上是等温声速.

方法 4:

由方法 3 中动量定理(4)'式出发,记所讨论的这一块小薄片,当体积分别为  $V$  和  $V'$  时其中电子的密度分别为  $n$  和  $n'$ ,则(4)'式中的

$$m = m_e n S \Delta r = m_e n S v \Delta t. \quad (1'')$$

$$p - p' = \frac{m R t}{m_e N_0 V} - \frac{m R t}{m_e N_0 V'} = \frac{R T}{N_0} (n - n'). \quad (2'')$$

由于单位时间内进入小薄片的电子数等于穿出小薄片的电子数,才使得小薄片内所有电子的总质量  $m$  不变,故有

$$(r + \Delta r)^2 n' v' = r^2 n v. \quad (3'')$$

即  $(r + \Delta r)^2 (n + \Delta n)(v + \Delta v) = r^2 n v.$

得  $\Delta n = n' - n = -\frac{n \Delta v}{v} - \frac{2n \Delta r}{r}.$  (4'')

代入(2)''式,再将(1)''和(2)''式代回(4)''式,同样得到(8)''式和(9)''式.

**题 13** (2007·亚洲物理竞赛题)

### 逆康普顿散射

光子与相对论性高能电子碰撞,光子将从高能电子获得能量,使散射光子能量增大,频率升高.这一现象称为逆康普顿散射.逆康普顿散射在天体物理学中有重要意义,它是太空中 X 射线和  $\gamma$  射线产生的重要机制.

1. 如图 6-2-8 所示,总能量为  $E$  的相对论性高能电子(其动能大于静能)与频率为  $\nu$  的低能光子(能量小于电子静能)相向运动而碰撞,碰后光子沿与原入射方向成  $\theta$  角的方向散射(散射电子图中没有画出),求散射光子的能量(用  $E, \nu, \theta$  和电子静能  $E_0$  表示).当  $\theta$  为何值时,散射光子的能量最大?

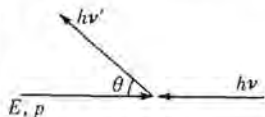


图 6-2-8

并求此最大能量.

2. 上问中,设入射电子能量  $E = \gamma E_0$ ,  $\gamma \gg 1$ ,且入射光子能量比  $\frac{E_0}{\gamma}$  小得多,求散射光子最大能量的近似表达式.设  $\gamma = 200$ ,入射光子是波长  $\lambda = 500 \text{ nm}$  的可见光波段光子,求散射光子的最大能量及相应波长.

已知:电子静能  $E_0 = 0.511 \text{ MeV}$ ,普朗克常量  $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ,  $hc = 1.24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}$  ( $c$  为真空中光速)

3. (1)总能量为  $E$  的相对论性高能电子与光子相向运动而碰撞,问当入射光子的能量为多大时,出射光子能从入射电子中获得最大能量?并求此时出射光子的能量.

(2)若总能量为  $E$  的相对论性高能电子和运动方向与其垂直的光子发生碰撞,

问当入射光子的能量为多大时,出射光子能从入射电子中获得最大能量?并求此时出射光子的能量.

**【分析】**在逆康普顿散射中,光子与电子的作用过程满足相对论能量与动量守恒.求解时注意光子与电子的能量和动量等都需用相对论和量子物理中的概念予以表达,本题应从两个守恒出发,并考虑相对论中能量与动量的关系式进行求解.

**【解】**1. 设入射电子动量为  $p$ , 出射电子动量为  $p'$ , 能量为  $E'$ , 出射光子能量为  $h\nu'$ , 如图 6-2-9 所示.

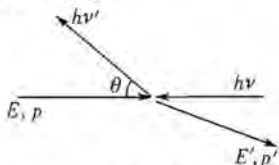


图 6-2-9

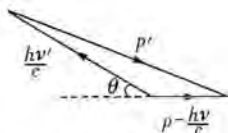


图 6-2-10

由能量守恒,有  $h\nu + E = h\nu' + E'$ . ①

如图 6-2-10 所示,由动量守恒有

$$(p'c)^2 = (h\nu')^2 + (pc - h\nu)^2 + 2h\nu'(pc - h\nu)\cos\theta. \quad ②$$

由能量、动量关系,有  $E^2 = (pc)^2 + E_0^2$ . ③

$$E'^2 = (p'c)^2 + E_0^2. \quad ④$$

由以上四式解得  $h\nu' = \frac{E + pc}{E + h\nu + (pc - h\nu)\cos\theta} h\nu$   
 $= \frac{E + \sqrt{E^2 - E_0^2}}{E + h\nu + (\sqrt{E^2 - E_0^2} - h\nu)\cos\theta} h\nu.$  ⑤

由⑤式不难看出,当  $\sqrt{E^2 - E_0^2} > h\nu$  时(此条件对动能大于静能的电子与能量小于电子静能的光子显然成立),则当  $\theta = \pi$  时  $h\nu'$  得最大值

$$(h\nu')_{\max} = \frac{E + \sqrt{E^2 - E_0^2}}{E + 2h\nu - \sqrt{E^2 - E_0^2}} h\nu. \quad ⑥$$

2. 以  $E = \gamma E_0$  代入⑤式得

$$(h\nu')_{\max} = \frac{\gamma E_0 + \sqrt{\gamma^2 - 1} E_0}{\gamma E_0 - \sqrt{\gamma^2 - 1} E_0 + 2h\nu} h\nu$$

$$= \frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1} + \frac{2h\nu}{E_0}} h\nu. \quad ⑦$$

由于  $\gamma \gg 1$ ,  $\sqrt{\gamma^2 - 1} \approx \gamma \left(1 - \frac{1}{2\gamma^2}\right) = \gamma - \frac{1}{2\gamma}$ , 且  $\frac{h\nu}{E_0} \ll \frac{1}{\gamma}$ , 于是

$$(h\nu')_{\max} \approx \frac{\gamma + \gamma - \frac{1}{2\gamma}}{\gamma - \gamma + \frac{1}{2\gamma} + \frac{2h\nu}{E_0}} h\nu \approx 4\gamma^2 h\nu. \quad ⑧$$



当  $\gamma=200$ , 入射光子波长  $\lambda=500 \text{ nm}$  时, 入射光子能量

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1.24 \times 10^3}{500} \text{ eV} = 2.48 \text{ eV}.$$

$$\frac{h\nu}{E_0} = \frac{2.48}{0.511 \times 10^6} = 4.85 \times 10^{-6} \ll \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{200} = 5.0 \times 10^{-3}.$$

满足⑧式条件, 代入⑧式得出射光子最大能量

$$\begin{aligned} (h\nu')_{\max} &\approx 4 \times 200^2 h\nu = 1.6 \times 10^5 \times 2.48 \text{ eV} \\ &= 3.97 \times 10^5 \text{ eV} \approx 4.0 \times 10^5 \text{ eV} \\ &= 0.40 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

相应出射光子波长

$$\lambda' = \frac{hc}{h\nu'} = \frac{1.24 \times 10^3}{4.0 \times 10^5} \text{ nm} = 3.1 \times 10^{-3} \text{ nm}.$$

3. (1) 为使出射光子能从入射电子中获得最大能量, 碰撞后电子应变为静止. 这时应有 (如图 6-2-11)

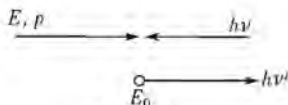


图 6-2-11

$$h\nu + E = h\nu' + E_0. \quad (9)$$

$$p - \frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c}.$$

即

$$pc - h\nu = h\nu'. \quad (10)$$

⑨⑩两式相减并注意能量动量关系

$$(pc)^2 = E^2 - E_0^2. \quad (11)$$

得入射光子能量

$$h\nu = \frac{1}{2}(E_0 - E + pc) = \frac{1}{2}(E_0 - E + \sqrt{E^2 - E_0^2}). \quad (12)$$

代入⑨式得出射光子能量

$$h\nu' = h\nu + E - E_0 = \frac{1}{2}(E - E_0 + \sqrt{E^2 - E_0^2}). \quad (13)$$

(2) 同(1), 这时应有 (如图 6-2-12 所示)

$$h\nu + E = h\nu' + E_0.$$

$$p^2 + \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 = \left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2,$$

即

$$(pc)^2 + (h\nu)^2 = (h\nu')^2. \quad (14)$$

由能量、动量关系有

$$(pc)^2 = E^2 - E_0^2.$$

代入⑭式得

$$E^2 - E_0^2 + (h\nu)^2 = (h\nu')^2.$$

而由⑨式  $(h\nu')^2 = E^2 + E_0^2 + (h\nu)^2 + 2Eh\nu - 2EE_0 - 2E_0h\nu$ .

上两式联立得

$$E^2 + E_0^2 + (h\nu)^2 + 2Eh\nu - 2EE_0 - 2E_0h\nu = E^2 - E_0^2 + (h\nu)^2.$$

即

$$2(E - E_0)h\nu = 2E_0(E - E_0).$$

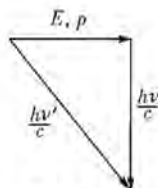


图 6-2-12

$$\text{得人射光子能量} \quad h\nu = E_0. \quad (15)$$

代人⑨式得出射光子能量

$$h\nu' = h\nu + E - E_0 = E. \quad (16)$$

关于问题 3 解答的说明:

(1)也可解答如下:由⑥式,光子从电子获得的最大能量为

$$\Delta = h\nu_{\max}' - h\nu = 2 \frac{p c h\nu - h^2 v^2}{E + 2h\nu - pc}$$

式中  $pc = \sqrt{E^2 - E_0^2}$ . 为求  $\Delta$  的极大值,将上式对  $h\nu$  求导,并令其为零,有

$$\frac{d\left(\frac{\Delta}{2}\right)}{d(h\nu)} = \frac{(pc - 2h\nu)(E + 2h\nu - pc) - 2(pc h\nu - h^2 v^2)}{(E + 2h\nu - pc)^2} = 0.$$

由分子为零,可得关于  $h\nu$  的二次方程

$$2(h\nu)^2 + 2(E - pc)h\nu - (Epc - p^2 c^2) = 0.$$

由此解得

$$h\nu = \frac{1}{2} [-(E - pc) \pm \sqrt{E^2 - p^2 c^2}] = \frac{1}{2} (-E + pc \pm E_0).$$

根号前取负号使  $h\nu$  为负,舍去,并代入  $pc = \sqrt{E^2 - E_0^2}$ ,得

$$h\nu = \frac{1}{2} (\sqrt{E^2 - E_0^2} - E + E_0),$$

结果与⑩式同.  $h\nu'$  表达式则与⑬式同.

(2)也可解答如下:

为简单起见,设出射光子和出射电子在人射光子和人射电子所在平面内. 设出射光子和出射电子偏离人射电子方向的夹角各为  $\Phi$  和  $\varphi$ , 如图 6-2-13 所示, 则有

$$E + h\nu = E' + h\nu'. \quad (1')$$

$$p = \frac{h\nu'}{c} \cos\Phi + p' \cos\varphi,$$

$$\text{即} \quad pc - h\nu' \cos\Phi = p' c \cos\varphi. \quad (2')$$

$$\text{及} \quad \frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \sin\Phi + p' \sin\varphi.$$

$$\text{即} \quad h\nu - h\nu' \sin\Phi = p' c \sin\varphi. \quad (3')$$

由②'+③',得

$$p'^2 c^2 = p^2 c^2 + (h\nu')^2 \cos^2\Phi - 2pc h\nu' \cos\Phi + (h\nu)^2 + (h\nu')^2 \sin^2\Phi - 2lh\nu h\nu' \sin\Phi. \quad (4')$$

$$\text{由①'}, E'^2 = E^2 + (h\nu)^2 + (h\nu')^2 + 2Eh\nu - 2Eh\nu' - 2h\nu h\nu',$$

以及动量能量关系

$$E'^2 = E_0^2 + p'^2 c^2, E^2 = E_0^2 + p^2 c^2.$$

$$\text{代入上式得} \quad p'^2 c^2 = p^2 c^2 + (h\nu)^2 + (h\nu')^2 + 2Eh\nu - 2Eh\nu' - 2h\nu h\nu'. \quad (5')$$

比较④'⑤'两式得出射光子能量

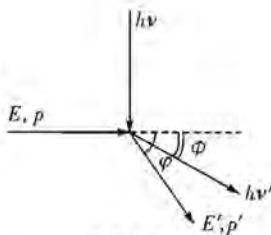


图 6-2-13



$$h\nu' = \frac{Eh\nu}{E + h\nu - (pc \cos\Phi + h\nu \sin\Phi)}. \quad (6')$$

当  $\Phi = \cos^{-1} \frac{pc}{\sqrt{p^2 c^2 + h^2 \nu^2}}$  时出射光子能量的最大值为

$$h\nu_{\max}' = \frac{Eh\nu}{E + h\nu - \sqrt{p^2 c^2 + h^2 \nu^2}}. \quad (7')$$

光子从电子获得的能量为

$$\Delta = h\nu_{\max}' - h\nu = \frac{\sqrt{p^2 c^2 + h^2 \nu^2} h\nu - (h\nu)^2}{E + h\nu - \sqrt{p^2 c^2 + h^2 \nu^2}}. \quad (8')$$

欲使  $\Delta$  最大, 将  $\Delta$  对  $h\nu$  求导, 并令其为零 (设  $\sqrt{p^2 c^2 + h^2 \nu^2} = a$ ),

$$\text{则} \quad \frac{d\Delta}{d(h\nu)} = \frac{A}{(E + h\nu - a)^2} = 0. \quad (9')$$

其中  $A = \left[ a + \frac{(h\nu)^2}{a} - 2h\nu \right] (E + h\nu - a) - (h\nu a - h^2 \nu^2) \left( 1 - \frac{h\nu}{a} \right)$ . 令  $A = 0$ , 得

$$\begin{aligned} Ea + h\nu a - p^2 c^2 - (h\nu)^2 + \frac{E(h\nu)^2}{a} + \frac{(h\nu)^3}{a} - (h\nu)^2 - 2h\nu E - 2(h\nu)^2 + 2h\nu a \\ = h\nu a - (h\nu)^2 - (h\nu)^2 + \frac{(h\nu)^3}{a}. \end{aligned}$$

$$\text{化简后得} \quad Ea - p^2 c^2 + \frac{E(h\nu)^2}{a} - 2h\nu E - 2(h\nu)^2 + 2h\nu a = 0.$$

$$\text{即} \quad (E + 2h\nu)a + \frac{E(h\nu)^2}{a} = p^2 c^2 + 2h\nu E + 2(h\nu)^2.$$

两边平方得

$$\begin{aligned} (E + 2h\nu)^2 a^2 + \frac{E^2 (h\nu)^4}{a^2} + 2(E + 2h\nu)E(h\nu)^2 \\ = (pc)^4 + 4(h\nu)^2 E^2 + 4(h\nu)^4 + 4(pc)^2 h\nu E + 4(pc)^2 (h\nu)^2 + 8(h\nu)^3 E. \end{aligned}$$

以  $\sqrt{p^2 c^2 + h^2 \nu^2} = a$  代入上式, 并化简得

$$E^2 p^2 c^2 + \frac{E^2 (h\nu)^4}{p^2 c^2 + h^2 \nu^2} = p^4 c^4 + h^2 \nu^2 E^2.$$

$$\begin{aligned} \text{即} \quad E^2 (pc)^4 + E^2 (pc)^2 (h\nu)^2 + E^2 (h\nu)^4 \\ = (pc)^6 + (pc)^4 (h\nu)^2 + E^2 (pc)^2 (h\nu)^2 + (h\nu)^4 E^2. \end{aligned}$$

$$\text{化简得} \quad (pc)^4 (h\nu)^2 = (pc)^4 (E^2 - p^2 c^2) = (pc)^4 E_0^2.$$

$$\text{由此得} \quad h\nu = E_0. \quad (10')$$

代入(7)'式即得

$$h\nu_{\max}' = \frac{EE_0}{E + E_0 - E} = E. \quad (11')$$

结果与原解(15)、(19)式相同.



## 题 14 (2007·亚州物理竞赛题)

## 自由电子气中每个电子对定容热容量贡献的平均值

1. 经典理论认为,金属中的自由电子气可看成理想气体.热平衡时电子气的平均能量与温度有关,从而表现出一定的热容量.平均每个自由电子对定容热容量的贡献  $c_v$  为

$$c_v = \frac{d\bar{E}}{dT} \quad (1)$$

$\bar{E}$  是自由电子的平均能量,  $c_v$  是与温度无关的常数.试根据经典理论计算  $\bar{E}$  和  $c_v$ .

2. 然而实验测量表明,金属中自由电子气的定容热容量与温度有关,其室温时的测量值比经典结果低两个数量级.这是因为金属中电子的运动状态不服从经典的统计规律而服从量子统计规律的缘故.根据量子理论,体积为  $V$  的金属材料,在能量  $E$  附近  $dE$  范围内的电子状态数  $dS$  与  $E^{\frac{1}{2}}$  成比例,即

$$dS = C V E^{\frac{1}{2}} dE \quad (2)$$

其中  $C$  为归一化系数,其值由自由电子总数决定.

能量为  $E$  的状态被电子占据的几率为

$$f(E) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - E_F}{k_B T}\right)} \quad (3)$$

式中  $k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$  为玻尔兹曼常数,  $T$  为绝对温度,  $E_F$  称为费米能级,一般金属在室温下  $E_F$  为几个电子伏 ( $1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$ ).

$f(E)$  称为费米分布函数,其图形如下图 6-2-14 所示.

- (1) 试根据  $f(E)$  计算室温时  $c_v$  的表达式.
- (2) 就量子理论的结果对经典结果的偏离给出合理解释.

注:计算中可忽略费米能级随温度的变化,即可设  $E_F = E_F^0$ ,  $E_F^0$  是  $0 \text{ K}$  时的费米能级,同时将费米分布函数简化成在  $E_F$  上下  $2k_B T$  范围内的线性下降函数,而在其余能量则为 0 或 1,即

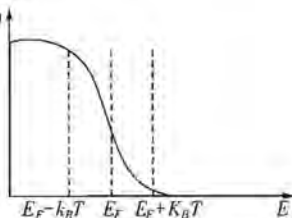


图 6-2-14

$$f(E) = \begin{cases} 1 & E < (E_F - k_B T), \\ \text{线性下降函数} & (E_F - k_B T) < E < (E_F + k_B T), \\ 0 & E > (E_F + k_B T). \end{cases} \quad \text{注意}$$

室温下  $k_B \ll E_F$ , 因此可对结果作适当的近似处理.在求电子总数时,可取温度  $0 \text{ K}$ .

**【分析】** 如将自由电子气视为理想气体,则比热容  $c_v$  与温度无关.根据比热容定义和经典统计理论(如能量均分原理),即可求得第一问,但实际上金属中的自



由电子气不能视为理想气体,其行为只能用量子理论来解释.如能量  $E$  附近  $dE$  范围内电子状态数  $dS$  与能量  $E$  呈非线性关系,题图形象地给出室温下对应的分布情况.  $T=0$  K 时电子的最高能级为费米能级,热激发时只有处于  $E_F$  附近的少数电子吸热而被向上激发,从而对热容有贡献,因此求解第二问时,首先应充分理解  $f(E)$  函数的物理含义,据此求电子气的总能量  $U$  和自由电子的平均能量  $\bar{E}$ ,求解时用到积分和若干近似统计的法则.

**【解】** 1. 自由电子具有三个自由度,根据能量均分原理,在温度  $T$  平均能量  $\bar{E}$  为  $\frac{3}{2}k_B T$ ,因此平均定容比热容  $c_V$  为

$$c_V = \frac{\partial \bar{E}}{\partial T} = \frac{3}{2} k_B.$$

2. (1) 设电子气总能量为  $U$ , 则

$$U = \int_0^S E f(E) dS.$$

式中  $S$  为电子状态总数,  $E$  为电子能量.

将题中②式代入,有

$$U = CV \int_0^\infty E^{\frac{3}{2}} f(E) dE = CVI.$$

其中  $I$  代表积分

$$I = \int_0^\infty E^{\frac{3}{2}} f(E) dE.$$

代入简化的  $f(E)$ , 有

$$f(E) = \begin{cases} 1 & E < (E_F - k_B T), \\ \frac{E - (E_F + k_B T)}{2k_B T} & (E_F - k_B T) < E < (E_F + k_B T), \\ 0 & E < (E_F + k_B T). \end{cases}$$

得

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{E_F - k_B T} E^{\frac{3}{2}} dE + \int_{E_F - k_B T}^{E_F + k_B T} E^{\frac{3}{2}} \left[ \frac{E - (E_F + k_B T)}{2k_B T} \right] dE \\ &= \frac{2}{5} E_F^{\frac{5}{2}} \left( 1 - \frac{k_B T}{E_F} \right)^{\frac{5}{2}} + \frac{E_F + k_B T}{5k_B T} E_F^{\frac{5}{2}} \left[ \left( 1 + \frac{k_B T}{E_F} \right)^{\frac{5}{2}} - \left( 1 - \frac{k_B T}{E_F} \right)^{\frac{5}{2}} \right] \\ &\quad - \frac{1}{7k_B T} E_F^{\frac{7}{2}} \left[ \left( 1 + \frac{k_B T}{E_F} \right)^{\frac{7}{2}} - \left( 1 - \frac{k_B T}{E_F} \right)^{\frac{7}{2}} \right]. \end{aligned}$$

由于通常  $k_B T \ll E_F$ , 保留二级小量, 可将  $I$  简化为

$$I \approx E_F^{\frac{5}{2}} \left[ \frac{2}{5} + \frac{3}{4} \left( \frac{k_B T}{E_F} \right)^2 \right].$$

从而

$$U = C V E_F^{\frac{5}{2}} \left[ \frac{2}{5} + \frac{3}{4} \left( \frac{k_B T}{E_F} \right)^2 \right].$$

式中常量  $CV$  可由电子总数决定, 而电子总数可由  $0$  K 时的值求出. 在  $0$  K 时,

$f(E)$ 成阶梯形;当  $E < E_F$  时为 1,  $E > E_F$  时为 0. 于是电子总数

$$N = CV \int_0^{E_F^0} E^{\frac{1}{2}} dE = \frac{2}{3} C V E_F^0{}^{\frac{3}{2}}.$$

于是

$$CV = \frac{3}{2} N E_F^0{}^{-\frac{3}{2}}.$$

式中  $E_F^0$  为 0 K 时的费米能级. 代入  $U$  的表达式得

$$U = \frac{3}{2} N E_F^0{}^{-\frac{3}{2}} E_F^{\frac{3}{2}} \left[ \frac{2}{5} + \frac{3}{4} \left( \frac{k_B T}{E_F} \right)^2 \right].$$

但由题意  $E_F \approx E_F^0$ , 且  $U = N \bar{E}$ , 故

$$\bar{E} \approx \frac{3}{2} E_F \left[ \frac{2}{5} + \frac{3}{4} \left( \frac{k_B T}{E_F} \right)^2 \right].$$

$$c_V = \frac{\partial \bar{E}}{\partial T} = \frac{9}{4} k_B \frac{k_B T}{E_F} \ll \frac{3}{2} k_B.$$

(2) 由于室温  $k_B T \approx 0.026$  eV, 而室温金属的费米能级  $E_F$  多在 eV 量级, 可见量子的结果比经典结果低两个量级, 与实验结果相符. 其原因为能量低于  $E_F$  较多的电子在温度变化时能量基本不变, 仅有少数处于  $E_F$  附近的电子对比热容有贡献, 从而导致平均比热容下降.

**题 15** (2006·亚州物理竞赛题) 马里亚纳群岛海谷(位于西太平洋)深度为  $H=10\,920$  m, 海洋表面盐水的密度  $\rho_0=1\,025$  kg/m<sup>3</sup>, 体变模量  $K=2.1 \times 10^9$  Pa, 重力加速度  $g=9.81$  m/s<sup>2</sup>. 忽略温度、重力加速度随深度的变化, 忽略大气压强. 求出马里亚纳群岛海谷底部压强  $p(H)$ . 你可以使用精确方法或者使用迭代法求解, 在后者情况下, 仅需保留压缩系数中的一阶非零项.

注意: 流体具有非常小的压缩系数. 压缩系数定义为

$$\alpha = -\frac{1}{V} \left( \frac{dV}{dp} \right)_{T=\text{const}}$$

体变模量是压缩系数的倒数:  $K = \frac{1}{\alpha}$ .

**【分析】** 由于海水中含有盐分, 其密度  $\rho$  随深度  $x$  而变, 所以海水中的静压强不可能简单用公式  $p(x) = \rho g x$  来计算. 本题可根据题给压缩系数(或体变模量)的定义寻找压强  $p$  与密度  $\rho$  之间的关系. 题中用到变量间的微积分关系作为计算依据.

**【解】** 按体变模量的定义, 可得压强和密度两者的变化量之间的关系式为

$$\Delta p = -K \frac{\Delta V}{V} = K \frac{\Delta \rho}{\rho} = K \frac{\Delta \rho}{\rho_0 + \Delta \rho} \approx K \frac{\Delta \rho}{\rho_0}. \quad (1)$$

式中  $\rho_0$  为海洋表面的海水密度. 设在海面下方深度为  $x$  处的海水密度为  $\rho(x)$ , 利用①式, 可得

$$\rho(x) = \rho_0 + \Delta \rho(x) = \rho_0 \left[ 1 + \frac{\Delta \rho(x)}{\rho_0} \right] = \rho_0 \left[ 1 + \frac{\Delta p(x)}{K} \right]. \quad (2)$$

若大气压强可忽略, 则  $\Delta p(x) = p(x) - p_0 \approx p(x)$ . 海水的静液压强的变化



量为

$$dp(x) = g\rho(x)dx. \quad (3)$$

将②式代入③式,得

$$\frac{dp(x)}{dx} = g\rho_0 \left[ 1 + \frac{p(x)}{K} \right]. \quad (4)$$

将④式积分,得

$$\int_0^p \frac{dp}{1 + \frac{p}{K}} = g\rho_0 x,$$

$$p(x) = K \left[ \exp\left(\frac{g\rho_0}{K}x\right) - 1 \right]. \quad (5)$$

已知  $H = 10\,920$  m,  $\rho_0 = 1\,025$  kg/m<sup>3</sup>,  $K = 2.1 \times 10^9$  Pa,  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>, 计算得

$$\frac{g\rho_0}{K}H = \frac{9.81 \times 1\,025}{2.1 \times 10^9} \times 10\,920 = 0.052\,3.$$

因为  $x < H$ , 所以  $\frac{g\rho_0}{K}x \ll 1$ . ⑤式可近似为

$$p(x) = K \left[ 1 + \frac{g\rho_0}{K}x + \frac{1}{2} \left( \frac{g\rho_0}{K}x \right)^2 + \dots - 1 \right]$$

$$\approx g\rho_0 x + \frac{1}{2K} (g\rho_0 x)^2. \quad (6)$$

代入  $H$  值, 可算得马里亚纳群岛海谷的压强为

$$p(H) \approx 9.81 \times 1\,025 \times 10\,920 + \frac{1}{2 \times 2.1 \times 10^9} \times (9.81 \times 1\,025 \times 10\,920)^2$$

$$= (1.10 \times 10^8 + 2.87 \times 10^6) \text{ Pa}$$

$$= 1.13 \times 10^8 \text{ Pa}.$$

另解: 利用迭代法, 也可得出⑥式.

若不计入海水压缩系数或体变模量的影响, 则在海面下方深度为  $x$  处的海水压强可写为

$$p(x) \approx g\rho_0 x. \quad (7)$$

现利用②式, 加入密度的校正项, 得

$$\rho_1(x) = \rho_0 \left[ 1 + \frac{p(x)}{K} \right] \approx \rho_0 \left( 1 + \frac{g\rho_0 x}{K} \right). \quad (8)$$

将⑧式重复代入⑦式, 得

$$dp_1(x) \approx g\rho_1(x)dx = g\rho_0 \left( 1 + \frac{g\rho_0 x}{K} \right) dx. \quad (9)$$

将⑨式积分得

$$p_1(x) \approx \int_0^x g\rho_1(x)dx = g\rho_0 x + \frac{1}{2K} (g\rho_0 x)^2,$$

与⑥式相同.



## 题 16 (2001·亚洲物理奥赛题)

## 衬底制备

衬底制备属于硅的半导体芯片生产的一部分,在现代技术中有 20 多个工艺过程,我们考虑其中的薄膜沉积过程前的衬底表面沾污层的形成问题.

在衬底制备过程中,要将各种材料的薄膜沉积在原硅衬底表面上.在沉积之前,衬底的表面必须非常清洁.真空中残留的氧和其他元素将引起玷污层的形成.这一玷污层形成的速率由撞击到衬底表面的气体分子的速率决定.假定单位体积的分子数目为  $n$ ,单位衬底面积上气体撞击速率由下式给出

$$J = \frac{1}{4} n \bar{v},$$

其中  $\bar{v}$  为气体分子的平均速率.

(a) 假定气体分子的速率服从麦克斯韦—玻耳兹曼分布

$$W(v) = 4\pi \left( \frac{M}{2\pi RT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{Mv^2}{2RT}},$$

其中  $W(v)$  为速率介于  $v$  和  $v+dv$  间的分子比例,  $M$  为气体的摩尔质量,  $T$  为气体热力学温度,  $R$  为气体普适常数.证明气体分子的平均速率由下式给出

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} v W(v) dv = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}.$$

(b) 假定在较低气压  $p$  下气体的行为如同理想气体,证明气体对衬底表面单位面积的撞击速率为

$$J = \frac{p}{\sqrt{2\pi mkT}}.$$

其中  $m$  为分子的质量,  $T$  为气体的热力学温度.

(c) 如果真空内残余氧气的压强为 133 Pa,并且假定一个氧分子可近似看做半径为  $3.6 \times 10^{-10}$  m 的球.估算摄氏温度 300 °C 下沉积一个氧分子厚度的薄层需多长时间?假定撞击到硅衬底表面的氧分子都被沉积在硅衬底表面,同时假定这层氧分子一个挨着一个排列.

(d) 实际上,并不是所有撞击到硅衬底表面的氧分子都与硅发生反应而沉积在表面上.这一点可用激活能概念来理解.只有当反应前气体分子的总能量大于激活能时,该分子才可以与硅发生反应而沉积在表面上.物理上,这个激活能描述这样一个事实:在新的氧和硅的化学键形成前,必须打破硅与硅的化学键.假定反应的激活能为 1 eV,再一次估算上述温度下沉积一个氧分子厚度的薄层需要多长时间.你可以假定在(a)中麦克斯韦—玻耳兹曼分布曲线下的面积为 1.

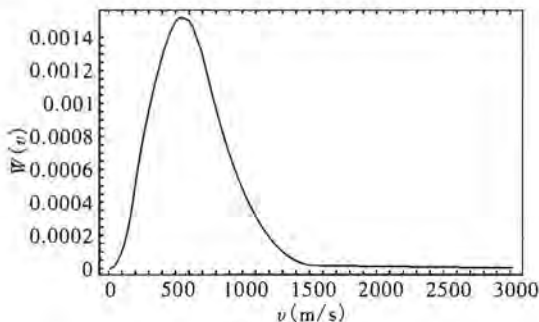


图 6-2-15

(e) 在一个光刻过程中,在清洁的硅衬底上覆盖了一层平整的透明聚合物(光刻胶),光刻胶的折射率  $\mu=1.40$ 。为了测量光刻胶层的厚度,用波长  $\lambda=589 \text{ nm}$  的平行单色光照射衬底,假定光垂直射到覆盖层上,对应于一个最小光刻胶层厚度  $d$  存在反射光的相消干涉。导出  $d, \mu, \lambda$  之间的关系表达式,并利用给定的数据计算  $d$  的值。这里可以将硅看做折射率大于 1.40 的介质,并可忽略多次反射。

下列数据可能有用:

氧的摩尔质量:  $32 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

玻耳兹曼常数  $k=1.38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

阿伏加德罗常数  $N_A=6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

有用的公式:

$$\int x^3 e^{-kx^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-kx^2} \left( \frac{1}{k^2} + \frac{x^2}{k} \right).$$

**【分析】** 本题为一个工程应用问题,用到热学和光学两方面的物理知识。前 3 问在理解了题目所描述的物理图象以及相关公式的基础上作一定的数学计算即可求解;第 4 问则是考虑激活能,即只有分子总能量大于一定数值(由此可换算成相应速率)的相应分子才能沉积下来。对此可利用速率分布函数和相应曲线利用图解法等求得符合条件的分子频率,最后一问则为均匀薄膜的干涉问题。

**【解】** (a) 气体分子的平均速率为

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \int_0^{+\infty} vW(v)dv = \int_0^{+\infty} v4\pi \left( \frac{M}{2\pi RT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{Mv^2}{2RT}} dv \\ &= 4\pi \left( \frac{M}{2\pi RT} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{+\infty} v^3 e^{-\frac{Mv^2}{2RT}} dv = 4\pi \left( \frac{M}{2\pi RT} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{4R^2 T^2}{2M^2} \\ &= \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \end{aligned}$$

(b) 由理想气体方程式  $pV=NkT$ , 可得气体分子的浓度  $n=\frac{N}{V}=\frac{p}{kT}$ 。气体分子的撞击频率可计算如下

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{1}{4} n \bar{v} = \frac{1}{4} \frac{p}{kT} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \\
 &= p \sqrt{\frac{8(N_A k)T}{16k^2 T^2 \pi(N_A m)}} \\
 &= \frac{p}{\sqrt{2\pi m k T}}.
 \end{aligned}$$

式中应用了  $R = N_A k$  和  $m = \frac{M}{N_A}$ .

(c) 按题设氧分子的沉积层是一个接一个的分子紧密地堆积而成, 如图 6-2-16 所示, 设氧分子的半径为  $r$  (取  $3.6 \times 10^{-10} \text{ m}$ ), 则在基底上面积为  $(4r)^2 = 16r^2$  的平面, 沉积有四个氧分子, 因此每一平方米所含的单层氧分子数为

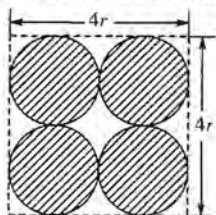


图 6-2-16

$$n_1 = \frac{4}{16 \times (3.6 \times 10^{-10})^2} = 1.9 \times 10^{18}.$$

在温度  $300 \text{ }^\circ\text{C}$  和压力  $133 \text{ Pa}$  的情况下, 氧分子撞击基底表面的频率为

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{p}{\sqrt{2\pi m k T}} \\
 &= \frac{133}{\sqrt{2\pi \left( \frac{32 \times 10^{-3}}{6.02 \times 10^{23}} \right) (1.38 \times 10^{-23}) (300 + 273)}} \text{ m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1} \\
 &= 2.6 \times 10^{24} \text{ m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}.
 \end{aligned}$$

因此在基底上沉积一层氧分子所需的时间为

$$t_1 = \frac{n_1}{J} = 7.3 \times 10^{-7} \text{ s} = 0.73 \text{ } \mu\text{s}.$$

上面所计算的沉积时间和实际过程相比, 显得太短.

(d) 若氧分子的总能量恰等于活化能, 设该分子的速率为  $v_1$ , 则

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = 1 \text{ eV} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ J}.$$

则  $v_1 = 2453 \text{ m/s}$ .

在  $T = 573 \text{ K}$  时, 气体分子的速率分布为

$$\begin{aligned}
 W(v) &= 4\pi \left( \frac{32 \times 10^{-3}}{2\pi \times 8.31 \times 573} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp\left( -\frac{32 \times 10^{-3}}{2 \times 8.31 \times 573} v^2 \right) \\
 &= 1.39 \times 10^{-8} v^2 \exp(-3.36 \times 10^{-5} v^2).
 \end{aligned}$$



气体分子速率大于  $2453 \text{ m/s}$  的分子数占全部分子数的比值,可估算如下:

下表列出分子速率分别为  $2453 \text{ m/s}$ 、 $(2453+500) \text{ m/s}$  和  $(2453+1000) \text{ m/s}$  的几率.

速率 $v(\text{m/s})$	几率 $W(v)$
2453	$1.39 \times 10^{-10}$
2953	$2.28 \times 10^{-14}$
3453	$6.62 \times 10^{-19}$

在麦克斯韦—玻耳兹曼分布图中,速率大于  $2453 \text{ m/s}$  的函数曲线以下所包围的面积,即为所求的比值.利用梯形面积法(或其他的数值算法)可求得

$$f = \frac{\text{能量} \geq \text{活化能的分子数}}{\text{全部分子数}}$$

$$= 500 \left[ \left( \frac{1.39 \times 10^{-10} + 2.28 \times 10^{-14}}{2} \right) + \left( \frac{2.28 \times 10^{-14} + 6.62 \times 10^{-19}}{2} \right) \right]$$

$$= 3.48 \times 10^{-8}.$$

考虑活化能的因素,在  $300^\circ\text{C}$  时沉积一层氧分子所需的时间为

$$t_2 = \frac{0.73 \mu\text{s}}{3.48 \times 10^{-8}} = 21.0 \text{ s}.$$

(e) 为产生完全相消性干涉,所需的光程差  $= 2d = \frac{\lambda'}{2}$ , 式中  $\lambda' = \frac{\lambda_{\text{air}}}{\mu}$  为光在薄膜中传播时的波长(如图 6-2-17). 所需薄膜的最小厚度  $d$  为

$$d = \frac{\lambda_{\text{air}}}{4\mu} = \frac{589 \text{ nm}}{4 \times 1.40} = 105 \text{ nm}.$$

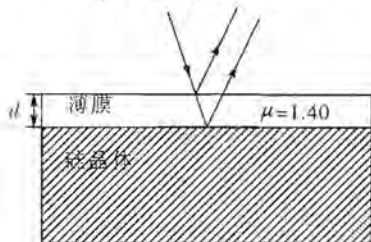


图 6-2-17

### 题 17 (2000·亚洲物理竞赛题)

#### $\alpha$ 粒子的检测

我们一直受到自然的和人为的辐射.随着核反应堆的发展和放射性同位素在农业、工业、生物及医药方面的应用,人造放射源的数目每年都在增加. $\alpha$  粒子就是从放射材料发射出来的一种辐射( $\alpha$  粒子也就是二次高化的氦原子,它带有 2 个单位正电荷,具有 4 个核质量单位).

利用电学方法检测  $\alpha$  粒子的原理是基于当  $\alpha$  粒子通过气体或其他物质时,会



使气体或其他物质电离,在标准大气压下, $\alpha$ 粒子的平均电离程 $R_0$ 与其能量 $E$ 的经验关系为

$$R_0 = 0.318E^{1/2},$$

其中 $R_0$ 以cm为单位, $E$ 以MeV为单位.

为了检测由放射源( $\alpha$ 源)放射出来的 $\alpha$ 粒子,可以采用充满气体的电离室作为( $\alpha$ 粒子)探测器,其原理图如图6-2-18所示. $\alpha$ 粒子通过气体时使气体电离,由此产生的正负电荷分别跑向阴极和阳极,阴极和阳极收集电荷后产生脉冲电压,这个脉冲电压可被检测、放大和记录.阳极和阴极的电势差保持足够高,以致在正负电荷到达阴极和阳极的过程中产生电荷复合的数量可忽略不计.

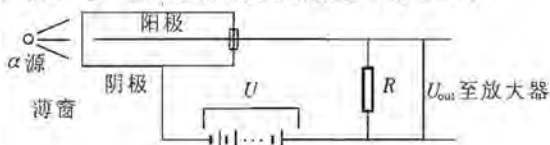


图 6-2-18 电离室电路原理图

a. 一个电容为45 pF的电离室系统被用来检测电离程为5.50 cm的 $\alpha$ 粒子.假定在空气中产生一个离子对所需的能量为36 eV(离子对由一个较轻的负电子和一个较重的正离子组成,两者均带一个电子电荷量 $e=1.6 \times 10^{-19}$  C),则每个 $\alpha$ 粒子产生的脉冲电压的峰值是多少?(设图中 $R$ 值很大)

b. 由 $\alpha$ 粒子产生的脉冲电压将出现在电阻 $R$ 的两端,假定这一装置可以测量的饱和电流的最小值为 $10^{-12}$ 安培(饱和电流值大体为常量,这时电极以与入射 $\alpha$ 粒子产生电离的速率相同的速率收集正负电荷).假定该检测系统的检测效率为10%, $\alpha$ 粒子的电离程 $R_0$ 为5.50 cm,计算利用该检测系统所能测到的 $\alpha$ 放射源的最小活度 $K$ (即每秒钟由 $\alpha$ 放射源产生的 $\alpha$ 粒子数).

c. 利用上述电离室对由 $\alpha$ 粒子产生的脉冲进行计数.欲使该测量系统的时间常数 $\tau=10^{-3}$  s,计算电阻值 $R$ .如果要产生0.25 V的脉冲电压信号,所需的脉冲放大器的放大倍数为多少?

d. 如图6-2-19所示,电离室具有圆柱形的电极板.对于采用这样电离室的计数器,设中心的金属圆柱阳极和外面的薄金属圆柱形阴极的直径分别为 $d$ 和 $D$ .当阳极单位长度上带有电荷 $\lambda$ 时,导出距圆柱阳极轴心为 $r$ 处的电场强度 $E(r)$ 和电势 $U(r)$ (假定 $\frac{d}{2} \leq r \leq \frac{D}{2} \leq l$ ),并导出电离室单位长度的电容.设空气的击穿电场强度 $E_0$ 为 $3 \text{ MV} \cdot \text{m}^{-1}$ (当空气中电场强度最大处的场强大于 $E_0$ 时空气将被击穿).如果 $d=1 \text{ mm}$ , $D=1 \text{ cm}$ ,计算当击穿发生时,阳极和阴极间的电势差.

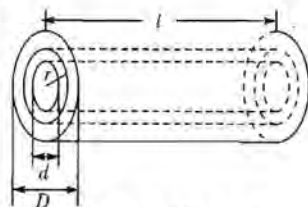


图 6-2-19 圆柱形电离室

数据:



1 pF(皮法) $=10^{-12}$ F(法拉), 1 MeV $=10^6$  eV(电子伏特), 1 Ci(居里) $=3.7 \times 10^{10}$  dis $\cdot$ s $^{-1}$ (衰变/秒)(衰变/秒在本题中即每秒 $\alpha$ 粒子的产生数) $=10^6$   $\mu$ Ci(微居里)(居里是活度的基本国际单位),  $\int \frac{dr}{r} = \ln r + C$ (常数).

**【分析】** 首先应理解本题所述 $\alpha$ 粒子检测过程中的物理图象和由此出现的一系列电学效应. $\alpha$ 粒子可使气体电离,分离后的正负电荷累积在电离室(可视为柱形电容器)的阳极和阴极上,进而对外电路产生脉冲电压,注意在电离室中电荷、电场以及两极间的电势差(即脉冲电压)间满足高斯定理和 $U = \int_1^2 E(r) dr$ 等关系式.

**【解】** a. 由给出的电离程-能量关系和题中提供的数据得

$$E = \left( \frac{R_e}{0.318} \right)^{\frac{2}{3}} \text{ MeV} = \left( \frac{5.50}{0.318} \right)^{\frac{2}{3}} \text{ MeV} = 6.69 \text{ MeV}.$$

因 $E_{\text{离子对}} = 35$  eV, 则

$$N_{\text{离子对}} = \frac{6.69 \times 10^6}{35} \text{ 对} = 1.9 \times 10^5 \text{ 对}.$$

电压脉冲的大小为

$$\Delta U = \frac{\Delta Q}{C} = \frac{N_{\text{离子对}} e}{C}.$$

以 $C = 45$  pF $=4.5 \times 10^{-11}$  F代入,得

$$\Delta U = \frac{1.9 \times 10^5 \times 1.6 \times 10^{-19}}{4.5 \times 10^{-11}} \text{ mV} = 0.68 \text{ mV}.$$

b. 活度为 $A$ (放射源每秒发射的 $\alpha$ 粒子数)的放射源发出的 $\alpha$ 粒子进入效率为0.1的探测器后产生的电子将产生收集电流

$$\begin{aligned} I &= \frac{Q}{t} = 0.1 \times K N_{\text{离子对}} e \\ &= 0.1 \times K \times 1.9 \times 10^5 \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ A} \\ &= 1.9 \times 1.6 \times 10^{-15} \text{ KA}. \end{aligned}$$

以 $I_{\text{min}} = 10^{-12}$  A代入,得

$$K_{\text{min}} = \frac{10^{-12}}{1.9 \times 1.6 \times 10^{-15}} \text{ dis} \cdot \text{s}^{-1} = 3.3 \times 10^2 \text{ dis} \cdot \text{s}^{-1}.$$

因1 Ci $=3.7 \times 10^{10}$  dis $\cdot$ s $^{-1}$ , 于是

$$K_{\text{min}} = \frac{3.3 \times 10^2}{3.7 \times 10^{10}} \text{ Ci} = 8.9 \times 10^{-9} \text{ Ci}.$$

c. 时间常数

$$\begin{aligned} \tau &= RC \text{ (其中 } C = 45 \text{ pF)} = 10^{-3} \text{ s}, \\ R &= \frac{\tau}{C} = \frac{10^{-3}}{45 \times 10^{-12}} \text{ M}\Omega = 22.22 \text{ M}\Omega. \end{aligned}$$

在(a)问中已求出由能量为6.69 MeV的 $\alpha$ 粒子在电离室阳极引起的电压信号大小为 $\Delta U = 0.68$  mV, 因而为获得0.25 V $=250$  mV的电压信号, 所需电压脉冲放

大器的增益应为

$$G = \frac{250}{0.68} = 368.$$

d. 由对称性知, 电场沿径向且仅依赖于与轴的距离  $r$ , 因而可用高斯定理求解. 作半径为  $r$ 、长为  $l$  的圆柱形高斯面, 其中包围的电荷为  $\lambda l$ . 面积分

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{S} = 2\pi r l E.$$

因为电场处处相等且垂直于圆柱面, 由高斯定理

$$2\pi r l E = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}.$$

得

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

因  $E$  沿径向且仅随  $r$  而变, 由  $E = -\frac{dU}{dr}$ , 电势可由  $E(r)$  对  $r$  积分求得. 若设内柱电势为  $U_0$ , 则有

$$U(r) - U_0 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{\frac{d}{2}}^r \frac{dr}{r}.$$

于是

$$U(r) = U_0 - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2r}{d}.$$

可用此表达式计算电容两极板间的电势差. 令  $r = \frac{D}{2}$ , 得电势差

$$U = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{D}{d}.$$

因电容上电荷为  $\lambda l$ , 电容由  $Q = CU$  定义, 故单位长电容为

$$C_0 = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{D}{d}}.$$

最大电场出现在  $r$  最小处, 即  $r = \frac{d}{2}$  处. 若令  $r = \frac{d}{2}$  处的电场等于击穿电场强度  $E_b$ ,  $E(r)$  表达式指出电容器单位长电荷应为  $E_b \pi \epsilon_0 d$ . 将其代入电容两端电势差表达式, 得

$$U = \frac{1}{2} E_b d \ln \frac{D}{d}.$$

把  $E_b = 3 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $d = 1 \text{ mm}$ , 及  $D = 1 \text{ cm}$  代入, 得

$$U = 3.45 \text{ kV}.$$

### 题 18 (2006 · 国际物理奥赛题)

#### 中子干涉仪中的重力

**物理描述** 考虑 Collela, Overhauser 及 Werner 著名的中子干涉仪实验, 在干涉仪中, 我们将假设分束板和反射镜是理想的, 实验研究重力场对中子德布罗意波



的影响。

干涉仪中采用与光学类似的符号,如图 6-2-20,中子从入口 IN 进入干涉仪,沿图示的两条路径到达两个输出端口,在输出端口 OUT1 和 OUT2 检测。两条路径形成一个菱形,其面积一般为数平方厘米( $\text{cm}^2$ )。

中子的德布罗意波(波长约为  $10^{-10} \text{ m}$ )产生干涉,当干涉仪水平放置时,所有中子都从输出端口 OUT1 输出。但如果将干涉仪以中子入射方向为轴旋转  $\varphi$  角,则可以观察到依赖于  $\varphi$  的中子输出量在 OUT1 和 OUT2 两个端口之间的再分配。

**几何描述** 当  $\varphi=0^\circ$  时,干涉仪的平面是水平的;而当  $\varphi=90^\circ$  时,该平面是竖直的,且两个输出端口皆在旋转轴的上方。

(1) 求两条路径所形成的菱形的面积  $A$ 。

(2) 以旋转轴所在的水平面为基准,求输出端口 OUT1 的高度  $H$ 。

将  $A$  与  $H$  的答案用  $\alpha, \theta, \varphi$  来表示。

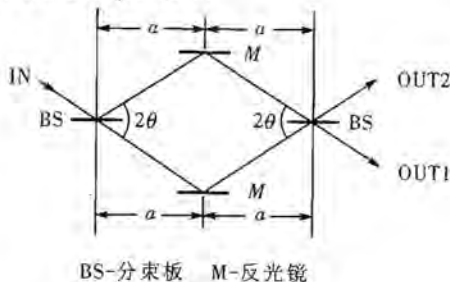


图 6-2-20

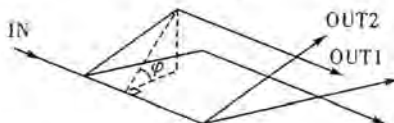


图 6-2-21

**光程** 光程  $N_{\text{opt}}$  (为一个数)是几何路径长度(距离)与波长  $\lambda$  的比值。但如果  $\lambda$  的值不是常量,而是沿着路径变化,则  $N_{\text{opt}}$  可通过求  $\lambda^{-1}$  沿着路径的积分得到。

(3) 当干涉仪被旋转了  $\varphi$  角后,求两条路径之间的光程差  $\Delta N_{\text{opt}}$ 。将答案用以下物理量来表示:  $a, \theta, \varphi$ , 中子质量  $M$ , 入射中子的德布罗意波长  $\lambda_0$ , 重力加速度  $g$ , 以及普朗克常量  $h$ 。

(4) 引进体积参数

$$V = \frac{h^2}{gM^2}$$

并将  $\Delta N_{\text{opt}}$  用  $A, V, \lambda_0, \varphi$  来表示。已知  $M = 1.675 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ,  $g = 9.800 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ , 求  $V$  的值。

(5) 如果把从强度相长到相消又回到相长作为一个循环,问当  $\varphi$  的值由  $\varphi = -90^\circ$  增加到  $\varphi = 90^\circ$  时,输出端口 OUT1 共经历了多少个完整的循环?

**实验数据** 在一次实验中,干涉仪的参数选为  $a=3.600\text{ cm}$  及  $\theta=22.10^\circ$ , 结果观察到 19.00 个完整的循环。

(6) 问在这次实验中  $\lambda_0$  的值为多少?

(7) 如果在另一次类似的实验中观察到了 30.00 个完整的循环,而入射中子的  $\lambda_0=0.2000\text{ nm}$ , 求  $A$  的值为多少。

提示: 当  $|ax| \ll 1$  时,  $(1+x)^a$  可近似为  $1+ax$ 。

**【分析】** 首先要搞清楚题中所涉及的物理概念, 解题时还要根据题中的几何图形, 利用有关三角知识帮助求解。

**【解】** (1) 菱形的边长为  $L = \frac{a}{\cos\theta}$ , 一对平行的菱边之间的距离是

$$D = \frac{a}{\cos\theta} \sin 2\theta = 2a \sin\theta. \quad (1)$$

因此, 菱形面积  $A = LD = 2a^2 \tan\theta. \quad (2)$

(2) 输出端口 OUT1 的高度

$$H = D \sin\varphi = 2a \sin\theta \sin\varphi. \quad (3)$$

(3) 光程差仅仅与水平的两条边有关(另外两条边的光程相等), 设入口所在边的德布罗意波长为  $\lambda_0$ , 出口 OUT1 所在边的德布罗意波长为  $\lambda_1$ , 则

$$\Delta N_{\text{opt}} = \frac{L}{\lambda_0} - \frac{L}{\lambda_1} = \frac{a}{\lambda_0 \cos\theta} \left( 1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right). \quad (4)$$

相应的动量分别是  $\frac{h}{\lambda_0}$  和  $\frac{h}{\lambda_1}$ , 利用能量守恒有

$$\frac{1}{2M} \left( \frac{h}{\lambda_0} \right)^2 = \frac{1}{2M} \left( \frac{h}{\lambda_1} \right)^2 + MgH. \quad (5)$$

解得

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \sqrt{1 - 2 \frac{gM^2}{h^2} \lambda_0^2 H}. \quad (6)$$

由于根式中  $\frac{gM^2}{h^2} \lambda_0^2 H$  的数量级为  $10^{-7}$ , ⑥式简化为

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = 1 - \frac{gM^2}{h^2} \lambda_0^2 H. \quad (7)$$

因而得到

$$\Delta N_{\text{opt}} = \frac{a}{\lambda_0 \cos\theta} \frac{gM^2}{h^2} \lambda_0^2 H = 2 \frac{gM^2}{h^2} a^2 \lambda_0 \tan\theta \sin\varphi. \quad (8)$$

(4) 利用体积参数, 上式化简为

$$\Delta N_{\text{opt}} = \frac{\lambda_0 A}{V} \sin\varphi. \quad (9)$$

其中  $V = 0.1597 \times 10^{-13} \text{ m}^3$ 。

(5) 干涉相长的条件是两条路径光程差为波长的整数倍, 相消的条件是光程差为半波长的奇数倍。当  $\varphi$  的值由  $\varphi = -90^\circ$  增加到  $\varphi = 90^\circ$  时,



$$\Delta N_{\text{opt}} \begin{cases} \varphi=90^\circ \\ \varphi=-90^\circ \end{cases} = \frac{2\lambda_0 A}{V}. \quad (10)$$

这就是输出端口 OUT1 经历的完整循环数.

(6) 将②式代入实验数据, 计算得面积  $A=10.53 \text{ cm}^2$ , 利用⑩式

$$\lambda_0 = \frac{19 \times 0.1597}{2 \times 10.53} \text{ nm} = 0.1441 \text{ nm}. \quad (11)$$

(7) 利用⑩式

$$A = \frac{30 \times 0.1597}{2 \times 0.2000} \text{ cm}^2 = 11.98 \text{ cm}^2.$$

### 题 19 (2006 · 国际物理奥赛题)

#### 观察运动的细棒

**物理描述** 一架针孔照相机以瞬间开关针孔的方式拍摄细棒的运动状况. 其针孔位于  $x=0$ , 与  $x$  轴的距离为  $D$  处.  $x$  轴上标有等距的刻度, 用于在照片中测量细棒的表现长度. 当细棒静止时, 其长度为  $L$ . 然而, 本题中细棒并非静止, 而是以固定的速度  $v$  沿  $x$  轴运动.

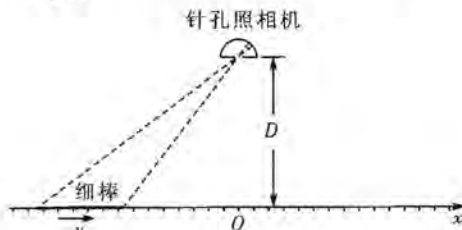


图 6-2-22

**基本关系** 在针孔照相机所拍摄的一张照片中, 显示细棒上的某一点的位置为  $\tilde{x}$ .

(1) 问在该照片的拍摄时刻, 细棒上该点达到的实际位置  $x$  是多少? 请将答案用  $\tilde{x}$ 、 $D$ 、 $L$ 、 $v$  和光速  $c=3.00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  来表达. 需要时, 可用下列关系  $\beta = \frac{v}{c}$  和

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

来简化答案.

(2) 求对应的逆关系, 即用  $x$ 、 $D$ 、 $L$ 、 $v$  和  $c$  来表达  $\tilde{x}$ .

注意: 实际位置是指照相机为静止参考系的位置.

**细棒的表现长度** 在细棒中点的实际位置到达  $x_0$  的瞬间, 针孔照相机拍摄了一张照片.

(3) 利用已给出的量, 求此照片中细棒的表现长度.

(4) 请指出表现长度如何随时间变化.

**对称照片** 一张针孔相机的照片显示, 针孔到细棒两端的距离相等.

(5) 求该照片中细棒的表现长度.

(6) 求照像时细棒中点的实际位置.

(7) 在照片中, 显示的细棒中点的像的位置在哪里?

**很早及很迟时所拍摄的照片** 在很早的时候, 即当细棒从极远处靠近且还在极远处时, 针孔照相机拍摄了一张照片; 在很迟的时候, 即细棒远离并已到达极远处时又拍摄了一张照片. 其中一张照片中细棒的表观长度为 1.00 m, 另一张照片中细棒的表观长度为 3.00 m.

(8) 请指明哪一个表观长度出现在哪一张照片上.

选择一项:

表观长度出现在早摄的照片上为 1.00 m, 出现在迟摄的照片上为 3.00 m.

表观长度出现在早摄的照片上为 3.00 m, 出现在迟摄的照片上为 1.00 m.

(9) 求速度  $v$ .

(10) 求细棒静止时的长度  $L$ .

(11) 推导出该细棒在对称照片中的表观长度.

**【分析】** 本题需运用狭义相对论观点进行分析.

**【解】** (1) 光从棒上  $\tilde{x}$  点发出, 到达照相机需要的时间为  $T = \frac{\sqrt{D^2 + \tilde{x}^2}}{c}$ , 这一段时间内, 细棒向前移动了  $vT$ , 因此拍照的瞬间该点的位置是

$$x = \tilde{x} + \beta \sqrt{D^2 + \tilde{x}^2}. \quad (1)$$

(2) 由①式将  $\tilde{x}$  解出来即可得到

$$\tilde{x} = \gamma^2 x - \beta \gamma \sqrt{D^2 + (\gamma x)^2}. \quad (2)$$

(3) 由于洛伦兹收缩, 运动的棒的长度为  $\frac{L}{\gamma}$ , 因此棒前后两端的实际位置为

$$x_{\pm} = x_0 \pm \frac{L}{2\gamma}.$$

代入②式, 得到棒两端的照片上的位置

$$\tilde{x}_{\pm} = \gamma \left( \gamma x_0 \pm \frac{L}{2} \right) - \beta \gamma \sqrt{D^2 + \left( \gamma x_0 \pm \frac{L}{2} \right)^2}. \quad (3)$$

表观长度  $L(x_0) = \tilde{x}_+ - \tilde{x}_-$ , 即

$$L(x_0) = \gamma L + \beta \gamma \sqrt{D^2 + \left( \gamma x_0 + \frac{L}{2} \right)^2} - \beta \gamma \sqrt{D^2 + \left( \gamma x_0 - \frac{L}{2} \right)^2}. \quad (4)$$

(4) 因为细棒匀速运动, 即  $\frac{dx_0}{dt} = v$ , 所以问题是表观长度  $L(x_0)$  如何随  $x_0$  的增加而改变. 我们将上式中两个根式项作图, 如图 6-2-23 所示. 显然含有“-”号的项与“+”号项之差随着  $x_0$  的增加而减小, 因此表观长度始终随时间减小.

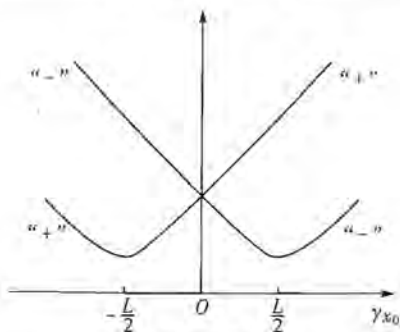


图 6-2-23

(5) 由于照片中细棒对称, 棒的两端光线同时到达, 因为是同时发出的, 因此棒的长度是运动细棒的实际长度

$$L = \frac{L}{\gamma} \quad (5)$$

(6) 因此照片上看到棒的两端位置为

$$\tilde{x}_+ = \frac{L}{2\gamma} \quad \tilde{x}_- = -\frac{L}{2\gamma} \quad (6)$$

按照式①

$$\begin{aligned} x_+ &= \frac{L}{2\gamma} + \beta \sqrt{D^2 + \left(\frac{L}{2\gamma}\right)^2}, \\ x_- &= -\frac{L}{2\gamma} + \beta \sqrt{D^2 + \left(\frac{L}{2\gamma}\right)^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

照像时细棒中点的实际位置

$$x_0 = \beta \sqrt{D^2 + \left(\frac{L}{2\gamma}\right)^2} \quad (8)$$

(7) 利用④式, 求出照片中显示的细棒中点的像的位置

$$\tilde{x} = \gamma^2 x_0 - \beta \gamma \sqrt{D^2 + (\gamma x_0)^2} = \beta \gamma \left[ \sqrt{(\gamma D)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2} - \sqrt{(\gamma D)^2 + \left(\frac{\beta L}{2}\right)^2} \right] \quad (9)$$

它距离照片中棒的前端的距离  $l = \tilde{x}_+ - \tilde{x}_0 = \frac{L}{2\gamma} - \tilde{x}_0$ , 即

$$l = \frac{L}{2\gamma} - \beta \gamma \sqrt{(\gamma D)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2} + \beta \gamma \sqrt{(\gamma D)^2 + \left(\frac{\beta L}{2}\right)^2} \quad (10)$$

(8) 在很早时候  $x_0 \rightarrow -\infty$ , 利用④式得到

$$L_{\text{早}} = L(x_0 \rightarrow -\infty) = (1 + \beta) \gamma L = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} L \quad (11)$$

同样, 在很迟的时候  $x_0 \rightarrow \infty$ ,

$$L_{\text{迟}} = L(x_0 \rightarrow \infty) = (1 - \beta) \gamma L = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} L \quad (12)$$



显然,  $L_{\text{早}} > L_{\text{迟}}$ , 因此表观长度在早摄的照片上为 3.00 m, 在迟摄的照片上为 1.00 m. 这个结果是显然的, 由(4)已经知道了表观长度始终随时间减小.

(9) 由⑪⑫两式解得

$$\beta = \frac{L_{\text{早}} - L_{\text{迟}}}{L_{\text{早}} + L_{\text{迟}}} = \frac{1}{2}. \quad (13)$$

因此

$$v = \beta c = \frac{c}{2}. \quad (14)$$

(10) 将⑪⑫两式相乘得

$$L = \sqrt{L_{\text{早}} L_{\text{迟}}} = 1.73 \text{ m}. \quad (15)$$

(11) 对称照片中的表观长度  $L = \frac{L}{\gamma}$ ,  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

所以

$$L = 1.50 \text{ m}.$$

### 题 20 (2005 · 国际物理竞赛题)

#### 重力场中的中子

在经典世界里, 一个在地球表面的弹性球是一个理想的永恒运动的例子, 该球被束缚在地球表面与转折点之间, 不能低过表面或高出转折点. 它将保持这种状态, 上下运动, 周而复始, 只有空气的摩擦或非弹性碰撞能结束这一过程. 但这些效应在以下问题中都将忽略.

在 LLG 研究所的一组物理学家在 2002 年进行了关于中子在地球引力场里的行为的实验. 在实验中, 向右运动的中子下落到一水平的中子反射镜上, 被弹性碰撞一再返回到原来的高度.

实验的装置如图 6-2-24, 包括小窗  $W$ , 中子镜  $M$  (在  $z=0$  的高度), 中子吸收板  $A$  (在高度  $z=H$ , 长度  $L$ ), 以及中子探测器  $D$ . 一束中子由  $W$  飞出, 它的水平方向速度恒定为  $v_x$ , 经过  $A$  与  $M$  的空腔到达  $D$ . 所有碰到  $A$  表面的中子会被吸收, 在实验中消失, 那些碰到  $M$  表面的会被弹性反射, 探测器  $D$  记录穿过率  $N(H)$ , 也就是单位时间到达  $D$  的中子总数.

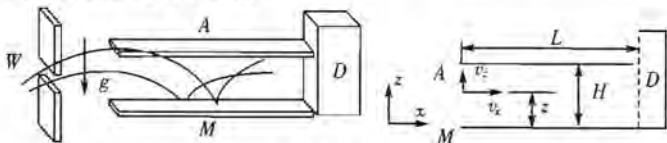


图 6-2-24

进入空腔的中子垂直速度  $v_z$  有较大的正负值范围, 一旦进入空腔, 它们在空腔下方的反射镜和吸收板之间飞行.

(1) 设中子进入空腔时的高度为  $z$ , 计算在经典物理下可以到达探测器  $D$  的中子垂直速度  $v_z(z)$  的范围, 假设  $L$  远大于所有其他尺度.

(2) 计算在经典物理下, 不论  $z$  值大小, 要让所有垂直速度超出上题范围的中子全被  $A$  吸收的最短空腔长度  $L_c$ . 设  $v_x = 10 \text{ m/s}$ ,  $H = 50 \mu\text{m}$ .

中子的穿过率  $N(H)$  是在  $D$  处测量的, 我们预计它随  $H$  增大而单调上升.



(3) 设中子以垂直速度  $v_z$  及高度  $z$  进入空腔, 所有  $v_z$  和  $z$  值等概率, 求经典穿过率  $N_c(H)$ . 答案用  $\rho$  表示,  $\rho$  是具有垂直速度  $v_z$  及高度  $z$  进入空腔的中子数密度常量(每单位时间, 每单位垂直速度, 每单位高度的中子数).

LLG 研究所的实验结果与经典预言并不符合, 得出的  $N(H)$  值在某些临界高度  $H=H_1, H_2, \dots$  时会陡增(图 6-2-25 展示大概变化). 换言之, 实验显示出中子在镜  $M$  上弹跳的垂直运动是量子化的. 用 Bohr 及 Sommerfeld 得出氢原子能级时的说法, 可以说成: “这些中子垂直方向的作用量(action)  $S$  是普朗克常量(Plank constant)  $h$  的整数倍.”  $S$  由下式给出:

$$S = \int_{p_z} (z) dz = nh. \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(Bohr-Sommerfeld 量子化条件)

式中  $p_z$  为垂直动量, 积分包括整个弹跳周期. 空腔内只允许具有这些  $S$  值的中子存在.

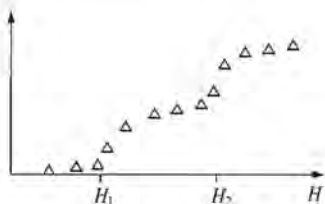


图 6-2-25

(4) 利用 Bohr-Sommerfeld 量子化条件, 计算转折高度  $H_n$  以及与垂直运动有关的能级  $E_n$ . 以微米( $\mu\text{m}$ )与电子伏(eV)表达  $H_1$  和  $E_1$  的数值.

原本在空腔入口处中子流以数密度  $\rho$  均匀分布. 在经过空腔飞行到达  $D$  时变成如图 6-2-25 所示的阶梯状分布. 现在, 我们简单地考虑一个  $H < H_2$  长空腔. 根据经典物理, 所有能量满足问题(1)答案的中子是可以通过的; 但根据量子力学, 只有能量为  $E_1$  的中子可以通过. 但空腔长度小的时候, 竖直运动能量的不确定度将是显著的. 它将引起能级的展宽. 根据海森伯时间-能量不确定原理, 此变化对应最短的飞行时间.

(5) 为了只观察到第一次中子数量的陡增, 估计最小的飞行时间  $t_q$  及对应的空腔的最短距离  $L_q$ . 这里  $v_z = 10 \text{ m/s}$ .

**【分析】** 此题考查了对微观粒子研究的科技新成果, 既用到中学阶段的物理基础知识, 如能量守恒、匀速运动、自由落体等, 又要用到量子力学的一些基础知识及数学中的微积分等知识.

**【解】** (1) 达到高度  $H$  碰到  $A$  板的中子皆会被吸收, 因此转折点在  $H$  以下才能越过空腔. 根据能量守恒, 在高度  $z$  以速度  $v_z$  进入空腔到达探测器的条件是

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} Mv_z^2 + Mgz &\leq MgH. \\ -\sqrt{2g(H-z)} &\leq v_z(z) \leq \sqrt{2g(H-z)}. \end{aligned}$$

(2)空腔的长度要保证超过以上速度范围的中子都能被A板吸收,即中子在空腔内至少要达到一次最大高度,最长的距离对应于以 $v_z=0$ 在 $z=H$ 高度进入的中子(见图6-2-26). $t_f$ 是下落时间,那么

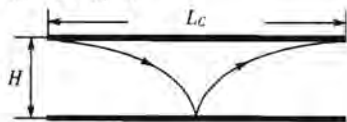


图 6-2-26

$$\left. \begin{aligned} L_c &= v_z 2t_f \\ H &= \frac{1}{2} g t_f^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow L_c = 2v_z \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

$$L_c = 6.4 \text{ cm.}$$

(3)以高度 $z$ 进入空腔的中子单位高度的穿过率正比于该高度所允许的速度区域, $\rho$ 是比例常量,有

$$\frac{dN_c(z)}{dz} = \rho [v_{z,\max}(z) - v_{z,\min}(z)] = 2\rho \sqrt{2g(H-z)}.$$

所有高度进入的中子的总数为

$$\begin{aligned} N_c(H) &= \int_0^H 2\rho \sqrt{2g(H-z)} dz \\ &= 2\rho \sqrt{2g} H^{\frac{3}{2}} \int_0^1 (1-y)^{\frac{1}{2}} dy \\ &= 2\rho \sqrt{2g} H^{\frac{3}{2}} \left[ -\frac{2}{3} (1-y)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ N_c(H) &= \frac{4}{3} \rho \sqrt{2g} H^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

其中 $y = \frac{z}{H}$ .

(4)中子由高度 $H$ 下落时,一个周期里的作用量是上升或下落过程作用量的2倍,即

$$S = 2 \int_0^H p_z dz = 2M \sqrt{2g} H^{\frac{3}{2}} \int_0^1 (1-y)^{\frac{1}{2}} dy = \frac{4}{3} M \sqrt{2g} H^{\frac{3}{2}}.$$

利用B-S量子化条件是

$$S = \frac{4}{3} M \sqrt{2g} H^{\frac{3}{2}} = nh \Rightarrow H_n = \left( \frac{9h^2}{32M^2g} \right)^{\frac{1}{3}} n^{\frac{2}{3}}.$$

相应的能级为

$$E_n = MgH_n \Rightarrow E_n = \left( \frac{9Mg^2h^2}{32} \right)^{\frac{1}{3}} n^{\frac{2}{3}}.$$

代入数值可得

$$H_1 = \left( \frac{9h^2}{32M^2g} \right)^{\frac{1}{3}} = 1.65 \times 10^{-5} \text{ m} = 16.5 \mu\text{m}.$$



$$E_1 = MgH_1 = 2.71 \times 10^{-31} \text{ J} = 1.69 \times 10^{-12} \text{ eV.}$$

注意到  $H_1$  与空腔的高度是同一个数量级,  $H = 50 \mu\text{m}$ , 这使得观察到随着高度  $H$  变化的空间量子化成为可能.

(5) 按照不确定原理  $\Delta t$  和  $\Delta E$  满足关系  $\Delta E \Delta t \geq \hbar$ . 这段时间内, 中子向右飞行的距离为

$$\Delta x = v_x \Delta t \geq v_x \frac{\hbar}{\Delta E}$$

空腔中子的最低能级是  $E_1$ , 取  $\Delta E \approx E_1$ , 可以估计最小飞行时间和最短距离为

$$t_0 \approx \frac{\hbar}{E_1} = 0.4 \times 10^{-3} \text{ s} = 0.43 \text{ ms.}$$

$$L_0 \approx v_x = \frac{\hbar}{E} = 4 \times 10^{-3} \text{ m} = 4 \text{ mm.}$$

### 题 21 (2004 · 国际物理竞赛题)

#### 原子探针显微镜

原子探针显微镜 (APM) 是纳米科学的有用工具. APM 悬臂的运动可以通过光探测器接收经悬臂反射的激光光束来测量, 如图 6-2-27 所示. 悬臂只在垂直方向运动, 它的位移  $z$  与时间  $t$  的关系由下列方程式决定

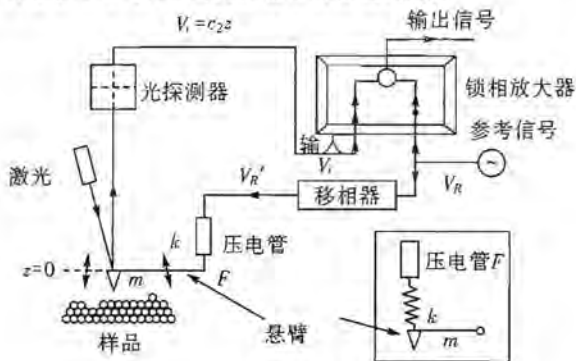


图 6-2-27

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + b \frac{dz}{dt} + kz = F.$$

其中  $m$  是悬臂的质量,  $k = m\omega_0^2$  是悬臂的劲度系数,  $b$  是一个小的阻尼系数, 它满足  $\omega_0 \gg \frac{b}{m} > 0$ ,  $F$  是压电管作用在悬臂上的驱动力.

原子探针显微镜结构示意图右下角的插图表示压电管和悬臂相互作用的简化力学模型.

#### A 部分

(a) 当  $F = F_0 \sin \omega t$  时, 上述方程中的  $z(t)$  满足

$$z(t) = A \sin(\omega t - \varphi).$$



其中  $A > 0, 0 \leq \varphi \leq \pi$ . 导出振幅  $A$ 、 $\tan \varphi$  与  $F_0$ 、 $m$ 、 $\omega$ 、 $\omega_0$ 、 $b$  的关系. 并求出在共振频率  $\omega = \omega_0$  时  $A$  和相位  $\varphi$  的表达式.

(b) 如图 6-2-27 所示的锁相放大器, 其作用是将输入信号与参考信号  $V_R = V_{R0} \sin \omega t$  相乘, 之后只将乘积的直流成份输出. 假设输入信号为  $V_i = V_{i0} \sin(\omega_i t - \varphi_i)$ , 其中  $V_{R0}$ 、 $V_{i0}$ 、 $\omega$ 、 $\varphi_i$  都是给定的正常数. 求出直流输出信号不为零时的  $\omega$ . 在此频率下, 该直流输出信号的幅度的表达式是什么?

(c) 锁相放大器的参考信号经过移相器后由  $V_R = V_{R0} \sin \omega t$  变为  $V_R' = V_{R0} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$ .  $V_R'$  加在压电管上, 对悬臂施以作用力  $F = c_1 V_R'$ . 这时光探测器将位移  $x$  转换为电信号  $V_i = c_2 x$ . 这里  $c_1$ 、 $c_2$  是常数. 导出在  $\omega = \omega_0$  时直流输出信号的表达式.

(d) 悬臂微小的质量变化  $\Delta m$  可以使原来的共振频率改变  $\Delta \omega_0$ . 结果在原来的共振频率  $\omega_0$  处的相位  $\varphi$  改变了  $\Delta \varphi$ . 导出当相位改变  $\Delta \varphi = \frac{\pi}{1800}$  (此值为相位测量通常用的分产辨率) 时相应的质量变化  $\Delta m$ . 悬臂的物理参数为  $m = 1.0 \times 10^{-12}$  kg,  $k = 1.0$  N/m,  $\frac{b}{m} = 1.0 \times 10^3$  s $^{-1}$ .

当  $|x| \ll 1$ , 利用近似  $(1+x)^a \approx 1+ax$ .

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \approx -\frac{1}{x}.$$

## B 部分

如图 6-2-27 所示, 除了 A 部分的压电力之外, 还考虑样品有作用力作用在悬臂上.

(e) 假设样品作用在悬臂上的力  $f(h)$  只与探针和样品表面的距离  $h$  有关, 可以找到新的平衡位置  $h_0$ . 在  $h = h_0$  附近有  $f(h) \approx f(h_0) + c_3(h - h_0)$ , 其中  $c_3$  是常数. 导出新的共振频率  $\omega_0'$  与  $\omega_0$ 、 $m$ 、 $c_3$  的关系.

(f) 通过水平移动样品, 探针可以在样品表面进行扫描探测. 探针尖带有电荷量  $Q = 6e$ , 它遇到一固定在样品表面下的点电荷  $q = e$ . 当探针扫描时, 可探测到共振频率的最大变化  $\Delta \omega_0 = (\omega_0' - \omega_0) (\ll \omega_0)$ . 求  $\Delta \omega_0$  最大时针尖电荷量  $Q$  与点电荷  $q$  之间的距离  $d_0$ , 用  $m$ 、 $g$ 、 $Q$ 、 $\omega_0$ 、 $\Delta \omega_0$  及库仑常量  $k_e$  来表示. 当  $\Delta \omega_0 = 20$  s $^{-1}$  时, 以 nm (1 nm = 1 × 10 $^{-9}$  m) 为单位计算  $d_0$ .

悬臂的物理参数为  $m = 1.0 \times 10^{-12}$  kg,  $k = 1.0$  N/m. 忽略所有探头以及样品的极化效应. 注意  $k_e = 9.0 \times 10^9$  N · m $^2$ /C $^2$ ,  $e = -1.6 \times 10^{-19}$  C.

**【分析】** 受迫振动是本题涉及的主要物理问题, 理解受迫振动方面的一系列规律对求解本题非常重要. 当原子探针在样品表面扫描时, 被针尖吸附原子的质量认为针尖与原子间的静电力 (与电荷量以及距离  $d_0$  有关) 都会改变共振频率, 测出频率  $\Delta \omega_0$  就可获取样品的很多信息. 求解时需要有关器体 (如锁相放大器、移相器等) 的作用有所理解, 此外本题求解时用到较多的数学分析和近似计算.



**【解】 A 部分**

(a) 将  $z(t) = A \sin(\omega t - \varphi)$  代入方程

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + b \frac{dz}{dt} + kz = F_0.$$

得到

$$-m\omega^2 \sin(\omega t - \varphi) + b\omega \cos(\omega t - \varphi) + m\omega_0^2 \sin(\omega t - \varphi) = \frac{F_0}{A} \sin \omega t. \quad (1)$$

整理该式得

$$\left[ m(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi + b\omega \sin \varphi - \frac{F_0}{A} \right] \sin \omega t + \left[ -m(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi + b\omega \cos \varphi \right] \cos \omega t = 0. \quad (2)$$

两项的系数分别为零, 因此

$$\tan \varphi = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (3)$$

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2 \omega^2}}. \quad (4)$$

在  $\omega = \omega_0$  时

$$A = \frac{F_0}{b\omega_0}, \varphi = \frac{\pi}{2}. \quad (5)$$

(b) 输入信号与参考信号相乘的结果是

$$V_{i0} \sin(\omega_1 t - \varphi_1) V_{R0} \sin \omega t = \frac{1}{2} V_{i0} V_{R0} \{ \cos[(\omega_1 - \omega)t - \varphi_1] - \cos[(\omega_1 + \omega)t - \varphi_1] \}. \quad (6)$$

只有当  $\omega = \omega_1$  时, 直流输出信号才不为零, 它的值是

$$\frac{1}{2} V_{i0} V_{R0} \cos \varphi_1. \quad (7)$$

(c) 只有当  $\omega = \omega_0$  时才有直流输出信号, 因此在此共振频率上的输入信号幅度为

$$V_{i0} = c_2 \frac{F_0}{b\omega_0} = \frac{c_1 c_2 V_{R0}}{b\omega_0}. \quad (8)$$

输入信号的  $\varphi = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 0$ , 因此最后的输出信号为

$$\frac{1}{2} V_{i0} V_{R0} \cos 0 = \frac{c_1 c_2 V_{R0}^2}{2b\omega_0}. \quad (9)$$

(d) 当质量由  $m \rightarrow m' = m + \Delta m$  时, 频率改变为  $\omega_0 \rightarrow \omega_0'$ . 由于  $k = m\omega_0^2 = m'\omega_0'^2$ , 所以

$$\omega_0'^2 = \frac{m\omega_0^2}{m + \Delta m} \approx \omega_0^2 + \left( -\frac{\Delta m}{m} \right) \omega_0^2. \quad (10)$$

新的共振频率为  $\omega_0'$ , 在原来的共振频率  $\omega_0$  相位满足

$$\tan \varphi' = \frac{b\omega_0}{m'(\omega_0'^2 - \omega_0^2)} = \frac{b\omega_0}{-m' \frac{\Delta m}{m} \omega_0^2} \approx -\frac{b}{\Delta m \omega_0}. \quad (11)$$

利用  $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \approx -\frac{1}{x}$ .

$$\tan\varphi' = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \Delta\varphi\right) \approx -\frac{b}{\Delta\varphi} = -\frac{1}{\Delta m \omega_0} \quad (12)$$

所以

$$\Delta m = \frac{b}{\omega_0} \Delta\varphi = 1.7 \times 10^{-18} \text{ kg} \quad (13)$$

### B 部分

(e) 在考虑样品的作用力以后, 方程改写为

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + b \frac{dz}{dt} + m\omega_0^2 z - c_3 z = F_0 \sin\omega t \quad (14)$$

这里用到了  $f(h) \approx f(h_0) + c_3 z$  以及  $z = h - h_0$ , 注意在新的平衡位置  $h_0$  附近,

$f(h_0) = 0$ , 原来的频率  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , 新的共振频率为

$$\omega_0' = \sqrt{\frac{k - c_3}{m}} = \sqrt{\frac{m\omega_0^2 - c_3}{m}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{c_3}{m\omega_0^2}} \quad (15)$$

因此可以求出频移

$$\Delta\omega_0 = \omega_0 \left( \sqrt{1 - \frac{c_3}{m\omega_0^2}} - 1 \right) \quad (16)$$

(f) 当悬臂处在电荷正上方时的频移最大, 此时作用力为

$$f(h) = k_e \frac{qQ}{h^2} \quad (17)$$

所以

$$c_3 = \left. \frac{df}{dh} \right|_{h=d_0} = -2k_e \frac{qQ}{d_0^3} \quad (18)$$

由于  $\Delta\omega_0 \ll \omega_0$ , 所以 (16) 式近似为

$$\Delta\omega_0 = -\frac{c_3}{2m\omega_0} = k_e \frac{qQ}{m\omega_0 d_0^3} \quad (19)$$

将各个数值代入上式可得

$$d_0 = \left( k_e \frac{qQ}{m\omega_0 \Delta\omega_0} \right)^{\frac{1}{3}} = 41 \text{ nm}$$

### 题 22 (2003 · 国际物理竞赛题)

#### 交流电压下的压电晶体共振器

考虑一根自然长度为  $l$ , 截面积为  $a$  的均匀长棒 (图 6-2-28), 当其两端面受到大小相等、方向相反的法向作用力  $F$  时, 其长度的改变量为  $\Delta l$ , 应力  $T$  定义为  $\frac{F}{A}$ , 而长度的相对变化即  $\frac{\Delta l}{l}$ , 则称为应变  $S$ . 用应力和应变表示胡克定律, 可写为

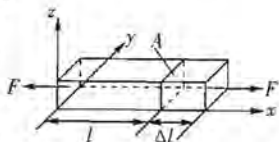


图 6-2-28



$$T=YS.$$

或

$$\frac{F}{A}=Y\frac{\Delta l}{l}. \quad (1)$$

上式中的比例常数  $Y$  称为棒材料的杨氏模量。注意：压应力  $T$  会使棒的长度缩短，其所对应的纵向作用力为负值（即  $F < 0$ ），长度的变化量也为负值（即  $\Delta l < 0$ ），故压应力与压强  $p$  的关系为  $p = -T$ 。

对密度为  $\rho$  的均匀长棒而言，沿棒传播的纵波（即声波），其波速  $u$  可由下式给出

$$u = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}. \quad (2)$$

在回答以下问题中，假设阻尼及损耗应皆可忽略。

### A 部分 力学性质

一根由  $x=0$  延伸至  $x=\infty$  的均匀半无限长棒，密度为  $\rho$ ，最初静止，且不受应力。在一很短的时间间隔  $\Delta t$  内，以活塞对  $x=0$  处的棒的左端面（图 6-2-29），施加大小恒定的压力，使产生一压力波，以速率  $u$  向右传播。



图 6-2-29

(a) 若棒的左端以恒定速度  $v$  运动（图 6-2-29），在时间  $\Delta t$  内，棒左端之应变  $S$  与压强  $p$  各为何？（答案只能以  $\rho, u, v$  表示）。

(b) 考虑棒内沿  $x$  方向行进的纵波，以  $x$  表示棒内一横截面无应力下的平衡位置（图 6-2-30）以  $\xi(x, t)$  表示此横截面在时刻  $t$  之位移，并设

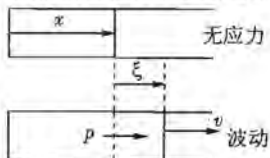


图 6-2-30

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin k(x - ut). \quad (3)$$

式中  $\xi_0$  及  $k$  为常量，试求出速度  $v(x, t)$ 、应变  $S(x, t)$  及压强  $p(x, t)$  随  $x$  与  $t$  变化的函数。

### B 部分 机电性质(包括压电效应)

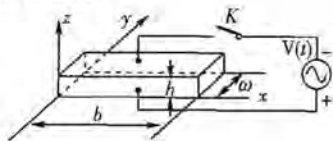


图 6-2-31



考虑一块长度为  $b$ , 宽度为  $w$ , 厚度为  $h$  的均匀的石英晶片(图 6-2-31), 其长度沿  $x$  轴, 厚度沿  $z$  轴. 晶片的上、下表面各镀有一层金属薄膜作为电极. 焊接在电极中心点的两条引线兼作为支柱(图 6-2-32). 对沿  $x$  轴的纵向振动而言, 这两个电极中心点可视为固定不动.

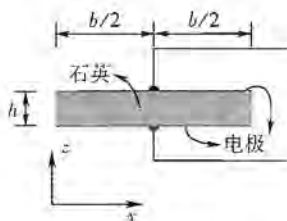


图 6-2-32

此石英晶体的密度  $\rho$  为  $2.65 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ , 杨氏模量  $Y$  为  $7.87 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ , 晶片的长度  $b$  为  $1.00 \text{ cm}$ , 而宽度  $w$  与厚度  $h$  则满足  $w \ll b$  与  $h \ll w$ . 当开关  $K$  未闭合时, 石英晶片中激发起  $x$  轴方向的纵向模式的驻波振动.

对于频率为  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  的驻波, 平衡位置位于  $x$  处的截面, 在时刻  $t$ , 其位移  $\xi(x, t)$  可以表示为

$$\xi(x, t) = 2\xi_0 g(x) \cos \omega t. \quad (0 \leq x \leq b) \quad (4)$$

式中  $\xi_0$  为正常量, 而位置函数  $g(x)$  可表示为下列形式

$$g(x) = B_1 \sin k \left( x - \frac{b}{2} \right) + B_2 \cos k \left( x - \frac{b}{2} \right). \quad (5)$$

$g(x)$  的最大值为 1, 式中  $k = \frac{\omega}{u}$ . 请记住电极的中心是静止的, 而晶片的左、右端是自由的, 因而应力(或压强)为零.

(c) 就此石英晶片的纵驻波, 确定方程(5)中  $B_1$  和  $B_2$  的值.

(d) 此石英晶片激发的纵驻波的两个最低频率为何?

**压电效应**是石英晶体的一种特性. 晶体被压缩或拉伸时, 其两端会产生电压; 反之, 若在晶体两端施加电压, 则依据电压的极性, 晶体会伸张或收缩. 因而, 机械振动和电振动会通过石英晶体互相耦合并引起共振.

为说明压电效应, 设当石英晶片中存在沿  $z$  方向的电场  $E$  时, 其上、下电极的电荷面密度分别为  $+\sigma$  与  $-\sigma$ . 以  $S$  与  $T$  分别表示晶片沿  $x$  方向的应变与应力, 则此石英晶片的压电效应, 可用下列一组关系表示:

$$S = \frac{1}{Y} T + d_p E. \quad (6)$$

$$\sigma = d_p T + \epsilon_T E. \quad (7)$$

其中  $\frac{1}{Y} = 1.27 \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{N}$  为定电场下的弹性顺度(即杨氏模量  $Y$  的倒数),  $\epsilon_T = 4.06 \times 10^{-11} \text{ F/m}$  为定应力下之电容率, 而  $d_p = 2.25 \times 10^{-12} \text{ m/V}$  则为压电常量.



将图 6-2-31 中的开关  $K$  接通, 则两电极间加有交变电压为  $V(t) = V_m \cos \omega t$ , 从而在晶片中存在一均匀电场  $E(t) = \frac{V(t)}{h}$ . 则最后会达到稳定态, 晶片中出现沿  $x$  方向, 角频率为  $\omega$  的纵驻波振荡.

当电场  $E$  均匀时, 纵驻波的波长  $\lambda$  与频率  $f$  的关系仍满足  $\lambda = \frac{u}{f}$ , 其中  $u$  由式 (2) 给定. 但是正如式 (6) 所示,  $T = YS$  不再成立, 尽管应力与应变的定义保持不变, 且晶片两端面保持自由而无应力.

(e) 考虑方程 (6) 及 (7), 下电极板上的电荷面密度  $\sigma$ , 随  $x$  与  $t$  变化的函数为

$$\sigma(x, t) = \left[ D_1 \cos k \left( x - \frac{b}{2} \right) + D_2 \right] \frac{V(t)}{h}.$$

式中  $k = \frac{\omega}{u}$ . 求  $D_1, D_2$  的表示式.

(f) 下电极上的总电荷  $Q(t)$  与电压  $V(t)$  的关系为

$$Q(t) = \left[ 1 + a^2 \left( \frac{2}{kb} \tan \frac{kb}{2} - 1 \right) \right] C_0 V(t). \quad (8)$$

试求出常数  $C_0$  的表示式与  $a^2$  的表示式及其数值.

**【分析】**  $K$  未闭合前, 沿  $x$  方向传播的纵状最终会在石英晶片形成纵向模式的驻波振荡, 而  $K$  闭合后又将石英晶片沿  $z$  方向施加一交变电压, 产生所谓压电效应. 此时机械振动和电振动会通过石英晶片互相耦合并引起共振.

本题综合了多方面的知识, 如在固体传播的纵波与材料力学量间的关系、驻波形成的推理和规律以及压电效应等. 需要读者根据题目所示情况, 运用相关知识仔细分析逐一解决.

**【解】** A 部分

(a) 参见图 6-2-33, 棒的左端面移动的距离  $v_0 t$ , 同时压力波传播距离  $u \Delta t, u = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$ . 于是左端面处应变为

$$S = \frac{\Delta l}{l} = \frac{-v \Delta t}{u \Delta t} = -\frac{v}{u}. \quad (1)$$

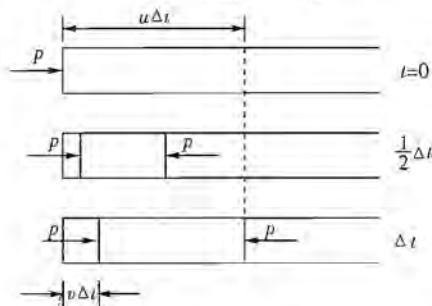


图 6-2-33

根据胡克定律,左端面处的压强

$$p = -YS = Y \frac{v}{u} = \rho uv. \quad (2)$$

(b)速度  $v$  与做角频率  $\omega = ku$  的简谐运动的位移  $\xi$  相联系 (位移  $\xi$  也可看做匀速圆运动的投影,如图 6-2-34 所示),于是,若

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin K(x - ut).$$

$$\text{则} \quad v(x, t) = -K \rho u^2 \xi_0 \cos K(x - ut). \quad (3)$$

应变和压强与速度的关系同问题(a),因而

$$S(x, t) = -v \frac{(x, t)}{u} = K \xi_0 \cos K(x - ut). \quad (4)$$

$$\begin{aligned} p(x, t) &= \rho uv(x, t) = -K \rho u^2 \xi_0 \cos K(x - ut) \\ &= -YS(x, t) = -KY \xi_0 \cos K(x - ut). \end{aligned} \quad (5)$$

或者,答案也可用微分得到

$$v(x, t) = \frac{d\xi}{dt} = -Ku \xi_0 \cos K(x - ut).$$

$$S(x, t) = \frac{d\xi}{dx} = K \xi_0 \cos K(x - ut).$$

$$p(x, t) = -Y \frac{d\xi}{dx} = -KY \xi_0 \cos K(x - ut).$$

## B 部分

(c)既然角频率  $\omega$  和传播速度  $u$  已知,波长就可由  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  得到,其中  $k = \frac{\omega}{u}$ . 由题意,位移随位置的变化函数用下式描写

$$g(x) = B_1 \sin K \left( x - \frac{b}{2} \right) + B_2 \cos K \left( x - \frac{b}{2} \right). \quad (6)$$

既然电极中心已假定固定不动,则  $g\left(\frac{b}{2}\right) = 0$ , 这即导致  $B_2 = 0$ . 已知  $g(x)$  的极大值为 1, 可得  $B_1 = \pm 1$ , 得

$$g(x) = \pm \sin \frac{\omega}{u} \left( x - \frac{b}{2} \right). \quad (7)$$

$$\text{于是位移} \quad \xi(x, t) = \pm 2\xi_0 \sin \frac{\omega}{u} \left( x - \frac{b}{2} \right) \cos \omega t. \quad (8)$$

(d)既然压强  $p$  (或应力  $T$ ) 在晶片的两端面处 (即  $x=0$  和  $x=b$  处) 为零, 本题的答案可用类比法从长度为  $b$  的两端开放的管子中的声驻波频率得到. 但由于电极的中心固定不动, 所有基音的偶次谐频必须剔除, 因为它们在晶片的中心截面处为位移的波腹, 而不是波节.

既然对基音有波长  $\lambda = 2b$ , 则基频由  $f_1 = \frac{u}{2b}$  给出. 波的传播速度  $u$  由下式给出

$$u = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = \sqrt{\frac{7.87 \times 10^{10}}{2.65 \times 10^3}} \text{ m/s} = 5.45 \times 10^3 \text{ m/s}. \quad (9)$$

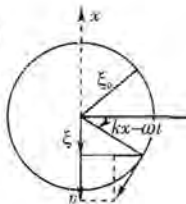


图 6-2-34



已知  $b=1.00 \times 10^{-2} \text{ m}$ , 因而两最低驻波频率为

$$f_1 = \frac{u}{2b} = 273 \text{ kHz}, f_3 = 3f_1 = \frac{3u}{2b} = 818 \text{ kHz}. \quad (10)$$

(c)、(d) 两题的另一种解法:

晶片中的纵驻波在  $x = \frac{b}{2}$  处为位移波节, 该驻波可看成两反向行进的波的合成, 于是, 其位移和速度应有如下形式

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= 2\xi_m \sin K \left( x - \frac{b}{2} \right) \cos \omega t \\ &= \xi_m \left[ \sin K \left( x - \frac{b}{2} - ut \right) + \sin K \left( x - \frac{b}{2} + ut \right) \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} v(x, t) &= -ku\xi_m \left[ \cos K \left( x - \frac{b}{2} - ut \right) - \cos K \left( x - \frac{b}{2} + ut \right) \right] \\ &= -2\omega\xi_m \sin K \left( x - \frac{b}{2} \right) \sin \omega t. \end{aligned} \quad (12)$$

式中  $\omega = Ku$ , 方括号中第 1 项和第 2 项分别表示沿  $+x$  方向和沿  $-x$  方向行进的波, 注意, 若令  $\xi_m = \pm \varepsilon_0$ , (11) 与式 (9) 相同.

对于沿  $-x$  方向行进的波, 式 (11) 和 (12) 中的速度  $v$  应用  $-v$  代, 于是我们有

$$S = \frac{-v}{u} \text{ 和 } p = \rho uv. \quad (\text{沿 } +x \text{ 方向行进的波}) \quad (13)$$

$$S = \frac{v}{u} \text{ 和 } p = -\rho uv. \quad (\text{沿 } -x \text{ 方向行进的波}) \quad (14)$$

问题 (b) 中的应变和压强逐为

$$\begin{aligned} S(x, t) &= -k\xi_m \left[ -\cos K \left( x - \frac{b}{2} - ut \right) - \cos K \left( x - \frac{b}{2} + ut \right) \right] \\ &= 2k\xi_m \cos \left( x - \frac{b}{2} \right) \cos \omega t. \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} p(x, t) &= -\rho u \omega \xi_m \left[ \cos k \left( x - \frac{b}{2} - ut \right) + \cos K \left( x - \frac{b}{2} + ut \right) \right] \\ &= -2\rho u \omega \xi_m \cos K \left( x - \frac{b}{2} \right) \cos \omega t. \end{aligned} \quad (16)$$

注意,  $v$ 、 $S$  和  $p$  也可像问题 (b) 那样由  $\xi$  求得.

由于晶片在两端面 ( $x=0$  和  $x=b$ ) 处是自由的, 因而在任何时刻两端处的应力或压强应为零, 由式 (16), 这必导致  $\cos\left(\frac{Kb}{2}\right) = 0$  或

$$kb = \frac{\omega}{u} b = \frac{2\pi}{\lambda} b = n\pi. \quad (n=1, 3, 5, \dots) \quad (17)$$

用波长  $\lambda$  表示, 式 (17) 可写成

$$\lambda = \frac{2b}{n}. \quad (n=1, 3, 5, \dots) \quad (18)$$

频率则为

$$f = \frac{u}{\lambda} = \frac{un}{2b} = \frac{n}{2b} \sqrt{\frac{Y}{\rho}}. \quad (n=1, 3, 5, \dots) \quad (19)$$

此结果与式⑨和⑩给出的相同.

(e) 由题中⑥和⑦, 压电效应导致下列方程

$$T = Y(S - d_p E). \quad (20)$$

$$\sigma = Y d_p S + \epsilon_T \left( 1 - Y \frac{d_p^2}{\epsilon_T} \right) E. \quad (21)$$

由于对晶片中任意纵驻波,  $x = \frac{b}{2}$  处均为位移波节, 位移  $\xi$  和应变  $S$  必具式⑪和式⑬的形式

$$\xi(x, t) = \xi_m \sin k \left( x - \frac{b}{2} \right) \cos(\omega t + \varphi). \quad (22)$$

$$\xi(x, t) = k \xi_m \cos k \left( x - \frac{b}{2} \right) \cos(\omega t + \varphi). \quad (23)$$

现式中在时间相关因子中加了一个相位常数  $\varphi$ .

已假定电极间电场均匀而仅依赖于时间

$$E(x, t) = \frac{V(t)}{h} = \frac{V_m \cos \omega t}{h}. \quad (24)$$

将式②④代入式②①, 得

$$T = Y \left[ k \xi_m \cos \left( x - \frac{b}{2} \right) \cos(\omega t + \varphi) - \frac{d_p}{h} V_m \cos \omega t \right]. \quad (25)$$

由于晶片两端面 ( $x=0$  和  $x=b$ ) 自由, 任何时刻两端面处的应力  $T$  应为零, 这必导致  $\varphi=0$  及

$$k \xi_m \cos \frac{kb}{2} = d_p \frac{V_m}{h}. \quad (26)$$

既然  $\varphi=0$ , 由式②③和④可知电荷面密度也具有同样的时间信赖关系可表为

$$\sigma(x, t) = \sigma(x) \cos \omega t. \quad (27)$$

与  $x$  有关的因子  $\sigma(x)$  可表为

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= Y d_p k \xi_m \cos k \left( x - \frac{b}{2} \right) + \epsilon_T \left( 1 - Y \frac{d_p^2}{\epsilon_T} \right) \frac{V_m}{h} \\ &= \left[ Y \frac{d_p^2}{\cos \frac{kb}{2}} \cos k \left( x - \frac{b}{2} \right) + \epsilon_T \left( 1 - Y \frac{d_p^2}{\epsilon_T} \right) \right] \frac{V_m}{h}. \end{aligned} \quad (28)$$

(f) 在时刻  $t$ , 下电极上的总面电荷  $Q(t)$  可由式⑳中的  $\sigma(x, t)$  对电极表面积分得到. 结果为

$$\begin{aligned} \frac{Q(t)}{V(t)} &= \frac{1}{V(t)} \int_0^b \sigma(x, t) \omega dx = \frac{1}{V_m} \int_0^b \sigma(x) \omega dx \\ &= \frac{\omega}{h} \int_0^b \left[ Y \frac{d_p^2}{\cos \frac{kb}{2}} \cos k \left( x - \frac{b}{2} \right) + \epsilon_T \left( 1 - Y \frac{d_p^2}{\epsilon_T} \right) \right] dx \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \left( \epsilon_T \frac{b\omega}{h} 1 - Y \frac{d_p^2}{\epsilon_T} \right) \left[ Y \frac{d_p^2}{\epsilon_T} \left( \frac{2}{kb} \tan \frac{kb}{2} \right) + \left( 1 - Y \frac{d_p^2}{\epsilon_T} \right) \right] \\
 &= C_0 \left[ \alpha^2 \left( \frac{2}{kb} \tan \frac{kb}{2} \right) + (1 - \alpha^2) \right].
 \end{aligned}$$

式中

$$C_0 = \epsilon_T \frac{b\omega}{h}.$$

$$\alpha^2 = Y \frac{d_p^2}{\epsilon_T} = \frac{(2.25 \times 10^{-12})^2}{1.27 \times 10^{-11} \times 4.06 \times 10^{-11}} = 9.82 \times 10^{-3}. \quad (23)$$

(常数  $\alpha$  称为机电耦合系数)

注意: 结果  $C_0 = \epsilon_T \frac{b\omega}{h}$  可由题中方程(8)考虑静态极限  $k=0$  的情况看出, 当  $x \ll 1$  时,  $\tan x \approx x$ , 可得

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{Q(z)}{V(z)} \approx C_0 [\alpha^2 + (1 - \alpha^2)] = C_0.$$

显然, 常量  $C_0$  就是以石英晶片(厚  $h$ , 电容率  $\epsilon_T$ ) 作为电介质, 由两电极(面积为  $b\omega$ ) 形成的平行板电容器的电容, 所以它等于  $\epsilon_T \frac{b\omega}{h}$ .

### 题 23 (2003 · 国际物理竞赛题)

#### A 部分 中微子质量与中子衰变

一个质量为  $m_n$  的自由中子, 在实验室参考系中静止时衰变成 3 个无相互作用的粒子: 1 个质子, 1 个电子和 1 个反中微子. 质子的静止质量为  $m_p$ , 反中微子的静止质量  $m_\nu$  假设不为零, 但比电子的静止质量  $m_e$  小很多. 真空中的光速以  $c$  表示. 诸测量值如下:

$$m_n = 939.56563 \text{ MeV}/c^2$$

$$m_p = 938.27231 \text{ MeV}/c^2$$

$$m_e = 0.5109907 \text{ MeV}/c^2$$

以下所有能量与速度均相对于实验室参照系而言. 令衰变产生的电子所拥有的总能量为  $E$ .

(a) 求电子能量  $E$  的最大可能值  $E_{\max}$ , 及当  $E = E_{\max}$  时反中微子的速率  $v_m$ . 两个答案都必须以粒子的静止质量和光速表示. 若已知  $m_\nu < 7.3 \text{ eV}/c^2$ , 试计算  $E_{\max}$  和  $\frac{v_m}{c}$  的数值至 3 位有效数字.

#### B 部分 光浮

一透明玻璃半球半径为  $R$ , 质量为  $m$ , 折射率为  $n$ . 半球外介质的折射率为 1. 一单色平行激光束, 沿法向均匀射向半球平表面的正中央部分, 如图 6-2-35 所示. 在此图中重力加速度  $g$  竖直向下. 激光束的圆截面半径  $\delta$  远小于  $R$ . 玻璃半球和激光束都以  $z$  轴为对称轴.

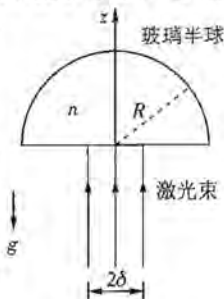


图 6-2-35

玻璃半球不吸收任何激光,玻璃球表面已经过光学涂料的处理,因此入射光及出射光在平面及球面的反射可以忽略不计,且激光在光学涂料中的光程也可忽略。

(b)若忽略量级为 $(\frac{\delta}{R})^3$ 及更高次项,求为平衡玻璃半球的重力所需的激光功率 $P$ 。

提示:当角度 $\theta$ 远小于1时,有

$$\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}.$$

【分析】A部分:粒子衰变前后满足相对论性能量和动量守恒,其中衰变后各粒子的运动方向将决定能量的分配。经讨论发现衰变后的质子与反中微子运动方向一致时,电子能量可达到最大。抓住这一点并运用相对论知识和近似计算的方法,可求得第一问。

B部分:光子通过经光学涂料处理的玻璃球面时,将发生折射。依题意,光浮力将全部来源于折射前后光子动量改变量的分量。解题时要充分利用光的波粒二象性规律,如体现波动性的折射定律和光的粒子性的光子功率 $P$ 的表达式等。

【解】A部分 中微子质量与中子衰变

设在实验室参考系(即中子静止系)中,中子衰变产生的电子能量为 $E_e$ ( $=E$ ),动量为 $p_e$ ;质子能量为 $E_p$ ,动量为 $p_p$ ;反中微子能量为 $E_\nu$ ,动量为 $p_\nu$ ,将动量 $p_\nu$ 的大小记为 $p_\nu$ ,则有

$$\left. \begin{aligned} E_e^2 &= m_e^2 c^4 + p_e^2 c^2. \\ E_p^2 &= m_p^2 c^4 + p_p^2 c^2. \\ E_\nu^2 &= m_\nu^2 c^4 + p_\nu^2 c^2. \end{aligned} \right\} \quad (A1)$$

由能量与动量守恒,可得

$$E_p + E_\nu = E_n - E_e. \quad (A2)$$

$$p_p + p_\nu = -p_e. \quad (A3)$$

式中 $E_n$ 为中子的静能。将式(A2)和式(A3)两边平方,得

$$E_p^2 + 2E_\nu^2 + 2E_p E_\nu = E_n^2 + E_e^2 - 2E_n E_e. \quad (A4)$$

$$p_p^2 + p_\nu^2 + 2p_p \cdot p_\nu = p_e^2. \quad (A5)$$

上式两边同乘以 $c^2$

$$p_p^2 c^2 + p_\nu^2 c^2 + 2p_p \cdot p_\nu c^2 = p_e^2 c^2. \quad (A6)$$

式(A4)一式(A6),并利用式(A1),得

$$m_p^2 c^4 + m_\nu^2 c^4 + 2(E_p E_\nu - p_p \cdot p_\nu c^2) = E_n^2 + m_e^2 c^4 - 2E_n E_e.$$

$$\text{即 } 2E_n E_e = E_n^2 + m_e^2 c^4 - m_p^2 c^4 - m_\nu^2 c^4 - 2(E_p E_\nu - p_p \cdot p_\nu c^2). \quad (A7)$$

若设 $p_p$ 与 $p_\nu$ 间的夹角为 $\theta$ ,则

$$p_p \cdot p_\nu = p_p p_\nu \cos\theta \leq p_p p_\nu.$$

由上式,得

$$2E_n E_e \leq E_n^2 + m_e^2 c^4 - m_p^2 c^4 - m_\nu^2 c^4 - 2(E_p E_\nu - p_p p_\nu c^2). \quad (A8)$$



由上式可见,电子能量当  $\theta=0$ , 即当反中微子和质子沿同一方向运动时达到最大。

可将  $E_p, p_p, E_v, p_v$  分别与  $m_p, m_v$  联系起来,由能量-动量三角形(图 6-2-36),得

$$\left. \begin{aligned} E_p &= \frac{m_p c^2}{\cos\varphi_p} \\ E_v &= \frac{m_v c^2}{\cos\varphi_v} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A9})$$

$$\left. \begin{aligned} p_p c &= m_p c^2 \tan\varphi_p \\ p_v c &= m_v c^2 \tan\varphi_v \end{aligned} \right\} \quad (\text{A10})$$

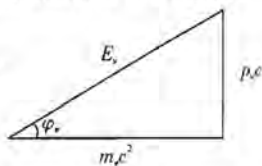


图 6-2-36

于是式(A8)变为

$$2E_n E_e \leq E_n^2 + m_e^2 c^4 - m_p^2 c^4 - m_v^2 c^4 - 2m_p m_v c^4 \left[ \frac{1 - \sin\varphi_p \sin\varphi_v}{\cos\varphi_p \cos\varphi_v} \right]. \quad (\text{A11})$$

上式最后一项括号中的因子可表为

$$\begin{aligned} \frac{1 - \sin\varphi_p \sin\varphi_v}{\cos\varphi_p \cos\varphi_v} &= \frac{1 - \sin\varphi_p \sin\varphi_v - \cos\varphi_p \cos\varphi_v}{\cos\varphi_p \cos\varphi_v} + 1 \\ &= \frac{1 - \cos(\varphi_p - \varphi_v)}{\cos\varphi_p \cos\varphi_v} + 1 \geq 1. \end{aligned} \quad (\text{A12})$$

显然上述因子的极小值出现在  $\varphi_p = \varphi_v$  时,即出现在反中微子和质子以同一速度运动时。因此,由式(A11)得  $E_e$  的极大值

$$\begin{aligned} E_{\max} &= \frac{1}{2E_n} [E_n^2 + m_e^2 c^4 - m_p^2 c^4 - m_v^2 c^4 - 2m_p m_v c^4] \\ &= \frac{c^2}{2m_n} [m_n^2 + m_e^2 - (m_p + m_v)^2]. \end{aligned} \quad (\text{A13})^*$$

以相应数值代入,并利用  $m_v \ll m_p$ ,略去  $m_v$ ,得

$$E_{\max} \approx 1.292569 \text{ MeV} \approx 1.29 \text{ MeV}. \quad (\text{A14})^*$$

当反中微子与质子以同一速度运动时,反中微子的速度

$$v_v = \frac{m_v v_v}{m_v} = \frac{p_v}{E_v} = \frac{c^2 p_v}{E_v}.$$

同理,质子速度  $v_p = \frac{c^2 p_p}{E_p}$ .

由以上二式得

$$v_v = v_p = c^2 \frac{p_v + p_p}{E_v + E_p} = c \frac{p_e c}{E_v + E_p} = c \frac{\sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4}}{E_n - E_e}. \quad (\text{A15})$$

其中  $E_e$  应取  $E_{\max}$ ,以式(A13)\*的  $E_{\max}$  代入上式,得  $v_v$  的相应值  $v_m$

$$\begin{aligned} v_m &= c \frac{\sqrt{E_{\max}^2 - m_e^2 c^4}}{E_n - E_{\max}} \\ &= c \frac{\frac{1}{2m_n} \sqrt{[m_n^2 + m_e^2 - (m_p + m_v)^2]^2 - 4m_n^2 m_e^2}}{m_n - \frac{1}{2m_n} [m_n^2 + m_e^2 - (m_p + m_v)^2]} \end{aligned}$$



$$= c \frac{\sqrt{[m_n^2 + m_e^2 - (m_p + m_v)^2]^2 - 4m_n^2 m_e^2}}{2m_n^2 - [m_n^2 + m_e^2 - (m_p + m_v)^2]} \approx 0.00127c. \quad (\text{A16})$$

## B部分 光浮

(b) 参见图 6-2-37, 射向球面的光服从斯涅尔定律而有

$$n \sin \theta_1 = \sin \theta_2. \quad (\text{B1})$$

在正弦函数中, 忽略量级  $(\frac{\delta}{R})^3$  及更高次项, 上式变为

$$n \theta_1 = \theta_2. \quad (\text{B2})$$

对图(6-2-37)中的  $\triangle FAC$ , 有

$$\beta = \theta_1 - \theta_2 \approx n \theta_1 - \theta_2 = (n-1) \theta_1. \quad (\text{B3})$$

设入射光的频率为  $f_0$ . 若单位时间入射到单位面积表面上的光子数为  $n_p$ , 则单位时间入射到平表面上的总光子数为  $n_p \pi \delta^2$ . 入射到平表面上的光子的总功率为  $P = (n_p \pi \delta^2) (h f_0)$ , 式中  $h$  为普朗克常量, 因而

$$n_p = \frac{P}{\pi \delta^2 h f_0}. \quad (\text{B4})$$

单位时间入射到平表面上内半径为  $r$ , 外半径为  $r + dr$  的环带上的光子数为  $n_p (2\pi r dr)$ , 其中  $r = R \sin \theta_1 \approx R \theta_1$ , 于是单位时间入射到环带上的光子数为

$$n_p (2\pi r dr) \approx n_p (2\pi R^2) \theta_1 d\theta_1. \quad (\text{B5})$$

当这些光子在球面上发生折射时, 单位时间带走光的动量的  $z$  分量为

$$\begin{aligned} dF_z &= n_p (2\pi r dr) \frac{h f_0}{c} \cos \beta \\ &\approx n_p \frac{h f_0}{c} (2\pi R^2) \left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right) \theta_1 d\theta_1 \\ &\approx n_p \frac{h f_0}{c} (2\pi R^2) \left[\theta_1 - \frac{(n-1)^2}{2} \theta_1^3\right] d\theta_1. \end{aligned} \quad (\text{B6})$$

所以单位时间被光子带走的总动量为

$$\begin{aligned} F_z &= 2\pi R^2 n_p \frac{h f_0}{c} \int_0^{\theta_m} \left[\theta_1 - \frac{(n-1)^2}{2} \theta_1^3\right] d\theta_1 \\ &= \pi R^2 n_p \frac{h f_0}{c} \theta_m^2 \left[1 - \frac{(n-1)^2}{4} \theta_m^2\right]. \end{aligned} \quad (\text{B7})$$

其中  $\theta_m = \arcsin \frac{\delta}{R} \approx \frac{\delta}{R}$ . 于是, 再利用式(B4), 上式变为

$$F_z = \frac{\pi R^2 P}{\pi \delta^2 h f_0} \frac{h f_0}{c} \frac{\delta^2}{R^2} \left[1 - \frac{(n-1)^2 \delta^2}{4R^2}\right] = \frac{P}{c} \left[1 - \frac{(n-1)^2 \delta^2}{4R^2}\right]. \quad (\text{B8})$$

光浮力等于入射光和折射光作用在玻璃半球上的作用力的  $z$  分量的总和, 并

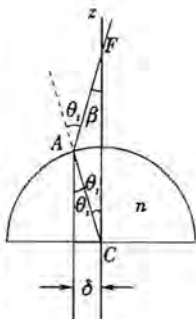


图 6-2-37



可表为

$$\frac{P}{c} + (-F_z) = \frac{P}{c} - \frac{P}{c} \left[ 1 - \frac{(n-1)^2 \delta^2}{4R^2} \right] = \frac{(n-1)^2 \delta^2 P}{4R^2 c} \quad (\text{B9})$$

此力应与玻璃的半球的重力相等,由此可得出为悬浮半球所需之激光功率

$$P = \frac{4mgcR^2}{(n-1)^2 \delta^2} \quad (\text{B10})^*$$

#### 题 24 (2002 · 国际物理竞赛题)

##### 感知电信号

某些海洋动物能探测到离它一定距离的其他动物,因为这些动物呼吸或包括肌肉收缩在内的其他过程会产生电流,某些食肉动物(捕食者)利用这种电信号确定猎物的位置(即使猎物埋在海底沙中)。

猎物的发电机制和捕食者的探测机制可以用图 6-2-38 的模型表示. 猎物体内的电流在分别带有正负电位的两球体之间流动,假设两球体距离为  $l$ , 每个球的半径为  $r_1, r_2$  远小于  $l$ , 海水电阻率为  $\rho$ . 假设猎物身体的电阻率和它周围的海水一样,因而图中猎物身体的边界可以忽略。

为了描述捕食者对猎物产生的电信号的探测过程,探测器可以类似地简化为捕食者身上的两个球,并和周围的海水相接触,和猎物的一对电极相平行,两球相距  $l_d$ , 每个球体的半径为  $r_d, r_d$  远小于  $l_d$ . 在所考查的情形,探测器中心在信号源正上方  $y$  处,两个球的连线和电场相平行,如图 6-2-38 所示. 源和探测器中两球的距离  $l_s$  和  $l_d$  都远小于  $y$ . 假定电场强度在连接探测器两球的连线上为常数,因此探测器与猎物、周围的海水以及捕食者连成一个闭合回路,如图 6-2-39 所示. 图中的  $V$  是由猎物感应产生的电场在探测器两个球间造成的电位差(由于捕食者的生物效应,这里的  $V$  等效于电动势),  $R_m$  是半径为  $r_d$  的两个球被周围海水包围时所产生的电阻(内阻). 另外,  $V_D$  和  $R_d$  分别是捕食者体内两探测球之间的电位差和电阻。

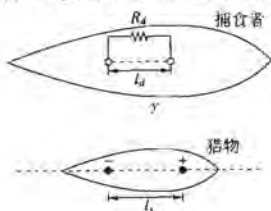


图6-2-38 描述捕食者探测来自猎物电信号的模型

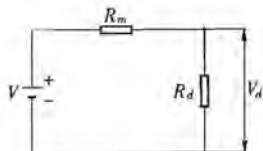


图6-2-39 包括捕食者、猎物和周围海水在内的等效闭合回路

问题:

(1) 确定放在无限大导电媒质中的点电流源  $I_s$  产生的离点电流源  $r$  处的电流密度矢量  $j$  (通过单位面积的电流)。

(2) 基于定律  $E = \rho j$ , 确定探测器两球连线中点  $P$  的场强  $E_P$ , 设猎物体两球间的电流为  $I_s$ 。

(3) 确定猎物体两球源间的电位差  $V_s$ , 确定两球源间的电阻  $R_s$  和源产生的

电功率  $P_s$ .

(4) 确定图 6-2-40 中两探测球间的电阻  $R_m$  和两探测球间的电位差  $V_d$ .

计算探测器的电功率。(原文为由源传输给探测器的电功率)

(5) 确定使探测到的电功率达最大时的最佳  $R_d$  值, 并确定此最大电功率.

**【分析】** 猎物体内两带正负电位的球体可近似地看成在无限大均匀介质中的两个点电流源, 并在海水中产生相应的电场 ( $E = \rho j$ ). 恒定电流的电场与静电场有相同的性质, 如满足叠加原理、两点间电势差  $\Delta V = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r}$  等等. 由此可求得本题前三问, 对于后两问来说, 则根据题意和提供的等效电路图计算, 其中探测器中两探球与猎物体内两源球之间在物理模型可作类比.

**【解】** (1) 当一点电流源  $I_s$  位于无限大各向同性介质中时, 离点源  $r$  处的电流密度矢量为

$$j = \frac{I_s}{4\pi r^3} r.$$

(2) 题中已设猎物体的电阻率与周围海水相同, 意即猎物的边界消失, 两球犹如处在电阻率为  $\rho$  的无限大向同性介质中. 当小球产生的电流为  $I_s$  时, 离球心  $r$  处的电流密度

$$j = \frac{I_s}{4\pi r^3} r.$$

由于海水电阻率为  $\rho$ , 在  $r$  处的电场即为

$$E(r) = \rho j = \frac{\rho I_s}{4\pi r^3} r.$$

在我们的模型中有两个小球, 一球相对另一球处于正电压, 于是电流  $I_s$  从带正电的小球流向带负电的小球. 两球相距  $l_s$ , 则  $P(0, y)$  处的场强为

$$E_P = E_+ + E_-$$

$$= \frac{\rho I_s}{4\pi} \left\{ \frac{1}{\left[ \left( \frac{l_s}{2} \right)^2 + y^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \left( -\frac{l_s}{2} i + yj \right) + \frac{1}{\left[ \left( \frac{l_s}{2} \right)^2 + y^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \left( -\frac{l_s}{2} i - yj \right) \right\}$$

$$= \frac{\rho I_s}{4\pi} \left\{ \frac{l_s (-i)}{\left[ \left( \frac{l_s}{2} \right)^2 + y^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\}.$$

对  $l_s \ll y$ ,

$$E_P \approx \frac{\rho I_s l_s}{4\pi y^3} (-i).$$

(3) 沿两球连线的  $x$  轴上的场强为

$$E(x) = \frac{\rho I_s}{4\pi} \left[ \frac{1}{\left( x - \frac{l_s}{2} \right)^2} + \frac{1}{\left( x + \frac{l_s}{2} \right)^2} \right] (-i),$$

产生给定电流  $I_s$  的电位差为

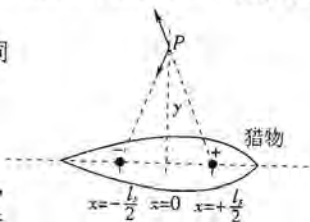


图 6-2-40



$$\begin{aligned}
 U_s &= \Delta U = U_+ - U_- = - \int_{\left(\frac{l_2}{2} + r_s\right)}^{\left(\frac{l_2}{2} - r_s\right)} E(x) \cdot dx \\
 &= - \frac{\rho I_s}{4\pi} \int_{\left(\frac{l_2}{2} + r_s\right)}^{\left(\frac{l_2}{2} - r_s\right)} \left[ \frac{1}{\left(x - \frac{l_2}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(x + \frac{l_2}{2}\right)^2} \right] (-i) \cdot (idx) [ + 0.5\text{pts} ] \\
 &= \frac{\rho I_s}{4\pi} \left\{ -\frac{1}{-2+1} \left[ \frac{1}{\left(\frac{l_2}{2} - r_s - \frac{l_2}{2}\right)} - \frac{1}{\left(-\frac{l_2}{2} + r_s - \frac{l_2}{2}\right)} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{-2+1} \left[ \frac{1}{\left(\frac{l_2}{2} - r_s + \frac{l_2}{2}\right)} - \frac{1}{\left(-\frac{l_2}{2} + r_s + \frac{l_2}{2}\right)} \right] \right\} \\
 &= \frac{\rho I_s}{4\pi} \left( \frac{2}{r_s} - \frac{2}{l_s - r_s} \right) = \frac{2\rho I_s}{4\pi} \left[ \frac{l_s - r_s - r_s}{(l_s - r_s)r_s} \right] = \frac{\rho I_s}{2\pi r_s} \left( \frac{l_s - 2r_s}{l_s - r_s} \right).
 \end{aligned}$$

对  $l_s \gg r_s$ ,

$$U_s = \Delta U \approx \frac{\rho I_s}{2\pi r_s}.$$

两源球间的电阻为

$$R_s = \frac{U_s}{I_s} = \frac{\rho}{2\pi r_s}.$$

源产生的功率为

$$P = I_s U_s = \frac{\rho I_s^2}{2\pi r_s}.$$

(4) 如图 6-2-41,  $U$  是由猎物感生的电场在两探球间产生的电动势,  $R_m$  是由周围海水产生的内阻,  $U_d$  是两探球间的电位差,  $R_d$  捕食者体内两探球间的电阻,  $i_d$  则是流经闭合电路的电流.

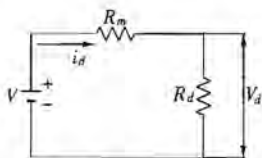


图 6-2-41

与两源球间的电阻相类比, 两探球(半径均为  $r_d$ )之间、电阻率为  $\rho$  的媒质的电阻为

$$R_m = \frac{\rho}{2\pi r_d}.$$

既然  $l_d$  比  $y$  小得多(见图 6-2-41), 两探球间的电场就可认为是常量, 而为

$$E = \frac{\rho I_s l_s}{4\pi y^3}.$$

于是, 存在于媒质中的两探球间的电动势为

$$U = E l_d = \frac{\rho I_s l_s l_d}{4\pi y^3}.$$

两探球间的电位差则为

$$U_d = U \frac{R_d}{R_d + R_m} = \frac{\rho I_1 I_2 l_d}{4\pi y^3} \frac{R_d}{R_d + \frac{\rho}{2\pi r_d}}$$

探测器的功率为

$$P_d = i_d U_d = \frac{U}{R_d + R_m} U_d = \left( \frac{\rho I_1 I_2 l_d}{4\pi y^3} \right)^2 \frac{R_d}{\left( R_d + \frac{\rho}{2\pi r_d} \right)^2}$$

(5) 当

$$R_d = \frac{R_d}{\left( R_d + \frac{\rho}{2\pi r_d} \right)^2} = \frac{R_d}{(R_d + R_m)^2}$$

达最大时, 功率  $P_d$  达最大, 于是有

$$\frac{dR_d}{dR_d} = \frac{1(R_d + R_m)^2 - R_d 2(R_d + R_m)}{(R_d + R_m)^4} = 0,$$

$$(R_d + R_m) - 2R_d = 0,$$

$$R_{d最佳} = R_m = \frac{\rho}{2\pi r_d}$$

最大功率为

$$P_{dmax} = \left( \frac{\rho I_1 I_2 l_d}{4\pi y^3} \right)^2 \frac{\pi r_d}{2\rho} = \frac{\rho (I_1 I_2 l_d)^2 r_d}{32\pi y^6}$$

### 题 25 (2002 · 国际物理竞赛题)

#### 穿地雷达

穿地雷达(GPR)通过向地下发射电磁波并接收地下物体反射回来的电磁波来探测和定位近地表面处的物体, 天线和探测器直接放在地面上, 并放在同一位置。

角频率为  $\omega$ , 沿  $z$  方向传播的线偏振平面电磁波的电场由下式表示

$$E = E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z). \quad (1)$$

其中  $E_0$  为常数,  $\alpha$  为衰减常数,  $\beta$  为波数, 分别由下式表示

$$\alpha = \omega \left\{ \frac{\mu\epsilon}{2} \left[ \left( 1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\beta = \omega \left\{ \frac{\mu\epsilon}{2} \left[ \left( 1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (2)$$

其中  $\mu$ 、 $\epsilon$  和  $\sigma$  分别为磁导率、介电常量和电导率。

当到达物体时的雷达信号振幅下降为初始值的  $\frac{1}{e}$  ( $\approx 37\%$ ) 时, 将无法被探测到, 常用频率在 (10 MHz ~ 1000 MHz) 之间的电磁波进行探测, 以便调节探测范围和分辨率。

GPR 的性能取决于它的分辨率, 分辨率由两个相邻的被测反射体的最小间距决定, 最小间距对应于两个反射波在探测器处的最小相位差为  $90^\circ$ 。

问题:



(已知:  $\mu = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ ,  $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ )

(1) 假定大地为非磁性物质 ( $\mu = \mu_0$ ), 并满足条件  $\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2 \ll 1$ , 利用方程①和②导出传播速率  $v$  的表达式 (用  $\mu$  和  $\epsilon$  表示).

(2) 确定地下被探测物体的最大深度, 设大地的电导率为  $1.0 \text{ mS/m}$ , 介电常量为  $9\epsilon_0$ , 并满足条件  $\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2 \ll 1$ . ( $1 \text{ S} = 1 \Omega^{-1}$ ,  $\mu = \mu_0$ )

(3) 考虑两根水平方向平行埋在地下的导电杆, 两杆深  $4 \text{ m}$ , 已知大地的电导率为  $1.0 \text{ mS/m}$ , 介电常数数为  $9\epsilon_0$ , 假设 GPR 近似就在其中一根导电杆的所在位置的上方进行测量, 并假设探测器为点状. 试确定使横向分辨率达  $50 \text{ cm}$  所需要的最低频率.

(4) 为确定埋在与上问 2 中同样条件的地层中的导体杆的深度  $d$ , 考虑沿垂直于导体杆方向进行的测量. 测量结果可用图 6-2-3 表示为电磁波传播时间  $t$  和探测位置  $x$  的关系. 取  $t_{\min} = 100 \text{ ns}$ . 试导出  $t$  与  $x$  的函数关系, 并确定  $d$ .

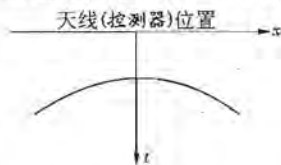


图 6-2-42 传播时间  $t$  和探测位置  $x$  的关系图.

$$t_{\min} = 100 \text{ ns}$$

**【分析】** 本题要求读者对波速概念和电磁波在介质中的传播规律有深刻理解. 如波速  $v_m = \frac{\omega}{\beta}$  在介质中的最大探测深度与衰减系数成反比 (由题意可得到此规律) 等等. 至于分辨率问题, 则应由题意换算成两杆到天线间的波程差并利用几何关系来进行计算.

**【解】** (1) 雷达波在媒质中的传播速率  $v_m$ ,

$$\omega t - \beta x = \text{常数} \rightarrow \beta x = -\text{常数} + \omega t.$$

$$v_m = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta}.$$

$$v_m = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega \left\{ \frac{\mu\epsilon}{2} \left[ \left( 1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

$$v_m = \frac{1}{\left[ \frac{\mu\epsilon}{2} (1+1) \right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}.$$

(2) 物体在地下最大可探测深度(趋肤深度) $\delta$ 与衰减常数成反比

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\omega \left\{ \frac{\mu\epsilon}{2} \left[ \left( 1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{\omega \left\{ \frac{\mu\epsilon}{2} \left[ \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2} \right) - 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\omega \left( \frac{\mu\epsilon}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \\ \delta &= \left( \frac{2}{\sigma} \right) \left( \frac{\epsilon}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

数值 =  $\frac{5.31\sqrt{\epsilon_r}}{\sigma}$  m, 式中  $\sigma$  以 mS/m 为单位.

对于电导率为 1.0 mS/m, 相对介电常量为 9 的介质, 其趋肤深度

$$\delta = \frac{5.31\sqrt{9}}{1.0} \text{ m} = 15.93 \text{ m}.$$

(3) 横向分辨率

$$r^2 + d^2 = \left( d + \frac{\lambda}{4} \right)^2,$$

$$r = \left( \frac{\lambda d}{2} + \frac{\lambda^2}{16} \right)^{\frac{1}{2}},$$

由  $r=0.5$  m 和  $d=4$  m, 有

$$\frac{1}{2} = \left( \frac{4\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{16} \right)^{\frac{1}{2}}, \lambda^2 + 32\lambda - 4 = 0.$$

得波长约为

$$\lambda = 0.125 \text{ m}.$$

信号在媒质中的传播速度为

$$v_m = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}},$$

$$v_m = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \frac{0.3}{\sqrt{\epsilon_r}} \text{ m/ns}.$$

其中  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ ,  $\mu_r = 1$ .

$$v_m = 0.1 \text{ m/ns} = 10^8 \text{ m/s}.$$

分辨两分离杆所需之最低频率为

$$f_{\text{min}} = \frac{v_m}{\lambda} = 800 \text{ MHz}.$$

(4) 当天线和探测器处于地面某一位置时, 电磁波的传播路径如图 6-2-44 所示.

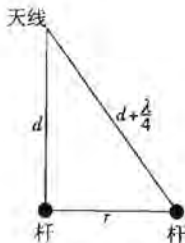


图 6-2-43

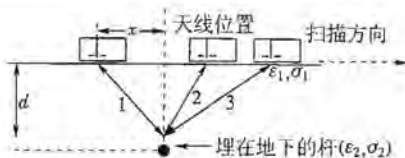


图 6-2-44

传播时间  $t$  作为  $x$  的函数

$$\left(\frac{tv}{2}\right)^2 = d^2 + x^2.$$

$$t(x) = \sqrt{\frac{4d^2 + 4x^2}{v^2}}, \quad t(x) = \frac{2\sqrt{\epsilon_{1c}}}{0.3} \sqrt{d^2 + x^2}.$$

$$\text{对 } x=0, \quad 100 = 2 \times \frac{3}{0.3} d, \quad d = 5 \text{ m}.$$

**题 26** (2001 · 国际物理竞赛题)

### 分子间距

用  $d_L$  和  $d_V$  分别代表液相和气相水分子的平均间距. 假定两个相均在  $100^\circ\text{C}$  和一个大气压下, 并且气相水可以看做理想气体. 利用下列数据计算  $\frac{d_V}{d_L}$  的比值.

液相时水的密度	$\rho_L = 1.0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
水的摩尔质量	$M = 1.8 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$
1 个大气压	$p = 1.0 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$
气体常量	$R = 8.3 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
阿伏加德罗常量	$N_A = 6.0 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

**【解】** 将气相水看成理想气体, 则其密度

$$\rho_V = \frac{Mp}{RT}.$$

由此得

$$\frac{d_V}{d_L} = \left(\frac{\rho_L}{\rho_V}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{RT\rho_L}{Mp}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 12.$$

**题 27** (2001 · 国际物理竞赛题)

### 原子束

将炉子中的一群原子加热到某一温度  $T$ , 并让这些原子沿水平方向通过炉子侧面上一个直径为  $D$  的小孔射出 ( $D$  的尺寸与原子尺度相当), 从而形成一束原子束. 当这束原子行进水平长度为  $L$  的距离时, 估算这束原子束的直径. 设原子的质量为  $M$ .

**【分析】** 由于微观粒子的波动性, 当原子束中的原子通过小孔时, 其运动方向会改变, 其空间轨迹类似于圆锥状, 由不确定关系估算原子通过小孔时的  $\Delta V_y$ , 进而算出运动  $L$  距离时原子束的直径.

**【解】** 当原子束通过直径为  $D$  的孔时, 由量子力学不确定关系, 其动量的  $y$



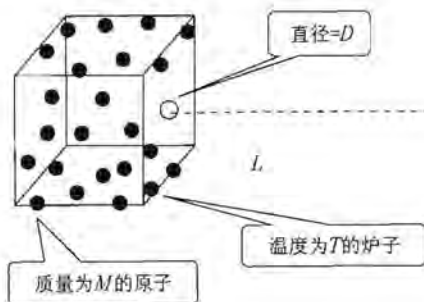


图 6-2-45

分量

$$\Delta P_y \approx \frac{\hbar}{D} \cdot \frac{\hbar}{D} \cdot \frac{\hbar}{2D}$$

相应的速度分量

$$\Delta v_y \approx \frac{\hbar}{MD} \cdot \frac{\hbar}{MD} \cdot \frac{\hbar}{2MD}$$

原子束的直径增大了量值  $\Delta D = 2\Delta v_y t$ , 其中  $t$  为行进时间。  
当炉温为  $T$  时, 原子离孔时的动能

$$E_k = \frac{1}{2} M v^2 = \frac{3}{2} kT, \quad \frac{1}{2} kT, \quad kT.$$

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{M}}, \quad \sqrt{\frac{2kT}{M}}, \quad \sqrt{\frac{kT}{M}}.$$

原子束以速度  $v$  行进距离  $L$ , 需时  $t = \frac{L}{v}$ , 故

$$\begin{aligned} \Delta D &= 2\Delta v_y t \approx 2 \frac{L}{v} \frac{\hbar}{MD} = \frac{2L\hbar}{MD} \sqrt{\frac{3kT}{M}} \\ &= \frac{2L\hbar}{D} \sqrt{3MkT}. \end{aligned}$$

或以上述相应其他量代入的表达式, 因而原子束行进距离  $L$  后的新直径为

$$D_{\text{new}} = D + \frac{2L\hbar}{D} \sqrt{3MkT}.$$

或以上述其他量代入的表达式.

**题 28** (2001 · 国际物理竞赛题)

### 速调管

速调管用于甚高频信号的放大. 速调管主要由两个相距为  $b$  的腔组成, 每个腔有一对平行板, 如图 6-2-46 所示.

初始速度为  $v_0$  的一束电子通过板上的小孔横穿整个系统. 要放大的高频信号以一定的相位差(一个周期对应于  $2\pi$  相位)分别加在两对电极板上, 从而在每个腔

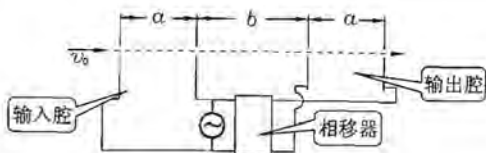


图 6-2-46

中产生交变水平电场。当输入腔中的电场方向向右时,进入腔中的电子被减速;反之,电场方向向左时,电子被加速。这样,从输入腔中射出的电子经过一定的距离后将叠加成短电子束。如果输出腔位于该短电子束形成处,那么,只要加于其上的电压相位选择恰当,输出腔中的电场将从电子束中吸收能量。设电压信号为周期  $T=1.0 \times 10^{-9}$  s,电压  $U=\pm 0.5$  V 的方波。电子束的初始速度  $v_0=2.0 \times 10^6$  m  $\cdot$  s $^{-1}$ ,电子荷质比  $\frac{e}{m}=1.76 \times 10^{11}$  C  $\cdot$  kg $^{-1}$ 。假定间距  $a$  很小,电子渡越腔的时间可忽略不计。保留 4 位有效数字,计算:

- (1) 使电子能叠加成短电子束的距离  $b$ 。
- (2) 由相移器提供的所需的输出腔与输入腔之间的相位差。

**【分析】** 初始进入输入腔电子束是离散的,但如先进入的电子被电场减速,而后进入的电子被电场加速,则后面的电子就可以追上前面的电子,形成所谓“短电子束”,理解这一点是解题的关键。

**【解】** (1) 电子在前半周中速度被减慢,后半周中速度被加快。设减慢后的速度为  $v_{\text{rel}}$ ,加快后的速度为  $v_{\text{acc}}$ ,则

$$v_{\text{rel}} = \sqrt{v_0^2 - 2 \frac{e}{m} U} = 1.956 \times 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$v_{\text{acc}} = \sqrt{v_0^2 + 2 \frac{e}{m} U} = 2.044 \times 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

经时间  $t$  后两种电子各行进距离

$$x_{\text{rel}} = v_{\text{rel}} t, x_{\text{acc}} = v_{\text{acc}} \left( t - \frac{T}{2} \right).$$

令  $x_{\text{rel}} = x_{\text{acc}}$ , 得叠加成短电子束的时间

$$t_b = \frac{v_{\text{acc}} T}{2(v_{\text{acc}} - v_{\text{rel}})} = 11.61T.$$

由此得

$$b = v_{\text{rel}} t_b = 2.272 \times 10^{-2} \text{ m}.$$

(2) 相移  $\Delta\varphi = \pm \left( \frac{t_b}{T} - n \right) 2\pi = \pm 0.61 \times 2\pi = \pm 220^\circ$ 。

或

$$\Delta\varphi = \pm 140^\circ.$$

## 题 29 (2001·国际物理竞赛题)

## 磁流体动力发电机

一个水平放置的上下、前后封闭的矩形塑料管,其宽度为  $\omega$ ,高度为  $h$ ,其内充满电阻率为  $\rho$  的水银,由涡轮机产生的压强差  $p$  使得这个流体具有恒定的流速  $v_0$ . 管道的前后两个侧面上各有长为  $L$  的由铜组成的面,如图 6-2-47 所示. 实际流体的运动非常复杂,为简化起见,作如下假定:

- 尽管流体有粘滞性,但整个横截面上的速度均匀;
- 流体的速度总是与作用其上的净外力成正比;
- 流体不可压缩.

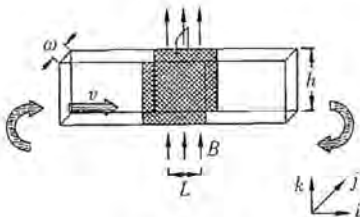


图 6-2-47

由铜组成的两个前后侧面外部短路,一个均匀竖直向上的磁场  $B$  只加在两个铜侧面之间的区域,装置如图 6-2-47 所示,图中还标出用于答题的单位矢量  $i, j, k$ .

(1) 求磁场作用在流体上的力(用  $L, B, h, \omega, \rho$  和加磁场后的新的稳定速度  $v$  表示).

(2) 导出加磁场后流体新的稳定速度  $v$  的表达式(用  $v_0, p, L, B$  和  $\rho$  表示).

(3) 为使速度增加到原来的值  $v_0$ , 涡轮机的功率必须增加, 导出所增加功率的表达式.

(4) 现撤去磁场, 并以流速为  $v_0$  的水代替水银. 沿水的流动方向发送单一频率  $f$  的电磁波. 设水的折射率为  $n$ , 且  $v_0 \ll c$ , 导出由于流体的运动造成的进入长为  $L$  的两侧面间区域至离开此区域的电磁波的附加相位差的表达式.

**【分析】** 流动的水银就相当于运动的导体, 在磁场中会产生一系列电磁现象, 如感应电动势、电流和安培阻力等, 理解这一点是求解前三问的关键. 求解最后一问时应注意电磁波在流动水中的传播速度不等于  $\frac{c}{n}$ , 而要运用相对论规律.

$$\text{【解】 (1) } \quad E = vB\omega, \quad I = \frac{vB\omega}{\frac{\rho\omega}{Lh}} = \frac{vBLh}{\rho},$$

$$\text{所以} \quad F = IB\omega = \frac{vB^2Lh\omega}{\rho}.$$

力的方向沿  $x$  轴负方向, 即与流速反向.

$$(2) \quad \frac{v}{v_0} = \frac{(ph\omega - F)}{ph\omega} = 1 - \frac{F}{ph\omega}.$$



以  $F$  表达式代入, 即可得

$$v = v_0 \left[ 1 + \frac{v_0 B^2 L}{\rho \rho} \right]^{-1}.$$

或

$$v = \frac{v_0 \rho \rho}{\rho \rho + v_0 B^2 L}.$$

(3) 为使速度增加到原来值  $v_0$ , 泵必须增加压强  $\Delta p$  以克服磁场对电流的力 (与压力反向),

$$\Delta p h \omega = F,$$

其中  $F$  为速度  $v = v_0$  时的  $F$  值. 功率增加量  $\Delta P = \Delta p h \omega v_0 = F v_0$ .

以  $v = v_0$  时的  $F$  值代入上式, 即得

$$\Delta P = v_0^2 B^2 L h \omega / \rho.$$

(4) 光在静止水中的速度  $u = \frac{c}{n}$ , 在流速为  $v$  的水中的速度, 根据相对论速度加法, 为

$$u' = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{cv}{nc^2}} = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{v}{nc}}.$$

对低流速 ( $v \ll c$ ), 在  $(1 + \frac{v}{nc})^{-1}$  项中略去  $\frac{v^2}{c^2}$  以上小量, 得

$$u' = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{v}{nc}} \approx \left( \frac{c}{n} + v \right) \left( 1 - \frac{v}{nc} \right) \approx \frac{c}{n} + v \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right).$$

$$\Delta u = u' - u = v \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right).$$

$$\Delta \varphi = 2\pi f \Delta t.$$

由  $t = \frac{L}{u}$ ,

$$\Delta t = \frac{\Delta u L}{u^2} \approx \frac{L v}{c^2} (n^2 - 1).$$

而  $v = v_0$ , 故

$$\Delta \varphi = 2\pi f \left( \frac{L}{c^2} \right) (n^2 - 1) v_0.$$

### 题 30 (2001 · 国际物理竞赛题)

一个简单锯齿形信号发生器

一个锯齿形电压波形  $U_0$  可以由图 6-2-48 中电容  $C$  两端输出得到. 图中  $R$  是一个可变电阻,  $U_1$  是一个理想电池.  $SG$  为一个火花隙, 它由两个极板组成, 两个极板间距可调. 当  $SG$  两极电压超过击穿电压  $U_f$  时, 两极之间的空气被击穿, 此时火花隙变为短路, 并保持短路直到两极电压很小.

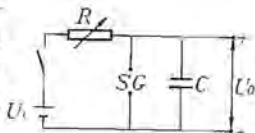


图 6-2-48

- (1) 当开关合上后,画出电压  $U_0$  随时间变化的波形图;  
 (2) 满足什么条件时可以得到几乎线性的锯齿形电压波形  $U_0$ ?  
 (3) 假定上述条件满足,导出这个波形周期  $T$  的简单表达式。  
 (4) 如果只改变周期,你应该改变什么(只改变  $R$ ,或只改变  $SG$ ,或同时改变  $R$  和  $SG$ )?  
 (5) 如果只改变幅度,你应该改变什么(只改变  $R$ ,或只改变  $SG$ ,或同时改变  $R$  和  $SG$ )?

(6) 提供你另外一个可变的电源,设计并画出一个新的电路,并指出两个端点,从这两个端点输出可以得到如图 6-2-49 所示的电压波形  $U_0'$ 。

**【分析】** 在电容  $C$  充电的初始阶段,其电压  $U_0$  随时间近似于线性增长,当  $U_0 = U_f$  且  $U_f \ll U_i$  时,  $SG$  处短路,电容电压瞬时下降为零。这样就形成了一个周期的锯齿波,明白这一点,再根据电容器充放电应满足的基本规律,本题得以求解。

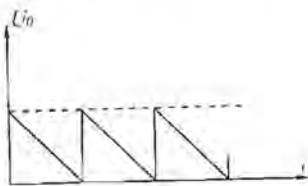


图 6-2-49

**【解】** (1) 如图 6-2-50 所示。

(2)  $U_i \gg U_f$ 。

(3) 开关合上后,输出电压与时间关系为

$$U = U_i(1 - e^{-\frac{t}{RC}}).$$

令  $U = U_f$ , 由于  $U_f \ll U_i$ , 必有

$$t = T \ll RC, e^{-\frac{T}{RC}} \approx 1 - \left(\frac{T}{RC}\right).$$

$$U_f \approx U_i \left[1 - \left(1 - \frac{T}{RC}\right)\right] = \frac{U_i T}{RC}.$$

$$T = RC \frac{U_f}{U_i}.$$

(4)  $R$ 。

(5) 同时改变  $R$  和  $SG$ , 使  $RU_f = \text{常量}$ 。

(6) 如图 6-2-51(a)或(b)所示。

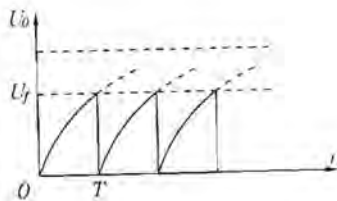


图 6-2-50

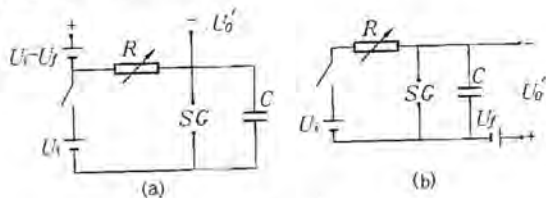


图 6-2-51



### 题 31 (2000 · 国际物理奥赛题)

#### 引力波和引力对光所产生的效应

##### A 部分

这部分涉及探测天文事件所产生的引力波的困难. 已知远距离的超新星爆炸可能对地球表面的引力场强度产生大约  $10^{-19} \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$  的扰动. 一种引力波探测器的模型(见图 6-2-52)由两根各 1 m 长的金属棒组成, 两棒互成直角, 每根棒的一头都抛光成光学平面, 另一头刚性地固定住. 调节其中一根棒的位置, 使从光电管所接收到的信号最小(见图 6-2-52).

用压电器件在棒中产生一个非常短的纵向脉冲, 结果棒的自由端产生纵向位移  $\Delta x_t$  的振动,

$$\Delta x_t = a e^{-\mu t} \cos(\omega t + \varphi).$$

其中  $a, \mu, \omega$  和  $\varphi$  为常数.

(1) 如果 50 s 的时间间隔内位移的振幅减小 20%, 求  $\mu$  的值.

(2) 设两棒都由铝组成, 其密度  $\rho$  为  $2700 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , 杨氏模量  $E$  为  $7.1 \times 10^{10} \text{ Pa}$ . 已

知纵波的速度  $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ , 试求  $\omega$  的最小值.

(3) 一般不可能使得这两根棒具有完全相同的长度, 因此光电管信号出现 0.005 Hz 的拍频, 问两棒的长度差为多少?

(4) 对于长为  $l$  的棒, 导出由于引力场强度  $g$  的变化  $\Delta g$  所引起的长度变化  $\Delta l$  的函数表达式, 用  $l$  和棒材料的其他常数表示. 设探测器对引力场强度变化的响应只发生在一根棒的轴向上.

(5) 某激光器产生波长为 656 nm 的单色光, 如果可以测出的最小条纹移动量为激光波长的  $10^{-4}$ , 要使这个系统能够测出  $g$  的变化量为  $10^{-19} \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$ , 棒的最小  $l$  值为多少?

##### B 部分

这部分考查引力场对光在空间的传播所产生的效应.

(6) 一个从太阳(质量  $M$ 、半径  $R$ ) 表面发出的光子将被红移. 假定光子的质量等价于光子的能量, 利用牛顿引力理论证明无穷远处光子的有效(或测量到的)频率以因子  $\left(1 - \frac{GM}{Rc^2}\right)$  的倍率减小(即红移).

(7) 光子频率的减小等价于时间周期的增加. 当利用光子作为标准钟时, 则等价于时间的膨胀. 另外, 时间的膨胀总是伴随着同一因子的长度收缩.

现在我们试图研究这效应对在太阳边上传播的光的影响. 首先定义离太阳中心  $r$  处的等效折射率  $n_r$ ,

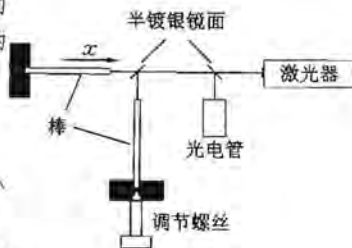


图 6-2-52

$$n_r = \frac{c}{c_r}$$

其中  $c$  为在远离太阳引力影响 ( $r \rightarrow \infty$ ) 的坐标系中测到的光的速度,  $c_r$  为在距离太阳中心  $r$  处的坐标系中测到的光速.

当  $\frac{GM}{rc^2}$  很小时, 证明  $n_r$  可近似表示为

$$n_r = 1 + \frac{\alpha GM}{rc^2},$$

其中  $\alpha$  为常数, 请确定该常数.

(8) 利用上述  $n_r$  表达式, 计算当光通过太阳边缘时偏离直线路径的角度 (以弧度为单位).

数据:

引力常数	$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$
太阳质量	$M = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$
太阳半径	$R = 6.95 \times 10^8 \text{ m}$
光速	$c = 3.00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

你可能需要下列积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{a}.$$

**【分析】** 对 A 部分: 首先应明确探测器模型的物理机理, 激光可通过半镀银镜面入射到两铝棒的端面, 而反射波也可进入光电管, 以观测题文中 (3) (5) 两问所述现象. 这部分问题的求解需要综合利用力学中有关材料的弹性以及振动、波动等各方面的知识.

对 B 部分: 光子在引力场中传播时遵守能量守恒, 使得频率与其离开太阳中心的距离  $r$  有关, 由此可求得等效折射率  $n_r$ , 进而求得光线在通过太阳边缘时偏离直线路径的角度.

**【解】** A 部分

$$(1) \Delta x_r = ae^{-i\omega t} \cos(\omega t + \varphi), 0.8 = e^{-i\varphi_0} \Rightarrow \mu = -\frac{\ln 0.8}{50} = 4.5 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}.$$

$$(2) v = \left(\frac{E}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{7.1 \times 10^{10}}{2700}\right)^{\frac{1}{2}} = 5.1 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

$$\text{基频振动时, } \lambda = 4l = 4 \text{ m}.$$

$$v = \lambda f, f = \frac{v}{\lambda}, \omega = 2\pi f = \frac{2\pi v}{\lambda} = 8.06 \times 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

$$(3) f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{4l}, |\Delta f| = \frac{v \Delta l}{4l^2}.$$

$$\Delta l = \frac{4l^2 \Delta f}{v} = \frac{4 \times l^2 \times 0.005}{5.1 \times 10^3} = 3.9 \times 10^{-6} \text{ m}.$$

(4) 离自由端  $x$  处, 因引力场强度的改变, 棒所受的附加应力为



$$m\Delta g = \rho x A \Delta g.$$

式中  $A$  为棒的截面积, 相应的附加应力为  $\frac{m\Delta g}{A} = \rho x \Delta g$ , 由此产生的附加应变为  $\frac{\delta(dx)}{dx} = \frac{\rho x \Delta g}{E}$ , 因而棒的附加形变为

$$\Delta l = \sum \delta(dx) = \int_0^l \frac{\rho \Delta g}{E} x dx = \frac{\rho \Delta g}{2E} l^2.$$

(5) 当一根棒因引力场强度改变产生形变  $\Delta l$  时, 分别从两棒自由端反射的激光的光程差改变  $2\Delta l$ , 由题意,  $2\Delta l = 10^{-4} \lambda$ , 代入(4)中  $\Delta l$  表达式, 有

$$10^{-4} \lambda = \frac{\rho \Delta g}{E} l^2,$$

由此得

$$l = \sqrt{\frac{10^{-4} \lambda E}{\rho \Delta g}} = \sqrt{\frac{10^{-4} \times 656 \times 10^{-9} \times 7.1 \times 10^{10}}{2700 \times 10^{-19}}} \text{ m} = 1.31 \times 10^8 \text{ m}.$$

B 部分

$$(6) mc^2 = hf, m = \frac{hf}{c^2}.$$

设光子在太阳表面处频率为  $f_R$ , 在无穷远处为  $f$ , 由能量守恒

$$hf = hf_R - \frac{GMm}{R} = hf_R - \frac{GMhf_R}{Rc^2} = hf_R \left(1 - \frac{GM}{Rc^2}\right).$$

所以

$$f = f_R \left(1 - \frac{GM}{Rc^2}\right).$$

(7) 设离太阳中心  $r$  处光子频率为  $f_r$ , 同理有

$$f = f_r \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right).$$

上式表明, 离太阳无穷远处的光子频率比离太阳中心  $r$  处的光子频率低一个因子, 周期则长同一因子. 换句话说, 离太阳中心  $r$  处的光子频率比离太阳无穷远处的光子频率高一个因子, 周期则短同一因子. 当以光子为标准钟时, 同一过程在离太阳中心  $r$  处的时间读数将比无穷远处的时间读数增大一个因子, 长度读数则减小同一因子. 因此, 在离太阳中心  $r$  处测得的光速比无穷远处测得的光速小该因子的平方, 即

$$c_r = c \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)^2.$$

所以, 当  $\frac{GM}{rc^2} \ll 1$  时, 有

$$n_r = \frac{c}{c_r} = \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)^{-2} \approx 1 + \frac{2GM}{rc^2}.$$

故

$$\alpha = 2.$$

(8) 既然折射率随离太阳中心的距离  $r$  而减小, 由于折射, 光经过太阳边缘时, 将向太阳中心偏折(图 6-2-53). 由斯涅尔定律

$$n(r+\delta r) \sin(\theta+\delta\theta) = n(r) \sin\theta.$$



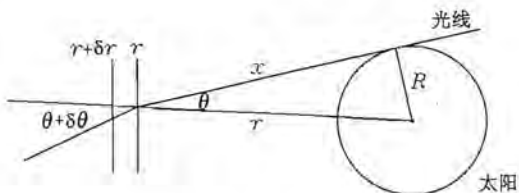


图 6-2-53

$$\text{即} \quad \left[ n(r) + \frac{dn}{dr} \delta r \right] (\sin\theta + \cos\theta \delta\theta) = n(r) \sin\theta.$$

$$\sin\theta \frac{dn}{dr} \delta r + n(r) \cos\theta \cdot \delta\theta = 0.$$

$$\delta\theta = -\tan\theta \cdot \frac{1}{n(r)} \cdot \frac{dn}{dr} \delta r.$$

$$\text{但 } n = 1 + \frac{2GM}{rc^2} \approx 1, \frac{dn}{dr} = -\frac{2GM}{rc^2}, \text{代入上式,得}$$

$$\delta\theta = \tan\theta \left( \frac{2GM}{r^2 c^2} \right) \delta r.$$

由图,  $r^2 = x^2 + R^2$ ,  $rdr = xdx$ ,  $\tan\theta = \frac{R}{x}$ , 所以偏转角

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= \int \delta\theta = \frac{2GM}{c^2} \int \frac{\tan\theta dr}{r^2} = \frac{2GM}{c^2} \int \frac{R}{x} \frac{xdx}{r^3} = \frac{2GMR}{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{2GMR}{c^2} \cdot \frac{2}{R^2} = \frac{4GM}{Rc^2}. \end{aligned}$$

以数据代入

$$\Delta\theta = \frac{4 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 1.99 \times 10^{30}}{6.95 \times 10^8 \times (3 \times 10^8)^2} \text{ rad} = 8.5 \times 10^{-6} \text{ rad}.$$

第二编

实验部分





## 测定型题

实验试题在国内外物理奥林匹克竞赛中历来均占有相当的比重,例如,全国中学生物理竞赛规定了复赛包括理论和实验两大块,决赛包括理论和实验两个部分,理论满分为140分,实验满分为60分。

实验的题型大致可以归纳为以下五类:一、测定题;二、判断题,包括黑盒问题;三、研究题;四、证明题;五、观察与思考题。下面分述之。鉴于黑盒试题量比较大,有其特别的重要性,我们将它另列一章介绍,而观察与思考题近年来在全国竞赛中已不出现,故不作介绍。

对于每一试题,我们将给出分析和解答,主要介绍解题的思路与实验的方法,对于具体的仪器描绘将从略。

测定型试题是以测定某个(或某些)物理量或物理常数为目的的试题。解这类题目应根据题目提出的任务与要求,运用所学的物理实验的基本方法和掌握的技能,来完成测量,得出结果。完成这种试题时经历一般实验室实验的全过程,即确定实验方案,选用和配置仪器,拟定实验步骤,调整仪器装置,测量和记录数据,分析处理,求出待测量,写出实验报告。

上述过程在平常的实验室实验中大都对实验的原理、方法、步骤等作了详尽的说明,仪器设备也是摆好的,但竞赛题只提出课题,要求参赛者自行设计,独立解决。竞赛题常设置一些障碍或特殊情况,即有些难点,使得不易用常规方法完成测定,需要思路灵活、开阔,想出巧妙对策,选好突破口,则迎刃而解。

设计的方案应包括实验原理、实验方法、测量方法、实验条件、实验步骤和处理数据等项,这些是密切相关的,应当统筹规划。下面将说明测定型试题的设计方法和要点。

### 一、确定实验原理

要求用给定的器材和仪器,建立试题要求测的量与可测的量之间的关系。

应该注意,同一个量可以依据不同的原理测量,这要求在不同的条件下灵活运用所学的知识。

如果必须测某个物理量但未提供测量它的成品仪器,则需要用给定的器材组装。



## 二、确定实验方法

依据实验原理确定实验方法,常用的实验方法有:

### 1. 转换法

这种方法是将不易测准的量转换为和它有关的另一种物理量,而这种物理量可以用较好的方法或较精密的仪器测量,这往往用传感器来实现。

### 2. 回避法

有些量在理论上和待测量相关,不能忽略,但不好测,就采用某种数学方法避开它,一种方法是列两个方程相减,将要回避的量消去;另一种方法是画一次函数图线,将待测量与要回避的量分别放到斜率和截距中去。

### 3. 模拟法

这种方法是用一种易于测量的物理过程或系统代替另一种难以测量的量,条件是这两种过程或现象有相似的规律。

### 4. 补偿法

某系统受某种作用产生 A 效应,受另一种同类作用产生 B 效应,如果由于 B 效应的存在而使 A 效应显示不出来,就叫做 B 对 A 进行了补偿。补偿法大多用在补偿测量中,电学实验中电位差计和电桥就是常见的例子。

## 三、选择测量方法

测量方法是指对某个物理量的具体测定方法,是实现实验方法的手段。选择测量方法的准则是:可行、简洁、准确度高。常用的测量方法有比较法、代替法、交换法、放大法、干涉法、换测法、示波法、微差法、自准法,等等。

## 四、选择实验条件

实验条件指的是仪器的规格和被测物的状态,选择实验条件应当满足实验原理和测量方法的要求,并尽可能地减少误差。

选择仪器时主要考虑它的准确度、分辨率、量程及其对被测系统的影响,并且注意同一实验中各仪器精度相匹配。

选择被测物的状态参数,主要是看各个直接测量的大小,如果绘制图线,应使测量点的多少和分布范围能准确全面地反映物理规律、提高作图精度。

## 五、选择处理数据的方法

要和实验方法的设计协调,灵活运用各种数学方法处理数据。

对于自变量  $x$  与其函数  $y$  的多组数据,一般用画图线处理。

如果能使自变量做等间隔变化,可用逐差法处理数据。

## 六、安排实验步骤

实验步骤要合理,突出重点,集中精力做好需要精细观测的工作和时机性很强的操作。

有的实验有很强的逻辑性,要根据这种逻辑性安排实验的步骤,明确先做什么,后做什么,例如,检测黑盒中电气元件的实验。

## 题 1 (2007·全国物理决赛题)

## 测定汞双黄谱线的波长

目的:以钠光波长  $\lambda_0 = 589.3 \text{ nm}$  (钠双线的平均值) 为标准,用光栅和分光计测定汞双黄谱线的波长  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$ .

仪器:分光计(如图 1-1 所示)、光栅、钠光灯、汞灯、平面镜.

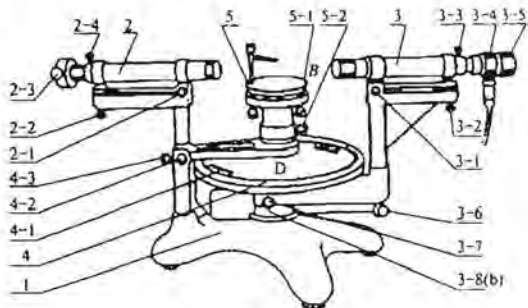


图 1-1

1. 三角底座;2. 平行光管;2-1. 水平方向调节螺钉,2-2. 倾角调节螺钉,2-3. 狭缝调节螺钉,2-4. 狭缝套筒锁定螺钉;3. 望远镜;3-1. 水平方向调节螺钉,3-2. 倾角调节螺钉,3-3. 套筒锁定螺钉,3-4. 照明灯筒,3-5. 目镜,3-6. 望远镜微调螺钉,3-7. 望远镜与刻度盘锁定螺钉,3-8(b). 望远镜止动螺钉(在图的背面);4. 刻度盘;4-1. 角游标,4-2. 游标盘微调螺钉,4-3. 游标盘止动螺钉;5. 载物台;5-1. 载物台调平螺钉(三个),5-2. 载物台与游标盘锁定螺钉.

要求:

1. 写出测量原理和公式成立条件;
2. 写出仪器调整和实验的操作步骤,并说明每一个步骤的目的;
3. 数据处理(原始数据记录与处理,求出汞双黄谱线的测定结果  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$ ).

**【分析】** 本题是光学实验的常规实验题目,使用的也是光学常规实验仪器——分光计、光栅等,难度不大. 解题需从光栅方程出发:

$$d \sin \theta = k \lambda.$$

先将作为标准光源的钠光垂直入射于光栅平面,用分光计测出钠光一级衍射条纹的衍射角,再让汞灯垂直入射于光栅平面,测出汞双黄谱线的衍射角,用比较法则可求得汞双黄谱线的波长. 本实验中调分光计是关键技术,需要熟练、耐心和细心.

**【解】** 1. 测量原理和公式为

$$d \sin \theta = k \lambda. \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

成立条件为:平行光入射,且垂直入射于光栅平面;成像在透镜的焦平面上. 通过

$$\lambda_0 = \sin \varphi_0, \lambda_1 = \sin \varphi_1, \lambda_2 = \sin \varphi_2.$$



可求得

$$\lambda_1 = \frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_0} \lambda_0, \lambda_2 = \frac{\sin\varphi_2}{\sin\varphi_0} \lambda_0.$$

2. 仪器调整 and 实验的操作步骤以及每一步骤的目的可叙述如下:

(1) 调整分光计的操作步骤和目的:

① 调节目镜叉丝,使其位于明视距离;在旋转望远镜的目镜中可看清楚分划板上的叉丝.

② 调节望远镜聚焦到无穷远状态.把平面镜置于载物台上,如图 1-2 所示.拉动望远镜的目镜镜筒与物镜间的距离,看清楚反射回来的“+”字叉丝像,使像和叉丝(或分划板)位于同一平面内,即无视差.

③ 调节望远镜光轴,使和转轴垂直;并调节平台螺丝  $a$ 、 $b$  以及望远镜的倾斜度螺丝,使平面镜旋转  $180^\circ$  时,“+”字叉丝像始终落在望远镜分划板的  $MN$  线上.调节时,要重复调整,逐步逼近,直到“+”字叉丝处于  $MN$  线上,如图 1-3 所示.

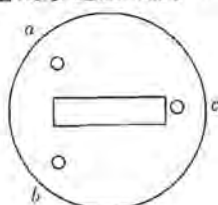


图 1-2

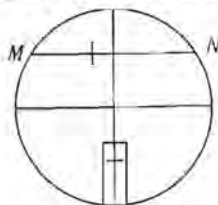


图 1-3

④ 调节平行光管.在望远镜中看到平行光管的狭缝像,用已调整到无穷远的望远镜来判别平行光管出来的是否已是平行光,即拉动狭缝到透镜的距离,使望远镜中看到清晰的狭缝像,且无视差,证明已是平行光.调节平行光管的倾斜程度,使水平狭缝像与望远镜分划板上的中心水平线重合;再转动  $90^\circ$ ,令细狭缝与望远镜分划板上的中心垂直线重合,表明平行光管光轴与望远镜光轴重合.

(2) 调节光栅,使其满足实验条件:

① 调节光栅平面与转轴平行.放置光栅于载物台上如图 1-2 所示;再微调平台螺丝  $a$ 、 $b$  使“+”字叉丝像落在望远镜分划板的  $MN$  线上,如图 1-3 所示.

② 调节入射平行光垂直入射光栅平面.由于计算公式的前提是平行光垂直入射光栅平面,因而不仅要令细狭缝与望远镜分划板上的中心垂直线重合,还要令从光栅反射回来的“+”字像亦与中心线重合(称为“三重合”),说明此时入射平行光与光栅平面处于垂直状态,使实验的理论条件成立,如图 1-4 所示.调节时,要使狭缝宽度很细,细到能看得清楚汞的双黄谱线.

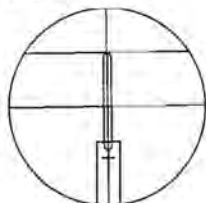


图 1-4

③ 调整光栅衍射条纹与分光计的转轴平行.微调平台螺丝  $c$ ,调整光栅衍射条纹平行于分光计的转轴,即当旋转望远镜时,衍射条纹处于等高(相对于  $MN$  线等高).

3. 数据记录、处理的方法一和方法二及其相应实验结果分别如表 4.5 所列。

表 4

谱线	望远镜位置				左 <sub>A</sub> -右 <sub>A</sub>	左 <sub>B</sub> -右 <sub>B</sub>	$\varphi$	$\lambda/\text{nm}$
	左		右					
	A窗	B窗	A窗	B窗				
钠( $k=\pm 1$ )	109°58'	289°58'	89°33'	269°35'	20°25'	20°23'	10°12'	—
汞( $\lambda_1$ )( $k=\pm 1$ )	109°41'	289°41'	89°45'	269°45'	19°56'	19°56'	9°58'	576.0
汞( $\lambda_2$ )( $k=\pm 1$ )	109°45'	289°45'	89°44'	269°44'	20°1'	20°1'	10°1'	578.8

表 5

谱线	$k$	左游标读数		右游标读数		左、右游标 读数平均值	$\lambda/\text{nm}$
		$\theta'$	$\varphi' = \theta' - \theta_0'$	$\theta''$	$\varphi'' = \theta'' - \theta_0''$	$\varphi = \frac{\varphi' + \varphi''}{2}$	
钠 ( $\lambda_0 = 589.3 \text{ nm}$ )	+1	109°58'	10°14'	289°58'	10°14'	$\varphi_{+1} = 10°14'$	—
	0	99°44'	—	279°44'	—	—	—
	-1	89°33'	10°11'	269°35'	10°9'	$\varphi_{-1} = -10°10'$	—
汞( $\lambda_1$ )	+1	109°41'	9°58'	289°41'	9°58'	$\varphi_{+1} = 9°58'$	$\lambda_1 = 574.1$
	0	99°43'	—	279°43'	—	—	—
	-1	89°45'	9°58'	269°45'	9°58'	$\varphi_{-1} = -9°58'$	$\lambda_1 = 577.8$
汞( $\lambda_2$ )	+1	109°45'	10°2'	289°45'	10°2'	$\varphi_{+1} = 10°2'$	$\lambda_2 = 577.9$
	0	99°43'	—	279°43'	—	—	—
	-1	89°44'	9°58'	269°44'	9°59'	$\varphi_{-1} = -9°59'$	$\lambda_2 = 587.7$

由表中数据,得

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \times (574.1 \text{ nm} + 577.8 \text{ nm}) = 576.0 \text{ nm}.$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \times (577.9 \text{ nm} + 587.7 \text{ nm}) = 582.8 \text{ nm}.$$

注:分光计的原始状态如下:

(1) 望远镜. 旋转目镜并把目镜筒往前推, 改变望远镜倾斜度, 即无法看清分划板上的叉丝, 望远镜没有聚焦到无穷远处, 望远镜光轴垂直于转轴的状态被破坏。

(2) 平行光管. 可调节狭缝倾斜放置如“/”且略宽, 一级汞双黄谱线难辨; 狭缝偏离焦平面。

(3) 载物台平台. 可调载物台平台, 使其下降在托台上(但在望远镜中仍能看到从平面镜反射回来的“+”字叉丝像)。



## 题 2 (2006·全国物理决赛题)

## 测量霍尔器件的灵敏度

【目的】 利用提供的实验仪器测量置于螺线管中部霍尔器件的灵敏度。

【器材】 可调直流稳压电源 2 台( $E_1$ 、 $E_2$ ) (内阻可以忽略), 最大输出电压为 15 V, 最大输出电流 1 A (超过 1 A 会自动断开, 指示灯为黄色, 继续使用需要关闭电源后重新打开), 电源上显示的电压只能作为参考, 不是精确的输出电压; 数字毫安表(A) 1 个, 量程为 2 mA (如果只有首位显示 1, 其他位不显示, 说明超过量程); 电阻箱( $R_0$ ) 1 个; 阻值未知的定值电阻( $R_1$ ) 1 个; 滑动变阻器 2 个( $R_2$ 、 $R_3$ ) ( $R_2$  的最大电阻为 600  $\Omega$ ,  $R_3$  的最大电阻为 5 000  $\Omega$ ); 霍尔器件(H), 螺线管(L) [单位长度上线圈的匝数见仪器的右上角( $n=1.096 \times 10^4$  匝/m)], 霍尔器件放在螺线管里面, 与螺线管构成 TH-S 型螺线管磁场实验仪 (见后面说明); 单刀单掷开关( $S_1$ ) 1 个, 导线若干。

## 【说明】

## 一、霍尔效应

霍尔效应的原理如下: 如图 1-5 所示, 将一块 N 型半导体材料 (其载流子为电子) 放入磁场  $B$  中, 当电流  $I_S$  (霍尔电流) 通过时, 磁场对运动电荷产生洛伦兹力  $f_B$ ,

$$f_B = qvB. \quad (1.1)$$

式中  $q$  为电子的电荷,  $v$  为半导体中带电粒子的定向运动速度,  $B$  为外磁场的磁感应强度, 洛伦兹力使带电粒子产生横向偏转, 由于样品有边界, 偏转的电荷在边界处积累起来, 产生一个横向电场  $E$ . 该电场对电荷产生作用力

$$f_E = qE. \quad (1.2)$$

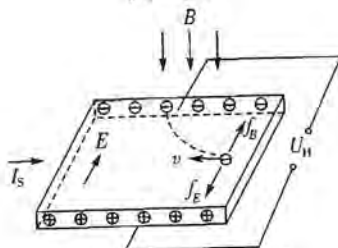


图 1-5 霍尔效应原理图

带电粒子所受的电场力与洛伦兹力方向相反, 从而阻止带电粒子继续偏转. 当两个力大小相等  $f_E = f_B$ , 即  $E = vB$  时, 电荷积累达到动态平衡, 在样品两侧将形成电势差  $U_H$ , 称为霍尔电压, 这一效应称为霍尔效应. 由于霍尔电压  $U_H$  与电场强度  $E$  成正比, 流过滤件的霍尔电流  $I_S$  与电子的定向运动速度  $v$  成正比, 因而霍尔电压  $U_H$  与霍尔电流和磁感应强度  $B$  成正比.

$$U_H = K_H I_S B. \quad (1.3)$$

其中,  $U_H$  为霍尔电压,  $I_S$  为霍尔电流,  $K_H$  为比例系数, 称为霍尔器件的灵敏



度(实验要求测量的量),单位为  $V/(A \cdot T)$ 。

公式(1.3)是在理想情况下得到的,实际上由于霍尔电极位置不对称,两极之间还存在附加的不等电位差。不等电位差可以通过在不改变霍尔电流大小和外加磁场大小的情况下,分别改变霍尔电流的方向和磁场的方向后,取霍尔电压的平均值来消除。

## 二、TH-S型螺线管磁场实验仪

TH-S型螺线管磁场实验仪器由霍尔器件,长直螺线管,调节支架及三个双刀双掷换向开关组成,其内部接线如图1-6所示。当长直螺线管中通有电流  $I_M$ (励磁电流)时,其中部的磁感应强度为

$$B = \mu_0 n I_M.$$

式中  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$  为真空中的磁导率, $n$ 为螺线管单位长度上的匝数。实验所用螺线管单位长度上的匝数  $n$  请见螺线管测试仪的右上角( $n = 1.096 \times 10^4$  匝/m)。待测霍尔器件已经置于螺线管中部,不准调节。

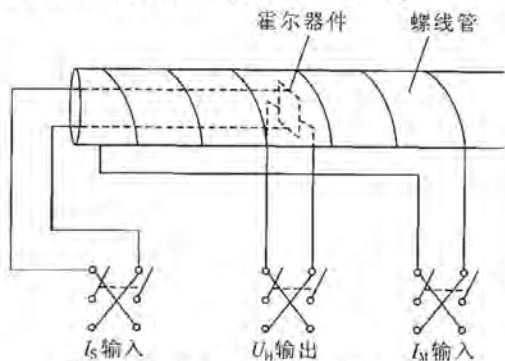


图1-6 TH-S型螺线管测试仪器的示意图

### 【要求】

1. 画出提供霍尔电流  $I_S$ 、励磁电流  $I_M$  的电路图,以及测量霍尔电压的电路图。
2. 详细写出测量方案及实验步骤。
3. 详细记录实验数据。
4. 计算实验结果。

### 【注意事项】

1. 霍尔电流  $I_S$  不能超过  $10 \text{ mA}$ ,以免损坏霍尔器件,实验时可取  $8 \text{ mA} \sim 10 \text{ mA}$ 。励磁电流  $I_M$  可取  $1 \text{ A}$  左右。霍尔电压只有几毫伏。
2. 成绩评定以卷面为主要依据。

**【分析】** 这是一道传统的电学实验题,貌似简单,实际上却是一道综合性的实验题。由于给出的仪器条件不充分,所以要求考生能综合所学的电学知识,开动脑筋,想办法,利用现有仪表,改装成所需要的电表和量程,这里有众多电路供选择,



如果选择不好,就可能实验做不成功,或者出现比较大的误差,而不能满足题目要求。关键性的实验技术是毫安表的改装,电表内阻的测量,以及中等阻值的电阻的测量方法,还有根据器件和元件的要求选择电源。题目将原理和实验仪器都阐述得很清楚,重要的是如何应用实验技巧。

### 【解】 一、实验方案的设计

由霍尔电压与霍尔电流、磁感应强度成正比  $U_H = K_H I_S B$  及长直螺线管中部的磁感应强度  $B = \mu_0 n I_M$  可知,霍尔器件的灵敏度

$$K_H = \frac{U_H}{\mu_0 n I_S I_M}$$

因而只要能测出霍尔电流  $I_S$  和励磁电流  $I_M$  及与之对应的霍尔电压  $U_H$  即可求出霍尔系数  $K_H$ 。

测量回路的电流有两种方法:一是回路中串连一个电流表直接测量;二是测量已知电阻上的电压后,算出回路的电流。由于只有一个量程为 2 mA 的毫安表,用上述两种方法测量都需要进行电表的改装,改装电表首先需要知道待改装表的内阻。

#### 毫安表内阻的测量

测量内阻有以下三种方法:

##### (1) 方法一(串、并二次测量法)

在不改变电阻箱电阻的情况下分别测量毫安表与  $R_1$  串联(图 1-7)时的电流  $I_2$  及毫安表与  $R_1$  并联(图 1-8)时的电流  $I_3$ 。

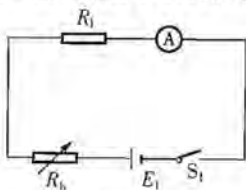


图 1-7

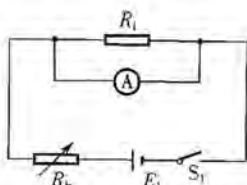


图 1-8

由电路图可知 
$$I_2 = \frac{E_1}{R_b + R_1 + R_A} \quad (1)$$

$$I_3 = \frac{\frac{R_1 R_A}{R_1 + R_A}}{R_b + \frac{R_1 R_A}{R_1 + R_A}} \cdot \frac{E_1}{R_A} = \frac{R_1}{R_b (R_1 + R_A) + R_1 R_A} E_1 \quad (2)$$

联立方程①和②,可得

$$R_A = \frac{I_2 R_1 R_b + I_2 R_1^2 - I_3 R_1 R_b}{I_3 R_b + I_3 R_1 - I_2 R_1} \quad (3)$$

$R_b$  可从电阻箱上直接读出,因而只要知道  $R_1$  即可求出毫安表的内阻  $R_A$ 。

##### (2) 方法二(惠斯通电桥法)

将四个电阻连接成图 1-9 所示的电路。 $m, n$  之间先不接导线,读出毫安表的读

数  $I_2$ ，然后用一根导线将  $m$ 、 $n$  短路，调节  $R_0$  使毫安表的读数重新为  $I_2$ ，此时有  $R_A = \frac{R_3'}{R_0} R_1$ 。  $R_0$  可从电阻箱上直接读出，只要知道  $R_1$  和  $R_3'$  即可求出毫安表的内阻  $R_A$ 。

### (3) 方法三(半偏法)

电路图如图 1-10 所示。如果滑动变阻器的电阻远大于毫安表的内阻，则将一个电阻箱与毫安表并联后，基本不改变电路的总电流，才可以用半偏法。测量方法如下：先不接电阻箱，将滑动变阻器的电阻调到最大，读出毫安表的读数  $I_3$ ，然后将电阻箱与毫安表并联，调节电阻箱，使毫安表的读数为  $\frac{I_3}{2}$ 。

则此时， $R_A = R_0$ 。（该方法的系统误差约为  $\frac{R_0}{R_3}$ ）

上述三种测量内阻的方法中，方法一需要一个已知阻值的电阻，可以通过测量定值电阻  $R_1$  的阻值来实现。方法二需要两个已知阻值的电阻，可以通过测量定值电阻  $R_1$  的阻值和一个滑动变阻器（暂时固定滑块）的阻值来实现。

### 电阻阻值的测量

可以使用替换法测量电阻的阻值。现以测量定值电阻  $R_1$  的阻值为例，测量电路如图 1-11 所示。调节滑动变阻器的电阻，使毫安表的读数为其量程的  $\frac{2}{3}$  左右，记录此时毫安表的读数  $I_6$ ，然后将  $R_1$  换成电阻箱，调节电阻箱的阻值，使毫安表的读数回到  $I_6$ ，则此时  $R_1 = R_0$ 。如果用第二种方法测毫安表的内阻，则将一个滑动变阻器的滑块固定，用同样的方法测量其他阻值。

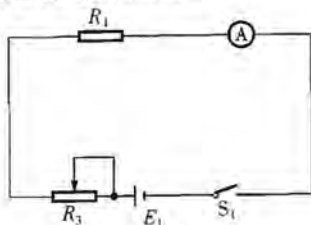


图 1-11

测量出电阻后，即可用前面的方法测量毫安表的内阻。通过测量可知， $R_1 = 50.0 \Omega$ ，毫安表的内阻约为  $109 \Omega$ （具体数据见实验数据与实验结果）。

### 提供霍尔电流 $I_s$ 的电路及 $I_s$ 的测量

首先考虑提供霍尔器件上霍尔电流  $I_s$  的电路。由于电源的最大输出电压为  $15 \text{ V}$ ，回路需要的电流为  $8 \text{ mA} \sim 10 \text{ mA}$ ，则回路的总电阻最大在  $1500 \Omega$  左右。如

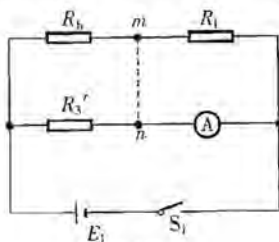


图 1-9

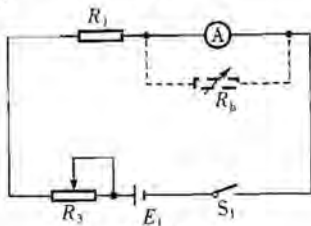


图 1-10



果采用串联电流表的方式测量电流,则要求改装后的电表内阻非常小,将其拆除后(后面还要测量励磁电流和霍尔电压)基本不影响回路的电流.如果将 2 mA 的电流表改装成 10 mA 的电流表,改装后电表的内阻还有几十欧姆,拆除后对电路的影响很大,故不宜采用.只能采用测量已知电阻上的电压的方式来测量回路的电流.因而可以设计如图 1-12 所示的电路(如果前面采用半偏法测毫安表的内阻,没有测定  $R_1$  的电阻,则应先测定  $R_1$  的电阻).

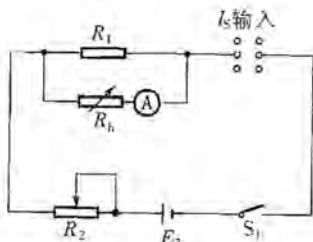


图 1-12

测量时,调节电阻箱  $R_b$ ,使其阻值远大于  $R_1$  的阻值(实际上是将毫安表串联一个电阻作电压表用).接通电路后,流过回路的总电流

$$I_s = \frac{I_A(R_b + R_A)}{R_1}$$

调节滑动变阻器  $R_2$ ,使霍尔电流  $I_s$  在 8 mA~10 mA 之间,记录电阻箱  $R_b$  的阻值和毫安表的读数  $I_A$  后,拆除电阻箱  $R_b$  和毫安表  $A$  (该方法的系统误差  $\approx \frac{R_1}{R_b + R_A}$ )

#### 提供励磁电流 $I_M$ 的电路及 $I_M$ 的测量

由于直流稳压电源  $E_1$  的最大输出电压为 15 V,要提供 1 A 左右的励磁电流  $I_M$ ,则回路的电阻只能在 15  $\Omega$  左右.如果螺线管的内阻大于 20  $\Omega$ ,则不可能产生一个 1 A 左右电流的回路.所以螺线管的内阻应该小于 20  $\Omega$ ,如果螺线管的电阻很小,则需要限流电阻或调节稳压源输出一个小电压;如果螺线管的电阻本身为十几欧姆则可以直接将其接在电源两端.因而先采用前面测量电阻的方法测量螺线管的电阻  $R_L$ ,再判断采用何种电路.

通过测量可知,螺线管的电阻为十几欧姆,因而可以直接将其接在电源的两端.

测量励磁电流有两种方法:

(1)测量螺线管上的电压(电压源的输出电压).将电阻箱  $R_b$  的阻值调到一个大阻值,与毫安表串联后作电压表用,如图 1-13 虚线所示.记录毫安表的读数  $I_A$  和所用电阻箱的阻值  $R_b$ ,则励磁电流

$$I_M = \frac{I_A(R_A + R_b)}{R_L}$$

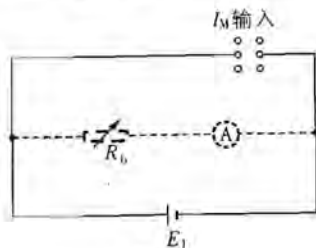


图 1-13

测量结束后拆除电阻箱和毫安表。

(2) 将毫安表改装成电流表直接测量。将电阻箱调到  $R_b = 0.1 \Omega$ ，与毫安表并联后接入电路，如图 1-14，读出毫安表的读数  $I_A$ 。则

$$I_M = I_A + \frac{I_A R_A}{R_b} = I_A \left( 1 + \frac{R_A}{R_b} \right).$$

测量结束后拆除电阻箱和毫安表。(该方法的系统误差约为  $\frac{0.1}{11.1} \approx 0.9\%$ )

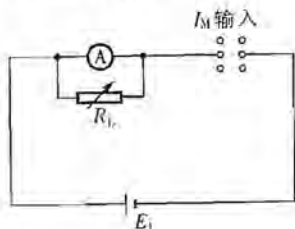


图 1-14

### 霍尔电压的测量电路及霍尔电压的测量

由于霍尔电压很小，只有几毫伏，将毫安表串联电阻箱组成的电压表将很难测出霍尔电压的大小(设霍尔电压为  $1 \text{ mV}$ ，电压表的内阻为  $2000 \Omega$ ，则毫安表的读数只有  $0.5 \mu\text{A}$ )。可以采用图 1-15 所示的补偿电路进行测量。当毫安表接到 3 端，且毫安表的读数为零，则电阻箱两端的电压等于霍尔电压。因而只要测出电阻箱上的电压即可测出霍尔电压。由于没有其他仪器可用，实际操作时，可将电阻箱的阻值调到零点几欧姆，由于毫安表的内阻为一百多欧姆，远大于电阻箱的阻值，因而将毫安表与电阻箱并联(将毫安表从 3 改接到 4)基本不改变回路的总电流。然后根据  $I_A R_A$  测出电阻箱两端的电压(实际上是将毫安表当电压表用)，即为霍尔电压  $U_H$ 。

测量时，首先判断 1 和 2 之间霍尔电势高低。将毫安表接在霍尔电压的输出端，根据电流的方向判断 1 和 2 之间电势的高低。如果 1 端电势高，将双刀双掷开

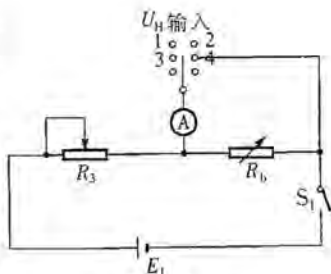


图 1-15



关掷向上边,否则,掷向下边,保证 3 的电势高于 4。

先将毫安表接在 3 端,调节电阻箱电阻  $R_b$ ,使其阻值在零点几欧姆到 1 欧姆之间,然后调节滑动变阻器  $R_3$ ,使毫安表的读数为零,则此时电阻箱两端的电势差等于霍尔电压,然后将毫安表接到 4 端,读出毫安表的电流  $I_{A1}$ ,则霍尔电压

$$U_{H1} = I_{A1} R_A.$$

分别改变霍尔电流  $I_S$  和励磁电流  $I_M$  的方向,用相同的方法测量霍尔电压  $U_{H2}$ 、 $U_{H3}$  和  $U_{H4}$ 。(每次换向后,霍尔电压输出的换向开关要相应地换向)

$$U_H = \frac{U_{H1} + U_{H2} + U_{H3} + U_{H4}}{4}.$$

测量时的电路总接线图如图 1-16 所示。

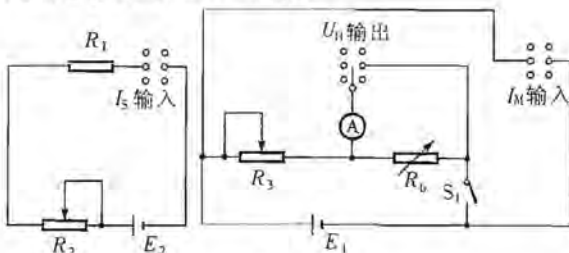


图 1-16

## 二、实验数据及实验结果

### 1. 测量电阻 $R_1$ 的阻值和螺线管内阻 $R_L$ 。

被测元件(符号)	阻值/ $\Omega$	备注
定值电阻( $R_1$ )	47.0	
螺线管电阻( $R_L$ )	11.0	
滑动变阻器 $R_3$ 的阻值( $R_3'$ )	3 649.0	用电桥测毫安表内阻时用

### 2. 测量毫安表内阻 $R_A$

方法一(串、并二次测量法)

记录内容(符号)	结果
电阻箱所用的阻值( $R_b$ )	20 000 $\Omega$
毫安表与电阻箱串联时的读数( $I_2$ )	0.343 mA
毫安表与电阻箱并联时的读数( $I_3$ )	0.104 mA

毫安表的内阻

$$R_A = \frac{I_2 R_1 R_b + I_2 R_1^2 - I_3 R_1 R_b}{I_3 R_b + I_3 R_1 - I_2 R_1} = 109.0 \Omega$$

方法二(惠斯通电桥法)



记录内容(符号)	结果
平衡时电阻箱的阻值( $R_b$ )	1 576.0 $\Omega$

毫安表的内阻  $R_A = \frac{R_b'}{R_b} R_1 = 108.8 \Omega$

方法三(半偏法)

记录内容(符号)	结果
未并联电阻箱之前毫安表的读数( $I_S$ )	1.800 mA
毫安表的读数为( $\frac{I_S}{2}$ )时电阻箱的阻值( $R_b$ )	106.2 $\Omega$

毫安表的内阻  $R_A = R_b = 106.2 \Omega$

3. 测量霍尔电流  $I_S$  ( $R_A$  取 108.8  $\Omega$ )

记录内容(符号)	结果
电阻箱所用的阻值( $R_b$ )	8 000.0 $\Omega$
毫安表的读数( $I_A$ )	0.045 mA

霍尔电流  $I_S = \frac{I_A(R_b + R_A)}{R_1} = 7.76 \text{ mA}$

4. 测量励磁电流  $I_M$  ( $R_A$  取 108.8  $\Omega$ )

记录内容(符号)	结果
电阻箱所用的阻值( $R_b$ )	99 999.9 $\Omega$
毫安表的读数( $I_A$ )	0.098 mA

励磁电流  $I_M = \frac{I_A(R_A + R_b)}{R_L} = 0.89 \text{ A}$

5. 测量霍尔电压 ( $R_A$  取 108.8  $\Omega$ )

次数	$I_S$ 方向	$I_M$ 方向	毫安表读数/mA	霍尔电压/mV
1	上	上	0.021	2.28
2	上	下	0.022	2.39
3	下	下	0.021	2.28
4	下	上	0.022	2.39
平均				2.34

6. 计算霍尔器件的灵敏度



$$\begin{aligned}
 K_H &= \frac{U_H}{\mu_0 n I_S I_M} \\
 &= \frac{2.34}{4 \times 3.14 \times 10^{-7} \times 1.09 \times 10^3 \times 7.76 \times 0.89} \text{V}/(\text{A} \cdot \text{T}) \\
 &= 24.7 \text{V}/(\text{A} \cdot \text{T}).
 \end{aligned}$$

### 题3 (2006·全国物理决赛题)

#### 测量光栅常量

**【目的】** 利用提供的实验仪器测量光栅常量。

**【器材】** 单色光源(S), 读数显微镜, 牛顿环(透镜曲率半径  $R=1.25 \text{ m}$ ), 光具座及配件, 焦距相同的凸透镜2块( $L_1, L_2$ ), 平面光栅(G)1块, 观察屏, 缝宽可调的单缝, 照明灯, 有刻度的三角板1块, 夹子2个, 计算器。

#### 【要求】

1. 写出实验原理(包括公式和必要的光路图)。
2. 详细写出实验步骤。
3. 详细记录实验数据。
4. 计算实验结果。

**【注意】** 成绩评定以卷面为主要依据。

#### 【说明】

##### 一、光栅

平面透射光栅是一种多缝夫琅禾费衍射元件, 它是由一系列等宽、等间距的平行狭缝组成。设狭缝透光和不透光部分的宽度分别为  $b$  和  $a$ , 则狭缝间距  $d=b+a$  (通常单位为  $\text{nm}$ ) 称为光栅常量(实验要求测量的量)。

当一束平行光垂直入射到光栅表面时(如图 1-17 所示), 衍射光满足的光栅方程为

$$d \sin \theta = k \lambda. \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2.1)$$

式中  $d$  为光栅常量,  $\theta$  为各主极大的衍射角,  $\lambda$  为光的波长,  $k$  为各主极大的级数。

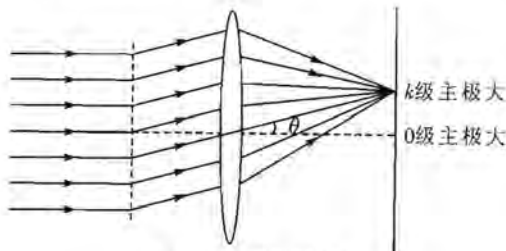


图 1-17 光栅的衍射

##### 二、牛顿环与等厚干涉

牛顿环由一个曲率半径很大的透镜和一块光学平面玻璃用金属框固定而成,



如图 1-18 所示.

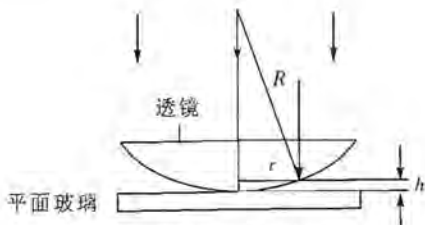


图 1-18 牛顿环等厚干涉光路图

当光垂直入射到牛顿环装置上时,在透镜球面反射的光与在平面玻璃表面反射的光的光程差为

$$\Delta = 2nh_k + \frac{\lambda}{2}. \quad (2.2)$$

其中 \$n\$ 为空气的折射率,取为 1. 根据干涉条件

$$\Delta = \begin{cases} k\lambda & k=1, 2, 3, \dots (\text{明纹}) \\ (2k+1)\frac{\lambda}{2} & k=0, 1, 2, \dots (\text{暗纹}) \end{cases} \quad (2.3)$$

由(2.2)和(2.3)式可知,同一条纹对应的球面到平面玻璃之间的高度 \$h\$ 相同,所以称为等厚干涉条纹.由图 1-18 可知,牛顿环的干涉条纹为一系列同心圆.又由图 1-18 的几何关系有

$$r_k^2 = R^2 - (R - h_k)^2 = 2Rh_k - h_k^2. \quad (2.4)$$

式中 \$R\$ 为透镜的曲率半径, \$r\_k\$ 为第 \$k\$ 级明纹或暗纹的半径, \$h\_k\$ 为第 \$k\$ 级明纹或暗纹到平面玻璃的垂直距离.由于 \$R \gg h\_k\$, 上式中的 \$h\_k^2\$ 项可以忽略,故

$$r_k^2 = 2Rh_k. \quad (2.5)$$

联立(2.2),(2.3)和(2.5)式可得牛顿环的明暗纹条件为

$$\text{明纹:} \quad r_k^2 = (2k-1)R \cdot \frac{\lambda}{2}, \quad (2.6)$$

$$\text{暗纹:} \quad r_k^2 = kR\lambda. \quad (2.7)$$

### 三、读数显微镜及注意事项

读数显微镜如图 1-19 所示.

1. 调焦时(升降目镜),应先让物镜接近被测物体,然后从目镜中观测,通过调焦手轮慢慢升高目镜,直至看到清晰的像.

2. 测量时,只能单方向调节测微鼓轮,防止空程差.

3. 鼓轮上刻有 100 等份的刻度线,鼓轮转动一圈,标尺上的刻度移动 1 mm,读数应估读到千分之一毫米.

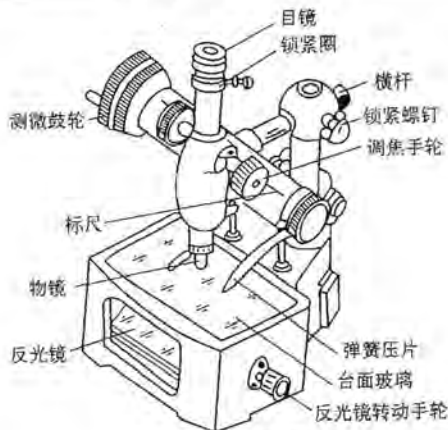


图 1-19 读数显微镜

**【分析】** 本题实验原理与仪器都写得很清楚,例如,给出了光栅及光栅方程、牛顿环、等厚干涉的介绍和读数显微镜的描述。有了这些,解题不难下手。从光栅方程  $d\sin\theta = k\lambda (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  可知,欲求光栅常数  $d$ ,则需知道波长  $\lambda$  及衍射角  $\theta$ ,由给出的仪器(牛顿环和读数显微镜)以及牛顿环明暗条纹的条件[明纹:  $r_k^2 = (2k-1)R \frac{\lambda}{2}$ , 暗纹:  $r_k^2 = kR\lambda$ ]可以测出波长  $\lambda$ ,再用光具座及题目提供的其他光学元件,根据几何光学原理,则可确定光栅条纹的第一主极大的衍射角,然后代入光栅方程求出  $d$ ,则题目得解。

### 【解】 一、实验方案的设计

由光栅方程  $d\sin\theta = k\lambda$  可知,如果知道波长  $\lambda$  和第  $k$  级主极大的衍射角  $\theta$ ,则可求出光栅常量  $d$ ,因而问题转化为光源波长  $\lambda$  的测量和光栅衍射角  $\theta$  的测量。

由说明中的(2.7)式,牛顿环暗纹的条件为  $r_k^2 = kR\lambda$ 。原则上只要测出第  $k$  级暗纹的半径  $r_k$ ,即可利用上式算出波长。但实际上由于一方面无法确定干涉条纹的中心,另一方面很难保证沿直径方向测量,因而直接测量半径很难做到。可以采用如下的办法:以  $r_m$  表示第  $m$  级的暗纹,以  $r_n$  表示第  $n$  级的暗纹,则有

$$r_m^2 = mR\lambda, r_n^2 = nR\lambda. \quad (1)$$

两式相减得

$$r_m^2 - r_n^2 = (m-n)R\lambda. \quad (2)$$

从而有

$$\lambda = \frac{r_m^2 - r_n^2}{(m-n)R} = \frac{D_m^2 - D_n^2}{4(m-n)R}. \quad (3)$$

式中  $D_m$  和  $D_n$  为第  $m$  级和第  $n$  级暗纹的直径。由于同心圆弦长的平方差等于直径的平方差,因而上式对测量弦长同样成立。于是测量波长的问题转化为测量牛顿环干涉暗纹直径(弦长)。

由光栅衍射的原理图可知,测量衍射角可以通过测出  $\pm k$  级主极大之间的距离  $h$  和透镜的焦距  $f$  后,根据  $\tan\theta = \frac{h}{2f}$  算出。

## 1. 光源波长的测量

(a) 将牛顿环置于测微目镜下, 调整物镜上反射镜的角度和光源的角度, 使光源的光经目镜上的反射镜(或反光镜)反射后充满整个视场。

(b) 调节目镜, 看清叉丝。显微镜调焦, 直至能清晰看到一系列同心圆干涉条纹, 使叉丝交点大致在牛顿环中心。

(c) 按单方向测量的原则测量左右两边 20~18 及 10~8 级干涉条纹的位置。

(d) 按公式③列表计算光源的波长。

## 2. 同轴等高调节及薄透镜焦距的测量

将器件按图 1-20 所示摆放在光具座上。适当拉开观察屏和狭缝之间的距离, 使得移动透镜时能在观察屏上成两次像, 一次放大的像, 一次缩小的像。调节透镜、狭缝的高度和位置, 使大像的中心和小像的中心重合, 然后测量狭缝与观察屏之间的距离  $p$  及二次成像时两透镜之间的距离  $q$ 。根据透镜成像公式有

$$f = \frac{p^2 - q^2}{4p}$$

然后将  $L_1$  换成  $L_2$ , 调节同轴等高。

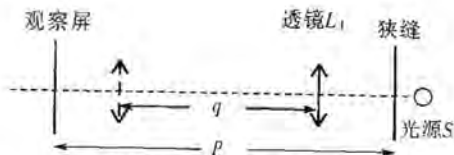


图 1-20 薄透镜焦距的测量

## 3. 光栅衍射第一主极大衍射角的测量

将器件按图 1-21 所示的顺序摆放在光具座上, 使透镜  $L_1$  到狭缝的距离为透镜焦距  $f$ , 保证狭缝的光经透镜  $L_1$  后成为平行光。透镜  $L_2$  到观察屏的距离为  $f$ 。在观察屏上夹一张白纸, 微调观察屏的位置, 使观察屏上三条主极大的条纹清晰。轻微转动光栅, 使  $\pm 1$  级主极大的条纹清晰且对称。在观察屏的白纸上描下条纹的位置。取下白纸, 用三角板量出  $\pm 1$  级主极大条纹之间的距离  $h$ , 则衍射角

$$\tan\theta = \frac{h}{2f}$$

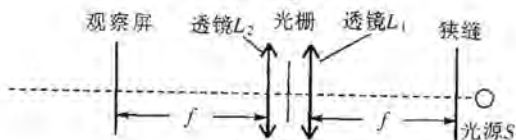


图 1-21

## 4. 光栅常量的计算

由光栅方程  $d\sin\theta = \lambda (k=1)$  可得

$$d = \frac{\lambda}{\sin\theta} \approx \frac{\lambda}{\tan\theta} = \frac{2f}{h}\lambda$$

将前面测得的波长  $\lambda$ , 焦距  $f$  及  $\pm 1$  级主极大之间的距离  $h$  代入上式即可求出光



栅常量  $d$ .

## 二、实验数据及实验结果

1. 利用等厚干涉原理测量单色光源的波长 ( $R=1.25\text{ m}$ ).

环的级数 $m$		20	19	18
环的位置	右侧/mm	28.640	28.738	28.840
	左侧/mm	36.342	36.241	36.162
环的直径 $D_m$ /mm		7.702	7.503	7.322
环的级数 $n$		10	9	8
环的位置	右侧/mm	29.768	29.903	30.061
	左侧/mm	35.221	35.077	34.927
环的直径 $D_n$ /mm		5.453	5.174	4.866
$\lambda = \frac{D_m^2 - D_n^2}{4(m-n)R}$ /nm		592	590	599

$$\bar{\lambda} = \frac{592 + 590 + 599}{3} \text{ nm} = 594 \text{ nm}.$$

2. 薄透镜焦距的测量

单缝位置/cm	成大像时透镜位置/cm	成小像时透镜位置/cm	观察屏位置/cm
133.20	113.10	34.60	21.90

$$p = (133.20 - 21.90) \text{ cm} = 111.30 \text{ cm}.$$

$$q = (113.10 - 34.60) \text{ cm} = 78.50 \text{ cm}.$$

$$f = \frac{p^2 - q^2}{4p} = 13.98 \text{ cm}.$$

3. 光栅第一主极大衍射角的测量

正负一级主极大间的距离  $h=5.00\text{ cm}$ .

4. 光栅常量的计算

$$d = \frac{2f}{h} \bar{\lambda} = 3350 \text{ nm}.$$

### 题 4 (2005·全国物理决赛题)

测量一卷漆包线的长度和漆包线铜芯的电阻率

[实验仪器]

激光器 1 台 ( $\lambda=632.8\text{ nm}$ , 电源开关在有电源线的一端), 橡皮泥 1 块, 载物台 1 个, 带有螺旋测微装置的光电池 1 块, 灵敏电流计 (G) 1 台, 电流表 (A) 1 个 (量程  $200\text{ mA}$ ), 可调量程电压表 (V) 1 个, 滑动变阻器 ( $R_1$ ) 1 个, 直流稳压电源 1 台 (输出

电压已调好,不要动,电源开关在左下角),单刀单掷开关 1 个,导线若干,不许打开的漆包线 1 卷及与之相同的漆包线样品 1 根(两者均允许加工),米尺 1 个,打火机 1 个,面巾纸。

### [要求]

1. 写出实验原理(包括必要的公式、电路图)。
2. 详细写出实验步骤(当待测电阻是低电阻时,应注意消除接触电阻对测量值的影响,并画出电路图)。
3. 详细记录实验数据(因时间关系,只测一次)。
4. 计算实验结果。

提示:如图 1-22 所示,平行光束照到细丝上将发生衍射现象,细丝的衍射花样和单缝衍射花样是一样的,细丝衍射中央主极大的宽度  $\Delta x$  与细丝直径  $a$  的关系

为:  $a = \frac{2L\lambda}{\Delta x}$ , 其中  $\lambda$  为入射光的波长,  $L$  为细丝到屏的距离。



图 1-22

### [说明]

1. 光电池:光电池用不透光的黑纸遮住,在黑纸上开有一窄缝,光可由该窄缝照到光电池上,窄缝前有一个遮光板,为了保护光电池,调节时应用激光板遮住光电池,测量时再打开,光电池的绿线接灵敏电流计的负接线柱,红线接另一个接线柱。

2. 灵敏电流计:要求将光标调到左侧 60.0 mm 处作为机械零点,机械零点调节钮在面板的右下角。面板左上角有一个灵敏度选择旋钮,你可以使用  $\times 1$ (高)、 $\times 0.1$ (中)、 $\times 0.01$ (低)这三挡灵敏度。当光标偏转量大于 100 mm 时,要将灵敏度降低一档,当光标偏转量小于 10 mm 时,要将灵敏度提高一档(不许用直接挡和短路挡)。

注:评分以卷面为准。本题无提示卡,眼睛不许迎视激光,以免伤目。

**【分析】** 从给出的仪器和提示可知,解这道题需使用电学测量和光学测量方法:

1. 用电学测量方法(伏安法)可确定漆包线的铜芯电阻值。注意,因铜芯电阻甚低,故要用“四端接线法”,以消除接触电阻的影响。将漆包线样品电阻值与待测漆包线电阻值比较,可求得待测漆包线的长度。

2. 用光学实验方法(和单缝衍射类似)可确定漆包线铜芯的直径,进而算出其横截面积  $S_0$ 。结合上述方法测得的铜芯电阻  $R$  和漆包线长度  $l_0$ ,利用电阻率的表

达式:  $\rho = \frac{RS_0}{l}$ , 不难求出电阻率  $\rho$ 。

**【解】** (一)待测漆包线长度的测量

**[实验原理]** 由  $R = \rho \frac{l}{S}$  可知,待测漆包线的长度  $l_x$ 、电阻  $R_x$  与漆包线样品的



长度  $l_0$ 、电阻  $R_0$  有如下关系  $\frac{l_x}{R_x} = \frac{l_0}{R_0}$ ,

即  $l_x = \frac{R_x}{R_0} l_0$ . ①

所以测出漆包线样品的电阻值、待测漆包线的电阻值、漆包线样品的长度,由①式即可算出待测漆包线的长度.

采用伏安法测漆包线的电阻,测量电路如图 1-23 所示:

图中  $E$  为电源,  $R_1$  为滑动变阻器,  $R_0$  表示所测漆包线  $ab$  间的阻值. 因漆包线样品的阻值很小,故应用如图 1-23 所示的四端接线法(外端为电流端,内端为电压端)接线.

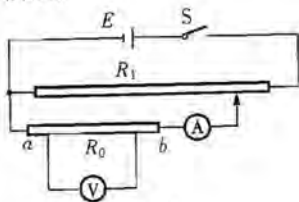


图 1-23

[实验步骤]

1. 用打火机的烧掉漆包线样品两端的漆膜.
2. 按图 1-23 接线.
3. 调节滑动变阻器,使电流表和电压表的示数大于满刻度的  $\frac{2}{3}$ ,读取电压表和电流表的数据  $U_0$ 、 $I_0$ . 因为  $R_0 \ll R_V$  ( $R_V$  为电压表的内阻),故可用式  $R_0 = \frac{U_0}{I_0}$  来计算  $R_0$  值.
4. 用米尺测量  $ab$  间漆包线的长度  $l_0$ .
5. 用打火机的烧掉待测漆包线两端的漆膜,重复步骤 2、3,测量  $R_x$  值,用①式计算  $l_x$  值.
6. 用米尺测量待测漆包线两电压端以外漆包线的长度  $l_1$ 、 $l_2$ ,则待测漆包线的线长:  $l = l_x + l_1 + l_2$ .

[实验数据与结果]

$U_0/\text{mV}$	$I_0/\text{mA}$	$l_0/\text{cm}$	$U_x/\text{mV}$	$I_x/\text{mA}$	$l_1/\text{cm}$	$l_2/\text{cm}$
101.0	176	82.50	1300	154	1.00	1.00

计算结果:

$$R_0 = \frac{U_0}{I_0} = \frac{101.0}{176} \Omega = 0.574 \Omega.$$

$$R_x = \frac{U_x}{I_x} = \frac{1300}{154} \Omega = 8.46 \Omega.$$

$$l_x = \frac{R_x}{R_0} l_0 = \left( \frac{8.464}{0.574} \times 82.5 \times 10^{-2} \right) \text{m} = 12.2 \text{m}.$$

$$l = l_x + l_1 + l_2 = (12.2 + 0.0100 + 0.0100) \text{m} \approx 12.2 \text{m}.$$

(二)漆包线铜芯电阻率的测量

[实验原理]

已知细丝衍射花样中央主极大的宽度  $\Delta x$  与细丝直径  $a$  的关系为

$$a = \frac{2L\lambda}{\Delta x} \quad (2)$$

测出细丝到像屏的距离  $L$  和细丝衍射花样中央主极大的宽度  $\Delta x$ , 用②式即可算出铜芯的直径  $a$ , 进而算出铜芯的横截面积  $S$ , 则漆包线铜芯的电阻率

$$\rho = \frac{R_0 S}{l_0} \quad (3)$$

### [实验步骤]

1. 将一小段去漆膜的漆包线样品插在橡皮泥上; 将光电池与灵敏电流计相接; 接通激光电源, 使激光照在样品上; 将光电池放在光源与样品连线的延长线上 (尽可能加大样品与光电池间的距离); 在光电池的遮光板上即可观察到与单缝衍射一样的花样。

2. 沿与入射光相垂直的方向移动光电池, 并同时观察灵敏电流计的光标偏转格数, 在左、右一级极小处, 偏转格数应有最小值, 用该方法判断左、右一级极小的位置, 从螺旋测微装置上读出左、右一级极小的位置读数  $x_{+1}$ 、 $x_{-1}$  (为了消除空程差, 要沿一个方向测量)。计算中央主极大的宽度  $\Delta x = |x_{+1} - x_{-1}|$ 。

3. 测量样品到光电池之间的距离  $L$ , 用公式②计算铜芯的直径  $a$ 。

4. 由式③计算漆包线铜芯的电阻率。

### [实验数据与结果]

$$x_{+1} = 9.228 \text{ mm}, x_{-1} = 13.252 \text{ mm}.$$

$$\Delta x = |x_{+1} - x_{-1}| = |9.228 - 13.252| \text{ mm} = 4.024 \text{ mm}.$$

$$L = 54.00 \text{ cm}.$$

$$a = \frac{2L\lambda}{\Delta x} = \frac{2 \times 54.00 \times 10^{-2} \times 632.8 \times 10^{-9}}{4.024 \times 10^{-3}} \text{ m} = 1.698 \times 10^{-4} \text{ m}.$$

$$\rho = \frac{\pi a^2 R_0}{4l_0} = \frac{3.142 \times (1.698 \times 10^{-4})^2 \times 0.574}{4 \times 82.50 \times 10^{-2}} \Omega \cdot \text{m} = 1.58 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}.$$

**题 5** (2005·全国物理决赛题) 设计一个装置, 以电学规律模拟透镜成像规律, 用来测量薄凸透镜的焦距。要求电压表的示数表示待测透镜焦距的数值。

### [实验仪器]

直流稳压电源 1 个 (输出电压已调好, 不要再用, 电源开关在左下角), 滑动变阻器 ( $R'$ ) 1 个, 长度为  $L_0 = 1.000 \text{ m}$  的均匀长直电阻丝 1 根, 数字电流表 (量程  $200 \text{ mA}$ ) 1 个, 数字电压表 (量程  $200 \text{ mV}$ ) 1 个, 单刀单掷开关 1 个, 导线若干, 光源 1 个, 物屏 1 个, 像屏 1 个, 焦距待测的薄凸透镜 1 块。

已知:  $R_0 \ll R_A$ ,  $R_0 \ll R_V$ , 其中  $R_0$  为长直电阻丝的电阻;  $R_A$  为电流表的内阻;  $R_V$  为电压表的内阻。

### [要求]

1. 写出设计原理 (包括必要的公式推导过程、公式推导结果、原理图)。
2. 详细写出实验步骤。
3. 分别取三个不同的物距对薄凸透镜的焦距进行测量。



4. 记录实验数据,要求直接测得有效数字位数的末位是毫米位。
5. 写出实验结果。
6. 回答问题:已知一块薄凸透镜的焦距为  $f$ ,在确定物的位置后,如何利用你所设计的装置找到该透镜所成实像的准确位置。

[说明]数字电压表和数字电流表的区分见数字表的背面。

数字表有4根引线,两根提供数码管工作的电源(已接好),另两根是电表的接线柱,红色夹子是正接线柱,黑色夹子是负接线柱。

注:评分以卷面为准。

本题有提示卡,提示卡内容为部分设计原理和设计装置原理图,占10分,申请提示卡评分时不给这10分。

### 提示卡

提示:

薄凸透镜成像的高斯公式为  $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$ ,亦可写成

$$f = \frac{uv}{u+v} \quad \text{①}$$

两个电阻并联公式为  $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R}$ ,亦可写成

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{②}$$

可见①式和②式有相同形式,把物屏、透镜和像屏沿电阻丝依次排列,表示它们在电阻丝上的位置所相应的点  $A$ 、 $B$ 、 $C$  是三个可沿电阻丝滑动的触点(如图1-24)。移动透镜或像屏使像屏上出现清晰的像时,电阻丝  $AB$  段的长度就是物距  $u$ ,电阻丝  $BC$  段的长度便是像距  $v$ ,则  $u$ 、 $v$ 、 $f$  的关系满足①式。若把  $AC$  两点连接,则  $AB$  之间的总电阻便是②式中的  $R$ ,电阻丝  $AB$  段的电阻就是②式中的  $R_1$ ,电阻丝  $BC$  段的电阻便是②式中的  $R_2$ 。

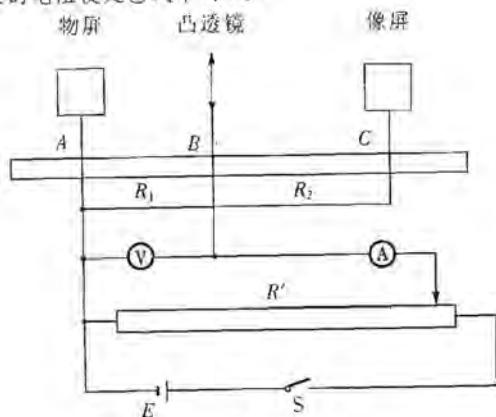


图 1-24



**【分析】** 在科学技术中时常利用模拟法(又称仿真法)解决问题. 本题就是要考生利用电学规律模拟几何光学中薄凸透镜成像的规律. 这种竞赛题过去在国内中学生物理竞赛中还未出现过, 故有些创新, 这可使学生知道什么是仿真, 如何进行仿真, 所以是很有意义的.

其实, 这个题目并不难, 因为考生熟知电阻的并联公式与薄凸透镜的成像公式有相同的形式, 这是模拟的基础, 由此可以想到用电阻丝的长度模拟物距和像距的方法, 电阻比并联后的电阻便相当于凸透镜的焦距了.

**【解】** [实验原理]

物体经凸透镜成像时, 由物距  $u$  和像距  $v$  可求得透镜的焦距为

$$f = \frac{uv}{u+v} \quad (1)$$

由此可联想到并联电阻总电阻公式

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (2)$$

二者形式完全一样. 如果设法设计一个装置, 把距离  $u$ 、 $v$  和装置中的电阻  $R_1$ 、 $R_2$  联系起来, 然后设计使  $R_1$ 、 $R_2$  并联, 并联电阻的总电阻  $R$  便与透镜的焦距  $f$  联系起来. 图 1-25 中的装置就是为了这个目的而设计的.

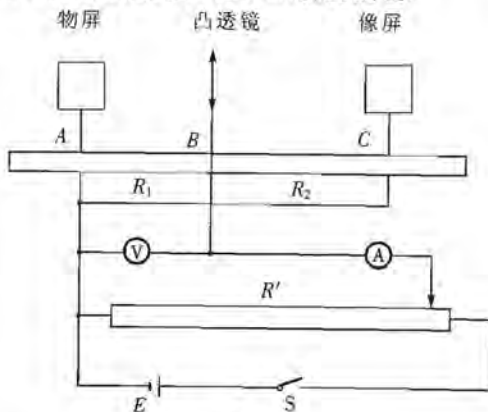


图 1-25

将物屏、透镜和像屏依次沿电阻丝排列, 它们的坐架上各有一个可沿电阻丝滑动的触点, 以  $A$ 、 $B$ 、 $C$  表示, 这些触点与电阻丝保持良好接触. 移动透镜或像屏, 使像屏上出现清晰的像. 此时  $A$ 、 $B$  间的距离就是物距  $u$ , 而  $A$ 、 $B$  段电阻丝的电阻  $R_1$  与  $u$  成正比;  $B$ 、 $C$  间的距离就是像距  $v$ , 而  $B$ 、 $C$  段电阻丝的电阻  $R_2$  与  $v$  成正比, 而透镜的焦距由①式给出. 若把  $A$ 、 $C$  两点用导线连接,  $R_1$ 、 $R_2$  就成为  $A$ 、 $B$  之间的两个并联电阻,  $A$ 、 $B$  间的总电阻由②式给出. 这个装置便把长度量  $u$ 、 $v$ 、 $f$  和电学量  $R_1$ 、 $R_2$ 、 $R$  联系起来了.

因为横截面积相同、材料相同的导体的电阻与其长度成正比, 根据题设, 电阻



丝的长度  $L_0$  是已知的, 只要测得电阻丝的电阻  $R_0$ , 就可知道单位长度的电阻丝的电阻  $\frac{R_0}{L_0}$ , 故有

$$R_1 = \frac{R_0}{L_0} u, R_2 = \frac{R_0}{L_0} v. \quad (3)$$

$$\text{代入(2)式得} \quad R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_0}{L_0} \cdot \frac{uv}{u+v} = \frac{R_0}{L_0} f. \quad (4)$$

即  $A, B$  两点间的总电阻  $R$  与透镜的焦距  $f$  成正比, 只要测得在像屏上成清晰像的条件下  $A, B$  两点间的电阻, 就可知道透镜的焦距. 设通过图 1-25 中电流表的电流值为  $I$ , 则电压表的示数为

$$U = IR = I \frac{R_0}{L_0} f. \quad (5)$$

$$\text{由(5)式可以看出, 如果} \quad I = \frac{L_0}{R_0}. \quad (6)$$

$$\text{就有} \quad U = f. \quad (7)$$

达到设计要求, 以上各式中都采用国际单位制. 如果  $U$  的单位为毫伏, 则  $f$  的单位为毫米, 二者的数值相同.

$R_0$  的数值可采用伏安法测得, 因  $R_0 \ll R_A, R_0 \ll R_V$ , 在测量  $R_0$  时可把电流表外接, 并忽略  $R_V$  对测量值的影响.

#### [实验步骤]

1. 按图 1-26 连线, 用伏安法测  $R_0$ .

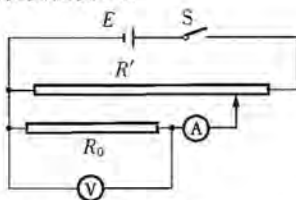


图 1-26

2. 点亮光源, 固定物屏的位置 ( $A$  点), 移动透镜或像屏的位置, 使像屏上出现清晰的像.

3. 保持  $A, B, C$  的位置不动, 将  $A, B, C$  三触点和各电学元件按图 1-26 连线, 调节滑动变阻器, 使电流表的示数为  $\frac{L_0}{R_0}$ , 此时电压表的示数即为待测透镜的焦距  $f$ .

4. 选择三个不同的焦距, 重复步骤 2、3, 求出三次  $f$  值的平均值.

#### [实验数据与结果]

1. 用伏安法测量长为  $L_0$  的电阻丝上的电阻  $R_0$

$$U = 190.0 \text{ mV}, I = 15.8 \text{ mA}$$

$$R_0 = \frac{U}{I} = \frac{190.0}{15.8} \Omega = 12.0 \Omega$$

$$2. \text{ 令 } I = \frac{L_0}{R_0} = \frac{1.000}{12.0} \text{ A} = 0.0833 \text{ A}.$$

测得数据:

测量次数	1	2	3	平均值
$f/\text{mm}$	159.8	159.9	159.4	159.7

待测薄凸透镜的焦距为 16.0 cm.

问题答案:

令物屏、透镜和像屏沿电阻丝依次排列,固定物屏的位置  $A$  和透镜的位置  $B$  不变,改变像屏的位置  $C$ ,同时调节滑动变阻器滑动头的位置,通过交替调节滑动变阻器滑动头的位置和改变像屏位置  $C$ ,直到电流表显示的读数为  $I = \frac{L_0}{R_0}$ ,电压表显示的读数等于已知焦距透镜的焦距数,这时像屏位置  $C$  便是物通过已知焦距透镜所成的清晰像的位置.

#### 题 6 (2003·全国物理决赛题)

##### 薄透镜焦距测量及选定透镜装成望远镜

[仪器和用具]照明光源,镜片筒 6 个(每个镜片筒内有 1 个透镜),平面反射镜,镜片筒架,物屏,像屏,米尺(量程 1 m),长度不同的连接筒若干,待观测文字、图案(在墙上画框中下部)等.

镜片筒  $A, B, C$  中分别有透镜  $A$ (焦距为 225 mm),透镜  $B$ (焦距为 -60.0 mm),透镜  $C$ (焦距为 60.0 mm),镜片筒  $D, E, F$  中分别有透镜  $D, E, F$ ,焦距均未知,镜片筒中透镜的位置未标出,连接筒  $H, I, J$  外径与镜片筒内径一致,可将镜片连接起来组成手持光学系统.

[要求]

1. 用所给仪器和用具,尽量准确地测量透镜  $D, E, F$  的焦距,画出测量光路图,记录全部数据,求出结果.

2. 根据 1 的实验结果选择合适的镜片和连接筒,装成 2 个放大倍数最大、能观察极远处物体的望远镜[目镜分别用凸透镜(开普勒望远镜)和凹透镜(伽利略望远镜)各 1 只],画出 2 种望远镜的光路图,并计算所组成望远镜的放大倍数,写明选择镜片筒的理由.

3. 利用连接筒装成望远镜,观察 4 m 左右远处悬挂画框中下部的文字和图案,用凸-凸(开普勒)望远镜观察文字,用凸-凹(伽利略)望远镜观察图案.记录观察结果(写出观察到文字,尽量准确地绘出观察到图案).

[要求]成绩评定以卷面为主依据.

**[分析]** 这是一道光学实验题:组装望远镜,测定望远镜的放大倍数,并用望远镜观测远处景物(文字与图形).不过在组装望远镜之前,要求测出镜片的焦距.

解题的思路是:首先判定透镜是凸是凹,进而测量透镜焦距,据此可以选择镜片组装望远镜.但是,在测焦距时有个难点,因为透镜在镜片筒中的位置没有标出,



无法直接测得透镜的物距和像距。为克服此困难,可采用颠倒镜片筒测量两次的方法,这是要动点脑筋的。但是只要绘出两种情况下的光路图,通过光路分析,即可找到物距与像距的表达式。

本题涉及到透镜焦距测量的几种主要的传统方法,内容丰富,是一个很好的几何光学试题。

**【解】** 薄透镜焦距测量及选定透镜装成望远镜步骤如下:

(1) 判定未知透镜是凸是凹

将物质与像屏旋放置在实验台两端,使其间距最大,手持各镜片筒从物屏起向像屏移动,观察像屏上的成像情况。

① 在此移动过程中能够清晰成像的可判断为凸透镜,根据成像时物与像间的距离可以大概判断透镜的焦距大小。本题中,透镜  $F$  在物像屏距离小于  $1\text{ m}$  时能够清晰成像,可判定为焦距较小的凸透镜。

② 若在移动过程中像屏上始终不能成清晰的像,但聚光范围逐渐变小,则为焦距较大的凸透镜。本题中透镜  $D$  可判定为焦距较大的凸透镜。

③ 若移动过程中,像屏上的模糊光影有变化,但一直不清晰,且在镜片靠近像屏时,像屏上出现均匀圆形光斑,则为凹透镜。本题中透镜  $E$  可判定为凹透镜。

(2) 测量透镜焦距

① 凸透镜  $F$  的焦距  $f_F$  的测量。用图 1-27 所示的二次成像法测量  $f_F$ 。

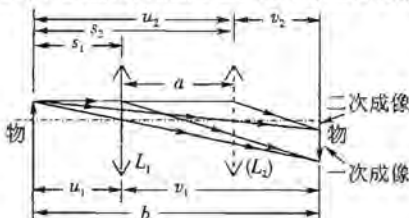


图 1-27

根据(1)①中估计的透镜焦距,确定物屏、像屏的距离  $b$  ( $b > 4f_F$ ), 一般不要太大,用米尺测出其值。在物屏和像屏间移动透镜,利用米尺测出两次清楚成像时透镜距物屏的距离  $s_1, s_2$ , 则两次成像时的透镜间的距离  $a = s_2 - s_1$ 。根据光线的可逆原理,两次成像时透镜的位置是对称的,即

$$u_1 = u_2, u_2 = u_1.$$

由图知

$$b - a = u_1 + u_2 = 2u_1.$$

所以

$$u_1 = \frac{b - a}{2}.$$

而

$$v_1 = b - u_1 = b - \frac{b - a}{2} = \frac{b + a}{2}.$$

测可得计算透镜  $F$  的焦距的公式



$$f_F = \frac{u_1 v_1}{u_1 + v_1} = \frac{\frac{b-a}{2} \cdot \frac{a+b}{2}}{b} = \frac{b^2 - a^2}{4b} \quad (1)$$

以上公式中  $a$  为两次成像间透镜移动的距离, 本法中这也就是镜片筒移动的距离, 取镜片筒上任一固定点 (设为筒的一个端面上的点), 记此点到物屏的距离为  $s_1', s_2'$ , 则测出  $b$  与  $s_1', s_2'$  (可得  $a = s_1' - s_2'$ ), 即可求得  $f_F$ .

透镜  $F$  测量数据与计算结果 (单位: cm)

		$b$	$s_1'$	$s_2'$	$a = s_2' - s_1'$	$f_F = \frac{b^2 - a^2}{4b}$
测量次数	1	24.30	10.70	19.35	8.65	5.31
	2	23.10	11.15	17.85	6.70	5.29
	3	25.00	10.35	20.30	9.95	5.26
平均值 $\overline{f_F} = 5.29$ cm					平均	5.29

②透镜  $D$  的焦距  $f_D$  的测定. 用图 1-28 所示的自准直法测量.

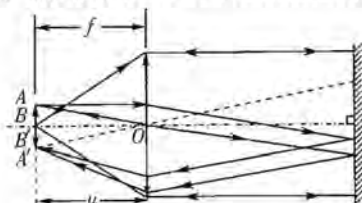


图 1-28

将平面镜放置在距物屏距离大于待测透镜焦距的位置, 使镜面法线对准物屏. 将待测透镜在物屏与平面镜之间移动, 使在物屏上成清晰的与物等大的倒像. 测量此时透镜到物屏之间的距离亦即此时的物距即为焦距  $f_D$ .

$$f_D = u. \quad (2)$$

因透镜在镜片筒中的位置没有标出, 无法直接测得透镜到物屏或像屏的距离, 或说无法直接测透镜到物屏或像屏的距离, 或说无法测得物距或像, 这可采用颠倒镜片筒测两次数据的方法测出物距和像距. 这一方法的原理如下.

设实验中成像最清晰的物屏与像屏的位置和镜片筒的位置如图 1-29(a) 所示. 取镜片筒上任一固定点, 如一个端面的  $Q$  点, 为位置标示点, 记下该点到物屏的距离为  $s_1$ , 到像屏的距离为  $d_1$ . 现在把镜片筒两端颠倒, 并使之在不动的物、像屏之间移动仍达到成像清晰的状态, 如图 1-29(b). 记下这时该点到物屏的距离为  $s_2$ , 到像屏的距离为  $d_2$ . 设  $Q$  点到薄透镜中心的距离为  $l$ , 则有

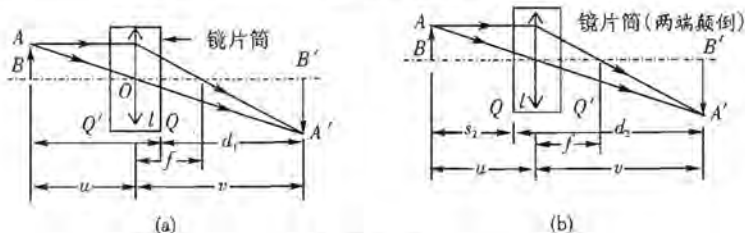


图 1-29

$$s_1 = u + l, s_2 = u - l,$$

$$u = \frac{s_1 + s_2}{2}.$$

同理

$$v = \frac{d_1 + d_2}{2}.$$

在用自准直法测  $f_D$  时,只需用上述方法测出图中的物距  $u$  即可.

透镜  $D$  测量数据与计算结果

(单位:cm)

		$s_1$	$s_2$	$u = \frac{s_1 + s_2}{2}$	$f_D = u$
测量次数	1	32.60	27.30	29.95	29.95
	2	32.00	27.80	29.90	29.90
	3	32.80	27.20	30.00	30.00
平均值 $\overline{f_D} = 29.95$ cm				平均	29.95

③透镜  $E$  的焦距  $f_E$  的测量.利用凸透镜辅助成像法(图 1-30)测  $f_E$ .取一焦距合适的凸透镜  $L_1$ (本实验中取透镜  $F$ ),置于物屏与像屏之间,前后移动凸透镜使在像屏上成清晰的像.测出物屏与像屏间的距离为  $p_1$ .不变  $L_1$  位置,将像屏向远离物屏的方向移动一定距离,测量物屏的方向移动一定距离,测量此时物屏与像屏间的距离为  $p_2$ .将等测凹透镜置于  $L_1$  与像屏之间,移动凹透镜  $E$  至像屏上出现清晰的像,测量凹透镜  $E$  到物屏的距离  $s$ ,则凹透镜成像的物距和像距分别为

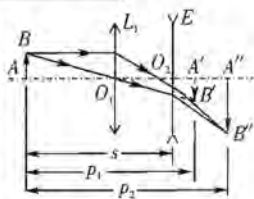


图 1-30

$$u = -(p_1 - s), v = p_2 - s.$$

则透镜的焦距  $f_E$  为

$$f_E = \frac{uv}{u+v} = -\frac{(p_1 - s)(p_2 - s)}{p_2 - p_1}. \quad (3)$$

由本实验计算公式可知除  $p_1$ 、 $p_2$  外还需要测出透镜  $E$  到物屏的距离  $s$ ,这也要

用颠倒镜片筒法测两次镜片筒上固定标识点到物屏的距离  $s_1, s_2$  并取  $s = \frac{s_1 + s_2}{2}$  代入③式, 求出  $f_E$ .

透镜 E 测量数据与计算结果

(单位: cm)

		$p_1$	$p_2$	$s_1$	$s_2$	$s$	$f_E = \frac{-(p_1 - s)(p_2 - s)}{p_2 - p_1}$
测量次数	1	23.65	28.85	18.70	22.50	20.60	-4.84
	2	22.40	30.75	20.70	17.20	18.95	-4.88
	3	21.90	29.00	21.50	15.30	18.40	-5.23
平均值 $\overline{f_E} = -4.98$ cm						平均	-4.98

(3) 组成望远镜

① 凸-凸望远镜

选择透镜 D 作物镜、透镜 F 作目镜, 组成凸-凸望远镜 (图 1-31). 望远镜的放大率为

$$\frac{f_{\text{物}}}{f_{\text{目}}} = \frac{f_D}{f_F} = \frac{29.95}{5.29} = 5.66 \approx 6.$$

可达到要求.

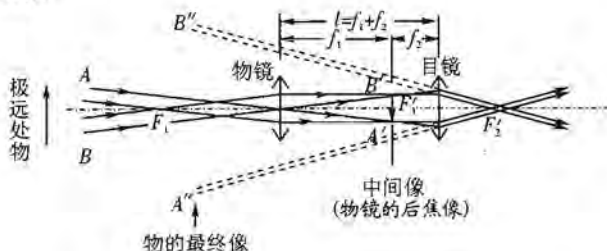


图 1-31

连接筒的选择: 为观察极远处物体, 物镜、目镜间距离应为  $d = f_D + f_F \approx 35$  cm. 同时, 本实验中还要用望远镜观察  $u \approx 4$  cm 远处的图片, 对于物镜成像, 其像距

$$v = \frac{uf}{u-f} \approx 32.4 \text{ cm}.$$

这时物镜与目镜间距离应为  $d = v + f_F \approx 37.5$  cm. 因此, 要选用长度合适的连接筒, 使装上物镜目镜镜片筒后, 两透镜间距离可在 35 cm ~ 37.5 cm 之间调节.

因此, 要选择长度接近 35 cm 的连筒 I 连接物镜 D 与目镜 F 组成凸-凸望远镜.

② 凸-凹望远镜



选择透镜  $D$  作物镜, 透镜  $E$  作目镜, 组成凸-凹望远镜(图 1-32). 望远镜的放大率为

$$\frac{f_{\text{物}}}{f_{\text{目}}} = \frac{f_D}{f_E} = \frac{29.95}{4.98} \approx 6.$$

可达到要求.

连接筒的选择: 对于凸-凹望远镜, 物镜与目镜间距离应能在  $f_D - f_E \approx 25$  cm (物在极远处) 和  $v - f_E \approx 27.5$  cm (物在 4 m 处) 之间调节.

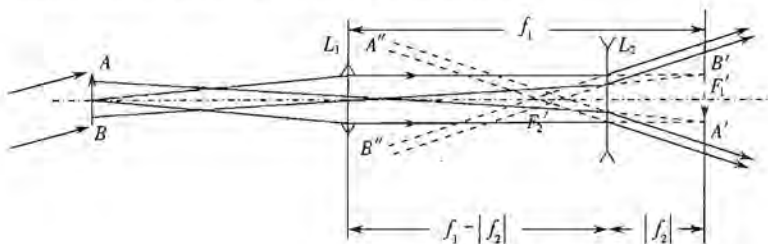


图 1-32

故选择长度接近 25 cm 的连接筒  $J$  直接连接物镜  $D$  和目镜  $E$  组成凸-凹望远镜.

(4) 观察文字、图案

用凸-凸望远镜看到的文字是“□”<sup>①</sup>.

用凸-凹望远镜看到的图像是“ $\tau$ ”.

①□是“热烈庆祝全国中学生物理竞赛 20 周年”和“选拔具有国际竞争能力创新人才”两句中的一个字.

#### 题 7 (2002 · 全国物理决赛题)

##### 测量甲电池的电动势

[仪器和用具] 甲电池 3 个(分别标为  $\epsilon_A, \epsilon_B, \epsilon_C$ ), 电阻箱 3 个(0~99 999.9  $\Omega$ ), 标准电池 1 个(标准电动势为  $\epsilon_s = 1.0186$  V), 检流计 1 个, 保护开关 1 个, 单刀双掷开关 1 个, 单刀单掷开关 1 个, 导线若干.

[要求] 利用所给仪器测出甲电池  $\epsilon_C$  的电动势.

[注意] 必须在试卷上: (1) 写明实验原理并画出实验电路图; (2) 写明实验步骤(包括操作中的注意事项); (3) 记录全部实验数据并求出结果. 考试成绩以卷面为主要评分依据.

[保护开关说明] 保护开关也称保护电阻. 当开关处在粗调位置, 线路串联一个几十千欧的电阻; 当开关处在中调位置, 线路串联一个几百欧的电阻; 当开关处在细调位置, 线路直接接通.

**【分析】** 这是一道很规范、很典型的电位差计实验题, 即补偿法测电源电动势. 这是大学物理实验室的常规实验. 这个题出得比较直截了当. 补偿法是一种基本物理实验方法, 从原理上来说, 需分清电位差计线路的两个回路: 工作回路与测



量回路,接线时特别要注意两个回路中的电源极性相顶,否则调不到平衡。从操作步骤上来说,有两个关键步骤:校准工作电流和测量电动势。如弄清两个步骤中调节什么量,保持什么量不变,则不难完成实验。

### 【解】 一、实验原理

用补偿法测电源电动势,电路图如图 1-33 所示。

图中电源  $\epsilon$ 、开关  $S_1$  及三个可变电阻  $R$ 、 $R_A$  和  $R_B$  构成工作回路;检流计  $G$ 、可变电阻  $R_A$ 、开关  $S_2$  与  $\epsilon_x$  (或  $\epsilon_s$ ) 构成测量回路。接通电路(合上  $S_1$ 、 $S_2$  在 1 或 2,  $S_3$  在 1 或 2 或 3,按保护电阻使用后),调整  $R$ 、 $R_A$  和  $R_B$ ,当检流计电流为零时,电路达到平衡。设这时工作回路中电流为  $i_0$  (称为工作电流),则电路平衡时,  $R_A$  上电压(称为补偿电压)应与测量回路中电源电压  $\epsilon_x$  (或  $\epsilon_s$ ) 极性相顶且大小相等,相互补偿,即

$$\epsilon_x = i_0 R_A. \quad (\text{或 } \epsilon_s = i_0 R_A)$$

补偿法就是利用电路平衡时的上述关系,进行测量。

根据以上原理,先在电路中接入标准电池,在  $R_A$  和  $R_B$  为确定的合适的值时调节  $R$ ,使电路达到平衡,令这时  $R_A$  和  $R_B$  为确定的合适的值时调节  $R$ ,使电路达到平衡,令这时  $R_A = R_{A1}$ ,则有  $\epsilon_s = R_{A1} i_0$ ,由此可确定工作电流  $i_0 = \frac{\epsilon_s}{R_{A1}}$ ,这一步称为校准工作电流,然后在电路中换接入待测电池  $\epsilon_x$ ,这时维持工作电路中  $R$  不变, ( $R_A + R_B$ ) 也不变,但改变  $R_A$  为  $R_{A2}$ ,再使电路达到平衡,则此时  $i_0$  不变,而有  $\epsilon_x = R_{A2} i_0$ 。由此可测出

$$\epsilon_x = \frac{R_{A2}}{R_{A1}} \epsilon_s = R_{A2} i_0.$$

$S_3$  是保护开关(保护电阻),起到保护检流计和标准电池的作用。

### 二、实验步骤

#### 1. 校准工作电流

(a)按图 1-33 连电路,  $\epsilon$  用 2 节电池 ( $\epsilon_A + \epsilon_B$ ),  $R$ 、 $R_A$  和  $R_B$  用三个电阻箱,且使三个电阻值分别为  $R > 1000 \Omega$ ,  $R_A = R_{A1} = 1018.6 \Omega$ ,  $R_B = R_{B1} = 981.4 \Omega$  (即选用并保持  $R_A + R_B = 2000.0 \Omega$ )。

(b)闭合开关  $S_1$ ,  $S_2$  置“1”,  $S_3$  置“1”,调节  $R$  使  $G$  指零,再将  $S_3$  打向“2”,重调  $R$  使  $G$  指零,最后  $S_3$  打向“3”,调  $R$  使  $G$  指零,此时,工作电流

$$i_0 = \frac{\epsilon_s}{R_{A1}} = 1.0000 \text{ mA}.$$

#### 2. 测量电动势 $\epsilon_x$

保持  $R$  不变,  $R_A + R_B = 2000.0 \Omega$  不变,  $S_2$  置“2”,  $S_3$  置“1”,在保持  $R_A + R_B = 2000.0 \Omega$  的条件下,同时调节  $R_A$  和  $R_B$  使检流计指零,依次将  $S_3$  置到“2”、“3”,重

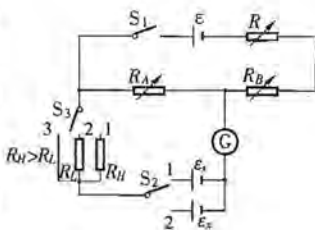


图 1-33



复调节  $R_A$  和  $R_B$ , 最后  $R_A = R_{A_2}$ ,  $R_B = R_{B_2}$ ,  $G$  指零, 此时即得到  $\varepsilon_x = R_{A_2} i_0$ , 即  $\varepsilon_x = \frac{R_{A_2}}{R_{A_1}} \varepsilon_1$ .

3. 重复 1、2 步骤 3 次, 算出  $\varepsilon_x$ , 求平均值.

三、测量数据及实验结果

测量数据及计算表

$\varepsilon_1 = 1.0186 \text{ V}$ ,  $R_{A_1} = 1018.6 \Omega$ ,  $R_{B_1} = 981.4 \Omega$ ,  $i_0 = 1.0000 \text{ mA}$

	$R_{A_2} / \Omega$	$R_{B_2} / \Omega$	$\varepsilon_x = \frac{R_{A_2}}{R_{A_1}} \varepsilon_1 = R_{A_2} i_0 / \text{V}$
1	1516.8	483.2	1.5168
2	1519.6	480.4	1.5196
3	1522.7	477.3	1.5227

实验结果  $\bar{\varepsilon}_x = \frac{1}{3} \sum \varepsilon_x = 1.5197 \text{ V}$ .

题 8 (2002 · 全国物理决赛题)

测量双棱镜的锐角和双棱镜玻璃的折射率

[仪器和用具] 双棱镜 1 个, 钠光灯 1 台, 分光计 1 台.

[要求] 1. 利用所给仪器测出双棱镜的锐角  $A$ .

2. 测出双棱镜玻璃的折射率.

[说明] 双棱镜是用玻璃制成的底角很小的等腰三角形棱镜, 如图 1-34 所示.

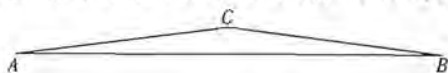


图 1-34

通常加工成图 1-35 中实线所示形状 (因制作精度的问题, 实物的底角  $A$  与  $B$  只是接近相等).

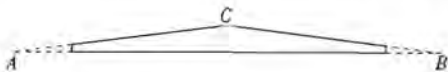


图 1-35

实验中要测的锐角是指双棱镜上标出  $A$  的底角的大小.

本实验使用分光计的部分功能 (分光计的望远镜内没有小灯泡). 关于分光计及其使用, 见分光计使用说明书.

[注意] 必须在试卷上: (1) 写明实验原理并画出光路图; (2) 写明实验步骤 (包括说明如何选定实验中要测的像); (3) 记录全部实验数据并求出结果. 考试成绩以卷面为主要评分依据.

本实验可以提供实验提示卡, 提示内容: 测量双棱镜锐角的实验原理及光路

图,要求提示的考生本实验成绩扣7分。

提示卡

测量双棱镜锐角的实验原理及光路图

测量原理如图1-36所示,令固定方向的入射平行光束照射在AB面上,选定双棱镜位置,使入射角为便于观测的适当值 $I$ (约为 $30^\circ \sim 60^\circ$ ),这就选定了反射光束的方向,转动双棱镜使法线 $n_{AC}$ 与转动前的法线 $n_{AB}$ 重合,则这时的AC面上的反射光束与双棱镜转动前AB面上反射光束方向相同,双棱镜在这两次位置之间转动的角等于 $n_{AB}$ 与 $n_{AC}$ 之间的夹角 $\alpha$ ,测出这一转角即是测出 $\alpha$ ,由此可得角A的大小, $A=180^\circ-\alpha$ 。

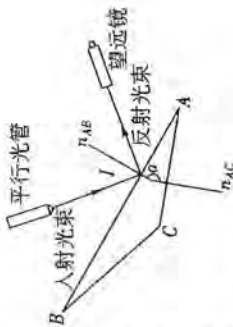
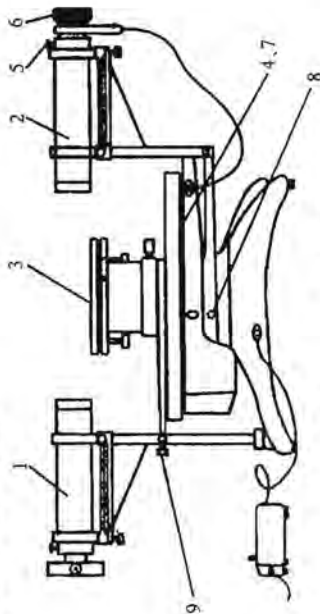


图1-36 测量原理图

分光计仪器及使用说明书

分光计可用米精确测量入射光和出射光之间的偏转角。要测准入射光与出射光之间的偏转角,必须使入射光和出射光均为与分光计的刻度盘平行的平行光束,为此,分光计上装有平行光管,望远镜和载物台;这三者的方位都能利用各自的调节螺钉做适当的调整,望远镜和载物台都可绕分光计的中心轴转动,为了测量角度,还配有可与望远镜连在一起转动的刻度盘和可与载物台连在一起转动的游标盘,分光计的结构如图1-37所示。



先要转动手轮6(图1-37)使目镜在B筒中前后移动以改变目镜与分划板之间的距离,使实验者能最清楚地看到分划板上的十字叉丝,要观察入射平行光束的成像须松开螺钉5(图1-37)前后移动斜筒以调节分划板与物镜的距离,使分划板位于物镜焦面上,这时可在分划板上看到清楚的像(用消视差法判断)。松开螺钉8(图1-37),望远镜与刻度盘即可一起绕分光计中心轴转动,本实验中,望远镜已调成与刻度盘平行,考生不需做调动。

3. 载物台

它是一个用以放置被测对象或光学元件的小平台(已调好,考生不要动载物台下的螺丝),松开螺钉9(图1-37),载物台与游标盘两者即可一起绕分光计中心轴转动。

4. 刻度盘

刻度圆盘分为 $360^\circ$ ,分度值为 $0.5^\circ$ ,对于小于 $0.5^\circ$ 的角度要利用游标读数,游标上刻有30小格,每一小格对应的角度读数为 $1'$ ,角度游标读数的方法与游标卡尺的读数方法相似,但要注意以下几点:

(1)角度位置读数的读法以角游标的零线为准,从外盘上找到与游标零线相对应的地方,读出“度”数,再找到游标上与外盘刻线刚好重合的刻线,读出“分”数。例如图1-39所示的位置角度应读为 $116^\circ 12'$ 。

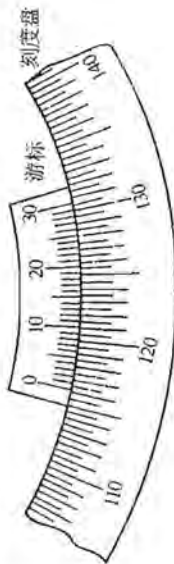
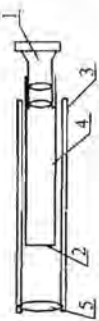


图1-39 刻度盘读数示意图

图1-38 望远镜结构图



1. 目镜
2. 分划板
3. A筒
4. B筒
5. 物镜

图 1-37 分光计结构图

- 1 平行光管 2 望远镜 3 载物台 4 刻度盘 5 B 筒锁紧螺丝 6 目镜视度调节手轮  
7 游标盘 8 望远镜止动螺钉 9 载物台与游标盘止动螺钉

### 1. 平行光管

平行光管由狭缝和透镜构成,狭缝位置可调到透镜的焦平面上,这时用光源照亮狭缝就可以得到平行光束.本实验中平行光管已调好,考生不要动平行光管的任何调节螺丝.

### 2. 望远镜

望远镜由物镜和目镜构成,两者之间装有一分划板,如图 1-38 所示.物镜装在 A 筒顶端, B 筒可在 A 筒中滑动,分划板固定在 B 筒上,目镜装在 B 筒里.观察时

(2) 转角 在测量望远镜转过过的角度即测量转角时,要用两个位置角度读数之差求出转角.这时要注意望远镜在转动中是否经过了刻度盘的零点.设  $\theta$  表示位置读数,则在下列两种情形,转角的计算式如下表.

	未过零点	过零点
$\theta_{\text{终}} > \theta_{\text{始}}$	转角 = $\theta_{\text{终}} - \theta_{\text{始}}$	转角 = $360^\circ + \theta_{\text{终}} - \theta_{\text{始}}$
$\theta_{\text{终}} < \theta_{\text{始}}$	转角 = $\theta_{\text{终}} - \theta_{\text{始}}$	转角 = $360^\circ - \theta_{\text{终}} - \theta_{\text{始}}$

(3) 刻度圆盘的中心两线应与分光计中心轴相重合,但在制造上总存在一定的误差.为了消除刻度盘中心与分光计中心轴之间的偏心差,对任一位置采用相隔  $180^\circ$  的两个游标读数.由每个游标对两次位置读数的差算出由该游标读出的转角,

再取两个游标读出的转角的平均值,这个平均值即是望远镜(或载物台)转过的角度,并且消除了偏心误差。

图 1-40 用两个游标相对于刻度盘的转动说明读数的原理。转动前两游标位置分别在  $A$  和  $A'$ ,转动后在  $B$  和  $B'$ ,从一个游标的两次读数之差可得弧  $\widehat{AB}$  所对应的转角,这个转角偏大,从另一个游标的两次读数之差可得弧  $\widehat{A'B'}$  所对应的转角,这个转角偏小,由平面几何容易证明

$$\frac{1}{2}(\widehat{AB} + \widehat{A'B'}) = \widehat{CD} = \widehat{C'D'}$$

这对应着真正的转角。

**【分析】** 此题是利用光学基本仪器——分光计测量光学元件基本参量的实验,也是比较传统的实验。在原理上要求考生能导出测量双棱镜玻璃折射率的公式,这是解题的关键,恰当地利用折射定律和某些近似关系,可以简化公式的推导过程,得出简明的结果。

此外还要求考生有较强的动手能力,熟练掌握分光计的调节与应用,在实验技巧上,要特别注意排除干扰,从棱镜反射像中把需要的像分辨出来。

**【解】** 一、实验原理

### 1. 双棱镜锐角的测量

测量原理及光路图见前面的提示卡。

### 2. 双棱镜玻璃的折射率 $n$ 的测量

实验原理如图 1-41 所示。设光线以入射角  $i$  入射到  $AB$  面上,先后经过  $AB$  面和  $AC$  面的折射而射出,其偏转角为  $\delta$ ,由图可得

$$\delta = (i - i_1) + (r - i_2) = (i + r) - (i_1 + i_2)$$

由折射定律  $n \sin i_1 = \sin i, n \sin i_2 = \sin r$ ,

又有几何关系  $180^\circ - \alpha = i_1 + i_2 = A$ 。

现在假设  $i$  很小,则近似有  $\sin i = i$ 。

本实验中  $A$  也很小,则  $r, i_1, i_2$  都很小,同样有近似关系

$$i = n i_1, r = n i_2$$

则  $\delta = (n - 1)(i_1 + i_2) = (n - 1)A$ 。

即这时偏转角与入射的小角度无关。本实验中在  $AB$  面上只要入射光束接近垂直入射,则测出其透射光束的偏转角  $\delta$  即可求出

$$n = 1 + \frac{\delta}{A}$$

## 二、实验步骤

### 1. 测量双棱镜的锐角

(1)将望远镜对着平行光管,调节望远镜使平行光管狭缝成像在望远镜的分划

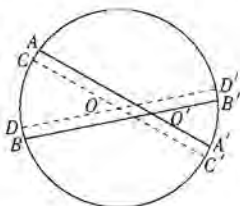


图 1-40 刻度盘中心  $O$  与分光计

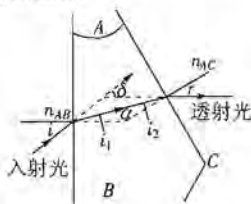


图 1-41



板上,并且无视差。

(2)将双棱镜放在载物台上(不再变其位置),如图 1-42 所示。令平行光管的光束以入射角  $I$  射向  $AB$  面,转动望远镜,直到能从望远镜中看到经  $AB$  面反射的光线成的狭缝像,用望远镜分板上十字叉丝对准狭缝像,固定望远镜的位置。从刻度盘上记下这时的读数  $\varphi_1$ 、 $\varphi_1'$ ,作为载物台(也即双棱镜)的第一个位置读数。

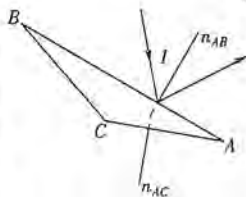


图 1-42

(3)固定望远镜不动,转动载物台(图 1-42 中逆时针),在望远镜中观察,当载物台转到图 1-43 中位置时,望远镜中可观察到经  $AC$  面反射的光所成的狭缝像,此时图 1-42 中的  $n_{AC}$  现在转到了原图 1-42 中  $n_{AB}$  的位置,载物台的转角即等于  $\alpha$ 。用望远镜分板上的十字叉丝对准狭缝像,记下刻度盘上读数  $\varphi_2$ 、 $\varphi_2'$  作为载物台第二个位置的读数。则  $\alpha$  角等于两个游标读出的转角的平均值,有

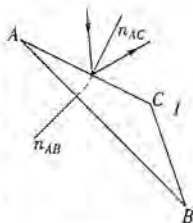


图 1-43

$$A = 180^\circ - \alpha.$$

说明:本实验步骤(2)与(3)中,在观察经  $AB$  面或  $AC$  面反射的光的像时会同时看到非预计光束所成的像构成干扰,测量时要排除干扰,正确选择应该测量的像。

(a)测  $AB$  面反射像时要排除的干扰

如图 1-44 所示,平行光束射向  $AB$  面,可产生三种“反射”的光束:当固定望远镜,转动载物台时,随着  $AB$  面的转动,望远镜中可陆续观察到三种反射光的像。①是经  $AB$  面直接反射的光束,它成的像很亮,这是我们应该测量的,而光束②和③是光束在  $AB$  面入射进入棱镜后,又分别经  $AC$  面和  $BC$  面反射再从  $AB$  面折射出来的光束,它们都是我们要排除的干扰。与①相比,这种光束损失的光能较多,成的像较暗。

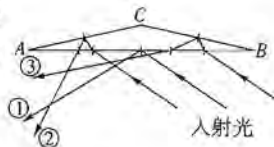


图 1-44

(b)测  $AC$  面反射像时要排除的干扰

在观察入射光从  $AC$  面的“反射”光束成像时,随着载物台的转动,在固定的望远镜中可陆续观察到 5 个狭缝像,2 个亮像,3 个暗像。暗像是经多次反射的像,应排除;2 个亮像中,我们要测量的是图 1-45 中的①所成的像。按上述实验步骤,应该是在观察到  $AB$  面直接反射的亮像后,转动载物台过程中先看到的第一个亮像。

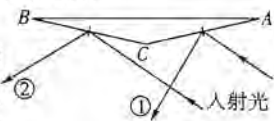


图 1-45

(4)重复上述步骤(1)、(2)、(3),测量 3 次。

## 2. 测双棱镜玻璃的折射率

(1)载物台上下放双棱镜,转动望远镜对着平行光管,调节望远镜以观测狭缝像,当十字叉丝对准狭缝像时记下望远镜位置刻度  $\theta_1$ 、 $\theta_1'$ 。

(2)将双棱镜放在载物台上,如图 1-46。目视判断  $AB$  面与平行光管垂直,转动

望远镜对准透过双棱镜的光束所成的狭缝像,记下此时望远镜位置读数  $\theta_2, \theta_2'$ 。根据实验原理可知

$$\delta = \frac{1}{2} [(\theta_2 - \theta_1) + (\theta_2' - \theta_1')].$$

(3) 重复以上步骤 3 次, 平均得  $\bar{\delta}$ , 计算  $n = 1 + \frac{\bar{\delta}}{A}$ 。

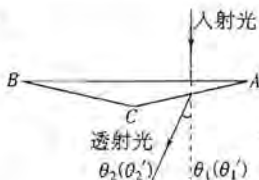


图 1-46

### 三、测量数据和计算结果

1. 测量双棱镜锐角的测量数据列在表 1 中。

表 1

	$\varphi_1$	$\varphi_1'$	$\varphi_2$	$\varphi_2'$ 过零点	$\alpha = \frac{1}{2} [(\varphi_2 - \varphi_1) + (360^\circ + \varphi_2' - \varphi_1')]$
1	$107^\circ 31'$	$287^\circ 31'$	$286^\circ 56'$	$106^\circ 59'$	$179^\circ 27'$
2	$110^\circ 12'$	$290^\circ 11'$	$289^\circ 35'$	$109^\circ 40'$	$179^\circ 26'$
3	$87^\circ 10'$	$267^\circ 8'$	$266^\circ 33'$	$86^\circ 35'$	$179^\circ 25'$

计算结果  $\bar{\alpha} = 179^\circ 26'$ ,  $A = 180^\circ - \bar{\alpha} = 34'$ 。

2. 测双棱镜玻璃折射率的测量数据列在表 2 中。

表 2

	$\theta_1$	$\theta_1'$	$\theta_2$	$\theta_2'$	$\delta = \frac{1}{2} [(\theta_2 - \theta_1) + (\theta_2' - \theta_1')]$
1	$236^\circ 24'$	$56^\circ 20'$	$236^\circ 40'$	$56^\circ 38'$	$17'$
2	$236^\circ 24'$	$56^\circ 20'$	$236^\circ 40'$	$56^\circ 38'$	$17'$
3	$236^\circ 23'$	$56^\circ 20'$	$236^\circ 40'$	$56^\circ 39'$	$18'$

$\bar{\delta} = 17'$ ,  $n = 1 + \frac{\bar{\delta}}{A} = 1.50$ 。

### 题 9 (2001 · 全国物理竞赛题)

#### 测量铜管的内径

【仪器和用具】物理天平 1 台, 盛有水的烧杯 1 个, 细线 1 小团, 给定长度的含蜡芯的铜管 1 根, 铜 (铜管材料) 1 小块, 蜡 (蜡芯材料) 1 小块, (已知水的密度  $\rho_0 = 1.00 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ )

【要求】利用所给仪器用具测量铜管内直径  $d$ 。

【分析】本题是流体静力称衡法的应用与拓展, 在物理实验中静力称衡法是常用的基本方法, 其巧妙之处在于把对体积的测量转换为对质量的测量, 从而把难以直接测准的量变为容易直接测准的量。

举一反三、灵活变通是重要的解题能力, 解本题就是要灵活运用静力称衡法。根据阿基米德原理, 导出求铜管内径的公式, 利用天平几次称衡所得结果, 即可求得铜管内径。

解本题还要知道水、铜和蜡的密度。水的密度为已知, 至于铜和蜡的密度, 可对铜块和蜡块实施静力称衡法而得到。





## 【解】 一、原理

利用天平把含蜡芯的铜管分别在空气中和在水中进行称量,根据称量结果可求得铜管内径。

设铜管长度为  $h$ , 内径为  $d$ , 蜡芯和铜管的总体积为  $V$ , 蜡芯体积为  $V'$ ; 铜的密度为  $\rho_1$ , 蜡的密度为  $\rho_2$ , 若用天平把含蜡芯的铜管在空气中称量, 平衡时砝码质量为  $m$ ; 在水中称量, 平衡时砝码质量为  $m'$ , 则有

$$\begin{aligned} m &= V'\rho_2 + (V - V')\rho_1 \\ &= V'(\rho_2 - \rho_1) + V\rho_1. \end{aligned}$$

因

$$V = \frac{m - m'}{\rho_0}, V' = \frac{1}{4}\pi d^2 h.$$

可得

$$m = \frac{1}{4}\pi d^2 h(\rho_2 - \rho_1) + \frac{m - m'}{\rho_0}\rho_1.$$

$$d = \sqrt{\frac{4[m(\rho_0 - \rho_1) + m'\rho_1]}{\pi\rho_0(\rho_2 - \rho_1)h}}. \quad (1)$$

## 二、实验步骤

1. 调节物理天平。

2. 利用所提供的小铜块和小蜡块分别测量铜的密度和蜡的密度  $\rho_1$ 、 $\rho_2$ 。

把小铜块在空气中和在水中称量, 得出平衡时砝码的质量分别为  $m_1$ 、 $m_2$ ; 把小蜡块在空气中称量, 得出平衡时砝码的质量为  $m_3$ ; 把小铜块与小蜡块捆在一起完全浸没于水中称量, 得出平衡时砝码质量为  $m_4$ , 则有

$$\rho_1 = \frac{m_1}{m_1 - m_2}\rho_0. \quad (2)$$

$$\rho_2 = \frac{m_3}{m_2 + m_3 - m_4}\rho_0. \quad (3)$$

3. 把含蜡芯的铜管在空气中和在水中称量, 得出平衡时砝码的质量分别为  $m$ 、 $m'$ , 代入公式①可求出  $d$ 。

## 三、数据记录及实验结果

铜管长度  $h = 8.12$  cm (实验所用铜管上标定了长度, 本次测量  $h = 8.12$  cm), 水的密度  $\rho_0 = 1.00$  g/cm<sup>3</sup>。

测量数据表

单位: g

数 次	项 目	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$m$	$m'$
		1	6.15	5.40	4.30	4.95	17.18
2		6.16	5.40	4.32	4.95	17.20	13.20
3		6.14	5.42	4.30	4.94	17.21	13.20
	平均值	6.15	5.41	4.30	4.95	17.20	13.19



实验结果:

(1) 铜的密度

$$\begin{aligned}\bar{\rho}_1 &= \frac{\bar{m}_1}{\bar{m}_1 - \bar{m}_2} \cdot \rho_0 = \frac{6.15}{6.15 - 5.41} \times 1.00 \text{ g/cm}^3 \\ &= \frac{6.15}{0.74} \times 1.00 \text{ g/cm}^3 = 8.31 \text{ g/cm}^3.\end{aligned}$$

(2) 蜡的密度

$$\begin{aligned}\bar{\rho}_2 &= \frac{\bar{m}_3}{\bar{m}_2 + \bar{m}_3 - \bar{m}_4} \cdot \rho_0 = \frac{4.30}{5.41 + 4.30 - 4.95} \times 1.00 \text{ g/cm}^3 \\ &= 0.90 \text{ g/cm}^3.\end{aligned}$$

(3) 铜管内直径

$$d = \sqrt{\frac{4[\bar{m}(\rho_0 - \rho_1)] + \bar{m}' \cdot \rho_1}{\pi h \rho_0 (\rho_2 - \rho_1)}} = \sqrt{\frac{4(-125.73 + 109.61)}{-188.93}} \text{ cm} = 0.59 \text{ cm}.$$

题 10 (2001·全国物理决赛题)

测量平行光管中透镜  $L_c$  的焦距

[仪器和用具]待测的已调好的平行光管 1 个(由一狭缝与凸透镜  $L_c$  组成,狭缝位于  $L_c$  的焦平面上),给定焦距的透镜  $L_1$  个,测微目镜 1 个,光源 1 套,白屏 1 个,独立的可调支架 5 个,各用具都装在独立的可调支架上.

[要求]不拆开平行光管,利用以上仪器用具测量平行光管的透镜  $L_c$  的焦距  $f_c$ .

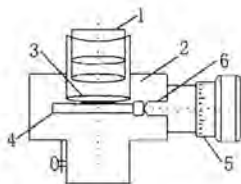
[说明]关于测微目镜及其使用,见测微目镜使用说明书.

测微目镜使用说明书

1. 结构

测微目镜又称测微头,一般作为光学仪器中的一个部件,用于测量光学系统所形成的空气中实像的大小.它的量程较小,但准确度较高,其结构如图 1-47 所示.

测微目镜本体上装一有目镜的镜筒,并有一固定的刻线玻璃标尺.在紧靠该尺处平行地装一块可移动的分划板,分划板由薄玻璃片制成,其上刻有“十”字叉丝和一组双线.移动目镜镜筒可调节目镜与分划板的间距,使人眼贴近目镜筒观察时,能看清楚分划板上的叉丝和双线,同时也能看清楚标尺上刻线(如图 1-48).旋转读数鼓轮可使分划板左右移动,以便利用叉丝及双线对准待测目标上的标志线进行位置读数(读数方法与螺旋测微器相似,但整数部分在分划板上读出,读数举例如图 1-49 所示).



1—目镜 2—本体盒  
3—玻璃标尺 4—分划板  
5—读数鼓轮 6—丝杆

图 1-47



图 1-48

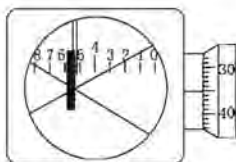


图 1-49

主尺:5;鼓轮:0.356;读数:5.356

## 2. 使用方法

测量时,先调节目镜与分划板的间距,直到观察者能看清楚分划板上叉丝为止,然后再调整整个测微目镜与被测实像(测量目标)的间距(简称调焦),使在视场中看到被测的像与分划板上叉丝同样清晰.这就是要调节到被测实像与分划板上叉丝位于同一平面上.为此必须仔细调节到叉丝像与被测像无视差为止,这是指当左右或上下稍微改变视线方向时,观察到的两个像之间没有相对移动.还要注意在测量中,只能沿着同一方向移动分划板,依次对目标上标志线位置进行读数.

因为不能把真实物体放到分划板所在平面上,所以,测微目镜不能用来直接观测物体.

**【分析】**解本题要灵活运用透镜成像关系,例如透镜成像公式、放大率公式.本题待测物体为平行光管,顾名思义,它是产生平行光的仪器,由一狭缝与一个凸透镜组成,狭缝在透镜的焦平面上.抓住这种仪器的结构特点,利用辅助透镜  $L$  和测微目镜——测量物体像长的仪器,则可找出本题的解法.

解题时,只要巧妙地将平行光管颠倒一下(一次狭缝在后,透镜在前;另一次狭缝在前,透镜在后),就会迎刃而解.这个突破口正是解本题的关键.

**【解】** 一、原理及图示1. 测平行光管狭缝宽度  $d$ 

仪器布置如图 1-50,光源放在左侧,使光通过  $L_c$  照亮狭缝.固定平行光管与白屏的位置,使狭缝与白屏之间距离  $l$  略大于  $4f$ ,透镜  $L$  位于狭缝与白屏之间.在上述布置下透镜  $L$  有两个位置可使狭缝成像于屏上.光路分别如图 1-51 和图 1-52.

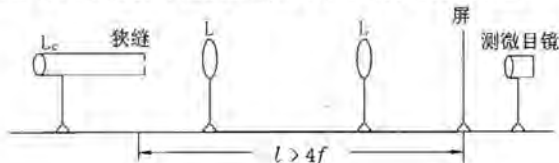


图 1-50

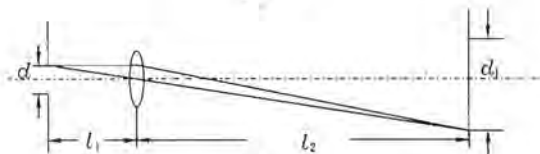


图 1-51

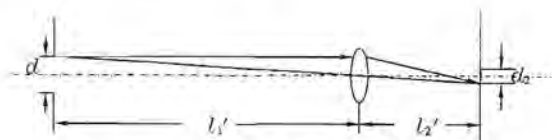


图 1-52

由透镜成像关系有

$$\frac{d_1}{d} = \frac{l_2}{l_1}, \frac{d_2}{d} = \frac{l_2'}{l_1'}$$

又有

$$l_1 = l_2', l_2 = l_1'$$

可得

$$d = \sqrt{d_1 d_2}$$

①

利用测微目镜测出  $d_1$ 、 $d_2$ ，可得狭缝宽度  $d$ 。

## 2. 测量平行光管中透镜 $L_c$ 的焦距

仪器布置如图 1-53，使由左侧光源照亮的狭缝通过  $L_c$  与  $L$  成像在白屏上。光路如图 1-54。



图 1-53

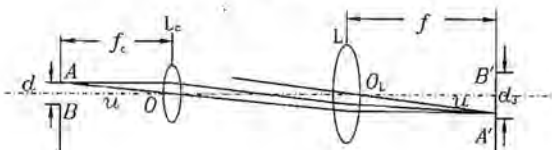


图 1-54

狭缝边缘  $A$  的光线经透镜  $L_c$  后成为平行光，其方向沿通过  $L_c$  中心  $O$  的光线  $AO$ 。若这些光线经透镜  $L$  后成像于屏上，则屏必定位于透镜  $L$  的焦平面上。过透镜  $L$  中心  $O_L$ ，作平行于  $AO$  的辅助线  $O_L A'$  交屏于  $A'$ ， $A'$  即为狭缝边缘  $A$  的像点。同理，可得狭缝边缘  $B$  的像点  $B'$ 。由图 1-54 可得

$$\tan u = \frac{1}{2} \frac{d}{f_c} = \frac{1}{2} \frac{d_3}{f}$$

$$f_c = \frac{d}{d_3} f$$

②

测出  $d_3$ ，并利用由①式得出的  $d$ ，即可得  $L_c$  的焦距  $f_c$ 。

## 二、测量步骤

1. 按图 1-50 布置仪器，根据白屏上成像情况进行等高同轴调整。



2. 调节测微目镜,直到能看清楚分划板上的叉丝为止。
3. 移去白屏,移动测微目镜使狭缝成像在测微目镜分划板上。调节平行光管与测微目镜相对于其轴线的方位,使狭缝像长度方向与分划板移动方向垂直。
4. 反复微移透镜 L 的位置,消除视差,在测微目镜中测  $d_1$ ; 不改变目镜位置重复测  $d_1$  3 次。
5. 不改变目镜位置,移动透镜 L 至另一位置,使在目镜中能看清狭缝的像,按照步骤 4 的方法测  $d_2$  3 次。
6. 按图 1-53 布置仪器,移动 L 或屏的位置,使在屏上恰可看到狭缝的像。
7. 按照步骤 3、4 的方法,测  $d_3$  3 次。

三、数据及结果( $d_{1左}$ 、 $d_{1右}$  分别表示狭缝像的两个边缘的位置读数)

表 1  $d_1$ 、 $d_2$  测量数据 单位: mm

数 次	项 目	$d_1$		$d_2$	
		$d_{1左}$	$d_{1右}$	$d_{2左}$	$d_{2右}$
1		4.380	5.000	3.632	5.416
2		4.400	5.010	3.630	5.413
3		4.390	5.000	3.630	5.415
	平均值	4.390	5.003	3.631	5.416

$$d_1 = \overline{d_{1右}} - \overline{d_{1左}} = 0.613 \text{ mm.}$$

$$d_2 = \overline{d_{2右}} - \overline{d_{2左}} = 1.785 \text{ mm.}$$

狭缝宽度

$$d = \sqrt{d_1 d_2} = 1.05 \text{ mm.}$$

表 2  $d_3$  数据  $f = 10.94 \text{ cm}$

数 次	项 目	$d_3$	
		$d_{3左}/\text{mm}$	$d_{3右}/\text{mm}$
1		4.420	5.096
2		4.450	5.116
3		4.430	5.100
	平均值	4.433	5.104

$$d_3 = \overline{d_{3右}} - \overline{d_{3左}} = 0.671 \text{ mm,}$$

焦距

$$f_c = \frac{d}{d_3} f = 17.1 \text{ mm.}$$



## 题 11 (2008·亚洲物理竞赛题)

## 声波的物理学

## 1. 引言

波的研究在物理学中占有重要地位,虽然声波和各种声现象广泛存在于日常生活中,但在中学和大学教学中相对涉及较少。因此,借助超声相关的实验来考查学生对与波相关的基本物理概念的掌握和分析问题能力是不错的选择。2008年4月在蒙古国首都乌兰巴托举行的“第9届亚洲物理奥林匹克竞赛”的实验试题就是“声波的物理”。

试题共分4个部分:(1)超声换能器特性测量;(2)超声干涉现象观测和解释;(3)超声的多普勒效应研究;(4)闻闻和人耳音频分辨本领确定。

## 2. 实验装置

考场提供的仪器和器材见图1-55,并由表1给予说明。

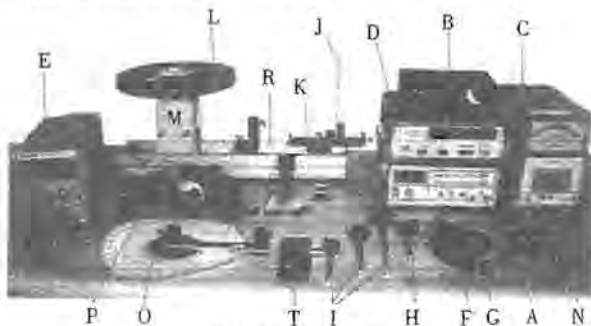


图1-55 实验装置

表1 仪器和器材清单

编号	名称(内容)	数量	编号	名称(内容)	数量
A	函数发生器	1	J	金属反射镜	1
B	放大/转接器	1	K	带游标尺的磁性反射镜支架	1
C	交流毫伏计	1	L	转盘	1
D	频率计	1	M	固定在导轨上的电机	1
E	可调直流电源	1	N	同轴电缆连接线	4
F	超声发射器(红标签)	1	O	带纸质量角器的可转动支架(测角仪)	1
G	超声探测器(蓝标签)	1	P	立体声耳机	1
H	超声发射器支架	1	R	导轨	1
I	超声探测器支架	1	T	可调电阻	1

## 3. 实验内容

## 3.1 压电换能器的特性测量



当晶体发生形变时,其内会产生电场;反过来,在其内加电场后晶体会发生形变,这被称为压电现象,利用压电性质可以方便地实现机械振动和电信号间的相互转换。然而,压电器件的工作频率区间较窄,在使用前要先测定它们频率特性。

实验中使用了2个压电换能器,一个作为超声发射器,另一个作为超声探测器。发射器接收从函数发生器发出并经过放大的电信号,将其转换为声波。探测器将接收到的声波转换为电信号,经前置放大器放大后再由交流毫伏计测量。

(1)测量压电换能器系统工作频率:合理放置发射器和探测器,在30 kHz~50 kHz内改变函数发生器的频率,记录交流毫伏计读数随频率变化,并作图。求出毫伏计读数下降到其最大值 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时所对应的2个截止频率 $f_1$ 和 $f_2$ 及带宽 $\Delta f=f_2-f_1$ 。根据测量结果确定工作频率 $f_w$ 。

(2)测量超声发射的角分布:将函数发生器输出信号频率设为工作频率,考察探测器输出信号幅度对探测器与源间夹角的依赖关系,并分别给出探测器输出信号幅度降至最大值的 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$ 时的角度值。画出振幅比 $\frac{A(\varphi)}{A(0)}$ 随角度 $\varphi$ 的变化图,这里 $A(\varphi)$ 和 $A(0)$ 分别是角度为 $\varphi$ 和 $0^\circ$ 时的输出信号幅度。 $\varphi=0^\circ$ 时,探测器的输出值最大,被称作源的轴向。

### 3.2 声波的干涉

振幅相等、传播方向相反的入射波与反射波相干会形成驻波。介质中因2束波相干而不产生任何振动位移的点被称为波节,振幅最大的点被称为波腹。

如图1-56所示,探测器位置A在源与反射镜之间,探测器位置B在源之后,图中S、M和D分别表示超声源、反射镜和探测器。

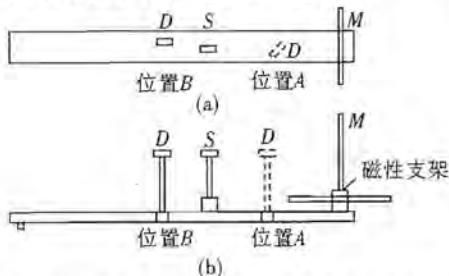


图1-56 波的干涉的研究(装置的俯视图和侧视图)

(1)超声干涉研究:使用所给器材,按图1-56搭建实验装置,并用来研究超声的干涉。超声发射器的工作频率设定为40 kHz。

a. 分别按A和B两种方式安放探测器,考察探测到的信号大小与超声源S、反射镜M和探测器D位置间的关系。

b. 将探测器安放在发射器和反射镜之间,固定S和D的位置,通过移动M,由实验确定超声波的波长。

(2)用实验的方法确定下面的陈述是否正确。



- a. 无论  $S$  与  $M$  间距离多大, 在  $S$  和  $M$  之间都能观测到驻波.
- b. 只有当  $S$  与  $M$  的间距为  $\frac{n\lambda}{2}$  时, 才能在  $S$  和  $M$  之间观测到驻波, 此处  $n$  为整数.
- c. 按  $A$  和  $B$  两种方式放置探测器, 都能测到驻波的波节与波腹. 这可以通过改变  $S$  和  $M$  的位置来证明.
- d. 无论  $S$  和  $M$  之间的距离多大都能产生驻波, 这可通过改变  $D$  的位置从实验上观察到. 对探测器置于源后的情况, 当  $S$  和  $M$  之间的距离为  $\frac{\lambda}{4}$  的奇数倍时, 探测到的信号幅度将会较大.
- e. 当  $S$  和  $M$  移动时, 波节和波腹相对于导轨的位置不会移动.
- f. 随着  $S$  和  $M$  的间距增加, 按在位置  $B$  测到的反射波信号幅度将会振荡衰减.
- g. 驻波只出现在  $S$  和  $M$  之间, 但在源的后面, 也可以探测到反射波.

(3) 将探测器置于发射器后. 如果移动反射镜, 探测器探测到的信号将会出现极大和极小. 在这 2 种情况下, 鉴别反射镜表面和超声发射器前端处是波腹还是波节.

### 3.3 多普勒效应

观测到的信号频率随源和观测者之间相对运动而变化的现象被称为多普勒效应.

观测到的频率由下面的公式给出:

$$f = f_0 \frac{c - v_D}{c + v_S} \quad (1)$$

源与探测器离开对方运动时速度取正值,  $f_0$  是由源发出的声波频率,  $c$  是声音在空气中的速率,  $v_D$  和  $v_S$  分别是探测器和声源相对于介质的速度.

适当放置超声反射器和探测器以使超声波照到转盘的侧沿上, 并使反射波能被很好地探测到. 将函数发生器的输出信号频率设定为工作频率或 40 kHz. 打开驱动转盘的电机, 缓慢增大加在电机上的电压, 观察声音频率的变化.

(1) 推导多普勒频移的公式: 由超声发射器发出的声波被转盘上的锯齿反射后会产生多普勒效应. 转盘和锯齿的几何关系由图 1-57 给出. 将锯齿沿  $R$  方向的移动速度记为  $v$  (向圆心方向运动取正值), 写出用  $f_0$ ,  $c$  及  $v$  表示的  $f$  的表达式. 在实验中, 应使入射角和反射角都小于  $5^\circ$ , 这样多普勒效应对角度的依赖关系可以忽略.

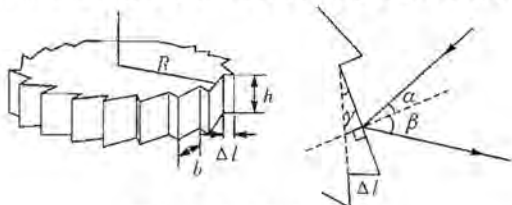


图 1-57 转盘侧沿上的锯齿



由上面得到的表达式,采用记号  $\Delta f = |f - f_0|$  ( $f_0$  是工作频率),在  $v \ll c$  的情况下,写出  $\frac{\Delta f}{f_0}$  的简化公式,并表示成  $\frac{v}{c}$  的函数。

(2) 转盘引起的多普勒效应的计算:导出锯齿中点的径向速度随盘转动的角速度  $\omega$  和  $\Delta l$  变化的公式,在做进一步计算时,锯齿的高度定为  $\Delta l = (4.37 \pm 0.05) \text{ mm}$ 。

(3) 多普勒效应与电机电压的关系:测量探测器接收到的声波频率与加在电机上的电压  $U$  的关系,做  $\frac{\Delta f}{f_0} - U$  关系图,由图中  $U$  值较大时对应的部分外推至  $\frac{\Delta f}{f_0} = 0$ ,从而定出转盘开始转动时的阈值电压  $U_0$ 、直线斜率及斜率的测量误差。

(4) 确定  $\Omega$  对  $U$  的依赖关系:考场提供的电机参数只给出了一个特定电压下的电机转速,请借用此数据来计算所需结果,假定在较高的电压下,  $\Omega$  近似地正比于加在马达上的电压。

(5) 由多普勒效应确定空气的声速:同时考虑  $\frac{|\Delta f|}{f_0}$  与  $v$  和  $\frac{|\Delta f|}{f_0}$  与  $U$  的关系,由实验结果求出空气的声速,利用考场给出的音速理论值,计算实验结果的相对偏差。

### 3.4 闻阈与人耳音频分辨本领

闻阈是我们刚好能够听到的最小声音强度(以  $\text{W}/\text{m}^2$  为单位量度)。闻阈与声音的频率有关,在  $2000 \text{ Hz}$  附近闻阈为  $I_0 = 10^{-12} \text{ W}/\text{m}^2$ 。对数值  $\lg \frac{I}{I_0}$  称作声强级(SIL),其单位为贝尔(Bell),简写为 B。实验上采用  $10 \text{ SIL} = 10 \lg \frac{I}{I_0}$  更为方便,其单位为分贝(decibel)或简写为 dB。

按照图 1-58 连接实验装置,打开交流毫伏计与函数发生器的电源开关,将函数发生器输出幅度调节旋钮置于中间位置。

(1) 测定自身可听到的最低频率  $f_1$  及最高频率  $f_h$ 。

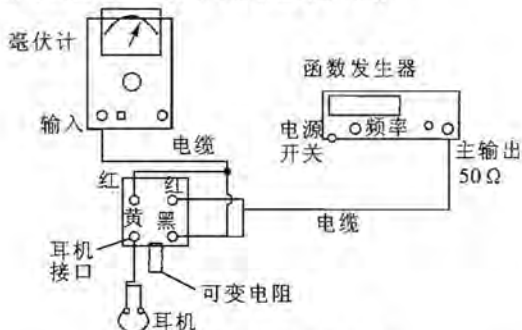


图 1-58 听觉实验连线示意图

(2) 测定最佳听觉频率范围:逐步降低音量,每次降低音量,都要测定  $f_1$  及  $f_h$ 。



找到所能听到的最低音量的频率区间,其下限记为  $f_{th1}$ ,上限记为  $f_{th2}$ .这 2 个频率的平均值即为最灵敏听觉频率,即

$$f_{th} = \frac{f_{th1} + f_{th2}}{2}.$$

(3)人耳的音频分辨本领( $R$ ):人耳的音频分辨能力是指分辨 2 个频率相近的声音的能力.将函数发生器的频率设定为  $f_{th}$ ,调整音量使耳机听到的声音最舒适.少量改变声音频率,如果分辨不出此频率声音与频率为  $f_{th}$  的声音的差别,则稍稍增大频率的改变量,直到一个恰与  $f_{th}$  能分辨的频率.此频率与  $f_{th}$  之差即为人耳在频率  $f_{th}$  的最小可分辨频率.测量最小可分辨频率( $\Delta f$ )并计算音频分辨本

$$R = \frac{f}{\Delta f}.$$

(4)对上述频率,给出能使人耳感知到多普勒效应的最低反射镜移动速率.用下式计算反射镜的最低移动速率及其误差:

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{2v}{c}. \quad (2)$$

式中, $c=343 \text{ m/s}$ ,为  $20^\circ\text{C}$  时在声频范围的空气中声速.

**【分析】** 此题风格与近年来国际物理奥赛类似,即注重考查学生学习新知识的能力.此题基本上不需要学生构思实验方案,主要看学生按要求完成不熟悉领域的实验任务的能力,即带有一定的探索性.

此题属于超声范畴,主要涉及超声的产生与特性.此题试图借助超声相关的实验来考查学生对波的概念的掌握,以及分析问题的能力.另一方面,虽然关于声现象在中学物理课中涉及较少,但学生只要对波有清晰的概念,那么,也不难解答此题.

### 【解】

#### 4.1 超声换能器特性测量

测角仪 O 已被固定在实验台上.分别将超声发射器支架 H 和探测器支架 I(高度合适的一个)插入测角仪转轴和转臂上的插孔.分别将发射器 F 和探测器 G 放入对应的支架,调整它们的位置,使其共轴.为使测角仪的示数正确,还要保证发射器的前端位于转轴中心.按图 1-59 接线,并将函数发生器的输出幅度调为  $1 \text{ V}$  左右.

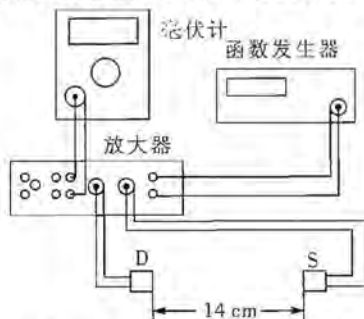


图 1-59 换能器特性测量接线示意图



(1)在 40 kHz 频率附近测量毫伏计读数与函数发生器输出频率间的关系,将结果记入表 2.

表 2 毫伏计读数  $U$  与超声频率  $f$  间的关系

$f/\text{Hz}$	$U/\text{mV}$	$U/U_{\max}$	$f/\text{Hz}$	$U/\text{mV}$	$U/U_{\max}$
38 600	155	0.169	40 020	910	0.993
39 000	245	0.267	40 100	885	0.966
39 400	470	0.513	40 200	820	0.895
39 600	630	0.688	40 400	660	0.721
39 800	830	0.906	40 600	470	0.513
39 850	865	0.944	40 800	300	0.328
39 900	895	0.977	41 000	205	0.224
39 960	914	0.998	41 200	144	0.157
39 980	916	1.000	41 300	125	0.136
40 000	915	0.999	41 400	110	0.120

图 1-60 为得到的换能器系统频响曲线,其极大值对应频率为 39.98 kHz,与  $\frac{U}{U_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  的两交点分别对应截止频率  $f_1 = (39.62 \pm 0.01)\text{kHz}$  和  $f_2 = (40.41 \pm 0.01)\text{kHz}$ . 由此得换能器系统的工作频率  $f_w = (39.98 \pm 0.01)\text{kHz}$ , 带宽  $\Delta f = f_2 - f_1 = (0.79 \pm 0.02)\text{kHz}$ .

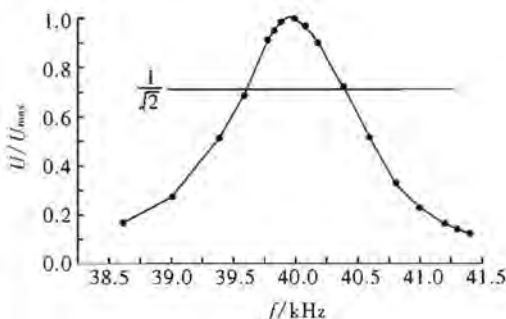


图 1-60 超声换能器系统的频率特性

虽说此部分内容非常基础,也还有几点要注意. 首先,既要使信号足够强又不能出现饱和现象. 考题中指明了不要动放大器增益,所以这要靠调节函数发生器输出幅度来保证. 在 40 kHz 频率下,如轻微增加函数发生器输出信号幅度,毫伏计读

数也有明显增加,则说明未达到饱和。其次,题中提到测量范围是 30 kHz~50 kHz,但实际有意义的区域是 39 kHz~41 kHz。在很多考试中都要求数据要覆盖所给的整个测量范围,因此,如何布点就需要注意。这里除在曲线变化陡峭之处和中心频率附近要加密取点外,其他区域的数据点间隔可以取 1 kHz 甚至更大。第三,频率的测量精度是非常高的,可以达到 1 Hz,这在表 2 中要反映出来。工作频率和截止频率的测量误差实际是由毫伏计读数引起的,这也可以由实验测得。改变频率,监视毫伏计读数,恰好能使毫伏计读出变化的频率差就是待测特征频率的不确定度。作图也要和测量精度匹配,如果作图时横轴取值范围是 30 kHz~50 kHz,则由于坐标纸最小刻度的限制,结果的不确定度会加大约 5 倍。因此,在作图时横轴的范围应该是 39 kHz~41 kHz。带宽  $\Delta f$  的不确定度取 0.01 kHz 和 0.02 kHz 均可接受。由于电脑绘图的原因,图 1-60 中曲线是连接实验点的折线,是不对的。最后要指出,这里频响曲线是整个系统的,而不仅仅是探测器或发生器的。

(2)先将测角仪转臂固定在零度角位置,仔细调整发射器方向使接收到的信号最强,然后开始测量不同角度下的信号强度。表 3 和图 1-61 是赛会提供的标准数据。

表 3 信号强度  $U$  与发射角  $\varphi$  间的关系

$\varphi/(^{\circ})$	$U/\text{mV}$	$U/U_{\text{max}}$	$\varphi/(^{\circ})$	$U/\text{mV}$	$U/U_{\text{max}}$
0	300	1.00	250	30	0.10
10	280	0.93	260	33	0.11
20	260	0.87	270	32	0.11
30	200	0.67	280	52	0.17
40	150	0.50	290	65	0.22
50	120	0.40	300	100	0.33
60	100	0.33	310	120	0.40
70	68	0.23	320	150	0.50
80	50	0.17	330	200	0.67
90	30	0.10	340	260	0.87
100	30	0.10	350	280	0.93
110	30	0.10	360	300	1.00

从表 3 和图 1-61 可以看出,当探测器的角位置为  $40^{\circ}\pm 2^{\circ}$  和  $320^{\circ}\pm 2^{\circ}$  时,信号强度降至极大值的一半;当探测器的角位置为  $60^{\circ}\pm 2^{\circ}$  和  $300^{\circ}\pm 2^{\circ}$  时,信号强度降至极大值的  $\frac{1}{3}$ 。

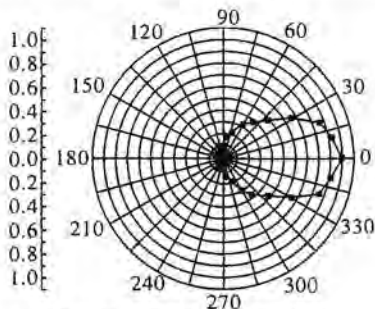


图 1-61 超声发射强度角分布

测角仪的读数误差为  $1^\circ$ , 毫伏计的误差为  $2\text{ mV}$ , 在  $40^\circ$  和  $60^\circ$  附近折合误差约为  $1^\circ$ , 故总不确定度取为  $2^\circ$ . 偏心误差约为  $0.2^\circ$ , 可以忽略.

参赛的 8 名中国学生此部分的测量结果差别很大, 估计是发射器放置位置引起的. 如果发生器前端没有放在正确的位置, 源与探测器间的距离在测量过程不再是常数, 偏心误差会非常大, 更重要的是支架会遮挡发射器发出的超声使测到的角分布曲线严重变形.

#### 4.2 超声干涉研究

(1) 按图 1-56 将探测器放置在超声源和反射镜之间. 改变反射镜位置, 驻波的波腹和波节会交替通过探测器, 使测到的信号强度发生周期性强弱变化. 表 4 给出探测器测到一系列波节时反射镜的位置. 表中  $N$  为序号,  $X$  为反射镜位置.

表 4 波长测定

$N$	$X/\text{mm}$	$N$	$X/\text{mm}$
0	29.50	10	73.00
1	34.50	11	77.60
2	38.50	12	81.50
3	42.50	13	86.00
4	47.50	14	90.00
5	51.50	15	94.50
6	56.00	16	99.20
7	60.50	17	103.00
8	64.50	18	108.00
9	69.00		

图 1-62 基本为直线, 其斜率就是半波长. 线性拟合得到的超声波波长为  $(8.63$



±0.02)mm. 这里反射镜位置由螺旋测微计测量, 误差可以忽略. 0.02 mm 的误差是由相关系数算得的.

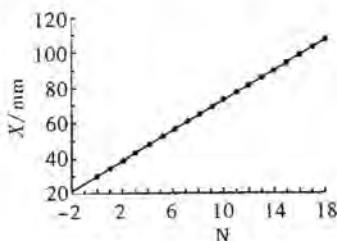


图 1-62 波长测定

(2) 超声干涉实验研究: 超声干涉实验的答案见表 5.

表 5 超声干涉实验答案

a	b	c	d	e	f	g
✓	✗	✗	✗*	✗	✓	✓

注: \* 赛会的答案是 ✓.

此处的几个陈述如果直接根据理论知识来判断并不太难. 但如果要完全通过实验观察来得到结论就不容易了. 探测器的直径约为 1 cm, 当发射器与反射镜间距小于此值时, 实际上并不能判定 S 与 M 间是否存在驻波. 所以 a 的答案更多的是根据理论给出的. 如果 a 正确, 则 b 一定是错的. c 也显然是错的, 因为当探测器不在 S 与 M 之间时, 只能探测到沿一个方向的行波. 由于周围物体反射的影响, 探测器在发射器后的不同位置测到的信号强度可能也会有起伏, 如果改变 M 的位置信号也会发生强弱变化, 但并不能因此说在发射器后也存在驻波.

赛会给的标准答案认为陈述 d 是正确的. 如果仔细分析, 会发现并非如此. 当距离为  $\frac{\lambda}{4}$  的偶数倍和奇数倍时, S 与 M 间的驻波形式如图 1-63 所示. 超声发射器声源的振幅由发射器性质和激励电流大小决定, 与和 M 间距离无关, 设其为 A. 不妨将 S 和 M 间的振动看成是向左、右 2 个方向传播的平面波的叠加. 设向右传播的波的振幅为  $A_R$ , 向左传播的波的振幅为  $A_L$ . 对图 1-63(a) 的情况, 发射器声源处的边界条件为  $A = A_R - A_L$ , 在 M 处的边界条件为  $A_R \approx A_L$ , 所以有  $A_L \approx A_R \gg A$ . 对图 1-63(b) 的情况, 发射器声源处的边界条件为  $A = A_R + A_L$ , 在 M 处的边界条件依然为  $A_R \approx A_L$ , 于是有  $A_L \approx A_R \approx \frac{A}{2}$ . 实际上, 由于超声发射器发出的并不是平面波, 再加上其他耗散,  $A_L$  与 A 间的比率会与上面分析有一定差距. 但图 1-63(a) 情况下反射回的波振幅最大, 图 1-63(b) 情况下反射波的振幅最小的结论不会变. 当 D 放在 S 之后时测得的信号与反射波振幅正相关, 所以应是图 1-63(b) 情况下, 即 S 与 M 距离为  $\frac{\lambda}{4}$  的偶数倍时测得的信号最强. 从实验上讲, 还有一个问题, 就是



超声发射器的有效声源位置并不就是前端护网的位置(有2~4 mm的不确定度),而且反射镜的绝对位置也很难定准(螺旋测微计与声源距离有1 mm不确定度,反射镜相对于螺旋测微计又有1 mm的不确定度).这样,实验精度实际上并不足以区分声源与反射镜的距离究竟是 $\frac{\lambda}{4}$ 的偶数倍还是奇数倍.

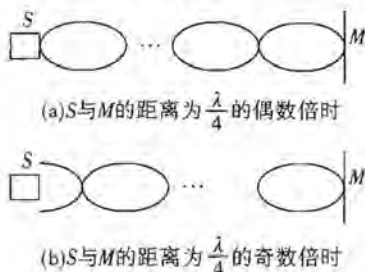


图 1-63 陈述 d 的示意图

陈述 e 明显是错误的.从对图 1-63 的讨论知,陈述 f 和陈述 g 都是正确的.

(3) 赛会给的标准答案如表 6 所示.

表 6 标准答案

探测器测到信号	反射镜表面	超声发生器前端
最强	波节	波节(赛会答案为波腹)
最弱	波节	波腹(赛会答案为波节)

反射镜表面处振幅始终应该为零,因此应是波节.但对超声发射器前端(假定就是实际声源位置)处的振动情况,我们的答案再次与赛会提供的相反,具体原因见前面对图 1-63 的讨论.

#### 4.3 多普勒效应

按图 1-64 放置超声发射器和探测器,使它们的轴向与转盘侧沿法线近似在同一平面上,使入射角和反射角尽可能小,且接收到的反射信号尽可能强和稳定.

(1) 公式推导:这里计算多普勒效应时可以分两步处理.

a. 将转盘侧沿(相当于反射镜)当成相对于声源退行的接收器,即式①中 $v_S = 0$ , $v_D = v$ .于是由式①可得反射镜处的频率 $f' = f_0 \frac{c-v}{c}$ .

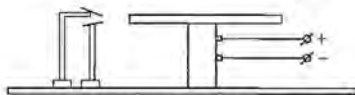


图 1-64 发射器、探测器和转盘间的几何关系

b. 将反射镜当成频率为 $f'$ ,以速度 $v$ 远离探测器运动的声源.于是根据式①容易得到探测器接收到的频率为

$$f'' = f' \frac{c}{c+v} = f_0 \frac{c-v}{c+v} \quad (3)$$

频移为

$$\Delta f = f_0 - f = f_0 \left( 1 - \frac{c-v}{c+v} \right) = \frac{2v}{c+v} f_0. \quad (4)$$

当  $v \ll c$  时,

$$\Delta f \approx \frac{2v}{c} f_0. \quad (5)$$

(2) 转盘侧壁向心速度  $v$  的推导: 设转盘的锯齿数为  $N$  (实际上可以数得  $N=36$ ), 有

$$v = \frac{N \Delta l \omega}{2\pi}. \quad (6)$$

(3) 频移与电机电压关系: 逐步增大加在电机上的电压, 测量接收器输出的信号频率, 数据见表 7. 电机顺时针转动, 工作频率为  $f_0=40\,000\text{ Hz}$ .

表 7 频移与电机电压间的关系

No.	$U/\text{V}$	$f/\text{Hz}$	$\Delta f/\text{Hz}$	$\frac{100\Delta f}{f_0}$
1	16.00	38 705	1 295	3.238
2	15.00	38 772	1 228	3.070
3	14.00	38 853	1 147	2.868
4	13.00	38 915	1 085	2.713
5	12.00	38 997	1 003	2.508
6	11.00	39 081	919	2.298
7	10.00	39 154	846	2.115
8	9.00	39 249	751	1.878
9	8.00	39 339	661	1.653
10	7.00	39 418	582	1.455
11	6.50	39 473	527	1.318
12	6.00	39 500	500	1.250
13	5.50	39 549	451	1.128
14	5.00	39 583	417	1.043
15	4.50	39 630	370	0.925
16	4.00	39 674	326	0.815
17	3.50	39 723	277	0.693



18	3.00	39 758	242	0.605
19	2.50	39 800	200	0.500
20	2.00	39 847	153	0.383
21	1.50	39 887	113	0.283

图 1-65 为由表 7 得到的相对频移与电机电压关系图。通过线性拟合(去掉明显偏离线性的数据)可以得到转盘刚开始转动时的阈值电压  $U_1 = (0.17 \pm 0.03) \text{V}$ 。直线的斜率为  $k_1 = (2.12 \pm 0.01) \times 10^{-3} \text{V}^{-1}$ 。

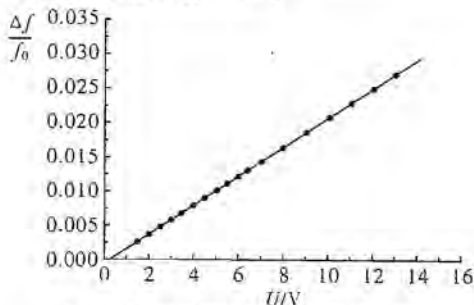


图 1-65 相对频移与电机电压的关系

考场给出当  $U = (11.0 \pm 0.1) \text{V}$  时, 电机转速为  $\delta = (1\,525 \pm 5) \text{r/min}$ 。由此可得  $\delta \cdot U$  的斜率为  $k_2 = (140 \pm 2) \text{r} \cdot \text{min}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$ 。由  $\frac{f_0 - f}{f_0} = \frac{2v}{c}$ ,  $\frac{f_0 - f}{f_0} = k_1 (U - U_1)$  和  $v = 36 \Delta k_2 (U - U_1)$  容易得到

$$c = \frac{72 k_2 \Delta l}{k_1} \quad (7)$$

将各物理量的数值代入⑦式, 并作误差合成计算得  $c = (349 \pm 7) \text{m/s}$ ,  $c$  的标准值为  $343 \text{m/s}$ 。由此算出测量的相对偏差  $E_r = \frac{6}{343} \times 100\% \approx 2\%$ 。

在作线性拟合时有横轴变量误差可忽略的假设。因此, 对图 1-65 作  $U = a + b \frac{\Delta f}{f_0}$  形式的线性拟合更合理。拟合时应采用线性关系较好的数据。

#### 4.4 闻阈与音频分辨本领测量结果

此部分的结果因人而异,  $f_1$  在  $16 \sim 50 \text{Hz}$ ,  $f_h$  在  $15 \sim 20 \text{kHz}$ ,  $f_{n1}$  在  $800 \sim 1\,200 \text{Hz}$ ,  $f_{n2}$  在  $3\,500 \sim 4\,500 \text{Hz}$ ,  $f_n$  在  $2\,000 \sim 3\,000 \text{Hz}$  都是可接受的。在  $2.5 \text{kHz}$  附近一般人大致能区分  $5 \sim 9 \text{Hz}$  的频率差, 频率分辨本领在  $300 \sim 500$  左右, 但琴师的分辨本领可达到  $1\,000$ 。设在  $2\,500 \text{Hz}$  处能分辨  $(5 \pm 1) \text{Hz}$ , 可得分辨本领为  $(5 \pm 1) \times 100$ 。由式②知, 要能用人耳分辨出多普勒反射镜的最低移动速度应为

$$v = \frac{\Delta f}{2 f_0} c \quad (8)$$



$$v = (0.34 \pm 0.7) \text{ m/s.}$$

在测分辨本领时需要注意的是,要让频率的改变间隔尽可能与分辨能力一致。

### 题 12 (2007·亚洲物理奥赛题)

#### 测定液体电导率

##### 一、实验说明

在本实验中使用的液体(盐溶液)电导率测量装置中,传感器通交变电流,所以测量时不会因接触电动势问题干扰测量结果;并且因探测线圈不与待测液体直接接触,故不产生任何化学反应,因此该装置可长期连续使用。

如图 1-66 所示,测量液体电导率传感器的内部是由两个半径相同的软铁基合金环组成的,每环各绕有一组线圈,两组线圈的匝数相同.两合金环同轴紧密排列并密封安装成中空圆柱状,如图 1-67 所示。

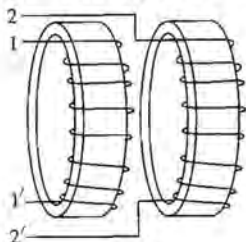


图 1-66

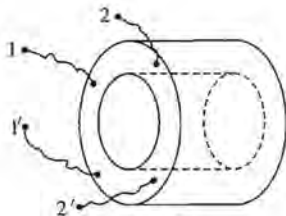


图 1-67

测量时,将该传感器浸没在待测的液体中.线圈 11' 接正弦信号发生器,频率约为 2.5 kHz. 信号发生器的信号输出幅度可能存在慢漂移,漂移量如果超过某一规定范围,就要及时调整,保持输出幅度相同.线圈 22' 接交流电压表,测量感应的信号电压,根据电压大小可计算出待测液体的电导率。

##### 二、实验原理

这种液体电导率测量装置的工作原理是:由信号发生器输出的正弦交变电流在绕组 11' 环内产生正弦交变磁场,该磁场在导电液体中产生正弦交变的感生电流,该感生电流在绕组 22' 环内产生交变的磁场,该磁场在绕组 22' 内又产生感生电动势,成为传感器的输出信号。

忽略磁滞效应,输出电压  $V_0$  是输入电压  $V_i$  的单调函数.在一定的输入电压  $V_i$  范围内,并且液体的电导率  $\sigma$  处于一定范围内时, $\sigma$  与  $\frac{V_0}{V_i}$  成正比关系

$$\sigma = K \left( \frac{V_0}{V_i} \right). \quad \text{①}$$

①式中, $K$  为比例系数。

在测量装置中,盛放待测液体的容器很大,圆柱体外面的液体的电阻很小, $V_0$  的大小主要与传感器的中空圆柱体内的液体(简称液体柱)有关,因此可由液体柱来计算液体的电导率.液体柱电阻为



$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{S}, \sigma = \frac{1}{R} \frac{L}{S}. \quad (2)$$

②式中,  $L$  为液体柱的长度,  $S$  为液体柱的截面积. 比较①和②可得到

$$\frac{V_0}{V_i} = \left( \frac{1}{K} \cdot \frac{L}{S} \right) \frac{1}{R} = B \frac{1}{R}. \quad (3)$$

③式中  $B = \left( \frac{1}{K} \cdot \frac{L}{S} \right)$ , 也可写成  $K = \frac{1}{B} \cdot \frac{L}{S}$ . 代入②可得到

$$\sigma = \left( \frac{1}{B} \cdot \frac{L}{S} \right) \frac{V_0}{V_i}. \quad (4)$$

说明用本传感器测液体的电导率时,  $\sigma$  与中空圆柱体长度  $L$ , 截面积  $S$ ,  $\frac{V_0}{V_i}$  和比例常数  $B$  有关.

注意: 在实验中, 为了精确确定比例常数  $K$  及  $B$ , 本来需要配备多种  $\sigma$  已知的液体, 但这种操作比较困难. 为此, 我们用外接标准电阻来替代已知  $\sigma$  的液体, 使实验方便准确.

将一根导线穿过传感器的中空圆柱体, 接在标准电阻的两端成为电阻回路, 如图 1-68 所示.

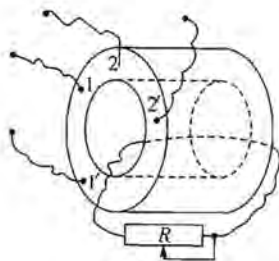


图 1-68

### 三、实验要求

1. 画出液体电导率传感器定标的实验线路图.

按上面画出的实验线路图接好线路, 用于测量传感器的输入电压  $V_i$  ( $< 2.000 \text{ V}$ ) 和感应输出电压  $V_0$ .

2. 根据标准电阻范围:  $0 \sim 9.9 \Omega$ , 测量不同阻值时的  $\left( \frac{V_0}{V_i} \right)$  值, 记录在自己设计的数据表格内.

随时调节  $V_i$  的幅度, 保持有效值在  $[1.700, 1.990] \text{ V}$  范围内的某恒定值, 其变化不得超过  $\pm 0.03 \text{ V}$ . 你也可以固定信号源的电压  $V_i$  进行测量.

3.1 取  $\frac{V_0}{V_i}$  为纵坐标, 取标准电阻值的倒数  $\left( \frac{1}{R} \right)$  为横坐标, 作  $\left( \frac{V_0}{V_i} \right) - \frac{1}{R}$  关系图. 注意在整个输出电压变化范围内测量点不要少于 20 个.

3.2 可以看到该图中在感生电流较小的某一范围内, 曲线是线性的. 将曲线



的线性部分作图,用作图法求得直线的斜率  $B$ ,并计算相对不确定度  $u(B)$  或  $\frac{u(B)}{B}$  值.

4. 已知传感器的轴长:  $L = (30.500 \pm 0.025)$  mm, 液体柱的直径为:  $d = (13.900 \pm 0.025)$  mm, 计算  $K$  值及其不确定度  $u(K)$  或  $\frac{u(K)}{K}$  值.

5. 求出容器内液体的电导率, 写出结果. 根据  $L, d$  以及  $B$  的不确定度, 估算电导率的不确定度. 液体电导率的测量要求进行 6 次, 每一次测量之前都要搅拌均匀.

#### 四、实验仪器和材料

##### 1. 液体电导率传感器

有四个接线端钮, 一组为输入绕组  $11'$ , 另一组为输出绕组  $22'$ .

2. 存放有待测液体的容器和搅拌棒.

##### 3. 液体电导率测试仪

面板上有:

###### ● 信号发生器.

有两个接线端钮, 红端钮为信号输出端, 黑端钮为地端. 转动旋钮可调节输出信号的幅度大小.

###### ● 交流数字电压表.

###### ● 插入式电阻箱.

面板上有多个接线端钮, 每两个端钮间分别接一个阻值相对误差为 0.001 的电阻器. 阻值分别为:  $0.1 \Omega, 0.2 \Omega, 0.5 \Omega, 1 \Omega, 2 \Omega, 5 \Omega$  等六种.

###### ● 转换开关: $1 \times 2$ (单刀双位).

##### 4. 导线.

5. 作图纸 ( $20 \text{ cm} \times 25 \text{ cm}$ ) 二张, 计算器、记录用纸、尺和笔.

#### 面板说明

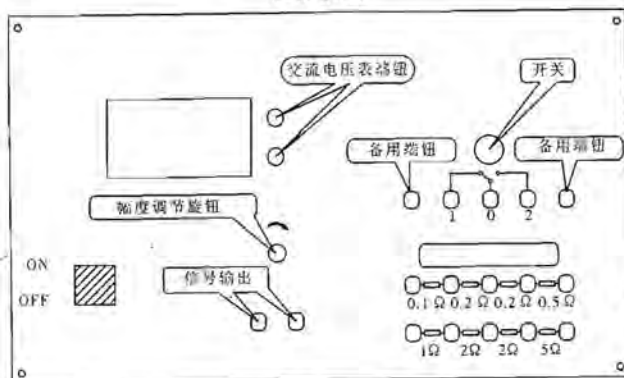


图 1-69



注:交流电压表黑色端钮已经与两个备用端钮连接。

**【分析】** 本题使用一种特制的液体电导率测试仪测量液体电导率. 所依据的原理是交变电磁场在液体中的传播, 所用的传感器是两个半径相同的绕有线圈的磁环. 好在计算公式已在实验原理中给出, 仪器也作了详尽的描述, 应该说不难下手. 只是数据量比较大, 要用作图法解之, 并要作误差分析, 故要求学生有良好的实验素养, 才能取得好的成绩.

**【解】**

1. 画出液体电导率传感器定标的实验线路图(图 1-70).

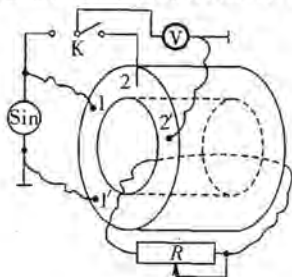


图 1-70

2. 测量不同标准电阻时的  $(\frac{V_0}{V_i})$  值, 记录在自己设计的数据表格内.

$V_i$ (V)	$V_0$ (V)	$R$ ( $\Omega$ )	$\frac{V_0}{V_i}$	$\frac{1}{R}$ (S)
1.95	1.621	0.1	0.831	5.000
1.95	1.494	0.2	0.766	3.333
1.95	1.342	0.3	0.688	2.500
1.95	1.216	0.4	0.624	2.000
1.95	1.091	0.5	0.559	1.667
1.95	0.987	0.6	0.506	1.429
1.95	0.912	0.7	0.468	1.250
1.95	0.837	0.8	0.429	1.111
1.95	0.775	0.9	0.397	1.000
1.95	0.718	1.0	0.368	0.909
1.95	0.508	1.5	0.260	0.833
1.95	0.396	2.0	0.203	0.769
1.95	0.318	2.5	0.163	0.714
1.95	0.270	3.0	0.138	0.667

1.95	0.230	3.5	0.118	0.625
1.95	0.201	4.0	0.103	0.588
1.95	0.177	4.5	0.091	0.556
1.95	0.160	5.0	0.082	0.556
1.95	0.144	5.5	0.074	0.500
1.95	0.132	6.0	0.068	0.454
1.95	0.118	6.5	0.061	0.417
1.95	0.112	7.0	0.057	0.385
1.95	0.101	7.5	0.052	0.357
1.95	0.096	8.0	0.049	0.333
1.95	0.089	8.5	0.046	0.312
1.95	0.085	9.0	0.044	0.294
1.95	0.079	9.5	0.041	0.278

3.1 取  $\left(\frac{V_0}{V_i}\right)$  比为纵坐标, 取标准电阻  $R$  的倒数  $\left(\frac{1}{R}\right)$  为横坐标, 作  $\left(\frac{V_0}{V_i} - \frac{1}{R}\right)$  关系图(图 1-71).

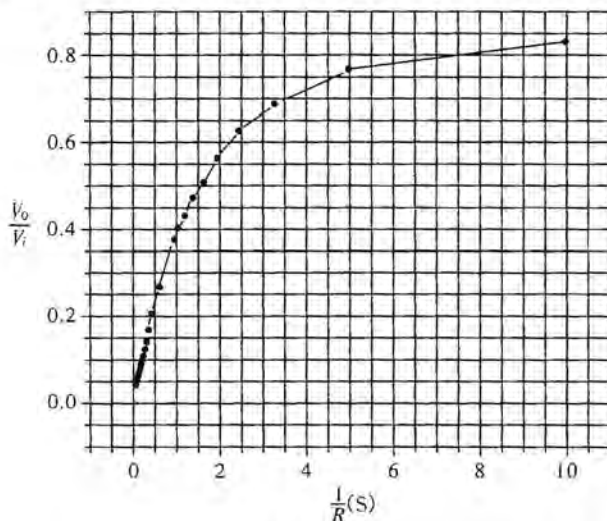


图 1-71

3.2 取  $\frac{V_0}{V_i} - \frac{1}{R}$  曲线的线性部分作图, 用作图法求得直线的斜率  $B$  和斜率的相对不确定度(图 1-72).

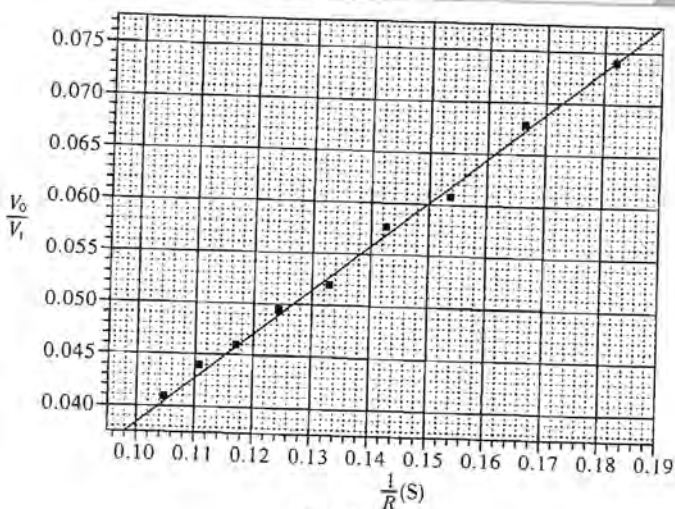


图 1-72

$$B=0.434 \Omega, u(B)=0.009 \Omega, \frac{u(B)}{B}=0.21, \left[\frac{u(B)}{B}\right]^2=0.00044.$$

$u(B)$ 可以用多种方法计算,只要计算数值接近就认为正确.

4. 已知传感器的长度  $L=(30.500 \pm 0.025)\text{mm}$ , 液体柱的直径为  $d=(13.900 \pm 0.025)\text{mm}$ , 计算  $K$  和  $K$  的相对不确定度.

$$K = \frac{1}{B} \cdot \frac{L}{S} = \frac{4 \times 30.50}{0.434 \times 13.90^2 \times 3.142} \text{ S/mm} = 0.463 \text{ S/mm},$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{u(K)}{K}\right]^2 &= \left[\frac{u(B)}{B}\right]^2 + \left[\frac{u(L)}{L}\right]^2 + \left[2 \times \frac{u(d)}{d}\right]^2 \\ &= 0.00044 + 0.000001 + 0.0013 = 0.0017. \end{aligned}$$

5. 测量容器内液体的电导率, 写出结果.

用本装置测量液体电导率和电导率的相对误差计算公式为

$$\sigma = \left(\frac{1}{B} \cdot \frac{L}{S}\right) \frac{V_o}{V_i} = K \times A = 0.463 \times A \text{ S/mm}.$$

$$A = \frac{V_o}{V_i} \left[\frac{u(\sigma)}{\sigma}\right]^2 = \left[\frac{u(K)}{K}\right]^2 + \left[\frac{u(A)}{A}\right]^2.$$

对“待测液体”重复测量六次  $\frac{V_o}{V_i}$ , 数据如下:

$V_i$ (V)	$V_o$ (V)	$\frac{V_o}{V_i}$	$V_i$ (V)	$V_o$ (V)	$\frac{V_o}{V_i}$
1.95	0.037	0.0190	1.95	0.037	0.0190
1.95	0.037	0.1090	1.95	0.038	0.0195
1.95	0.037	0.0190	1.95	0.038	0.0195

$$A = \frac{V_0}{V_i} = 0.01917.$$

$$\sigma = 0.463 \times 0.01917 \text{ S/mm} = 0.00888 \text{ S/mm}.$$

$$u(A) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^6 (A - A_i)^2}{6}} = 0.000258,$$

$$\frac{u(A)}{A} = 0.013,$$

$$\left[ \frac{u(A)}{A} \right]^2 = 0.00017,$$

$$\left[ \frac{u(\sigma)}{\sigma} \right]^2 = 0.0017 + 0.00017 = 0.0019,$$

$$\frac{u(\sigma)}{\sigma} = 0.044.$$

$$u(\sigma) = 0.00039 \text{ S/mm}.$$

“待测液体”的电导率为  $0.00888 \pm 0.00039 \text{ S/mm}$ , 或  $0.0089 \pm 0.0004 \text{ S/mm}$ .

以上数据是在 100 mL 的盐 (NaCl) 溶解在 700 mL 的  $10.1^\circ\text{C}$  水中, 搅拌均匀的情况下经测试所得.

### 题 13 (2007 · 亚洲物理竞赛题)

#### 利用干涉法测量玻璃的热膨胀系数和折射率温度系数

##### 一、实验说明

光学仪器常常需要在高温或低温的条件下使用. 当光学仪器在不同温度下使用时, 其光学元件材料的热学性质, 包括热膨胀系数的折射率温度系数, 会直接影响它的光学性质. 热膨胀系数  $\beta$  的定义为  $\beta = \frac{1}{L} \frac{dL}{dT}$ , 折射率温度系数  $\gamma$  的定义为  $\gamma = \frac{dn}{dT}$ , 其中  $L$  是材料的长度,  $T$  是温度,  $n$  是折射率. 本实验要求测量一种玻璃材料的  $\beta$  和  $\gamma$ .

##### 二、实验装置与器材

1. 样品: 实验所用的样品由均匀各向同性的待测玻璃制成, 如图 1-73 所示. 其中  $A$  是被切去一部分的玻璃圆柱体, 上下表面基本平行;  $B$  和  $B'$  是两块也被切去一部分的圆形玻璃板, 每块玻璃板的上下表面不平行. 三块玻璃  $A$ 、 $B$ 、 $B'$  胶合成一体. 胶的折射率与玻璃相同, 厚度可以忽略不计.

2. 加热装置: 该实验的加热装置如图 1-74 所示, 图中电炉右边的旋钮用于调节电炉温度. 大铝块中间有一个圆柱形的样品腔, 样品可放在其中, 小铝块上有两个孔, 小孔可用于通光, 大孔可用于插温度计的探头. 如要对样品加热, 可先小心地将样品滑入大铝块的样品腔中 (这时应将大铝块倾斜, 以防样品撞碎), 再放入小铝块, 然后把整个大铝块放入电炉上的钢杯中, 就可以对样品加热. (钢杯内不可放水; 也不可取下钢杯把大铝块直接放在电炉上加热)

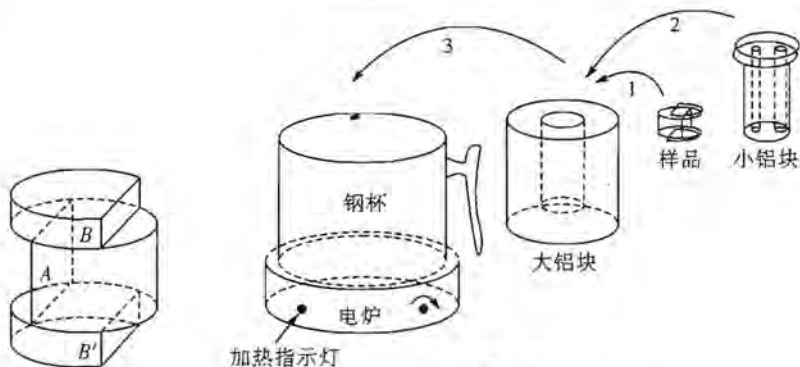


图 1-73

图 1-74

3. 光源支架:如图 1-75 所示,在支架的上部装有 He-Ne 激光器及其电源,在激光器的下面有一个倾斜的搁架,上面搁放了一块带小孔的平板,贴有方格纸,可用作观察屏,支架底部有三个脚,C 脚是固定的,不可调节,A 脚和 B 脚可以调节。

4. 样品平台:光源支架底部有一圆形平台,用于放置样品或电炉,其底部有三个脚  $a, b, c$ ,高低可调,见图 1-75。

5. 数字式温度计。
6. 直尺。
7. 水盆(内有冷却用水)。
8. 毛巾。
9. 作图用坐标纸。
10. 计算器。
11. 铅笔与水笔。

**【注意】**

- a. 眼睛不可正对激光入射方向去看激光,否则可能损伤视网膜!
- b. 不要触摸样品的光学表面,实验时注意轻拿轻放,以免弄坏样品。

三、实验内容

1. 问题

1.1 一束白色自然光通过一片红色透光纸片后,斜入射到一 2 cm 左右厚的玻璃块上。光束在玻璃块的上下表面反射并在观察屏上相遇,形成一没有干涉条纹的光斑,如图 1-76(a);然而当一束红色激光束同样斜入射到相同的玻璃块时,两束反射光在同样的观察屏上相遇,形成具有干涉条纹的光斑,如图 1-76(b)。形成这两种不同现象的原因是什么?请选择一个正确答案( )。



图 1-75



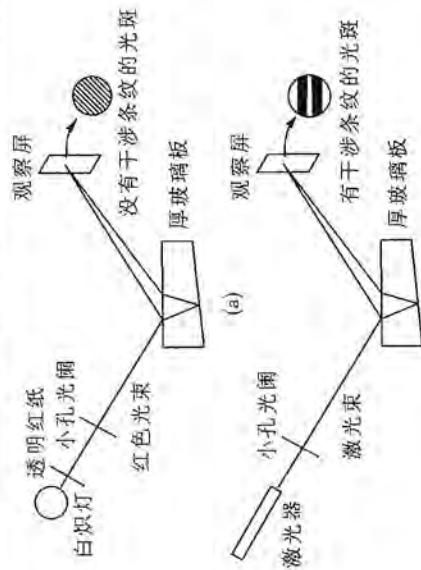


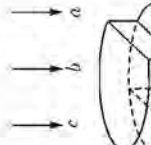
图 1-76

- A. 激光束比红色光更细  
 B. 激光准直性比红色光更好  
 C. 激光的单色性比红色光更好  
 D. 激光的波长比红色光更短

1.2a 如图 1-77 所示,如有一束激光分别正入射到  $a$ 、 $b$ 、 $c$  三个区域时,其反射光应有几个主要光斑(不考虑多次反射)? 这些反射光斑的光场分布是否必然与入射光的一样?

- 1.2b 如果有的反射光斑光场分布可能与入射光的分布不一样,请说明理由。  
 2. 实验:测量玻璃的  $\beta$  和  $\gamma$

已知激光的波长  $\lambda=632.8\text{ nm}$ ,样品中玻璃圆柱体 A 的高度  $L=10.12\pm 0.05\text{ mm}$ ,该玻璃对应比波长在测量温度范围内的平均折射率为  $n=1.515$ ,要求测出该玻璃的温度在  $40^\circ\text{C}\sim 90^\circ\text{C}$  范围内的热膨胀系数  $\beta$  和折射率温度系数  $\gamma$ (在测量温度范围内  $\beta$  和



炉的旋钮旋到最大;当温度接近  $90^\circ\text{C}$  时( $85^\circ\text{C}$  左右),立即将旋钮旋到最小,停止加热。在加热的过程中,左边的加热指示灯会变暗又变亮,这是仪器在自动控制温度,不用理会。

3. 大铝块样品腔中的样品加热后,自然冷却很慢。如要它快速冷却,可以先将加热过的放有大铝块的钢杯放入水盆中;冷却一段时间后(至少 5 分钟);再用毛巾小心地裹着大铝块将它直接放入水中,加速冷却,小心烫手!冷却后擦干,仍放回钢杯中,可再次加热。电炉切不可用水冷却,以免短路。

4. 实验操作完成后,应及时关断电炉的电源,以免过热。

**【分析】** 本题是一道综合性的测定题,探究玻璃的热学性质和光学性质与温度的关系。由题目可知,所需的仪器、装置包含热学系统(加热与温度测量装置)与光学系统(观测干涉条纹),安装和使用这些仪器装置需要熟练的实验技巧,以及耐心细致的工作作风,否则将导致实验失败,得不到应有的结果。

本题的第一部分类似前些年“观察与思考”题,观察实验现象,回答几个问题。而本题的实验部分则首先要推导出待测量的表达式,然后据此测定待测量  $\beta$  和  $\gamma$ ,正所谓“理论指导实践”。

本题的关键技术是如何形成光的干涉和识别并读取干涉条纹。

**【解】**

1. 问题

1.1 略

1.2a 填空

激光近 正入射 时区域	反射光 的主要 光斑数	这些反射光斑的光强分布与激光光斑的光 强分布必然相同吗?“是”填“Y”,“否”填 “N”。			
a	1	光斑 1 (若有)	光斑 2 (若有)	光斑 3 (若有)	光斑 4 (若有)
		N			...

$\gamma$  可视为常数)。

2.1 设计实验方案, 画出实验光路图并推导出有关的测量公式。

2.2 进行实验, 记录测量  $\beta$  和  $\gamma$  所需要的数据。

2.3 求出该材料的  $\beta$  和  $\gamma$ , 并估算它们的不确定度。

2.4 写出最后的实验结果。

#### 【注意】

1. 将样品放入大铝块样品腔中时, 为避免样品撞碎, 应将大铝块倾斜, 小心地让样品慢慢地滑入样品腔的底部。
2. 实验时可连续升温, 边升温边测数据, 以免时间不够, 对样品加热时可把电

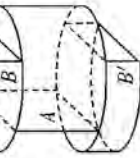


图 1-77

b	2	Y	Y	
c	3	Y	N	Y

说明:

a 区: 因为玻璃圆柱体 A 的上下表面是基本平行的, 所以激光近正入射时, 上下表面的反射光斑会重叠并出现干涉条纹; 光强分布就会与入射光强分布不同。

b 区: 因为胶的折射率与玻璃相同且厚度可忽略, 所以胶合面没有反射光; 而两玻璃板的上下表面是不平行的, 所以上玻璃板的上表面与下玻璃板的下表面也不会平行, 这两束反射光将分别形成两个光斑, 其光强分布与入射光强分布必然须相同。

c区:因为两玻璃板的上下表面不平行,而玻璃圆柱体的上下表面基本平行,所以上玻璃板与下玻璃板的两个反射光斑中必有一个重合而出现干涉条纹;另两个反射光斑的光强分布则与入射光强分布必须相同。

1. 2b 如果你填了“否”(N), 请用一个关键词说明理由: 干涉。

2. 实验: 测量玻璃的  $\beta$  和  $\gamma$

2.1 设计实验方案, 画出实验光路图并推导出有关的测量公式。

测量  $\beta$  的光路图如图 1-78 所示, 测量  $\gamma$  的光路图如图 1-79 所示。

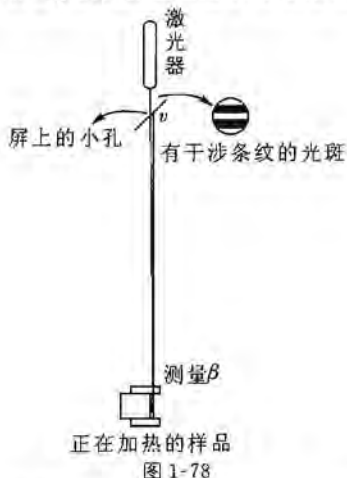


图 1-78

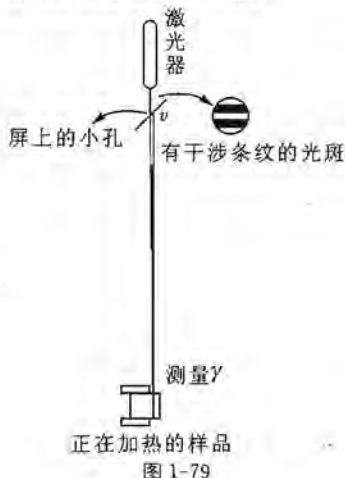


图 1-79

当激光从样品的 c 区反射时(如图 1-78 所示), 在屏上可以看到它的三个反射光斑, 其中  $v$  有干涉条纹, 它是由上玻璃板的下表面与下玻璃板的上表面两束反射光的干涉所形成的, 这两束光的光程差为  $2L$ 。电炉开始加热后, 设温度升高  $\Delta T$ , 玻璃膨胀  $\Delta L = L\beta\Delta T$ , 干涉条纹移动  $m_1$  条, 则有  $2\Delta L = m_1\lambda$ , 式中  $\lambda$  为激光的波长。由此可得  $\beta = \frac{m_1\lambda}{2L\Delta T}$ 。已知  $L$  和  $\lambda$ , 从  $m_1-T$  图可得到温度从  $40^\circ\text{C} \sim 90^\circ\text{C}$  时的条纹移动数  $m_1$ , 由此可求得  $\beta$ 。

当激光从 a 区反射时(如图 1-79 所示), 此时光程差为  $2nL$ , 温升  $\Delta T$  引起的光程差变化为

$$\Delta(2nL) = 2\left(n\frac{\Delta L}{\Delta T} + L\frac{\Delta n}{\Delta T}\right)\Delta T = 2L(n\beta + \gamma)\Delta T.$$

设此时的干涉条纹移动了  $m_2$  条, 则有  $2L(n\beta + \gamma)\Delta T = m_2\lambda$ 。

$$\text{即} \quad \gamma = \frac{m_2\lambda}{2L\Delta T} - n\beta = \left(\frac{m_2}{m_1} - n\right) \times \beta.$$

从  $m_2-T$  图可得到温度从  $40^\circ\text{C} \sim 90^\circ\text{C}$  时的条纹移动数  $m_2$ , 因此可求得  $\gamma$ 。

2.2 (1) 测量该材料的热膨胀系数  $\beta$  的数据记录。

测出  $m_1-T$  关系



$m_1$ (条)	1	2	3	4	5	6	7	8
$T$ ( $^{\circ}\text{C}$ )	30.0	35.4	40.6	46.1	50.6	54.4	58.6	63.1
$m_1$ (条)	9	10	11	12	13	14	15	
$T$ ( $^{\circ}\text{C}$ )	67.6	72.2	75.8	79.8	83.8	87.4	90.9	

(2) 测量该材料的折射率温度系数  $\gamma$  的数据记录。

测出  $m_2-T$  关系

$m_2$ (条)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T$ ( $^{\circ}\text{C}$ )	25.4	27.0	28.9	31.0	33.4	35.3	37.6	40.0	42.2	44.4
$m_2$ (条)	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$T$ ( $^{\circ}\text{C}$ )	46.6	48.9	51.6	54.0	56.2	58.6	61.2	64.0	66.4	69.0
$m_2$ (条)	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$T$ ( $^{\circ}\text{C}$ )	72.4	75.0	77.6	79.8	82.4	84.4	86.4	88.2	90.2	

2.3 求出该材料的热膨胀系数  $\beta$  和折射率温度系数  $\gamma$ , 并估算它们的不确定度。

(1) 作  $m_1-T$  和  $m_2-T$  图(图 1-80)

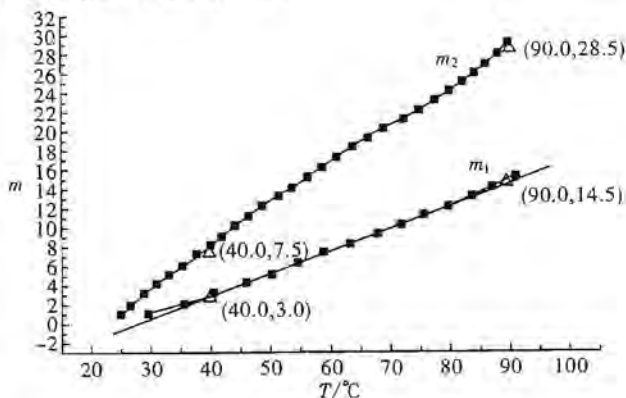


图 1-80

(2) 计算  $\beta$

已知  $L=10.12 \pm 0.05$  mm,  $\lambda=632.8$  nm,  $\Delta T=50.0$   $^{\circ}\text{C}$ , 并由  $m_1-T$  图得到  $T$  在  $40$   $^{\circ}\text{C}$ ~ $90$   $^{\circ}\text{C}$  时  $m_1=11.5$  条, 由  $\beta = \frac{m_1 \lambda}{2L \Delta T}$ , 得  $\beta = 7.19 \times 10^{-6}$   $^{\circ}\text{C}^{-1}$ .

(3) 估算  $\beta$  的不确定度  $u(\beta)$

已知  $u(L)=0.05$  mm, 取  $u(\Delta T)=0.2$   $^{\circ}\text{C}$ , 估计  $u(m_1)=0.2$  条。

$$\begin{aligned} \text{由 } \left[ \frac{u(\beta)}{\beta} \right]^2 &= \left[ \frac{u(m_1)}{m_1} \right]^2 + \left[ \frac{u(L)}{L} \right]^2 + \left[ \frac{u(\Delta T)}{\Delta T} \right]^2 \\ &= \left( \frac{0.2}{11.5} \right)^2 + \left( \frac{0.05}{10.12} \right)^2 + \left( \frac{0.2}{50} \right)^2 \\ &= 3.4 \times 10^{-4}. \end{aligned}$$

$$\text{得 } u(\beta) = 0.13 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}.$$

(4) 计算  $\gamma$

已知  $n=1.515$ ,  $m_1=11.5$  条, 由  $m_2-T$  图可得到  $T$  在  $40^\circ\text{C} \sim 90^\circ\text{C}$  时,  $m_2=21.0$  条, 并已测得  $\beta=(7.19 \pm 0.13) \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ .

$$\text{由 } \gamma = \left( \frac{m_2}{m_1} - n \right) \beta, \text{ 得 } \gamma = 2.24 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}.$$

(5) 估算  $\gamma$  的不确定度

估计  $u(m_1)=u(m_2)=0.2$  条, 并已求得  $u(\beta)=0.13 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ .

$$\begin{aligned} \frac{u(\gamma)}{\gamma} &= \sqrt{\left[ \frac{u(m_2) + nu(m_1)}{m_2 - nm_1} \right]^2 + \left[ \frac{u(\beta)}{\beta} \right]^2 + \left[ \frac{u(m_1)}{m_1} \right]^2} = 0.13. \\ u(\gamma) &= 0.30 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}. \end{aligned}$$

## 2.4 实验结果

该样品玻璃材料的热膨胀系数为:  $\beta=(7.19 \pm 0.13) \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ .

该样品玻璃材料的折射率温度系数为:  $\gamma=(2.24 \pm 0.30) \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ .

题 14 (2006·亚洲物理奥赛题)

### 测量铝的比热和液氮的汽化热

#### 第一部分

测量铝在  $45^\circ\text{C} \sim 65^\circ\text{C}$  范围内的比热

本部分只允许使用下列仪器

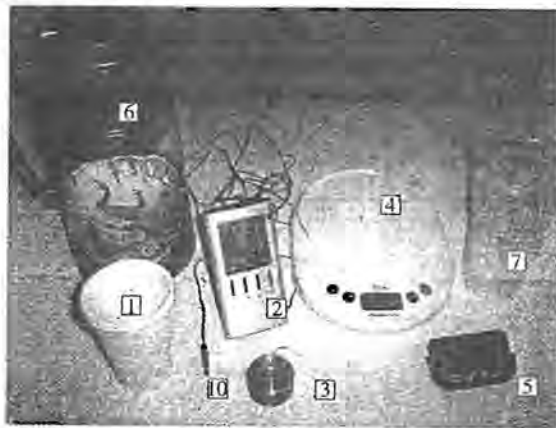


图 1-81

1. 塑料杯, 杯盖的开口用于放温度计.



2. 精度为  $0.1\text{ }^{\circ}\text{C}$  的数字式温度计, 传感器(10)测量到的温度在显示屏上方, 下方显示的是室温. 不要使用 max/min 按钮: max/min 为当前值、最大值和最小值的切换按钮. 如果水温超过  $70\text{ }^{\circ}\text{C}$ , 温度计显示“H”, 表示超过量程. 警告: 不得使用温度计测量液氮温度, 温度计仅用于第一部分的实验.

3. 带孔的铝质圆柱样品.

4. 精度为  $1\text{g}$  的电子天平, 注意天平要保持水平. Tare/Zero 按钮为 On/Off 以及调零按钮. 不要使用其他按钮. 注意: 每 50 秒左右要触碰天平, 以防止自动关机. 如果发生自动关机, 必须重新开机并调零.

5. 数字秒表, 左边的按钮用于切换时钟和计时功能. 在计时功能下, 中间的按钮是 Stop/Start, 右边的按钮是清零.

6. 装有热水的保温瓶.

7. 存放废水的容器.

8. 作图纸 2 张.

9. 线.

铝的比热的测量结果将用于第二部分的实验中.

铝的比热的测量是通过比较以下两条实验曲线获得的:

(1) 没有放置铝样品时, 塑料杯里热水的降温曲线(第一步).

(2) 铝样品浸没在热水中时的降温曲线(第二步).

水的比热为:  $c_w = 4.20\text{ kJ}/(\text{kg} \cdot ^{\circ}\text{C})$ .

水的密度为:  $\rho_w = 1.00 \times 10^3\text{ kg}/\text{m}^3$ .

铝的密度:  $\rho_{Al} = 2.70 \times 10^3\text{ kg}/\text{m}^3$ .

警告:

小心热水, 温度  $T > 50\text{ }^{\circ}\text{C}$  时就能引起烫伤. 在本部分中不要使用液氮.

问题

(1a) 从理论上导出铝样品的比热公式, 用本实验中的测量量表示:  $m_1$  为第一步实验中热水的质量,  $m_2$  为第二步实验中热水的质量,  $m$  为铝柱体的质量,  $K = \frac{c_1}{c_2}$ , 是热容量之比,  $c_1$  是第一步水的热容量,  $c_2$  是第二步水和铝混合后的热容量.

(1b) 和 (1c) 中, 你要完成  $K$  的测量. 在实验中要盖上盖子. 假设在这种情况下, 杯中的材料和环境的热量交换线性依赖于它们之间的温度差, 线性系数仅仅依赖于水在杯中的高度. 在 (1c) 部分, 需要将铝柱体完全浸没到水中, 杯的热容量可以忽略.

(1b) 第一步实验: 在温度  $45\text{ }^{\circ}\text{C} \sim 65\text{ }^{\circ}\text{C}$  区间研究水温度  $T_1$  与时间  $t$  的关系, 列出测量表格, 在答案纸上填写质量  $m_1$ .

(1c) 第二步实验: 在温度  $45\text{ }^{\circ}\text{C} \sim 65\text{ }^{\circ}\text{C}$  区间研究加入铝柱体后的水温度  $T_2$  与时间  $t$  的关系, 列出测量表格, 在答案纸上写出质量  $m_2$  和  $m$ .

(1d) 作图确定热容量之比  $K = \frac{c_1}{c_2}$  和不确定度  $\Delta K$ , 在答案纸上写出  $K$  和  $\Delta K$ .

(1e) 确定比热  $c_{Al}$  并估计其不确定度  $\Delta c_{Al}$ , 在答案纸上写出  $c_{Al}$  和  $\Delta c_{Al}$ .

### 第二部分

#### 液氮的汽化热的测量

在本部分你可使用下列仪器

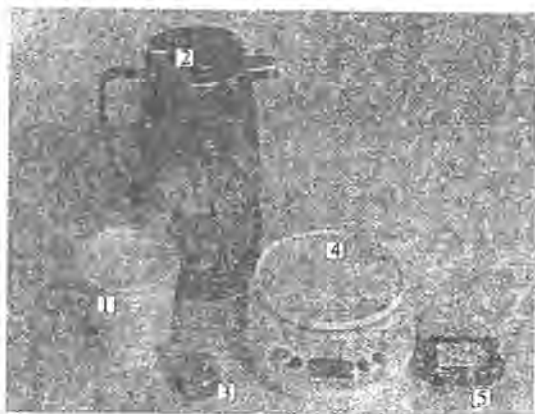


图 1-82

1. 带盖的泡沫聚苯乙烯杯.
2. 装有液氮的保温瓶.
3. 带孔的铝质圆柱样品(与第一部分相同).
4. 精度为 1 g 的电子天平(与第一部分相同).
5. 数字秒表(与第一部分相同).
6. 作图纸 2 张.
7. 线.

通常都知道水的汽化热值,但我们很少研究大气的主要成分氮气在液态时的性质.在标准大气压下,液氮的沸点非常低,其值为  $T_N = 77 \text{ K} = -196 \text{ }^\circ\text{C}$ .

在本实验中,你将测量液氮的汽化热.由于泡沫聚苯乙烯杯中液氮与环境交换热叠,液氮发生汽化,因而其质量以一定速率减少.当初始温度为室温的铝样品投入到液氮后,液氮将剧烈沸腾,直到铝样品的温度与液氮相同.最后会发生短暂的剧烈沸腾,表明铝的冷却已经停止,这种剧烈沸腾是由于铝和液氮之间的汽膜消失引起的.在铝样品达到液氮温度后,液氮将继续汽化.

考虑到温度区域较大,需要用到铝的比热  $c_{Al}$  与绝对温度的关系.图 1-83 表示铝的比热与温度的关系,图中纵坐标是相对坐标.用第一部分中  $45 \text{ }^\circ\text{C} \sim 65 \text{ }^\circ\text{C}$  区间的比热测量结果来标定比热的绝对单位.

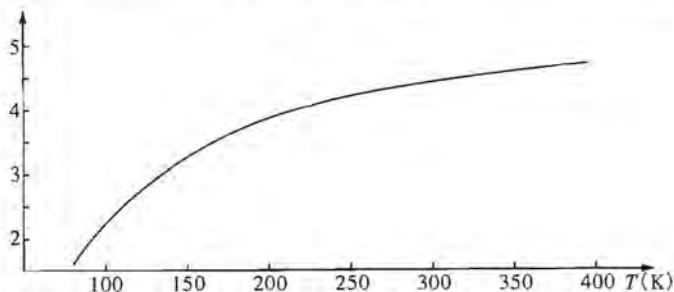


图 1-83 铝的比热与温度的关系,纵坐标是相对坐标

警告:

(1)在泡沫聚苯乙烯杯中液氮温度为  $T_N = -196^\circ\text{C}$ ,为防止冻伤,不要接触液氮和装有液氮的容器.个人的金属物品如首饰、手表等也应远离液氮.

(2)不要将任何无关的物品放入液氮中.

(3)要非常小心地将铝样品放入液氮中,防止溢出或溅出.

问题

(2a)测量液氮的汽化速率时要盖好杯盖,测量在铝样品的冷却过程中汽化的液氮的质量.(铝样品通过盖上的开口投入杯中)

请按如下方式进行实验.将有盖的泡沫聚苯乙烯杯放在电子秤上,倒入大约 250 g 的液氮,等 5 分钟左右再开始测量.当适量液氮汽化后,将铝柱放入杯中,这会引起剧烈沸腾.当铝柱冷却到液氮温度以后,汽化会平缓下来.此后再继续测量 5 分钟左右,直到又有一部分液氮汽化了.在整个过程中记录电子秤的读数与时间的关系  $M(t)$ .

注意:在任何情况下都不要触碰投入到液氮以后的铝样品.

你的报告中要给出一个  $M(t)$  和  $m_N(t)$  的数据表,其中  $m_N(t)$  表示汽化掉的液氮质量.

(2b)利用(2a)中的测量结果,作汽化掉的液氮质量  $m_N$  与时间  $t$  的图.此图须包括整个汽化过程的三个阶段:放入铝样品前、后平缓的汽化阶段和液氮剧烈汽化的阶段.

(2c)由图确定铝样品投入液氮后,它的温度由室温冷却到液氮温度的过程中,液氮和铝样品热交换所致汽化的液氮质量  $m_{NAI}$ .这里,你必须考虑铝样品冷却前、冷却时和冷却后的整个过程中,杯子和环境的热交换.在答案纸上写出  $m_{NAI}$  的值和它的不确定度  $\Delta m_{NAI}$ .

(2d)利用第一部分中  $45^\circ\text{C} \sim 65^\circ\text{C}$  区间的比热测量结果来标定铝的比热与温度曲线上纵坐标的单位.在答案纸上写出比热的相对单位(任意单位)与绝对单位的转换系数

$$c_{Al}[\text{J}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})] = \beta \cdot c_{Al}(\text{任意单位}).$$

(2e)利用铝的冷却引起液氮汽化掉的质量的测量结果和已定标的比热与温度



关系图,确定液氮的汽化热 $\lambda$ ,在答案纸上写出汽化热 $\lambda$ 和它的不确定度 $\Delta\lambda$ .

**【分析】**本题的两部分均系热学测量.第一部分属于固体比热测量;第二部分属于液体汽化热的测量.这两部分是相关的,因为第一部分铝的比热的测量结果在第二部分的实验中要用到,而且第一部分中的铝块要投入第二部分的液氮中.所有的操作都必须非常仔细、谨慎,一是尽量减少误差,二是防止烫伤或冻伤.

解题的关键是对比热和汽化热要有清晰的概念,首先推导出比热和汽化热的表达式,由这些表达式可看出应该测量哪些量,作何种关系曲线,然后用作图法求出待测量.题目已告知,铝的比热通过比较两条实验曲线获得:一是没有铝样品时,热水的降温曲线,二是有铝样品时热水的降温曲线.

**【解】**第一部分 测量铝在 $45^\circ\text{C}\sim 65^\circ\text{C}$ 温度范围内的比热

(1a)在实验一中所用的热水质量 $m_1$ ,水的比热 $c_w = 4.2 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$ ,故水的比热容为

$$c_1 = c_w m_1. \quad (1)$$

在实验二中所用的热水质量为 $m_2$ ,浸入水中的铝柱质量为 $m$ ,水和铝柱的总比热容为

$$c_2 = c_w m_2 + c_{\text{Al}} m. \quad (2)$$

设 $K = \frac{c_1}{c_2}$ ,则由①和②两式可解得

$$c_{\text{Al}} = \left( \frac{m_1 - K \cdot m_2}{K \cdot m} \right) c_w. \quad (3)$$

比热容的比值 $K$ 可从实验(1b)和(1c)中定出.在这两个实验中,考虑热辐射的影响,塑料杯内的水位高度必须相同.为确定水位高度,可用笔在杯子的侧面上标记,或根据下式选择水量

$$\frac{m_1}{\rho_w} = \frac{m_2}{\rho_w} + \frac{m}{\rho_{\text{Al}}}. \quad (4)$$

由于③式中的分子为差值,宜选择 $m_1$ 接近 $m$ 值,以求得最佳的实验结果.

(1b)实验一:热水的质量 $m_1 = (50 \pm 1) \text{ g}$ ,室温 $T_r = (23.4 \pm 0.2)^\circ\text{C}$ ,当热水冷却时,在 $45^\circ\text{C}\sim 65^\circ\text{C}$ 的温度范围内,水温 $T_1$ 和时间 $t$ 的关系记录如下表:

$N$	$T_1 (^{\circ}\text{C})$	$t$ (分,秒)	$t$ (分)	$\ln(T_1 - T_r)$
1	65	0,00	0.0	3.72
2	64	0,27	0.5	3.69
3	63	0,56	0.9	3.67
4	62	1,49	1.8	3.64
5	61	2,08	2.1	3.62
6	60	3,02	3.0	3.59



续表

7	59	3,48	3.8	3.56
8	58	4,34	4.6	3.53
9	57	5,20	5.3	3.51
10	56	5,48	5.8	3.47
11	55	6,33	6.6	3.44
12	54	7,37	7.6	3.41
13	53	8,50	8.8	3.38
14	52	9,37	9.6	3.34
15	51	10,13	10.2	3.31
16	50	11,26	11.4	3.27
17	49	12,39	12.7	3.23
18	48	13,52	13.9	3.19
19	47	15,33	15.6	3.15
20	46	16,17	16.3	3.11
21	45	18,00	18.0	3.06

(1c)实验二:热水的质量  $m_2 = (27 \pm 1)\text{g}$ , 铝柱的质量  $m = (69 \pm 1)\text{g}$ , 室温  $T_r = (23.4 \pm 0.2)^\circ\text{C}$ , 当热水冷却时, 在  $45^\circ\text{C} \sim 65^\circ\text{C}$  的温度范围内, 水和铝柱的温度  $T_2$  和时间  $t$  的关系记录如下表:

$N$	$T_2 (^\circ\text{C})$	$t$ (分, 秒)	$t$ (分)	$\ln(T_2 - T_r)$
1	65	0,00	0.0	3.72
2	64	0,18	0.3	3.69
3	63	0,46	0.8	3.67
4	62	1,32	1.5	3.64
5	61	2,00	2.0	3.62
6	60	2,26	2.4	3.59
7	59	3,03	3.0	3.56
8	58	3,39	3.7	3.53
9	57	4,25	4.4	3.51



(续表)

10	56	4,45	4.8	3.47
11	55	5,29	5.5	3.44
12	54	6,24	6.4	3.41
13	53	7,19	7.3	3.38
14	52	8,05	8.1	3.34
15	51	8,93	8.5	3.31
16	50	9,27	9.5	3.27
17	49	10,31	10.5	3.23
18	48	11,35	11.5	3.19
19	47	12,58	13.0	3.15
20	46	13,35	13.6	3.11
21	45	14,57	15.0	3.06

$T_1(t)$  和  $T_2(t)$  的关系曲线如图 1-84 所示。

(1d) 在实验一和实验二中水温的下降,是由于杯内的物质和周围环境进行热交换的结果. 设杯内的水温为  $T$ , 室温为  $T_r$ , 则自杯内所流失至周围环境的热量, 与两者之间的温差的一次方成正比, 即

$$-cdT = \alpha(T - T_r). \quad (5)$$

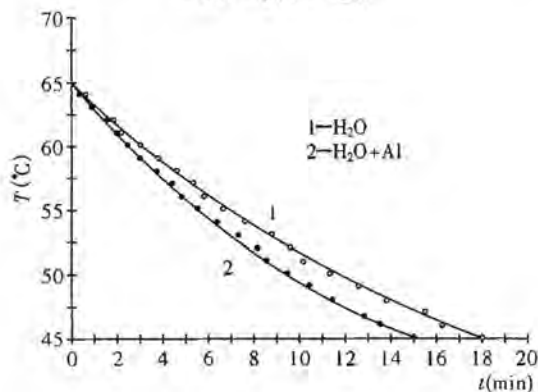


图 1-84

式中  $c$  为比热容 ( $c_1$  或  $c_2$ ),  $\alpha$  为一比例常数. 将⑤式积分得

$$T - T_r = (T_0 - T_r)e^{-\frac{\alpha}{c}t}. \quad (6)$$

式中  $T_0$  为杯内水的初温. 将⑥式两边取对数, 可使其线性化, 得



$$\ln(T - T_r) = \ln(T_0 - T_r) - \frac{\alpha}{c} t \quad (7)$$

将(1b)和(1c)的实验数据转换为  $\ln(T_1 - T_r) - t$  和  $\ln(T_2 - T_r) - t$  的关系曲线,如图 1-85 所示。两者皆显示出良好的线性关系。由图中两条最佳吻合直线的斜率可得  $K$  值和其不确定量  $\Delta K$ 。

$$K \pm \Delta K = \frac{-\frac{\alpha}{c_2}}{-\frac{\alpha}{c_1}} = \frac{b_2 \pm \Delta b_2}{b_1 \pm \Delta b_1} \quad (8)$$

$$K = \frac{b_2}{b_1} = \frac{-0.0439}{-0.0367} = 1.196$$

$$\begin{aligned} \Delta K &= K \sqrt{\left(\frac{\Delta b_1}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b_2}{b_2}\right)^2} \\ &= 1.196 \times \sqrt{\left(\frac{0.0004}{0.0367}\right)^2 + \left(\frac{0.0005}{0.0439}\right)^2} = 0.019 \end{aligned}$$

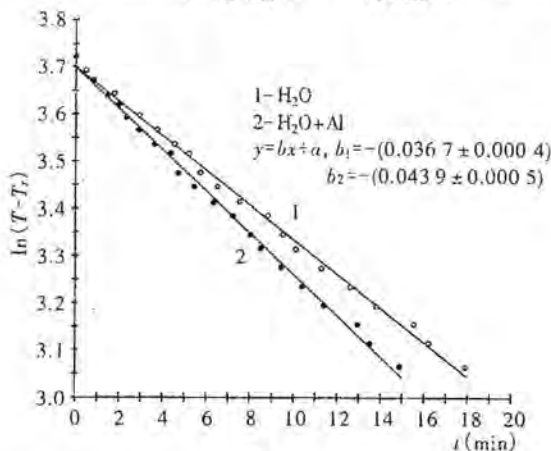


图 1-85

(1e)利用③式,可计算铝的比热和其不确定量为

$$\begin{aligned} c_{Al} \pm \Delta c_{Al} &= \left[ \frac{(50 \pm 1) - (1.196 \pm 0.019) \times (27 \pm 1)}{(1.196 \pm 0.019) \times (69 \pm 1)} \right] \times 4.20 \\ &= \left[ \frac{17.7 \pm 1.6}{82.5 \pm 1.8} \right] \times 4.20 = (0.90 \pm 0.08) \text{kJ}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}), \end{aligned}$$

## 第二部分 测量液态氮的汽化热

(2a)下表为被蒸发的液态氮质量  $m_N$  (g) 和对应时间  $t$  的实验数据,表中质量测量的不确定量为  $\pm 1$  g。



$N$	$M(\text{g})$	$t(\text{分,秒})$	$t(\text{分})$	$m_N(\text{g})$
1	250	0,0	0	0
2	248	0,19	0.3	2
3	246	0,39	0.6	4
4	244	0,59	1.0	6
5	242	1,19	1.3	8
6	240	1,38	1.6	10
7	238	2,00	2.0	12
8	236	2,19	2.3	14
9	234	2,41	2.7	16
10	232	3,02	3.0	18
11	230	3,22	3.4	20
12	228	3,44	3.7	22
13	226	4,06	4.1	24
14	224	4,28	4.5	26
15	222	4,50	4.8	28
16	220	5,13	5.2	30
17	274	5,52	5.9	45
18	269	6,00	6.0	50
19	264	6,07	6.1	55
20	259	6,18	6.3	60
21	254	6,30	6.5	65
22	249	6,41	6.7	70
23	244	6,54	6.9	75
24	239	7,09	7.1	80
25	234	7,25	7.4	85
26	229	7,40	7.7	90



(续表)

27	224	7,48	7.8	95
28	222	8,06	8.1	97
29	219	8,49	8.8	100
30	217	9,16	9.3	102
31	215	9,44	9.7	104
32	213	10,14	10.2	106
33	211	10,44	10.7	108
34	209	11,14	11.2	110
35	207	11,45	11.7	112
36	205	12,13	12.2	114
37	203	12,43	12.7	116
38	201	13,14	13.2	118
39	199	13,46	13.7	120
40	197	14,16	14.3	122
41	195	14,50	14.8	124

(2b) 将(2a)的实验数据转换为  $m_N-t$  的关系曲线, 如图 1-86 所示.

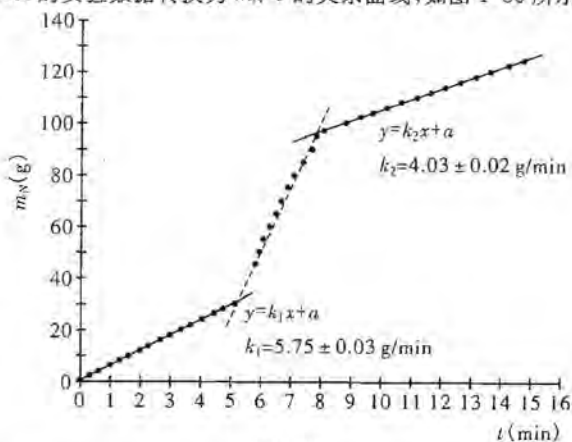


图 1-86

(2c) 应用最小平方差法, 计算图 1-86 中的两段最佳吻合直线(如实线所示)的斜率  $k_1$  和  $k_2$ ,  $k_1$  为浸入铝柱前的液态氮蒸发速率,  $k_2$  则为浸入铝柱并在剧烈沸腾

之后的液态氮蒸发速率.

$$k_1 = (5.75 \pm 0.03) \text{ g/min},$$

$$k_2 = (4.03 \pm 0.02) \text{ g/min}.$$

显然液态氮的蒸发速率和杯中留存的液态氮质量有关. 因此在中段的液态氮剧烈沸腾期间(如图中的虚线所示), 经由和周围环境的热交换作用, 而导致液态氮蒸发的速率可估计为

$$k = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{5.75 + 4.03}{2} \text{ g/min} = 4.89 \text{ g/min}.$$

$k$  值也可利用其他的平均方法来决定, 例如取  $k_1$  和  $k_2$  的几何平均值. 我们取上述算术平均和几何平均的差值, 作为  $k$  值的不确定量, 即  $\Delta k = 0.08 \text{ g/min}$ .

由图中的虚线和两实线的交点, 可定出液态氮剧烈沸腾期的起点时刻  $t_1 = 5.2 \text{ min}$  和终点时刻  $t_2 = 7.8 \text{ min}$ . 因此仅由于铝圆柱和液态氮之间的热交换, 而被汽化掉的液态氮总质量  $m_{\text{NAl}}$ , 可利用下式计算得出

$$\begin{aligned} m_{\text{NAl}} \pm \Delta m_{\text{NAl}} &= [m_{\text{N}}(t_2) - m_{\text{N}}(t_1)] - k(t_2 - t_1) \\ &= [(95 \pm 1) - (30 \pm 1)] - (4.89 \pm 0.08) \times [(7.8 \pm 0.1) - (5.2 \pm 0.1)] \text{ g} \\ &= (52 \pm 2) \text{ g}. \end{aligned}$$

(2d) 在  $45^\circ\text{C} \sim 65^\circ\text{C}$  的范围内, 铝的比热近似为一常数, 在第一部分的实验中测得其值为  $c_{\text{Al}} = (0.90 \pm 0.08) \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$ . 由题给的铝比热(取任意单位)和温度之间的关系曲线, 可读得  $c_{\text{Al}} = 4.5 \pm 0.1$  任意单位, 故两者之间的转换系数为

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{c_{\text{Al}}[\text{kJ}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})]}{c_{\text{Al}}(\text{任意单位})} = \frac{0.90 \pm 0.08}{4.5 \pm 0.1} \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C} \cdot \text{任意单位}) \\ &= (0.20 \pm 0.02) \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C} \cdot \text{任意单位}). \end{aligned}$$

(2e) 浸入液态氮的铝柱从起始的室温  $T_r$  冷却至液氮温度  $T_{\text{N}} = 77 \text{ K}$ , 所释放出的热量为

$$Q = m \int_{T_{\text{N}}}^{T_r} c_{\text{Al}}(T) dT. \quad (9)$$

由于铝比热  $c_{\text{Al}}(T)$  为图 1-83 所示的曲线. 因此上式仅能以数值积分的方式求解, 其积分值等于该曲线下方从  $T_{\text{N}}$  至  $T_r$  范围内所包围的面积. 在该曲线的坐标图上, 每一小方块的面积等于  $0.25$  (任意单位  $\cdot ^\circ\text{C}$ ), 计数上述面积所属的小方块数目, 共计有  $N = 311 \pm 1$  个, 故得

$$\begin{aligned} \int_{T_{\text{N}}}^{T_r} c_{\text{Al}}(T) dT &= (311 \pm 1) \times 0.25 (\text{任意单位} \cdot ^\circ\text{C}) \\ &= (311 \pm 1) \times 0.25 \times (0.20 \pm 0.02) \text{ J/g} \\ &= (156 \pm 16) \text{ J/g}. \end{aligned} \quad (10)$$

将上值代入⑨式, 得

$$Q = (69 \pm 1) \times (156 \pm 16) \text{ kJ} = (10.8 \pm 1.1) \text{ kJ}.$$

浸入液态氮的铝柱所释放出的热量, 使质量为  $m_{\text{NAl}}$  的液态氮汽化, 以  $\lambda$  代表液



态氮的汽化热,则

$$\lambda m_{\text{NAI}} = Q.$$

①

液态氮的汽化热和其不确定量的计算如下式:

$$\lambda \pm \Delta\lambda = \frac{Q}{m_{\text{NAI}}} = \frac{(10.8 \pm 1.1) \times 10^3 \text{ J}}{(52 \pm 2) \text{ g}} = (207 \pm 23) \text{ J/g}.$$

题 15 (2003·亚洲物理竞赛题)

### 电容的测量

背景说明

众所周知,电容器在电路中扮演一个重要的角色.有好几种方法可以用来测量电容器的电容.本实验要求你利用简单的交流电路实验,来测量一个电容器的电容.

如图 1-87 所示,一电容为  $C$  的电容器和一个电阻  $R$  串联后,连接到一个交流电压电源.消耗于该电阻  $R$  上的电功率和  $\varepsilon_0$ 、 $C$ 、 $R$  以及交流电源的频率  $f$  有函数关系.这个关系式的曲线图可以用来定出电容  $C$  的数值.

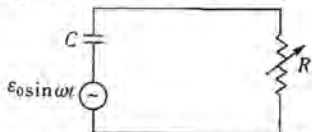


图 1-87 测量电容  $C$  的交流电路

实验材料和装置(如图 1-88 所示)

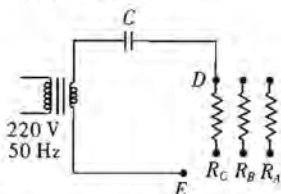


图 1-88 本实验所用装置的示意图

1. 电容器;
2. 三个已知电阻值的电阻,其误差值为  $\pm 5\%$  ( $R_A = 680 \Omega$ 、 $R_B = 1500 \Omega$ 、 $R_C = 3300 \Omega$ );
3. 一个降压变压器,交流电源的频率  $f = 50 \text{ Hz}$ ;
4. 数字电压表;
5. 连接用的导线;
6. 线性作图纸.

警告:

本实验所用的多用途数字电表,仅用于测量电阻  $R$  跨过的方均根(rms)电压(①),不可用于其他的测量模式.

实验要求





(a) 导出电阻  $R$  上消耗的平均热功率  $\bar{P}$  的数学表达式, 用  $\epsilon_0$ 、 $R$ 、 $C$  和  $\omega$  表示.

(b) 导出  $\bar{P}$  为极大值的条件.

(c) 在(a)题所导出的数学关系式中, 设法定义出某两个量  $\alpha$  和  $\beta$ , 使该关系式可以转换成  $\alpha$  和  $\beta$  之间的线性关系式.

(d) 在  $R_A$ 、 $R_B$  和  $R_C$  的所有可能的串、并联组合中(包括只使用一个电阻、或使用两个电阻、或者三个电阻全用), 对每一种组合所得的等效电阻  $R$ , 测量该组合电阻的方均根电压  $U_{\text{rms}}$ .

(e) 画出  $\bar{P}$  对组合电阻  $R$  的关系图, 并利用该关系曲线, 求出电容  $C$  的值.

(f) 画出(c)题所得两量  $\alpha$  和  $\beta$  之间的关系直线, 并利用该直线, 求出电容  $C$ .

(g) 估计在(e)和(f)两题中所得电容  $C$  的不确定量.

**【分析】** 电容器是电路的基本元件, 测量其电容是物理实验中经常遇到的. 本题要求用简单的交流电路实验测量电容, 在背景说明中已指出一条道路, 即在  $RC$  串联交流电路中, 消耗在电阻  $R$  上的电功率  $P$  和电容  $C$  以及频率  $f$  有关, 因此, 利用图解法, 作出  $P$ - $f$  曲线即可确定电容  $C$ .

**【解】** (a) 电阻  $R$  上消耗的平均热功率为

$$\bar{P} = I_{\text{rms}}^2 R = \left[ \frac{\epsilon_{\text{rms}}^2}{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \right] R = \left[ \frac{\frac{1}{2} \epsilon_0^2}{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \right] R.$$

(b)  $\bar{P}$  为极大值的条件为

$$\frac{d\bar{P}}{dR} = 0.$$

$$\frac{d\bar{P}}{dR} = \frac{d}{dR} \left[ \frac{\frac{1}{2} \epsilon_0^2}{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} R \right] = \frac{1}{2} \epsilon_0^2 \frac{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2 - R(2R)}{\left[ R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2 \right]^2}.$$

由上式得  $\bar{P}$  为极大值的条件为  $R = \frac{1}{\omega C}$ .

(c) 利用(a)题所得  $\bar{P}$  的数学表达式, 得

$$\bar{P} = \left[ \frac{\frac{1}{2} \epsilon_0^2}{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \right] R = \frac{\frac{1}{2} \epsilon_0^2 R}{R^2 \left[ 1 + \left(\frac{1}{R\omega C}\right)^2 \right]} = \frac{\frac{1}{2} \epsilon_0^2}{R \left[ 1 + \left(\frac{1}{R\omega C}\right)^2 \right]}.$$

$$\frac{1}{R\bar{P}} = \frac{2}{\epsilon_0^2} \left[ 1 + \frac{1}{R^2 \omega^2 C^2} \right].$$

因为  $R\bar{P} = R \left( \frac{U_{\text{rms}}^2}{R} \right) = U_{\text{rms}}^2$ , 故上式可改写为

$$\frac{1}{U_{\text{rms}}^2} = \frac{2}{\epsilon_0^2} + \frac{2}{\epsilon_0^2} \left( \frac{1}{\omega C} \right)^2 \frac{1}{R^2}.$$

定义  $\alpha = \frac{1}{R\bar{P}} = \frac{1}{U_{\text{rms}}^2}$ ,  $\beta = \frac{1}{R^2}$ , 代入上式, 得



$$\alpha = \frac{2}{\epsilon_0^2} + \frac{2}{\epsilon_0^2} \left( \frac{1}{\omega C} \right)^2 \beta.$$

上式已转换成  $\alpha$  和  $\beta$  之间的线性关系式, 设该直线的斜率为  $\alpha$ , 其在  $\alpha$  轴上截距为  $b$ , 则

$$\frac{\alpha}{b} = \frac{1}{\omega^2 C^2}, C = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{b}{\alpha}}.$$

另解: 利用  $\bar{P} = U_{rms}^2$ , 代入(a)题中的  $\bar{P}$  表达式, 得

$$\frac{U_{rms}^2}{R^2} = \frac{\frac{1}{2} \epsilon_0^2}{R^2 + \left( \frac{1}{\omega C} \right)^2},$$

$$\frac{R^2}{U_{rms}^2} = \left[ R^2 + \left( \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right] \frac{2}{\epsilon_0^2},$$

$$\frac{1}{U_{rms}^2} = \left[ 1 + \left( \frac{1}{\omega C} \right)^2 \frac{1}{R^2} \right] \frac{2}{\epsilon_0^2} = \frac{2}{\epsilon_0^2} + \frac{2}{\epsilon_0^2} \left( \frac{1}{\omega C} \right)^2 \frac{1}{R^2},$$

$$R^2 = \left( \frac{1}{2} \epsilon_0^2 \right) \left( \frac{R}{U_{rms}} \right)^2 - \left( \frac{1}{\omega C} \right)^2.$$

定义  $\alpha = R^2$ ,  $\beta = \left( \frac{R}{U_{rms}} \right)^2$ , 上式可写为  $\alpha$  和  $\beta$  之间的线性关系式, 即

$$\alpha = \left( \frac{1}{2} \epsilon_0^2 \right) \beta - \left( \frac{1}{\omega C} \right)^2.$$

电容  $C$  可从在  $\alpha$  轴上的截距求出.

(d) 各种电阻组合的有效电阻和其两端电压的实验数据, 列表如下:

编号	电阻组合	$R(\Omega)$	$U_{rms}(V)$	$\bar{P} = \frac{U_{rms}^2}{R} (W)$
1	$R_A$	680	9.86	0.143
2	$R_B$	1 500	17.36	0.201
3	$R_C$	3 300	22.81	0.158
4	$R_A + R_B$	2 180	20.49	0.193
5	$R_A // R_B$	468	7.28	0.113
6	$R_B + R_C$	4 800	23.98	0.120
7	$R_B // R_C$	1 032	13.78	0.184
8	$R_C + R_A$	3 980	23.66	0.141
9	$R_C // R_A$	564	8.42	0.126
10	$R_A + R_B + R_C$	5 480	24.40	0.109
11	$(R_A // R_B) + R_C$	3 768	23.43	0.146
12	$(R_B // R_C) + R_A$	1 712	18.63	0.203



(续表)

13	$(R_C // R_A) + R_B$	2 064	20.15	0.197
14	$(R_A // R_B) // R_C$	410	6.22	0.094
15	$(R_A + R_B) // R_C$	1 313	16.18	0.200
16	$(R_B + R_C) // R_A$	596	8.82	0.131
17	$(R_C + R_A) // R_B$	1 089	14.36	0.189

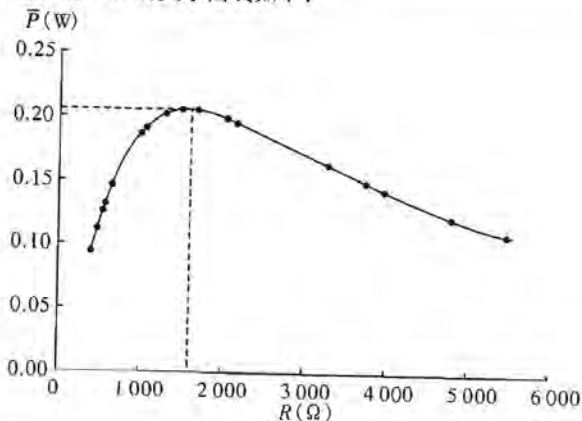
(e)  $\bar{P}$  对组合电阻  $R$  的关系曲线如下:

图 1-89

由图上可读出  $\bar{P}$  的极大值出现在  $R=1600\ \Omega$  处, 故待测的电容值为

$$C = \frac{1}{\omega R} = \frac{1}{2\pi \times 50 \times 1600} \text{ F} = 1.9 \times 10^{-6} \text{ F} = 1.9\ \mu\text{F}.$$

(f)  $\alpha$  和  $\beta$  的线性关系数据,  $\alpha = \frac{1}{R\bar{P}} = \frac{1}{U_{\text{rms}}^2}$ ,  $\beta = \frac{1}{R^2}$ .

$R(\Omega)$	$U_{\text{rms}}(\text{V})$	$\bar{P} = \frac{U_{\text{rms}}^2}{R}(\text{W})$	$\frac{1}{R^2} (\times 10^{-6} \Omega^{-2})$	$\frac{1}{R\bar{P}} (\Omega \cdot \text{W})^{-1}$
410	6.22	0.094	5.948	0.0259
468	7.28	0.113	4.565	0.0189
564	8.42	0.126	3.143	0.0141
596	8.82	0.131	2.815	0.0129
680	9.86	0.143	2.162	0.0103
1 032	13.78	0.184	0.938	0.0053
1 089	14.36	0.189	0.843	0.0048
1 313	16.18	0.199	0.580	0.0038
1 500	17.36	0.201	0.444	0.0033



(续表)

1 712	18. 63	0. 203	0. 341	0. 002 9
2 064	20. 15	0. 197	0. 234	0. 002 5
2 180	20. 49	0. 193	0. 210	0. 002 4
3 300	22. 81	0. 158	0. 091	0. 001 9
3 768	23. 43	0. 146	0. 070	0. 001 8
3 980	23. 66	0. 141	0. 063 1	0. 001 8
4 800	23. 98	0. 120	0. 043 4	0. 001 7
5 480	24. 40	0. 109	0. 033 3	0. 001 7

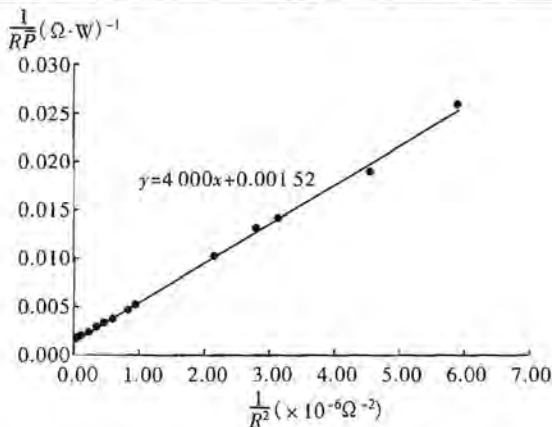


图 1-90

上图中直线的斜率  $a = (4\,000 \pm 39) \Omega/W$ , 在纵轴上的截距  $b = (1.52 \pm 0.09) \times 10^{-3} (\Omega \cdot W)^{-1}$ , 故待测的电容值为

$$C = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{1}{2\pi \times 50} \sqrt{\frac{1.52 \times 10^{-3}}{4\,000}} \quad F = 1.96 \times 10^{-6} \quad F = 1.96 \mu F.$$

另解: 定义  $\alpha = R^2$ ,  $\beta = \left(\frac{R}{U_{\text{rms}}}\right)^2$ , 则  $\alpha = \left(\frac{1}{2} \epsilon_0^2\right) \beta - \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2$ .

$R(\Omega)$	$U_{\text{rms}}(\text{V})$	$\bar{P} = \frac{U_{\text{rms}}^2}{R} (\text{W})$	$\left(\frac{R}{U_{\text{rms}}}\right)^2 (\Omega/\text{V})^2$	$R^2 (\times 10^6 \Omega^2)$
410	6.22	0.094	4.345	0.17
468	7.28	0.111	4.133	0.22
564	8.42	0.126	4.487	0.32
596	8.82	0.131	4.566	0.36
680	9.86	0.144	4.756	0.46
1 032	13.78	0.186	5.609	1.07
1 089	14.36	0.190	5.751	1.19



(续表)

1 313	16. 18	0. 200	6 585	1. 72
1 500	17. 36	0. 202	7 466	2. 25
1 712	18. 63	0. 202	8 445	2. 93
2 064	20. 15	0. 195	10 492	4. 26
2 180	20. 49	0. 193	11 320	4. 75
3 300	22. 81	0. 159	20 930	10. 89
3 768	23. 43	0. 147	25 863	14. 20
3 980	23. 66	0. 141	28 297	15. 84
4 800	23. 98	0. 122	40 067	23. 04
5 480	24. 40	0. 109	50 441	30. 03

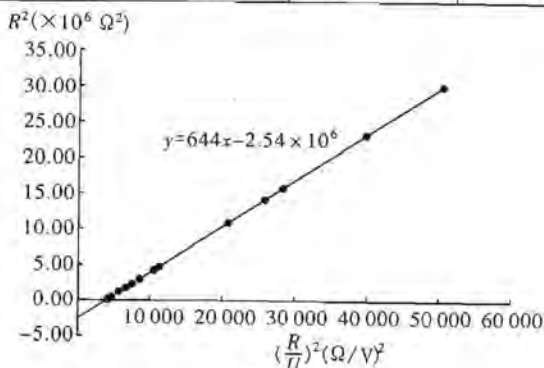


图 1-91

从图中可读出纵轴上的截距为  $-\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2 = -(2.54 \pm 0.03) \times 10^6 \Omega^2$ , 故待测的电容值为

$$\frac{1}{\omega C} = 1.59 \times 10^3 \Omega.$$

$$C = 2.00 \times 10^{-6} \text{ F} = 2.00 \mu\text{F}.$$

(g) 在(e)题中电容值的不确定量计算如下

$$C \pm \Delta C = C \left(1 \pm \frac{\Delta R}{R}\right) = 1.9 \mu\text{F} \times \left(1 \pm \frac{5}{100}\right) = (1.9 \pm 0.1) \mu\text{F}.$$

在(f)题中电容值的不确定量计算如下

$$\begin{aligned} C \pm \Delta C &= C \left[1 \pm \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta a}{a}\right)\right] \\ &= 1.96 \mu\text{F} \times \left[1 \pm \frac{1}{2} \times \left(\frac{0.09}{1.52} + \frac{39}{4000}\right)\right] \\ &= (1.96 \pm 0.07) \mu\text{F}. \end{aligned}$$



### 题 16 (2008·国际物理竞赛题)

#### 差示测温法

在本题中,我们将采用差示测温法来完成以下两项任务:(1)测定一个固态晶体物质的凝固点;(2)测定一块太阳能电池的效率。

#### 差示测温法

实际中采用正向偏置的硅二极管作为温度传感器。如果流过二极管的电流强度保持不变,则二极管两端的电压降与温度间存在关系为

$$V(\theta) = V(\theta_0) - \alpha(\theta - \theta_0). \quad (1)$$

其中,  $V(\theta)$  和  $V(\theta_0)$  分别为在温度  $\theta$  和室温  $\theta_0$  (单位为  $^{\circ}\text{C}$ ) 下二极管两端的电压降, 系数

$$\alpha = (2.00 \pm 0.03) \text{ mV}/^{\circ}\text{C}. \quad (2)$$

对不同的二极管, 电压降  $V(\theta_0)$  的值略有不同。

如果 2 个二极管被放置在不同的温度下, 那么可通过测量 2 个二极管上的电压降之差来测量温度差。图 1-92 是实验考试中所用二极管传感差示温度计的电路图。由 9 V 电池  $E$  提供的电源, 分别通过  $10 \text{ k}\Omega$  的电阻  $R_1$  和  $R_2$  正向加在二极管  $D_1$  和  $D_2$  上。在此电路中可以认为通过二极管的电流强度保持不变。

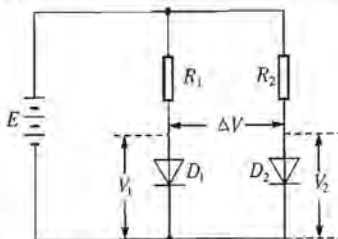


图 1-92 二极管传感器电路

记二极管  $D_1$  的温度为  $\theta_1$ , 二极管  $D_2$  的温度为  $\theta_2$ , 根据式 (1) 有

$$V_1(\theta_1) = V_1(\theta_0) - \alpha(\theta_1 - \theta_0),$$

$$V_2(\theta_2) = V_2(\theta_0) - \alpha(\theta_2 - \theta_0).$$

于是差电压为

$$\Delta V = V_2(\theta_2) - V_1(\theta_1) = \Delta V(\theta_0) - \alpha \Delta \theta. \quad (3)$$

其中  $\Delta \theta = \theta_2 - \theta_1$ 。通过测量差电压  $\Delta V$ , 可以不必分别测量  $D_1$  和  $D_2$  的温度而直接得到它们的温度之差, 这即是所谓的差示测温法。由于  $V_1$  和  $V_2$  一般要远大于  $\Delta V$ , 相应地, 它们的测量误差也会远大于  $\Delta V$  测量误差, 所以, 差示测温法测得的温度差精度要比用  $\theta_2 - \theta_1$  得到的温度差的精度高得多。在最后测量结果仅依赖于温度差的场合, 采用差示测温法是正确的选择。

在本实验中用电路盒为二极管加偏置。图 1-93 是电路盒的电路图。电路盒中包括 2 个  $10 \text{ k}\Omega$  的二极管偏置电阻, 用于连接 9 V 电池的接头和连接二极管  $D_1$  和  $D_2$  的插孔, 以及供万用表测量二极管  $D_2$  上的电压降  $V_2$  和二极管  $D_1$  和  $D_2$  的差电压  $\Delta V$  的插孔。

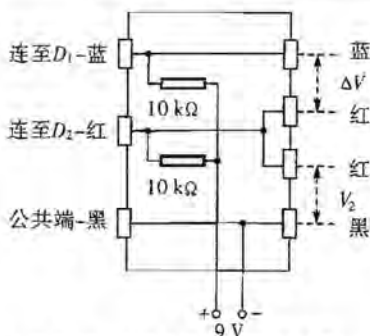


图 1-93 电路盒的电路图(俯视图)

## 2.1 任务 I 结晶物质凝固点测定

### 2.1.1 实验装置

除电路盒外,考场还提供如下器材:

- a. 用作热源的 20 W 卤素灯.
- b. 树脂薄板制成的底座,树脂板上开有方孔,孔上固定有一小块薄钢板.
- c. 2 个焊接有硅二极管的小钢盘,一个为参照盘,另一个为样品盘,每个盘子都放在 1 块磁铁上,磁铁的吸力使小盘子、磁铁、钢板连在一起,磁铁同时保证钢板与小盘子之间适当的热接触,灰色的塑料盒子制成的罩子可以用来防止小盘子受到外部的影响,加热用卤素灯、底座、磁铁、小盘子的放置如图 1-94 所示.

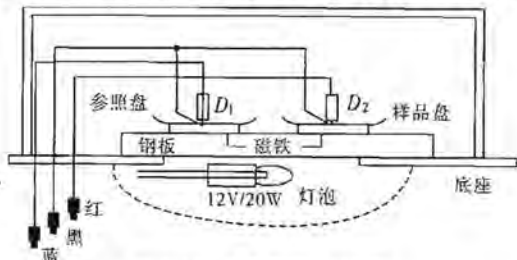


图 1-94 测量凝固点的装置

- d. 2 个作电压表用的数字万用表.当功能选择旋钮放在“ $^{\circ}\text{C}/^{\circ}\text{F}$ ”挡上时,万用表也可以用来测量室温.
  - e. 1 个 9 V 电池.
  - f. 带接头的导线.
  - g. 装有约 20 mg 待测物质的安瓿.
  - h. 1 块秒表.
  - i. 1 个计算器.
  - j. 绘图专用纸若干.
- ### 2.1.2 实验内容



将固态晶体物质加热熔化后使其降温,此物质将在确定的温度  $\theta_S$  下凝固,该温度即为此物质的凝固点或熔点.测量凝固点  $\theta_S$  的传统方法是观察冷却过程中温度随时间的变化.由于会放出相变潜热,凝固过程中物质的温度将保持不变.如果物质的质量很大,温度维持在相变点的时间会较长,凝固点可以方便地测得.但如果物质的质量很小,温度保持在相变点的时间会很短,这使得  $\theta_S$  的测量变得很困难.

为在物质质量少的情况下测得  $\theta_S$ ,可采用差示测温法.采用 2 个小盘,其中一个盘盛有少量待测物质(样品盘),另一个盘不盛任何物质(参照盘).将 2 个盘子放到温度随时间缓慢变化的热源上.传递到 2 个盘子的热流大小基本一致.每个盘子都带有 1 个温度的传感器(正向偏置的硅二极管).在没有发生相变的情况下,样品盘的温度  $\theta_{\text{samp}}$  和参照盘的温度  $\theta_{\text{ref}}$  以基本相同的速率随时间变化,因此  $\Delta\theta = \theta_{\text{ref}} - \theta_{\text{samp}}$  随  $\theta_{\text{ref}}$  缓慢变化.在待测物质发生相变的情况下,  $\theta_{\text{ref}}$  将保持不变,并且等于  $\theta_S$ ,而  $\theta_{\text{ref}}$  仍然保持变化,因此  $\Delta\theta$  将快速变化.在  $\Delta\theta$  随  $\theta_{\text{ref}}$  变化的关系图中会有一个突变.  $\Delta\theta$  突变对应的  $\theta_{\text{ref}}$  即为  $\theta_S$ .

本实验的任务是采用传统方法和差示测温法测量固态晶体物质的凝固点  $\theta_S$ .已知  $\theta_S$  在  $50 \sim 70^\circ\text{C}$  间.实验中所用物质的质量约为 20 mg.

A. 先将 2 个磁铁对等地安放在钢板上,再将参照盘和空的样品盘放在磁铁上(如图 1-95 所示).左边的盘子为参照盘,其上的二极管为  $D_1$  (被称为参照用二极管),右边的盘子为样品盘,其上的二极管为  $D_2$  (被称为测量用二极管).

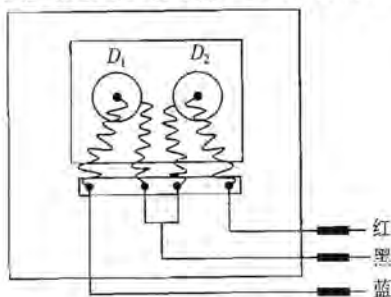


图 1-95 放在底座上的盘子(俯视图)

按图 1-96 所示的方式将卤素灯灯罩朝下反放在台面上,先不打开灯电源.把底座放到灯上,将装置连接好.

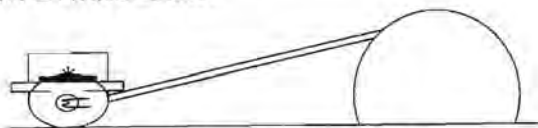


图 1-96 用卤素灯作加热源

为了避免因最初的升温过程所引起的误差,所以强烈建议在正式测量前将测温装置打开并预热 5 min.



- A1. 测量室温  $\theta_0$  和室温  $\theta_0$  下样品盘上二极管  $D_2$  上的电压降  $V_{\text{samp}}(\theta_0)$ .
- A2. 分别计算温度为  $50^\circ\text{C}$ 、 $70^\circ\text{C}$  和  $80^\circ\text{C}$  时测量用二极管上电压降的理论值  $V_{\text{samp}}(50^\circ\text{C})$ 、 $V_{\text{samp}}(70^\circ\text{C})$  和  $V_{\text{samp}}(80^\circ\text{C})$ .

B. 在 2 个盘子空着的情况下打开灯, 观察  $V_{\text{samp}}$  的值. 当样品盘温度达到  $80^\circ\text{C}$  时, 将灯关闭.

B1. 先等待样品盘温度降到  $70^\circ\text{C}$ , 然后在钢板降温过程中观测  $V_{\text{samp}}$  和  $\Delta V$  随时间的变化. 每隔  $10\sim 20\text{ s}$  读 1 次  $V_{\text{samp}}$  和  $\Delta V$  的值, 并且记录在给定的表中, 如果  $\Delta V$  变化过快, 则应该减小测量间隔时间. 样品盘温度降到  $50^\circ\text{C}$  后结束测量.

B2. 在绘图专用纸上作  $\theta_{\text{samp}}$  随时间  $t$  变化图, 称之为 Graph 1.

B3. 在绘图专用纸上作  $\Delta V$  随  $V_{\text{samp}}$  变化图, 称之为 Graph 2.

C. 将安瓿中的待测物质倒入样品盘中, 按与 B 完全一致的步骤进行实验测量.

C1. 将  $V_{\text{samp}}$ ,  $\Delta V$  和  $t$  记录在所给的表中.

C2. 在绘图专用纸上作  $V_{\text{samp}}$  随时间  $t$  变化图, 称之为 Graph 3.

C3. 在绘图专用纸上作  $\Delta V$  随  $V_{\text{samp}}$  变化图, 称之为 Graph 4.

D. 通过比较 B 和 C 得到的变化曲线, 确定被测量物质的凝固点.

D1. 采用传统方法测定  $\theta_S$ : 比较 C 和 B 得到的  $V_{\text{samp}}$  随时间  $t$  变化的曲线, 即 Graph 3 和 Graph 1, 在 Graph 3 上标出凝固点对应的点, 并确定与凝固点对应的  $V_{\text{samp}}$  值  $V_S$ , 求出被测量物质的凝固点  $\theta_S$ , 并估算其误差.

D2. 采用差示测温法测定  $\theta_S$ : 比较 C 和 B 得到的  $\Delta V$  随  $V_{\text{samp}}$  变化的曲线, 即 Graph 4 和 Graph 2, 在 Graph 4 上标出凝固点对应的点, 并确定凝固点对应的  $V_{\text{samp}}$  的值  $V_S$ . 求出被测量物质的凝固点  $\theta_S$ , 并估算其误差.

D3. 根据测量数据和装置的误差, 计算用差温测量法测定的  $\theta_S$  的误差. 写出误差计算过程, 最后将  $\theta_S$  的测量值和误差一起写在答题纸上.

## 2.2 任务 II 测定白炽灯照射下的太阳能电池的效率

太阳能电池的效率被定义为: 太阳能电池能够向外电路提供的电功率与电池所接收到的辐射总功率之比. 在本实验中, 用 1 只卤素白炽灯作辐射光源. 为了测定太阳能电池的效率, 需要测量灯正下方相距  $d$  处的辐照度  $E$  和受此辐照下太阳能电池的最大输出功率  $P_{\text{max}}$ . 在本实验中,  $d=12\text{ cm}$  (见图 1-97), 辐照度定义为  $E = \frac{\Phi}{S}$ . 其中  $\Phi$  是辐照通量 (即被照射表面接收的总功率),  $S$  是被照射表面的面积.

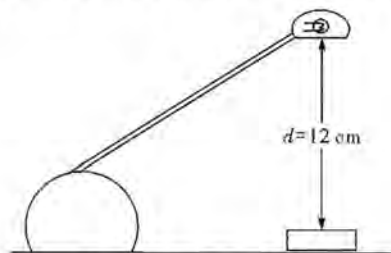


图 1-97 用卤素灯做光源



## 2.2.1 实验器材

a. 1只20W的卤素灯.

b. 辐射探测器是铜制空锥,其内表面被用烟尘涂成黑色(图1-98).空锥与外界环境不完全绝热.在本实验中,上述探测器可看做是理想黑体,测温二极管 $D_2$ 被固定在辐射探测器上,因此二极管的温度与空锥的温度相同.用来测量环境温度的参照二极管 $D_1$ 被置于装放探测器的盒子内壁.探测器(即空锥和测量二极管)的总热容量为 $C=(0.69\pm 0.02)\text{J/K}$ .

c. 1个如图1-93所示的电路盒.

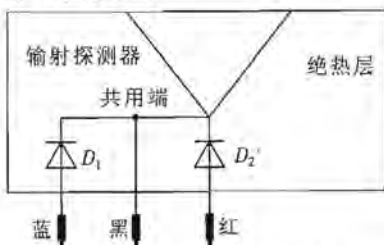


图 1-98 辐射探测器的示意图

d. 1片被固定在塑料盒中的太阳能电池(见图1-99).

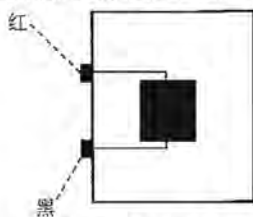


图 1-99 太阳能电池

e. 2个数字万用表.作电压表使用时,万用表的内阻可以当做无穷大,其读数误差为最末位上的 $\pm 2$ .作电流表使用时,万用表的内阻不能忽略.万用表也能用来测量室温.

f. 1个9V电池.

g. 1个可调电阻.

h. 1块秒表.

i. 1把毫米刻度的直尺.

j. 带接头的导线.

k. 绘图专用纸若干.

## 2.2.2 实验内容

探测器会因吸收辐射能量而被加热.与此同时,探测器又会通过几种方式散发热量,这些方式包括热传导、对流、辐射等.因此,在时间间隔 $dt$ 内探测器吸收的辐射能量等于使探测器温度升高的热量与探测器传递给外界的热量之和:

$$\Phi dt = Cd\theta + dQ.$$

其中  $C$  是探测器和二极管  $D_2$  的热容量,  $d\theta$  是温度的增加量,  $dQ$  是散发的热量.

当探测器与环境的温度差  $\Delta\theta = \theta - \theta_0$  较小时, 可以认为在时间间隔  $dt$  内探测器传给环境的热量  $dQ$  正比于  $\Delta\theta$  和  $dt$ , 即  $dQ = k\Delta\theta dt$ , 其中  $k$  是一个具有  $W/K$  量纲的因子. 因此, 假定  $k$  为常量,  $\Delta\theta$  为小量, 有

$$\Phi dt = Cd\theta + k\Delta\theta dt = Cd(\Delta\theta) + k\Delta\theta dt,$$

或

$$\frac{d(\Delta\theta)}{dt} + \frac{k}{C} \Delta\theta = \frac{\Phi}{C}. \quad (4)$$

求解式(4)可得, 从探测器开始接收具有恒定辐照度的辐射时(设此时  $t=0$ ,  $\Delta\theta=0$ )起, 温度差  $\Delta\theta$  随时间  $t$  的变化

$$\Delta\theta(t) = \frac{\Phi}{k} (1 - e^{-\frac{k}{C}t}). \quad (5)$$

如果去掉辐射, (4)式变成

$$\frac{d(\Delta\theta)}{dt} + \frac{k}{C} \Delta\theta = 0. \quad (6)$$

而温度差  $\Delta\theta$  按以下规律随时间变化

$$\Delta\theta(t) = \Delta\theta(0)e^{-\frac{k}{C}t}. \quad (7)$$

其中  $\Delta\theta(0)$  是  $t=0$  时刻的温度差.

A. 测定室温  $\theta_0$ .

B. 搭建测量辐射探测器温度的电路, 电路包括 2 个二极管传感器(在探测器内)、电路盒和万用表.

B1. 把探测器置于光源下距灯泡  $d=12\text{ cm}$  处. 灯处于关闭状态. 观测  $\Delta V$  的变化约 2 min, 以 10 s 的间隔读数, 测定式(3)中  $\Delta V(\theta_0)$  的值.

B2. 打开灯照射探测器. 观测  $\Delta V$  的变化, 每隔 10~15 s 记录 1 个  $\Delta V$  的值, 并填到答题纸上给定的表中. 2 min 后将灯关闭.

B3. 从灯下移开探测器. 观测  $\Delta V$  的变化约 2 min. 其间, 每隔 10~15 s 记录 1 个  $\Delta V$  的值, 并填到答题纸上给定的表中.

C. 适当选取  $x$  和  $y$  变量, 在  $x$ - $y$  坐标系中作图, 以证明在灯关闭后, 式(7)成立.

C1. 写出  $x$  和  $y$  变量的表达式.

C2. 作  $y$  随  $x$  变化的曲线图, 称之为 Graph 5.

C3. 由上述曲线图确定  $k$  的值.

D. 适当选取  $x$  和  $y$  变量, 在  $x$ - $y$  坐标系中作图, 以证明在探测器被光照时, 式(5)成立.

D1. 写出  $x$  和  $y$  变量的表达式.

D2. 作  $y$  随  $x$  变化的曲线图, 称之为 Graph 6.



D3. 确定探测器探测窗口处辐照度  $E$  的值。

E. 把太阳能电池放在原来辐射探测器所在的位置,并将其接到由 2 个万用表和 1 个可调电阻器组成的电路中。电路中的可调电阻器可被用来改变太阳能电池上的负载。在不同的电阻值下,测量电路中的电流和太阳能电池上的电压。

E1. 画出本节所用的电路图。

E2. 调节可调电阻器的旋钮,以改变负载的阻值。记录旋钮在每个位置时电流  $I$  和电压  $V$  的值,并填到答题纸上给定的表中。

E3. 作功率随电流变化曲线,称之为 Graph 7。这里,功率指电池供给负载的功率,电流指通过电池的电流。

E4. 由上图求出电池的最大功率  $P_{\max}$ ,并估算其误差。

E5. 写出与最大功率相对应的电池的效率的表达式,并计算该效率的值和误差。

**【分析】** 本题要求完成的任务,并不一定是学生在中学学过的内容,奥赛比较注重考查的是学生快速而准确地学习和理解新知识的能力。因此,本题的特点是仪器装置简单,实验原理和操作步骤描述详细,但测量和处理的数据量多,实验中需注意的细小环节较多,例如在求凝固点的实验要求中有:用一个塑料盒制成的罩子防止小钢盘受外界影响,如不加罩子,可能使空气流动引起的温度涨落非常大,以致鉴别不出凝固点,从而实验失败,正所谓“细节决定成败”。又如,实验中存在许多误差源,在作误差估计时,应分清哪些是主要的,哪些是次要的,不能“抓了芝麻丢了西瓜”。

本题任务之一:测定结晶物质的凝固点,是热学的内容,学生并不陌生。传统的方法是观察冷却过程中温度随时间的变化,在温度-时间关系曲线上找平台。而本题还要求用差示测温法测量,本题的说明中对该方法作了详细阐述,相当于提示。

任务之二:测定太阳能电池的效率,学生可能接触不多,但从本题的说明中可以学习一些。

**【解】** 不同实验装置得到的实验结果会有所不同,在阅卷时一般不会对具体结果有严格的要求。但是对下列结果有准确度的限制:

a. 任务 I 中  $\theta_0$  值及误差;

b. 任务 II 中  $k$ 、 $E$ 、 $\frac{P_{\max}}{S_{\text{cell}}}$  和  $\eta_{\max}$  及其误差。

任务 I 的解答采用了赛会提供的数据,任务 II 的解答采用了贺卓然同学的实验数据。

### 3.1 任务 I 答案

A. A1 的答案:  $\theta_0 = (25 \pm 1)^\circ\text{C}$ ;  $V_{\text{temp}}(\theta_0) = (574 \pm 3)\text{mV}$ 。

所用万用表的精度为 0.5%,题目中又特别指出,在作电压表用时,万用表末位误差为  $\pm 2$ (若不特别指出,末位误差可取 1)。数字万用表的误差为:指示值  $\times$  仪器精度  $+$  末位误差。这里,  $\theta_0$  直接由万用表的温度挡测得,因没有特别说明,末位误差

可认为是 $\pm 1^\circ\text{C}$ ,故示数为 $25^\circ\text{C}$ 时的误差为 $\delta\theta=(25\times 0.5\%+1)^\circ\text{C}\approx 1^\circ\text{C}$ .测 $V_{\text{samp}}(\theta_0)$ 时,万用表示值为 $573.9\text{mV}$ ,误差为 $\delta V=(573.9\times 0.5\%+0.2)\text{mV}=3.1\text{mV}\approx 3\text{mV}$ . $V_{\text{samp}}(\theta_0)$ 依赖于二极管特性,不同实验装置间差异可达 $40\text{mV}$ .

参赛的5名中国大陆学生对数字仪表的精度都没有完全掌握,计算误差时都只考虑了末位误差,故所给的电压误差值要比标准值小1个量级.

A2 的答案:

将各数值代入式①中,有

$$V_{\text{samp}}(50^\circ\text{C})=(524\pm 4)\text{mV},$$

$$V_{\text{samp}}(70^\circ\text{C})=(484\pm 4)\text{mV},$$

$$V_{\text{samp}}(80^\circ\text{C})=(464\pm 5)\text{mV}.$$

计算误差时用到了 $\delta V_{\text{samp}}(\theta)=\delta V_{\text{samp}}(\theta_0)+(\theta-\theta_0)\delta\alpha$ ,其中 $\delta V_{\text{samp}}(\theta_0)$ 取 $3\text{mV}$ , $\delta\alpha$ 在式①中已给出,为 $0.03\text{mV}/^\circ\text{C}$ .

B. 要在 $10\text{s}$ 内读出 $t, V_{\text{samp}}$ 和 $\Delta V$ 3个数,并将后2个记录在表中,时间非常紧迫,所以,在测量前需要作好充分准备.上节要求算的3个温度对应的电压表读数实际上是为本节作准备的,分别对应停止加热、开始读数和停止读数时的值.表1为未加入样品时冷却过程的数据,其中 $t$ 的测量误差为 $\pm 3\text{s}$ , $V_{\text{samp}}$ 的测量误差为 $\pm 3\text{mV}$ , $\Delta V$ 的误差 $\pm 0.2\text{mV}$ .

表1 未加入样品时冷却过程的数据

$t/\text{s}$	$V_{\text{samp}}/\text{mV}$	$\Delta V/\text{mV}$	$t/\text{s}$	$V_{\text{samp}}/\text{mV}$	$\Delta V/\text{mV}$
0	492	-0.4	240	509	-1.8
10	493	-0.5	250	509	-1.9
20	493	-0.5	260	510	-1.9
30	494	-0.6	270	511	-1.9
40	495	-0.7	280	512	-2.0
50	496	-0.7	290	512	-2.0
60	497	-0.8	300	513	-2.1
70	497	-0.8	310	514	-2.1
80	498	-0.9	320	515	-2.1
90	499	-1.0	330	515	-2.1
100	500	-1.0	340	516	-2.1
110	500	-1.1	350	516	-2.2
120	501	-1.1	360	517	-2.2
130	502	-1.2	370	518	-2.3
140	503	-1.2	380	518	-2.3
150	503	-1.3	390	519	-2.3
160	504	-1.3	400	520	-2.4



170	504	-1.4	410	520	-2.4
180	505	-1.5	420	521	-2.5
190	506	-1.6	430	521	-2.5
200	507	-1.6	440	522	-2.5
210	507	-1.7	450	523	-2.6
220	508	-1.7	460	523	-2.6
230	508	-1.8			

±3 s 的时间测量误差是估计的,这其实不会影响到后面结果.如果测量时间间隔不是在 10~20 s 之内和测量范围明显偏离 50~70 °C 将分别会被扣 0.25 分.

$\Delta V$  因仪器差别可达 ±40 mV,且随温度的下降既可能上升,也可能下降,完全取决于 2 个小盘的放置位置.

B2. 图 1-100 即为题中所要求的 Graph 1. 在 Graph 1 中画出了误差棒,考试时并不要求. 评卷时要求曲线是平滑的和单调上升的.

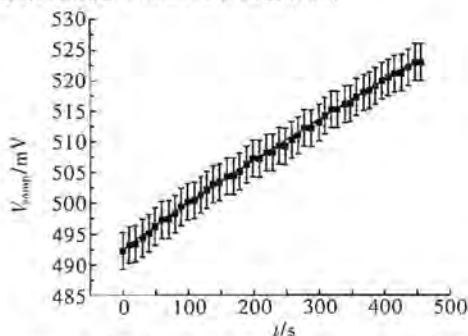


图 1-100 降温过程(未加样品)样品盘温度随时间的变化

B3. 图 1-101 即是题中所要求的 Graph 2. 评卷时对此图的要求是:曲线应为平滑的和单调的. 与 Graph 1 不同,在 Graph 2 的实验点中可能会出现连续几个点纵轴坐标相同的情况. 这显然是由于仪器分辨本领不够造成的,不是曲线本身的规律. 所以,绘制曲线时不能画成一个平台,否则就会被扣分.

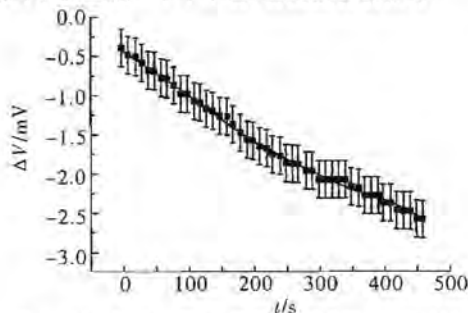


图 1-101 降温过程(未加样品)温差随时间的变化

C. 除了要在样品盘中加入样品外,其他与 B 完全相同,加入样品后降温过程的实验结果如表 2 所示.其中  $t$  的测量误差为  $\pm 3$  s,  $V_{\text{samp}}$  的测量误差为  $\pm 3$  mV,  $\Delta V$  的测量误差为  $\pm 0.2$  mV.

表 2 加入样品后降温过程的实验结果

$t/s$	$V_{\text{samp}}/\text{mV}$	$\Delta V/\text{mV}$	$t/s$	$V_{\text{samp}}/\text{mV}$	$\Delta V/\text{mV}$
0	492	-4.6	240	508	-5.9
10	493	-4.6	250	509	-5.7
20	493	-4.6	260	510	-5.5
30	494	-4.6	270	511	-5.3
40	495	-4.6	280	512	-5.1
50	496	-4.6	290	512	-5.0
60	497	-4.6	300	513	-4.9
70	497	-4.5	310	514	-4.8
80	498	-4.5	320	515	-4.7
90	499	-4.5	330	515	-4.7
100	500	-4.5	340	516	-4.6
110	500	-4.5	350	516	-4.6
120	501	-4.5	360	517	-4.5
130	502	-4.6	370	518	-4.5
140	503	-4.6	380	518	-4.4
150	503	-5.1	390	519	-4.4
160	503	-5.6	400	520	-4.4
170	503	-6.2	410	520	-4.4
180	503	-6.5	420	521	-4.4
190	504	-6.6	430	521	-4.3
200	505	-6.5	440	522	-4.3
210	506	-6.4	450	523	-4.3
220	507	-6.3	460	523	-4.3
230	507	-6.1			

C 的实验要求与 B 一样,但应注意倒入样品盘中的样品粉末要紧靠测温二极管.

C2. 图 1-102 即为题中所要求的 Graph 3. 评卷时对此图的要求是要有一个小平台,并且用箭头标出.

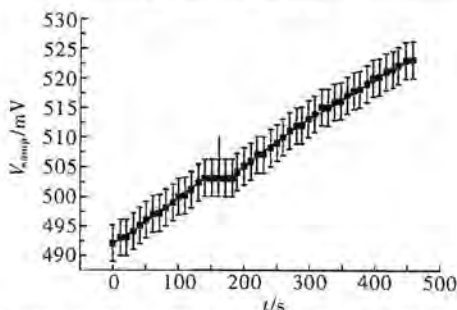


图 1-102 降温过程(加有样品)样品盘温度随时间的变化

C3. 图 1-103 即为题中所要求的 Graph 4. 评卷时对此图的要求: 要存在  $\Delta V$  的突变, 要有一个峰, 要用箭头指出凝固点位置. 图中  $\Delta V$  的突变发生在  $V_{\text{samp}} = 503 \text{ mV}$  处, 箭头应指在突变区的中点, 但箭头位置上下变化几乎不影响  $V_{\text{samp}}$ .

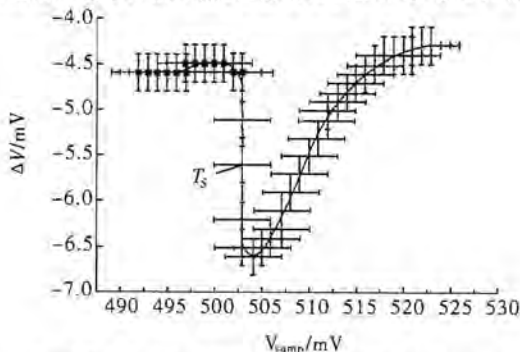


图 1-103 样品盘与参考盘间温差(加样品后)和样品盘温度的关系

D. 在传统方法中, 凝固点可由 Graph 3 中曲线平台所对应的样品盘二极管电压  $V_{\text{samp}}$  求得. 在差示温度计法中, 凝固点可由 Graph 4 中  $\Delta V$  的突变点对应的样品盘二极管电压  $V_{\text{samp}}$  求得.

D1 中 Graph 3 上箭头标出了凝固点位置. 从图读得:  $V_S = (503 \pm 3) \text{ mV}$ ,  $\theta_S = (61 \pm 2)^\circ \text{C}$ .

D2 中 Graph 4 上箭头标出了凝固点位置. 从图读得:  $V_S = (503 \pm 3) \text{ mV}$ ,  $\theta_S = (61 \pm 2)^\circ \text{C}$ .

D3 中凝固点测量的误差估算

由  $\theta_S = \theta_0 + \frac{V(\theta_0) - V(\theta_S)}{\alpha} = \theta_0 + A$ , 有

$$\delta\theta_S = \sqrt{(\delta\theta_0)^2 + (\delta A)^2}.$$

其中,

$$\delta A = \frac{V(\theta_0) - V(\theta_S)}{\alpha} \sqrt{\left\{ \frac{\delta[V(\theta_0) - V(\theta_S)]}{V(\theta_0) - V(\theta_S)} \right\}^2 + \left( \frac{\delta\alpha}{\alpha} \right)^2}.$$



这里,

$$\delta[V(\theta_0) - V(\theta_5)] = \sqrt{[\delta V(\theta_0)]^2 + [\delta V(\theta_5)]^2}.$$

实验中各项误差为:  $\delta\theta_0 = 1^\circ\text{C}$ ,  $\delta V(\theta_5) \approx \delta V(\theta_0) = 3\text{ mV}$ ,  $\delta\alpha = 0.03\text{ mV}/^\circ\text{C}$ , 代入上面各式可得:

$$\delta[V(\theta_0) - V(\theta_5)] = 4.2\text{ mV}.$$

$$\delta A \approx 2.2^\circ\text{C}.$$

$$\delta\theta_5 \approx 2.4^\circ\text{C}.$$

最后结果中, 误差取  $2^\circ\text{C}$  或  $3^\circ\text{C}$  均可. 如果采用其他合理误差估计方法, 能得到相近的结果也可以接受. 显然, 对误差贡献最大的是  $\delta V$ , 从 4 条曲线可以看出, 虽然误差棒较长, 但数据的涨落并不大, 说明  $\delta V$  主要是不确定性系统误差.

这里还想指出, 虽然差示测温法使辨别凝固点更容易, 但没有增加凝固点的测量精度, 因为凝固点是温度而不是温差.

### 3.2 任务 II 答案

A. 直接用具有测温功能的万用表测量室温, 结果如下, 误差分析与任务 I 中 A1 相同.  $\theta_0 = (24 \pm 1)^\circ\text{C}$ .

B. 将电路盒、辐射探测器和万用表(作电压表)按要求接好, 并将探测器放在卤素灯下的正确位置. 分别按不开灯、开灯和关灯后 3 种情况测量  $\Delta V$ . 不开灯时的数据如表 3 所示, 其中  $\Delta V$  的误差为  $\pm 0.2\text{ mV}$ .

表 3 不开灯时的数据

$t/s$	$\Delta V(\theta_0)/\text{mV}$	$t/s$	$\Delta V(\theta_0)/\text{mV}$
0	-10.2	70	-10.1
10	-10.2	80	-10.1
20	-10.1	90	-10.1
30	-10.2	100	-10.1
40	-10.1	110	-10.2
50	-10.2	120	-10.2
60	-10.2		

$\Delta V(\theta_0)$  反映的是 2 个测温二极管的差异, 不同实验装置间相差  $-40\text{ mV} \sim +40\text{ mV}$  都可接受. 测得  $\Delta V(\theta_0)$  只应该有统计涨落而不应有系统性的变化.

表 3 中  $\Delta V(\theta_0)$  的平均值为  $-10.15\text{ mV}$ , 标准差为  $0.05\text{ mV}$ . 仪器误差(不确定性系统误差)为  $0.2\text{ mV}$ . 故最后结果为

$$\Delta V(\theta_0) = -(10.1 \pm 0.2)\text{ mV}.$$

开灯后的数据如表 4 所示, 其中  $\Delta V$  的误差为  $\pm 0.2\text{ mV}$ .



表 4 开灯后的数据

$t/s$	$\Delta V(\theta_0)/mV$	$t/s$	$\Delta V(\theta_0)/mV$
0	-14.0	70	-22.9
10	-16.0	80	-23.5
20	-17.6	90	-24.1
30	-19.0	100	-24.4
40	-20.2	110	-24.9
50	-21.3	120	-25.3
60	-22.2		

相对于无光照时,光照下  $\Delta V(\theta_0)$  可以有 10 mV~20 mV 的变化. 这里也同样要求取样间隔为 10 s~20 s.

关灯后的数据如表 5 所示, 其中  $\Delta V$  的误差为  $\pm 0.2$  mV.

表 5 关灯后的数据

$t/s$	$\Delta V(\theta_0)/mV$	$t/s$	$\Delta V(\theta_0)/mV$
0	-20.0	70	-14.0
10	-18.7	80	-13.5
20	-17.5	90	-13.0
30	-16.6	100	-12.7
40	-15.7	110	-12.4
50	-15.0	120	-12.1
60	-14.4		

为避免灯灯的余热的影 响,关灯后要把探测器从灯下移开再开始测量.

C. 为证明式⑦成立,需要用关灯后测得的数据作图. 最好的办法是让图的纵横轴的变量间有线性关系. 由于探测器有热惯性,作图时最好不要用刚停止照射时测到的数据.

C1. 作 Graph 5 时,取  $x=t$ ;  $y=\ln[\Delta V(\theta_0)-\Delta V(t)]$ . 当然,其他能使  $x$  与  $y$  间成线性关系的表达式亦可.

C2. 图 1-104 即为题中所要求的 Graph 5. 由 Graph 5 可以看出  $y-x$  间满足线性关系,线性拟合的相关度达到 0.999 64.

C3. 线性拟合得到斜率  $k_s = -0.013\ 53/s = -\frac{k}{C}$ . 由此可以看出:  $k = 9.34$  mW/K. 由于 Graph 5 中纵轴的测量误差是不等权的,要估计斜率的误差比较复杂. 但是根据  $\Delta V$  的测量误差和 Graph 5 中数据的线性相关度,可以得出  $k$  的误差基本上来源于  $C$  的结论. 因此估计出  $\delta k \approx 0.3$  mW/K.

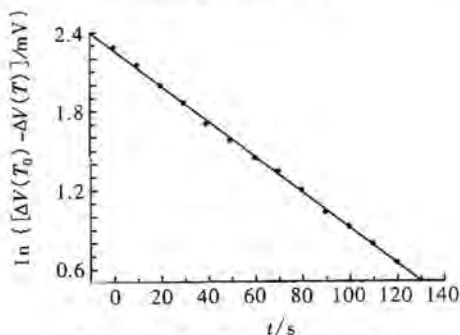


图 1-104 用于验证式⑦的 Graph 5

D. 为证明式⑤成立, 需要用有辐照时测得的数据作图, 并且要适当选取变量使得当式⑤成立时得到的是一条直线.

D1. 可以取  $x = 1 - \exp\left(-\frac{kt}{C}\right)$ ,  $y = \Delta V(\theta_0) - \Delta V(t)$ . 当然, 取  $x = \exp\left(-\frac{kt}{C}\right)$ ,  $y = \Delta V(t)$  等也是可以的.

D2. 按 D1 所取的  $x$  和  $y$ , 用 B2 测得的数据作图, 得 Graph 6, 见图 1-105.

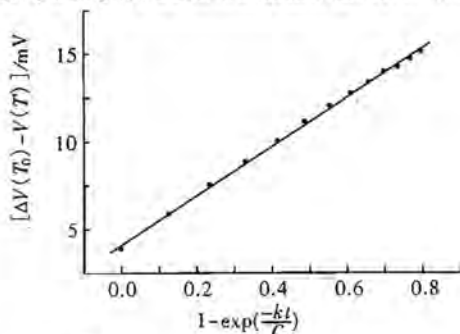


图 1-105 证明式⑤成立的 Graph 6

Graph 6 的线性相关度达 0.999 2, 因此可以证明式⑤成立. 拟合得到的直线斜率为:  $k_6 = 13.94 \text{ mV}$ , 据此可以算出  $\Phi = k_6 \frac{k}{\alpha} = 64.8 \text{ mW}$ , 这里, 因为是中间过程, 有效数字多保留 1 位, 用直尺测得探测器直径为 27.0 mm. 因此得:

$$E = \frac{\Phi}{S_{\text{det}}} = \frac{4\Phi}{\pi D_{\text{det}}^2} = 113 \text{ W/m}^2.$$

E. 太阳能电池的效率

E1. 测量线路见图 1-106. 由于题中已说明电压表内阻可以视为无穷, 而电流表内阻不能忽略, 电压表必须外接. 太阳能电池不能用二极管符号表示, 可用没有固定含意的任意符号加文字说明来表示.

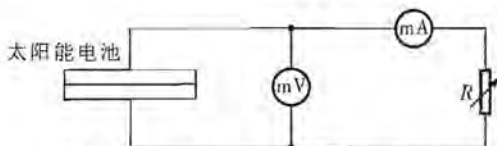


图 1-106 太阳能电池输出功率测量线路图

E2. 太阳能电池输出功率的测量数据见表 6. 其中  $I$  的测量误差为  $(\pm 0.05 \sim \pm 0.1)\text{mA}$ ,  $V$  的测量误差为  $(\pm 0.3 \sim \pm 3)\text{mV}$ .

表 6 太阳能电池输出功率的测量数据

$I/\text{mA}$	$V/\text{mV}$	$P/\text{mW}$	$I/\text{mA}$	$V/\text{mV}$	$P/\text{mW}$
0.00	476	0.00	9.92	415	4.12
2.99	465	1.39	10.3	409	4.20
4.01	459	1.84	11.2	396	4.43
4.60	456	2.10	12.2	376	4.58
4.99	453	2.26	13.4	351	4.68
5.47	451	2.46	13.5	349	4.69
5.61	449	2.52	14.3	297	4.26
6.09	445	2.71	14.7	266	3.90
6.48	444	2.88	15.0	230	3.45
7.41	437	3.24	15.8	24.2	0.381
8.87	425	3.77			

E3. 用 E2 的测量结果作图得到 Graph 7, 即图 1-107.

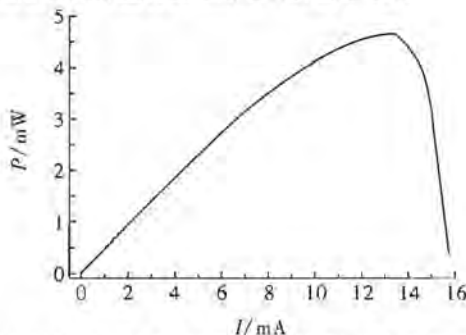


图 1-107 太阳能电池输出功率与电流的关系(Graph 7)

E4. 从图上读出  $P_{\max} = 4.70 \text{ mW}$ , 由测量贡献的  $P_{\max}$  的相对误差约为 1%, 由曲线推得  $P_{\max}$  时引入的相对误差估计为 5%, 故最后的结果为  $P_{\max} = (4.7 \pm 0.2) \text{ mW}$ .

E5. 用直尺测得太阳能电池的长和宽为:  $a = (2.45 \pm 0.05) \text{ mm}$ ,  $b = (2.10 \pm 0.05) \text{ mm}$ . 效率表达式为

$$\eta_{\max} = \frac{P_{\max}}{ES_{\text{cell}}} = 0.081 = 8.1\%$$

误差估计

$$\delta\eta_{\max} = \eta_{\max} \sqrt{\left(\frac{\delta P_{\max}}{P_{\max}}\right)^2 + \left(\frac{\delta E}{E}\right)^2 + \left(\frac{\delta S_{\text{cell}}}{S_{\text{cell}}}\right)^2}$$

$\frac{\delta P_{\max}}{P_{\max}}$  由 Graph 7 估计约为 5%,  $\frac{\delta S_{\text{cell}}}{S_{\text{cell}}}$  由米尺的测量误差估计约为 5%。要严格

估计  $\frac{\delta E}{E}$  的估计比较复杂, 由

$$E = \frac{\Phi}{S_{\text{der}}} = \frac{k_6 \times (-k_5) \times C}{S_{\text{der}}}$$

考虑到 Graph 5 和 Graph 6 的线性相关度都较高,  $k_5$  和  $k_6$  的相对误差均不超过 2%, 可以略去。于是有

$$\frac{\delta E}{E} = \sqrt{\left(\frac{\delta C}{C}\right)^2 + \left(\frac{\delta S_{\text{der}}}{S_{\text{der}}}\right)^2} \approx 6\%$$

其中,  $C$  和  $S_{\text{der}}$  的相对误差分别为 3% 和 5%。

最后得:

$$\delta\eta_{\max} = \eta_{\max} \sqrt{\left(\frac{\delta P_{\max}}{P_{\max}}\right)^2 + \left(\frac{\delta E}{E}\right)^2 + \left(\frac{\delta S_{\text{cell}}}{S_{\text{cell}}}\right)^2} = 0.81,$$

$$\frac{\delta\eta_{\max}}{\eta_{\max}} \approx 9.2\%$$

$$\delta\eta_{\max} \approx 0.0075,$$

$$\eta_{\max} = 8.1\% \pm 0.8\%$$

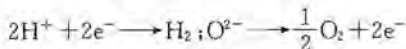
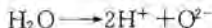
由于误差的严格估计非常复杂, 在评卷时不管学生采用什么方法, 只要合理, 且最后结果与此相近, 都可以接受。

#### 题 17 (2002 · 国际物理奥赛题)

#### 用电解法测定 $\frac{e}{k_B}$

背景理论

水的电解用下列反应来描述



当浸在水中的一对电极间有电流通过时, 就发生上述反应。假定在反应中产生的两种气体都是理想气体。

反应产生的一种气体收集在刻有任意标度的试管中, 如果知道总的转移电荷和试管中的气体体积,  $\frac{e}{k_B}$  就能确定, 这里  $e$  是电子的电荷,  $k_B$  是玻耳兹曼常量。

为了上述目的, 本实验分成两部分。



A 部分:用动力学方法对试管上的任意标度进行定标,这一结果将在 B 部分中应用。

B 部分:用水的电解法测定物理量  $\frac{e}{k_B}$ 。

A 和 B 两部分实验的进行次序可以颠倒。

设下列物理量为已知:

重力加速度  $g=(9.78\pm 0.01)\text{m/s}^2$ ,

试管的内外半径比为  $\alpha=0.82\pm 0.01$ ,

实验室的温度  $T$  和压强  $p$  由考场提供。

**本实验提供的仪器:**

1. 一任意标度的试管。
2. 三种不同直径的绝缘铜线:粗褐色线,细褐色线,蓝色线。
3. 可调电源(0~60 V,最大输出电流 1 A)。
4. 一个塑料容器和一瓶水。
5. 带有塑料螺丝钳夹的铜块,用来保持电极位置不动,以防止破坏导线的绝缘性。
6. 数字式秒表。
7. 万用表(注意正确的使用步骤)。
8. 木质试管夹,使试管保持竖直。
9. 多用途小滴管。
10. 垂直支座。
11. 用于做标记的一瓶白色改正液。
12. 割刀。
13. 一把剪刀。
14. 一卷透明胶带。
15. 一个钢球。
16. 一片用作电极的不锈钢片。
17. 作图纸。

**注意:**

所有作图纸上和仪器(例如试管)上的刻度都以同一单位标度,但并不是以毫米为单位标度。

**实验**

**A 部分:试管上任意标度的定标**

1. 确定能将任意长度标度转换为常用标度的动力学方法。
2. 写出你的实验测量量与试管的任意标尺刻度的关系式,并画出实验装置草图。
3. 采集和分析实验数据,计算并标定未知长度的标度。

**B 部分:物理量  $\frac{e}{k_B}$  的测定**

1. 建立具有适当试管安置的电解实验,以收集在反应过程中产生的一种气体.
2. 导出实验中待测量时间  $t$ , 电流  $I$  和试管中水平面的高度差  $\Delta h$  的关系式.
3. 采集和分析实验数据,作为简化,你可以假定试管内的气体压强在实验过程中始终为常量.

4. 确定  $\frac{e}{k_B}$  的值.

问题:

#### A 部分

1. 说明你选定的方法,并画出此方法的实验装置草图.
2. 写出你所选方法中测量量的关系式,说明得到该表达式所用的所有近似.
3. 按下列顺序采集并整理数据:物理量,数值,单位.
4. 用两种独立测出量的关系图来说明定标的优劣,并指出该定标可用范围.
5. 用毫米确定任意标度的最小单位,并估计测量引起的误差.

#### B 部分

1. 画出实验装置的草图.
2. 导出下列表达式.

$$I \Delta t = \frac{e}{k_B} \frac{2\rho(\pi r^2)}{T} \Delta h.$$

3. 按下列格式采集并整理数据:  
物理量(数值,单位).
4. 确定  $\frac{e}{k_B}$  的值并估计其误差.

**【分析】** 此题知识面较宽,涉及力学、热学、电学和化学的一些基本概念. 要求学生自己设计实验方法,组装仪器装置,需要学生有较强的动手能力,所以,是一道检验综合素质和能力的竞赛题. 此题的 A 部分是为 B 部分服务的,主要是为试管上任意标度定标,实质上是测量长度,用什么方法可以达到此目的呢? 这里大家自然会想到单摆,因为单摆周期表达式中包含长度、重力加速度,而且提供的仪器也足以组装一个单摆,用秒表测出单摆周期后,因重力加速度为已知,所以可以绝对地确定长度,也就可以为任意标度定标了.

**【解】** A、1. 实验中选择一个简单的单摆系统对任意标度进行定标.(实验所用试管上刻度分度值不等于 1 mm,定义为任意标度)

2. 由牛顿第二定律得

$$F = m \frac{d^2 l \theta}{dt^2} = ml \frac{d^2 \theta}{dt^2}.$$

式中  $F$  为作用力,  $m$  为小球质量,  $\theta$  为单摆偏离垂直方向的角度,  $l$  为摆长,  $t$  为时间.

$$F = -mg \sin \theta.$$

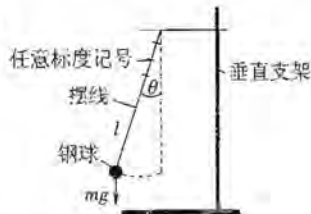


图 1-108 实验装置草图



$$m \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mg\sin\theta}{l} = 0.$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g\sin\theta}{l} = 0.$$

作近似

$$\sin\theta \approx \theta.$$

则

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g\theta}{l} = 0.$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0. (\omega^2 = \frac{g}{l})$$

①

①式为简谐运动方程,角频率 $\omega$ 为

$$\omega = \frac{2\pi}{T_{\text{osc}}} = \sqrt{\frac{g}{l}}, T^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g}.$$

测量量的表达式:周期  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ .

作近似

理想单摆满足:摆线质量 $\ll$ 钢球质量,钢球半径 $\ll$ 摆线长度,不考虑摆线伸缩及空气阻力等.

3. 从简单单摆实验中得到的数据样本

周期数 $\geq 20$ ,周期差距 $\geq 0.01\text{s}$ ,数据组数 $\geq 4$ 

序号	50个周期 $T$ 所需时间/s	周期 $T$ /s	线上所标刻度/任意标度
1	91.47	1.829	200
2	89.09	1.782	150
3	86.45	1.729	100
4	83.80	1.676	50

4.

序号	周期 $T$ /s	线上所标刻度/任意标度	周期平方 $T^2/\text{s}^2$
1	1.829	200	3.347
2	1.782	150	3.176
3	1.729	100	2.989
4	1.676	50	2.809

 $T^2$ -线上任意标度直线图。(略)

5. 任意标度中最小单位的测定(单位为mm)

$$T_{\text{osc}_1}^2 = \frac{4\pi^2}{g} l_1, T_{\text{osc}_2}^2 = \frac{4\pi^2}{g} l_2.$$



$$T_{\text{osc}_1}^2 - T_{\text{osc}_2}^2 = \frac{4\pi^2}{g} (l_1 - l_2) = \frac{4\pi^2}{g} \Delta l.$$

$\Delta l = \frac{g}{4\pi^2} (T_{\text{osc}_1}^2 - T_{\text{osc}_2}^2)$  或其他的等效表达式, 作图方法等.

序号	周期平方差/ $s^2$	$\Delta l$ 的计算值/mm	$\Delta l$ /任意标度	任意标度最小单位值/mm
1	$T_1^2 - T_2^2 = 0.171$	0.0426	50	0.85
2	$T_1^2 - T_3^2 = 0.357$	0.0886	100	0.89
3	$T_1^2 - T_4^2 = 0.537$	0.1330	150	0.89
4	$T_2^2 - T_3^2 = 0.185$	0.0460	50	0.92
5	$T_2^2 - T_4^2 = 0.365$	0.0907	100	0.91
6	$T_3^2 - T_4^2 = 0.180$	0.0448	50	0.90

任意标度最小单位平均值,  $\bar{l} = 0.89 \text{ mm}$ .

测量所引起的误差估算

序号	任意标度最小单位值/mm	$(l - \bar{l})/\text{mm}$	$(l - \bar{l})^2/\text{mm}^2$
1	0.85	-0.04	0.0016
2	0.89	0	0
3	0.89	0	0
4	0.92	0.03	0.0009
5	0.91	0.02	0.0004
6	0.90	0.01	0.0001

所以标准偏差为

$$\Delta l = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^6 (l - \bar{l})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{0.003}{5}} \text{ mm} = 0.02 \text{ mm}.$$

也可使用其他合理方法.

B. 1. 实验装置如图 1-109 所示.

2. 时间  $t$ , 电流  $I$  以及水平面差  $\Delta h$  关系的公式推导

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

在反应  $2\text{H}^+ + 2e \rightarrow \text{H}_2$  中, 产生的一定量的分子 ( $\Delta N$ ) 所需电荷量的转移为

$$\Delta Q = 2e\Delta N.$$

$$I = \frac{\Delta N 2e}{\Delta t}.$$

$$p\Delta V = \Delta N k_B T = \frac{I \Delta t}{2e} k_B T.$$

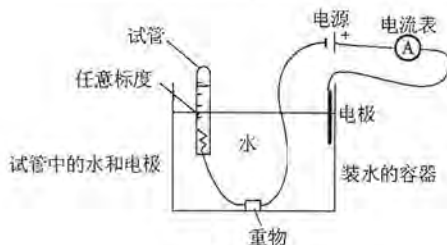


图 1-109

$$p\Delta h(\pi r^2) = \frac{I\Delta t k_B}{2e} T.$$

$$I\Delta t = \frac{e}{k_B} \frac{2p(\pi r^2)}{T} \Delta h.$$

## 3. 实验数据

序号	$\Delta h$ /任意标度	$I$ /mA	$\Delta t$ /s
1	12	4.00	1 560
2	16	4.00	2 281
3	20	4.00	2 940
4	24	4.00	3 600

- 试管周长为 46 个任意标度。
- 基于水面读数的不确定性所允许的误差范围,选  $\Delta h \geq 4$  个标度单位;基于电流干扰,选  $I \leq 4$  mA。
- 数据组数  $\geq 4$ 。

获得实验数据的外界条件

$$T = 300 \text{ K},$$

$$p = 1.00 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

4.  $\frac{e}{k_B}$  值的测量

序号	$\Delta h$ /任意标度	$\Delta h$ /mm	$I$ /mA	$\Delta t$ /s	$I\Delta t/10^3 \text{ C}$
1	12	10.68	4.00	1 560	6.24
2	16	14.24	4.00	2 281	9.12
3	20	17.80	4.00	2 940	11.8
4	24	21.36	4.00	3 600	14.4

上面所列出的数据  $I\Delta t - \Delta h$  标绘图。(略)

从图中得到的斜率为 763.94。

$$\begin{aligned}\frac{e}{k_B} &= \frac{763.94 \times 300 \times \pi}{2 \times 10^3 \times (23 \times 0.89 \times 10^{-3} \times 0.82)^2} \text{ C} \cdot \text{K/J} \\ &= 1.28 \times 10^4 \text{ C} \cdot \text{K/J}.\end{aligned}$$

另解

序号	$\Delta h/\text{mm}$	$I\Delta t/10^3\text{C}$	斜率	$(\frac{e}{k_B})/10^4(\text{C} \cdot \text{K} \cdot \text{J}^{-1})$
1	10.68	6.24	584	0.977
2	14.24	9.12	640	1.07
3	17.80	11.8	661	1.11
4	21.36	14.4	674	1.13

$\frac{e}{k_B}$  的平均值为  $1.07 \times 10^4 \text{ C} \cdot \text{K/J}$ .

计算得到的标准偏差约为  $0.66 \times 10^3 \text{ C} \cdot \text{K/J}$ .



## 黑盒问题

在国际和国内物理奥林匹克竞赛中,经常有黑盒试题出现.其中电学黑盒题较多,偶而也有光学黑盒试题.黑盒题属于判断型试题,由于它们出现频繁,以及它们解法所具有的特点,故把它们专列一章.

解黑盒问题要求学生既有扎实的物理基础知识,又有较强的探索和思维能力,还能根据题意正确无误地设计电路或光路,熟练地安装、调试与操作仪器设备,此外,还应具有验证判断的正确性、证实结果的唯一性的能力.

近年来,黑盒问题又发生了一些变化,大致有如下三种趋势:1. 由无源元件向有源元件发展.早期的电学黑盒试题所用元件多半是电阻、电容、二极管、电感等等,近年来又加上了电池、交流电源、变压器等等;2. 由直流向交流发展.早期的试题中电源绝大多数为直流的,判断用的仪器设备也都是直流的,如万用电表等.近年来的试题要么是黑盒中包含交流电源,要么是检测仪器使用交流仪器或电子仪器,如音频信号发生器、示波器等等;3. 由单一向综合发展.早期的试题一般是单纯地判断黑盒内的元件并测出其参量,近年来的试题不仅如此,还要用最简单的仪器或器材,设计某种实验证明自己的判断是正确的和唯一的,有的题则进一步要求利用判明的元件搭试某种电路或光路,观测某种物理现象并作物理解释,或者进行某种测量.这样,由单一的黑盒判断发展为既有判断,又有测定或证明的综合题.总之,越来越难.

请考生留意目前的命题发展趋势,做好足够的思想准备.

下面将电学黑盒和光学黑盒试题的一般解法做一概述.

### 一、电学黑盒问题解法

所谓电学黑盒,是把电子元器件放入有若干接线柱的封闭盒子中,按某种方式连接,并且连接到接线柱上.命题中提供一定的仪器或器材,供判断和实验用,如万用电表、示波器、信号发生器、电阻箱、开关和导线等等.实验者用给定的仪器,通过在外接线柱上的测试,进行分析、综合,判定盒内的电子元件、元件数值和电路连接,具有一定的探索性.根据电子元件的特性和检测仪器的使用条件,电学黑盒的检测方法和判断程序如图 2-1 所示.步骤如下:

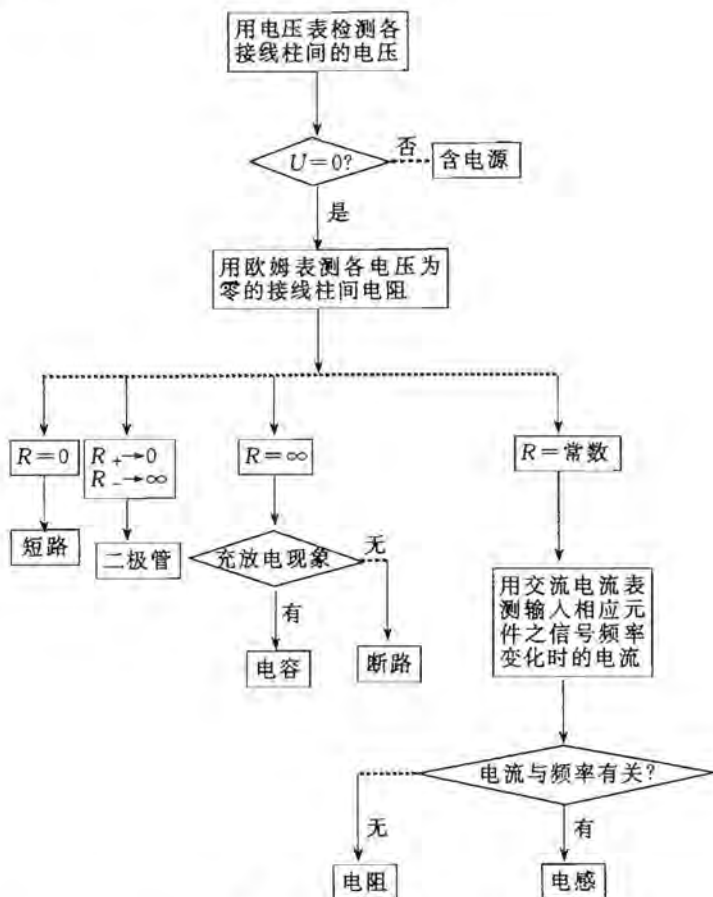


图 2-1 电学黑盒判断流程

1. 首先用万用表的直流电压挡(或小灯泡)判断黑盒内有无电池.即用电压挡检测各接线柱之间的电压;若  $U \neq 0$ ,则含电池;若均为  $U = 0$ ,则不含电池.为防止电源电动势太大损坏电表,先将电压挡放在较高量程,然后再改变到指针偏转大小合适的挡.

2. 用欧姆挡判断元件性质,即用欧姆挡检测电压为零的接线柱间的电阻情况.有如下几种可能:

(1)  $R = 0$ ,则为短路.

(2)  $R_+ \rightarrow 0, R_- \rightarrow \infty$ ,表示元件加正向电压时电阻很小;加反向电压时电阻很大.换句话说,用欧姆挡测两个接线柱间的电阻,并将两表笔互换位置再测,若阻值相差很大,则说明有二极管.

(3)  $R = \infty$ ,即用欧姆挡测两个接线柱间电阻时,显示无穷大.若无充放电现象(充



放电现象为指针有一偏转后,又回到“∞”处),则为断路。若有充放电现象,为含电容器。

(4)  $R$  = 常数,此时进一步用信号发生器、交流电流表与该元件串联,保持信号发生器输出电压不变,改变其输出频率,通过交流电流表观察电路中电流与频率的关系。若无交流电流表,可用交流电压挡测元件两端的电压,看其与频率的关系。若与频率无关,则该元件为电阻,否则为电感。

3. 确定电感元件的数值。对于确定为电感的元件,将它与一阻值已知的电阻(或电阻箱)以及信号发生器串联成一回路,并用电压挡分别测出电感和电阻器上的电压  $U_L$  和  $U_R$ ,由交流电路欧姆定律算出阻抗  $Z_L$ ,

$$Z_L = \frac{U_L}{I} = \frac{R \cdot U_L}{U_R}$$

$$\text{由 } Z_L = 2\pi fL, \text{ 求出电感 } L = \frac{RU_L}{2\pi fU_R}$$

上式中  $R$  为电阻器的阻值,  $f$  为信号发生器输出电压的频率。

以上测试中忽略了电感线圈本身的电阻,若元件本身的电阻  $r$  不能忽略,则可用直流电源与元件串联,用直流电压挡测  $U_r$ ,再用信号发生器与该元件串联,用交流电压挡测出电压  $U_L'$ ,则

$$U_L = \sqrt{U_L'^2 - U_r^2}$$

4. 确定电容元件的数值。

方法一:与测量电感相同,将电容与电阻器(或电阻箱)、信号发生器串联成闭合回路,用交流电压挡分别测出  $U_R$  和  $U_C$ ,则

$$C = \frac{U_R}{2\pi fRU_C}$$

式中  $R$  为电阻器阻值,  $f$  为信号发生器输出频率。

方法二:利用电容器时间常数法。

用欧姆挡与电容器并联,记录欧姆挡中电池通过欧姆中值电阻  $R$  给电容器充电的时间,一般充电到接近饱和的时间  $t = (3 \sim 5)RC$ ,由此大约可估计电容器的电容。

作出上述测试后,对元件的猜测有时不是唯一的,极易出现一题多解,有时猜测也可能不正确,这时还要设法证实结果的唯一性,并用其他试验否定自己的猜测,否定不了的猜测将是正确的。

最后绘出整体电路,解题结束。

## 二、光学黑盒问题解法

光学黑盒问题是在黑盒内放置光学元件,在不打开黑盒的条件下判定盒内是什么元件,如何放置,并绘出电路。光学黑盒问题的解法有与电学黑盒问题相似之处,也有与电学黑盒解法不同的地方。

光学黑盒问题的基本求解方法为“光路分析法”。要确定黑盒内部结构,需掌握光学元件对光路的作用。主要光学元件对光路的作用如图 2-2 所示。平面镜对称地改变光的传播方向,玻璃砖不改变光的传播方向,但出射光相对入射光有一定位移,棱镜使光线传播方向改变,凸透镜有会聚作用,凹透镜有发散作用。

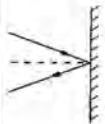
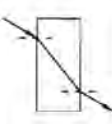
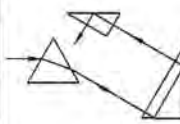
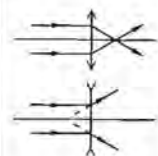
元件	平面镜	玻璃砖	棱镜	透镜
作用	 <p>对称地改变传播方向</p>	 <p>方向不变,有一定位移</p>	 <p>方向改变</p>	 <p>凸透镜有会聚作用 凹透镜有发散作用</p>

图 2-2

根据上述原则,可确定黑盒中为何种光学元件及其位置,从而判断黑盒可能的结构。

有时解光学黑盒问题,还需利用球面镜和透镜成像的知识,动脑筋分析判断黑盒中的元件与结构。

### 题 1 (2007·全国物理竞赛题)

#### 电学黑盒子

目的:利用黑盒子的元器件和含有交、直流成分的电源  $E$  (输出电压的波形如图 2-3 所示) 设计一电路,使发光二极管(LED)正常发光,并要求电源  $E$  的极性交换后发光二极管仍能正常发光。

器材:500 型指针式多用电表一只;黑盒子一只 (其面板如图 2-4 所示,面板上左侧有两个不与任何元器件连接的接线柱),黑盒子内的元器件是二极管、电容、一个发光二极管(LED) 和一个可变电阻器,且已知元器件间互不相连,一个接线插孔只和一个元件的一端相连。含有交直流成分的电源  $E$  一个;双刀双掷开关一只;导线若干根。

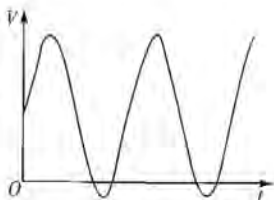


图 2-3

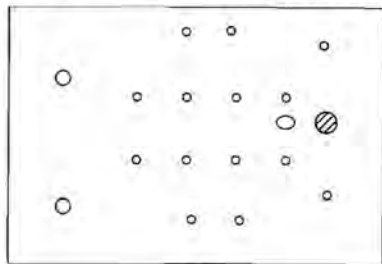


图 2-4



要求:

1. 用多用电表判别黑盒子中各元器件,并用元件符号把判别出的元器件画在图 2-5 中.

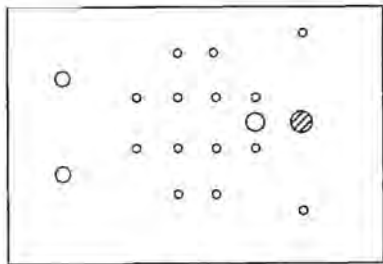


图 2-5

2. 测出开路时电源  $E$  的直流电压值和交流电压值(提示:可以借用黑盒子中的电学元件),把测得的直流电压值和交流电压值填在空格中:直流电压值是 \_\_\_\_\_;交流电压值是 \_\_\_\_\_.

3. 用电源  $E$  和黑盒子中的所有元器件连接一电路,使发光二极管正常发光.

(1)把电路原理图画在下面的方框(图 2-6)中.



图 2-6

(2)把判断出的元器件用元件符号画在下图给出的有关接线柱之间;根据电路原理图和元器件的分布图在图 2-7 的接线柱之间画出连线,使它成为能使发光二极管正常发光还能测量通过发光二极管的电流的电路.

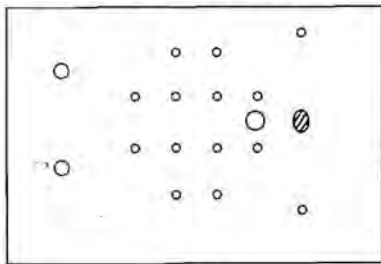


图 2-7

(3)对实物连线,使它成为能使发光二极管发光的实际电路.调节可变电阻器使发光二极管正常发光,测得此时通过发光二极管的电流值为 \_\_\_\_\_.



4. 观察电源  $E$  的极性改变对发光二极管正常发光的影响。

(1) 在图 2-8 给出的双刀双掷开关的示意图上画出连线, 使它成为换向开关。

(2) 把双刀双掷开关接成为换向开关, 并接入电路。用换向开关改变电源的极性测出在换向前后通过发光二极管的电流; 换向前, 通过发光二极管的电流是 \_\_\_\_\_; 换向后, 通过发光二极管的电流是 \_\_\_\_\_。

注意: 接好电路后, 只有在监考老师允许的情况下, 才能接通电源(老师只检查电路的安全性, 不检查电路是否正确); 可申请提示卡(申请提示卡将扣 6 分), 提示卡的内容为黑盒子中的元器件的分布图。

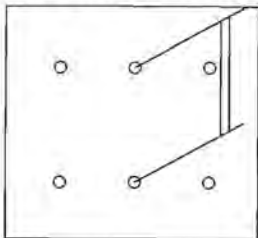


图 2-8

**【分析】** 本题是一道普通的电学黑盒题, 难度不大。用万用表即可判别, 判别方法在本书黑盒题解法概说中已作介绍, 读者可参看。本题在判别后还要求连接使发光二极管正常发光的电路, 并测量发光二极管的电流, 这就使这道黑盒题, 带有测定题的味道了, 不过有万用表和交、直流电源, 测量电流并不困难。

**【解】** 1. 可以判别的元器件如图 2-9 所示。2. 2 V; 3 V。

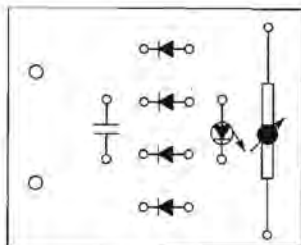


图 2-9

3. (1) 电路原理图如图 2-10 所示。(2) 电路连线图如图 2-11 所示。(3) 10 mA。

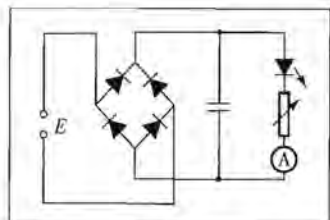


图 2-10

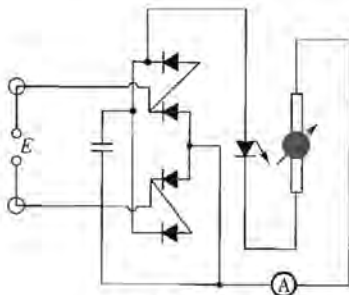


图 2-11

4. (1) 换向开关如图 2-12 所示。(2) 10 mA; 10 mA。

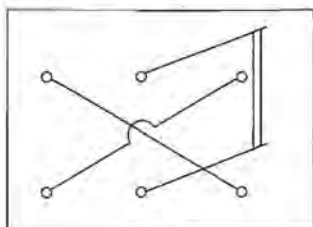


图 2-12

## 题 2 (2003·全国物理决赛题)

### 电阻的组合测量

有 5 个电阻元件已分别装入 5 个小盒接在接线柱上(不得打开小盒),它们的编号分别为  $R_1 \sim R_5$ , 其中 3 个电阻值较小, 它们的电阻值基本相等(电阻值相差不大于 1%), 另 2 个电阻值也基本相等(其电阻值相差不大于 1%), 但它们的电阻值比前 3 个至少大 40%.

请设计一种测试次数不超过 3 次, 就一定能找出这 2 个阻值较大的电阻的实验方案, 然后准确测量其中 1 个的电阻值.

**【仪器和用具】** 直流电源 2 组  $E_1$  和  $E_2$  ( $E_1 > E_2$ , 其内阻可忽略), AC5 型直流指针式检流计 1 只(其使用方法见附录), 检流计限流电阻 1 只 ( $R_0$ ), 六钮电阻箱 1 只 ( $R$ ), 导线若干, 单刀双掷开关 1 只.

### 【要求】

1. 在试卷上写出你所设计的实验方案, 该方案用不超过 3 次测试就一定能找出 2 个阻值较大的电阻, 画出测量电路图、标上符号, 写出实验步骤及判断方法.
2. 用实验找出这 2 个电阻值较大的电阻, 写出它们的编号.
3. 在上面找出的 2 个阻值较大的电阻中任取 1 个, 准确测定其电阻值(令为  $R_M$ ), 不得使用其余 4 个待测电阻.

在试卷上画出测量电路图, 写出实验步骤, 导出计算公式, 记录测量数据并求出结果.(结果要能用 4 位有效数字表示)

**【注意】** 成绩评定以卷面为主要依据.

### 附录 AC5 型直流指针式检流计使用说明

1. 使用时要水平放置.
2. 将小旋钮拨向白色圆点位置, 用零点调节器将指针调至零位.
3. 按下“电计”按钮, 检流计即被接入电路. 开始调节时应在接入限流电阻的情况下, 用跃按法(短暂接通)反复按下“电计”按钮, 调节至检流计基本指零, 然后拆除限流电阻, 再细调至检流计指零.
4. 如需将检流计长期接入电路时, 可将“电计”按钮按下并转一角度锁住即可.
5. 若使用时指针摆动不停, 按一下“短路”按钮指针便立即停止摆动.
6. 电流如果从“+”接线柱流入检流计, 指针偏向表盘的“+”方向.

电流如果从“—”接线柱流入检流计,指针偏向表盘的“—”方向。

7. 检流计使用完毕后必须将小旋钮拨至红色圆点位置,同时把“电计”“短路”旋钮放松。

8. 检流计不得用作电流表读数。

注意安全使用检流计!!!

**【分析】**这是一道电学黑盒题,实质上是用电桥法和补偿法测定电阻。在第一部分用电桥进行电阻的组合测量时,要求考生有较强的逻辑思维和判断能力。实验方案的设计思想是任选4个电阻,组成直流惠斯登电桥。若电桥基本平衡,桥臂上的4个电阻一定是2大2小,桥外余下的是小电阻。若电桥不平衡,则可能有6种情况,这时还可利用检流计中电流方向的指示作为判断的依据。通过逻辑分析确定桥路中电阻分布情况。再改变桥路中电阻的分布(交换电阻位置和置换电阻),并进行测试,就有可能在不超过3次测试的条件下,找出2个大电阻。

解此题的步骤看起来有点繁琐,但其思路是非常清楚的。归纳起来,基本步骤有三:一、用4个电阻(黑盒)接成电桥,进行第一次测试,看是否平衡;二、交换桥臂上电阻进行第二次测试,看是否平衡;三、用桥外余下的电阻置换桥臂电阻,进行第三次测试,看是否平衡,并观察检流计中电流的方向,辅助分析,从而找出两个大电阻。

为了测量大电阻阻值,则使用补偿法,有电压补偿法(电位差计电路)和电流补偿法,一般考生对此都比较熟悉。不过要注意电压补偿法线路中两组电池是同名极相接,电流补偿法中是异名极相接。

**【解】【要求1】**实验方案的设计:

分析与设计思想

任选4个电阻组成电桥,如图2-13, A、B、C、D表示电桥上各电阻的位置,本实验中所采取的测试就是利用检流计和限流电阻检查桥路是否平衡。若不平衡还可在本实验所使用的检流计上查出检流计中电流的方向(见使用说明第6条)。

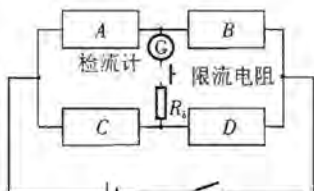


图 2-13

现在对桥路上各种可能的电阻分布情况作如下的分析。

若电桥基本平衡,桥路上的4个电阻一定为2大2小,桥外余下的是小电阻。桥上电阻的分布如图2-14中的4种情况所示:

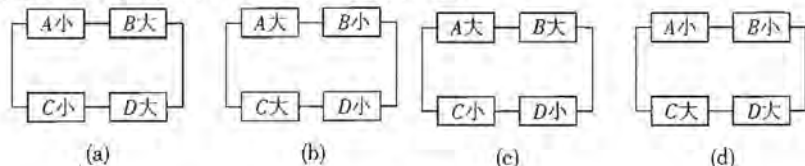


图 2-14

若电桥不平衡,桥路上的4个电阻可能为3小1大;也可能为2大2小,其分布如图2-15中的6种情况所示;桥外余下的电阻在图2-15(c)和(f)情况为小电阻,



在其他情况为大电阻.分析这种桥路中在不接通检流计时,检流计支路两端的电势差,可得知当“跃按”检流计按钮时,检流计中电流的方向.当电源正极接在电桥左边(图 2-13)时,图 2-15(a)、(b)、(c)为检流计中电流方向向下的 3 种情况,图 2-15(d)、(e)、(f)为检流计中电流方向向上的 3 种情况.

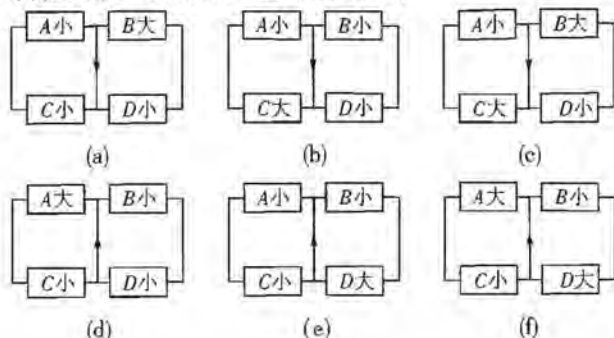


图 2-15

有了以上的分析的结果就可进行测试,每次测试后都可根据测试结果判断桥路中可能的电阻分布情况,并通过改变桥路中电阻的分布再作测试,在不超过 3 次测试的条件下找出 2 个大电阻.

改变桥路中电阻分析的操作也可有 2 种:一种是交换电阻位置,另一种是用电桥外余下的电阻置换桥上的电阻.这种操作都有多种可能选择,因此,此题的解答不是唯一的,下面采用交换 A 与 B 位置的电阻后进行第二次测试,再用桥外余下的电阻置换 C 位置电阻后进行第三次测试的方法,举出一种一定能找出 2 个大电阻的实验方案.

#### 实验方案与判断

(一)任选 4 个电阻按图 2-13 接通电桥,进行第一次测试.

(二)如果第一次测试电桥基本平衡,可知桥路上电阻分布可能为图 2-14 中的 4 种情况,将 A、B 位置的电阻相交换,进行第二次测试.

(1)如果第二次测试仍基本平衡,可知交换前与交换后桥上可能为图 2-14 中的(c)或(d),现在再用桥外余下的小电阻置换 C 位置的电阻进行第三次测试.

①如果第三次测试还基本平衡,则可断定置换前与后桥上为图 2-14(c),A、B 位置上为 2 个大电阻.

②如果第三次测试不平衡,则可断定置换前桥上为图 2-14(d),置换下的电阻与 D 位置上的电阻为 2 个大电阻.

(2)如果第二次测试不平衡,可知交换前桥上可能为图 2-15 中的(a)或(b),交换后分别成为图 2-15 中的(f)或(c).检流计中电流向下时可断定为图 2-15(c),B、C 位置上为 2 个大电阻,电流向上时可断定为图 2-15(f),A、D 位置上为 2 个大电阻,不需进行第三次测试.

(三)如果第一次测试不平衡,可知桥上可能为图 2-15 中的 6 种情况,检流计

中电流向下时可能为图 2-15(a)、(b)、(c), 电流向上时可能为图(d)、(e)、(f), 现在将 A、B 位置的电阻相交换, 进行第二次测试.

(1) 如果第二次测试基本平衡, 即可断定第一次测试时若检流计中电流向下, 则桥上为图 2-15(c), 交换后成为图 2-15(b), 这时 A、C 位置上为 2 个大电阻; 若电流向上则桥上为图 2-15(f), 交换后成为图 2-15(a), 这时 B、D 位置上为 2 个大电阻. 不需进行第三次测试.

(2) 如果第二次测试仍不平衡, 可知交换前桥上可能为图 2-15(a)、(b)、(d)、(e) 4 种情况. 桥外余下的就是一个找的大电阻. 桥上电阻交换后分别成为图 2-15(d)、(b)、(a)、(e). 这时若第一次测试时检流计中电流向下而第二次测试时电流反向, 则可断定交换后桥上为 2-15(d), A 位置上为另一个大电阻; 若第一次测试时检流计中电流向下, 第二次测试时电流仍向下, 则可断定交换后桥上仍为 2-15(b). C 位置上为第二个大电阻; 依次, 对第一次测试时检流计中电流向上的情况也可在交换后桥上的 B、D 位置上找到另一个大电阻. 不需进行第三次测试.

(四) 以上举出了一种满足试题要求的实验方案, 只有在前两次测试都基本平衡时才需要用第三次测试, 其他情形只要有两次测试就可找到 2 个大电阻. 这是因为对于不平衡的桥路还利用了检流计中电流方向的指示作为判断的依据. 如果不考虑电流方向的指示只观察电流的变化, 也可在不超过三次测试的条件下设计出满足试题要求的实验方案, 这里不详述了.

#### 【要求 2】实验记录

1. 选用编号为  $R_1$ 、 $R_2$ 、 $R_3$ 、 $R_4$  的 4 个电阻按图 2-16 接通桥路, 进行第一次测试, 基本平衡.

2. 令  $R_1$ 、 $R_3$  交换位置进行第二次测试, 仍基本平衡. 可知桥上为图 2-14(c) 或(d).

3. 用桥外小电阻置换  $R_2$ , 进行第三次测试, 不平衡, 可断定置换下的与桥上 D 位置的是 2 个大电阻.

结果: 2 个大电阻的编号为  $R_2$ 、 $R_4$ .

#### 【要求 3】测量 $R_M$

方法一: 电压补偿法

1. 测量电路如图 2-17

2. 实验步骤及计算公式

第一次测量:

将 D 接 A, F 接 B, 调节电阻箱并反复按下按钮开关, 当检流计接近为零时, 去掉限流电阻, 继续调节电阻箱为  $R$  值时, 检流计指零, 则有

$$\frac{\varepsilon_1 R}{R + R_M} = \varepsilon_2 \quad \text{①}$$

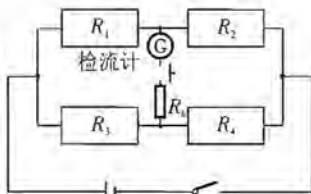


图 2-16

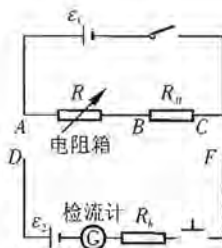


图 2-17



第二次测量:

将  $D$  接  $B$ ,  $F$  接  $C$ , 调节电阻箱并反复按下按钮开关, 当检流计接近为零时, 去掉限流电阻, 继续调节电阻箱为  $R'$  值时, 检流计指零, 则有

$$\frac{\varepsilon_1}{R' + R_M} R_M = \varepsilon_2 \quad (2)$$

式①②联立, 解得

$$R_M = \sqrt{RR'}$$

方法二: 电流补偿法

1. 测量电路如图 2-18

2. 实验步骤及计算公式

第一次测量, 如图 2-18 所示.

调电阻箱为  $R$  值时检流计指零, 则有

$$\frac{\varepsilon_1}{R} = \frac{\varepsilon_2}{R_M} \quad (1)$$

第二次测量, 将电阻箱与  $R_M$  交换位置, 再调电阻箱为  $R'$  值时检流计指零,

则有 
$$\frac{\varepsilon_1}{R_M} = \frac{\varepsilon_2}{R'} \quad (2)$$

二式联立解得

$$R_M = \sqrt{RR'}$$

3. 测量数据及实验结果

数据表

(单位:  $\Omega$ )

	$R$	$R'$	$R_M = \sqrt{RR'}$
1	1 460.5	1 531.6	1 495.6
2	1 461.5	1 531.6	1 496.1
3	1 460.9	1 531.4	1 495.7
	$\overline{R_M} = 1 495.9 \Omega$	平均	1 495.9

题 3 (2004 · 亚洲物理奥赛题)

电学黑盒子

仪器和材料

1. 双踪示波器.
2. 信号发生器, 可以产生频率范围 0.02 Hz 到 2 MHz 的正弦波、三角波和方波信号.
3. 电学黑盒子的接头分为两组: 一组  $ABCD$ , 一组  $A'B'C'D'$ . 另有两个接头的标准电阻  $R_0 = 5 \text{ k}\Omega$ , 与上述两组相独立.
4. 可忽略电阻的连接导线.
5. 坐标纸.

警告:

不允许打开电学黑盒子。

实验

电学黑盒子内有两组无源器件(电阻  $R$ , 电容  $C$ , 或电感  $L$ )。第一组包括三个元件  $Z_1$ 、 $Z_2$  和  $Z_3$ , 如图 2-19 所示连接成一个星形电路, 通过  $A$ 、 $B$ 、 $C$  和  $D$  接出, 其中  $A$  是公共接头。第二组包括三个元件  $Z_1'$ 、 $Z_2'$  和  $Z_3'$ , 如图 2-20 所示, 用与第一组同样的星形电路通过  $A'$ 、 $B'$ 、 $C'$  和  $D'$  接出, 其中  $A'$  是公共接头。

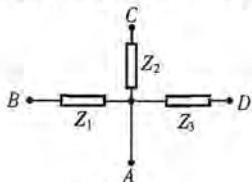


图 2-19

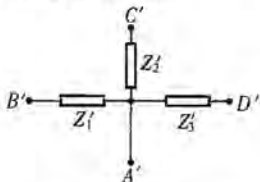


图 2-20

1. 用示波器和信号发生器确定每个元件  $Z_1$ 、 $Z_2$ 、 $Z_3$  和  $Z_1'$ 、 $Z_2'$ 、 $Z_3'$  的类型和参数, 即各元件的电阻  $R$ 、电容  $C$  或者电感  $L$  的值。

2. 把 5 个接头  $B$ 、 $C$ 、 $B'$ 、 $C'$  和  $D'$  连在一起, 成为一个新的电学黑盒子,  $D$ 、 $D'$  和  $A'$  为端点, 称之为  $DD'A'$  黑盒子。

(a) 画出新的黑盒子的电路图。

(b) 用信号发生器在端点  $D$  和  $A'$  之间输入正弦波信号, 分别画出此时电压  $U_{DA'}$  和  $U_{DA}$  的振幅比值  $k$ , 以及相移  $\varphi$  随正弦信号频率  $f$  的关系曲线。

(c) 上述图在确定的频率  $f_0$  处有一个特殊点, 请确定此处  $f_0$  的数值, 以及在  $f_0$  处的电压振幅比  $k$  和此频率处的相移  $\varphi$  的数值。

(d) 导出频率  $f_0$  与此黑盒子中各个元件参数的关系式, 并计算频率  $f_0$  的数值。

附录: 仪器使用说明

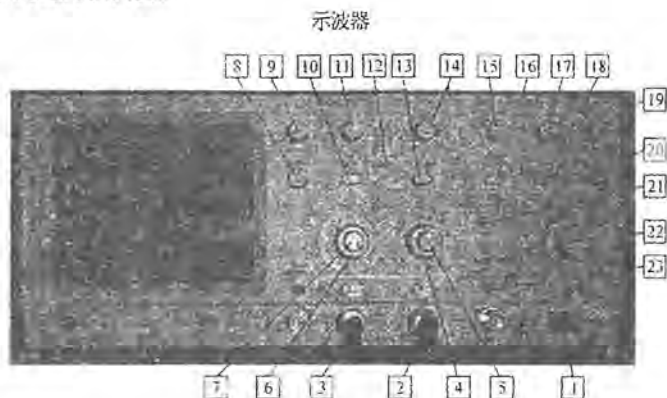


图 2-21

1. ON/OFF 电源开关



2. CH2 或 Y IN 端口 CH2 的垂直输入或 Y 轴输入(X-Y 方式下)
3. CH1 或 X IN 端口 CH1 的垂直输入或 X 轴输入(X-Y 方式下)
4. CH2 VOLTS/DIV 旋钮 CH2 垂直输入的放大因子
5. 7. 连续调节功能 VOLTS/DIV 的连续调节,仅在顺时针旋到底时,VOLTS/DIV 的标度才准确
6. CH1 VOLTS/DIV 旋钮 CH1 输入的放大因子
8. FOCUS 光点调焦
9. INTEN 亮度调节
10. X5 MAG 垂直轴放大 5 倍,即测量电压是 VOLTS/DIV 显示值的  $\frac{1}{5}$
11. CH1 位置调节
12. V MODE 选择 垂直方向信号的模式选择  
 CH1:仅显示 CH1 输入信号  
 CH2:仅显示 CH2 输入信号  
 DUAL:显示 CH1 和 CH2  
 如果触发源用 CH1,  
 TIME/DIV 0.2 s~1 ms,用 CHOP 模式  
 TIME/DIV 0.5 ms~0.2  $\mu$ s,用 ALT 模式  
 ADD:CH1 和 CH2 信号的代数和
13. CH2 INV 键 CH2 信号反转
14. CH2 位置调节
15. Trigger LEVEL 触发电平调节
16. Trigger SLOPE 扫描起始点触发信号的斜率,“+”拉出,“-”按下
17. 水平位置调节
18.  $\times 10$ MAG 扫描时间放大 10 倍,即 TIME/DIV 为显示值的  $\frac{1}{10}$
19. 连续调节功能 TIME/DIV 的连续调节,仅在顺时针旋到底时,TIME/DIV 的标度才准确
20. 连续调节功能开关(与 19 配合) 按下时,方可连续调节,松开时,TIME/DIV 的标度准确
21. 触发模式调节 选择触发模式:  
 AUTO:自动触发模式. 频率大于 25 Hz 时,自动回应至触发扫描  
 NORM:手动触发模式  
 TV-V 和 TV-H:本实验用不到
22. TIME/DIV 扫描时基选择
23. 触发源开头 触发源选择,本实验选 CH1



信号发生器



图 2-22

**【分析】** 本题是一道交流电学黑盒题,与以往出现的黑盒题所不同的是:本题黑盒内有两组无源器件,各组中的元件不是分立的,而是连成网络(星形电路),而且输入的是正弦波信号(即交流电),因此略显复杂。不过有神通广大的检测仪器——双踪示波器,就好办了。它既可测正弦波信号的幅值,又可测相位差,所以,只要对交流电路的幅值和相位关系有清晰的概念,一步一步地仔细做下去,再通过逻辑分析,就可破解此黑盒问题。解题的步骤是判明元件的性质,再求元件的数值。

**【解】** (1)黑盒内电路组件的形式和参数值

调节示波器的伏特/刻度旋钮,使两频道具有相同的电压放大倍数。连接图 2-23 所示的电路,选用函数讯号产生器的正弦波输出,作为电源电压。CH1 显示标准电阻  $R_n$  两端的电压波形  $V_{R_n}$ ; CH2 则显示电源电压的波形  $V_s$ 。观察两波形之间的相角位移,即可判断待测组件的种类。若  $V_s$  和  $V_{R_n}$  之间没有出现相移,则该组件为电阻器;若  $V_s$  的相角较  $V_{R_n}$  超前,则该组件为电感器;若  $V_s$  的相角较  $V_{R_n}$  落后,则该组件为电容器。另由两波形的电压振幅比值,可计算出组件的参数值。若组件为电阻器,则

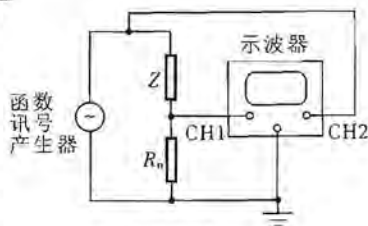


图 2-23

若  $V_s$  的相角较  $V_{R_n}$  超前,则该组件为电感器;若  $V_s$  的相角较  $V_{R_n}$  落后,则该组件为电容器。另由两波形的电压振幅比值,可计算出组件的参数值。若组件为电阻器,则

$$\left| \frac{V_{R_n}}{V_s} \right| = \frac{R_n}{Z + R_n}; \text{若组件为电感器或电容器,则 } \left| \frac{V_{R_n}}{V_s} \right| =$$

$$\frac{R_n}{\sqrt{|Z|^2 + R^2}}. \text{由实验结果得知:}$$

$Z_1'$ 、 $Z_2'$  和  $Z_3$  是电阻器,其电阻值  $Z_1' = Z_2' = 2Z_3 = 10.0 \pm 0.5 \text{ k}\Omega$ 。

$Z_1$ 、 $Z_2$  和  $Z_3'$  是电容器,其电容值  $C_1 = C_2 = \frac{1}{2} C_3' = (47 \pm 2) \mu\text{F}$ 。

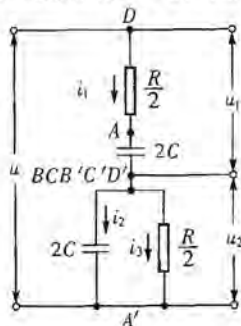


图 2-24

(2)黑盒子内部的电路图和相关的函数曲线



(a)图 2-24 显示新黑盒子  $DD'A'$  的电路图。

(b)将函数讯号产生器的正弦波输出,接通  $D$  和  $A'$  两接头,作为电源电压。连接  $D$  和  $A'$  至示波器的 CH1,另  $D'$  和  $A'$  至 CH2。读取  $U_{DA'}$  和  $U_{DA}$  的电压波形的振幅,可计算比值  $k = \frac{U_{DA'}}{U_{DA}}$ ;另比较两波形,读取相角差  $\varphi$ 。实验结果列表如下:

$f \pm 1(\text{Hz})$	100	150	200	300	330	400	600	800
$k \pm 0.02$	0.28	0.29	0.30	0.32	0.33	0.32	0.30	0.28
$\varphi \pm 5(^{\circ})$	44	28	16	2	0	-8	-24	-38

(c)如图 2-25 和图 2-26 所示的  $k-f$  和  $\varphi-f$  的关系曲线,显示存在有一特别点,其对应的频率  $f_0 = (330 \pm 1)\text{Hz}$ 。在该点的  $k = 0.33 \pm 0.01$  为极大值,相角差  $\varphi = 0$ 。小于该频率的相角差为正值,超过时则转为负值。

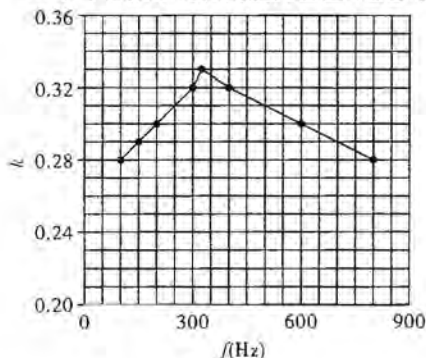


图 2-25

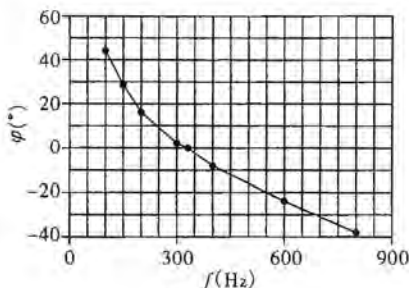


图 2-26

(d) $DD'$  串联电路的电压相位关系如图 2-27 所示,图中  $U_1$  为  $D$  和  $D'$  两点之间瞬时电压  $u_1$  的振幅,由图上的几何关系可得

$$\tan \alpha_1 = \frac{1}{\omega RC},$$

$$U_1 = I_1 \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2\omega C)^2}}.$$

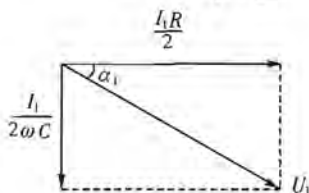


图 2-27

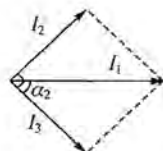


图 2-28

$D'A'$  并联电路的电流相位关系如图 2-28 所示,图中  $I_1$ 、 $I_2$  和  $I_3$  分别为瞬时电流  $i_1$ 、 $i_2$  和  $i_3$  的振幅,  $i_1 = i_2 + i_3$ 。注意在该相位图中,  $D'$  和  $A'$  两点之间的瞬时电压

$i_2$  和瞬时电流  $i_3$  同相。由图上的几何关系可得

$$\tan \alpha_2 = \frac{I_2}{I_3} = \frac{\frac{U_2}{(2\omega C)^{-1}}}{\frac{U_2}{\frac{R}{2}}} = \omega RC.$$

设  $Z_{23}$  为该串联电路的等效阻抗, 则

$$\frac{1}{Z_{23}} = \frac{1}{\frac{R}{2}} + \frac{1}{(j2\omega C)^{-1}}, |Z_{23}| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2}{R}\right)^2 + (2\omega C)^2}},$$

$$U_2 = I_1 |Z_{23}| = \frac{I_1}{\sqrt{\left(\frac{2}{R}\right)^2 + (2\omega C)^2}}.$$

在图 2-24 中,  $u$  为  $D$  和  $A'$  两点之间的瞬时电压,  $u = u_1 + u_2$ 。结合图 2-27 和图 2-28, 可得图 2-29 的总电路相位关系图。

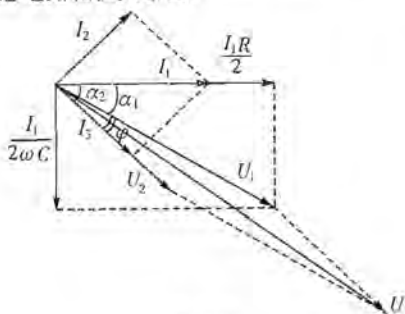


图 2-29

若  $\omega = \frac{1}{RC}$ , 则  $\tan \alpha_1 = \tan \alpha_2 = 1$ 。在此情况下,  $U_1$ 、 $U_2$  和  $U$  三者同相, 即  $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1 = 0$ , 因此得

$$k = \frac{U_{DA'}}{U_{DA'}} = \frac{U_2}{U_1 + U_2}.$$

式中

$$U_1 = I_1 \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2\omega C)^2}} = I_1 \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{I_1 R}{\sqrt{2}},$$

$$U_2 = \frac{I_1}{\sqrt{\left(\frac{2}{R}\right)^2 + (2\omega C)^2}} = \frac{I_1}{\sqrt{\left(\frac{2}{R}\right)^2 + \left(\frac{2}{R}\right)^2}} = \frac{I_1 R}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} U_1,$$

$$k = \frac{U_2}{2U_1 + U_2} = \frac{1}{3}.$$

代入各组件的参数值, 可得对应的频率为

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi \times (10 \times 10^3 \Omega) \times (48 \times 10^{-9} \text{ F})} = 331 \text{ Hz}.$$



此为(c)小题在实验中的观察到的特别点频率.

若  $\omega \neq \frac{1}{RC}$ , 则  $U_1$  和  $U_2$  不同相, 所得的  $k$  值小于  $\frac{1}{3}$ .

#### 题 4 (2003 · 亚洲物理奥赛题)

#### 圆柱形空洞

##### 背景说明

有许多技术可用来探测内部有空洞的物体. 力学振动法是一种非破坏性的探测技术. 在本实验题中, 我们会给你一块密度均匀的立方体铜块, 铜块内部有一沿着中心对称轴的圆柱形空洞, 你必须做非破坏性的力学测量, 并将所得的数据画成适当的关系图线, 用以求出铜块内圆柱形空洞的半径和立方体铜块边长的比值.

图 2-30 所示为边长为  $a$  的立方体, 此立方体有一沿着中心对称轴, 半径为  $b$  的圆柱形空洞. 此洞用一片很薄且与铜块相同材料的圆盘盖住.  $A$ 、 $B$  和  $C$  分别代表在立方体顶角上的小孔. 将细线穿过这几个小孔, 可用来悬挂立方体铜块. 图 2-31 所示为两种不同的悬挂方式, 图 2-31(a) 利用  $C$  和  $B$  两小孔悬挂, 图 2-31(b) 则利用  $B$  和  $A$  两个小孔悬挂.

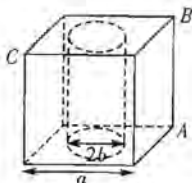


图 2-30 有圆柱形空洞的立方体铜块

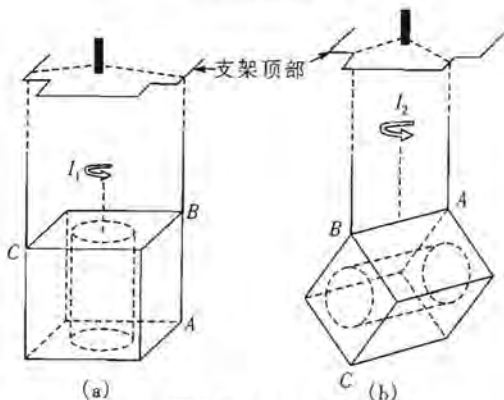


图 2-31 两种悬挂立方体铜块的方式

在推导必要的数学表达式时, 你可利用下列的转动惯量公式

一边长为  $a$  的实心立方体, 绕  $X$  轴或  $Y$  轴的转动惯量均为  $I = \frac{1}{6} Ma^2$ ,  $C$  为

质心.

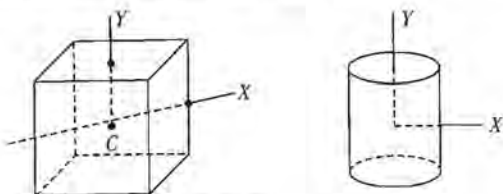


图 2-32

半径为  $b$ , 长度为  $a$  的实心圆柱体, 绕  $Y$  轴的转动惯量为  $I_Y = \frac{1}{2}mb^2$ ; 绕  $X$  轴的转动惯量为  $I_X = \frac{1}{12}ma^2 + \frac{1}{4}mb^2$ .

#### 实验材料和装置

1. 铜块.
2. 秒表.
3. 支架.
4. 细线.
5. 直尺.
6. 线性作图纸.

#### 实验要求

(a) 在图 2-31 所示的两种双线悬挂方式中, 仅选取其中的一种, 就你所选择的悬挂方式, 推导出绕通过物体质心的铅直轴的转动惯量和物体的振荡周期, 分别以  $l, d, b, a$  和  $g$  表示, 其中  $l$  为每一条悬线的长度,  $d$  为两条悬线之间的距离.

(b) 作必要的非破坏性力学测量, 利用所得的数据, 画出适当的关系图线, 然后解出  $\frac{b}{a}$  的值.

注: 曼谷的重力加速度  $g = 9.78 \text{ m/s}^2$ .

**【分析】** 这道题本质上是力学黑盒题, 即在不打破立方体的情况下, 求出其中空洞的尺寸. 这里关键性的实验技巧是如何把不可测的量变成可测的量. 由实验要求(借助非破坏性力学测量求解)和实验材料与装置(秒表、细线等)可知, 把立方体悬挂起来, 测其振荡周期为最简捷的方法. 要实施这种方法, 需从刚体转动定律推导出振动周期表达式, 找出空洞尺寸与周期的关系, 好在题目已给出刚体的转动惯量, 为解题带来一些方便.

**【解】** (a) 推导转动惯量  $I$

选用图 2-31(a) 的悬挂方式

$$I_1 = \frac{1}{6}Ma^2 - \frac{1}{2}mb^2 = \frac{1}{6}(\rho a^3)a^2 - \frac{1}{2}(\rho \pi b^2 a)b^2 = \frac{1}{6}\rho a^5 - \frac{1}{2}\rho \pi ab^3.$$

选用图 2-31(b) 的悬吊方式

$$I_2 = \frac{1}{6}Ma^2 - \left( \frac{1}{12}ma^2 + \frac{1}{4}mb^2 \right)$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{6}(\rho a^3)a^2 - \frac{1}{12}(\rho \pi b^2 a)a^2 - \frac{1}{4}(\rho \pi b^3 a)b^2 \\
 &= \frac{1}{6}\rho a^5 - \frac{1}{12}\rho \pi a^3 b^2 - \frac{1}{4}\rho \pi a b^3.
 \end{aligned}$$

推导物体的振荡周期  $T$

这两种悬挂方式的恢复力矩皆为  $\tau = Fd$ , 式中  $F = -\frac{1}{2}m_0 g \frac{\delta s}{l}$ ,  $\delta s$  为立方体铜块绕通过其质心的铅直轴所转过的弧长. 又  $\frac{\delta s}{d} \approx \theta$ ,  $\theta$  为该弧长对转轴所张开的角度, 故

度, 故

$$F \approx -\left(\frac{1}{2}m_0 g \frac{d}{2l}\right)\theta,$$

$$\tau \approx -\left(\frac{1}{2}m_0 g \frac{d^2}{2l}\right)\theta.$$

带空洞立方体铜块的质量  $m_0 = \rho a^3 \left(1 - \pi \frac{b^2}{a^2}\right) = \rho a^3 (1 - \pi x^2)$ , 式中  $x = \frac{b}{a}$ . 利用转动方程式  $\tau = I\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ , 可得

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{m_0 g d^2}{4Il}\right)\theta,$$

$$\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{m_0 g d^2}{4Il},$$

$$T^2 = \left(\frac{16\pi^2 I}{m_0 g d^2}\right)l.$$

若选用图 2-31(a) 的悬挂方式, 则

$$T_1^2 = \left\{ \frac{16\pi^2}{g d^2} \left[ \frac{\frac{1}{6}\rho a^5 - \frac{1}{2}\rho \pi a b^3}{\rho a^3 (1 - \pi x^2)} \right] \right\} l = \frac{8\pi^2}{3g} \left(\frac{a}{d}\right)^2 \left(\frac{1 - 3\pi x^4}{1 - \pi x^2}\right) l.$$

由于  $d = \sqrt{2}a$ , 故

$$T_1^2 = \frac{4\pi^2}{3g} \left(\frac{1 - 3\pi x^4}{1 - \pi x^2}\right) l.$$

若选用图 2-31(b) 的悬挂方式, 则

$$\begin{aligned}
 T_2^2 &= \left\{ \frac{16\pi^2}{g d^2} \left[ \frac{\frac{1}{6}\rho a^5 - \frac{1}{12}\rho \pi a^3 b^2 - \frac{1}{4}\rho \pi a b^3}{\rho a^3 (1 - \pi x^2)} \right] \right\} l \\
 &= \frac{8\pi^2}{3g} \left(\frac{a}{d}\right)^2 \left[ \frac{1 - \frac{\pi}{2}x^2 - \frac{3\pi}{2}x^4}{1 - \pi x^2} \right] l.
 \end{aligned}$$

由于  $d = a$ , 故

$$T_2^2 = \frac{8\pi^2}{3g} \left[ \frac{1 - \frac{\pi}{2}x^2 - \frac{3\pi}{2}x^4}{1 - \pi x^2} \right] l.$$

(b)

(1) 选用图 2-31(a) 的悬吊方式,  $d=7.0$  cm, 所得实验数据如下:

$l$ (cm)	$40T_1$ (s)			$T_1$ (s)	$T_1^2$ (s <sup>2</sup> )
16.5	20.60	20.50	20.70	0.515	0.265
17.9	21.35	21.35	21.30	0.533	0.284
22.6	24.05	24.00	24.00	0.601	0.362
27.4	26.55	26.45	26.55	0.663	0.440
29.0	27.40	27.40	27.40	0.685	0.469
34.2	29.75	29.70	29.65	0.743	0.551
36.1	30.60	30.60	30.50	0.764	0.584
43.0	33.40	33.35	33.50	0.835	0.698

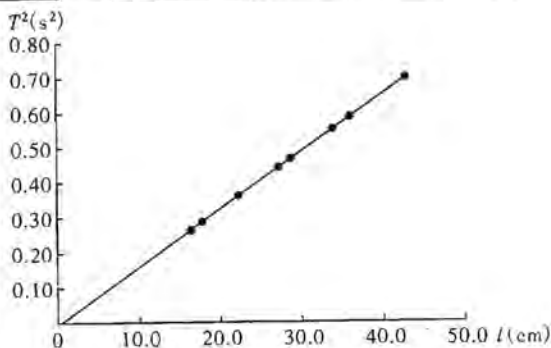


图 2-33

上图中直线的斜率  $\frac{\Delta T^2}{\Delta l} = 1.639 \pm 0.007$  s<sup>2</sup>/m. 由(a)题所得的周期公式可知

$$\frac{4\pi^2}{3g} \left( \frac{1-3\pi x^4}{1-\pi x^2} \right) = 1.639 \pm 0.007,$$

$$\frac{4\pi^2}{3 \times 9.78} \left( \frac{1-3\pi x^4}{1-\pi x^2} \right) = 1.639 \pm 0.007,$$

$$x^4 - (0.406 \pm 0.002)x^2 + (0.0231 \pm 0.0006) = 0,$$

$$x = 0.262 \pm 0.003 \text{ 或 } 0.581 \pm 0.001.$$

由(a)题知立方体铜块的质量  $m_0 = \rho a^3 \left( 1 - \pi \frac{b^2}{a^2} \right) = \rho a^3 (1 - \pi x^2)$ , 因为  $m_0$  必

须为正值, 故  $x < \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0.564$ , 所以  $x = \frac{b}{a} = 0.262 \pm 0.003$ .

(2) 选用图 2-31(b) 的悬挂方式,  $d=4.9$  cm, 所得实验数据如下:



$l(\text{cm})$	$40T_1(\text{s})$			$T_1(\text{s})$	$T_1^2(\text{s}^2)$
43.8	45.80	45.76	45.66	1.144	1.308
36.0	41.66	41.41	41.46	1.038	1.077
30.9	38.63	38.44	38.39	0.962	0.926
26.5	35.51	35.41	35.56	0.887	0.787
19.5	30.05	30.10	30.00	0.751	0.564

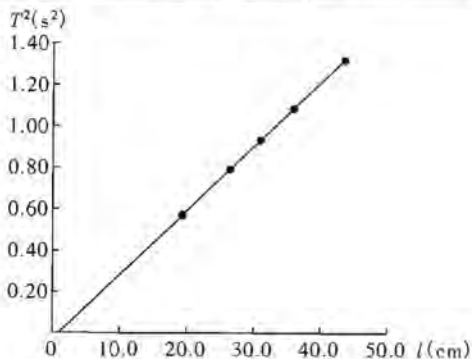


图 2-34

上图中直线的斜率  $\frac{\Delta T^2}{\Delta l} = 3.06 \pm 0.04 \text{ s}^2/\text{m}$ . 由(a)题所得的周期公式可知

$$\frac{8\pi^2}{3g} \left[ \frac{1 - \frac{\pi}{2}x^2 - \frac{3\pi}{2}x^4}{1 - \pi x^2} \right] = 3.06 \pm 0.04,$$

$$\frac{8\pi^2}{3 \times 9.78} \left[ \frac{1 - \frac{\pi}{2}x^2 - \frac{3\pi}{2}x^4}{1 - \pi x^2} \right] = 3.06 \pm 0.04,$$

$$x^4 - (0.425 \pm 0.003)x^2 + (0.0291 \pm 0.0032) = 0,$$

$$x = 0.29 \pm 0.02 \text{ 或 } 0.58 \pm 0.01.$$

由(b)-(1)题所述的理由知  $x < \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0.564$ , 所以

$$x = \frac{b}{a} = 0.29 \pm 0.02.$$

#### 题 5 (2004 · 国际物理奥赛题)

##### 力学“黑匣子”

[问题] 测量力学“黑匣子”中球的质量和两个弹簧的劲度系数.

力学“黑匣子”的一般信息

如图 2-35 所示, 力学黑匣子由圆柱形黑管中实心球连接两根弹簧组成. 两个弹簧由同一弹簧剪开, 具有不同圈数, 弹簧的质量和原始长度(未伸展时)忽略不计. 管子是均匀的, 有两个相同的盖子密封, 盖子插入管内 5 mm. 球的半径 11 mm,



管子内径 23 mm. 重力加速度  $g=9.8 \text{ m/s}^2$ . 球与管子的内壁有一定的摩擦.

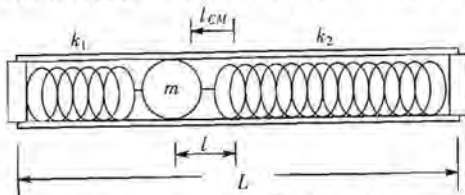


图 2-35 力学黑匣子(不按比例)

本实验的目的是在不打开黑匣子的前提下求出球的质量和两根弹簧的劲度系数  $k_1, k_2$ . 这个问题的困难之处是单独一次实验不能得到球的质量  $m$  和位置  $l$ , 因为这两个量是相互联系的. 这里  $l$  是力学黑匣子水平放置, 无摩擦平衡时, 管子中心和球心的距离.

请采用下列指定的符号表示各个相关的物理量. 如果需用其他的物理量, 符号不要与它们相同, 以避免混淆.

**警告:** 不要强烈震动和跌落力学黑匣子, 球也许会脱离弹簧. 如果力学黑匣子有问题, 立即报告监考老师, 仅更换一次不影响成绩, 以后每次扣除 0.5 分.

#### A 部分 球的质量和位置的乘积( $m \times l$ )

如图所示,  $l$  是力学黑匣子处于水平平衡位置时, 管子的几何中心和球心的距离. 在实验中求出球的质量  $m$  和位置  $l$  的乘积, 在 B 部分测量  $m$  时需要使用该乘积.

1. 提出能够得到  $m \times l$  的测量方案, 用公式表示.
2. 实验测量  $m \times l$  的值.

**B 部分** 如图 2-36 所示, 力学黑匣子水平固定在一个旋转桩座上, 一根线绳一端连接砝码, 另一端缠绕在旋转桩座上. 当砝码下落时, 通过线绳带动黑匣子旋转. 结合与本实验相关的方程和 A 部分获得的方程, 可导出一个求解黑匣子球的质量  $m$  的方程.

在球和黑匣子柱型管的内壁之间存在摩擦力, 此摩擦力和处于旋转中的球在黑匣子滑移的物理机制很复杂. 为简单可见, 可忽略摩擦运动带来的能量损耗.

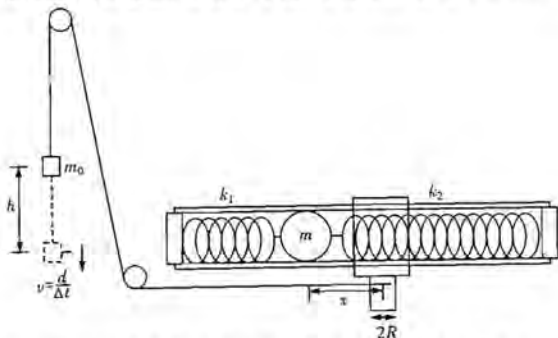


图 2-36 旋转中的力学黑匣子(不按比例). 黑匣子的角速度  $\omega$  可以通过测量通过光电门的砝码速度  $v$  获得.  $x$  是球相对旋转轴的距离,  $d$  是砝码在竖直方向的长度.



1. 让砝码从不同的高度  $h$  开始下落, 测量砝码通过光电门的速度  $v$ . 建议  $h$  值的选取范围从  $h=1.0 \times 10^{-2} \text{m}$  到  $4.0 \times 10^{-1} \text{m}$   $h$  值每间隔  $1.0 \times 10^{-2} \text{m} \sim 2.0 \times 10^{-2} \text{m}$ , 测量一次, 将测量数据以适当方式在坐标纸上作图, 从而可以求出  $m$  的值. 如有必要, 在大致了解  $v$  和  $h$  之间关系后, 可以重复测量或补测一些测量数据点. 当力学黑匣子旋转得足够快时, 由于弹簧足够软, 球抵达并停留在管子的底部. 在图上标出慢速旋转区域和快速旋转区域.

2. 证明测量结果在慢速旋转区域应满足  $h$  正比于  $v^2$  的关系 ( $h=Cv^2$ ), 在快速旋转区域应满足  $h=Av^2+B$ .

3. 半径为  $r$ , 质量为  $m$  的球通过球心轴的转动惯量为  $\frac{2mr^2}{5}$ . 如果球在旋转轴垂直方向上位移  $a$ , 则转动惯量增加  $ma^2$ . 用字母  $I$  表示旋转体除去球以外的转动惯量, 求出系数  $C$  与力学黑匣子  $m, l$  等参量的关系.

4. 求出系数  $A, B$  与力学黑匣子  $m, l$  等参量的关系.

5. 根据测量结果和 A 部分的结果确定  $m$  的值.

**C 部分** 劲度系数  $k_1$  和  $k_2$

在这部分, 考虑力学黑匣子作为刚性复摆时的小角度摆动, 力学黑匣子两端各有两个小孔, 把细棒插进小孔作为摆动的摆轴, 将 U 形搁架固定于支架上以支撑摆轴, 注意小角度摆动的角频率  $\omega$  由下列关系式给出

$$\omega = \left[ \frac{\text{力矩}}{\text{角度} \times \text{转动惯量}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

此处力矩及转动惯量是以摆轴作参考点计算. 与 B 部分相似, 考虑如图 2-37 所示的两种实验情况.

1. 测量图 2-37(a) 及 (b) 所示的小角度摆动的周期  $T_1$  及  $T_2$ , 并记下它们的数值.

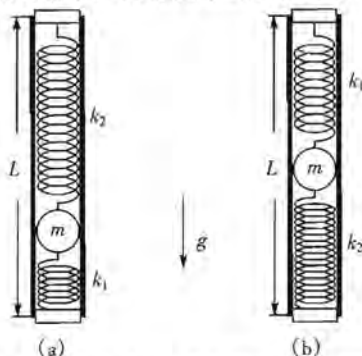


图 2-37 力学黑匣子的摆动(不按比例). 用光电门测量以上两种实验情况下小角度摆动的周期  $T_1$  及  $T_2$ . 细棒和 U 形搁架用于悬挂复摆

2. 利用方程解释图 2-37(a) 及 (b) 所示的小角度摆动的角频率  $\omega_1$  和  $\omega_2$  不同的原因, 用符号  $I_0$  代表不含球的力学黑匣子的相对于其一端的转动惯量.  $\Delta l$  为球离开水平平衡位置的位移.

3. 从前面的结果中消去  $I_0$ , 计算  $\Delta l$ .
4. 结合 B 部分及 C 部分 1~3 的结果, 求此双弹簧系统的等效劲度系数  $k$  及其数值.
5. 导出  $k_1$  和  $k_2$  并计算其数值.

**【分析】** 这是难得一见的力学黑盒题. 纵观国内外黑盒竞赛题, 电学黑盒题最常见, 光学黑盒题偶而出现, 至于力学黑盒题似凤毛麟角, 几乎碰不到, 而今我们终于盼来一个力学黑盒题. 这个题更是独辟蹊径, 有点“出奇不意, 攻其不备”的味道.

这个黑盒子装有一个实心球连接两根弹簧. 实验的目的是求出该球的质量和两根弹簧的劲度系数. 要解这个题目, 重要的是熟悉力学的基本规律, 特别是刚体的转动定律, 因为题目要求做黑盒在水平面内旋转和将黑盒悬挂做摆动的实验, 所以转动惯量的概念要非常清楚, 对于各种情况下的转动惯量要会计算. 好在这个题目给出了详尽的操作步骤和解释, 按部就班做下去, 不难解得.

**【解】** A 部分 球的质量和位移的乘积 ( $m \times l$ )

1. 提示能够得到  $m \times l$  的测量方案, 用公式表示. 整个系统质心确定后, 应用杠杆原理得

$$m \times l = (M + m) \times l_{CM}$$

2. 实验测量  $m \times l$  的值, 通过直接测量, 可得

$$M + m = (141.1 \pm 0.05) \text{g} = (1.411 \pm 0.0005) \times 10^{-1} \text{kg}$$

$$l_{CM} = (2.1 \pm 0.06) \text{cm} = (2.1 \pm 0.06) \times 10^{-2} \text{m}$$

利用上述计算可得到

$$m \times l = (296 \pm 8) \text{g} \cdot \text{cm} = (2.96 \pm 0.08) \times 10^{-3} \text{kg} \cdot \text{m}$$

**B 部分** 小球的质量  $m$

1. 让砝码从不同高度  $h$  下落, 测量砝码通过光电门的速度  $v$ , 将测量数据以适当方式在坐标纸上作图, 所作的图应适合于求出球的质量  $m$ . 从图 2-35 上确定慢速旋转区域和快速旋转区域.

2. 测量结果说明在慢速旋转区域应满足  $h = Cv^2$  的关系, 在快速旋转区域应满足  $h = Av^2 + B$  的关系.

3. 用黑匣子的参数表示  $C$

小球在黑匣子里相对静止 ( $x=l$ ), 砝码速度为  $v$  时黑匣子总的动能为

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m \left( l^2 + \frac{2}{5} r^2 \right) \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[ m_0 + \frac{I}{R^2} + m \frac{\left( l^2 + \frac{2}{5} r^2 \right)}{R^2} \right] v^2. \end{aligned}$$

式中  $\omega = \frac{v}{R}$  是角速度,  $I$  是转动系统除小球以外的转动惯量. 下落过程机械能守恒, 所以

$$m_0 gh = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m \left( l^2 + \frac{2}{5} r^2 \right) \omega^2$$



$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{m_0 + \frac{I}{R^2} + m \left( l^2 + \frac{2}{5} r^2 \right)}{R^2} \right] v^2.$$

由此解出

$$h = Cv^2,$$

$$C = \frac{\left[ \frac{m_0 + \frac{I}{R^2} + m \left( l^2 + \frac{2}{5} r^2 \right)}{R^2} \right]}{2m_0 g}.$$

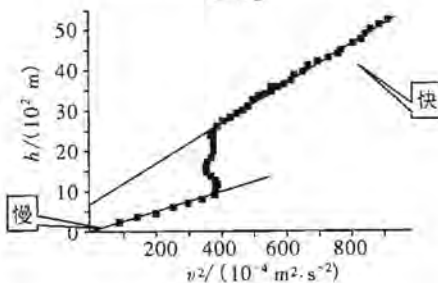


图 2-38

4. 用黑匣子的参数表示 A、B

小球停留在管子的底端 ( $x = \frac{L}{2} - \delta - r$ ), 砝码速度为  $v$  时黑匣子总的动能为

$$K = \frac{1}{2} \left\{ m_0 + \frac{I}{R^2} + m \left[ \frac{\left( \frac{L}{2} - \delta - r \right)^2 + \frac{2}{5} r^2}{R^2} \right] \right\} v^2.$$

小球由起初的平衡位置 ( $x = l$ ) 到达底端 ( $x = \frac{L}{2} - \delta - r$ ), 弹性势能的增量为

$$\Delta U_e = \frac{1}{2} \left\{ -k_1 \left( \frac{L}{2} - \delta - r - l \right)^2 + k_2 \left[ (L - 2\delta - 2r)^2 - \left( \frac{L}{2} - \delta - r + l \right)^2 \right] \right\}.$$

机械能守恒还应该包含有重力势能的增量  $\Delta U_g = -m_0 g h$ , 即  $K + \Delta U_e + \Delta U_g = 0$ , 容易得到

$$h = Av^2 + B.$$

$$A = \frac{m_0 + \frac{I}{R^2} + m \left[ \frac{\left( \frac{L}{2} - \delta - r \right)^2 + \frac{2}{5} r^2}{R^2} \right]}{2m_0 g}.$$

$$B = \frac{\left\{ -k_1 \left( \frac{L}{2} - \delta - r - l \right)^2 + k_2 \left[ (L - 2\delta - 2r)^2 - \left( \frac{L}{2} - \delta - r + l \right)^2 \right] \right\}}{2m_0 g}.$$

5. 据测量结果和 A 部分的结果确定  $m$  的值.

由以上两个小问的结果可以得到  $m$  和  $l$  满足的另一个公式

$$A - C = \frac{m}{2m_0 g R^2} \left[ \left( \frac{L}{2} - \delta - r \right)^2 - l^2 \right].$$

式中各值的测量结果为

$$L=(40.0 \pm 0.05)\text{cm},$$

$$m_0=(100.4 \pm 0.05)\text{g},$$

$$2R=(3.91 \pm 0.005)\text{cm}.$$

A 和 C 的值由图的斜率给出

$$A=(5.0 \pm 0.1)\text{s}^2/\text{cm}.$$

$$C=(2.4 \pm 0.1)\text{s}^2/\text{m}.$$

再结合 A 部的结果  $m \times l = 2.96 \times 10^{-3} \text{kg} \cdot \text{m}$ , 解得

$$m=(62 \pm 2)\text{g}=(6.2 \pm 0.2) \times 10^{-2} \text{kg}.$$

C 部分 劲度系数  $k_1$  和  $k_2$

1. 小角度摆动的周期  $T_1$  及  $T_2$  的测量结果

	$T_1/\text{s}$	$T_2/\text{s}$
1	$1.1085 \pm 0.00005$	$1.0194 \pm 0.00005$
2	$1.1092 \pm 0.00005$	$1.0194 \pm 0.00005$
3	$1.1089 \pm 0.00005$	$1.0193 \pm 0.00005$
4	$1.1085 \pm 0.00005$	$1.0191 \pm 0.00005$
5	$1.1094 \pm 0.00005$	$1.0191 \pm 0.00005$
6	$1.1090 \pm 0.00005$	$1.0194 \pm 0.00005$
7	$1.1088 \pm 0.00005$	$1.0194 \pm 0.00005$
8	$1.1090 \pm 0.00005$	$1.0191 \pm 0.00005$
9	$1.1092 \pm 0.00005$	$1.0192 \pm 0.00005$
10	$1.1094 \pm 0.00005$	$1.0193 \pm 0.00005$

平均值为

$$T_1=(1.1090 \pm 0.0003)\text{s}.$$

$$T_2=(1.1093 \pm 0.0001)\text{s}.$$

2. 角频率  $\omega_1$  和  $\omega_2$  不同的原因.

黑匣子采取两种悬挂方式相对于摆轴的转动惯量分别为

$$I_1=I_0+m\left[\left(\frac{L}{2}+l+\Delta l\right)^2+\frac{2}{5}r^2\right].$$

$$I_2=I_0+m\left[\left(\frac{L}{2}-l+\Delta l\right)^2+\frac{2}{5}r^2\right].$$

当黑匣子轴线与竖直方向偏离小角度  $\theta$  时重力矩为

$$\tau_1=Mg\frac{L}{2}\sin\theta+mg\left(\frac{L}{2}+l+\Delta l\right)\sin\theta\approx\left[Mg\frac{L}{2}+mg\left(\frac{L}{2}+l+\Delta l\right)\right]\theta.$$



$$\tau_2 = Mg \frac{L}{2} \sin\theta + mg \left( \frac{L}{2} - l + \Delta l \right) \sin\theta \approx \left[ Mg \frac{L}{2} + mg \left( \frac{L}{2} - l + \Delta l \right) \right] \theta.$$

因此摆动的角频率为

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\tau_1}{I_1}} = \sqrt{\frac{Mg \frac{L}{2} + mg \left( \frac{L}{2} + l + \Delta l \right)}{I_0 + m \left[ \left( \frac{L}{2} + l + \Delta l \right)^2 + \frac{2}{5} r^2 \right]}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{\tau_2}{I_2}} = \sqrt{\frac{Mg \frac{L}{2} + mg \left( \frac{L}{2} - l + \Delta l \right)}{I_0 + m \left[ \left( \frac{L}{2} - l + \Delta l \right)^2 + \frac{2}{5} r^2 \right]}}$$

3. 从前面的结果中, 计算  $\Delta l$ .

将上述式中的  $I_0$  消去, 得到

$$(\omega_2^2 - \omega_1^2) \left[ \frac{(M+m)gL}{2} + mg\Delta l \right] + (\omega_2^2 + \omega_1^2) mgl = \omega_1^2 \omega_2^2 m(L+2\Delta l) \cdot 2l.$$

将各测量值代入上式可以解得

$$\Delta l = (7.2 \pm 0.9) \text{ cm} = (7.2 \pm 0.9) \times 10^{-2} \text{ m}.$$

4. 此双弹簧系统的等效劲度系数  $k$ .

$$k = \frac{mg}{\Delta l} = \frac{(62 \pm 2) \times 980}{7.2 \pm 0.9} \text{ dyne/cm} = (9\,000 \pm 1\,000) \text{ dyne/cm}.$$

或  $k = (9 \pm 1) \text{ N/m}.$

5. 导出  $k_1$  和  $k_2$  并计算其数值.

黑匣子里小球在水平面内处于平衡的条件是

$$\frac{\frac{L}{2} - l - \delta - r}{\frac{L}{2} + l - \delta - r} = \frac{k_2}{k_1}.$$

又因为  $k = k_1 + k_2.$

所以  $k_1 = \frac{\frac{L}{2} + l - \delta - r}{L - 2\delta - 2r} k.$

$$k_2 = k - k_1.$$

将各测量值代入上式得到

$$k_1 = (5\,700 \pm 600) \text{ dyne/cm}.$$

或  $k_1 = (5.7 \pm 0.6) \text{ N/m}.$

$$k_2 = (3\,000 \pm 1\,000) \text{ dyne/cm}.$$

或  $k_2 = (3 \pm 1) \text{ N/m}.$

## 题 6 (2002·国际物理竞赛题)

## 光学黑盒子

问题描述:在这个问题中,学生需确定正方体盒子里的未知光学元件.盒子是封闭的,只有2条用红色塑料薄膜覆盖物保护的窄缝.学生只能通过在实验中观测到的光学现象来鉴别此元件.塑料薄膜覆盖层的微小厚度效应可忽略.

穿过狭缝中心的1条线是盒子的中轴.另外除了红塑料薄膜覆盖物以外,还有以下元件中的3个(可能一样也可能不一样):

- (1)反射镜,平面镜或球面镜;
- (2)透镜,凸透镜或凹透镜;
- (3)两个表面均平行且光滑的透明玻璃片;
- (4)棱镜;
- (5)衍射光栅.

其中的透明元件是使用对所用光波长的折射率为1.47的材料制成.

可用的装置:

- (1)1支波长为670 nm的激光指示器,注意:不可直接观看激光光束;
- (2)光学导轨;
- (3)1个放置正方体盒子的平台,可以沿光学导轨移动;
- (4)1个可以装在导轨末端或拆除下来作其他测量用的接收屏幕;
- (5)可用胶带粘在屏上的作图纸;
- (6)1个装有正反夹和有任意刻度试管的竖直架子.

## 1 注意

所有标示在图纸张和实验装置上的刻度都是使用同样的单位制,但并非用mm为单位来标定.

## 2 要求

分别判定3个元件并给出它们各自的具体特性.

表1 可能的元件类型及具体说明

可能的元件类型	要求给出的元件具体说明
镜	镜的曲率半径、镜轴与匣子中轴的夹角
透镜*	是凸透镜还是凹透镜,其焦距以及在匣子中的位置
平行光滑透明玻璃片	其厚度及与匣子中轴的夹角
棱镜	顶角及其中一个折射面与匣子中轴的夹角
衍射光栅*	光栅常量、缝的方向以及光栅在匣子中的位置

\* 设其平面均与匣子中轴成直角.

用mm作单位,或用千分尺或作图纸上的标度作单位表示你最后给出的答案中各元件具体参量说明(如焦距、半径和曲率),但不需要计算结果的精确度.



## 3 答题要求

(1) 写出匣子中的光学元件的类型(元件编号: No. 1; No. 2; No. 3).

(2) 请画出表示 3 个元件在匣子中放置位置的略图. 在你的略图中, 请分别用要求(1)中的号码指示出各个元件.

(3) 请用附加的草图补充上具体的资料, 以说明在要求(2)中的光学元件如何排列, 例如: 放置的角度、元件与狭缝的距离和它们的倾向或方向.

(4) 总结你的观察数据, 在画图的帮助下通过导出适当的公式确定 No. 1 光学元件的具体规格, 计算出所问的规格并在表格上填上你的答案.

(5) 总结你的观察数据, 在画图的帮助下通过导出适当的公式确定 No. 2 光学元件的具体规格, 计算出所问的规格并在表格中填上你的答案.

(6) 总结你的观察数据, 在画图的帮助下通过导出适当的公式确定 No. 3 光学元件的具体规格, 计算出所问的规格并在表格中填上你的答案.

**【分析】** 这是一道极好的黑盒试题. 因为光学黑盒试题比较少, 所以更显得难能可贵. 本题要求学生光学的基本概念和实验现象的分析很清楚. 要求学生能运用现有的器材做出物理实验, 根据物理现象准确判断是哪些元件产生的物理现象, 这些元件放在什么位置, 有什么特性, 等等. 利用“光路分析法”可以解决上述问题.

本题涉及到衍射光栅的物理光学知识, 应该说水平是较高的. 因为黑盒内包含二个光栅和一块玻璃片, 所以要求学生光栅衍射图像十分熟悉, 并要发挥空间想象力, 才能正确作出判断.

本题对学生提高光学实验的能力和掌握光学基本概念很有帮助, 因此, 是中学物理奥林匹克竞赛培训的好题材.

**【解】** (1) 黑盒子外形如图 2-39 所示, 盒子相对的两侧面上各开一狭缝, 实验时激光通过狭缝射入.

(2) 实验过程

过程 1: 激光束从匣子一侧进入(见图 2-39).

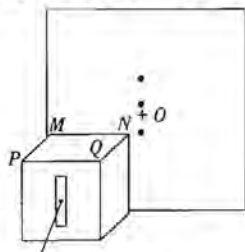


图 2-39 激光从一侧进入时的示意图

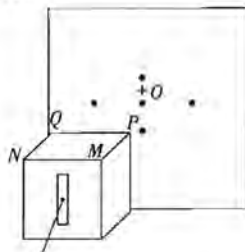


图 2-40 激光从另一侧进入时的示意图

此时屏上的图像为光栅衍射图像. 当激光未通过黑盒子而直接入射时, 屏上光点位置为  $O$  点(用十线表示). 衍射光栅在黑盒子内靠近  $MN$  边, 光栅条纹与狭缝垂直. 根据衍射图样中心点偏离  $O$  点向上, 说明激光在通过黑盒子过程中间元件为



两边光滑平行的玻璃板,光点的偏移是由玻璃板的折射引起的。

过程 2:激光束从匣子另一侧进入(见图 2-40)。

此时屏上的图像是 2 个光栅衍射图像。说明紧靠 PQ 面也有 1 个光栅,该光栅与黑盒子 PQ 面狭缝平行。由于玻璃板的折射,衍射中心点相对 O 点也有偏离,但偏离方向向下,与过程 1 相反。

综合以上的判断,黑盒子内部有 2 块衍射光栅,1 块玻璃板。

当激光从 PQ 面狭缝入射时,被靠近 PQ 面的 1 块与狭缝平行的光栅分成左右 3 束较亮的光束,通过 AB 面出射时只有中间那束光可以被靠近 MN 面的 1 块与狭缝垂直的光栅分为上中下 3 束较亮的光,故我们在接收屏上也能看到图 2-39 的 3 个光斑。

当激光从 MN 面狭缝入射时,被靠近 MN 面的 1 块与狭缝平行的光栅分成上中下 3 束较亮的光束,通过 PQ 面出射时这 3 束光每束又被分为左中右 3 束,但其中投射到接收屏上亮度较大容易观察到的就是如图 2-40 中的 5 个光斑。

光栅与盒子两壁的间距几乎为零,否则有可能在过程 2 中从盒子出射时外围的光被挡住而看不到两边的光斑。

根据光点 2 次的偏离情况可以定性判断玻璃板的放置方向为板上端靠 PQ 面,下端靠 MN 面。

注:实际实验的时候可观察到的光斑数比较多,此处图中只画出中心光斑以及一级衍射光斑作定性分析,其余光斑因为能量较低而忽略不考虑。

(3)根据以上分析,我们可以得出以下结论:

a. 各个光学元件分别是:

No. 1 为衍射光栅;

No. 2 为衍射光栅;

No. 3 为平行透明玻璃片。

b. 黑匣子横截面图见图 2-41。

c. 补充说明:

光栅 No. 1 与匣子左壁的距离几乎为零;

光栅 No. 1 的刻线与匣子的狭缝成直角;

光栅 No. 2 与匣子右壁的距离几乎为零;

光栅 No. 2 的刻线与匣子的狭缝成平行。

(4)衍射光栅原理(图 2-42)。

光程差为

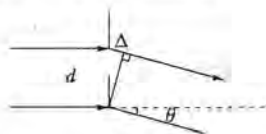
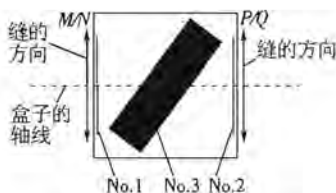
$$\Delta = d \sin \theta$$

其中  $d$  为光栅常量,  $\theta$  为衍射角,  $m$  为衍射级次。

衍射条件

$$\Delta = m\lambda$$

所以,对一级衍射( $m=1$ )有





$$\sin\theta = \frac{\lambda}{d}$$

实际测量时,  $\tan\theta$  可以通过将一级衍射光斑与中心光斑之间的距离除以接收屏到黑匣子近屏端的距离得到.

数据的具体分析:

测 No. 1 元件的特性见表 2.

表 2

No. 1 元件特性

$\tan\theta$	$\theta(^{\circ})$	$\sin\theta$
0.34	18.8	0.322
0.32	17.7	0.305
0.32	17.7	0.305

得出: No. 1 元件是衍射光栅, 光栅常量为  $2.16 \mu\text{m}$ , 光栅线与狭缝成直角.

测 No. 2 元件的特性见表 3.

表 3

No. 2 元件特性

$\tan\theta$	$\theta(^{\circ})$	$\sin\theta$
1.04	46.1	0.721
0.96	43.8	0.693
1.08	47.2	0.734

得出: No. 2 元件是衍射光栅, 光栅常量为  $0.936 \mu\text{m}$ , 光栅线与窄缝平行.

(5) 平行透明玻璃片(图 2-43).

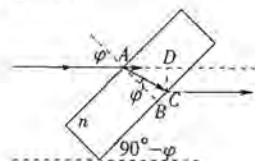


图 2-43 激光偏移光路图

由 Snell 定律

$$\sin\varphi = n\sin\varphi', \varphi' = \angle BAC.$$

透明玻璃片中

$$AC = \frac{AB}{\cos\varphi'}$$

$AB = h =$  透明玻璃片厚度.

光束位置移动

$$CD = t = AC\sin\angle CAD,$$

$$\angle CAD = \varphi - \varphi'.$$

实验中测得的  $t$  即为中心光斑与十字间的距离, 故有

$$h \sin \varphi = \frac{1 - \cos \varphi}{(n^2 - \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} \quad \textcircled{1}$$

由于黑匣子平放时平行玻璃板与光轴有夹角, 出射光与入射光有偏移量. 以一边边为转轴, 转动黑匣子直到偏移量消失, 此时入射光与平行玻璃板垂直.  $\varphi$  角可由测量长度通过三角关系的计算求得.

由此求得  $\varphi = 49^\circ$ .

将  $\varphi = 49^\circ$  及  $t$  值代入(1)式解得  $h$ . 最终得出: No. 3 元件是平行透明玻璃片, 厚度  $h = 17.9 \text{ mm}$ , 与匣子中轴夹角为  $49^\circ$ .

## 第三章

### 研究型题

这类题旨在通过实验探索某种物理规律, 研究某种物理问题. 解这类题好像在模拟科研过程. 问的问题或实验的要求一个接一个, 穷追不舍, 步步深入. 这类题以获取新知识为主, 质疑求索, 可以做得很深入, 有发挥的余地. 从难度上看, 要比前两类试题困难一些. 通过这类题可考查学生科学研究的能力.

近年来, 这类题有逐步增多的趋势, 尤其是在国际物理奥赛中, 更是如此. 过去, 国际奥赛中实验一般两道题, 现在多半是一道研究型试题. 不过这一道题目中包含许多小题目, 做完这项做那项, 一环套一环, 层层逼近. 有时这类题综合了力、热、电、光各项实验技术, 甚至既有制作、操作, 又有证明、判断和研究, 全面考查学生的实验能力.

#### 题 1 (2008 · 全国物理竞赛题)

##### 研究硅光电池的特性

###### 一、实验目的

测量光电池的输出特性与光照的关系.

###### 二、实验原理

当光照射在 pn 结上时, 入射光的光子会产生电子与空穴对, 这些电子和空穴对在 pn 结的内部电场作用下, 分别向 n 区和 p 区集结, 从而使 pn 结两端产生光生电动势. 这一现象称为光伏效应.

光电池是根据光伏效应制成的pn结光电器件,它不需要加偏压就可以把光能转化为电能.光电池的用途,一是用做探测器;二是作为太阳能电池,将太阳能转化为电能.光电池的结构示意图及应用电路分别如图3-1(a)和(b)所示.在没有光照时,光电池特性可视为一个二极管;有光照时,光电池产生光生电动势,外接负载后就有光生电流.光生电流与光照有关,随光照增强而增大;当负载为零(或较小)时,两者呈正比关系.

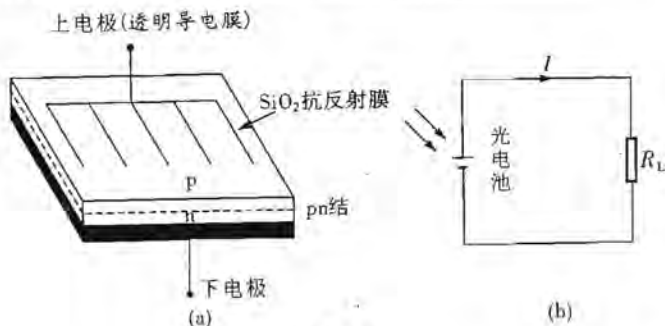


图 3-1

通常,衡量光电池的光电特性主要有以下三个参数:短路电流  $I_x$ ,是指当外电路被短路,即负载为零时,光电池的输出电流。开路电压  $U_x$ ,是指当外电路开路,即负载无穷大时,光电池的输出电压。填充因子  $FF$ ,其定义为

$$FF = \frac{P_m}{U_x I_x} = \frac{U_m I_m}{U_x I_x}$$

式中  $P_m$  为最大输出功率,  $U_m$  和  $I_m$  是相应的工作电压和工作电流。

### 三、仪器用具

1. 一个光电池及接线盒。
2. 一块数字万用电表[VC9806+型,4位半;直流电压各量程的输入阻抗为  $10\text{ M}\Omega$ ;直流电压各量程挡的基本误差为  $\pm(0.05\% \times \text{读数} + 3 \times \text{分辨率})$ ]. 本题中只允许使用电压挡。
3. 一个电阻箱(ZX-21型;总阻值为  $99\,999.9\ \Omega$ , 0.1级,额定功率为  $0.2\text{ W}$ )。
4. 一个卤素灯泡( $6\text{ V}$ ,  $5\text{ W}$ )及灯座,附带一个稳压电源。
5. 一个双刀双掷开关,导线若干。
6. 两块挡光黑屏:一块有孔;另一块无孔。
7. 一张定位用的大坐标纸( $35\text{ cm} \times 50\text{ cm}$ )。
8. 两张作图用的小坐标纸( $17\text{ cm} \times 25\text{ cm}$ )。
9. 一把钢尺(量程为  $30\text{ cm}$ ;分度为  $0.1\text{ cm}$ )。
10. 透明胶条,用来固定大坐标纸。
11. 一个含线性拟合功能的计算器(卡西欧{x-82ES型}。

### 四、实验要求

研究不加偏压时,硅光电池的光电特性。

1. 用卤素灯泡作为光源,固定光电池和光源的距离为  $10\text{ cm}$ 。为使灯泡亮度稳定,测量之前须将其预热  $5\text{ min}$ 。

(1) 画出测量电路图。若使用数字万用电表或电阻箱,请说明所使用的数字万用电表的量程和电阻箱的阻值(或范围)。

(2) 测光电池外接不同负载时的电路输出电流  $I$  和路端电压  $U$ ;将测量数据列



表,并在坐标纸上绘  $U-I$  图。

(3)确定上述条件下光电池的短路电流  $I_s$ ,并说明确定的方法。

(4)测上述条件下光电池的开路电压  $U_s$ ,说明测量的方法,并估计结果的不确定度。

(5)求出光电池最大输出功率  $P_m$  以及相应的负载电阻  $R_m$ ,并求填充因子  $FF$ ;说明确定最大输出功率的方法;估计  $P_m$  的不确定度。

2. 测量短路电流和开路电压与光强的关系。通过实验证明,通过光电池的短路电流  $I_s$  与照到光电池上的光强是成正比的;并研究开路电压  $U_s$  和相对光强  $L$  之间的近似关系。本题要求最大光强达到最小光强的 9 倍以上。

(1)简要叙述验证方法,并画出实验光路图,标明所用关键元件、用具的相对位置。在示意图上,需标出元件、用具的名称以及各元件相对距离。(提示:注意背景光的影响)

(2)画出测量电路图。若使用数字万用表或电阻箱,说明所使用的数字万用表的量程和电阻箱的阻值。

(3)将测量数据列表。对于数据表格中的字母变量名,请说明其指代的具体对象,并交待清楚其测量或计算方法。

(4)定义相对光强  $L$ ,描绘  $I_s$  和相对光强  $L$  关系图;对  $I_s-L$  关系作线性拟合,并确定拟合方程和拟合的相关系数(可用计算器)。

(5)求  $U_s$  与相对光强  $L$  之间的近似函数关系。

注:除非特别要求,测量数据不需要给出不确定度。

**【分析】** 本题所研究的器件是硅光电池,所依据的原理是光伏效应,这种效应具有巨大的实用价值,它是太阳能电池的基硅,太阳能电池是太阳能发电的基本组件,所以对硅光电池的研究有重要的意义。

本题与近年来国际物理奥赛题的风格相近,显出与国际“接轨”趋势,即着重考查学生的学习能力。本题实验的要求明确,仪器和步骤描述详细,因此可按步就班去做,即用数字电压表测光电池的输出电压,只是数据量及数据处理量均较大,作图较多,因此要求学生要有很好的实验基本素养,例如,误差和作图方面的基本功要好,会用作图外推法求短路电流,等等。正所谓“细节决定成败”。

**【解】** 1. (1)测量电路图如图 3-2。当测  $U-I$  关系[见第(2)小题]时,数字万用电表的量程为 2 V(或 2 V 和 200 mV),电阻箱的阻值范围为  $250 \Omega \sim 9.000 \times 10^4 \Omega$ (至少应包括  $2000 \sim 4.000 \times 10^4 \Omega$ );当测  $U_s$  [见第(4)小题]时,数字万用电表的量程为 2 V。

(2)改变光电池负载的测量数据见表 1。当光电池作为电源时,负载上的  $U-I$  曲线如图 3-3(图中“+”表示数据测量点)。

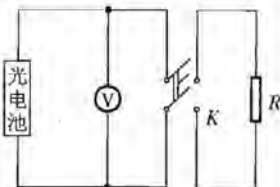


图 3-2

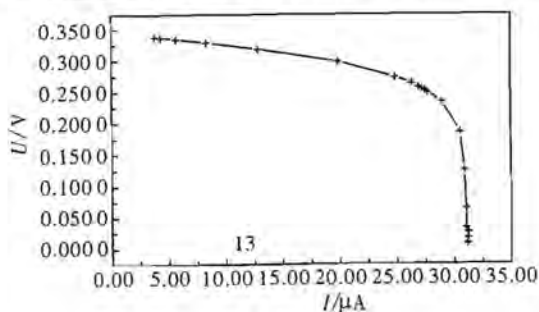


图 3-3

表 1

$R/\Omega$	$U/V$	$I = \frac{U}{R}/\mu A$	$P = \frac{U^2}{R}/\mu W$
250.0	0.007 8	31.2	0.243
500.0	0.015 6	31.2	0.487
750.0	0.023 4	31.2	0.730
1 000	0.031 1	31.1	0.967
2 000	0.062 1	31.05	1.928
4 000	0.123 7	30.93	3.825
6 000	0.183 0	30.50	5.582
8 000	0.231 6	28.95	6.705
9 000	0.249 1	27.68	6.895
9 200	0.252 1	27.40	6.908
9 300	0.253 5	27.26	6.910
9 400	0.254 9	27.12	6.912
9 500	0.256 2	26.97	6.909
$1.000 \times 10^4$	0.262 5	26.25	6.891
$1.100 \times 10^4$	0.272 9	24.81	6.770
$1.500 \times 10^4$	0.297 4	19.83	5.896
$2.500 \times 10^4$	0.319 1	12.76	4.073
$4.000 \times 10^4$	0.329 2	8.230	2.709
$6.000 \times 10^4$	0.334 4	5.573	1.864
$8.000 \times 10^4$	0.336 8	4.210	1.418
$9.000 \times 10^4$	0.337 5	3.750	1.266

(3) 短路电流  $I_x = 31.2 \mu A$ ; 确定方法为: 根据  $U-I$  关系(表 1), 由  $U \rightarrow 0$  的数据外推, 得到  $U=0$  所对应的  $I$  值, 即  $I_x$ .

(4) 开路电压(含不确定度)  $U_x = (0.3426 \pm 0.0005)V$ ; 确定方法为: 打开开关



K, 读取数字电压表的示值  $U$ . 因为数字电压表内阻非常大, 所以其测量结果应近似为  $U_{\infty}$ ; 或者由  $U-I$  关系外推, 得到  $I=0$  时的  $U$  值, 即  $U_{\infty}$ .  $U_{\infty}$  的不确定度

$$\Delta U_{\infty} = 0.05\% \times 0.3426 \text{ V} + 0.0003 \text{ V} \approx 0.0005 \text{ V}.$$

(5) 由表 1 可作出总电池输出功率  $P$  与负载电阻  $R$  的关系曲线 (图 3-4). 最大输出功率 (含不确定度)  $P_m = (6.91 \pm 0.03) \mu\text{W}$ ; 所对应的负载电阻  $R_m = 9.4 \text{ k}\Omega$  填充因子

$$FF = \frac{P_m}{U_{\infty} I_{sc}} = \frac{6.91 \mu\text{W}}{0.3426 \text{ V} \times 31.2 \mu\text{A}} \approx 0.646 = 64.6\%.$$

确定最大输出功率时, 先求各个负载电阻  $R$  对应的负载功率  $P$ , 找到最大的负载功率  $P_m$  和相应的负载电阻值  $R_m$ ; 或者作  $P-R$  图, 直接从图中读取  $P_m$  和  $R_m$

值.  $P_m$  的不确定度可计算如下: 由于  $P = \frac{U^2}{R}$ , 且

$$\Delta U = 0.05\% \times 0.2549 \text{ V} + 0.0003 \text{ V} \approx 0.0004 \text{ V}.$$

$$\text{所以 } \frac{\Delta P}{P} = \frac{2\Delta U}{U} + \frac{\Delta R}{R} = \frac{2 \times 0.0004 \text{ V}}{0.2549 \text{ V}} + 0.1\% \approx 0.4\%.$$

即

$$\Delta P = 0.03 \text{ mW}.$$

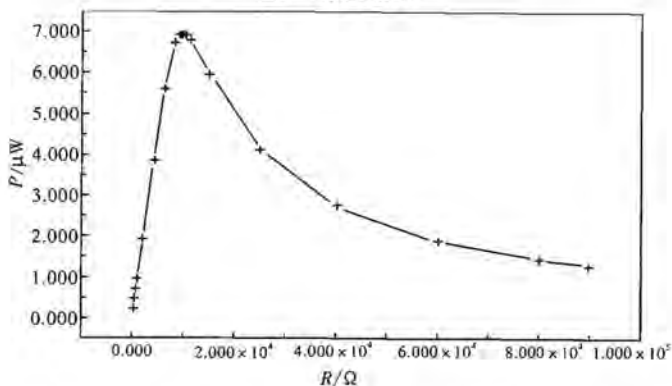


图 3-4

2. (1) 验证光电池短路电流与光强呈线性关系的光路见图 3-5, 图中  $d_3 \approx 1 \text{ cm}$ ,  $d_4 \approx 25 \text{ cm}$ ; A 和 B 屏应距灯泡足够近, 以尽量减少灯泡照射光电池前方物体所产生的散射光.

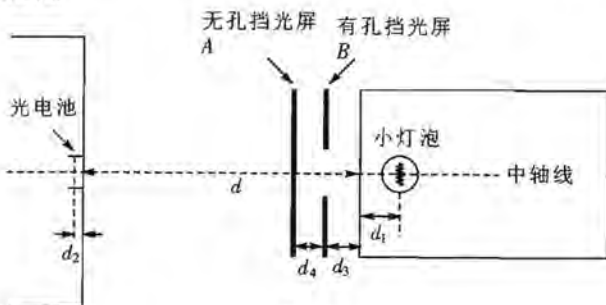


图 3-5



验证方法如下:点光源辐射场的光强与距点光源的距离呈平方反比关系,这样可根据距离计算出光强的相对大小。但是,因为光电池接收到的背景散射光成分与它和光源间的距离不呈平方反比关系,所以需要消除背景散射光的影响。使用  $B$  屏作为光阑,以减少小灯泡射到周围物体上产生散射光对光电池的影响;同时,为消除室内恒定照明产生散射光的影响,每改变一个距离值,需要用无孔挡光屏  $A$  放在  $B$  屏之前挡光,以测量室内恒定照明产生的散射光,并从总的光电流值中扣除这一部分(因为光电流与光强值成正比)。若扣除背景之后的光电流值与距光源的距离呈平方反比关系,那么可以证明光电池产生的短路电流与它接收到的光强成正比。

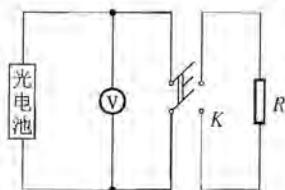


图 3-6

(2) 测量电路图如图 3-6。当测短路电流  $I_x$  时,数字万用电表的量程为 200 V,电阻箱的阻值为 1 000  $\Omega$ ;当测开路电压  $U_\alpha$  时,数字万用电表的量程为 2 V。

(3) 改变光强的测量数据见表 2,其中的变量名称及其测量或计算方法见表 3。

表 2

$d/\text{cm}$	$D/\text{cm}$	$\frac{1}{D^2}/10^{-4}/\text{cm}^{-2}$	$U_{x1}/\text{mV}$	$U_{x0}/\text{mV}$	$U_\alpha/\text{V}$	$I_{x1} = \frac{U_{x1}}{R}/\mu\text{A}$	$I_{x0} = \frac{U_{x0}}{R}/\mu\text{A}$	$I_x = I_{x1} - I_{x0}/\mu\text{A}$	$\ln(I_{x1}/\mu\text{A})$
10.0	12.0	69.4	21.43	0.48	0.331 5	21.43	0.48	20.95	3.042 1
12.0	14.0	51.0	15.95	0.55	0.320 1	15.95	0.55	15.40	2.734 4
14.0	16.0	39.1	12.37	0.60	0.310 6	12.37	0.60	11.77	2.465 6
16.0	18.0	30.9	9.92	0.64	0.302 5	9.92	0.64	9.28	2.227 9
18.0	20.0	25.0	8.18	0.68	0.295 6	8.18	0.68	7.50	2.014 9
20.0	22.0	20.7	6.90	0.71	0.289 6	6.90	0.71	6.19	1.822 9
22.0	24.0	17.4	5.94	0.73	0.284 3	5.94	0.73	5.21	1.650 6
24.0	26.0	14.8	5.18	0.75	0.279 5	5.18	0.75	4.43	1.488 4
26.0	28.0	12.8	4.58	0.76	0.275 3	4.58	0.76	3.82	1.340 3
28.0	30.0	11.1	4.10	0.76	0.271 4	4.10	0.76	3.34	1.206 0
30.0	32.0	9.77	3.69	0.76	0.267 9	3.69	0.76	2.93	1.075 0
32.0	34.0	8.65	3.36	0.76	0.264 2	3.36	0.76	2.60	0.955 5
34.0	36.0	7.72	3.08	0.76	0.261 2	3.08	0.76	2.32	0.841 6
36.0	38.0	6.93	2.84	0.76	0.258 0	2.84	0.76	2.08	0.732 4



表 3

变量	定义及测量或计算方法
$d$	各元件已调共轴后,光电池座和灯座相对的边缘之间的距离;可从粘在桌上的坐标纸上读出
$D$	光源和光电池接收面之间的距离( $D=d_1+d_2+d$ ,其中 $d_1$ 是灯泡中心到灯座前缘的垂直距离, $d_2$ 是光电池接收面到元件盒前缘的垂直距离);用钢尺测得 $d_1=1.8\text{ cm}$ ,目测得 $d_2=0.2\text{ cm}$
$U_{x1}$	未用 A 屏蔽光,闭合开关 K 时电阻 R 上的电压
$U_{x0}$	用 A 屏蔽光,闭合开关 K 时电阻 R 上的电压
$U_x$	未用 A 屏蔽光时的开路电压
$I_{x1}$	对应于 $U_{x1}$ ,未用 A 屏蔽光时的短路电流( $I_{x1}=\frac{U_{x1}}{R}$ )
$I_{x0}$	对应于 $U_{x0}$ ,用 A 屏蔽光时的短路电流( $I_{x0}=\frac{U_{x0}}{R}$ )
$I_x$	扣除背景光后的短路电流( $I_x=I_{x1}-I_{x0}$ )

(4)定义相对光强(给出代表相对光强的物理量) $L$ 时,可以用点光源和光电池之间距离平方的倒数 $\frac{1}{D^2}$ 表示相对光强的大小,即 $L=\frac{1}{D^2}$ , $I_x-L$ 关系的线性拟合曲线如图 3-7.拟合方程为 $I_x=A+BL$ ,其中截距 $A=-0.33\text{ }\mu\text{A}$ ,斜率 $B=0.3021\times 10^4\text{ }\mu\text{A}\cdot\text{cm}^2$ ;相关系数 $r=0.999\ 993$ .

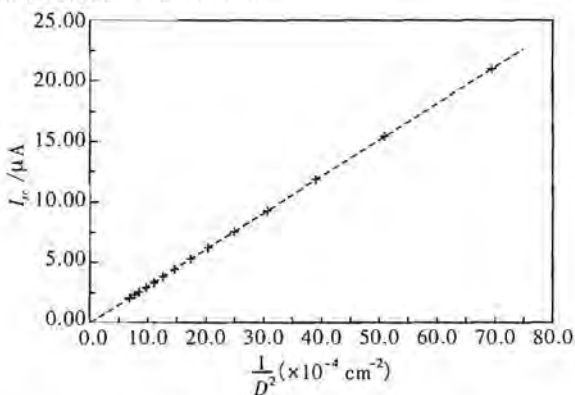


图 3-7

(5)定义相对光强(给出代表相对光强的物理量) $L$ 时,用未用 A 屏蔽光时的短

路电流  $I_{s1}$  (或短路电压  $U_{s1}$ ) 代表与  $U_x$  对应的相对光强 (因为  $U_x$  与光强不是正比关系, 所以无法通过直接减去背景电压来扣除背景光影响, 也就不能用  $\frac{1}{D^2}$  表示相对光强大小).  $U_x$  与相对光强  $L$  之间的近似函数关系为  $U_x = A + B \ln I_{s1}$ , 其中  $U_x$  以 V 为单位,  $I_{s1}$  以  $\mu A$  为单位,  $A = 0.2205$  (0.1900 ~ 0.2800),  $B = 0.0359$  (0.0280 ~ 0.0420).  $U_x - I_{s1}$  和  $U_x - \ln I_{s1}$  关系分别如图 3-8 和 3-9 (此二图不要求).

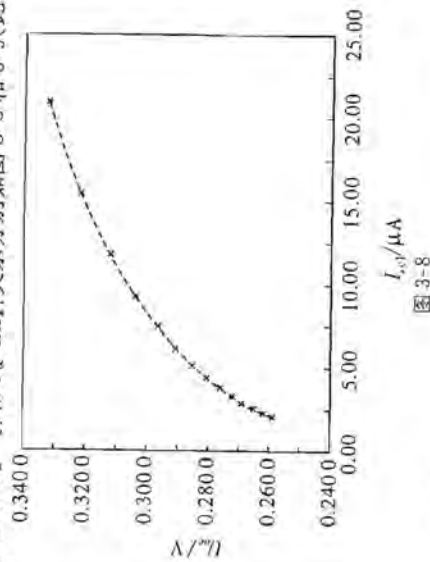


图 3-8

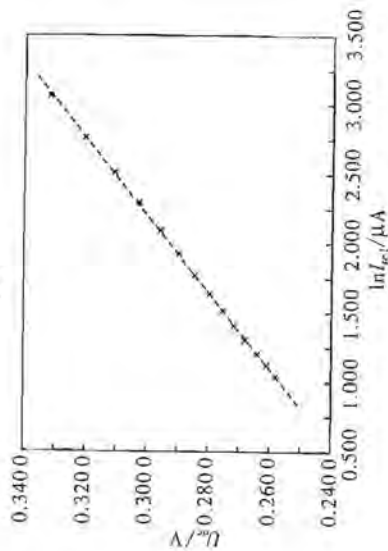


图 3-10 描述的是光栅常数为  $d$  的光栅在波长为  $\lambda$  的平面光波垂直照射下的自成像现象, 所成的像到光栅的距离可表示成  $z_m = \frac{c_0 m d^2}{\lambda}$ , 其中  $c_0$  为一常数,  $m$  为正整数.

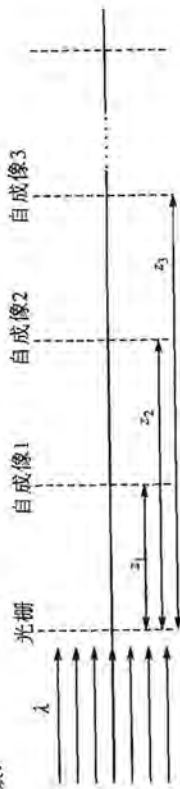


图 3-10

需要指出的是, 在每个光栅自成像出现的前后, 都会出现密度随观察位置而变化的直条纹, 要特别留意光栅自成像与这些条纹的不同. 仔细分析这些条纹的分布, 可以获得光栅的精细结构, 但这不是本次实验的研究内容.

### 二、有待研究的问题

1. 平面光波照明条件下的自成像问题. 严格的理论推导得出, 在平面波照明下的光栅自成像公式  $z_m = \frac{c_0 m d^2}{\lambda}$  中,  $c_0$  为常数 (整数). 试用实验室提供的光栅做定量的实验观测, 确定常数  $c_0$  的值.

2. 球面光波照明条件下的自成像问题. 用球面波照明光栅, 透过的光波也能在空间重复形成光栅的像, 且有放大或缩小效应, 只是像在空间的重复并不是等间距的. 试用实验室提供的光栅做定量的实验测量和分析, 总结出球面光波照明条件下光栅的自成像规律.

### 三、实验装置

1. 读数显微镜; 用来观察和测量所使用的光栅.
2. 光具座: 由导轨和在导轨上滑动的滑块组成. 所用的光学元件已分别装在光具座的滑块上, 滑块可在光具座的导轨上滑动; 滑块的位置由其上的标记线指在导轨上标尺的读数确定, 导轨上标尺的最小刻度为 mm. 光学元件的高低及左右偏转可通过调整光学元件上的立杆插在滑块立筒中的位置来进行; 其横向平移可通过

## 题 2 (2008·全国物理决赛题)

## 光栅自成像现象的实验研究

## 一、基础知识介绍

光栅是一种应用广泛的光学元件。一块涂有等间距、不透明(或透明)线条的玻璃板就是一种光栅。光栅上相邻的不透明线条之间的距离称为光栅常数。当平面光波垂直入射在光栅上时,透射光波的传播会与入射光波非常不同,一个有趣的现象是:透射光波在随后的传播过程中会以一定的空间距离为周期,重复再现光栅的结构,即光栅的像。这种不借助于其他光学元件的光栅成像方式称为光栅的自成像。

过滑块上的微调装置来实现。实验中使用的所有滑块都已标明所装置的光学器件,不允许调换。

3. 氦氛激光器:输出波长为 633 nm。安装在光具座的滑块上后,其光束的俯仰可由其下方托盘上的螺丝来调节。

4. 扩束镜及小孔光阑组件:扩束镜为一种显微镜的物镜镜头,装在一个可前后微调移动的支架上,它将激光束聚焦后形成一个发散的球面波。小孔光阑为一块金属薄板,其上带有直径为  $25 \mu\text{m}$  通光圆孔,用磁铁吸在上下、左右二维可调的支架上。扩束镜和小孔光阑合在一起构成一个组件,装在一个滑块上。调节扩束镜和小孔光阑使扩束镜将激光束聚焦在小孔光阑的通光孔内,这样可以滤掉杂散光,得到均匀、明亮的照明光场。调节时,可先移开扩束镜,取下小孔光阑,单独调节扩束



镜的位置使激光扩束;然后再装上小孔光阑,仔细调节出均匀的光场。

5. 准直透镜:焦距为 250 mm,用于产生平面光波。
6. 通光光阑:通光孔直径为 30 mm,用于限制光斑尺寸。
7. 待测光栅:用于自成像实验。
8. 成像镜头:焦距约为 50 mm,用于将光栅本身及其自成的像再成像于 CCD [“CCD”是“电荷耦合器件”(charge-coupled device)的简称]上。
9. CCD 阵列感光探头:用于接收照射在其感光面上的光强分布。
10. 监视器:已与 CCD 阵列感光探头相连,用于显示 CCD 所接收到的光强分布。
11. 其他:光屏、三角尺、手电筒、台灯、计算器等。其中,光屏上贴有坐标纸,中间有一个标记点;三角尺用作简单的测量;台灯和手电筒供照明用。

实验装置如图 3-11 所示。

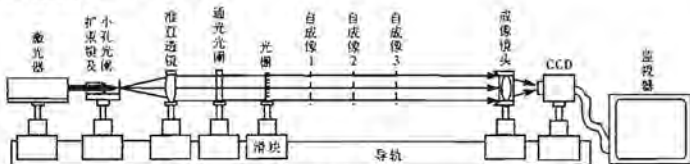


图 3-11

#### 四、实验要求

1. 用读数显微镜观察光栅,按表 1 要求测定光栅常数  $d$ ,并定性描述光栅的透光特征。

表 1

(单位:mm)

初读数	末读数	周期数	周期 $d$	$d$ 的测量结果
光栅的透光特征:				

2. 按图 3-11 所示,将激光器安装在光具座导轨的一端;然后依次放置扩束透镜及小孔光阑组件、准直透镜、通光光阑和光屏,搭建产生平面光波的光路,并具体说明如何调节来确保:

(1)未扩束的激光束与光具座导轨平行,以光屏上的标记点为基准点,说明调节激光束与光具座导轨平行的步骤:\_\_\_\_\_

(2)扩束后的激光束经准直透镜后变成平面光波,以光屏上的标记点为基准点,说明产生球面波并将其调节成平面光波的步骤:\_\_\_\_\_



3. 按图 3-11 所示,在光具座导轨的另一端放置两个滑块,其上安装成像镜头和 CCD 阵列感光探头,使得准直透镜和成像透镜之间的距离尽量大一些。去掉光屏,装上光栅,做下面的调试和观测:

(1) 移动光栅,直到在监视器上最清楚地看到成像透镜对光栅本身所成的像,即满足透镜成像公式的像,记下此时光栅的位置  $z_1$ ,描述监视器上显示的像的特征以及光栅偏离位置  $z_1$  时像的变化。

(2) 在表 2 中记录装有所列元件的滑块在光具座导轨上的位置。

表 2

(单位:cm)

激光器	扩束镜	准直透镜	通光光阑	光栅( $z_1$ )	成像透镜	CCD

(3) 移动光栅,离开成像透镜,观察监视器上所显示的图像,寻找光栅自成的像,确定自成像的个数、像位置不确定的平均范围,并说明判定为光栅自成像的依据。

4. 在上述光路中,保持除光栅以外装置的位置不变,完成以下的观测:

(1) 移动光栅,离开成像透镜,在监视器上依次找到光栅的前 7 个自成像,记录每个像所对应的光栅的位置  $z_g$ ,确定像到光栅的距离  $z_m$  ( $m=1,2,\dots,7$ ),并将结果填入表 3。

表 3

(单位:cm)

自成像	1	2	3	4	5	6	7
$z_g$							
$z_m$							

(2) 确定成像公式  $z_m = \frac{c_0 m d^2}{\lambda}$  中的  $c_0$  值。

5. 在上述光路的基础上,去掉准直透镜和通光光阑,用发散的球面光波直接照射光栅,保持扩束镜及小孔光阑组件、成像镜头和 CCD 阵列感光探头以及其他元件的位置不变(按表 2 中的数值所确定);然后移动光栅,观察光栅的自成像现象。

(1) 确定观察到的自成像的数目;

(2) 定性描述所看到的自成像现象。

6. 在上述定性观察的基础上,定量确定发散球面波照明条件下光栅自成像所处的位置。

(1) 确定发出球面波的点光源位置  $z_0$ 、光栅本身经成像透镜成清晰像时的位置  $z_1$  以及这两个位置之间的距离  $A$ 。

(2) 保持  $z_0$  和  $z_1$  不变,移动光栅,依次确定光栅的位置  $z_g$ ,使得在监视器上可

以清楚地看到光栅的自成像,给出每个  $z_g$  的最大不确定范围  $\Delta z_g$ ,并将结果填入表 4.

表 4

(单位:cm)

自成像	1	2	3	4	5	6	7
$z_g$							
$\Delta z_g$							

7. 利用上述定量测量的数据,确定发散球面波照明条件下光栅自成像的规律.

(1) 设  $a = |z_g - z_0|$ ,  $b = |z_i - z_g|$ ,  $E = \frac{d^2}{\lambda}$ , 按表 5 的要求作计算,并将结果填入表内.

表 5

(单位:cm)

自成像	1	2	3	4	5	6	7
$a$							
$b$							
$ab$							
$\frac{ab}{A \cdot E}$							
$E =$							

(2) 确定  $a$  和  $b$  之间所隐含的数量关系,即发散球面波照明条件下光栅的自成像公式.

**【分析】** 光栅自成像是光栅成像中的一种有趣现象,即透过光栅的光周期性地再现光栅的结构,学生在物理课上对此接触不多,因此,做起来感到新鲜、饶有趣味.不过,看起来简单的实验做起来并不轻松,因为要从光栅自成像附近的复杂条纹中鉴别真伪,不是很容易的,这需要实验技巧、仔细观察.

**【解】** 1. 测定光栅常数  $d$ , 并定性描述其透光特征的结果见表 6.

表 6

(单位:mm)

初读数	末读数	周期数	周期 $d$	$d$ 的测量结果
30.651	28.733	10	0.1918	$d = d_{\text{平均}} \pm \Delta d_{\text{平均}}$ $= 0.1925 \pm 0.0004$
28.738	26.808	10	0.1930	
26.808	24.882	10	0.1926	
光栅的透光特征:黑白相间,黑纹宽度明显大于亮纹宽度.				



2. (1)以光屏上的标记点为基准点,调解激光束与光具座导轨平行的步骤如下:①放置光屏在光具座导轨的右端,并将其置于适当的高度。②放置激光器在导轨的左端,先调节其下方的螺丝,使激光器与导轨基本平行;再调节其高度及左右偏转,使激光束对准光屏上的标记点。③将光屏移近至激光器,调节光屏的位置,使标记点对准激光束的光斑。④将光屏再移到导轨的右端,调节激光器,使光斑再次落在标记点上。⑤反复重复③和④。

(2)以光屏上的标记点为基准点,产生球面波并将其调节成平面光波的步骤如下:①保持光屏上标记点的位置不变;②将扩束镜及小孔光阑组件放置在激光器前的适当位置,调开扩束镜,取下小孔光阑;③调节组件支架的整体方位,使激光束照在扩束镜上,并形成以光屏标记点为中心的光斑;④再装上小孔光阑,左右、上下调其位置并前后移动扩束镜,直到在光屏上看到平滑的光斑,并调节支架整体,使得光斑的中心落在标记点上;⑤放置准直透镜和通光光阑在适当的位置,直到在光屏上看到以标记为中心的圆形光斑的大小不随光屏的位置改变。

3. (1)当  $z_i = 139.30 \text{ cm}$  时,成像透镜对光栅本身成像,所成的像与读数显微镜中看到的相似,粗略估计满足透镜成像公式. 偏离这个位置后,一方面光栅上吸附的一些小颗粒会变成环状;另一方面,当光栅移向成像透镜或反过来移动时,亮纹的边缘会变模糊。

(2)装有所列元件的滑块在光具座导轨上的位置见表 7。

表 7

(单位: cm)

激光器	扩束镜	准直透镜	通光光阑	光栅( $z_i$ )	成像透镜	CCD
9.00	38.00	65.70	73.50	139.30	151.25	162.00

(3)自成像的个数为 9;像位置不确定的平均范围为  $\pm 0.5 \text{ mm}$ ;判定为光栅自成像的依据为最符合已经看到的光栅本身像的特征。

4. (1)在光栅的前 7 个自成像中,每个像所对应的光栅的位置  $z_g$  和像到光栅的距离  $z_m$ ,见表 8。

表 8

(单位: cm)

自成像	1	2	3	4	5	6	7
$z_g$	133.56	127.70	121.80	115.95	110.05	104.15	98.22
$z_m$	5.74	11.60	17.50	23.35	29.25	35.15	41.08

(2)由于  $z_{n_i} = |z_g - z_i|$ ,  $\Delta z_m = \frac{z_{n_i}}{n_i} = (5.83 \pm 0.02) \text{ cm}$ ;

以及  $d = (0.1925 \pm 0.0004) \text{ mm}$ ,  $\lambda = 0.633 \text{ nm}$ , 则

$$c_0(\text{平均值}) = \frac{\Delta z_{n_i}}{\lambda} = \frac{5.83 \text{ cm}}{(0.1925 \text{ mm})^2} \approx 0.996.$$



$$\delta c_0 = \left( \frac{\delta \Delta z_m}{\Delta z_m} + 2 \frac{\delta d}{d} \right) \times c_0 = \frac{0.02 \text{ cm}}{5.83 \text{ cm}} + 2 \times \frac{0.0004 \text{ mm}}{0.1925 \text{ mm}} \approx 0.008.$$

故  $c_0 = 0.996 \pm 0.008$ , 应取为 1.

5. (1) 所观察到的自成像的个数为 7. (2) 与平行光照明所成的像相似, 只是像的大小随光栅到成像透镜的距离增大而增大.

6. (1)  $z_0$  为准直透镜的位置与准直透镜的焦距之差, 即  $z_0 = 65.70 \text{ cm} - 25.00 \text{ cm} = 40.70 \text{ cm}$ ;  $z_1 = 139.30 \text{ cm}$ , (这只是使用表 7 中的参数的情况, 否则必须说明).  $A = z_1 - z_0 = 139.30 \text{ cm} - 40.70 \text{ cm} = 98.60 \text{ cm}$ .

(2) 光栅的位置  $z_g$  及其对应的最大不确定范围  $\Delta z_g$  见表 9.

表 9

(单位: cm)

自成像	1	2	3	4	5	6	7
$z_g$	133.20	125.97	116.83	102.30	77.50	62.95	53.80
$\Delta z_g$	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05

7. (1) 计算结果见表 10.

表 10

(单位: cm)

自成像	1	2	3	4	5	6	7
$a$	92.50	85.27	76.13	61.60	36.80	22.25	13.10
$b$	6.10	13.33	22.47	37.00	61.80	76.35	85.50
$ab$	564.3	1 136.6	1 710.6	2 279.2	2 274.2	1 698.8	1 120.1
$\frac{ab}{A \cdot E}$	0.978	1.969	2.964	3.949	3.940	2.943	1.941
$E = \frac{(0.1925 \text{ mm})^2}{0.633 \text{ nm}} \approx 5.85 \text{ cm}$							

(2) 在发散球面光波照明条件下, 设  $m = \frac{ab}{AE}$  ( $m$  近似为整数). 由于  $a + b = A$ , 故有

$$\frac{ab}{A} = \frac{ab}{a+b} = mE = m \frac{d^2}{\lambda}.$$

又由于

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f_m}.$$

所以

$$f_m = m \left( \frac{d^2}{\lambda} \right).$$

### 题 3 (2005 · 全国物理决赛题)

#### 研究光波的单缝夫琅禾费衍射实验

##### [仪器与用具]

光具座 1 台, 钠光灯 (钠光波长  $\lambda = 589.3 \text{ nm}$ ) 1 台, 读数显微镜 1 台, 可调狭缝屏 2 个, 三爪透镜夹 2 个, 凸透镜 2 个 (焦距  $f = 150.0 \text{ mm}$ ), 测微目镜 1 个, 白屏 1 个, 台灯 1 个.



## [实验名词及公式介绍]

1. 夫琅禾费衍射又称为平行光的衍射(见图 3-12),为使入射光是平行光,光源狭缝须置于透镜的前焦平面上,平行光垂直照射狭缝平面,注意光源狭缝与屏支撑杆中心偏离 35.0 mm,要观察测量夫琅禾费衍射图样应在衍射狭缝出光端放置一凸透镜,在凸透镜后焦平面上就呈现单缝夫琅禾费衍射图样.要实现准确测量,测微目镜分划板应位于凸透镜( $f=150.0$  mm)的后焦平面上,注:测微目镜分划板与支撑杆中心偏离了 25.0 mm.

2. 单缝夫琅禾费衍射图样暗纹满足公式  $b\sin\varphi_k = k\lambda$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ). 其中  $b$  为狭缝宽度; $k$  为衍射级次数; $\varphi_k$  为第  $k$  级暗纹对应的衍射角(注:衍射角很小); $\lambda$  为光波波长.

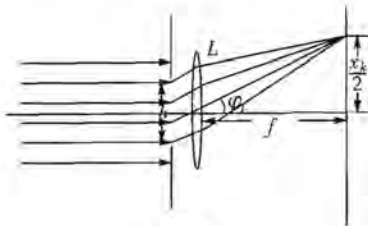


图 3-12

## [实验内容与要求]

1. 按所给仪器与用具组建单缝夫琅禾费衍射装置.

(1) 在试卷上画出光路图器件布置图.

(2) 在光路器件布置图上从光源狭缝屏杆中心起用有效数字标出各元件支撑杆中心在光具座的位置坐标(考生可动用光路器件布置图提示卡,但本步骤中的 8 分将被扣去).

(3) 写出组建装置的要求.

2. 从测微目镜中定性观察单缝衍射产生的亮暗条纹分布:

(1) 仔细调节光路中各元件使衍射条纹亮暗对比度达到最佳.

(2) 确认中央亮纹的位置,观察从中央亮纹算起的左、右两侧暗纹(级次分别用  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$  标记)的位置与暗纹间距,并说明相邻暗纹间距与中央亮纹宽度之间的关系.

(3) 定性说明缝宽与相邻暗纹间距的关系.

3. 本实验提供的衍射狭缝缝宽是可调的,结合测量(非衍射测量)将缝宽分别调节到如下两个范围内:

① 0.300 mm ~ 0.309 mm; ② 0.200 mm ~ 0.209 mm.

分别在缝宽①和缝宽②两种情况下进行如下测量(用有效数字记录和处理数据):

(1) 记录调节后的缝宽测量数据(非衍射测量).

(2) 测量这两种缝宽下  $\pm 1, \pm 2, \pm 3$  级衍射暗纹的位置坐标并列表记录.

(3) 用  $x_{+1}, x_{+2}, \dots, x_{+k}$  依次表示中央明纹右侧各级暗纹的坐标;用  $x_{-1}, x_{-2},$

… $x_{-2}$ 依次表示中央明纹左侧各级暗纹的坐标,  $|x_{+1} - x_{-1}|$ 为中央明纹的宽度。

定义  $x_1 = |x_{+1} - x_{-1}|$ ,  $x_2 = |x_{+2} - x_{-2}|$ , …,  $x_k = |x_{+k} - x_{-k}|$  分别为第1级, 第2级, …, 第k级暗纹间距, 由测得的数据求出  $\frac{x_1}{1}$ ,  $\frac{x_2}{2}$ , …,  $\frac{x_k}{k}$ , 并求平均值。

(4)  $|x_{\pm 2} - x_{\pm 1}|$ ,  $|x_{\pm 3} - x_{\pm 2}|$ , …,  $|x_{\pm k} - x_{\pm(k-1)}|$  分别为中央右侧(及左侧)相邻暗纹间距。用测得的数据计算相邻暗纹间距并求平均值。

(5) 根据衍射测量数据和公式(见《实验名词及公式介绍》)讨论并在试卷上回答: 缝宽  $b$  与  $\frac{x_k}{k}$  的关系,  $\frac{x_k}{k}$  与相邻暗纹间距的关系。

4. 根据以上单缝夫琅禾费衍射的实验结果设计一个温度传感器, 画出草图并叙述其工作原理。

5. 实验成绩以试卷记录为准。

[仪器使用方法介绍]

1. 测微目镜: 测微目镜是测量微小长度的常用光学器具。测微目镜有固定分划板和活动分划板, 两块分划板叠合起来其视场如图3-13所示。固定分划板是测微目镜的主尺, 其上有9条刻线, 刻线间距是1mm; 活动分划板刻有双丝和十字叉丝, 由双丝的位置可读出十字叉丝交点的位置坐标。活动分划板受测微螺旋(手轮)推动, 能左右移动, 其移动方向垂直于目镜的光轴, 手轮每转1圈叉丝移动1mm, 手轮上刻有100条等分的刻线, 因此仪器的最小分度为0.01mm, 再按  $\frac{1}{10}$  估读可到0.001mm。叉丝的位置坐标(读数)由两部分组成, 毫米以上的部分从视场中读出, 如图3-13给出毫米以上的读数为4, 毫米以下的部分从读数手轮上给出, 假设为0.125, 那么叉丝位置坐标的最终读数为4.125mm。

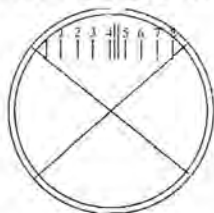


图3-13

2. 读数显微镜: 读数显微镜是一种具有测量功能的显微镜, 仪器最小分度为0.01mm。测量时调节调焦手轮, 当视场中的物体像清晰、分划板叉丝对准细小物体像边缘时就可以读数了, 毫米以上的读数从标尺上读出, 毫米以下的读数从手轮上读出, 再进行  $\frac{1}{10}$  估读, 这就是物体像边缘的坐标读数。

3. 为了使测量数据准确, 测量中应避免回程误差(亦称空程误差)。方法是在测量同一组数据时读数手轮只能按一个方向转动, 相应视场中叉丝也只向一个方向移动。

**【分析】** 这是物理光学的研究题。主要研究单缝衍射缝宽与衍射条纹位置的关系, 在此基础上, 要求设计一个温度传感器, 这是该题的画龙点睛之处, 这种传感器的敏感元件应该是狭缝。

本题对夫琅禾费衍射及有关公式作了介绍, 而且一般中学生对这种衍射也比较熟悉, 故本题第一部分根据实验要求中所述步骤进行研究, 不难得出结论。然而第二部分设计传感器则需要一些技术知识, 并具有灵活运用所学知识的能力。



## 【解】 1. 原理分析

单缝夫琅禾费衍射图形暗纹满足公式

$$b \sin \varphi_k = k\lambda, \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad ①$$

根据第  $k$  级暗纹间距的定义(参看图 3-14),

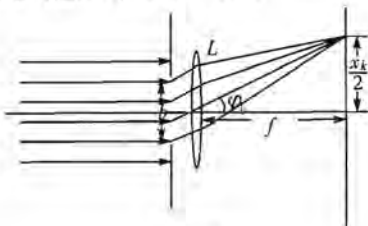


图 3-14

$$\tan \varphi_k = \frac{x_k}{2f} \quad ②$$

因  $\varphi_k$  很小,由①②式得

$$b = \frac{2\lambda f}{\frac{x_k}{k}} \quad ③$$

或

$$\frac{x_k}{k} = \frac{2\lambda f}{b} \quad ④$$

由图可见,各  $\varphi_k$  很小时,两侧相邻暗纹间的间距

$$|x_{\pm k} - x_{\pm(k-1)}| = f|\varphi_{\pm k} - \varphi_{\pm(k-1)}| \quad ⑤$$

由①式,得

$$|\varphi_{\pm k} - \varphi_{\pm(k-1)}| = \frac{\lambda}{b} \quad ⑥$$

故相邻暗纹间距为

$$|x_{\pm k} - x_{\pm(k-1)}| = \frac{\lambda f}{b} \quad ⑦$$

综上所述,在光源波长、透镜给定情况下,对于相同的衍射狭缝宽度,有如下结论:

(1)由④式表明,当缝宽一定时,衍射图样的第 1 级、第 2 级、第 3 级暗纹的间距除以级次数  $\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{3} = \dots$  是一个常数.第 1 级暗纹的间距  $\frac{x_1}{1}$ ,即是中央明纹的宽度.

(2)除了中央明纹的宽度用  $|x_{+1} - x_{-1}|$  表示以外,用⑦式表示的中央明纹两侧相邻暗纹间距是相等的.

(3)比较④式和⑦式,中央明纹的宽度是各相邻暗纹间距的 2 倍.

(4)由⑦式可见,当缝宽度  $b$  改变时,相邻暗纹间距随之改变. $b$  变大时(一定范围内),相邻暗纹间距变小; $b$  变小,相邻暗纹间距变大.由④式可见,第  $k$  级暗纹间

距亦随  $b$  改变。例如  $b$  变小时,第  $k$  级暗纹间距随之变大。设  $x_k'$  和  $x_k''$  分别表示变化前后的各级暗纹间距,则有  $x_k'' > x_k'$ 。

## 2. 光学器件布置图

(1) 夫琅禾费衍射亦称平行光的衍射,因此注意以下两点才能获得正确结果:

① 由于衍射狭缝刀口面偏离狭缝支撑杆中心 35.0 mm,因此图中狭缝支撑杆到透镜  $L_1$  的距离为  $(150.0 - 35.0)\text{mm} = 115.0\text{mm}$ 。

② 由于测微目镜分划板偏离测微目镜支撑杆中心 25.0 mm,因此图 3-15 中测微目镜支撑杆到透镜  $L_2$  的距离为  $(150.0 - 25.0)\text{mm} = 125.0\text{mm}$ 。

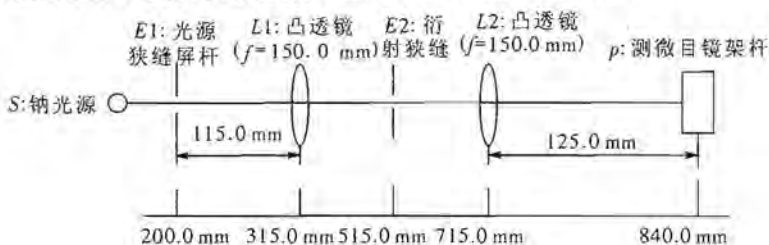


图 3-15

(2) 装置中各元件等高共轴。

## 3. 测量

缝宽  $b' = 0.300\text{mm}$  时衍射暗纹数据记录表:

衍射级次数 \ 暗纹坐标	1	2	3
$x_{\pm} (+)/\text{mm}'$	3.015	3.328	3.651
$x_{\pm} (-)/\text{mm}'$	2.433	2.168	1.908
$x_k/\text{mm}'$	0.582	1.160	1.743
$\frac{x_k'}{k}/\text{mm}'$	0.582	0.580	0.581
$\overline{\frac{x_k'}{k}}/\text{mm}$	0.581		

$$b_1 = \frac{2 \times 5.893 \times 10^{-4} \times 150.0}{0.581} \text{mm} = 0.304 \text{mm}$$

缝宽  $b' = 0.300\text{mm}$  时测衍射相邻暗纹间距的数据记录表:

$ x_{+3} - x_{+2} /\text{mm}$	$ x_{+2} - x_{+1} /\text{mm}$	$ x_{-3} - x_{-2} /\text{mm}$	$ x_{-2} - x_{-1} /\text{mm}$	平均值
0.323	0.313	0.260	0.265	0.290



缝宽  $b''=0.200\text{ mm}$  衍射暗纹数据记录表:

衍射级次数 暗纹坐标	1	2	3
$x_{\pm}''(+)/\text{mm}''$	3.165	3.607	4.051
$x_{\pm}''(-)/\text{mm}''$	2.283	1.841	1.399
$x_k''/\text{mm}''$	0.882	1.766	2.652
$\frac{x_k''}{k}/\text{mm}'$	0.882	0.883	0.884
$\overline{\frac{x_k''}{k}}/\text{mm}$	0.883		

$$b_2 = \frac{2 \times 5.893 \times 10^{-4} \times 150.0}{0.883} \text{ mm} = 0.200 \text{ mm}.$$

缝宽  $b''=0.200\text{ mm}$  时测衍射相邻暗纹间距的数据记录表:

$ x_{+3} - x_{+2} /\text{mm}$	$ x_{+2} - x_{+1} /\text{mm}$	$ x_{-1} - x_{-2} /\text{mm}$	$ x_{-2} - x_{-1} /\text{mm}$	平均值
0.444	0.442	0.442	0.442	0.442

由测量数据可知:

- (1) 狭缝宽度一定时, 各  $\frac{x_k}{k}$  近似相等.
- (2) 左(或右)侧相邻衍射暗纹间距近似相等.
- (3) 中央明纹的宽度等于两侧相邻衍射暗纹间距的 2 倍.
- (4) 狭缝宽度变窄时, 中央明纹的宽度和其两侧的相邻衍射暗纹的间距变大(衍射现象更显著), 此间距由光路参数和衍射狭缝宽度决定, 即  $\left(\frac{x_k}{2k}\right) = \frac{\lambda f}{b}$ .

#### 4. 传感器设计(仅供参考)

(1) 基于狭缝宽度与衍射暗条纹间距之间的确定关系, 如果将待测热源与狭缝相联系, 用待测热源温度的变化来改变狭缝的大小, 这样温度的变化就和衍射图样相邻暗纹间距(中央明纹两侧的  $\pm 1$  级暗纹间距除外)的变化联系起来。(注: 以 CCD 将衍射图样变为相应的电信号, 经 A/D 转换, 就可用计算机进行计算、处理、存储, 工业自动化生产中就常以此模型制作温度、压力、压强、密度变化的转换器和传感器)

#### (2) 制作

组成狭缝的两刀口, 一片固定在固定壁上, 成为固定刀口; 一片与双金属片相连接. 双金属片上片采用钢铁, 下片采用铜材(也可反之), 双金属片与热源相连接. 铜的垫片膨胀系数大, 钢的垫片膨胀系数相对较小, 当双金属片受热后, 铜片上翘, 狭缝宽度变小, 衍射图样条纹间距变宽.

(3) 定标(对学生不作要求)

在某一固定温度(例如  $0^{\circ}\text{C}$ , 或  $20^{\circ}\text{C}$ )下, 将铜、钢金属片平整连接, 调节缝宽, 确定相应的衍射条纹间距等参数, 以此为温度的基准。(现代工业自动化仪器是将此数据输入计算机进行处理, 确定其他温度点)

(4) 量程与精度(此内容仅供审题者参考, 对学生不作要求)

由③式得

$$\Delta\left(\frac{\lambda_k}{2k}\right) = -\frac{\lambda f}{b^2} \Delta b.$$

取  $\lambda = 5.803 \times 10^{-4} \text{ mm}$ ,  $f = 150 \text{ mm}$ ,  $b = 0.100 \text{ mm}$ , 得

$$\Delta\left(\frac{\lambda_k}{2k}\right) \approx -10 \Delta b.$$

可见衍射的光学放大使缝宽的变化放大了 10 数量级, 因此本测量方法可获得较高精度。

在条件许可下增大透镜焦距  $f$ , 如  $f = 400 \text{ mm}$ , 也可增大放大倍数, 但  $f$  的增大是有限的(仪器体积增大); 另外, 减小  $b$ , 放大倍数会增加, 但  $b$  太小, 光能量太少, 不足以使 CCD 工作(使用激光要好一些)。因此该传感器系统量程一般为  $0.01 \text{ mm} \sim 0.2 \text{ mm}$  之间, 相应的温度范围也不会很大。

#### 题 4 (2004 · 全国物理竞赛题)

设计并组装模拟乘法和加法运算电路

[实验仪器]  $0 \sim 36.0 \text{ V}$  可调稳压电源(自带开关  $S_1$ ) 1 台, 电阻箱  $R_1, R_2, R_3$  (均为  $0 \sim 1111.0 \Omega$  或  $0 \sim 99999.9 \Omega$  范围内可调) 共 3 只, 数字式电流表(自带开关  $S_2$ , 不能用作电流表, 只能作为电流指零用, 当电流计示数在  $\pm 0.2 \mu\text{A}$  内变化时即可认为电流表指零, 使用说明在仪器上) 1 只, 电位器 ( $0 \sim 10 \text{ k}\Omega$  可调) 1 只, 单刀双掷开关 ( $S_3$ ) 1 个, 导线若干。

[题目内容] 溶液的质量百分比浓度(简称浓度)  $a$  定义为溶质的质量  $m$  与溶液

(2) 能够模拟任意两个溶质质量  $m_1$  与  $m_2$  以及求它们的和  $m$  的运算, 即通过电路参数的设置和调节, 使电路中分别用于模拟  $m_1, m_2, m_3$  的电学量满足关系:  $m = m_1 + m_2$ , 即能够完成  $m = m_1 + m_2$  的加法计算。

注意: (1) 在做具体数值的模拟运算时, 以上被模拟的物理量中, 设定好的浓度值可以作为常量, 其余数据的模拟要考虑到有效数字的位数。

(2) 在分别实现计算功能 (1)(2) 的过程中, 只能在同一电路中用有关的元件切换, 而不能拆线后重新连接线路。

(3) 最后评分以答卷为准。

[实验的具体要求]

(1) 画出实验的电路图, 标明各仪器与元件的名称或代号(可以索要电路图提示卡, 但本步骤分数“10分”将被全部扣掉)。

(2) 叙述实验的原理和详细的实验步骤。

(3) 组装电路(电源电压建议调到  $3 \text{ V}$  左右), 用自己组装的电路完成下列模拟运算(不得使用计算器 and 笔算; 如有违反, 将被扣掉该步骤分数)并填写实验记录表格:

①  $a_1 = 58.7\%$ ,  $M_1 = 9.470 \text{ kg}$ , 用电路模拟计算出溶质质量  $m_1 = a_1 M_1$  的值。

②  $a_1 = 28.9\%$ ,  $M_2 = 65.90 \text{ kg}$ , 用电路模拟计算出溶质质量  $m_2 = a_2 M_2$  的值。

③ 模拟计算  $m = m_1 + m_2$  (模拟的  $m_1$  和  $m_2$  需模拟代入以上两步算出的数值)。

【分析】这是一道特殊类型的竞赛题, 说它特殊是因为题目要求用给定的电学仪器与元件设计和组装乘法和加法运算电路, 其次是因为用这些电路模拟溶质质量和溶质质量的关系, 由此看来这是一道多学科的综合题。

根据题目给定的仪器, 在中学物理实验范畴内, 用元件模拟乘法和加法运算电路, 自然会想到惠斯登电桥, 这种电桥的平衡条件中包含两个量的乘积, 因此用这种电桥电路可以实现乘法运算, 而如果将一个桥臂上接两个电阻元件, 则又可实现加法运算, 所以熟悉惠斯登电桥是解本题的关键。

【解】[实验电路图]

注意: 电阻箱 ( $R_1, R_2, R_3$ ) 及电位器  $R_4$  和  $R_5$  的位置标注不一定按图排列, 只要原理正确即可。

[实验原理及详细的实验步骤]

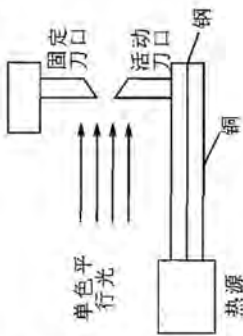


图 3-16

的质量  $M$  之比, 并可用百分数表示为:  $a = \frac{m}{M} \times 100\%$ . 请用给定的仪器和元件设计一个电路, 用该电路中的有关电学量模拟溶液质量  $M$  和溶质质量  $m$  (假定本试题中所提及的溶质皆为同种物质), 通过电路设定浓度和有关参数, 使该电路具备以下的计算功能:

(1) 能够完成任意浓度溶液的溶质质量  $m_i = a_i M_i$  的计算, 即对任意一种给定溶液的浓度值  $a_i$  ( $i=1, 2, 3, \dots$ ) 都可以通过电路调节来设定, 当设定好某一浓度后可以通过模拟输入任意溶液质量  $M_i$  ( $i=1, 2, 3, \dots$ ), 再进一步调节电路, 使电路中用于模拟溶质质量  $m_i$  的电学量满足关系:  $m_i = a_i M_i$ , 即能够完成  $m_i = a_i M_i$  的乘法计算.

(1) 断开所有开关, 按图 3-17 接线.

(2) 将开关  $S_3$  接到 1 端, 当电桥平衡时, 有

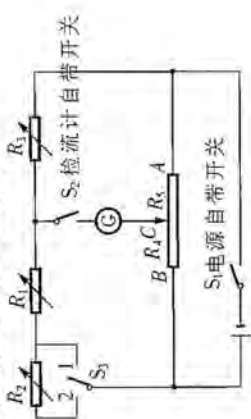


图 3-17



$$R_1 R_3 = R_3 R_4 \text{ 或 } R_3 = \frac{R_5}{R_4} R_1 = a R_1. \quad (1)$$

(3) 只要使  $\frac{R_5}{R_4} = a$ , 用  $R_1$  模拟  $M$ ,  $R_3$  模拟  $m$ , 即在  $R_1$  上设置  $M$  的值, 调节  $R_3$  使电桥平衡, 则直接从  $R_3$  的读数可得到  $m = aM$  的模拟运算结果.

(4) 由于从电位器上无法直接设定比值  $\frac{R_5}{R_4} = a$ , 所以, 在模拟乘法运算  $m = aM$  的过程中, 当计算  $m_1 = a_1 M_1 = 9.470 \times 58.7\% \text{ kg}$  时:

① 可以设置  $R_1 = 1\,000 \, \Omega$ ,  $R_3 = 587 \, \Omega$  (或  $R_1 = 100 \, \Omega$ ,  $R_3 = 58.7 \, \Omega$  等满足比例关系的值), 然后接通电源开关  $S_1$  和检流计开关  $S_2$ , 调节电位器使检流计示数为零即达到了电桥平衡, 则设置了  $a_1 = 58.7\%$ .

② 断开  $S_2$ , 不改变电位器旋钮位置, 将  $R_1$  调为  $947.0 \, \Omega$  (或  $9\,470 \, \Omega$ ), 接通  $S_2$ , 调节  $R_3$  使电桥平衡, 记下此时  $R_3$  的值, 则将  $R_3$  的值的小数点左移 2 位, 即得到  $m_1$  的数值 (此结果在实验记录表格中给分).

(5) 当计算  $m_2 = a_2 M_2 = 65.90 \times 28.9\% \text{ kg}$  时:

① 先断开, 设置  $R_1 = 1\,000 \, \Omega$ ,  $R_3 = 289 \, \Omega$  (或  $R_1 = 100 \, \Omega$ ,  $R_3 = 28.9 \, \Omega$  等满足比例关系的值), 然后接通电源开关  $S_1$  和检流计开关  $S_2$ , 调节电位器使检流计示数为零即达到了电桥平衡, 则设置了  $a_2 = 28.9\%$ .

② 断开  $S_2$ , 不改变电位器旋钮位置, 将  $R_1$  调为  $659.0 \, \Omega$  (或  $6\,590 \, \Omega$ ), 接通  $S_2$ , 调节  $R_3$  使电桥平衡, 记下此时  $R_3$  的值, 则将  $R_3$  的值的小数点左移 1 位 (或 2 位), 即得到  $m_2$  的数值.

(6) 将  $S_2$  接向 2 端, 当电桥平衡时, 有

$$\frac{R_1 + R_2}{R_4} = \frac{R_3}{R_5} \text{ 或 } R_3 = \frac{R_5}{R_4} (R_1 + R_2). \quad (2)$$

若设置  $\frac{R_5}{R_4} = b = 1$ , 则有

$$R_3 = R_1 + R_2. \quad (3)$$

可以满足加法的条件.

(7) 但是, 从电位器上无法直接设定比值  $\frac{R_5}{R_4} = 1$ , 这时, 断开  $S_2$ , 设置  $R_3 = 1\,000 \, \Omega$ ,  $R_1 = 1\,000 \, \Omega$ ,  $R_2 = 0$  (或  $R_3 = 1\,000 \, \Omega$ ,  $R_1 = R_2 = 500 \, \Omega$  或设置其他满足  $R_3 = R_1 + R_2$  的电阻值皆可), 然后接通检流计开关  $S_2$ , 再调节电位器, 使电桥平衡, 则作模拟运算时就在电位器上设置了

$$\frac{R_3}{R_1 + R_2} = \frac{R_5}{R_4} = \frac{1\,000}{1\,000} = 1.$$

(8) 断开  $S_2$ , 不改变电位器位置, 将  $R_1$  和  $R_2$  设置成与已经模拟出的  $m_1$  和  $m_2$  对应的数值 ( $\Omega$ ) 和 ( $\Omega$ ), 调节  $R_3$  使电桥平衡, 则此时  $R_3$  的读数 (小数点左移 2 位), 即对应  $m$  的数值 (此结果在实验记录表格中给分).



(9)先断开电源,再拆线整理仪器。

[实验记录表格]

在下列每空中数据(试作结果)大小可以有 $\pm 1\%$ 的误差,但是有效数字位数不能变(特别是用到千欧姆挡时,只能记录到个位),否则扣0.5分。

实验内容	$R_1/\Omega$	$R_2/\Omega$	$R_3/\Omega$	模拟运算结果
实现计算 $m_1 = a_1 M_1$	947.0 或 9 470		556.0 或 5 560	$m_1 = 5.560 \text{ kg}$
实现计算 $m_2 = a_2 M_2$	659.0 或 6 590		190.5 或 1 905	$m_2 = 19.05 \text{ kg}$
实现计算 $m = m_1 + m_2$	55.6 或 556.0	190.5 或 1 905	246.1 或 2 461	$m = 24.61 \text{ kg}$

题5 (2004·亚洲物理竞赛题)

### 霍尔效应和磁电阻效应

提供的仪器和材料(图3-18)

- 三只数字万用表。
- 固定在印刷电路4插脚MNPQ(M黑色,N黄色,P红色,Q绿色)上的霍尔传感器,一对引线为M、N,另一对引线为P、Q。
- 圆盘状永久磁铁片,半径 $r=14 \text{ mm}$ ,厚度 $t=4 \text{ mm}$ 。磁化方向与圆盘表面垂直。磁场 $B_0$ 的值标在磁铁片表面(单位是特斯拉)。

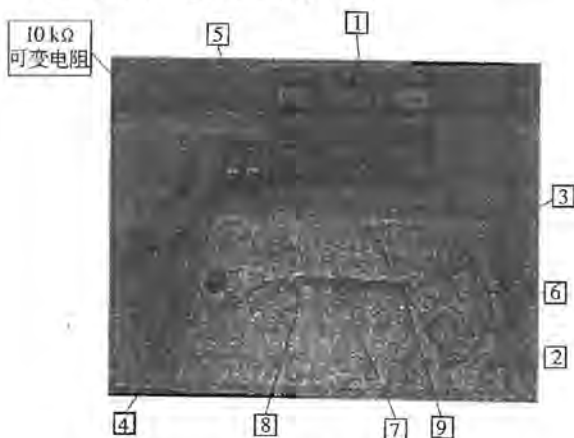


图1-18

在实验过程中,不使用它时请将它远离霍尔传感器。

- $N$ 匝线圈绕在环形铁磁材料芯上,环形材料芯的平均半径 $\rho=25 \text{ mm}$ 。环形铁磁芯上有间隙为 $d=3 \text{ mm}$ 的空气间隙。
- 干电池盒放有两节 $1.5 \text{ V}$ 的电池,相互独立,一节电池串联 $10 \text{ k}\Omega$ 的可变电

阻,称为电池 1,专为霍尔传感器提供电流.另一节电池被称为电池 2,仅在测量时使用,专为线圈提供电流.

6. 在中心有小孔的量角器.
7. 绝缘有机玻璃板,上有固定小针.
8. 带有霍尔传感器的印刷电路板支架.
9. 一小片可以用小针固定传感器的塑料片.
10. 可以忽略电阻的导线.
11. 坐标纸.

### 实验

#### 一、引言

##### 磁阻效应和霍尔效应

考虑一个长、宽分别是  $a$  和  $b$ , 厚度为  $c$  的平行六面体导体样品(见图 3-19).

电流  $I$  沿  $a$  的方向流过. 如果将该样品置于磁场  $\vec{B}$  中, 磁场将影响样品的电阻, 这就是所谓磁阻效应(MRE—magneto-resistivity effect). 如果  $\Delta R$  是样品电阻的增加值,  $R_0$  是无磁场时样品的电阻值, 则磁阻效应的数值定义为比值  $\frac{\Delta R}{R_0}$ .

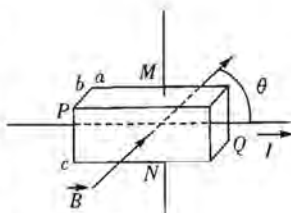


图 3-19

假定施加的磁场是均匀的, 磁感应强度矢量  $\vec{B}$  和样品的上端面相平行, 如图 3-19 所示. 而样品中的电荷载流子是电子, 那么洛伦兹力将使它们向上弯曲, 样品的上端面将带负电荷, 这就是霍尔效应. 上端面  $M$  点和下端面  $N$  点之间的电压定义为霍尔电压. 它可以用电表测量. 电极  $M$  和  $N$  之间的电势差由下式给出

$$U_{MN} = U_H + V_{MN}. \quad (1)$$

其中  $U_H$  是霍尔电压,  $V_{MN}$  是没有磁场时的电势差, 它来自于某种不需要的效应(例如电极  $M$  和  $N$  没有精确对准, 等等).

通常情况下, 霍尔电压  $U_H$  正比于  $IB\sin\theta$ , 磁电阻效应的数值正比于  $B^2\sin^2\theta$ . 式中  $\theta$  是矢量  $\vec{B}$  和电流  $I$  方向的夹角. 如果样品形状不规则时,  $U_H$  和  $\frac{\Delta R}{R_0}$  对  $B\sin\theta$  的依赖关系将较为复杂.

霍尔效应常用于制造测量磁场的器件, 这种器件称为霍尔传感器. 对于霍尔传感器而言,  $U_H$  由下式表示

$$U_H = \alpha IB\sin\theta. \quad (2)$$

其中  $\alpha$  被定义为霍尔传感器的灵敏度.

#### 二、样品测量

在实验中, 样品是商品霍尔传感器. 它是用塑料覆盖的半导体小薄片, 具有 4 个电极, 导出线脚为  $M$ 、 $N$ 、



图 3-20



$P, Q$ (见图 3-20),它在实验中用来研究磁电阻效应和霍尔效应。

将霍尔传感器置于磁场中,使用欧姆表测量  $M, N$  之间的电阻,就能导出磁电阻效应的大小。在  $PQ$  之间通电流(约  $1 \text{ mA}$ ),用毫伏表测量  $M, N$  之间的电压就能研究霍尔效应。

### 三、实验要求

#### 1. 决定霍尔效应的灵敏度 $\alpha$ 。

让  $1 \text{ mA}$  的电流通过传感器,保持传感器和圆盘磁片表面中心间距  $y=2 \text{ cm}$ 。调节磁片方向使霍尔电压值最大,以此确定磁片的方向。测量不同电流时的霍尔电压,决定霍尔传感器的灵敏度  $\alpha$ 。

半径为  $r$ ,厚度为  $t$  的圆盘磁片,在距轴线中心为  $y(y \gg t)$  处,其磁感应强度表达式为

$$B(y) = \frac{1}{2} B_0 \left[ \frac{y+t}{\sqrt{(y+t)^2 + r^2}} - \frac{y}{\sqrt{y^2 + r^2}} \right]$$

$B_0$  值标在磁片表面。

#### 2. 研究 $U_H$ 和角度 $\theta$ 之间的关系。 $\theta$ 是 $B$ 矢量与电流方向之间的夹角。

让  $1 \text{ mA}$  的电流通过传感器,保持传感器和圆盘磁片表面中心间距  $y=2 \text{ cm}$ 。将磁片置于量角器上,调节磁片方向使之与传感器和磁片表面中心连线垂直。

(a) 画出实验装置图。

(b)  $\theta$  值取在  $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$  范围内,将  $U_H$  和角度  $\theta$  列表。

(c) 请通过恰当的作图形式验证  $U_H$  和  $\sin\theta$  之间满足什么样的比例关系。

#### 3. 当 $B$ 矢量垂直于样品表面时,研究 $\frac{\Delta R}{R_0}$ 和 $B$ 之间的关系。

磁电阻效应只有在足够强的磁场下才是明显的。建议用尽量大的磁场。

(a) 画出实验装置图。

(b) 测量并将数据列表。

(c) 假设  $\frac{\Delta R}{R_0} \propto B^k$ , 通过作图,用恰当的方法确定  $k$  的值,估算  $k$  的最大偏差。

#### 4. 决定环形铁磁芯材料的相对磁导率。

根据以下步骤,设定并测量电流  $I$  值,决定铁磁芯材料的相对磁导率。

● 置霍尔传感器在铁磁芯材料的空隙处。

● 连接线圈、安培表和电池 2,在本部分,安培表仅使用“COM”和“20 A”插孔。

● 测量线圈中的电流和铁芯空隙中的磁感应强度  $B$ 。

● 计算相对磁导率。你可以利用下列关系计算

$$\frac{B(2\pi\rho - d)}{\mu} + Bd = 4\pi \times 10^{-7} NI$$

环形材料芯的平均半径  $\rho = 25 \text{ mm}$ ,  $N$  为线圈匝数,环形磁芯上的间隙为  $d = 3 \text{ mm}$  的空气间隙。

附录:数字万用电表的说明



图 3-21

当万用表作为毫安表用时用 COM 和 A 电流端  
 当万用表作为安培表用时用 COM 和 20 A 电流端  
 当万用表作为毫伏表用时用 COM 和 V· $\Omega$  端  
 当万用表作为欧姆表用时用 COM 和 V· $\Omega$  端

**【分析】** 本题是对两种磁电现象的研究:霍耳效应和磁电阻效应,这两种效应都有极广泛而重要的应用。两种效应同时研究将加深对磁电相互作用的理

解。本题利用商品霍耳传感器作为测量磁场的工具,来研究磁电效应中的各种关系。因为霍耳传感器的输出电压与磁感应强度成正比,输出电压又可用数字电压表测量,于是把非电学量的测量变为电学量的测量。不过首先要给霍耳传感器定标,即求霍耳传感器的灵敏度。

**【解】** 1. 求霍耳传感器的灵敏度  $\alpha$ 。

连接如图 3-22 所示的电路,由电池 1 供应的电流  $I_H$ ,自霍耳传感器的接脚 P 流入,通过传感器本身,从接脚 Q 流出。调整可变电阻器,使电流  $I_H = 1 \text{ mA}$ ,利用多用电表的毫伏挡,测量 M 和 N 两接脚之间的霍耳电压。在不加磁场的情况下,测得 M 和 N 两接脚之间的电压差  $V_{MN}$ ,其值约为  $-1.3 \text{ mV} < V_{MN} < 1.3 \text{ mV}$ 。

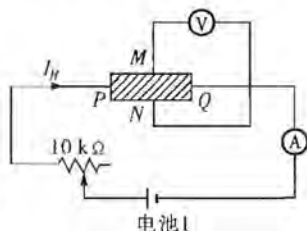


图 3-22

将圆盘形磁铁放在半圆形的量角器上,使磁铁中心和传感器之间的距离为  $y = 2.00 \text{ cm}$ 。转动磁铁面,直至得到最大的霍耳电压  $U_H$ 。在这个位置时,磁铁盘面的中心轴垂直于传感器的表面,即加于传感器的磁场方面垂直于电流  $I_H$  的方向,



使量角器的角度线定为  $\theta=90^\circ$ 。量取  $M$  和  $N$  两接脚之间的电压差  $U_{MN}$ ，计算霍尔电压  $U_H=U_{MN}-V_{MN}$ 。由于  $U_H=\alpha I_H B \sin\theta$ ，故

$$U_{MN}=\alpha I_H B \sin\theta+V_{MN}=\alpha I_H B+V_{MN}.$$

调整可变电阻器，使电流  $I_H$  由 1 mA 起渐增至几个毫安，所得数据如下表。

$I_H \pm 0.01(\text{mA})$	1.00	1.50	2.02	2.50	3.02	3.51	4.00	4.40
$U_{MN} \pm 0.01(\text{mV})$	32.4	48.5	65.0	80.4	96.0	110.5	125.0	136.5

将表中数据转换为  $U_{MN}-I_H$  的关系图线如图 3-23 所示。由于磁感应强度  $B$  固定不变，故  $U_{MN}$  和  $I_H$  之间有线性关系，其斜率等于  $\alpha B$ 。由图中的直线斜率可得  $\alpha B=30.6 \pm 0.3 \Omega$ ，式中磁感应强度可利用题设的公式和给予的  $B_0=0.946 \text{ T}$ ，及磁铁的半径  $r=14.0 \text{ mm}$ ，厚度  $t=4.0 \text{ mm}$ ，计算如下

$$B=\frac{1}{2} \times 0.946 \times \left[ \frac{20.0+4.0}{\sqrt{(20.0+4.0)^2+14.0^2}} - \frac{20.0}{\sqrt{20.0^2+14.0^2}} \right] \text{ T}$$

$$=2.11 \times 10^{-2} \text{ T}.$$

由以上的数据，计算得霍尔传感器的灵敏度  $\alpha$  为

$$\alpha=\frac{30.6 \pm 0.3 \Omega}{2.11 \times 10^{-2} \text{ T}}=(1.45 \pm 0.01) \times 10^3 \Omega/\text{T}.$$

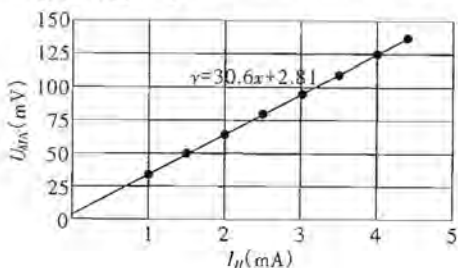


图 3-23

## 2. 探讨 $U_H$ 和角度 $\theta$ 之间的关系

安排实验装置如图 3-24 所示，维持电流  $I_H=1.00 \text{ mA}$  和  $y=2.00 \text{ cm}$  不变，转动量角器，改变磁场方向和电流方向之间的角度  $\theta$ ，在每一个角度，量取  $U_H$ ，角度的变化范围取在  $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ ，所得的  $U_H$  和  $\theta$  的数据，如下表所示。

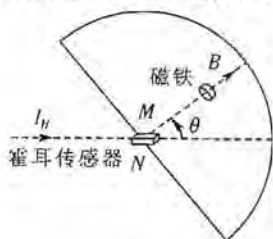


图 3-24

$$I_H = 1.00 \text{ mA}, V_{MN} = 0.4 \text{ mV}.$$

$\theta \pm 0.2(^{\circ})$	90	80	70	60	50	40	30	20	10	0
$\sin\theta$	1.00	0.985	0.940	0.866	0.766	0.643	0.500	0.342	0.174	0
$U_{MN} \pm 0.1(\text{mV})$	31.4	30.7	29.3	27.0	24.0	20.3	16.0	11.3	6.0	0.4
$U_H \pm 0.1(\text{mV})$	31.0	30.3	28.9	26.6	23.6	19.9	15.6	10.9	5.6	0
$\theta \pm 0.2(^{\circ})$	-10	-20	-30	-40	-50	-60	-70	-80	-90	
$\sin\theta$	-0.174	-0.342	-0.5	-0.643	-0.766	-0.866	-0.940	-0.985	-1.00	
$U_{MN} \pm 0.1(\text{mV})$	-5.3	-10.8	-16.5	-21.6	-26.1	-30.0	-33.0	-34.9	-35.6	
$U_H \pm 0.1(\text{mV})$	-4.9	-10.4	-16.1	-21.2	-25.7	-29.6	-32.6	-34.5	-35.2	

将表中数据转换为  $U_H - \sin\theta$  的关系图线,如图 3-25 所示,为一通过原点的直线,因此  $U_H$  和  $\sin\theta$  成正比。

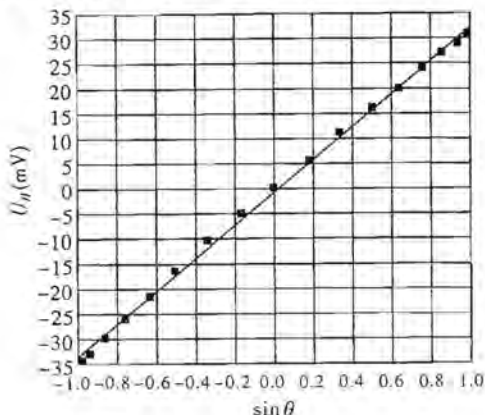


图 3-25

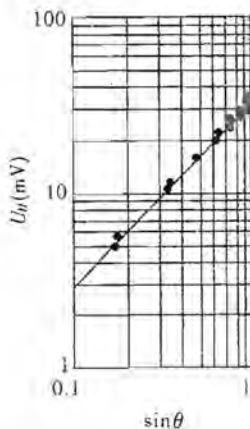


图 3-26

注:若利用全对数坐标纸,将上表的数据转换为  $U_H - \sin\theta$  的关系图线如图 3-26 所示,则可知两者成正比的程度。设  $U_H \propto (\sin\theta)^k$ ,则由图中的直线斜率可得  $k = 0.97 \pm 0.01$ 。

3. 在  $\vec{B}$  垂直于样品平面的情况下,探讨  $\frac{\Delta R}{R_0}$  和  $B$  的关系。

由实验 1 可知,测量霍尔电压  $U_H$ , 可得知外加于霍尔传感器的磁感应强度  $B$ 。安排实验装置如图 3-27 所示,使圆盘形磁铁的中心轴保持垂直于传感器的表面,并使电流维持在  $I_H = 1 \text{ mA}$ , 改变磁铁中心和传感器之间的距离  $y$ , 以改变外加在传感器上的磁感应强度  $B$ 。在每一个  $y$  值, 测量相应的霍尔电压  $U_H$ , 并测量在施加磁场时,  $M$  和  $N$  两接脚之间的电阻  $R$ , 计算  $\Delta R = R - R_0$ , 式中  $R_0$  为未加磁场时该两接脚之间的电阻。所测得的实

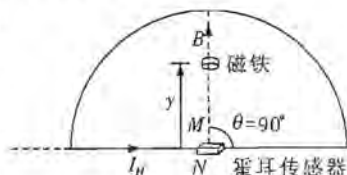


图 3-27



验数据如下表。

未加磁场时,霍耳传感器  $M$  和  $N$  两接脚之间的电阻  $R_0 = 374 \Omega$ ,其电压  $V_{MN} = 0.4 \text{ mV}$ 。

$y \pm 0.1(\text{mm})$	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10
$U_{MN} \pm 0.1(\text{mV})$	31.0	35.2	39.5	43.6	49.7	57.6	61.6	68.8	75.8	81.7	90.3
$U_H \pm 0.2(\text{mV})$	30.6	34.8	39.1	43.2	49.3	57.2	61.2	68.4	75.4	81.3	89.9
$R \pm 1(\Omega)$	380	381	383	385	388	392	395	400	405	411	420
$\Delta R = R - R_0(\Omega)$	6	7	9	11	14	18	21	26	31	37	46

由于  $R$  和  $R_0$  的差值小于 10%, 因此  $\frac{\Delta R}{R_0}$  可代之为  $\frac{\Delta R}{R}$ , 所导致的误差值小于 1%。这是因为  $\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta R}{R_0} \left(1 - \frac{R - R_0}{R}\right) \approx \frac{\Delta R}{R_0} - \left(\frac{\Delta R}{R_0}\right)^2$ , 式中二次方项的量值小于 0.01。在实验期间  $R_0$  没有变化, 故  $\frac{\Delta R}{R_0}$  对  $B$  的关系, 相当于  $\Delta R$  对  $B$  的关系。又由于  $\alpha = \frac{U_H}{IB}$ , 若电流  $I$  不变, 则  $B \propto U_H$ 。因此  $\ln(\Delta R)$  对  $\ln B$  的关系曲线, 可转换为  $\log(\Delta R)$  对  $\log U_H$  的关系曲线。在全对数坐标纸上, 将表中的数据转换为  $\Delta R$  对  $U_H$  的关系曲线, 如图 3-28 所示。图中的直线斜率即为  $k$  值,  $k = 1.9 \pm 0.1$ 。

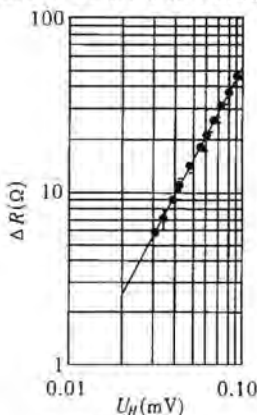


图 3-28

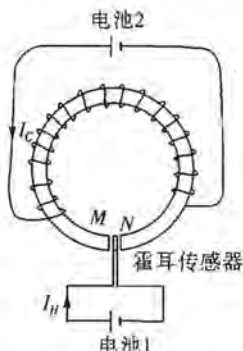


图 3-29

#### 4. 求环形螺线管内铁磁性材料的相对磁导率 $\mu$

安排实验装置如图 3-29 所示, 将霍耳传感器插入环形螺线管的间隙中, 接通电池 1, 使流经传感器的电流  $I_H$  保持为 1 mA, 测量霍耳电压  $U_H = U_{MN} - V_{MN}$ , 用以计算在环状磁铁间隙中的磁感应强度  $B$ 。将环形螺线管的线圈接通电池 2, 这时流经线圈的电流  $I_C$  可能在 3 A 至 4 A 之间变动, 读取稳定的电流读数  $I_C$  和相应的



传感器电压  $U_{MN}$ 。注意每次读取电流读数后,立即切断电路,以避免霍尔传感器的温度有所变动。计数螺线管线圈的匝数  $N$ ,利用安培定律,可得下列关系式

$$\frac{B(\pi\rho-d)}{\mu} + Bd = 4\pi \times 10^{-7} \times NI_C.$$

或写为 
$$B = \left[ \frac{4\pi \times 10^{-7} \times N}{(\pi\rho-d) + d} \right] I_C.$$

利用实验 1 所得霍尔传感器的灵敏度  $\alpha = \frac{U_H}{I_H B}$ , 得

$$B = \frac{U_H}{\alpha I_H} = \frac{U_{MN} - V_{MN}}{\alpha I_H}.$$

代入上式,可得

$$\frac{U_{MN} - V_{MN}}{\alpha I_H} = \left[ \frac{4\pi \times 10^{-7} \times N}{(\pi\rho-d) + d} \right] I_C.$$

$$\frac{4\pi \times 10^{-7} \times N \alpha I_H}{(\pi\rho-d) + d} = \frac{U_{MN} - V_{MN}}{I_C}.$$

实验所得  $I_C$  和  $U_{MN}$  的关系数据如下表。

$N=49, I_H=1.00 \text{ mA}, V_{MN}=0.5 \text{ mV}.$

$I_C \pm 0.02(\text{A})$	3.00	3.18	2.91	2.81	3.15
$U_{MN} \pm 0.2(\text{mV})$	67.8	71.6	65.3	61.2	68.3
$\frac{U_{MN} - V_{MN}}{I_C} (10^{-2} \Omega)$	$2.24 \pm 0.02$	$2.24 \pm 0.02$	$2.23 \pm 0.02$	$2.16 \pm 0.02$	$2.15 \pm 0.02$

由表中的数据计算得  $\frac{U_{MN} - V_{MN}}{I_C}$  的平均值为  $(2.21 \pm 0.01) \times 10^{-2} \Omega$ , 故

$$\left[ \frac{4\pi \times 10^{-7} \times N \alpha I_H}{(\pi\rho-d) + d} \right] = 0.0221 \pm 0.0001 \Omega.$$

将已知的数据代入得

$$\frac{\pi \times 0.0250 - 0.0030}{\mu} + 0.0030$$

$$= \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 49 \times (1.45 \pm 0.01) \times 10^3 \times 1.0 \times 10^{-3}}{0.0221 \pm 0.0001}$$

解得螺线管内铁磁性材料的相对磁导率  $\mu = 73 \pm 1$ 。

#### 题 6 (2002 · 亚洲物理竞赛题)

#### 光学实验题

##### (1) 背景

实验的目的是测量偏振光反射系数对角度的依赖关系和测定半导体薄片材料的折射率。



当光照射到一半导体表面时,部分被反射,部分透射,部分被吸收.反射光功率的相对值称为反射系数  $R$ ,定义为反射光功率  $I_r$  与入射光功率  $I_i$  之比

$$R = \frac{I_r}{I_i} \quad (1)$$

入射光可分解为 2 个偏振分量,1 个分量的偏振方向与入射角平行(记为 p 分量),另 1 个分量偏振方向与入射面垂直(记为 s 分量),本实验中用的是红色激光,它在半导体表面的吸收可以忽略不计.在此条件下,对于光自空气入射到材料表面的反射系数  $R_p$  和  $R_s$ (分别对应于 p 分量和 s 分量)由菲涅尔公式给出

$$\pm \sqrt{R_p} = \frac{n \cos \theta_i - \cos \theta_r}{\cos \theta_i + n \cos \theta_r} \quad (2)$$

$$- \sqrt{R_s} = \frac{\cos \theta_i - n \cos \theta_r}{\cos \theta_i + n \cos \theta_r} \quad (3)$$

式中  $n$  是材料的折射率,  $\theta_i$  为入射角,  $\theta_r$  为反射角,  $\theta_t$  为折射角,如图 3-30 所示.

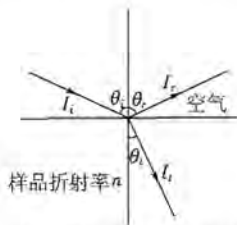


图 3-30 光照射到样品上的光路图

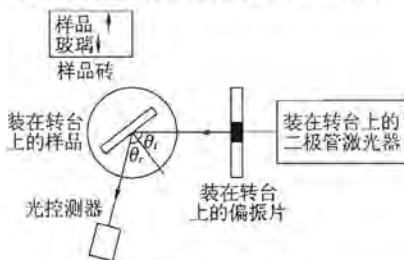


图 3-31 实验测量装置

在  $\theta_i = 0$  情况下,直接测量  $R_p$  和  $R_s$  实际上不可行.然而菲涅尔公式允许我们从任意入射角下得到  $R_p$  和  $R_s$  值计算出  $n$ .图 3-31 为实验测量装置图.

### (2) 实验装置材料

① 1 个固定在转台上并与 1 个 3 V 干电池相连的二极管(半导体)激光器.激光器发出激光的波长为 650 nm.

② 1 个固定在转台上直径为 20 mm 的线偏振片.(注意:转台上的 0 读数位置不一定是偏振片的偏振轴所指方向)

③ 1 片玻璃片(对波长为 650 nm 的光其折射率为 1.57),1 片半导体薄片(样品),分别固定在矩形砖(样品砖)的两相对侧面.

④ 能固定样品砖的光学转台.

⑤ 1 个数字显示激光功率表,与固定在支架上的光探测器相接,该支架可绕样品转动.

⑥ 1 个光具座.

⑦ 作图纸,作反射激光功率与偏振片转台上角度关系曲线图(提供 2 张).

⑧ 作图纸,画反射系数与入射角关系曲线图(提供 4 张).

⑨ 遮光罩.



⑩1支手电筒和1根软尺。

### (3) 实验和计算

① 确定入射激光的偏振面。

二极管激光器发出波长为 650 nm 的光为部分线偏振光,为了获得最好的结果,偏振片的偏振轴应与激光最强的线偏振分量一致。

为测量  $R_p$  或  $R_s$ ,需要知道偏振片的偏振方向,以便产生平行于入射面或垂直于入射面的偏振光。偏振片的偏振方向可从已知折射率为 1.57 的玻璃样品的反射激光功率推知。

将光学系统尽可能对准。

a. 测定二极管激光器产生的激光束和偏振片的相对取向(即二极管激光器转轴和偏振片转轴位置的角度读数差),以使得偏振片与激光最强的偏振方向一致。在以下测量中,将偏振片和激光器当做同一个系统,需要旋转时一起转。

b. 将玻璃样品在布儒斯特入射角下固定在转台上。测量在不同偏振片角度(用度做单位)下的反射激光功率并作图,由此确定偏振片的偏振方向。(注意:每次读取激光功率表读数时,必须按住激光功率表上的按钮)

② 测量半导体薄片的反射系数  $R_p$  和  $R_s$ 。

将样品砖固定在转台上,以使半导体薄片的反射表面可绕在入射光路上的垂直轴转动,此轴应在样品表面上。

将光学系统尽可能校准。

a. 调整偏振片的取向,使入射到半导体片上激光的偏振方向平行于入射面。在不同的入射角下测量反射激光的功率,并画出  $R_p$  值与入射角  $\theta_i$  的关系图,要求在入射角的测量范围在实验装置允许的条件下尽可能大。

b. 转动偏振片使入射光的偏振方向与入射面垂直,在不同入射角下测量反射激光功率,并画出  $R_s$  值与入射角  $\theta_i$  的关系图,要求入射角的测量范围在实验装置允许的条件下尽可能大。

③ 计算半导体片材料的折射率。

a. 由菲涅尔公式证明

深的理解,又要掌握光学仪器的基本调节方法,解题思路比较清楚,一步一步做下去,才能得到正确的结果。

解题的关键是弄清入射光的两个偏振分量:  $p$  分量和  $s$  分量,通过菲涅尔公式(题目已给出)求出材料的折射率。因反射系数与入射角有关,所以折射率也与入射角有关,因为正入射时,测量反射激光功率实际上不可行,所以,利用外推法确定正入射时的折射率。在测绘反射激光功率与偏振角关系曲线时,在极值点附近应多测一些数据,以保证实验结果的准确度。

本实验对基本调节方法——光学系统的准直要求较高,在实验技巧方面,要求会利用玻璃样品确定偏振片的偏振轴方向,弄明白题目给两种样品(半导片体和玻璃片)的意图。

### 【解】 实验结果

在本实验中,首先必须确定入射激光的偏振面。值得注意的是二极管激光器发出的光为部分偏振光,为了获得最好的结果,偏振片的偏振轴应与激光最强的线偏振分量一致。将激光器、偏振片和探测器放在一条直线上,固定激光器和偏振片中的 1 个,旋转另 1 个。观察探测器所测得的光强,直至光强达到最大值,在以后的测量中,将偏振片和激光器当做一个系统,需要旋转时一起转。

根据玻璃的折射率  $n$ , 公式  $\theta_B = \arctan n$ 。

④ 计算出玻璃的布儒斯特角,并按此位置把玻璃样品固定在转台上。旋转偏振系统,测量不同偏振角度下的反射激光功率,见图 3-32(该图由竞赛组织者提供参考答案)。可得出反射激光功率最小时偏振片相对于入射玻璃样品的角度,根据布儒斯特原理,可确定此时激光的偏振面与样品的入射面平行。

图 3-32

$$n = \sqrt{\frac{(1 \pm \sqrt{R_p})(1 + \sqrt{R_s})}{(1 \mp \sqrt{R_p})(1 - \sqrt{R_s})}}$$

从实验图或用其他方法确定 $\pm\sqrt{R_p}$ 的符号取正或负时对应的入射角范围。

b. 利用题②中得到的图, 求出入射角为 $20^\circ$ 、 $30^\circ$ 、 $40^\circ$ 、 $50^\circ$ 、 $60^\circ$ 、 $80^\circ$ 的6组 $R_p$ 和 $R_s$ 值. 利用这6组数据, 计算出半导体片材料的6个折射率的数值. 计算 $n$ 的平均值并估算标准偏差.

c. 利用题②中所得到的图, 用外推法确定正入射时的 $R_p$ 和 $R_s$ 值, 并由外推数据计算半导体片材料的折射率.

**【分析】** 此题是关于偏振光的试题, 研究偏振光反射系数对角度的依赖关系. 本题对中学生来说是有难度的, 要求考生既对光的偏振理论及特点有较



图 3-32 反射激光功率的偏振角关系

根据前述确定的激光偏振面方向, 使其分别垂直和平行于半导体入射面, 在不同角度下测得反射激光功率, 见图 3-33 (由竞赛组织者提供参考答案), 可得出 $R_p$ 和 $R_s$ 与入射角的关系.

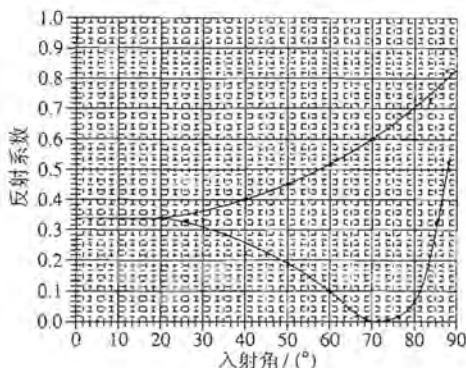


图 3-33 偏振面分别垂直和平行于半导体入射面时,

反射系数与入射角关系

作图时,在极小值处应多测几个点,以保证图象的光滑性与正确性.

由菲涅尔公式推导折射率公式.

由②③式得

$$\frac{1 \pm \sqrt{R_p}}{1 \mp \sqrt{R_p}} = \frac{n \cos \theta_i}{\cos \theta_t} \quad (5)$$

$$\frac{1 + \sqrt{R_s}}{1 - \sqrt{R_s}} = \frac{n \cos \theta_i}{\cos \theta_t} \quad (6)$$

由⑤⑥式得

$$n = \sqrt{\frac{(1 \pm \sqrt{R_p})(1 + \sqrt{R_s})}{(1 \mp \sqrt{R_p})(1 - \sqrt{R_s})}}$$

又由②式知,当  $\pm \sqrt{R_p}$  取正号时

$$n \cos \theta_i - \cos \theta_t > 0 \quad (7)$$

由折射定律知

$$\sin \theta_t = n \sin \theta_i \quad (8)$$

联立⑦式和⑧式得

$$\sin \theta_i < \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

即当  $\sin \theta_i < \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$  时,  $\pm \sqrt{R_p}$  取正号.

同理可得,当  $\sin \theta_i > \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$  时,  $\pm \sqrt{R_p}$  取负号;

当  $\sin \theta_i = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$  时,  $\sqrt{R_p} = 0$ .

$n$  的 6 个值如表 1 所示.

表 1  $n$  的 6 个值

$\theta_i / (^{\circ})$	$R_p$	$R_s$	$n$
20	0.341	0.366	3.93
30	0.293	0.382	3.82
40	0.248	0.435	3.81
50	0.187	0.497	3.82
60	0.115	0.576	3.85
80	0.037	0.812	3.61
$\bar{n} = 3.81$		$\sigma_n = 0.05$	

在用外推法确定正入射时的  $R_p$  和  $R_s$  值时,要注意两条曲线的  $R_p$  和  $R_s$  最后在入射角为零度时要归于一点。

### 题 7 (2002·亚洲物理竞赛题)

#### 音叉振动频率与对称双臂质量关系的研究

##### 1.1 目的

研究 1 个音叉的振动频率如何随附在音叉双臂一定位置上相同物块的质量而变化,并由此测定 1 对附在音叉上的物块 X 的未知质量。

##### 1.2 基本概念与知识

###### 1.2.1 频闪仪

本实验将使用 1 台频闪仪,它是有 1 个放电灯的简单电子设备,该放电灯可以在很均匀的时间间隔内短时间闪出强光。使用频闪仪可以在不直接接触运动物体的情况下,测量物体的转动或振动频率。

注意事项:

频闪仪有一定的寿命,即最多的闪烁次数,因此不用时不要开着。

考虑由频闪仪照亮做匀速圆周运动的质点,如果闪烁频率是质点运动频率的几倍或几分之一,那么这个质点看上去将固定不动。因此,质点圆周运动的周期可以通过调节闪烁光的频率来测定。

假如某一质点做转动运动,其频率为  $x$  Hz,频闪仪的闪烁频率为  $y$  Hz。于是,在相继 2 次闪烁的时间间隔  $\frac{1}{y}$  s 内,这一物体将转过  $\frac{2\pi x}{y}$  rad。

如果  $\frac{x}{y}$  是无理数,那么它将无法表示为 2 个整数的比值,此时这个质点不是固定不动,而是看上去慢慢地向前或向后转动,向前或向后取决于  $\frac{x}{y}$  的比值比相近的某个有理数较小一些或较大一些。

如果  $\frac{y}{x} = \frac{q}{p}$ , 其中  $p$  和  $q$  是整数,那么频闪仪将在每  $p$  个整周期内闪烁  $q$  次。进一步,如果  $p$  和  $q$  之间无公约数(假定整个实验中),那么每次闪烁将照耀出物体



的不同位置,这样物体在闪烁光下将呈现 $q$ 个不同固定位置。

如果 $q$ 变得很大,很难数出转动物体所呈现固定不动位置的数目。

上述关于转动物体的理论可同样运用于做简谐运动的音叉,因为我们可以将振动看成圆周运动在给定的某个直径上的投影。但在这种情况下,振动物体每经半个周期将沿相同路径反向回来,此时存在一种巧合(虽然很难),使半个周期内的图像与下半个周期相同,这时将导致只记下1个,而不是2个图形(但强度仍为2倍)。这种巧合在实验观察中应予避免。

### 1.2.2 基本同步的确定

当物体每转动或振动1周,频闪仪恰好闪烁1次,此时物体看上去停在1个固定的位置,此即两者同步。可是必须指出,当闪烁频率为物体运动频率的几分之一时,类似的结果和不可区分的结果也将发生。这样,如果运动物体的频率完全不知道,要调整到基本同步,一种保险的步骤是从一高的频率开始,当多个像看到后,再慢慢降低闪烁频率,直到第1次出现单个像。在所有的测量中,这个步骤被用来检验是否基本同步。

### 1.2.3 复频

当频闪仪的闪烁频率高于观察物体的振动频率时,这种闪烁频率称为物体振动频率的复频。其相反情况指闪烁频率比运动物体的频率小的时候,称为亚频。

如果频闪仪的闪烁频率为转动物体频率的 $q$ 倍时,多个像被观察到,在这种情况下,1个转动质点看上去为绕圆周等距分布的几个固定不动的像。如果是2倍频率, $\frac{q}{p}=2$ ,将产生2个有 $\pi$ 角度距离的像。对3倍频率, $\frac{q}{p}=3$ ,将在 $\frac{2\pi}{3}$ 角距离处产生3个像,依此类推。质点转动的频率即等于闪烁频率除以所观察到像的数目。普遍而言,如果 $q > p > 1$ ,则频闪仪在质点运动 $p$ 圈闪烁 $q$ 次,这样将仍然出现 $q$ 个固定不动的位置。

### 1.2.4 亚频

这里 $\frac{q}{p}$ 小于1。如果频闪仪的闪烁频率正好是物体运动频率的 $\frac{1}{p}$ 倍,这里 $p > 1$ ,那么物体在每个闪烁间隔中运动了 $p$ 周,而物体只呈现1个像。如果 $p > q > 1$ ,则频闪仪闪烁 $q$ 次而物体运动了 $p$ 个完整周,看到的固定像数目将是 $q$ 个。

### 1.2.5 可调频音叉

1个可调频音叉(相当普通音叉)一旦起振,它将以某一基频振动而无谐频振动,音叉的两臂从每个面看都是对称的,以致两臂的运动完全反向,从而在任一瞬时对中心杆有等值反向的作用力。中心杆的净受力为零而不振动,从而紧紧握住它也不会引起不希望有的振动衰减。同样的道理,音叉的两臂不能同相振动,因为同相振动将对中心杆产生有限振荡力,这个力将使得这种振动很快衰减掉。

可以通过将相同质量的物块对称地加在两臂上来减小音叉的基频(音叉两臂所加的物块必须对称)。对于这种加载的音叉的振动周期 $T$ 由下式给出

$$T^2 = A(m+B),$$

其中 $A$ 为常数,它依赖于音叉材料的力学性质、大小及形状, $B$ 为与每个振动



臂的有效质量有关的常数,  $m$  为加载物的质量(包括夹子的质量)。

### 1.3 提供的器材

- (1) 带有数字显示频率的频闪仪。
- (2) 小型手电筒。
- (3) 音叉, 每个臂上对称地载有 31.6 g 印有数字和线条的物块, 物块的质心与 P 点重合(P 点很清楚地标注在每个臂上, 但被这个物块遮盖住)。
- (4) 2 个带有可拆卸手柄的夹子, 手柄只在需要打开夹子时使用, 实验时应卸下。
- (5) 1 对相同的未知质量的物块。
- (6) 具有下列已知质量的物块(成对): 5 g, 10 g, 15 g, 20 g, 25 g。
- (7) 标准作图纸(5 张)。

### 1.4 实验步骤

步骤 1: 基本同步和复频测量。

(1) 使频闪仪的闪烁和两臂载有 31.6 g 物块的音叉振动达到基本同步, 暂时将此对物块从臂上卸下, 在检查确认预先用螺丝固定在音叉两臂上的物块质心落在 P 点后, 再装上(P 在音叉两臂上标出但被物块挡住)。记录基本同步获得时频闪仪闪烁的频率。

(2) 将闪烁频率保持比音叉频率大, 找出尽可能更多的闪烁频率, 使得产生可观察到的看上去固定不动的像(此时音叉两臂载有 31.6 g 物块), 确定对应的  $\frac{q}{p}$  的值。

(3) 按照下列表格将数据列表(以  $\frac{q}{p}$  增加的次序), 画出所有观察到频闪仪闪烁频率  $f$  对  $\frac{q}{p}$  的直线图, 在图中标出每个数据点对应的  $\frac{q}{p}$  值。

频闪仪读数	静止像数目	$\frac{q}{p}$

步骤 2: 测量亚频。

(1) 将闪光频率保持低于音叉基频(音叉两臂载有 31.6 g 物块), 找到所有可观察到的闪烁频率, 使此时产生稳定不动的像。

(2) 如步骤 1 将读数列表(以  $\frac{q}{p}$  减小的次序), 画出所有观察到的闪烁频率对  $\frac{q}{p}$  (音叉两臂载有 31.6 g 物块) 值的直线关系图。在图中标出每个数据点对应的  $\frac{q}{p}$  值。

步骤 3: 测定 1 对未知物块 X 的质量。

(1) 将 31.6 g 的物块从音叉臂上卸下(此时可看到音叉臂上的 P 标志), 测出





音叉在两臂无物块时的振动频率。

(2)分别测出音叉两臂上(所带质量相同)带有已知质量为 5 g、10 g、15 g、20 g、25 g 物块时的音叉振动频率。注意物块上所标的质量为包括夹物块用的夹子和物块本身的总质量(此时夹子的两个手柄已经卸下)。

(3)用在(2)中得到的数据列表并画出  $T^2$  与  $m$  的关系图,求出直线的斜率和在  $m$  轴上的截距。

(4)用一对未知的物块  $X$  代替已知质量的物块,测量出此时音叉的振动频率,求出  $X$  的质量  $m_X$ 。同样,注意  $X$  的质量也包括夹子的质量(此时夹子的手柄已经卸下)。

**【分析】** 此题所提到的复频和亚频概念以及用频闪仪作测量仪器的实验,在中学物理课中并未学过,此题的特点是要求考生从试题中学习一些新概念后做研究性实验,这要求考生有较强的理解能力、分析能力和敏锐的观察能力。因此要解此题,首先要弄懂这些概念以及有关符号的意义,例如基频、复频、亚频、同步、 $p$ 、 $q$ ,等等。

由于基频是此题中最基本的物理量,必须从多方面测量和论证,找准基频非常重要,在基频测量准确无误的基础上再做其他内容,是该研究型实验应注意的问题,有人误把 2 倍复频当做基频,因而造成错误的实验结果。

在实验操作上要有条不紊,循序渐进。例如在测复频和亚频时,闪烁频率要从高于和低于音叉基频逐步改变,向基频逼近。

测定一对未知物理质量时,采用先定标后测量的方法(模式),即先将已知质量的物块夹在音叉上测音叉振动频率(所谓定标),再用未知质量的物体代替已知质量的物块,测此时的音叉振动频率(所谓测量),这是实验中惯用的方法。

#### **【解】 实验结果**

表 1~表 3 实验数据引自一名中国选手在竞赛考试中的实验答卷,图 3-34~图 3-37 为各数据表生成的图。

表 1 步骤 1 实验数据

$f/\text{Hz}$	静止像数目	$\frac{q}{p}$
64.5	1	1
86.3	4	$\frac{4}{3}$
96.9	3	$\frac{3}{2}$
129.4	2	2
193.9	3	3
258.3	4	4

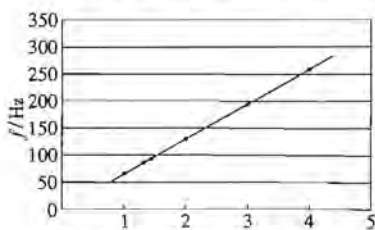
图 3-34  $q \geq p$  时的  $f - \frac{q}{p}$  直线

表 2 步骤 2 实验数据

$f/\text{Hz}$	静止像数目	$\frac{q}{p}$
64.5	1	1
48.5	3	$\frac{3}{4}$
43.1	2	$\frac{2}{3}$
38.8	3	$\frac{3}{5}$
32.2	1	$\frac{1}{2}$
21.5	1	$\frac{1}{3}$

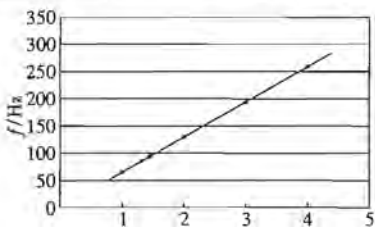
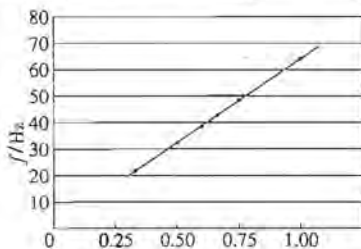
图 3-35  $q \geq q$  时的  $f - \frac{q}{p}$  直线

表 3 步骤 3 实验数据

$m/\text{g}$	$f/\text{Hz}$	静止像数目	$\frac{q}{p}$	$\bar{f}/\text{Hz}$
5	106.8	1	1	106.9
	160.4	3	$\frac{3}{2}$	
	213.8	2	2	
10	91.9	1	1	92.0
	138.1	3	$\frac{3}{2}$	
	184.0	2	2	

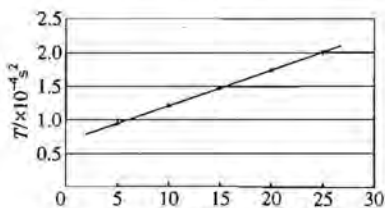
15	82.9	1	1	82.8
	124.2	3	$\frac{3}{2}$	
	165.6	2	2	
20	75.5	1	1	75.6
	113.3	3	$\frac{3}{2}$	
	151.3	2	2	
25	70.4	1	1	70.6
	105.8	3	$\frac{3}{2}$	
	141.5	2	2	
$m_x$	85.6	1	1	85.6
	128.2	3	$\frac{3}{2}$	
	171.2	2	2	

图 3-36  $q \leq p$  时的  $f - \frac{q}{p}$  直线

综合得到数据如表 4 所示,  $T^2 - m$  关系如图 3-37 所示.

表 4

$m/g$	$f/Hz$	$T^2 = f^{-2}/s^2$
5.0	106.9	$8.75 \times 10^{-6}$
10.0	92.0	$1.18 \times 10^{-4}$
15.0	82.8	$1.46 \times 10^{-4}$
20.0	75.6	$1.75 \times 10^{-4}$
25.0	70.6	$2.01 \times 10^{-4}$

图 3-37  $T^2$ - $m$  直线

算得  $T^2 = A(m + B)$ , 其中:  $A = 5.85 \times 10^{-6} \text{ s}^2/\text{g}$ ,  $B = 9.85 \text{ g}$ , 相关系数  $r = 0.9997$ , 所以  $T^2$ - $m$  图中斜率  $A = 5.85 \times 10^{-6} \text{ s}^2/\text{g}$ ,  $x$  轴上截距  $-B = -9.85 \text{ g}$ .

对  $X$ ,  $f = 85.6 \text{ Hz}$ ,  $T^2 = f^{-2} = 1.36 \times 10^{-4} \text{ s}^2$ , 代入  $T^2 = 5.85 \times 10^{-6} (m_X + 9.85)$ , 可得  $m_X = 13.4 \text{ g}$ .

### 题 8 (2006 · 国际物理奥赛题)

#### 第一部分: 迈克耳孙干涉仪

##### 1.1 简介

在迈克耳孙干涉仪中, 分光板可将入射的电磁波沿两个不同的方向分开, 还可以收集从这两个方向反射回来的波, 反射回来的两束波的叠加则会形成干涉图样. 图 3-38 为迈克耳孙干涉仪的示意图. 一束波从发射器发出, 并沿两个不同的方向反射到接收器. 这两个波束叠加并发生干涉后由接收器收集. 接收器接收到的信号强度由两束波的相差来决定, 即改变两束波的相差就会改变所收集到的信号强度.

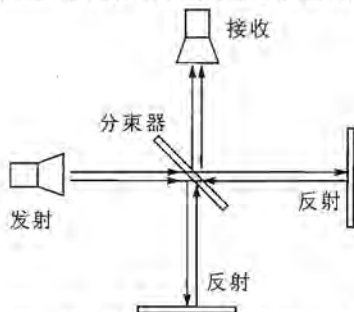


图 3-38 迈克耳孙干涉仪结构示意图

##### 1.2 器材

- (1) 微波发射器(A)及基架(C)
- (2) 微波接收器(B)及基架(C)
- (3) 测角仪(J)
- (4) 两个反射器: 带支架(M)的反射器(G)和“薄膜”反射器(F)
- (5) 分束器(H)及旋转台(L)(用作支架)
- (6) 数字万用表(D)

## 1.3 任务:测定微波的波长

仅用第1.2部分列出的实验部件搭建迈克耳孙干涉仪实验,并根据所搭建的实验测定发射器发出的微波在空气介质中的波长,记录数据并求出波长.波长的误差 $\Delta\lambda$ 应小于0.02 cm.

注意:“薄膜”是部分透射的,因此实验者不要出现在它的后面,以免影响测量结果.

## 第二部分:“薄膜”干涉

## 2.1 简介

一束电磁波照射到一绝缘薄膜样品上后分成两束波,如图3-39所示.从薄膜表面反射出的波束为A,从薄膜底部反射出来的波束为B.波束A和波束B叠加的结果则称为薄膜的干涉.

波束A和波束B的光程差会造成光的相长和相消干涉.叠加后的电磁波强度 $I$ 取决于两束波的光程差大小,而光程差又取决于入射角 $\theta_1$ ,电磁波的波长 $\lambda$ ,薄膜厚度 $t$ ,以及薄膜的折射率 $n$ .因此根据 $I$ 、 $\theta_1$ 、 $t$ 、 $n$ 曲线,在已知 $t$ 和 $\lambda$ 的情况下可以求出薄膜的折射率 $n$ .

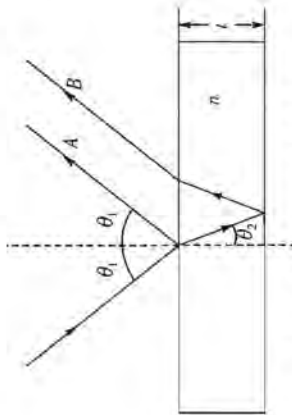


图3-39 薄膜干涉的结构示意图

## 2.2 器材

- (1)微波发射器(A)及基架(C)
- (2)微波接收器(B)及基架(C)

(2)仅用第2.2部分列出的实验部件搭建一个实验,测量接收器的输出 $S$ 和入射角 $\theta_1$ 的关系,入射角的变化范围为 $40^\circ \sim 75^\circ$ .画出你的实验结构示意图,并正确标明入射角和反射角,以及位于旋转台上的薄膜的位置.请用第2页(见原文,下同——编者)的符号来表示所有的部件名称.将你的数据列表成表格,并画出接收器的输出 $S$ 与入射角 $\theta_1$ 的关系曲线图.正确求出对应于相长和相消干涉的入射角.

(3)假设空气介质的折射率为1.00,测定干涉级次 $m$ 和聚合物条板的折射率 $n$ ,将所求得的 $m$ 和 $n$ 的值写在答题纸上.

(4)对你的结果进行误差分析,并估算出折射率 $n$ 的误差.将所得到的误差值 $\Delta n$ 写在答题纸上.

备注:

● 平面透镜应该放置在微波发射器的前面,并且其平面部分必须面对发射器,从而获得准平行的微波束.从透镜平面到发射器喇叭孔径的距离应为3 cm.

● 为获得最佳实验结果,发射器与接收器之间的距离应设置最远距离.

● 由于从发射器喇叭天线发出的微波会偏离平面波,因而有可能造成多余峰的出现.在 $40^\circ \sim 75^\circ$ 的入射角范围内仅出现由于干涉产生的一个最大值和一个最小值.

## 第三部分:受抑全内反射

## 3.1 简介

当平面波从光密介质传输到光疏介质时会发生全内反射现象.然而实际上当入射波从光密介质穿透到光疏介质时,它会继续向前传播一段距离,然后才散射回光密介质中(见图3-40).这一效应可用反射波束的位移 $D$ (平行于界面的距离)来表示,该位移被称为 Goos-Hanchen 位移.



(3) 平柱面透镜(N)及支架(M)

(4) 测角仪(J)

(5) 旋转台(L)

(6) 数字万用表(D)

(7) 聚合物条板(用作“薄膜”样品)(F)

(8) 游标卡尺

### 2.3 任务: 求出聚合物条板的折射率

(1) 用  $\theta_1, t, \lambda, n$  分别推导出相长干涉和相消干涉的表达式.

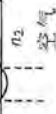


图 3-40 一束电磁波照射到三棱镜上产生全内反射的示意图,

平行于界面的位移  $D$  表示 Goos-hanchen 位移

如果将另一个折射率也为  $n_1$  的三棱镜(即两个三棱镜为同一材料)放置于距离第 1 个三棱镜为  $d$  的很近的位置(见图 3-41), 则会发生波束透过第 2 个三棱镜的隧道效应, 这一有趣的现象即为受抑全内反射(FITR). 透射波束的强度  $I_t$  随距离  $d$  的增加呈指数关系衰减

$$I_t = I_0 \exp(-2\gamma d).$$

(3, 1)

其中  $I_0$  为入射波的强度,  $\gamma$  可表示为

$$\gamma = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \theta_1 - 1}. \quad (3.2)$$

其中  $\lambda$  为电磁波在介质 2 中的波长,  $n_2$  为介质 2 的折射率(假设介质 2 即空气, 折射率为 1.00).

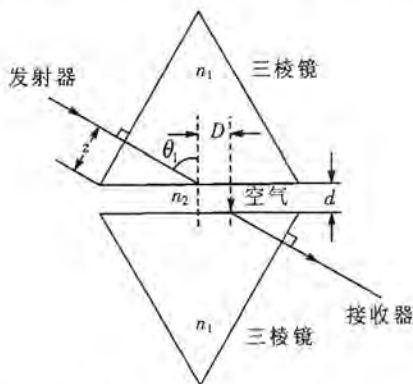


图 3-41 两个三棱镜和空气间隙  $d$  的实验结构示意图  
平行于界面的位移  $D$  表示 Goos-Hänchen 位移  
 $z$  为从三棱镜顶角到发射器中心轴的距离

### 3.2 器材

- (1) 微波发射器(A)及基架(C)
- (2) 微波接收器(B)及基架(C)
- (3) 平柱面透镜(N)及支架(M)
- (4) 两个等边石蜡三棱镜(O), 支架(K)和旋转台支架(L)
- (5) 数字万用表(D)
- (6) 测角器(J)
- (8) 尺

### 3.3 实验描述

仅用第 3.2 部分列出的实验器材搭建一个实验, 测量受抑全内反射的透射强度  $I_t$  与空气间隙  $d$  之间的关系. 为了取得理想的实验结果, 请注意以下事项:

- 仅仅使用测角器的一条臂进行这一部分的实验.
- 仔细选择使两个三棱镜相对的平面保持平行.
- 平柱面透镜(从曲面的中点测量)到三棱镜表面的距离应为 2 cm.
- 将接收器的喇叭紧贴于三棱镜的表面.
- 对应于第一个  $d$  值, 应沿着三棱镜表面平行移动微波接收器从而获得最大的信号.
- 数字万用表的量程设置为 2 mA. 从  $d=0.6$  cm 开始读取数据. 当数字万用



表的读数低于 0.20 mA 时,即可结束测量。

### 3.4 任务:测定石蜡三棱镜的折射率

#### (任务 1)

画出你最终的实验装置示意图,并用第 2 页的标号来表示所有的器材名称。另外,在你的示意图中标出距离  $z$ (见图 3-41),  $z$  为从三棱镜顶角到发射器中心轴的距离。

#### (任务 2)

测量并将你的实验数据列成表格,请测量两次。

#### (任务 3)

作出正确的曲线图,测定三棱镜的折射率  $n_1$ ,并进行误差分析。

### 第四部分:金属棒阵列的微波衍射:布拉格反射

#### 4.1 简介

##### 布拉格定律

$$2d\sin\theta = m\lambda, \quad (4.1)$$

可以用来确定晶体的晶格结构,其中  $d$  为一系列“反射”X射线的平面晶面的间距,  $m$  为衍射级次,  $\theta$  为入射 X 射线与晶面之间的夹角。布拉格定律也被称为布拉格反射或 X 射线衍射定律。

##### 金属棒阵列

由于 X 射线的波长与晶体的晶格常量非常接近,因此人们通常用 X 射线来进行布拉格衍射实验。然而对微波而言其波长很大,因此发生微波衍射的晶格结构也应具有较大的晶格常量,甚至大到可以用直尺来测量其晶格常量。

在这个实验中,我们用金属棒做成的阵列来验证布拉格定律。作为一个例子,如图 3-42 所示,垂直的粗线代表金属棒,阴影面代表  $xy$  平面沿对角线方向确定的晶面。图 3-43 为金属棒阵列的俯视图(沿  $z$  轴向下看),图中圆点代表金属棒,直线代表对角线确定的晶面。

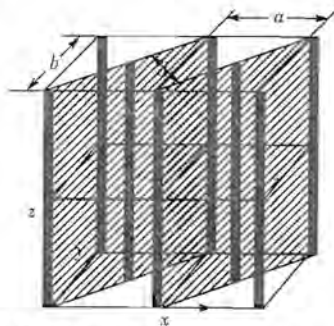


图 3-42 晶格常量为  $a$  和  $b$ ,晶面间距离为  $d$  的金属棒阵列



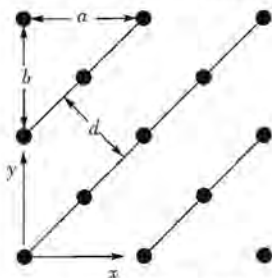


图 3-43 金属棒阵列在图 3-42 中的俯视图(未按比例画出)  
实线代表晶格中的对角晶面

#### 4.2 器材

- (1)微波发射器(A)及基架(C)
- (2)微波接收器(B)及基架(C)
- (3)平柱面透镜(N)及支架(M)
- (4)密封于箱子内的金属棒阵列(I)
- (5)旋转台(L)
- (6)数字万用表(D)
- (7)测角器(J)

在这个实验中,我们为你提供的一个金属棒做成的简单正方阵列,如图 3-44 所示,这个阵列密封于箱子内,请根据实验得到晶格常量  $a$ 。请不要打开箱子,实验完毕后一旦发现封条破损则实验部分视为零分。

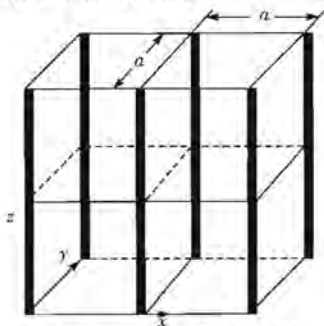


图 3-44 一个简单的正方阵列

#### 4.3 任务:测定所给正方阵列的晶格常量

##### 任务 1

画出图 3-44 所示的简单正方阵列的俯视图,在图中标明所给金属棒阵列的晶格常量  $a$  和对角面的晶面间距  $d$ ,根据你所画的图推导出布拉格定律。

##### 任务 2



根据布拉格定律,用第 4.2 部分提供的实验器材设计布拉格衍射实验,并根据该实验测定阵列的晶格常量  $a$ 。

(a) 画出你的实验装置示意图。用第 2 页的标号来表示所有的器材名称,并在图中清楚地标出发射器轴线与晶面之间的夹角  $\theta$  以及发射器轴线与接收器轴线之间的夹角  $\xi$ 。在实验中,衍射平面为对角面,该对角面已用红线在密封箱上标注。

(b) 在实验中,入射角的测量范围  $20^\circ \leq \theta \leq 50^\circ$ 。在此范围内仅能观察到一级衍射,在答题纸上记下  $\theta$  和  $\xi$ ,将实验结果列成表格。

(c) 画出与衍射波的强度  $I$  成正比的物理量与入射角  $\theta$  之间的关系曲线图。

(d) 根据所画的曲线图求出晶格常量  $a$ ,并估算其实验误差。

**【分析】** 这是一道关于干涉现象的综合性研究型题,与传统光学题不同的是此题用微波作辐射源,研究微波特性及干涉现象。如果把微波看成与可见光类似的无线电波,那么也就没有什么神秘了,用光学原理就可处理。

**【解】** 第一部分:迈克耳孙干涉仪

(a) 实验图(见图 3-45)。

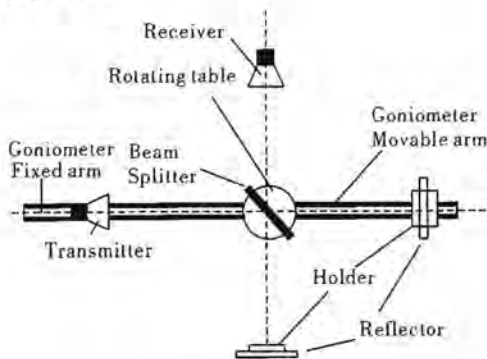


图 3-45 实验装置图

(b) 移动反射镜,用接收器测得对应强度,作图(如图 3-46)。

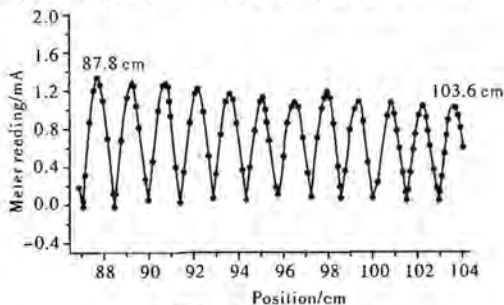


图 3-46 实验结果

取出 11 个周期计算波长

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{103.6 - 87.8}{11} \text{ cm}, \text{ 即 } \lambda = 2.87 \text{ cm}.$$

对应误差

$$\lambda = \frac{2}{11}d, \text{ 那么 } \Delta d = 0.05 \times 2 \text{ cm} = 0.1 \text{ cm}.$$

$$|\Delta \lambda| = \left| \frac{2}{11} \Delta d \right| = \frac{2}{11} \times 0.10 \text{ cm} = 0.018 \text{ cm} < 0.02 \text{ cm}.$$

## 第二部分：“薄膜”干涉

### (a) 干涉条件

假设薄膜的厚度为  $t$ , 且折射率为  $n$ .  $\theta_1$  为入射角,  $\theta_2$  为折射角. 光程差  $\Delta L$  为

$$\Delta L = 2 \left( \frac{nt}{\cos \theta_2} - t \tan \theta_2 \sin \theta_1 \right).$$

由  $\sin \theta_1 = n \sin \theta_2$ .

得  $\Delta L = 2t \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}$ .

考虑半波损失, 干涉极大条件为

$$2t \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_{\min}} = m\lambda. \quad (m=1, 2, 3, \dots)$$

干涉极小条件为

$$2t \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_{\max}} = \left( m \pm \frac{1}{2} \right) \lambda. \quad (m=0, 1, 2, \dots)$$

知道波长  $\lambda$  和厚度  $t$ , 可以通过测量强度  $I$  和  $\theta_1$  的关系确定折射率  $n$ .

### (b) 实验装置图

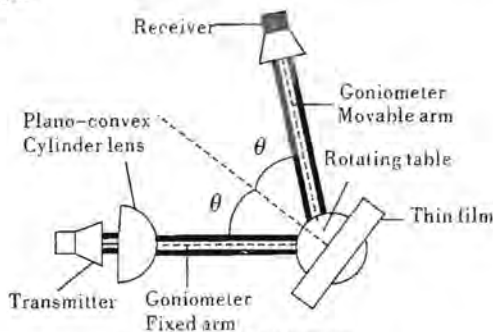


图 3-47 实验装置图

(c) 角度的不确定度  $\Delta \theta_1 = \pm 0.5^\circ$ , 接收器不确定度  $\pm 0.001 \text{ mA}$ , 实验结果如图 3-48.

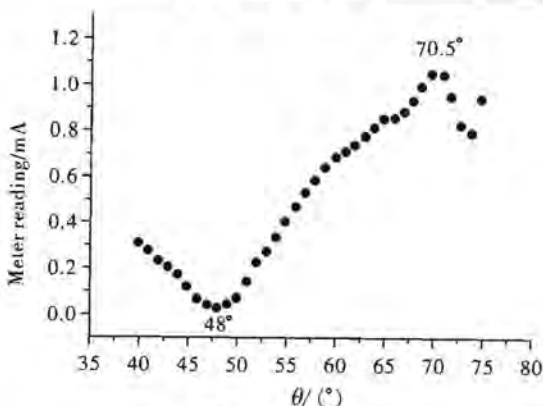


图 3-48 实验结果

测量结果得到  $\theta_{\min}$  和  $\theta_{\max}$  分别为  $48^\circ$  和  $70.5^\circ$ 。代入方程

$$2t \sqrt{n^2 - \sin^2 48^\circ} = m\lambda. \quad (m=1, 2, 3, \dots) \quad ①$$

和  $2t \sqrt{n^2 - \sin^2 70.5^\circ} = \left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda. \quad (m=0, 1, 2, \dots) \quad ②$

实验测得  $t=5.28 \text{ cm}$  和  $\lambda=2.85 \text{ cm}$ ，解出

$$m=4.83. \rightarrow m=5.$$

$$n=1.54.$$

误差分析

$$\begin{aligned} \Delta n &= \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \theta + \left(\frac{m\lambda}{2t}\right)^2}} \left( \sin 2\theta \cdot \Delta \theta + \frac{m^2 \lambda}{2t^2} \Delta \lambda - \frac{m^2 \lambda^2}{2t^3} \Delta t \right) \\ &= \frac{1}{n} \left( \sin 2\theta \cdot \Delta \theta + \frac{m^2 \lambda}{2t^2} \Delta \lambda - \frac{m^2 \lambda^2}{2t^3} \Delta t \right) \approx 0.02. \end{aligned}$$

结果为  $n + \Delta n = 1.54 \pm 0.02$ 。

第三部分：受抑全内反射

任务 1

实验安排如图 3-49，注意图中  $z$  的大小。

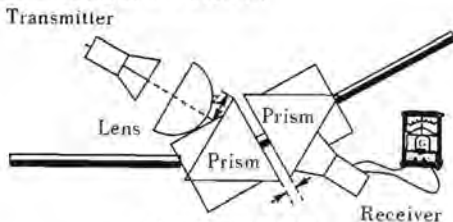


图 3-49 实验装置

任务 2

测量数据见表

X	$\Delta X$	Set1	Set2	$S_{\text{average}}$	$\Delta S^{\#}$	$I_r^*$	$\Delta(I_r)^*$	Y	$\Delta Y^{\&}$
d/cm	/cm	$S_1/\text{mA}$	$S_2/\text{mA}$	/mA	/mA	$/( \text{mA} )^2$		$\ln[I_r / ( \text{mA} )^2]$	
0.60	0.05	0.78	0.78	0.780	0.01	0.608 0	0.016	-0.50	0.03
0.70	0.05	0.68	0.69	0.685	0.01	0.469 0	0.014	-0.76	0.03
0.80	0.05	0.58	0.59	0.585	0.01	0.342 0	0.012	-1.07	0.03
0.90	0.05	0.50	0.51	0.505	0.01	0.255 0	0.010	-1.37	0.04
1.00	0.05	0.42	0.42	0.420	0.01	0.176 0	0.008	-1.74	0.05
1.10	0.05	0.36	0.35	0.355	0.01	0.126 0	0.007	-2.07	0.06
1.20	0.05	0.31	0.31	0.310	0.01	0.096 1	0.006	-2.34	0.06
1.30	0.05	0.26	0.25	0.255	0.01	0.065 0	0.005	-2.73	0.08
1.40	0.05	0.21	0.22	0.215	0.01	0.046 2	0.004	-3.07	0.09

## 任务 3

由  $I_r = I_0 \exp(-2\gamma d)$ , 得

$$\ln(I_r) = -2\gamma d + \ln(I_0).$$

用上述数据作图

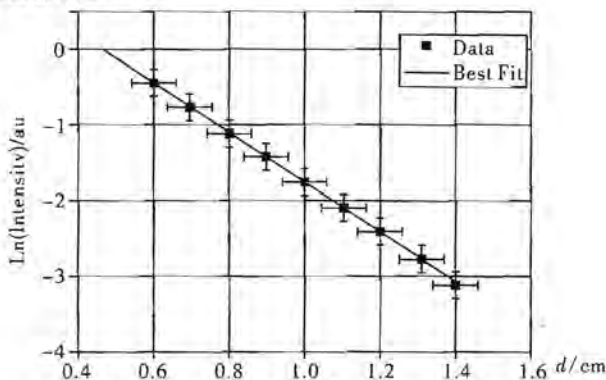


图 3-50

$$2\gamma = 3.247.$$

取  $\theta_1 = 60^\circ$ ,  $k_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \approx 2.20$ .

$$n_1 = \frac{\sqrt{k_2^2 + \gamma^2}}{k_2 \sin \theta_1} = 1.43.$$



第四部分：金属棒阵列的微波衍射：布拉格反射  
任务 1

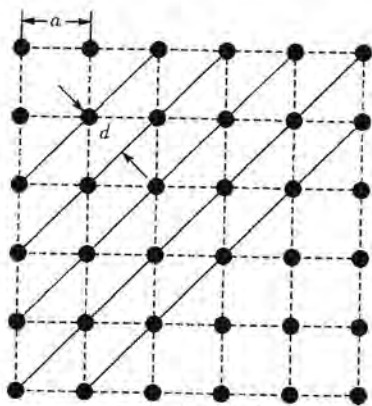


图 3-51 样品俯视图

导出布拉格关系式

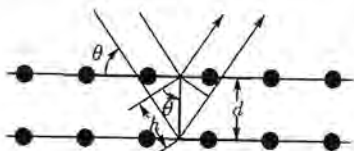


图 3-52

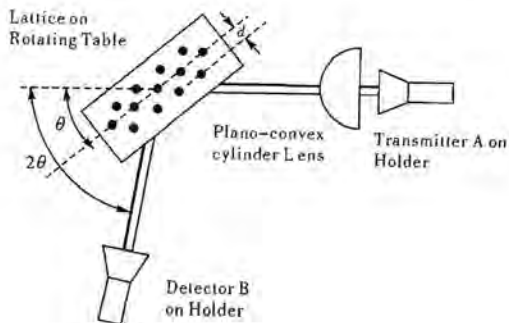
$$h = d \sin \theta.$$

$$2h = 2d \sin \theta.$$

$$2d \sin \theta = m\lambda. \quad (m=1, 2, 3, \dots)$$

- ①
- ②
- ③

任务 2(a)



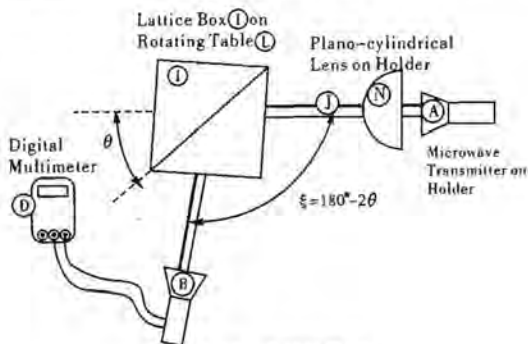


图 3-53 实验装置图

任务 2(b)和 2(c)

测量结果

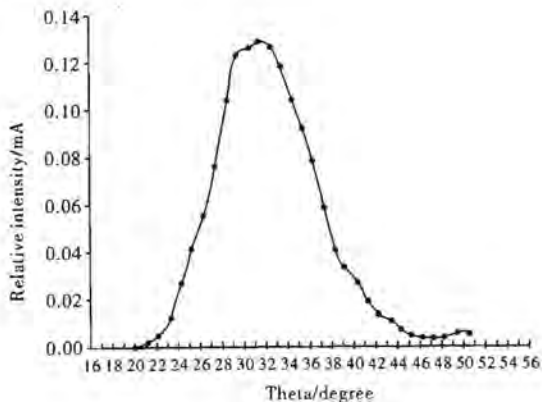


图 3-54 实验结果

任务 2(d)

由图得

$$\theta_{\max} = 31^\circ. (\text{理论值 } \theta_{\max} = 32^\circ)$$

$$2d \sin \theta_{\max} = \lambda. \quad (4)$$

$$a = \sqrt{2}d. \quad (5)$$

$$a = \frac{\lambda}{\sqrt{2} \sin \theta_{\max}} = \frac{2.85}{\sqrt{2} \sin 31^\circ} \text{ cm} = 3.913 \text{ cm}.$$

题 9 (2005 · 国际物理竞赛题)

### 用白炽灯测量普朗克常量

普朗克于 1900 年提出光是以能量量子  $h\nu$  的形式从物体中放出的假设。在 1905 年,爱因斯坦发展了这个假说,认为能量量子一旦被放出,就会变成一颗不变的光量子(后来这量子被称做光子)。常见的光就是由大量的光子聚在波前处形成的。虽然它们如物体中的原子般隐藏在光波中,但普朗克常量  $h$  揭露了它们的存



在. 本实验的目的是测量普朗克常量.

物体会在发出辐射的同时, 吸收外界的辐射. 黑体就是能完全吸收所有波长辐射的物体, 同时它也是完全的辐射体, 对电磁波来说, 黑体是没有反射、完全吸收、完全辐射的物体. 真实物体不是“全黑”的. 一个物体与相同温度的黑体的辐射功率比就是该物体的发射率  $\varepsilon$ , 通常  $\varepsilon$  与波长有关.

普朗克发现在热力学温度为  $T$  的物体辐射的波长为  $\lambda$  的电磁波的功率密度为

$$u_{\lambda} = \varepsilon \frac{c_1}{\lambda^5 (e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1)}. \quad (1)$$

这里  $c_1$  及  $c_2$  皆为常量, 本题要求从实验确定  $c_2$ , 它正比于普朗克常量  $h$ .

考虑  $\lambda$  值小时, 即在图 3-55 左方离极大值很远的位置, 可以忽略①式分母的  $-1$  项, 方程①可简化成

$$u_{\lambda} = \varepsilon \frac{c_1}{\lambda^5 e^{\frac{c_2}{\lambda T}}}. \quad (2)$$

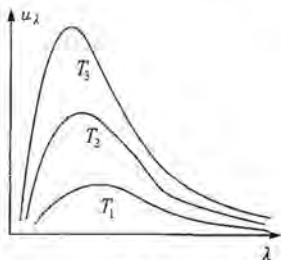


图 3-55

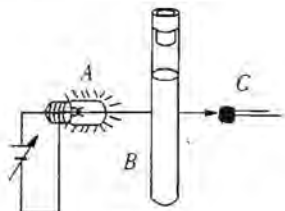


图 3-56

图 3-56 展示本实验的基本组件.

- 辐射物体为白炽灯 A 的钨丝, 有很宽的辐射光谱, 而且发光度可调.
- 试管 B 装有滤光液体, 该液体只允许在可见谱中  $\lambda_0$  值附近一非常窄的范围的光通过 (见图 3-57). 滤光器性质详见后文.
- 通过滤光器的光最后落在光敏电阻 (LDR) C 上, 该 LDR 的特征见后文.

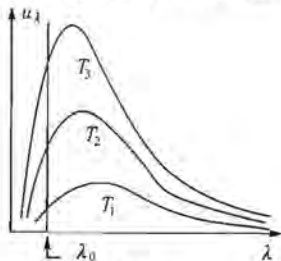


图 3-57

LDR 的电阻  $R$  与其所受光照  $E$  有关, 而  $E$  则与钨丝的功率密度成正比.



$$\left. \begin{array}{l} E \propto u_{\lambda_0} \\ R \propto E^{-\gamma} \end{array} \right\} \Rightarrow R \propto u_{\lambda_0}^{-\gamma}$$

式中无量纲常数  $\gamma$  为 LDR 的特征之一, 需由本实验中求得, 从上面可得出 LDR 的电阻  $R$  与钨丝温度  $T$  的关系为

$$R = c_3 \frac{e_2^{\gamma}}{e_0^{\gamma} T}. \quad (3)$$

此式将在后文中应用到. 在这个公式中  $c_3$  是一个未知比例常数. 本实验的目的是通过测量不同温度  $T$  对应的电阻  $R$ , 从而得到  $c_2$ .

### 实验装置

装置的各部件在图 3-58 里, 该图说明了实验装置的安排. 检查装置的各个部件是否完全, 但在阅读下页指示前不要使用这些部件.

1. 平台 圆台上装置有光敏电阻、试管以及“12 V 0.1 A”的电灯泡
2. 保护罩
3. 1 k $\Omega$  10 匝电位器(Pm)
4. 12 V 电池
5. 用来连接平台到电位器的红、黑导线
6. 用来连接电池与电位器的红、黑导线
7. 用作欧姆表的万用表
8. 用作电压表的万用表
9. 用作电流表的万用表
10. 装有滤光液体的试管
11. 试管架
12. 灰度滤光片
13. 直尺

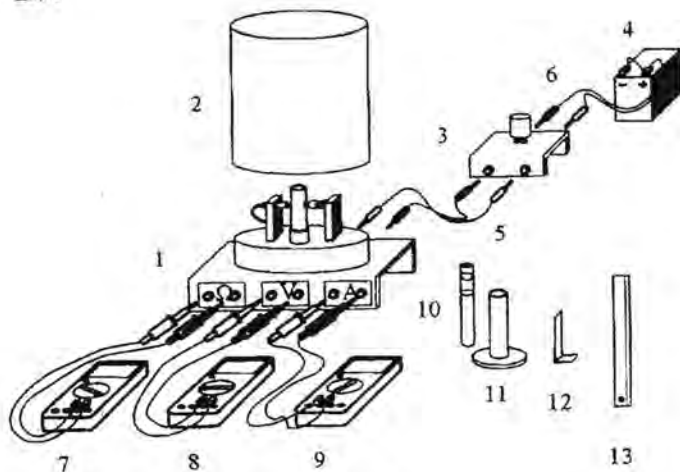


图 3-58



1. 在答卷纸上画出盒子里以及盒子之间完整的电路图. 画图时, 参照图 3-58 所给的说明.

### 灯丝温度的电阻

导电灯丝的电阻  $R_B$  满足以下公式

$$R_B = \rho \frac{l}{S}. \quad (4)$$

式中  $\rho$  是导体的电阻率,  $l$  是长度,  $S$  是灯丝的横截面积.

由于以下一些原因, 电阻与温度有关.

金属电阻率随温度的升高而增加. 在 300 K ~ 3 655 K 之间, 钨满足以下经验关系 (SI 单位制)

$$T = 3.05 \times 10^8 \rho^{0.83}. \quad (5)$$

热膨胀造成灯丝长度和截面的改变. 本实验中这个效应的影响很小, 可以忽略不计.

由④⑤式, 忽略热膨胀可以得到

$$T = a R_B^{0.83}. \quad (6)$$

可见, 为了得到  $T$  首先要确定  $a$ . 它可通过测量环境温度  $T_0$  下的灯丝电阻  $R_{B,0}$  而确定.

2. (a) 用万用表测量环境温度  $T_0$ .

(b) 直接用万用表测量  $T_0$  下的灯丝电阻  $R_{B,0}$  是不可取的, 因为测量时产生的电流会提高灯丝温度. 这里, 为了测量  $R_{B,0}$ , 将电池与电位器相连接. 需要有足够多的电流读数, 测量范围在可以调节到的最小电压至 1 V 之间 (100 mV 以下至少测量 15 个点). 最后, 将电位器置于起始位置, 断开电位器与电池之间的导线.

由每一对  $V$  和  $I$  的值, 求出相应的电阻值  $R_B$ , 将数据填到答卷纸 2b 的表中. 注明实验能够达到的最小电压. 以  $R_B$  作为纵轴, 表示  $R_B$  与  $I$  的关系.

(c) 观察 (b) 得到的图, 选择恰当的数值范围, 线性拟合外推到原点, 可以得到  $R_{B,0}$ . 将所选择的所有数据填在答卷纸 2c 的表中. 求  $R_{B,0}$  及  $\Delta R_{B,0}$ .

(d) 用⑥式求  $a$  和  $\Delta a$  的值, 用  $\Omega$ ,  $T_0$  用 K 作单位.

### 滤光器的光学性质

试管中有硫酸铜等材料的滤光液体, 它的用处是吸收灯泡的红外辐射.

滤光器的透射率 (透射光强与入射光强之比) 与波长关系如图 3-59.

3. 从图 3-59 确定中心波长  $\lambda_0$  和  $\Delta\lambda$ .

注意:  $\lambda_0$  是透射率最大时对应的波长,  $2\Delta\lambda$  是指透射率降到极大值  $\frac{1}{2}$  时的所对应的波长宽度.

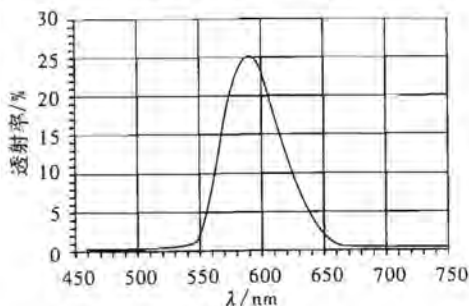


图 3-59

### LDR 的性质

LDR 的材料在黑暗中是不导电的, 当光照射时, 产生载流子, 可以有电流通过. LDR 的电阻满足以下公式

$$R = bE^{-\gamma} \quad (7)$$

这里  $b$  是常量, 它仅与 LDR 的成分和几何结构有关.  $\gamma$  是一个无量纲的参数, 给出了电阻随  $E$  的变化关系. 理论上, 理想的 LDR 的  $\gamma=1$ , 然而, 基于许多因素的作用, 在实际情况下  $\gamma < 1$ .

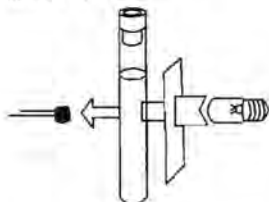


图 3-60

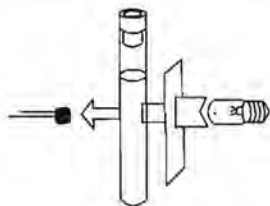


图 3-61

$\gamma$  的测量是必需的. 它可以通过图 3-60 所示的装置, 由测量  $R$  和  $E$  的关系来完成, 还需要在光源和试管之间插入透射率为 51.2% 的灰度板  $F$  (减光板), 不需考虑透射率的误差. 如图 3-61 所示, 通过  $F$  产生  $E' = 0.512E$  的光强, 测量这时的 LDR 的电阻  $R'$ , 有

$$R' = b(0.512E)^{-\gamma}$$

得到

$$\ln \frac{R}{R'} = \gamma \ln 0.512 \quad (8)$$

在完成 4 的 (b) 部分之前, 不要进行这一步.

4. (a) 开始本部分测量之前, 将 LDR 保持在完全黑暗的条件下 10 分钟以上. 连接电源、电位器, 慢慢旋转按钮增加灯泡电压, 电压的取值范围从 9.50 V 到 11.50 V. 读出电压和对应电流的值, 以得到对应的 LDR 电阻值 (至少测量 12 组数据). 在答题纸上将这些数据列表. 考虑到 LDR 的延迟, 在到达  $U > 9.5$  V 时, 大约等待 10 分钟后开始第一个量的测量, 以后每 5 分钟测量一个值, 在进行下一步之前先不要作数据处理.



(b)在获得电阻  $R$  的最小值后,打开保护罩,如图 3-62,放入灰度板,尽快盖上保护罩,进行 LDR 电阻  $R'$  的测量,用这些数据 and 公式③计算  $\gamma$  和  $\Delta\gamma$ .

(c)改写公式③,以得到  $\ln R$  与  $R_B^{-0.83}$  的线性关系,在答题纸上写出方程并标注为方程④.

(d)使用(a)获得的数据,作一张表格,用于方程④的作图.

(e)作图并计算  $h$  和  $\Delta h$ ,可以用任何方法(允许使用考场提供的计算器的统计功能).已知  $c_2 = \frac{hc}{k}$ .

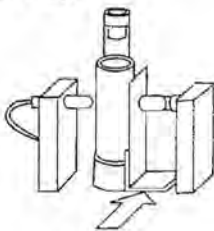


图 3-62

(光速  $c = 2.998 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , 玻尔兹曼常量  $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ )

**【分析】** 测量普朗克常量的实验,我国不少院校都在开设,我们是利用光电效应通过爱因斯坦的光电方程测普朗克常量  $h$ ,而这道竞赛题则是用白炽灯通过黑体辐射的普朗克公式测量普朗克常量,出其不意又颇有新意.好在题目叙述很详细,对解题思路、仪器配置与使用、数据采集与处理交代都很清楚,不会让考生不知如何下手,这大大降低了题目的难度.

解题步骤要点如下:

1. 根据题目给出的仪器安排图(图 3-58)画出电路图.注意将电位器接成分压器形式,电压表和电流表接成伏安法测灯泡电阻的电路.

2. 由灯泡钨丝电阻  $R_B$  和温度  $T$  的关系曲线,外推到原点求得环境温度以及此温度时的灯丝电阻值  $R_{B,0}$ .

3. 确定 LDR(光敏电阻)的电阻  $R$  与光照  $E$  的关系式:  $R = bE^{-\gamma}$ , 这里  $\gamma$  是一个无量纲的参量,实验中给出一块减光板,巧妙地利用它则可求出  $\gamma$ .

4. 在本题中有两种电阻,一是钨丝电阻,用  $R_B$  表示;另一是光敏电阻  $R$ ,光敏电阻是用来探测辐射的,而  $R_B$  是测量钨丝温度的.由于  $R$  与光照有关,而光照  $E$  与钨丝功率密度有关,所以  $R$  就与钨丝温度  $T$  有关:

$$R = c_3 \frac{\sigma T}{\epsilon_0 \gamma}.$$

而  $T$  可用钨丝电阻  $R_B$  表示,于是得到联系  $R$  与  $R_B$  的公式:

$$\ln R = \ln c_3 + \frac{c_2 \gamma}{\lambda_0 a} R_B^{-0.83}.$$

由上式可看出  $\ln R$  与  $R_B^{-0.83}$  成正比,作出  $\ln R$  与  $R_B^{-0.83}$  关系曲线,利用图解法,由斜率可求出常数  $c_2$ ,再由  $c_2 = \frac{hc}{k}$ ,则可求得普朗克常量  $h$ .

本题中利用装有硫酸铜溶液的试管作减光器,产生准单色光,又可吸收白炽灯的红外辐射.

此外,请注意本题要求估计测量结果的误差,因此在读取数据时就要考虑各个直读量的误差.

【解】 1. 完整的电路图如下：

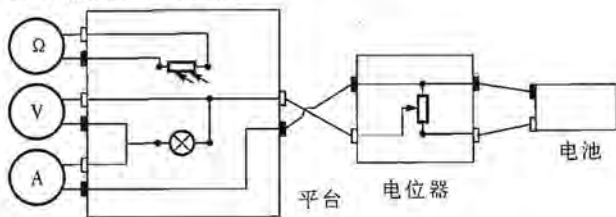


图 3-63

光敏电阻	
灯泡	
电位器	
红色插孔	
黑色插孔	

$\Omega$	欧姆表
V	电压表
A	电流表
P	平台
Pm	电位器
B	电池

2. (a)

$t_0 = 24\text{ }^\circ\text{C}$	$T_0 = 297\text{ K}$	$\Delta T_0 = 1\text{ K}$
----------------------------------	----------------------	---------------------------

(b) 将  $R_B$  与  $I$  的数据作图：

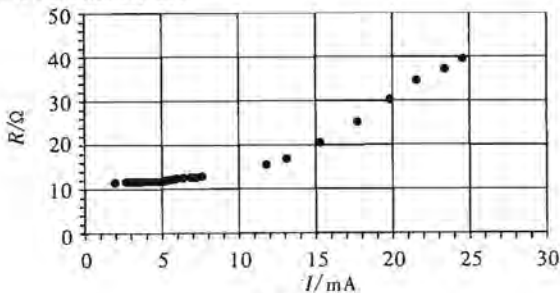


图 3-64



$U/\text{mV}$	$I/\text{mA}$	$R_B/\Omega$
21.9	1.87	11.71
30.5	2.58	11.82
34.9	2.95	11.83
37.0	3.12	11.86
40.1	3.37	11.90
43.0	3.60	11.94
47.6	3.97	11.99
51.1	4.24	12.05
55.3	4.56	12.13
58.3	4.79	12.17
61.3	5.02	12.21
65.5	5.33	12.29
67.5	5.47	12.34
73.0	5.88	12.41
80.9	6.42	12.60
85.6	6.73	12.72
89.0	6.96	12.79
95.1	7.36	12.92
111.9	8.38	13.35
130.2	9.37	13.89
181.8	11.67	15.63
220	13.04	16.87
307	15.29	20.08
447	17.68	25.28
590	19.8	29.80
730	21.5	33.95
860	23.2	37.07
960	24.4	39.34

$U_{\min} = 9.2 \text{ mV}$

(c) 为了得到  $R_{B,0}$ , 取前面的 10 个数据:

$U/\text{mV}$	$I/\text{mA}$	$R_B/\Omega$
$21.9 \pm 0.1$	$1.87 \pm 0.1$	$11.71 \pm 0.08$
$30.5 \pm 0.1$	$2.58 \pm 0.1$	$11.82 \pm 0.06$
$34.9 \pm 0.1$	$2.95 \pm 0.1$	$11.83 \pm 0.05$
$37.0 \pm 0.1$	$3.12 \pm 0.1$	$11.86 \pm 0.05$
$40.1 \pm 0.1$	$3.37 \pm 0.1$	$11.90 \pm 0.05$
$43.0 \pm 0.1$	$3.60 \pm 0.1$	$11.94 \pm 0.04$
$47.6 \pm 0.1$	$3.97 \pm 0.1$	$11.99 \pm 0.04$
$51.1 \pm 0.1$	$4.24 \pm 0.1$	$12.05 \pm 0.04$
$55.3 \pm 0.1$	$4.56 \pm 0.1$	$12.13 \pm 0.03$
$58.3 \pm 0.1$	$4.79 \pm 0.1$	$12.17 \pm 0.03$

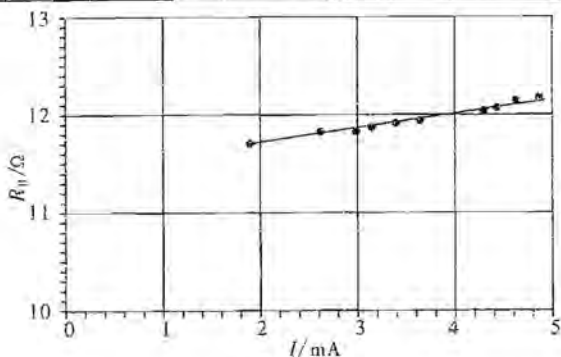


图 3-65

$R_B$  的误差是

$$\begin{aligned} \Delta R_B &= R_B \sqrt{\left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2 + \left(\frac{\Delta I}{I}\right)^2} \\ &= 11.71 \sqrt{\left(\frac{0.1}{21.9}\right)^2 + \left(\frac{0.01}{1.87}\right)^2} = 0.08. \end{aligned}$$

由最小二乘法求得

$R_{B,0} = 11.39 \Omega$	$\Delta R_{B,0} = 0.06 \Omega$
--------------------------	--------------------------------

(d)  $T = aR^{0.83}, \alpha = \frac{T_0}{R_0^{0.83}}, \alpha = \frac{297}{11.39^{0.83}} = 39.43.$

估算其误差

$$\begin{aligned} \ln a &= \ln T_0 - 0.83 \ln R_{B,0}, \Delta a = a \left( \frac{\Delta T_0}{T_0} + 0.83 \frac{\Delta R_{B,0}}{R_{B,0}} \right). \\ \Delta a &= 39.43 \left( \frac{1}{297} + 0.83 \times \frac{0.06}{11.39} \right) = 0.305 = 0.3. \end{aligned}$$



$\alpha = 39.4$	$\Delta\alpha = 0.3$
-----------------	----------------------

3.  $2\Delta\lambda = (620 - 565) \text{ nm}, \lambda_0 = 28 \text{ nm}.$

$\Delta\lambda = 590 \text{ nm}$	$\Delta\lambda = 28 \text{ nm}$
----------------------------------	---------------------------------

4. (a)

$U/\text{V}$	$I/\text{mA}$	$R/\text{k}\Omega$
9.48	85.5	8.77
9.73	86.8	8.11
9.83	87.3	7.90
10.01	88.2	7.49
10.25	89.4	7.00
10.41	90.2	6.67
10.61	91.2	6.35
10.72	91.8	6.16
10.82	92.2	6.01
10.97	93.0	5.77
11.03	93.3	5.69
11.27	94.5	5.35
11.42	95.1	5.17
11.50	95.5	5.07

(b) 在光源直接照射和加入灰度板(透光率 51.2%)照射时分别测量 LDR 的电阻  $R$  和  $R'$ ,  $R = 5.07 \text{ k}\Omega$ ,  $R' = 8.11 \text{ k}\Omega$ , 利用

$$\ln \frac{R}{R'} = \gamma \ln 0.512,$$

$$\gamma = \frac{\ln \frac{R}{R'}}{\ln 0.512} = \frac{\ln \frac{5.07}{8.11}}{\ln 0.512} = 0.702.$$

估算误差  $\Delta\gamma$

$$\gamma = \frac{\ln \frac{R}{R'}}{\ln t}.$$

$$\Delta\gamma = \frac{1}{\ln t} \left( \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta R'}{R'} \right) = \frac{1}{\ln 0.512} \left( \frac{0.01}{5.07} + \frac{0.01}{8.11} \right) = 0.00479.$$

$$\Delta\gamma = 0.01.$$

$R = 5.07 \text{ k}\Omega$	$\gamma = 0.70$
$R' = 8.11 \text{ k}\Omega$	$\Delta\gamma = 0.01$

(c) 根据公式





$$R = c_3 e^{\frac{c_2 Y}{\lambda_0 T}}$$

两边取对数得

$$\ln R = \ln c_3 + \frac{c_2 Y}{\lambda_0 T}$$

根据公式

$$T = a R_B^{-0.83}$$

可以得到

$$\ln R = \ln c_3 + \frac{c_2 Y}{\lambda_0 a} R_B^{-0.83}$$

(6)

U/V	I/mA	$R_B/\Omega$	T/K	$R_B^{-0.83}$ (S.L.) / $10^{-2}$	R/k $\Omega$	lnR
9.48±0.01	88.5±0.1	110.9±0.2	1962±18	2.008±0.004	8.77±0.01	2.171±0.001
9.73±0.01	86.5±0.1	112.1±0.2	1980±18	1.990±0.004	8.11±0.01	2.093±0.001
9.83±0.01	87.3±0.1	112.6±0.2	1987±18	1.983±0.004	7.90±0.01	2.067±0.001
10.01±0.01	88.2±0.1	113.5±0.2	2000±18	1.970±0.004	7.49±0.01	2.014±0.001
10.25±0.01	89.4±0.1	114.7±0.2	2018±18	1.952±0.003	7.00±0.01	1.946±0.001
10.41±0.01	90.2±0.1	115.4±0.2	208±18	1.943±0.003	6.67±0.01	1.894±0.002
10.61±0.01	91.2±0.1	116.3±0.2	2041±18	1.930±0.003	6.35±0.01	1.849±0.002
10.72±0.01	91.8±0.1	116.8±0.2	2049±19	1.923±0.003	6.16±0.01	1.818±0.002
10.82±0.01	92.2±0.1	117.4±0.2	2057±19	1.915±0.003	6.01±0.01	1.793±0.002
10.97±0.01	93.0±0.1	118.0±0.2	2066±19	1.907±0.003	5.77±0.01	1.753±0.002
11.03±0.01	93.3±0.1	118.2±0.2	2069±19	1.904±0.003	5.69±0.01	1.739±0.002
11.27±0.01	94.5±0.1	119.3±0.2	2085±19	1.890±0.003	5.35±0.01	1.677±0.002
11.42±0.01	95.1±0.1	120.1±0.2	2096±19	1.880±0.003	5.15±0.01	1.639±0.002
11.50±0.01	95.5±0.1	120.4±0.2	2101±19	1.875±0.003	5.07±0.01	1.623±0.002

误差估算(以第一行数据为例):

$$\Delta R_B = R_B \sqrt{\left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2 + \left(\frac{\Delta I}{I}\right)^2} = 110.9 \sqrt{\left(\frac{0.01}{9.48}\right)^2 + \left(\frac{0.1}{85.5}\right)^2} \Omega = 0.2 \Omega$$



$$\Delta T = T \left( \frac{\Delta a}{a} + 0.83 \times \frac{\Delta R_B}{R_B} \right) = 1962 \left( \frac{0.3}{39.4} + 0.83 \times \frac{0.2}{110.9} \right) \text{K} = 18 \text{K}.$$

$R_B^{-0.83}$  的误差估算:

$$x = R_B^{-0.83}.$$

$$\ln x = -0.83 \ln R_B.$$

$$\Delta x = x \times 0.83 \times \frac{\Delta R_B}{R_B}.$$

$$\Delta(R_B^{-0.83}) = R_B^{-0.83} \frac{\Delta R_B}{R_B}.$$

$$\Delta(R_B^{-0.83}) = 0.020077 \times \frac{0.2}{110.9} \approx 0.004 \times 10^{-2}.$$

$$\Delta \ln R = \frac{\Delta R}{R}.$$

$$\Delta \ln R = \frac{0.01}{8.77} = 0.001.$$

(e) 将  $\ln R \sim R_B^{-0.83}$  数据作图

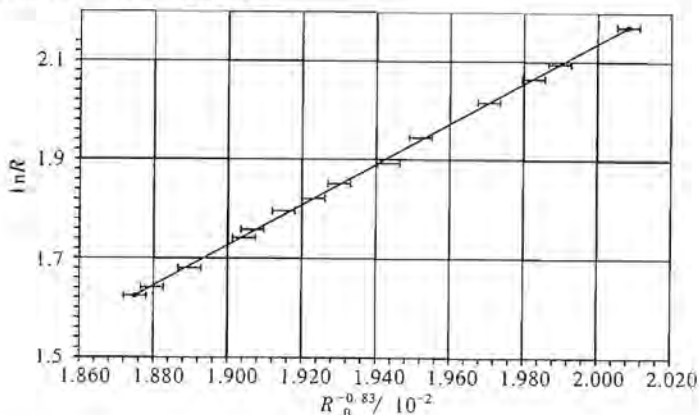


图 3-66

利用最小二乘法

斜率  $m = 414.6767$ .

$$\sigma_{R_B^{-0.83}} = \frac{\sum \Delta(R_B^{-0.83})}{n} = 0.003 \times 10^{-2},$$

$$\sigma_{\ln R} = \frac{\sum \Delta(\ln R)}{n} = 0.002.$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{\ln R}^2 + m^2 \sigma_{R_B^{-0.83}}^2} = \sqrt{0.002^2 + 414.6767^2 \times (0.003 \times 10^{-2})^2} = 0.0126.$$

$$\begin{aligned} \Delta m &= \sqrt{\frac{n\sigma^2}{n\sum(R_B^{-0.83})^2 - (\sum R_B^{-0.83})^2}} = \sqrt{\frac{14 \times 0.0126^2}{14 \times 5.23559 \times 10^{-3} - (0.27068)^2}} \\ &= 8.295. \end{aligned}$$

斜率  $m = \frac{c_2 \gamma}{\lambda_0 a}$ , 由  $c_2 = \frac{hc}{k}$  得

$$h = \frac{mk\lambda_0 a}{c\gamma}$$

$$h = \frac{414.67 \times 1.381 \times 10^{-23} \times 590 \times 10^{-9} \times 39.4}{2.998 \times 10^8 \times 0.70} \text{ J} \cdot \text{s} = 6.35 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

$$\begin{aligned} \Delta h &= h \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta k}{k}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \lambda_0}{\lambda_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta c}{c}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \gamma}{\gamma}\right)^2} \\ &= 6.34 \times 10^{-34} \sqrt{\left(\frac{8.3}{415}\right)^2 + 0 + \left(\frac{28}{590}\right)^2 + \left(\frac{0.3}{39.4}\right)^2 + 0 + \left(\frac{0.01}{0.70}\right)^2} \\ &= 0.34 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \end{aligned}$$

$h = 6.4 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	$\Delta h = 0.3 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
--	---

**题 10** (2003 · 国际物理竞赛题)

**【实验设备】**

1. 可用仪器列表如下

代号	器材	数量	代号	器材	数量
A	光探测器(PD)	1	I	电池	2
B	偏光镜与旋转镜座	2	J	电池盒	1
C	90°TN-LC 液晶盒与旋转液晶座	1	K	光具座	1
D	函数产生器	1	L	半透光纸	2
E	激光二极管(LD)	1	M	直尺	1
F	电表	2	N	白色胶带*(在器材上做记号用)	1
G	平行液晶盒	1	O	剪刀	1
H	可变电阻	1	P	作图纸	10



实验装置示意图

图 3-67



## 2. 多用电表说明

✦“DC/AC”开关可选直流或交流。

✦用“V $\Omega$ ”与“COM”接头来测量电压或电阻。

✦用“mA”与“COM”接头来测量小电流。数字显示为 mA 值。

✦用功能旋钮选择适当的功能与测量范围。“V”代表测量电压，“A”代表测量电流，而“ $\Omega$ ”代表测量电阻。

## 3. 函数产生器说明

✦电源按键压下为接通电源，再压一次则切断电源。

✦用频率范围按键选择适用频率范围。

✦数字显示屏显示频率。

✦用粗调节钮与细调节钮选择适当频率。

✦用波形选择最左按键选用方波。

✦用输出振幅调节钮，改变输出电压。

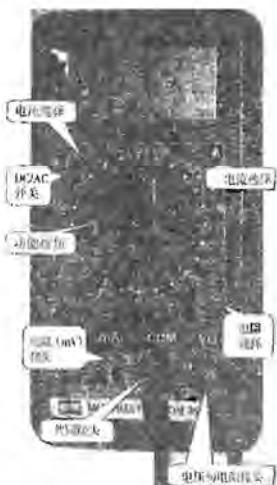


图 3-68 多用电表



图 3-69 函数产生器

## 【实验设备】

## A 部分

## 激光二极管的光学特征

## I. 简介

## 1. 激光二极管

本实验所用的光源为激光二极管，它所发出的激光波长为 650 nm。当二极管电流超过某一临界值时，激光二极管即能发出单色、部份偏振的相干光，这就是所谓的激光。当激光二极管的电流小于临界值时，发光强度很小；在临界值以上，发光强度随着电流增大而急剧增加，发光强度与电流大小变化成线性的关系；若电流持续增大，发光强度的增加率反而会趋缓，这是因为激光二极管本身温度增高所导致。因此，激光二极管的最佳工作范围是在线性的区段。通常，阈值电流  $I_m$  的大小，就规定为该线性区段的外推线与电流轴的交点值。

注意：请千万不要直接去看激光光束，那样会伤害你的眼睛！

## 2. 光探测器

本实验所用的光探测器是利用光电二极管串接电流放大器制成的。当在光电二极管上加上偏压时，此二极管受光照射后会产生光电流。在温度恒定，入射光为单色光的情况下，光电流与入射光强成正比。而电流放大器是用来以等比例的方式将光电流转换成电压而输出。本光探测器的转换比例有两种：一为高档放大；另一为低档放大。在本实验中全部使用低档放大。若入射光强太高，由于电流放大器本身的限制，输出电压即不再与光电流成比例增加，而会逐渐趋向于约 8 V 的饱和值。所以，整个光探测器正常的工作范围，是在光强度与输出电压成比例的区段；若光强过大而使输出电压饱和，则光探测器的读数将不能正确表示入射光强度。

### II. 实验步骤

#### 激光二极管与光探测器的特性

为了使实验能成功进行，光束在实验装置各个部分的光路校准是非常关键的。此外光源与探测器也必须在适当条件下操作，A 部分即与这些问题及偏振程度有关。

(1) 如图 3-70 所示，将激光二极管与光探测器成一水平线放入光具座中，并按图 3-71 所示连接可变电阻、电池、电流表、电压表、激光二极管及光探测器，适当调整可变电阻值使经过激光二极管的电流大约为 25 mA，则二极管射出适当的激光。固定光探测器于低档放大，适当调整激光二极管及光探测器的高度及彼此相对的方向，以使激光束正好进入光探测器盒子上的小孔，且光探测器输出电压达到最大值，以确保彼此的光路是对准的。

注意：不要让电池上的黑、红两端彼此接触，已免造成短路！

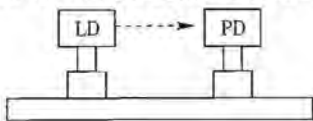


图 3-70 光学装置 (LD: 激光二极管; PD: 光探测器)

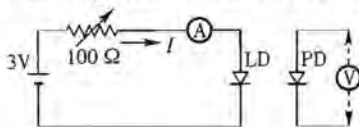


图 3-71 串接激光二极管的等效电路

(2) 以光探测器的输出电压来代表激光的强度  $J$ ，并适当调整可变电阻来改变激光二极管的电流大小  $I$ ，由零值开始，直到最大电流为止，同时测量出  $J$  与  $I$  的关系，请注意适当调整所增加的电流间隔。

#### 问题 A(1)

测量、列表、并画出  $J-I$  曲线



## 问题 A(2)

在  $J-I$  曲线线性区域内估算最大电流  $I_{\max}$  及其不确定度,用箭号( $\downarrow$ )标出线性范围,定出阈值电流  $I_{th}$ ,并作详细的误差分析。

(2)选择激光二极管的电流  $I_{th} + 2 \frac{(I_m - I_{th})}{3}$  作为工作点,以确保激光二极管及探测器均能正常工作。

(4)为 B 部分实验作准备:如图 3-72 所示,在光具座上,将偏振片放置于近激光二极管处,注意激光必须对准偏振片的中央部分,调整偏振片使入射激光与偏振片的平面垂直。(提示:你可以插入半透光纸作光屏,检查入射光与反射光所产生的光点是否重叠,以确保入射光垂直于偏振片)

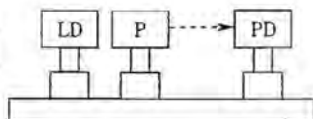


图 3-72 偏振片校准(P:偏振片)

(5)固定激光二极管的电流大小,在光具座上放置第二片偏振片,须确保适当的光路校准,也就是将光源、探测器以及两偏振片置于一一直线上,并确定每一偏振片平面都与光束垂直。

## B 部分

### 丝状液晶(Nematic LC)的光学性质 与 $90^\circ$ TN-LC 盒的电-光开关特性

## I. 简介

## 1. 液晶

液晶体(简称液晶,LC)是一种介于固态晶体与非晶形态之间的物质。其中丝状液晶系由长条形有机分子所构成,这些分子的平均排列方向可以很容易排列成规则状,同时亦可以通过施加电场,来控制长条形液晶分子长轴的方向。在大部分的液晶元件中,均要求液晶分子的取向均匀且朝向预设的指向。本实验所用的液晶盒(LC Cell)结构见图 3-73。使用擦镜纸沿单一方向摩擦图 3-73 所示的 PI 导向膜,可在 PI 膜表面形成排列整齐的沟纹,它会令相邻的液晶长分子沿沟纹方向排列整齐,并进而通过分子间的相互作用,使其他液晶分子随之规则排列,如此可获得均匀取向的丝状液晶膜,局部的分子取向,称为液晶在该点的主导方向(director)。

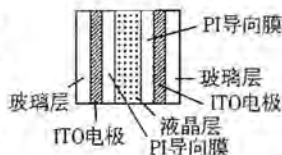


图 3-73 液晶盒结构

液晶盒对光具有双折射现象,也就是具有两种折射率。当光线沿着分子主导方向传播时,各种偏振分量以同一速率  $v_o = \frac{c}{n_o}$  传播,其中  $n_o$  称为“寻常折射率”,该传播方向(主导方向)称为液晶胞的光轴。当光线沿着与光轴垂直方向传播时,则有两种传播速率。当偏振光的电场方向垂直于光轴时,光的传播速率仍为  $v_o = \frac{c}{n_o}$ ;但偏振光的电场方向平行于光轴时,光的传播速率则是  $v_e = \frac{c}{n_e}$ ,其中  $n_e$  称为“非常折射

率”。“双折射量”(birefringence, 即光的各向异性)定义为非常折射率与寻常折射率之差  $\Delta n = n_e - n_o$ 。

## 2. 90°扭转之丝状液晶盒(90°TN-LC)

如图 3-74 所示的 90°扭转丝状液晶盒, 后方 PI 导向膜的 LC 主导方向, 相对于前方 PI 导向膜的 LC 主导方向扭转了 90°。故液晶分子在液晶层中亦逐渐扭转了 90°。令前方 PI 导向膜的主导方向平行于起偏镜的透光轴。入射的非偏振光经起偏镜后变成线偏振光。当此线偏振光穿过 90° TN-LC 时, 其偏振方向会随着液晶分子长轴方向的扭转而扭转, 使得透过 TN-LC 的光维持为线性偏振光, 但其偏振方向已扭转 90°。由于入射偏振光的电场方向始终维持与液晶分子长轴方向平行, 故它显示为非常光, 其折射率为  $n_e$ 。(同理若入射偏振光的偏振方向始终维持与液晶分

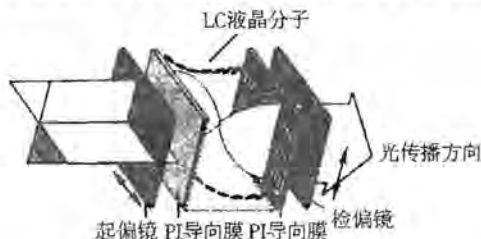


图 3-74 90°TN-LC 液晶分子配向扭转示意图

子长轴垂直, 它也具有 90°旋转的扭转效果, 但它显示为寻常光, 其折射率为  $n_o$ 。若检偏镜(第二个偏振片)的偏振方向设定为平行于起偏镜的偏振方向时(图 3-75), 光就不能透过检偏镜。此种设定称为“正常黑”模式(Normally Black, 简称 NB)。但若在 TN 盒两边加电压  $U$ , 且当  $U$  超过临界值  $U_c$  时, 受外加电场作用, 液晶分子的长轴方向会沿此外加电场方向作平行排列, 这将渐渐破坏对偏振光偏振方向的引导扭转作用, 光便会渐渐透过检偏镜。令  $U_{10}$  及  $U_{90}$  分别代表使透射光强度达到最大透射光强度的 10% 及 90% 时的外加电压值, 则可定义“电-光开关斜率” $\gamma$  为

$$\gamma = \frac{U_{90} - U_{10}}{U_{10}}$$

### II. 实验步骤

将“90° TN-LC”设定在“正常黑”模式, 放置于两个偏光方向互相平行的偏振片之间。使用函数产生器以 100 Hz 方波的方式加电压于液晶盒的两边的 ITO 电极上。将电压值  $U_{ms}$  由 0 逐步增至 7.2 V。

\* 在关键点附近, 必要时宜多取几组数据。

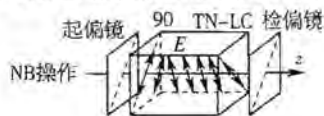


图 3-75 90° TN 盒的 NB 操作设定



## 问题 B-(1)

对 NB 90° TN-LC 进行测量、列表、并画出电光关系特征曲线 ( $J$  对  $U_{rms}$  的曲线), 求出开关斜率  $\gamma$ . ( $\gamma = \frac{U_{90} - U_{10}}{U_{10}}$ )

## 问题 B-(2)

测定 NB 90° TN-LC 的临界电压  $U_c$ , 利用图明确表示出你定出  $U_c$  值的方法. 提示: 当外加电压超过临界电压后, 光透射率将急剧上升.

## C 部分

## 丝状液晶的光学性质

## 平行取向液晶盒的电-光开关特征

## I. 简介

## 均匀平行取向液晶盒

均匀平行取向液晶盒是前 PI 导向膜与后 PI 导向膜的主导方向互相平行的液晶盒 (图 3-76). 若经起偏镜入射的线偏振光, 偏振方向平行于 LC 主导方向时, 在液晶中光以非常光的方式前进, 且光呈单一的 (纯的) 相位变化.

若入射偏振光和 LC 主导方向成 45° 夹角 (见图 3-77), 则由于寻常光和非常光在 LC 中波速不同, 导致这两种光间发生“相位推迟”. 在此  $\theta=45^\circ$ , 两偏振片的偏振方向相互平行的情况下, 透过检偏镜之光的透射率 (即透射光强度与入射液晶盒的光强之比) 为

$$T_{//} = \cos^2 \frac{\delta}{2}.$$

式中的“相位延迟” $\delta$  可表示为

$$\delta = \frac{2\pi d \Delta n(U, \lambda)}{\lambda}.$$

式中  $d$  是液晶层的厚度,  $\lambda$  是空气中光的波长,  $U$  是交流电压的均方根值, 而  $\Delta n = n_e - n_o$  是液晶的双折射量,  $\Delta n$  是  $\lambda$  与  $U$  的函数.  $\Delta n$  与  $\delta$  都是在  $U$  等于零时有最大值, 此外  $\Delta n$  随  $U$  的增加而减少.

在一般的情况下, 透射率可表示如下

$$T_{//} = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\delta}{2}, \quad T_{\perp} = \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\delta}{2}.$$

式中  $//$  和  $\perp$  分别代表检偏镜的偏振方向平行和垂直于起偏镜的偏振方向的情况.

## II. 实验步骤

1. 以均匀平行取向液晶盒取代 90° TN-液晶盒.
2. 在  $U=0$  时, 设定  $\theta=45^\circ$  (图 3-77). 实验时可在起偏镜与检偏镜的透光轴互相垂直时, 旋转液晶试片直到透射率达最大值 ( $T_{\perp}$ ), 即可确定  $\theta=45^\circ$ . 记下  $T_{\perp}$ , 再

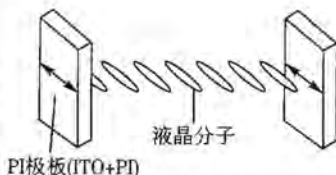


图 3-76 均匀平行取向液晶盒





将起偏镜与检偏镜的透光轴调成平行并测量  $T_{//}$  (同样在外加电压  $U=0$  时), 以求得相位延迟  $\delta$  及双折射量  $\Delta n$ .

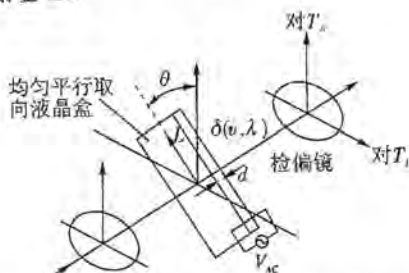


图 3-77 实验装置示意图(箭头  $L$  为主导方向)

#### 问题 C-(1)

设已知激光的波长  $\lambda=650 \text{ nm}$ , 液晶层厚  $d=7.7 \mu\text{m}$ ,  $\Delta n \approx 0.25$ ; 由上面得到的  $T_{\perp}$  及  $T_{//}$  的数据, 计算此液晶盒在  $V=0$  时,  $\delta$  及  $\Delta n$  的精确值。

3. 如上面的实验(1), 在  $\theta=45^\circ$  的设定下, 使用函数产生器以  $100 \text{ Hz}$  方波, 加电压于均匀平行取向液晶试片两端的 ITO 电极上, 在起偏镜与检偏镜的透光方向调成平行时, 测量  $T_{//}$  在外加电压 ( $U_{\text{ms}}$ ) 从  $0$  到  $7 \text{ V}$  之间的电-光开关曲线(即  $T_{//}$  对  $U_{\text{ms}}$ )。

(提示: 测量光透射率  $T_{\perp}$  开关曲线的结果, 可有助于测量  $T_{//}$  时的准确性;  $T_{\perp}$  的测量结果在回答下列问题并不需要)

\* 记住在关键点附近, 必要时应多取几组数据(特别是在  $0.5 \text{ V} \sim 4.0 \text{ V}$  之间时)。

#### 问题 C-(2)

在  $\theta=45^\circ$  配置下, 对平行取向液晶盒进行测量、列表并画出  $T_{//}$  的电-光开关曲线。

#### 问题 C-(3)

从电-光开关的数据中, 找出  $\delta=\pi$  时的外加电压  $U_{\pi}$  值。提示:  $U_{\pi}$  是使相位延迟  $\delta=\pi(180^\circ)$  时的外加电压。请记住  $\Delta n$  是外加电压的函数, 而且  $\Delta n$  随  $U$  的增大而减小。在决定  $U_{\pi}$  的准确数值时, 可考虑用外插法求解。

**【分析】** 纵观近年来国际奥赛实验试题, 其发展趋势是走向综合和贴近科技前沿。本题充分显示这两个特点。本题共包括三部分, 研究的都是当前重要的器件。A 部分研究激光二极管的光学特性, 所用的光探测器是由光电二极管串接电流放大器制成。B 和 C 部分是关于液晶盒的光学性质。本题既包含研究成分, 又包含测定成分, 是一道以研究为主的综合题。

本题对所用器件、实验步骤以及实验要求作了详细的介绍, 据此逐步做下去, 不难完成本题任务。为了使实验能顺利进行, 光路准直调节(光在实验装置各个部分的光路校准)是非常关键的, 此外, 需注意: 各种器件应在规定条件下使用; 在关键点附近必要时应多取几组数据。



## 【解】 A 部分 激光二极管与光探测器

问题 A-(1)

a. 数据: 标有变量和单位的数据表格

表 A-(1)  $J$ - $I$  数据

$I/\text{mA}$	9.2	15.2	19.5	21.6	22.2	22.7	23.0	23.4	23.8
$J/\text{V}$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.05	0.06	0.09	0.12	0.30
$I/\text{mA}$	24.2	24.6	25.0	25.4	25.8	26.2	26.6	27.0	27.4
$J/\text{V}$	0.66	1.02	1.41	1.88	2.23	2.64	3.04	3.36	3.78
$I/\text{mA}$	27.8	28.2	28.6	29.0	29.4	29.8	30.2	30.5	31.0
$J/\text{V}$	4.12	4.48	4.79	5.13	5.44	5.72	6.05	6.25	6.55
$I/\text{mA}$	31.4	31.8	32.2	32.6	33.0	33.4	33.8	34.2	34.6
$J/\text{V}$	6.75	6.99	7.22	7.40	7.60	7.78	7.93	8.07	8.14
$I/\text{mA}$	35.0	35.5	36.0	36.5	37.0	37.6	38.0	38.6	
$J/\text{V}$	8.18	8.20	8.22	8.24	8.24	8.25	8.26	8.27	

电流误差:  $\pm 0.1 \text{ mA}$ , 电压误差:  $\pm 0.01 \text{ V}$ ;

b. 画图: 选择与实验数据的范围和精度相符的横、纵坐标和单位;

c. 曲线: 合适的数据和适当的线形.

● 如图 3-78 所示 开始  $\sim 0 \rightarrow$  阈值  $\rightarrow$  线性  $\rightarrow$  饱和

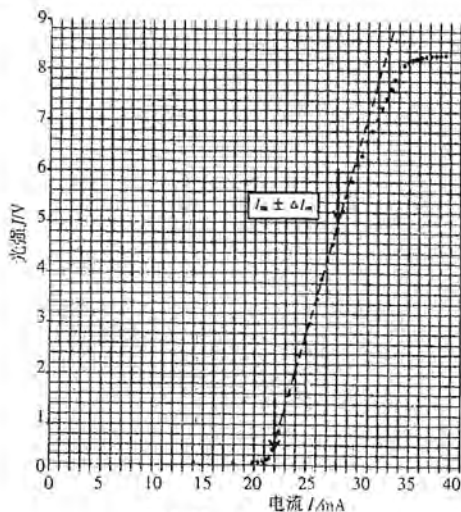
问题 A-(2)

a. 标出图 3-78 的线性区域;

b. 用最小二乘法或用尺子目测进行误差分析;

最小二乘法拟合	用尺目测
图中误差 $0.0x \text{ mA}$	图中误差 $0.x \text{ mA}$
最小二乘法方法	放大刻度图
误差分析	画出 3 条曲线作误差分析

c.  $I_m \pm \Delta I_m$ : 从  $J$ - $I$  曲线线性区域得到适当的  $I_m$  数据和误差 ( $\pm \Delta I_m$ );d. 适当的  $I_{th}$  值及误差,

图 3-78  $I-I$  关系图

$$I_{th} = [(21 \sim 26) \pm (0.01 \text{ 或 } 0.2)] mA.$$

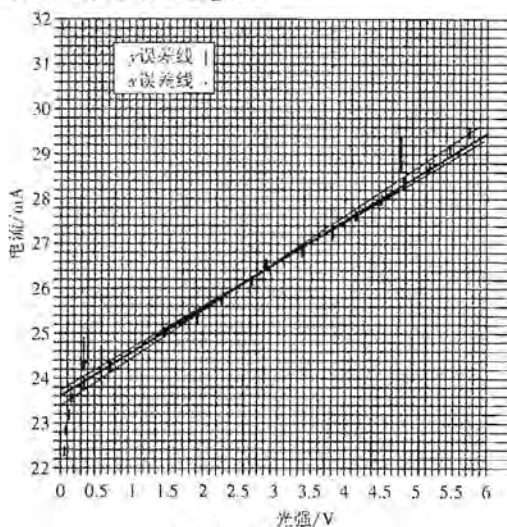


图 3-79 直线和外推

## 【附录】

◎A1-1

●最小二乘法:

$$I = mJ + b \rightarrow b = I_{th}$$

对  $y = mx + b$



	$y: I/\text{mA}$	$x: J$	$xy$	$x^2$	$y(x)=mx+b$	$[y-y(x)]^2$
1	23.8	0.3	7.14	0.09	23.7937	3.969E-05
2	24.2	0.66	15.972	0.4356	24.17134	0.000821
3	24.6	1.02	25.092	1.0404	24.54898	0.00260
4	25	1.41	35.25	1.9891	24.95809	0.00176
5	25.4	1.88	47.752	3.5344	25.45112	0.00261
6	25.8	2.23	57.534	4.9729	25.81827	0.000334
7	26.2	2.64	69.168	6.9696	26.24836	0.00234
8	26.6	3.04	80.864	9.2416	26.66796	0.00462
9	27	3.36	90.72	11.2896	27.00364	1.325E-05
10	27.4	3.78	103.572	14.2884	27.44422	0.00196
11	27.8	4.12	114.536	16.9744	27.80088	7.733E-07
12	28.2	4.48	126.336	20.0704	28.17852	0.000461
13	28.6	4.79	136.994	22.9441	28.50371	0.00927
	$\Sigma y =$ 340.6	$\Sigma x =$ 33.71	$\Sigma xy =$ 910.93	$\Sigma x^2 =$ 113.840		$\Sigma [y-y(x)]^2$ =0.0268

$$\Delta = N \Sigma x^2 - (\Sigma x)^2 = 13(113.840) - (33.71)^2 = 343.556.$$

$$m = \frac{1}{\Delta} (N \Sigma xy - \Sigma x \Sigma y) = \frac{13(910.93) - (33.71)(340.6)}{343.556} = 1.049.$$

$$b = \frac{1}{\Delta} (\Sigma x^2 \Sigma y - \Sigma x \Sigma xy) = \frac{(113.840)(340.6) - (33.71)(910.93)}{343.556} = 23.479.$$

$$\sigma_y = \frac{1}{N-2} \sqrt{\Sigma [y-y(x)]^2} = \frac{1}{13-2} \sqrt{0.0268} = 0.015.$$

$$\sigma = \sqrt{(\sigma_y)^2 + \left(\frac{dy}{dx} \sigma_x\right)^2} = \sqrt{(0.015)^2 + (1.049 \times 0.005)^2} = 0.016.$$

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{N \sigma^2}{\Delta}} = \sqrt{\frac{13 \times 0.016^2}{343.556}} = 0.0031.$$

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{\sigma^2}{\Delta} \Sigma x^2} = 0.016 \times \sqrt{\frac{113.840}{343.556}} = 0.0092.$$

$$I_{th} = (23.48 \pm 0.01) \text{mA}.$$

◎ A1-2.

● 目测:

$$I = mJ + b \rightarrow b = I_{th}.$$

对  $y = mx + b$

直线 1:

$$y = 1.00x + 23.66.$$

直线 2:

$$y = 1.05x + 23.48.$$

直线 3:

$$y = 1.13x + 23.31.$$

$$I_{th}(\text{平均}) = 23.48 \text{mA}.$$

$$\Delta I_{th} = 0.18 \text{ mA}$$

$$I_{th} = (23.5 \pm 0.2) \text{ mA}$$

B部分 丝状液晶的光学性质  $90^\circ$  TN-LC 盒的电-光开关特性  
问题 B-(1)

a. 标有变量和单位的数据表格

所加电压/V	光强/V	所加电压/V	光强/V	所加电压/V	光强/V
0.00	0.00	1.78	0.21	3.41	1.39
0.10	0.00	1.81	0.26	3.50	1.40
0.20	0.00	1.85	0.33	3.60	1.39
0.30	0.00	1.90	0.44	3.70	1.40
0.40	0.00	1.96	0.57	3.80	1.40
0.50	0.00	2.03	0.70	4.03	1.40
0.60	0.00	2.08	0.80	4.22	1.40
0.70	0.00	2.15	0.92	4.40	1.39
0.80	0.00	2.21	1.02	4.61	1.39
0.90	0.00	2.28	1.10	4.78	1.40
1.00	0.00	2.33	1.14	5.03	1.39
1.10	0.02	2.39	1.19	5.20	1.39
1.20	0.04	2.44	1.22	5.39	1.38
1.24	0.04	2.50	1.26	5.61	1.39
1.30	0.04	2.55	1.27	5.81	1.38
1.34	0.03	2.60	1.29	6.02	1.38
1.38	0.02	2.67	1.32	6.21	1.38
1.45	0.01	2.72	1.33	6.40	1.38
1.48	0.01	2.85	1.36	6.63	1.38
1.55	0.02	2.97	1.37	6.80	1.38
1.59	0.03	3.11	1.38	7.02	1.38
1.64	0.05	3.20	1.39	7.20	1.38
1.71	0.11	3.32	1.39		

b. 根据实验的范围和精度选择横坐标和纵坐标的合适的刻度和单位

c. 测量并画出光强随所加电压变化的  $J-U_{ms}$  曲线

■ 在正常黑模式下透射光强小于 0.05 V

■ 在外加电压达到临界值前有一小的光反弹

■ 当外加电压超过临界值后透射光强急剧增大

■ 当外加电压超过 3 V 后透射光强出现平台区

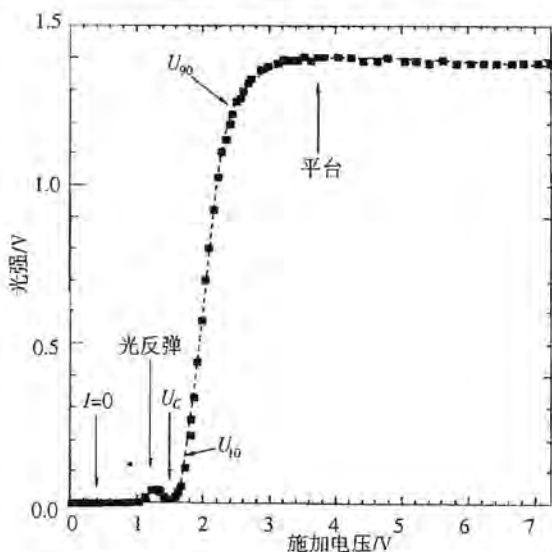


图 3-80

d.  $y$  值及误差

- 在所加电压 3.0 V~7.2 V 之间找出光强的最大值
- 定出最大光强的 90% 数值, 利用内插法得出所加电压的  $U_{90}$  值
- 定出最大光强的 10% 数值, 利用内插法得出所加电压的  $U_{10}$  值
- 正确的  $y \pm \Delta y$  值:  $(0.42 \sim 0.44) \pm 0.02$

问题 B(2)

a.  $U_c$  值及误差,  $U_c \pm \Delta U_c$ .

- 放大刻度画图并且在  $U_c$  区附近多取些测量数据点
- 定出当透射光强急剧增大时的  $U_c$  值
- 正确的  $U_c \pm \Delta U_c$  数值:  $[(1.20 \sim 1.50) \pm 0.01] \text{V}$

此图的数据与前面的数据并不是一一对应的, 此图仅展示了如何得出  $U_c$ .

C 部分 丝状液晶的光学性质 平行取向液晶盒的电-光开关特征

问题 C(1)

a.  $\delta$  和  $\Delta n$  值及误差

- 获取  $T_{//}$  值并取平均值
- 定出级数  $m$  值
- 正确的  $\delta$  值, 15.7~18.2
- 正确的  $\Delta n$  值: 0.20~0.24

$$T_{//} = \frac{0.31 + 0.31 + 0.31}{3} \text{ V} = (0.31 \pm 0.01) \text{ V}.$$

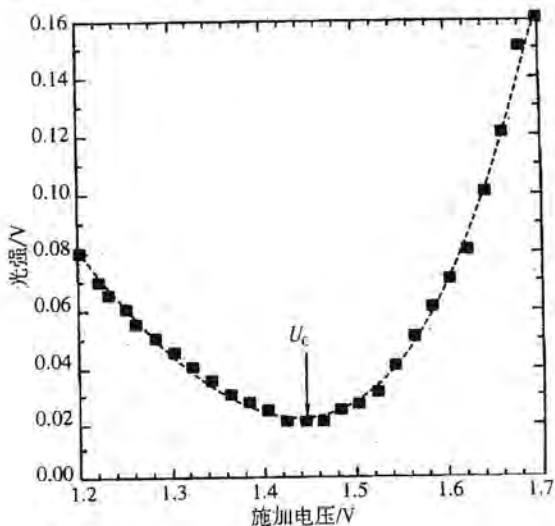


图 3-81

$$T_{\perp} = \frac{1.04 + 1.03 + 1.04}{3} \text{ V} = (1.04 \pm 0.01) \text{ V}.$$

$$\tan \frac{\delta}{2} = \pm \frac{\sqrt{T_{\perp}}}{\sqrt{T_{\parallel}}} = -1.83 *.$$

得

$$\delta = 4.14 + 2m\pi. (\text{或 } -2.14 + 2m\pi)$$

$$\delta = \frac{2\pi d \Delta n}{\lambda} = \frac{2\pi \times 7.7 \times 0.25}{0.65} = 18.61.$$

取

$$m = 2 \text{ 或 } 3.$$

得

$$\delta = 16.70 (5.32\pi).$$

由

$$\delta = \frac{2\pi d \Delta n}{\lambda}.$$

得

$$\Delta n = \frac{\delta \lambda}{2\pi d} = 0.22.$$

允许值:  $\Delta n = (0.20 \sim 0.24)$ .

\* 如果  $\tan \frac{\delta}{2} = 1.83$ , 则  $\delta$  值可以是  $4.68\pi$  或  $6.68\pi$ , 与问题 C-(2) 的数据图不相符.

问题 C-(2)

a. 标有变量和单位的数据表格

所加电压/V	光强/V	所加电压/V	光强/V	所加电压/V	光强/V
0.00	0.30	1.47	0.29	2.25	1.27
0.10	0.30	1.50	0.13	2.28	1.20



0.20	0.29	1.53	0.06	2.31	1.14
0.30	0.29	1.59	0.30	2.34	1.07
0.40	0.29	1.62	0.05	2.37	1.00
0.05	0.28	1.65	0.15	2.40	0.94
0.60	0.26	1.68	0.24	2.43	0.87
0.70	0.23	1.71	0.34	2.46	0.79
0.80	0.19	1.74	0.49	2.49	0.72
0.90	0.09	1.77	0.63	2.52	0.66
0.99	0.00	1.80	0.78	2.55	0.61
1.02	0.06	1.83	0.92	2.58	0.56
1.05	0.16	1.86	1.05	2.61	0.51
1.08	0.25	1.89	1.19	2.64	0.46
1.11	0.40	1.92	1.27	2.57	0.42
1.14	0.67	1.95	1.34	2.70	0.37
1.17	0.93	1.98	1.40	2.73	0.33
1.20	1.25	2.01	1.47	2.76	0.30
1.26	1.31	2.04	1.48	2.79	0.26
1.29	1.36	2.07	1.48	2.82	0.23
1.32	1.32	2.10	1.48	2.85	0.21
1.35	1.09	2.13	1.45	2.88	0.18
1.38	0.85	2.16	1.42	2.91	0.16
1.41	0.62	2.19	1.38	2.94	0.14
1.44	0.46	2.22	1.33	2.97	0.12
3.00	0.09	3.70	0.02	5.39	0.44
3.06	0.08	3.80	0.03	5.51	0.48
3.09	0.06	3.90	0.04	5.57	0.49
3.12	0.05	4.00	0.07	5.70	0.52
3.18	0.04	4.10	0.09	5.80	0.55
3.21	0.03	4.20	0.11	5.90	0.57
3.24	0.02	4.30	0.14	6.01	0.60
3.27	0.02	4.40	0.16	6.10	0.62
3.30	0.01	4.50	0.19	6.19	0.64
3.33	0.00	4.60	0.22	6.30	0.66
3.36	0.00	4.70	0.25	6.40	0.69
3.39	0.00	4.80	0.28	6.60	0.73
3.42	0.00	4.90	0.31	6.70	0.74
3.45	0.00	5.01	0.34	6.80	0.76
3.48	0.00	5.11	0.37	7.00	0.80
3.51	0.00	5.21	0.39	7.20	0.83





3.60	0.01	5.29	0.42		
------	------	------	------	--	--

b. 根据实验的范围和精度选择横、纵坐标的合适刻度和单位

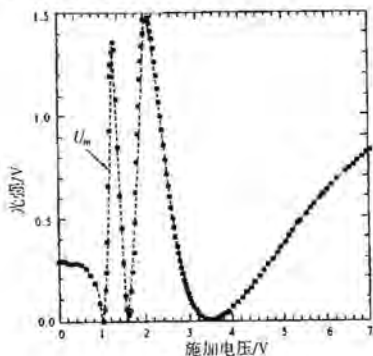


图 3-82

c. 测量  $T_{//}$  随所加电压的变化并画出  $T_{//}-U_{ms}$  曲线

■ 3 个极小值和 2 个尖锐的光的极大值

■ 2 个极大值间相差小于 15%

■ 极小值的数值小于 0.1 V

问题 C-(3)

$U_{\pi}$  的值及误差

■ 放大刻度画图,  $U_{\pi}$  区附近取更多数据

■ 标出正确的  $U_{\pi}$  值

■ 利用内插法或四舍五入法, 则得出  $U_{\pi}$  的值

■ 正确的  $U_{\pi}$  值:  $[(3.2 \sim 3.5) \pm 0.01] \text{V}$

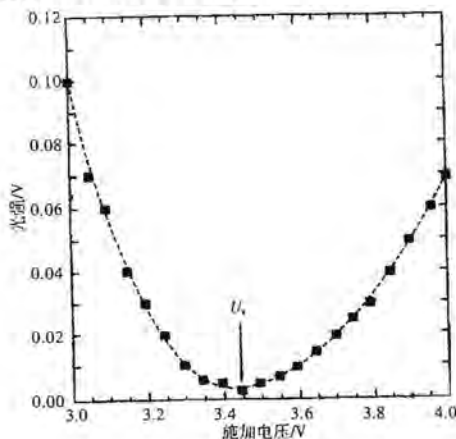


图 3-83



### 题 11 (2001·国际物理竞赛题)

#### 旋转液体

本实验包括三个主要部分:

- (1) 研究旋转液体表面的形状,并测定重力加速度.
- (2) 将旋转液体作为光学系统进行研究.
- (3) 测定液体的折射率.

当一个盛有液体的圆柱形容器绕着过其中心的竖直轴以角速度  $\omega$  匀速旋转时,液体的表面将变为抛物线(图 3-84).平衡时,设液体表面上某点  $P(x, y)$  的切面与水平面夹角为  $\theta$ , 则

$$\tan\theta = \frac{\omega^2 x}{g}, \text{ 对 } |x| \leq R. \quad (1)$$

其中  $R$  为容器的半径,  $g$  为重力加速度.

进一步可以证明,对  $\omega < \omega_{\max}$  (其中  $\omega_{\max}$  为当旋转液体表面中心与容器底面接触时的角速度), 当  $x = x_0 = \frac{R}{\sqrt{2}}$  时,

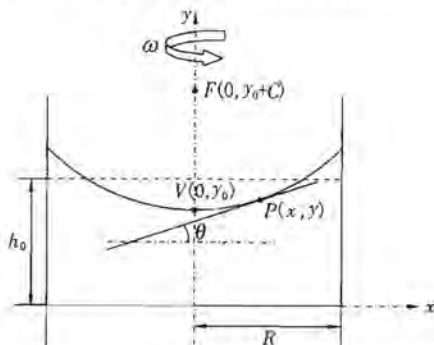
$$y(x_0) = h_0. \quad (2)$$

即该处旋转液体的高度与不旋转时的高度相同.

旋转液体面表面的形状为由下列方程给定的抛物面

$$y = y_0 + \frac{x^2}{4C}. \quad (3)$$

抛物面的顶点在  $V(0, y_0)$ , 焦点在  $F(0, y_0 + C)$ . 当平行于对称轴(光轴)的光线在此抛物面上反射时, 它们都将交于焦点  $F$  (图 3-84).



原深  $h_0$ , 半径  $R$  的水桶绕  $y$  轴以恒定角速度  $\omega$  旋转时产生的抛物形表面上一点  $P(x, y)$  处的倾角  $\theta$ , 表面顶点  $V$  和焦点  $F$

图 3-84

实验材料:

- (1) 1 个盛有液体甘油的圆柱形刚性塑料杯, 在杯的底部和侧壁贴有毫米刻度尺;
- (2) 由小型直流马达驱动的转台, 马达由一个电压可调的直流电源供电, 用它

可控制转台转动的角速度；

(3) 1块水平放置的透明屏，其上可放透明或半透明坐标纸。屏的位置可沿竖直或水平方向调节；

(4) 固定在支架上的激光笔。激光笔位置可以调节。它头部的帽盖是可调换的；

(5) 1个供替换的激光笔帽盖；

(6) 1把尺子；

(7) 1支记号笔；

(8) 1只秒表。按其左边按钮为复位，按中间按钮为选择工作模式，按右边按钮为开始或停止计时；

(9) 标有 500 或 1000 线/mm 的光栅；

(10) 水平尺；

(11) 护目镜。

**注意事项：**

(1) 不要直视激光束。注意，从准镜面反射的激光束也很危险，为了安全，请务必使用护目镜；

(2) 在整个实验过程中，挪动盛有甘油的杯子时要小心；

(3) 转台预先已调整水平，气泡水平尺仅用来调节透明屏的水平状态；

(4) 整个实验中，你将在屏幕上观察到几个斑点，它们分别由空气、液体、屏和杯子等之间的界面反射或折射束形成。注意确保你的测量对象是实验所要求的光束；

(5) 必须缓慢地改变转动速度，并等候足够长时间使得液体达到平衡，然后再进行测量。

### 第 1 部分 利用旋转液体测定 $g$

(1) 导出表达式①；

(2) 测量容器中液体的高度  $h_0$  和容器的内直径  $2R$ ；

(3) 在光源与容器之间插入光屏，测量转台与光屏间的距离  $H$  (图 3-85)；

(4) 调节激光笔使光束竖直向下，并使其通过离容器中心水平距离  $x_0 = \frac{R}{\sqrt{2}}$  处的液体表面；

(5) 缓慢地转动转台，注意不要让旋转液体表面中心接触容器底面；

(6) 已知在  $x_0 = \frac{R}{\sqrt{2}}$  处，无论角速度  $\omega$  大小如何，该处液面高度与不转时相同。

利用这一点，测量不同角速度  $\omega$  下  $x_0$  处液体表面的切面倾角  $\theta$ ，通过实验测定重力加速度  $g$ ；

(7) 将每个  $\omega$  下的各测量值和计算值列表；

(8) 作图以计算重力加速度  $g$ ；

(9) 计算  $g$  的值及其实验误差；

(10) 将  $2R, x_0, h_0, H$  和实验测得的  $g$  值及其误差填写到答案纸上。

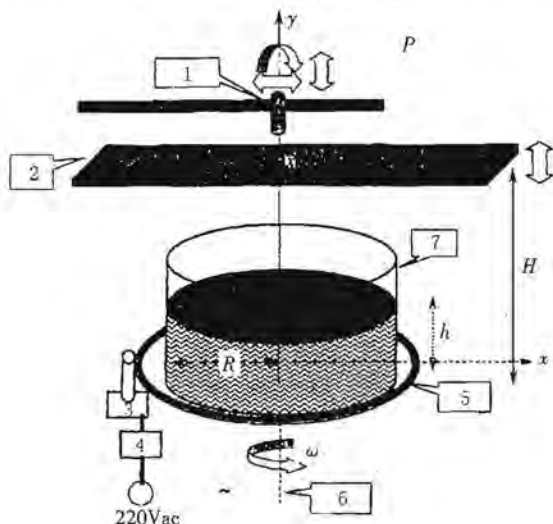


图 3-85 第 1 部分和第 2 部分的实验装置

1. 架上的激光笔 2. 透光屏 3. 马达 4. 马达控制器 5. 转台 6. 转轴  
7. 圆柱形容器

### 第 2 部分 光学系统

在这部分实验中旋转液体被看做一个成像光学系统；由于液体表面的曲率随转动角速度变化，因此这个光学系统的焦距依赖于  $\omega$ 。

#### 2a) 焦距的研究

① 调节激光笔使得激光束竖直向下射到杯子底面的中心。将这时光束与屏相交处标为  $P$  点，杯子底面的中心与这点的连线就是这个系统的光轴（图 3-85）；

② 由于液体的表面像一个抛物面镜子，任何平行于光轴的光束经这个抛物面反射后将通过光轴上的焦点  $F$ ；

③ 调节转动速度，使焦点落在屏上。测量角速度和屏与转台间的距离  $H$ ；

④ 对不同  $H$  值重复上述步骤；

⑤ 在答案纸上填入  $2R, h_0$  的测量值和每个  $H$  所对应的  $\omega$  的测量值。

⑥ 利用你的测量数据作图，找出焦距与角速度之间的关系，为简单起见，你可近似取  $H-h_0$  作为焦距。将你的结果填到答案纸上。

#### 2b) “像”（即你在屏幕上所看到的）的分析

在这部分实验中，你将分析由这个光学系统产生的“像”。为此，按下列步骤进行。

① 逆时针旋转取下激光笔的帽盖；

② 顺时针旋转装上激光笔的新帽盖（放在封袋中）。现在你的激光笔能形成清晰的图形，而不再是一束细光束；

③ 调节激光笔的位置，使激光束近乎竖直地射到杯子中心附近；

④在靠近杯子的水平屏上放一张半透明坐标纸,使入射激光束碰不到半透明纸,而反射激光束能射到半透明纸;

⑤当不转动时观察由出射激光束形成“像”的大小和取向以及由反射激光束形成的“像”的大小和取向;

⑥开始转动液体,逐渐增加转动速度到仪器可达到的最大值,同时观察屏上“像”的变化.当 $\omega$ 增大时,你会看到几个不同频率区域,在这些不同频率区域中“像”的性质完全不同.为了描述这些观察结果,在答案纸的表中加行,每一行填上上述所观察到的频率范围,并用所给的符号完成此表.这些符号的含义在答案纸上有说明.

### 第3部分 折射率

在这部分实验中我们将利用光栅来测定所给液体的折射率.当一束波长为 $\lambda$ 的单色光垂直入射到衍射光栅上时,将在 $\alpha_m$ 处观察到衍射花样的极大值, $\alpha_m$ 满足下列方程

$$m\lambda = d \sin \alpha_m. \quad (4)$$

其中 $m$ 为衍射级数, $d$ 为光栅常量.在这部分实验中,利用一衍射光栅来测定激光的波长和液体的折射率(图3-86).

- (1)利用光栅测量激光笔的激光波长,并将你的结果填写在答案纸上;
- (2)将光栅垂直浸入液体中,并使其处于杯子的中心;
- (3)调节激光束使其由杯壁进入液体并垂直入射到光栅上;
- (4)在贴于杯子对面侧壁的毫米刻度尺上观察衍射花样,并作必要的测量;
- (5)利用你的测量计算液体的折射率(忽略塑料杯子对光程的影响);
6. 将你的实验结果填写在答案纸上.

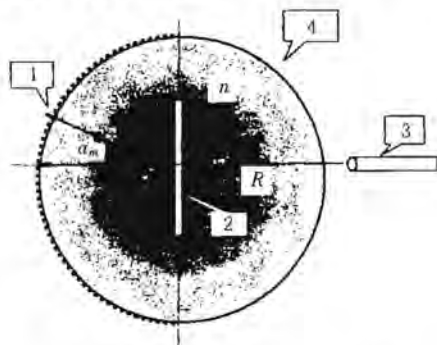


图3-86 液体中的光栅实验俯视图

1. 带有标尺的侧壁
2. 放在架上的光栅
3. 激光笔
4. 圆柱形容器

**【分析】**这是一道非常好的实验试题.它既涉及力学和光学的一些基本概念和知识,又注重物理实验的基本操作,并且要求分析实验现象和实验误差.本题既包含物理现象的研究,又包含物理量的测定,涉及领域也广,所以说是一道研究型的综合题.



解题时,根据所要测定的物理量的不同,可以将旋转液体分别作为力学系统和光学系统来研究.当做力学系统时,由液体一个质元受力的分析,导出求重力加速度的公式;而当做成像的光学系统时,液体表面像一个抛物面镜子,抛物面的焦距与旋转角速度有关,由实验研究两者的关系.

本题多次用到作图法求解.对于力学系统,通过作图法求重力加速度;对于光学系统,由作图法求焦距.可见作图法对解题起了重要作用.

### 【解】 第 1 部分 测定重力加速度

理论推导:

参看图 3-87 考虑位于液面上的一个质元  $m$ , 当其处于平衡时,有

$$N \cos \theta = mg,$$

$$N \sin \theta = m \omega^2 x.$$

液面的形状可导出如下

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 x}{g}.$$

因而  $y = \frac{\omega^2 x^2}{2g} + y_0$  ( $y_0$  是在  $x=0$  时的高度).

对于某一点  $x = x_0$ , 液面的高度  $h_0$  与液体未旋转时相同. 在这种情况下,

$$h_0 = y_0 + \frac{\omega^2 x_0^2}{2g}, \quad (1)$$

且

$$x_0^2 = \frac{2g(h_0 - y_0)}{\omega^2}.$$

由于液体的体积不变

$$\pi R^2 h_0 = \int y(2\pi x dx) = 2\pi \int (y_0 + \frac{\omega^2 x^2}{2g}) x dx.$$

$$y_0 = h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g}. \quad (2)$$

从方程①②可得

$$x_0 = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

实验部分:

$2R/\text{mm}$	$x_0/\text{mm}$	$h_0/\text{mm}$	$H/\text{mm}$
145.0	51.0	30.0	160.0

$$H - h_0 = 130.0 \text{ mm}.$$

对于角速度较小的转动,测量圆盘转动 10 个周期所用的时间  $10T$ ; 对于角速度较大的转动,测量圆盘转动 15 到 20 个周期所用的时间  $15T \sim 20T$ ; 利用  $\tan(2\theta)$

$= \frac{x}{H - h_0}$  及  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  (其中  $x$  为反射光束在透明屏上的交点与入射光束的水平距

离), 将实验数据列表如下. 将  $\tan\theta \cdot \omega^2$  作图, 可得图 3-88.

$x/\text{mm}$	$10T/\text{s}$	$\omega/\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$	$\tan 2\theta$	$\theta/\text{rad}$	$\theta/\text{deg}$	$\tan\theta$	$\omega^2/(\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})^2$
11	21.34	2.94	0.08	0.04	2.4	0.04	8.67
20	15.80	3.98	0.15	0.08	4.4	0.08	15.81
26	14.22	4.42	0.20	0.10	5.7	0.10	19.52
30	12.99	4.84	0.23	0.11	6.5	0.11	23.40
40	11.74	5.35	0.31	0.15	8.6	0.15	28.64
51	10.45	6.01	0.39	0.19	10.7	0.19	36.15
56	9.90	6.35	0.43	0.20	11.7	0.21	40.28
65	9.40	6.68	0.50	0.23	13.3	0.24	44.68
70	9.08	6.92	0.54	0.25	14.2	0.25	47.88
85	8.39	7.49	0.65	0.29	16.6	0.30	56.08
100	7.71	8.15	0.77	0.33	18.8	0.34	66.41
112	7.43	8.46	0.86	0.36	20.4	0.37	71.51
132	7.00	8.98	1.02	0.40	22.7	0.42	80.57
61.4	11.19	6.20	0.47	0.21	11.98	0.21	41.51

(最后一行仅用来计算误差)

图 3-88 中直线的斜率为  $0.0052(\text{s}/\text{rad})^2$ , 因此有

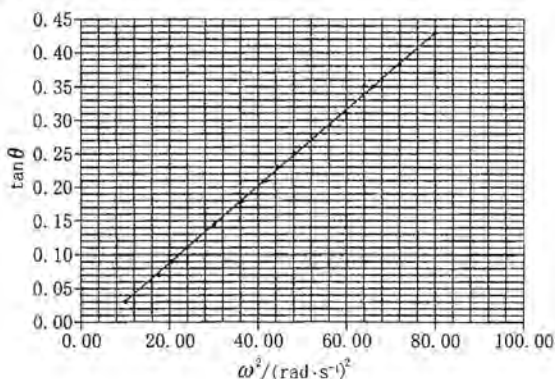


图 3-88  $x_0$  处  $\tan\theta$  与  $\omega$  关系

$$g = \frac{x_0}{\text{斜率}} = \frac{5.1}{0.0052} \text{cm/s}^2 = 980.8 \text{cm/s}^2.$$

误差计算

$$g = \frac{\omega^2 x_0}{\tan\theta},$$

$$\frac{\Delta g}{g} = \sqrt{2 \left( \frac{\Delta \omega}{\omega} \right)^2 + \left( \frac{\Delta x_0}{x_0} \right)^2 + \left( \frac{\Delta \tan\theta}{\tan\theta} \right)^2}.$$

(此处使用的是不确定度运算公式)

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} = \frac{\Delta T}{T}, \quad \frac{\Delta \tan\theta}{\tan\theta} \approx \frac{\Delta \theta}{\theta}. \quad (\text{由图可得 } \tan\theta \approx \theta)$$



$$\theta \approx \frac{x}{H-h_0}, \frac{\Delta\theta}{\theta} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta H}{H}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h_0}{h_0}\right)^2},$$

$$\frac{\Delta g}{g} = \sqrt{2\left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_0}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta H}{H}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h_0}{h_0}\right)^2}.$$

由于  $H=160.0 \text{ mm}$ ,  $\Delta H=1 \text{ mm}$ ,  $h_0=30.0 \text{ mm}$ ,  $\Delta h_0=1 \text{ mm}$ ,  $x_{\text{平均}}=61.4 \text{ mm}$ ,  $\Delta x_{\text{平均}}=1 \text{ mm}$ ,  $T_{\text{平均}}=1.1 \text{ s}$ ,  $\Delta T=0.01 \text{ s}$ ,  $x_0=51.0 \text{ mm}$ ,  $\Delta x_0=1 \text{ mm}$ , 我们得到

$$g=(981 \pm 42) \text{ cm/s}^2.$$

\* 注意, 由最佳平方逼近法可得

$$g=982 \text{ cm/s}^2.$$

其标准方差为

$$\sigma=33 \text{ cm/s}^2.$$

\*\* 利用线性逼近法, 有  $\tan\theta$  比  $\omega^2$  为  $0.0520$ , 并具有  $5.14 \times 10^{-5}$  的标准偏差, 因此

$$\frac{\Delta g}{g} = \sqrt{\left[\frac{\Delta(\text{斜率})}{\text{斜率}}\right]^2 + \left(\frac{\Delta x_0}{x_0}\right)^2} = 0.02,$$

$$g=(981 \pm 20) \text{ cm/s}^2.$$

## 第 2 部分 测焦距及像分析

2a) 将实验数据列表如下. 将  $\lg(H-h_0) \sim \lg\omega$  作图, 可得图 3-89.

$H/\text{mm}$	$10T/\text{s}$	$\omega/\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$	$\lg\omega$	$(H-h_0)/\text{mm}$	$\lg(H-h_0)$
158	10.31	6.09	0.784921	128	2.107
209	13.19	4.76	0.677935	179	2.253
190	11.70	5.37	0.729994	160	2.204
150	9.80	6.41	0.806954	120	2.079
129	9.21	6.82	0.83392	99	1.996
119	8.75	7.18	0.856172	89	1.949
110	8.10	7.76	0.889695	80	1.903

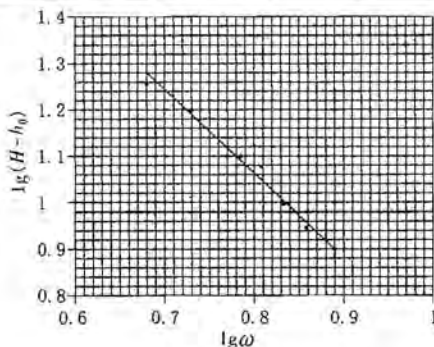


图 3-89

由图 3-89 可知, 焦距  $f$  是  $\omega$  的幂函数:  $f=A\omega^n$ , 其中  $n \sim -1.7$ .

[也可用  $(H-h_0) \sim \frac{1}{\omega^2}$  作图]



注意到对于球面镜近轴区域,我们有

$$\tan\theta = \frac{\omega^2 x}{g} \text{ 且 } \theta \approx \frac{x}{R} \approx \tan\theta.$$

这给出

$$R = \frac{g}{\omega^2} \text{ 或 } f = \frac{R}{2} = \frac{g}{2\omega^2}.$$

2b) 用适当的符号描述你在屏上观察到的经反射形成的图样.

$\omega$ (范围)/(rad·s <sup>-1</sup> )	方向	大小变化趋势	像的属性
$\omega=0$	ER		V
$0 < \omega < 8.2 *$	ER	D	V
$0 < \omega < 6.3 **$			
$8.2 < \omega < 14.6 **$	INV	I	R
$6.3 < \omega < 14.0 **$			
$14.6 < \omega < \omega_{\text{max}} *$	ER	NC	V
$14.0 < \omega < \omega_{\text{max}} **$			

\* 对于  $H=110 \text{ mm}$       \*\* 对于  $H=240 \text{ mm}$

$\omega$  的值由  $H, h_0$  等决定.

说明:

(1) 取向(与你在透明屏上观察到的物光束比较) INV——倒立; ER——正立.

(2) 当  $\omega$  增大时图样大小的变化 I——增大; D——减小; NC——不变.

(3) 对于不同的频率范围像的属性 若屏在焦点以上, 填 R; 若屏在焦点以下, 填 V.

### 第3部分 测量折射率

**测量波长** 当光栅和屏都处在空气中, 光正入射. 设  $L$  为屏与光栅的间距,  $x$  为屏上衍射斑点的间距,  $m$  为衍射级次.

$$L = 225 \text{ mm}, x_{\text{平均}} = 77 \text{ mm}, \text{对 } m = \pm 1, d = \frac{1}{500} \text{ mm},$$

$$\tan\theta = \frac{x_{\text{平均}}}{L} = \frac{77}{225} = 0.3422, \alpha = 18.89^\circ.$$

$$\lambda = \frac{1}{500} \sin\alpha = 647.6 \text{ nm}.$$

$$L = 128.0 \text{ mm}, x_{\text{平均}} = 44.0 \text{ mm}, \text{对 } m = \pm 1, d = \frac{1}{500} \text{ mm},$$

$$\tan\alpha = \frac{44.0}{128.0} = 0.3438, \alpha = 18.97^\circ, \lambda = \frac{1}{500} \sin\alpha = 650.1 \text{ nm}.$$

$$L = 128.0 \text{ mm}, x_{\text{平均}} = 111.0 \text{ mm}, \text{对 } m = \pm 2, d = \frac{1}{500} \text{ mm}.$$

$$\tan\alpha = \frac{111}{128} = 0.867, \alpha = 40.9^\circ,$$



$$\lambda = \frac{1}{2 \times 500} \sin \alpha = 655.1 \text{ nm.}$$

$\lambda$  的平均值

$$\lambda_{\text{平均}} = 650.9 \text{ nm.}$$

**测量折射率** 当光栅和屏都在液体中, 光正入射. 上面已测得

$$2R = 145.0 \text{ mm.}$$

在曲面上测量两衍射光斑间的距离为  $R\alpha$ , 测得

$$R\alpha_{\text{平均}} = 17.0 \text{ mm, 对 } m = \pm 1, \text{ 有}$$

$$\alpha_{\text{平均}} = 0.234 \text{ rad.}$$

由  $n = \frac{m\lambda}{d \sin \alpha}$ , 可得

$$n = 1.40.$$

如果忽略曲面的曲率, 则  $\tan \alpha = \frac{17.0}{72.5} = 0.234, \alpha = 13.20^\circ$ .

$$n = \frac{\lambda}{d \sin \alpha} = \frac{650.9 \text{ nm}}{\frac{1}{500} \text{ mm} \times 10^6 \sin \alpha} = 1.43.$$

### 题 12 (2000 · 国际物理奥赛题)

#### 磁性滑块

在本实验中, 测量数据、实验结果都要注明不确定度, 图中数据点也要标明不确定度.

目的: 研究滑块在斜面上滑下时作用在滑块上的力.

注意: 不要直接用手碰滑块的圆面和滑轨斜面上的纸面, 请用提供的手套操作. 为了方便起见, 圆滑块两面已用不同颜色粘纸贴上.

计时: 滑块轨道的斜面下面有两个磁敏传感器, 用于触发桌上“时间测量器”的电路. 当滑块在两个磁敏传感器之间时, 盒上的绿色发光二极管将亮着. 万用表用于测量电容器两端的电势差; 当绿色发光二极管亮时, 电容器与一个恒流源接通充电 (其充电电流恒定, 正比于电池两端的电势差). 因此万用表显示的所充电压的读数可以用作测量滑块在两个传感器之间的时间. 这种读数可以代表在某种单位下, 滑块在两个传感器之间的滑动速率.

计时器的使用操作:

(1) 当压住时间测量盒侧面的黑色按钮时, 本测量盒的电路被开启, 可以用来进行时间测量. 时间测量时, 要始终按住此黑色按钮.

(2) 此时如果绿色的发光二极管已亮, 请将滑块的淡色面朝上 (本实验始终将滑块的淡色面朝上), 并将它放在两个传感器之间, 让它沿斜面滑过下面那个传感器, 此时绿色发光二极管应熄灭.

(3) 时间测量中, 电容器两端的电势差可以通过按住计时器盒上的红色按钮 (至少 10 s) 放电降为零, 这个过程后, 滑动实验即可进行. 当滑块滑动在两个传感器之间时, 电容器被充电, 从所充电压可以测出时间. 每次测量前可将电容器放电使其电压降为零.



(4)另外,可用万用表连接到标有电池符号的两端测量电池电压。

定义:

(1)在斜面上向下滑动的运动物体将受到一个沿斜面方向的阻力  $F$  和正压力  $N$ 。定义

$$E = \frac{F}{N}.$$

(2)当阻力仅来自于摩擦力时,  $E$  等于  $\mu_s$ , 并称作表面的动摩擦系数, 它与速度无关。

(3)当蓝色(深色)面与斜面接触时, 定义  $E_d = \frac{F_d}{N}$ , 这里沿斜面的力  $F_d$  部分来自于表面摩擦, 部分来自于磁性效应。

(4)定义只有磁性效应时的变量  $E_{ds}$ ,  $E_{ds} = E_d - \mu_s$ 。

重要的提示和建议:

(1)刚开始时首先定性研究滑块的行为是很有用的。

(2)定量测量之前, 思考基本物理内容, 记住尽可能用图表示结果。

(3)除非你有足够的时间, 否则不要读取太多实验数据。

(4)实验中测量的是电解电容两端的电势差, 它不像简单的空气电容器, 很慢的漏电是正常的, 电势差也将不能保持完全稳定。

(5)提供你一个滑块和一个 9.0 V 的电池, 请省电。电容器充电的恒定电流正比于电池两端的电势差, 注意测量电池两端的电势差, 并记下结果。如果电池两端的电势差下降到低于 8.4 V 时, 传感器工作可能不可靠, 此时应更换电池。

(6)你的答题袋中只包括 4 张作图纸, 不再提供其他作图纸。实验后你可以拿走这个滑块。

(7)如果不能使用计时器时请监考员帮助解决。

数据:

滑块重量为  $5.84 \times 10^{-2}$  N。

电压表的读数表示两个滑块在两个传感器之间滑动的时间, 1 V 对应 0.213 s。

(当电池的电压为 9 V 时)

两个传感器之间的距离为 0.294 m。

实验:

利用提供的设备研究  $E_{ds}$  是如何依赖于与水平面成  $\theta$  角的倾斜滑轨上滑块的速度  $v_g$ 。

在答题纸上叙述用于分析实验结果和作图时用到的代数方程或者关系式。

提出一个定量模型解释实验结果。利用采集的数据论证此模型。

本问题是一个设计性和研究性参赛题, 操作、测量与分析应包括下述内容:

(1)用数字式万用表电压挡测量迭层电池两端电压, 然后对计时器中电容两端电压进行校准。

$$U_{\text{正值}} = U_{\text{读数}} \cdot \left( \frac{9.00}{\text{电池电压}} \right).$$



(2) 实验采用斜面倾角  $\theta$  范围为  $\theta_{\max} > \theta > \theta_{\min}$ , 证明在此范围内滑块在两传感器间做匀速运动. 可从不同高度下落时, 计时器测到的时间相同来证明. 记录这些数据.

(3) 在不同倾角  $\theta$  时, 滑块做匀速下滑, 记录计时器测量的时间  $t$ , 求得滑块通过二个集成霍尔传感器之间的速度  $v$ . 改变倾角  $\theta$  做实验至少 5 次以上, 作

$\tan\theta \frac{v}{\cos\theta}$  图, 由直线斜率乘  $\frac{v}{\cos\theta}$  得  $E_{\text{磁}}$ , 截距即为动摩擦系数  $\mu$ , 结果是  $\mu$  在 0.2~0.4 范围内. 铝斜面和滑块表面贴有一层纸, 请勿用手摸.

**【分析】** 本题是用实验方法研究力学问题, 即斜面上物体下滑受的力. 滑块在斜面上受的阻力除来自摩擦力外, 还有一部分来自磁性效应, 用磁摩擦系数  $E_{\text{磁}}$  表征这种效应. 具体要求是研究  $E_{\text{磁}}$  与不同倾角  $\theta$  时滑块速度  $v$  的关系. 请注意, 实验手段用了磁敏传感器和一种特殊的时间测量器, 后者利用了电容器充电, 其充电的电势差代表滑块在两传感器之间的时间, 亦代表滑块滑动速率.

**【解】** 磁性滑块在铝质斜面上自上而下, 以均匀速度  $v$  下滑. 因感应电动势(从而感应电流)与速度  $v$  成正比, 故可以认为磁阻尼力  $F = Kv$ ,  $K$  为常数. 此磁阻尼力也可以用  $E_{\text{磁}} \cdot W \cos\theta$  来表示, 其中  $W$  为滑块重量.  $E_{\text{磁}}$  可看成“磁”摩擦系数,  $\theta$  是斜面与水平面的夹角.

如图 3-90 所示, 当滑块沿斜面匀速下滑时, 它受到平行于斜面的作用力的合力为零, 即

$$W \sin\theta = Kv + \mu W \cos\theta.$$

式中,  $\mu$  为滑块与斜面间动摩擦系数. 若将此方程两边除以  $W \cos\theta$ , 可得方程

$$\tan\theta = \frac{Kv}{W \cos\theta} + \mu.$$

作  $\tan\theta \frac{v}{\cos\theta}$  的直线图, 可得斜率  $\frac{K}{W}$ , 截距  $\mu$ . 由此, 可以求得磁摩擦系数  $E_{\text{磁}}$ ,

它与速度  $v$ 、倾角  $\theta$  的关系式为  $E_{\text{磁}} = \text{斜率} \cdot \frac{v}{\cos\theta}$ . 这里, 斜率的值由作图求得.

注意: 计时器的原始读数是电压  $U$  (用数字式万用表读出其电压),  $U$  可转换为时间  $t$ , 转换关系式为  $t = 0.213U$ , 由此, 可求得滑块速度  $v = \frac{0.294}{t}$ . 即滑块运动速度  $v = \frac{1.380}{U}$  (其中  $U$  即为电容器两端电压).

### 题 13 (1998 · 国际物理竞赛题)

#### 实验试题

提供的仪器如照片图 3-91 所示.

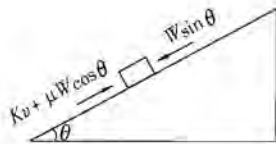


图 3-90



图 3-91

- A 实验板,板上有六个带香蕉插孔的接线柱。
- B 嵌入板内的探测线圈。
- C U形铁氧体磁芯,其上有线圈A和线圈B。
- D 另一个没绕线圈的U形铁氧体磁芯。
- E 厚度分别为 $25\mu\text{m}$ 、 $50\mu\text{m}$ 和 $100\mu\text{m}$ 的铝箔。
- F 带输出引线的信号发生器。
- G 两个万用电表。
- H 六个带香蕉插头的导线。
- I 两个橡皮筋和两张小纸片。

#### 万用电表

在本实验中用它测量电阻、频率、交变电流和交变电压。标有“COM”的插孔是公用的。标有“V- $\Omega$ ”的红色插孔是用于测量电压、电阻和频率的。而测量电流时则用标有“mA”的黄色插孔,这一点要注意。中间的旋钮用来选择仪表的功能(A~表示交流电流,V~为交流电压, $\Omega$ 为电阻,Hz为频率)和量程。其中AC模式的测量误差为读数 $\times 4\%$ +最末位的十个单位(或倒数第二位的一个单位)。如果读数小于某量程的10%,建议你减小量程,以增加精度。如果在50分钟内不使用,电表会自动关闭。

#### 信号发生器

按下标有“PWR”的红色键即打开信号发生器,按下标有“10 k”的键,即选择量程的单位为10 k。从右数第二键标有“~”记号,按下该键即选择正弦波的信号输出。实验中不再使用其他按键。实验中你可以把振幅(amplitude)旋钮顺时针旋转到底,不会出任何问题。仪器面板左侧的一个圆盘可以选择输出频率:圆盘读数乘以所选的量程单位即为输出信号的频率。用标有“MAIN”的输出端,其内阻为 $50\Omega$ 。实验中你可以用万用表随时检测输出信号的频率。

#### 磁芯

本实验用两个陶瓷铁氧体磁芯,其导电率很低,所以涡流损耗极小。但材料易碎,需轻拿轻放!

#### 实验板

板上有接线柱,线圈A、B引出的导线已挂锡,可以绕在接线柱上,再用塑料螺帽拧紧。板中间嵌入一个探测线圈,它旁边粘上一个小木块,木块下方有缺口,用于固定磁芯。



### 第1部分 涡流引起的磁屏蔽

随时间变化的磁场,会在导体内感应出涡流,涡流反过来又产生方向相反的磁场,对原磁场有阻隔或屏蔽作用。普通金属电导率有限,不能完全有效地屏蔽磁场。

我们可以用公式

$$B = B_0 e^{-\alpha d} \quad \text{①}$$

来描述铝箔的屏蔽作用,其中  $B$  为铝箔下方的磁感应强度,  $B_0$  是没放铝箔时同一处的磁感应强度,  $d$  为铝箔厚度,  $\alpha$  为衰减系数。

#### 实验内容

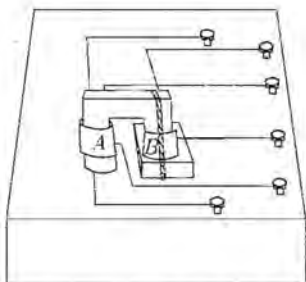


图 3-92 第1部分的实验安排

把带有线圈的磁芯倒扣在实验板上,一只脚放在小木块上,另一只带有线圈  $A$  的脚悬在探测线圈正上方(图 3-92)。橡皮筋套在磁芯上方和小木块下的缺口处,靠其弹力把磁芯固定,并确保实验过程中其位置不变。实验过程中,铝箔厚度和信号发生器输出频率的误差可以忽略不计。

1. 把线圈  $A$  和  $B$  各自连接到接线柱上,要保证接触良好。分别测量三个线圈(包括探测线圈)的电阻,记录在答题纸的第一栏内。可以预期它们的电阻都应小于  $10 \Omega$ 。

2. 把线圈  $A$  接入正弦信号,在频率  $f = (6 \sim 18) \text{kHz}$  的范围内选取几个频率值进行实验。把适当的铝箔放在探测线圈上的方框内,使其厚度在  $25 \mu\text{m} \sim 175 \mu\text{m}$  内取值。用实验证明上述公式①,并求出不同频率下的衰减系数  $\alpha$ ,将结果记在第二栏内。

3. 画出  $\alpha f$  图。

### 第2部分 磁通耦合

我们现在研究套在一个闭合磁芯上的两个线圈对外加交变电压( $U_x$ )的响应,这个交变电压是由正弦信号发生器产生的。我们可以认为在当前实验条件下不产生饱和和现象,磁芯的磁导率  $\mu$  可以当成常量。

#### 理论

在以下的基本理论和数据处理中,我们假定两个线圈的欧姆电阻和磁芯中的滞后效应对电压、电流和测量都没有显著的影响。这样的简化会使下面处理中测

量和计算值之间出现一些差异。

### 单个线圈的情况

先考查磁芯上只有一个线圈,通过它的电流为  $I$ ,在线圈内部的磁芯中产生的磁通  $\Phi$  正比于电流  $I$  和线圈匝数  $N$ ,并与磁导率  $\mu = \mu_r \mu_0$  以及磁芯的几何因素  $g$  (形状、大小)有关。磁导率描述材料的磁性质,  $\mu_r$  为相对磁导率,  $\mu_0$  为真空磁导率。于是磁通  $\Phi$  由下式给出

$$\Phi = \mu g N I = c N I. \quad (2)$$

其中  $c = \mu g$ , 按照法拉第电磁感应定律,感应电压为

$$E(t) = -N \frac{d\Phi(t)}{dt} = -c N^2 \frac{dI(t)}{dt}. \quad (3)$$

描写线圈电流-电压关系的通常办法是引入线圈的自感,由下式定义

$$E(t) = -L \frac{dI(t)}{dt}. \quad (4)$$

一个正弦信号发生器接到线圈上,会在线圈中产生电流  $I(t)$ ,即

$$I(t) = I_0 \sin \omega t. \quad (5)$$

式中  $\omega$  为角频率,  $I_0$  为电流的振幅。由③式,这个交变电流就会在线圈中感应出一个电压

$$E(t) = -\omega c N^2 I_0 \cos \omega t. \quad (6)$$

它等于信号发生器的电压  $U_g$ ,但有  $90^\circ$  的相位差。如果我们只考虑交变电流和电压的振幅  $I_0$  和  $E_0$ ,而不看相位差,则有

$$E_0 = \omega c N^2 I_0. \quad (7)$$

以下我们将省略下角标“0”。

### 两个线圈的情况

假设在一个磁芯上绕有两个线圈,磁芯的作用是耦合它们的磁通。理想磁芯各个截面上的磁通是完全相同的,实际磁芯会有漏磁,即感应线圈截面内的磁通比通电线圈截面内的磁通要小。若  $A$  为通电线圈,有

$$\Phi_B = k \Phi_A. \quad (8)$$

同样,若  $B$  为通电线圈,则有  $\Phi_A = k \Phi_B$ ,其中  $k$  为小于 1 的耦合系数。

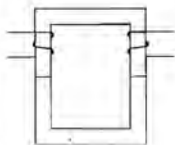
所考察的磁芯上有两个线圈  $A$  和  $B$ ,组成变压器式的装置,如图 3-93。设  $A$  为初级线圈,与信号发生器连接。若线圈  $B$  中无电流 ( $I_B = 0$ ),则  $I_A$  感应的电压  $E_A$  与  $U_g$  数值相同,符号相反。 $I_A$  在次级线圈中产生的磁通由③式确定, $B$  中感应的电压为

$$E_B = \omega k c N_A N_B I_A. \quad (9)$$

同样,电流  $I_B$  也会在线圈  $A$  中感应出电压来。 $A$  两端的总电压为

$$U_g = E_A = \omega c N_A^2 I_A - \omega k c N_A^2 N_B I_B. \quad (10)$$

这样,次级线圈中的电流在初级线圈中感应出一个相反的电势,导致  $I_A$  增加。



磁路闭合的变压器

图 3-93



对于  $E_B$ , 同样可以写出一个类似的等式. 正如以后测量可以证实的,  $k$  的大小与选择哪个线圈为初级线圈无关.

### 实验内容

把两个 U 形磁芯对接在一起, 并用橡皮筋固定. 信号发生器置于 10 kHz 的正弦波输出状态. 注意, 测量不同大小的信号时, 要相应选用万用表灵敏度最高的量程. 两个线圈 A 和 B 的匝数分别为  $N_A=150, N_B=100$  (误差均为  $\pm 1$  匝).

1. 证明自感系数  $L_A, L_B$  和耦合系数  $k$  由下列代数式给出

$$L_A = \frac{E_A}{\omega I_A}, I_B = 0; L_B = \frac{E_B}{\omega I_B}, I_A = 0; k = \frac{N_B I_B}{N_A I_A}; E_B = 0.$$

将结果写在答题纸的 1. a 栏内.

在 1. b 栏内画出电路图, 说明你是如何确定这些量的.

计算出  $L_A, L_B$  以及  $k$  的大小, 并写在答题纸的 1. c 栏内.

2. 如将次级线圈短路, 则初级线圈中的电流  $I_P$  将增加. 利用上面的各方程式, 推导出  $I_P$  的一个表达式, 用初级线圈电压、初级线圈自感系数和耦合系数表达出来, 写在 2. a 栏内. 测量  $I_P$  的值, 并将测量结果写在 2. b 栏内.

3. 线圈 A 和 B 可用两种不同的方式串联连接, 使它们产生的磁通相加或相减.

3.1 对于电流  $I$  在两个线圈中产生的磁通是相加的情形, 由所测量的数据求出串接线圈的自感系数  $L_{A+B}$ , 将结果写在答题纸的 3.1 栏内.

3.2 对于两线圈产生的磁通是相减的情形, 分别测量电压  $U_A$  和  $U_B$ , 将结果写在答题纸的 3.2. a 栏内; 将它们的比值写在 3.2. b 栏内. 另外导出用两个线圈的匝数以及它们的耦合系数表示的这个比的表达式, 写在答题纸的 3.2. c 栏内.

4. 用上面得到的结果, 证明线圈的自感系数正比于其匝数的平方, 将结果写在答题纸的 4 栏内.

5. 验证忽略初级线圈的电阻是合理的, 将你的论证用数学表达式写在答题纸的 5 栏内.

6. 将两个小纸片插在两个 U 形磁芯中间(如图 3-94), 会使线圈的电感大大减小. 已知安培环路定理和磁感应强度在磁芯-小纸片界面上的连续性, 由减小了的电感来确定该纸片材料的相对磁导率  $\mu$ .

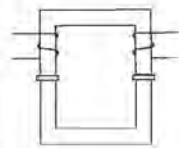


图 3-94 插有两片小纸的磁芯

假设纸的磁导率为  $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{s}^2/\text{C}^2$ , 每张纸厚为  $43 \mu\text{m}$ . 安培环路定理为

$$\oint \frac{1}{\mu} B dl = I_{\text{总}}. \quad \text{①}$$

其中  $I_{\text{总}}$  为穿过积分回路包围的截面的总电流. 请将你的  $\mu$  代数表达式写到答题纸的 6. a 栏中, 将其数值写到 6. b 栏内.

**【分析】** 这是一个综合题, 既有研究, 又有证明与测定. 它实际上是一个大题包含许多小题, 题目性质属电磁学实验范畴, 主要涉及电磁感应. 第一部分的内容研究涡流



引起的磁屏蔽,求磁场的衰减系数与频率的关系.第二部分研究磁通耦合的几种情况,证明自感系数与耦合系数的关系,与匝数的关系,测定磁芯的相对磁导率.

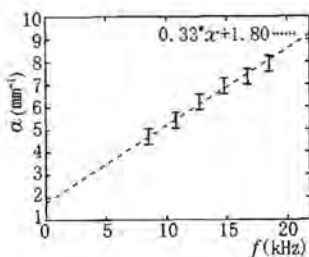
【解】 第1部分

1.  $R_A = 2.4 \Omega, R_B = 1.7 \Omega, R_{\text{pickup}} = 0.64 \Omega$ .

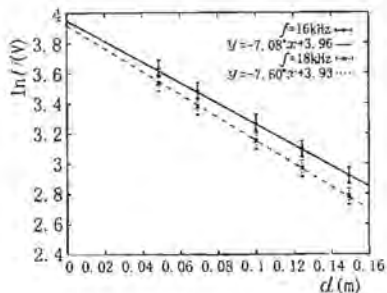
2.

$f$ (kHz)	8	10	12	14	16	18
$\alpha$ (mm <sup>-1</sup> )	4.2	5.2	5.9	6.6	7.1	7.6

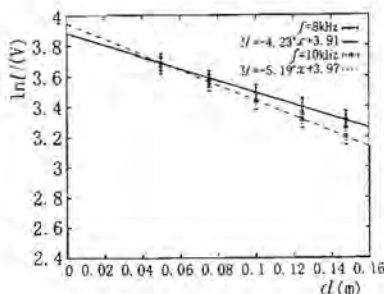
3.  $\alpha f$  图.



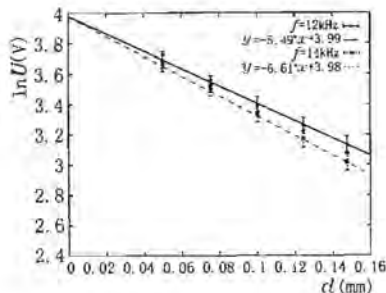
(a)



(b)



(c)



(d)

图 3-95

第2部分

1. a 从方程⑩得  $E_A = \omega c N_A^2 I_A - \omega c k N_A N_B I_B$ .

若  $I_B = 0$ , 则  $E_A = \omega c N_A^2 I_A$ .

从方程④, 我们有  $c N_A^2 = \frac{E_A}{\omega I_A} = L_A$ .

类似⑩式, 有  $E_B = \omega c N_B^2 I_B - \omega c k N_A N_B I_A$ .

若  $I_A = 0$ , 则有  $c N_B^2 = \frac{E_B}{\omega I_B} = L_B$ .

若  $E_B = 0$ , 则有  $\omega c N_B^2 I_B = \omega c k N_A N_B I_A$ .



即

$$k = \frac{N_B I_B}{N_A I_A}$$

1. b 如图 3-96 所示.

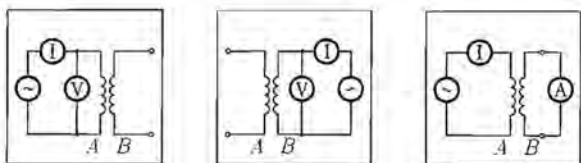


图 3-96

1. c  $L_A = (34 \pm 3) \text{ mH}, L_B = (15 \pm 1) \text{ mH}, k = 0.95 \pm 0.09$ .

2. a  $I_P = I_A = \frac{E_A}{\omega L_A (1 - k^2)} = 33 \text{ mA} \pm 6 \text{ mA}, U_B = 0$ .

2. b  $I_P = (35 \pm 3) \text{ mA}, E_A = 7.2 \text{ V}$ .

3. 1  $L_{A+B} = (99 \pm 8) \text{ mH}$ .

3. 2 a  $U_A = (15.6 \pm 0.6) \text{ V}, U_B = (8.4 \pm 0.3) \text{ V}$ .

3. 2 b  $\frac{U_A}{U_B} = 1.86 \pm 0.12$ .

3. 2 c  $\frac{U_A}{U_B} = \left| \frac{N_A^2 - k N_A N_B}{N_B^2 - k N_A N_B} \right| = 1.94$ .

4.  $\frac{L}{N^2} = c, \frac{L_A}{N_A^2} N_A^2 = 1.5 \times 10^{-6} \text{ H}$ .

$$\frac{L_B}{N_B^2} = 1.5 \times 10^{-6} \text{ H}, \frac{L_{A+B}}{(N_A + N_B)^2} = 1.5 \times 10^{-6} \text{ H}$$

5.  $R_A = 2.4 \Omega \ll (\omega \cdot L_A)_{\text{min}} \cdot (1 - k^2) = 100 \Omega$ .

6. a  $\mu_r = \frac{l_f}{d} \left( \frac{U_1 I_2}{I_1 U_2} - 1 \right) = \frac{l_f}{d} \left( \frac{l_1}{L_2} - 1 \right), l_f$  为磁路的长度.

6. b  $\mu_r = 2300 \pm 400$ .

# 附录

## 物理常数和普适数据表

- 真空中的光速:  $c=299\,792\,458\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$   
真空磁导率:  $\mu_0=4\pi\cdot 10^{-7}\text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$   
真空介电常数:  $\epsilon_0=8.854\,187\,8\text{ pF}\cdot\text{m}^{-1}$   
引力常数:  $G=6.672\,59\times 10^{-11}\text{ m}^3/(\text{kg}\cdot\text{s}^2)$   
气体常数:  $R=8.314\,510\text{ J}/(\text{mol}\cdot\text{K})$   
玻尔兹曼常数:  $k=1.380\,658\times 10^{-23}\text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$   
斯特藩常数(黑体辐射常数):  $\sigma=56.703\text{ nW}/(\text{m}^2\cdot\text{K}^4)$   
质子电荷:  $e=1.602\,177\,33\times 10^{-19}\text{ C}$   
电子质量:  $m_e=9.109\,389\,7\times 10^{-31}\text{ kg}$   
普朗克常数:  $h=6.626\,075\,5\times 10^{-34}\text{ J}\cdot\text{s}$   
摄氏温标基点:  $T_K=273.15\text{ K}$   
太阳质量:  $M_S=1.991\times 10^{30}\text{ kg}$   
地球质量:  $M_E=5.979\times 10^{24}\text{ kg}$   
地球平均半径:  $r_E=6.373\text{ Mm}$   
地球轨道长半轴:  $R_E=1.495\,7\times 10^{11}\text{ m}$   
恒星日长:  $d_s=86.164\,06\text{ ks}$   
年:  $y=31.558\,150\text{ Ms}$   
地球表面重力加速度标准值:  $g=9.806\,65\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$   
海平面大气压标准值:  $p_0=101\,325\text{ Pa}$   
15℃和标准大气压下空气对可见光的折射率:  $n_{\text{air}}=1.000\,277$   
太阳常数:  $S=1\,355\text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$   
木星质量:  $M=1.901\times 10^{27}\text{ kg}$   
木星赤道半径:  $R_B=69.8\text{ Mm}$   
木星轨道平均半径:  $R=7.783\times 10^{11}\text{ m}$   
木星日长:  $d_J=35.6\text{ ks}$   
木星年:  $y_J=374.32\text{ Ms}$   
 $\pi, 3.141\,592\,65$



# 全国中学生物理竞赛内容提要

(2005年1月修订,2006年实行)

**说明:**按照中国物理学会全国中学生物理竞赛委员会第9次全体会议的建議,由中国物理学会全国中学生物理竞赛委员会常务委员会根据《全国中学生物理竞赛章程》中关于命题原则的规定,结合我国目前中学生的实际情况,制定了《全国中学生物理竞赛内容提要》,作为今后物理竞赛预赛、复赛和决赛命题的依据。它包括理论基础、实验、其他方面等部分,1991年2月20日经全国中学生物理竞赛委员会常务委员会扩大会议讨论通过并开始试行,1991年9月11日在南宁由全国中学生物理竞赛委员会第10次全体会议正式通过,开始实施。

经2000年第19次竞委会原则同意,对《全国中学生物理竞赛内容提要》作适当的调整和补充。考虑到适当控制预赛试题难度的精神,提要中新补充的内容将用“※”符号标出,作为复赛题和决赛题增补的内容,预赛试题仍沿用原规定的内容提要,不增加修改补充后的内容。

2005年1月,常委会对《全国中学生物理竞赛内容提要》中理论基础部分作了少量修改和补充,修改后的《全国中学生物理竞赛内容提要》从2006年开始实行。

2005年,中国物理学会常务理事会对《全国中学生物理竞赛章程》进行了修订,依据修订后的章程,决定由全国中学生物理竞赛委员会常务委员会组编《全国中学生物理竞赛复赛实验指导书》,作为复赛实验考试题目的范围。

## 一、理论基础

### 力 学

#### 1. 运动学

参照系 质点运动的位移和路程、速度、加速度 相对速度

矢量和标量 矢量的合成和分解 ※矢量的标积和矢积

匀速及匀变速直线运动及其图象 运动的合成 抛体运动 圆周运动

刚体的平动和绕定轴的转动

#### 2. 牛顿运动定律 力学中常见的几种力

牛顿第一、二、三运动定律 惯性参照系的概念

摩擦力

弹性力 胡克定律

万有引力定律 均匀球壳对壳内和壳外质点的引力公式(不要求导出) 开普勒定律 行星和人造卫星运动

※惯性力的概念

#### 3. 物体的平衡

共点力作用下物体的平衡

力矩 刚体的平衡条件 重心

物体平衡的种类

4. 动量

冲量 动量 质点与质点组的动量定理 动量守恒定律

※质心 ※质心运动定理

反冲运动及火箭

5. ※冲量矩 ※角动量 ※质点和质点组的角动量定理(不引入转动惯量)

※角动量守恒定律

6. 机械能

功和功率

动能和动能定理

重力势能 引力势能 质点及均匀球壳壳内和壳外的引力势能公式(不要求

导出) 弹簧的弹性势能

功能原理 机械能守恒定律

碰撞 恢复系数

7. 流体静力学

静止流体中的压强

浮力

8. 振动

简谐运动 $[x=A\cos(\omega t+a)]$  振幅 频率和周期 相位

振动的图象

参考圆 振动的速度  $v=-A\omega\sin(\omega t+a)$

由动力学方程确定简谐运动的频率 简谐运动的能量

同方向同频率简谐运动的合成

阻尼振动 受迫振动和共振(定性了解)

9. 波和声

横波和纵波 波长、频率和波速的关系 波的图象

平面简谐波的表示式  $y=A\cos\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)$

波的干涉和衍射(定性) ※驻波

声波 声音的响度、音调和音品 声音的共鸣 乐音和噪声 ※多普勒效应

## 热 学

1. 分子动理论

原子和分子的量级

分子的热运动 布朗运动 温度的微观意义

分子力

分子的动能和分子间的势能 物体的内能



## 2. 热力学第一定律

热力学第一定律

## 3. ※热力学第二定律

※热力学第二定律 ※可逆过程与不可逆过程

## 4. 气体的性质

热力学温标

理想气体状态方程 普适气体恒量

理想气体状态方程的微观解释(定性)

理想气体的内能

理想气体的等容、等压、等温和绝热过程(不要求用微积分运算)

## 5. 液体的性质

液体分子运动的特点

表面张力系数

浸润现象和毛细现象(定性)

## 6. 固体的性质

晶体和非晶体 空间点阵

固体分子运动的特点

## 7. 物态变化

熔化和凝固 熔点 熔化热

蒸发和凝结 饱和气压 沸腾和沸点 汽化热 临界温度

固体的升华

空气的湿度和湿度计 露点

## 8. 热传递的方式

传导、对流和辐射

## 9. 热膨胀

热膨胀和膨胀系数

## 电 学

## 1. 静电场

库仑定律 电荷守恒定律

电场强度 电场线 点电荷的场强 场强叠加原理 均匀带电球壳壳内的场强和壳外的场强公式(不要求导出) 匀强电场

电场中的导体 静电屏蔽

电势和电势差 等势面 点电荷电场的电势公式(不要求导出) 电势叠加原理 均匀带电球壳壳内和壳外的电势公式(不要求导出)

电容 电容器的连接 平行板电容器的电容公式(不要求导出)

电容器充电后的电能

电介质的极化 介电常量



## 2. 稳恒电流

欧姆定律 电阻率和温度的关系

电功和电功率

电阻的串、并联

电动势 闭合电路的欧姆定律

一段含源电路的欧姆定律 ※基尔霍夫定律

电流表 电压表 欧姆表

惠斯通电桥 补偿电路

## 3. 物质的导电性

金属中的电流 欧姆定律的微观解释

液体中的电流 法拉第电解定律

气体中的电流 被激放电和自激放电(定性)

真空中的电流 示波器

半导体的导电特性 P型半导体和N型半导体

晶体二极管的单向导电性 三极管的放大作用(不求机理)

超导现象

## 4. 磁场

电流的磁场 磁感应强度 磁感线 匀强磁场 长直导线中的电流的磁场

安培力 洛伦兹力 电子荷质比的测定 质谱仪 回旋加速器

## 5. 电磁感应

法拉第电磁感应定律

楞次定律 ※感应电场(涡旋电场)

自感

互感和变压器

## 6. 交变电流

交流发电机原理 交变电流的最大值和有效值

纯电阻、纯电感、纯电容电路

平面镜成像 球面镜成像公式及作图法

薄透镜成像公式及作图法

眼睛 放大镜 显微镜 望远镜

## 2. 波动光学

光程

光的干涉和衍射 双缝干涉 单缝衍射

光谱和光谱分析 电磁波谱

## 近代物理

## 1. 光的本性

光电效应 爱因斯坦方程

光的波粒二象性 光子的能量与动量

## 2. 原子结构

卢瑟福实验 原子的核式结构

玻尔模型 用玻尔模型解释氢光谱 玻尔模型的局限性

原子的受激辐射 激光

## 3. 原子核

原子核的量级

天然放射现象 放射线的探测

质子的发现 中子的发现 原子核的组成

核反应方程

质能方程 裂变和聚变

“基本”粒子 ※夸克模型

4. ※不确定关系 ※实物粒子的波粒二象性

5. ※狭义相对论

爱因斯坦假设 时间和长度的相对论效应

相对论动量与能量  $p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}, E = mc^2$

整流、滤波和稳压

三相交流电及其连接法 感应电动机原理

7. 电磁振荡和电磁波

电磁振荡 振荡电路及振荡频率

电磁场和电磁波 电磁波的波速 赫兹实验

电磁波的发射和调制 电磁波的接收、调谐、检波

## 光 学

1. 几何光学

光的直进、反射、折射 全反射

光的色散 折射率与光速的关系

6. ※太阳系 银河系 宇宙和黑洞的初步知识

## 数学基础

1. 中学阶段全部初等数学(包括解析几何)

2. 矢量的合成和分解 极限、无限大和无限小的初步概念

3. 不求用微积分进行推导或运算

## 二、实 验

全国中学生物理竞赛委员会组织编写的《全国中学生物理竞赛实验指导书》中的34个实验是全国中学生物理竞赛实验考试内容的范围,这34个实验的名称是:



1. 实验误差
2. 气轨上研究瞬时速度
3. 杨氏模量
4. 用单摆测重力加速度
5. 气轨上研究碰撞过程中动量和能量变化
6. 测声速
7. 弦上驻波实验
8. 冰的熔化热
9. 线膨胀率
10. 液体比热容
11. 数字万用表的作用
12. 制流和分压电路
13. 测定直流电源的参数并研究其输出特性
14. 磁电式直流电表的改装
15. 用量程 200 mV 数字电压表组成多量程的电压表和电流表
16. 测非线性元件的伏安特性
17. 平衡电桥测电阻
18. 示波器的使用
19. 观测电容特性
20. 检测黑盒子中的电学元件(电阻, 电容, 电池, 二极管)
21. 测量温度传感器的温度特性
22. 测量热敏电阻的温度特性
23. 用霍尔效应测量磁场
24. 测量光敏电阻的光电特性(有、无光照时的伏安特性; 光电特性)
25. 研究光电池的光电特性
26. 测量发光二极管的光电特性(用  $eU_m = \frac{hc}{\lambda}$  估算发光波长)
27. 研究亥姆霍兹线圈轴线磁场的分布
28. 测玻璃的折射率
29. 测量薄透镜的焦距
30. 望远镜和显微镜
31. 光的干涉现象
32. 光的夫琅禾费衍射
33. 分光计的使用与极限法测折射率
34. 光谱的观测

各省级竞赛委员会根据本省的实际从《全国中学生物理竞赛实验指导书》的 34 个实验中确定并公布不少于 20 个实验作为本省物理竞赛复赛实验考试的内



容范围,复赛实验的试题从公布的实验中选定,具体做法见“全国中学生物理竞赛复赛实验考试、命题的若干规定”。

全国中学生物理竞赛决赛实验以本内容提要中的“理论基础”和《全国中学生物理竞赛实验指导书》作为命题的基础。

### 三、其他方面

物理竞赛的内容有一部分有较大的开阔性,主要包括以下三方面:

1. 物理知识在各方面的应用. 对自然界、生产和日常生活中一些物理现象的解释.
2. 近代物理的一些重大成果和现代的一些重大信息.
3. 一些有重要贡献的物理学家的姓名和他们的主要贡献.

## 诺贝尔物理学奖简介(或大事年表)

获奖年代	获奖者姓名	国籍	获奖原因
1901	W. C. 伦琴	德	发现伦琴射线(X 射线)
1902	H. A. 洛伦兹	荷兰	磁场对辐射现象的影响的研究
	P. 塞曼		
1903	H. A. 贝克勒尔	法	发现天然铀元素的放射性,放射性物质的研究,发现放射性元素钋与镭并发现钷也有放射性
	P. 居里		
	M. 居里		
1904	L. 瑞利	英	在气体密度的研究中发现氩
1905	P. 莱纳德	德	阴极射线的研究
1906	J. J. 汤姆孙	英	通过气体电传导性的研究,测出电子的电荷与质量的比值
1907	A. A. 迈克耳孙	美	创造精密的光学仪器和用以进行光谱学、度量学的研究,精确测出光速
1908	G. 李普曼	法	发明应用干涉现象的天然彩色摄影技术
1909	G. 马可尼	意	发明无线电报及其对发展无线电通讯的贡献
	C. F. 布劳恩	德	
1910	J. D. 范德瓦耳斯	荷兰	对气体和液体状态方程的研究
1911	W. 维恩	德	热辐射定律的导出和研究
1912	N. G. 达伦	瑞典	发明点燃航标灯和浮标灯的瓦斯自动调节器
1913	H. 卡末林·翁纳斯	荷兰	在低温下研究物质的性质并制成液态氦



1914	M. V. 劳厄	德	发现伦琴射线通过晶体时的衍射现象,既用于决定 X 射线的波长又证明了晶体的原子点阵结构
1915	W. H. 布拉格	英	用伦琴射线分析晶体结构
	W. L. 布拉格		
1917	C. G. 巴克拉	英	发现标识元素的次级伦琴辐射
1918	M. V. 普朗克	德	研究辐射的量子理论,发现基本量子,提出能量量子化的假设,解释了电磁辐射的经验定律
1919	J. 斯塔克	德	发现阴极射线中的多普勒效应和原子光谱线在电场中的分裂
1920	C. E. 纪尧姆	法	发现镍钢合金的反常性以及 在精密仪器中的应用
1921	阿尔伯特·爱因斯坦	美籍德国人	对理论物理方面的贡献,特别是阐明光电效应的定律
1922	尼尔斯·H. D. 玻尔	丹麦	研究原子结构和原子辐射,提出他的原子结构模型
1923	罗伯特·安德罗·密立根	美	研究元电荷和光电效应,通过油滴实验证明电荷有最小单位
1924	卡尔·M. G. 西格班	瑞典	伦琴射线光谱学方面的发现和研究
1925	詹姆斯·弗兰克	美籍德国人	发现电子撞击原子时出现的规律性
	占斯塔夫·赫兹	德	
1926	让·B. 佩兰	法	研究物质分裂结构,并发现沉积作用的平衡

1927	阿瑟·荷里·康普顿	美	发现康普顿效应
	查里斯·T. R. 威耳逊	英	发明用云雾室观察带电粒子,使带电粒子的轨迹变为可见
1928	欧文·威廉斯·理查森	英	热离子现象的研究,并发现理查森定律
1929	路易·唯克托·德布罗意	法	电子波动性的理论研究
1930	钱德拉赛哈拉·文迦达·拉曼	印度	研究光的散射并发现拉曼效应
1932	威尔纳·海森伯	德	创立量子力学,并导致氢的同素异形的发现
1933	欧文·薛定谔	奥地利	量子力学的广泛发展
	保罗·A. M. 狄拉克	英	量子力学的广泛发展,并预言正电子的存在
1935	詹姆斯·查德威克	英	发现中子
1936	卡尔·戴维·安德森	美	发现正电子
	维克托·弗朗西斯·赫斯	美	发现宇宙射线
1937	克林顿·约瑟夫·安德森	美	通过实验发现晶体对电子的衍射作用
	乔治·佩杰特·汤姆孙	英	通过实验发现受电子照射的晶体中的干涉现象
1938	恩里科·费米	意大利	发现新放射性元素和慢中子引起的核反应
1939	欧内斯特·O. 劳伦斯	美	研制回旋加速器以及利用它所取得的成果,特别是有关人工放射性元素的研究
1943	O. 施特恩	美	测定质子磁矩
1944	T. T. 拉比	美	用共振方法测量原子核的磁性
1945	W. 泡利	奥	发现泡利不相容原理



1946	P. W. 布里奇曼	美	研制高压装置并创立了高压物理
1947	E. V. 阿普顿	英	发现电离层中反射无线电波的阿普顿层
1948	P. M. S. 布莱克特	英	改进威尔逊云雾室及在核物理和宇宙线方面的发现
1949	汤川秀树	日	用数学方法预见介子的存在
1950	C. F. 鲍威尔	英	研究核过程的摄影法并发现介子
1951	J. D. 科克罗夫特	英	首先利用人工所加速的粒子开展原子核蜕变的研究
	E. T. S. 瓦尔顿	爱尔兰	
1952	E. M. 珀塞尔	美	核磁精密测量新方法的发展及有关的发现
	F. 布洛赫		
1953	F. 策尼克	荷兰	论证相衬法,特别是研制相差显微镜
1954	M. 玻恩	德	对量子力学的基础研究,特别是量子力学中波函数的统计解释
	W. W. G. 博特		符合法的提出及分析宇宙辐射
1955	P. 库什	美	精密测定电子磁矩
	W. E. 兰姆		发现氢光谱的精细结构
1956	W. 肖克利	美	研究半导体并发明晶体管
	W. H. 布拉顿		
	J. 巴丁		
1957	李政道	美籍华人	否定弱相互作用下宇称守恒定律,使基本粒子研究获重大发现
	杨振宁		

1958	P. A. 切连科夫	前苏联	发现并解释切连科夫效应(高速带电粒子在透明物质中传递时放出蓝光的现象)
	I. M. 弗兰克		
	I. Y. 塔姆		
1959	E. 赛格雷	美	发现反质子
	O. 张伯伦		
1960	D. A. 格拉泽	美	发明气泡室
1961	R. 霍夫斯塔特	美	由高能电子散射研究原子核的结构
	R. L. 穆斯堡尔	德	研究 $\gamma$ 射线的无反冲共振吸收和发现穆斯堡尔效应
1962	L. D. 朗道	前苏联	研究凝聚态物质的理论,特别是液氮的研究
1963	E. P. 维格纳	美	原子核和基本粒子理论的研究,特别是发现和应用对称性基本原理方面的贡献
	M. G. 迈耶	美	发现原子核结构壳层模型理论,成功地解释原子核的长周期和其他幻数性质的问题
	J. H. D. 延森	德	
1964	C. H. 汤斯	美	在量子电子学领域中的基础研究导致了根据微波激射器和激光器的原理构成振荡器和放大器
	N. G. 巴塞夫	前苏联	用于产生激光光束的振荡器和放大器的研究工作
	A. M. 普洛霍罗夫	前苏联	在量子电子学中的研究工作导致微波激射器和激光器的制作



1965	R. P. 费恩曼	美	量子电动力学的研究,包括对基本粒子物理学的意义深远的研究
	J. S. 施温格尔	美	
	朝永振一郎	日	
1966	A. 卡斯特勒	法	发现并发展光学方法以研究原子的能级的贡献
1967	H. A. 贝特	美	恒星能量的产生方面的理论
1968	L. W. 阿尔瓦雷斯	美	对基本粒子物理学的决定性的贡献,特别是通过发展氦气泡室和数据分析技术而发现许多共振态
1969	M. 盖尔曼	美	关于基本粒子的分类和相互作用的发现,提出“夸克”粒子理论
1970	H. O. G. 阿尔文	瑞典	磁流体力学的基础研究和发现以及在等离子体物理中的广泛应用
	L. E. F. 奈尔	法	反铁磁性和铁氧体磁性的基本研究和发现,这在固体物理中具有重要的应用
1971	D. 伽博	英	全息摄影术的发明及发展
1972	J. 巴丁	美	提出所谓 BCS 理论的超导性理论
	L. N. 库珀		
	J. R. 施里弗		
1973	B. D. 约瑟夫森	英	关于固体中隧道现象的发现,从理论上预言了超导电流能够通过隧道阻挡层(即约瑟夫森效应)
	江崎玲於奈	日	从实验上发现半导体中的隧道效应
	T. 贾埃弗	美	从实验上发现超导体中的隧道效应



1974	M. 赖尔	英	研究射电天文学,尤其是孔径综合技术方面的创造与发展
	A. 休伊什	英	射电天文学方面的先驱性研究,在发现脉冲星方面起决定性角色
1975	A. N. 玻尔	丹	发现原子核中集体运动与粒子运动之间的联系,并在此基础上发展了原子核结构理论
	B. R. 莫特松	丹	原子核内部结构的研究工作
	L. J. 雷恩沃特	美	
1976	B. 里克特	美	分别独立地发现了新粒子 $J/\psi$ , 其质量约为质子质量的三倍,寿命比共振态的寿命长上万倍
	丁肇中	美籍华人	
1977	P. W. 安德森	美	对晶态与非晶态固体的电子结构作了基本的理论研究,提出“固态”物理理论
	J. H. 范弗莱克	美	对磁性与不规则系统的电子结构作了基础研究
	N. F. 莫特	英	
1978	A. A. 彭齐亚斯	美	3K 宇宙微波背景的发现
	R. W. 威尔逊		
	P. L. 卡皮查	前苏联	建成液化氮的新装置,证实氮亚超流低温物理学
1979	S. L. 格拉肖	美	建立弱电统一理论,特别是预言弱电流的存在
	S. 温伯格		
	A. L. 萨拉姆	巴基斯坦	
1980	J. W. 克罗宁	美	CP 不对称性的发现
	V. L. 菲奇		
1981	N. 布洛姆伯根	美	激光光谱学与非线性光学的研究
	A. L. 肖洛		
	K. M. 西格班	瑞典	高分辨电子能谱的研究



1982	K. 威尔逊	美	关于相变的临界现象
1983	S. 钱德拉塞卡	美	恒星结构和演化方面的理论研究
	W. 福勒	美	宇宙间化学元素形成方面的核反应的理论研究和实验
1984	C. 鲁比亚	意	由于他们的努力导致了中间玻色子的发现
	S. 范德梅尔	荷兰	
1985	K. V. 克利青	德	发现量子霍尔效应
1986	E. 鲁能卡	德	电子物理领域的基础研究工作,设计出世界上第一架电子显微镜
	G. 宾尼	瑞士	设计出扫描式隧道效应显微镜
	H. 罗雷尔		
1987	J. G. 柏诺兹	美	发现新的超导材料
	K. A. 米勒		
1988	L. M. 莱德曼	美	从事中微子束工作及通过发现 $\mu$ 介子、中微子从而对轻粒子对称结构进行论证
	M. 施瓦茨	美	
	J. 施泰因贝格	英	
1989	N. F. 拉姆齐	美	发明原子铯钟及提出微波激射技术
	W. 保罗	德	创造捕捉原子的方法以达到能极其精确地研究一个中子或离子
	H. O. 德莫尔特	美	
1990	J. 弗里德曼	美	发现夸克存在的第一个实验证明
	H. 肯德尔	美	
	R. 泰勒	加	
1991	P. G. 德让纳	法	液晶基础研究
1992	J. 夏帕克	法	对粒子探测器特别是多丝正比室的发明和发展

1993	J. 泰勒	美	发现一对脉冲星, 质量为两个太阳的质量, 而直径仅 10 km ~ 30 km, 故引力场极强, 为引力波的存在提供了间接证据
	L. 赫尔斯		
1994	C. 沙尔	美	发展中子散射技术
	B. 布罗克豪斯	加	
1995	M. L. 佩尔	美	佩尔及其合作者发现了 $\tau$ 轻子, 莱因斯与 C. 考温首次成功地观察到电子反中微子. 他们在轻子研究方面的先驱性工作, 为建立轻子-夸克层次上的物质结构图象作出了重大贡献
	F. 莱因斯		
1996	奥谢罗夫	美	发现氦 3 的超流
	D. M. 李	美	
	R. C. 理查森	美	
1997	W. D. 菲利普斯	美	原子冷却和陷阱方面的研究
	朱棣文	美籍华人	
	科昂·塔努基	法	
1998	崔琦	美籍华人	分数量子霍尔效应
	劳克林	美	
	斯特默	德	
1999	费尔特曼	荷兰	提出关于亚原子粒子结构和运动的理论
	特霍夫特	荷兰	
2000	基尔比	美	信息技术方面的基础工作
	阿尔费罗夫	俄罗斯	
	克勒默	美	
2001	沃尔夫冈·克特勒	德	玻色-爱因斯坦冷凝物的成功发现
	埃里克·康泰尔	美	
	卡尔·维曼	美	



2002	雷蒙德·戴维斯	美	探测中微子和发现宇宙 X 射线源方面的成就
	小柴昌俊	日	
	卡尔多·贾科尼	美	
2003	阿列克谢·阿布里科索夫	俄罗斯(美)	在超导体和超流体理论上作出了开创性贡献
	维塔利·金茨堡	俄罗斯	
	安东尼·莱格特	英国(美)	
2004	戴维·格罗斯	美	发现了粒子物理强相互作用理论中的渐近自由现象
	戴维·波利策	美	
	弗兰克·维尔切克	美	
2005	罗依·格劳伯	美	在激光的精密光谱学和光学相干的量子理论方面作出了杰出贡献
	约翰·霍尔	美	
	奥多尔·亨施	德	
2006	约翰·马瑟	美	发现宇宙背景辐射的黑体形式和各向异性,从而将宇宙学带入“精确研究”时代
	乔治·斯穆特	美	
2007	阿尔贝·费尔	法	发现“巨磁电阻”效应
	彼得·格林贝格尔	德	
2008	南部阳一郎	美	发现亚原子物理学中自发对称性破缺机制及有关对称性破缺的起源
	小林诚	日	
	益川敏英	日	



## 关于全国中学生物理竞赛 实验考试、命题的若干规定

(2005年)

为了使更多的地区、更多的优秀学生的物理实验水平和素养有较大的提高,为了让更多的优秀学生有机会参加实验培训,为了使复赛实验考试更加公正、公平,增加透明度,特制定以下规定。各省(自治区、直辖市,下同)竞赛委员会必须严格按照本规定组织本省有关复赛实验的活动。

一、全国中学生物理竞赛委员会(以下简称常委会)组织编写的《全国中学生物理竞赛实验指导书》(以下简称指导书)中的34个实验是全国中学生物理竞赛复赛实验考试的内容范围,各省竞赛委员会会同本省有关专家和高等学校结合本省实际情况,从这34个实验中确定全部或部分实验,作为本省复赛实验考试的范围,确定的实验数不得少于20个,其中必须包括实验一“实验误差”、实验十一“学会使用数字万用表”、实验十二“制流和分压电路”、实验十八“学会使用示波器”这四个基本实验,有的实验中含有“设计实验”,这部分实验要求属于决赛的实验考试要求,复赛实验考试不涉及这部分实验,本省确定的复赛实验考试内容范围必须向本省准备参加物理竞赛的全体考生公布,公布的时间不得晚于复赛考试前六个月,各省的复赛实验试题必须从本省公布的实验中选定。

二、各省的竞赛委员会要在省物理学会的领导下与本省有关高校协商设立物理竞赛实验培训点和组织本省的实验培训工作,培训点可设在省、市两级的高等学校,培训点要根据《指导书》的要求对学生进行培训,着眼于提高学生的实验水平和实验素养。

三、各省要建立本省物理竞赛复赛实验命题小组,命题小组由2~4位物理实验业务水平较高,教学经验比较丰富,作风正派的高等学校教师组成,命题小组的成员在当年不得参加复赛前的任何物理竞赛实验的辅导和培训工作,并且他们的身份是保密的,省竞赛委员会要与命题小组一起研究确定本省复赛实验考场所在

验考题的内容,各省都必须公布的四个“基本实验”不单独做为实验考试题目,这四个基本实验内容的考查将体现在其他有关实验之中。

2. 根据选定作为试题内容的两个实验和《指导书》对这两个实验的要求,编制本省复赛实验考试的试卷,试卷一般应包括以下内容:

(1)实验名称,作为考题的实验名称可以与《指导书》中的该实验名称相同,亦可在行文上作些修改,使之符合试题的语气。

(2)实验要求和实验内容。

(3)实验所用的器材名称和必要的仪器描述。

复赛实验考试的要求,实验原理、实验内容,所用的器材都不得超出《指导书》中关于该实验的规定。

3. 制定复赛实验考试评分标准。

复赛实验根据考生的书面答卷进行评分,要求考生写在卷面的内容应在“实验要求和考试内容”中向考生交待清楚。

4. 准备实验器材、保证器材的完好性能。

5. 组织阅卷、评分、查分工作。

全国中学生物理竞赛委员会

2005年12月22日

## 指定参考书

- 1 《全国中学生物理竞赛专辑》  
全国中学生物理竞赛办公室编 北京教育出版社出版
- 2 《高中物理学》共四册  
沈克琦主编 北京出版社出版
- 3 《全国中学生物理竞赛实验指导书》  
全国中学生物理竞赛常务委员会主编 北京大学出版社出版

## 参考资料

的高校,确定为实验考场的高校,应具有能解决本省公布的所有实验所需的器材和实验室条件.为了有利于考试的公平性,被指定为实验考场的高校在复赛实验考试前最好不要安排与物理竞赛有关的实验培训任务.如果省竞赛委员会因这种或那种原因难以做到上述要求,而对考场所在的高校,在复赛实验考试前也安排了物理竞赛实验培训任务,则应作出相应的细致规定,防止因考场和培训设在同一所高校而可能带来的某些不良影响,以确保实验考试的公正与公平.请各省竞赛委员会结合本省的实际情况自己决定.各省公布的复赛实验考试内容的范围、确定为复赛实验考场的高校,都要报全国中学生物理竞赛办公室备案.

#### 四、复赛实验命题小组的主要任务

1. 从本省公布的“复赛实验考试内容范围”中选定两个实验作为本省复赛实

# 全国中学生物理竞赛章程

(中国物理学会常务理事会 1991 年 2 月 12 日制定,  
2004 年 11 月 30 日修订)

## 第一章 总则

**第一条** 全国中学生物理竞赛(对外可以称中国物理奥林匹克,英文名为 Chinese Physics Olympiad,缩写为 CPhO)是群众性的课外学科竞赛活动. 这项活动由中国科学技术协会主管,中国物理学会主办,并得到国家教育部的批准.

竞赛的目的是激发学生学习物理的兴趣和主动性,促使他们改进学习方法,增强学习能力;帮助学校开展多样化的物理课外活动,活跃学习空气;发现具有突出才能的青少年,以便更好地对他们进行培养.

**第二条** 全国中学生物理竞赛要贯彻“教育要面向现代化、面向世界、面向未来”的精神. 竞赛内容的深度和广度可以比中学物理教学大纲和教材有所提高和扩展.

**第三条** 参加全国中学生物理竞赛者主要是对物理学习有兴趣并学有余力的在校普通高中学生. 竞赛应坚持学生自愿参加的原则. 竞赛活动主要应在课余时间进行,不要搞层层选拔,不要影响学校正常的教学秩序.

**第四条** 学生参加竞赛主要依靠学生平时的课内外学习和个人努力. 学校和教师不要为了准备参加竞赛而临时突击,不要组织“集训队”或搞“题海战术”,以免影响学生的正常学习和身体健康. 学生在物理竞赛中的成绩只反映学生个人在这次活动中所表现出来的水平,不应当以此来衡量和评价学校的工作和教师的教学水平.

## 第二章 组织领导

**第五条** 全国中学生物理竞赛由中国物理学会主办. 中国物理学会常务理事会制定《全国中学生物理竞赛章程》;设立全国中学生物理竞赛委员会(简称全国竞委会),统一领导全国中学生物理竞赛活动. 全国中学生物理竞赛委员会由主任一人、副主任和委员若干人组成. 主任和副主任由中国物理学会常务理事会聘任,组成全国中学生物理竞赛委员会常务委员会(简称常委会). 全国中学生物理竞赛委员会可设名誉主任,由中国物理学会常务理事会聘任.

全国竞委会委员任期一年,产生办法如下:

1. 每省(自治区、直辖市)物理学会各委派委员 1 人;
2. 承办本届或下届决赛的省(自治区、直辖市)物理学会各委派 3 人;
3. 由常委会根据需要聘请若干人任特邀委员.

**第六条** 常委会在中国物理学会常务理事会领导下主持全国竞委会工作;制



定有关竞赛工作的各项实施细则。

全国竞委会在决赛期间召开全体会议,研究和讨论与本届和下届竞赛有关事宜,交流组织竞赛活动的经验,提出意见和建议;审议通过决赛获奖学生名单。

全国竞委会委员在任期内负责常委会和本省(自治区、直辖市)竞赛委员会工作上的联系。

**第七条** 常委会下设全国中学生物理竞赛命题组(简称命题组)和全国中学生物理竞赛办公室(简称办公室)等工作机构。

命题组成员由委员会聘请专家担任,命题组负责预赛、复赛理论试题及决赛的理论、实验试题的命题工作。

办公室负责处理有关竞赛的日常事务。

**第八条** 每年承办决赛的省(自治区、直辖市)物理学会与有关方面协商组成该届全国中学生物理竞赛组织委员会(简称组委会),组委会负责决赛期间各项活动的筹备与组织工作以及命题会议的会务工作。

组委会工作接受常委会指导。

**第九条** 各省(自治区、直辖市)物理学会与各有关方面协商组成省(自治区、直辖市)中学生物理竞赛委员会(简称地方竞委会),地方竞委会要按照《全国中学生物理竞赛章程》和常委会制定的有关竞赛工作的各项实施细则,负责组织和领导本省(自治区、直辖市)有关竞赛的各项活动。

地方竞委会的工作受全国竞委会的指导和监督。

### 第三章 竞赛程序

**第十条** 全国中学生物理竞赛每年举行一次,包括预赛、复赛和决赛。在校高中生可向学校报名,经学校同意,由学校到地方竞委会指定的地点报名。凡报名参加全国中学生物理竞赛的学生均在地方竞委会指定的地点参加预赛。预赛由全国中学生物理竞赛命题组统一命题和制定评分标准,办公室统一制卷。各地方竞委会组织赛事和评定成绩。预赛满分为200分,竞赛时间为3小时。地方竞委会不得组织其他考试来确定学生参加预赛的资格。

**第十一条** 复赛包括理论和实验两部分。理论题由全国中学生物理竞赛命题组统一命题和制定评分标准,办公室统一制卷。理论考试满分为160分,时间为3小时。各地方竞委会组织赛事和评定成绩。复赛实验由地方竞委会命题和评定成绩,满分为40分,实验时间为3小时。复赛实验的日期、地点和组织办法由各地方竞委会根据实际情况自行决定。

参加复赛的学生由地方竞委会根据预赛成绩确定。参加复赛理论考试的人数不得少于本赛区一等奖名额的5倍。参加复赛实验考试人数不得少于本赛区一等奖名额的1.2倍。

**第十二条** 各地方竞委会根据学生复赛的总成绩(理论考试成绩和实验考试成绩之和)择优推荐3名学生参加决赛。对于在上届决赛中成绩较好的省(自治区、





直辖市)给予奖励名额,凡有学生获一等奖者,一律奖励1名,在当年举行的国际物理奥林匹克竞赛中获金、银、铜奖的学生所在省(自治区、直辖市)每有1名学生获奖,就奖励1名。

承办决赛的省(自治区、直辖市)参加决赛的名额可增加3名。

若参加决赛的最后一名名额有两名以上的学生总成绩相同,则地方竞赛委员会根据他们的理论成绩高低择优确定1名;若理论成绩最高的学生有两名以上也相同,则地方竞赛委员会可对理论成绩并列最高的学生以笔试的形式进行加试,选取成绩最好的1名。

决赛由全国中学生物理竞赛命题组和制定评分标准,决赛包括理论和实验两部分,竞赛时间各3小时,理论满分为140分,实验满分为60分,由组委会聘请高校教师阅卷评分。

由常委会聘请专家组成评奖组,由评奖组审核学生决赛成绩,提出获奖名单,最后由全国竞赛委员会审议通过。

## 第四章 命题原则

第十三条 竞赛内容要从我国目前高中学生的实际情况出发,但不拘泥于现行的教学大纲和教材,常委会要根据此原则编写《全国中学生物理竞赛内容提要》和《全国中学生物理竞赛复赛实验指导书》。

第十四条 预赛、复赛和决赛理论命题均以《全国中学生物理竞赛内容提要》为依据,复赛实验题目从《全国中学生物理竞赛复赛实验指导书》中选定,决赛实验命题以《全国中学生物理竞赛内容提要》和《全国中学生物理竞赛复赛实验指导书》为基础。

## 第五章 奖励办法

第十五条 全国中学生物理竞赛只评选个人奖,不搞省、地、市、县或学校之间评比。

根据决赛成绩和参加决赛人数,每届评选出决赛一等奖、二等奖和三等奖。一

成绩最高的学生有两名以上也相同,则地方竞赛委员会可对理论成绩并列最高的学生以笔试的形式进行加试,选取成绩最好的1名,赛区二、三等奖的名额由各省(自治区、直辖市)物理学会确定。

对获奖学生的奖励要有利于学生的健康成长。

第十七条 对在决赛中获奖和获赛区一、二等奖的学生的指导教师,由各地方竞赛委员会确定名单,以全国竞赛委员会名义给予表彰,发给荣誉证书。

## 第六章 守则和纪律、监督、惩罚

第十八条 关于竞赛守则和纪律、监督和惩罚,按中国科协颁布的有关条例中的规定执行。

## 第七章 经费

第十九条 全国中学生物理竞赛所需经费应根据中国科协的规定主要通过各种途径自筹,但必须严格遵守国家的各项法律法规。

第二十条 学生参加预赛、复赛应缴纳报名费和试卷费,报名费收入全部由地方竞赛委员会留用,试卷费上交全国竞赛委员会办公室,参加决赛的学生要交纳决赛参赛费,作为全国竞赛委员会和组委会进行与决赛有关的部分经费。

学生参加竞赛所需食宿、交通费用原则上由学生自理,对经济有困难的学生由地方竞赛委员会与有关方面协商给予补助。

第二十一条 决赛活动所需经费由组委会负责筹措,全国竞赛委员会给予适当补助。

第二十二条 经费开支应贯彻勤俭节约的原则,向学生收取的费用应根据竞赛成本核定,不以赢利为目的。

## 第八章 附则

第二十三条 本章程由中国物理学会常务理事会议制定,本章程的解释权属中国物理学会常务理事会。

等奖和二等奖人数各占决赛人数的 $1/6$ 和 $1/3$ 。若一(或二)等奖最后一个名额有两名或两名以上的学生总成绩相同,则都评为一(或二)等奖。由全国竞委会给予奖励,在举行决赛的城市召开授奖大会,颁发全国中学生物理竞赛获奖证书。

**第十六条** 对于在预赛和复赛中成绩优秀的学生,全国竞委会设立赛区一、二、三等奖,由地方竞委会按学生成绩进行评定。赛区一等奖的评定以复赛总成绩为准。赛区二等奖的评定以复赛理论成绩为准。赛区三等奖的评定标准由地方竞委会根据学生成绩和当地实际情况决定。赛区一、二、三等奖获奖者均颁发相应的获奖证书。

赛区一等奖的名额由常委会决定。若赛区一等奖最后两个名额有两名以上的学生总成绩相同,则地方竞委会应根据他们的理论成绩高低择优确定一名;若理论

## 第 1~25 届全国中学生物理竞赛基本情况

届次	预 赛		决 赛		
	时间	参赛人数	时间	地点	参赛人数
1	1984. 11. 18	43 079	1985. 2. 26~3. 2	北京	76
2	1985. 1. 26	52 925	1986. 4. 1~4. 5	上海	104
3	1986. 11. 16	58 766	1987. 2. 22~2. 25	天津	105
4	1987. 10. 25	57 523	1988. 1. 6~1. 10	兰州	101
5	1988. 10. 23	55 855	1989. 1. 6~1. 10	广州	106
6	1989. 10. 5	53 096	1989. 12. 10~12. 14	长春	127
7	1990. 10. 21	54 393	1990. 12. 23~12. 27	福州	105
8	1991. 6. 30	73 806	1991. 9. 8~9. 13	桂林、南宁	104
9	1992. 9. 6	60 617	1992. 10. 12~10. 15	合肥	101
10	1993. 9. 5	46 843	1993. 10. 8~10. 11	长沙	105
11	1994. 9. 4	65 146	1994. 10. 9~10. 12	西安	109
12	1995. 9. 3	55 867	1995. 10. 8~10. 11	太原	112
13	1996. 9. 8	86 173	1996. 10. 19~10. 22	杭州	114
14	1997. 9. 8	90 067	1997. 10. 18~10. 22	南昌	118
15	1998. 9. 6	134 599	1998. 10. 21~10. 25	大庆	121
16	1999. 9. 5	169 282	1999. 10. 16~10. 21	南京	126
17	2000. 9. 3	225 683	2000. 10. 21~10. 25	武汉	143
18	2001. 9. 9	267 363	2001. 10. 20	海口	145
19	2002. 9. 8	322 043	2002. 10. 19~10. 23	郑州	146
20	2003. 9. 7	359 835	2003. 10. 18~10. 22	济南	170
21	2004. 9. 5	328 134	2004. 10. 16~10. 20	重庆	173
22	2005. 9. 4	363 139	2005. 10. 15~10. 19	沈阳	167
23	2006. 9. 2	426 673	2006. 11. 4~11. 9	深圳	173
24	2007. 9. 2	411 350	2007. 11. 3~11. 8	宁波	177
25	2008. 9. 7	452 967	2008. 10. 18~10. 23	北京	210
	累计	4 315 224			3 238



## 我国参加国际物理奥林匹克竞赛情况

届次	时间	地点	我国参赛学生姓名	我国获奖牌数				
				金	银	铜	表扬	合计
17	1986	英国 伦敦	林晨、卫星、张明		1	1	1	3
18	1987	德国 耶拿	陈恂、黎锦晖、唐鹏飞、 吴爱华、张燕平		2	3		5
19	1988	奥地利 伊施尔	陈岩松、徐剑波、陈丰、 丁爱东、陈建	1	2	1	1	5
20	1989	波兰 华沙	燕京、毛甬、邱东昱、葛宁、 林晓帆		4	1		5
21	1990	荷兰 格罗宁根	吴明扬、周纲、杨巍、 陈伯友、段志勇	2	1	2		5
22	1991	古巴 哈瓦那	王泰然、任宇翔、宣佩琦、 夏磊、吕强	5				5
23	1992	芬兰 赫尔辛基	陈画、李翌、石长青、 张霖涛、罗卫东	5				5
24	1993	美国 威廉斯堡	张俊安、李林波、贾占峰、 韦韬、黄稚宁	2	2	1		5
25	1994	中国 北京	杨亮、韩岩、田涛、饶京翔、 黄英	4	1			5
26	1995	澳大利亚 堪培拉	淤海涛、毛蔚(女)、谢小林、 倪彬、蒋志	5				5
27	1996	挪威 奥斯陆	刘雨润、张蕊(女)、徐开闻、 陈汇钢、倪征	5				5



届次	时间	地点	我国参赛学生姓名	我国获奖牌数				
				金	银	铜	表扬	合计
28	1997	加拿大 萨德伯里	赖柯吉、王晨扬、连乔、 王新元、倪欣来	3	2			5
29	1998	冰岛 雷克亚未克	邓志峰、陈宇翱、刘媛(女)、 吴欣安、李啸峰	5				5
30	1999	意大利 帕多瓦	蒋良、季焘、段雪峰、贾旬、 张志鹏	2	3			5
31	2000	英国 莱斯特	吕莹、陈晓升、宋均亮、 张弛、肖晶	5				5
32	2001	土耳其 安塔利亚	施陈博、戚扬、刘彦、 魏轶旻、吴彬	4	1			5
33	2002	印度尼西亚 巴厘	樊向军、杨恒、顾春辉、 陈阳、高俊	4	1			5
34	2003	中国 台湾	未派选手参赛					
35	2004	韩国 浦项	缪亚立、李真、郎瑞田、 高亢、施烨明	5				5
36	2005	西班牙 萨拉曼卡	戴明劼、余江雷、李哈哈 李安、黄武杰	5				5
37	2006	新加坡	杨硕龙、王星泽、朱力、 张鸿凯、裴东斐	5				5
38	2007	伊朗 伊斯法罕	彭星月、胡嘉仲、钱秉玺、 简超明、李鹭西	4	1			5
39	2008	越南 河内	谭隆志、廉懿、周权、贺卓 然、毕震	5				5
累 计				76	21	9	2	108



## 第1~8届亚洲物理奥林匹克竞赛各国参赛情况

队名	1st	2nd	3rd	4st	5st	6st	7st	8th
澳大利亚	G	G	P	P	P		P	P
阿塞拜疆						P	P	P
文莱	O							P
柬埔寨					P	P	P	P
中国	P		P		P	P	P	H
中国台北	P	H	P	P	P	P	P	P
中国香港								P
格鲁吉亚			P				P	
印度	O	P					P	P
印度尼西亚	H	P	P	P	P	H	P	P
以色列		P	P	P	P		P	P
日本		O						O
约旦		P				P	P	
哈萨克斯坦	P	P	P		P	P	H	P
吉尔吉斯斯坦			P	P		P	P	P
老挝				P		P		P
中国澳门								P
马来西亚	O	P	P		P	P		
蒙古		P	P		P		P	P
尼泊尔								P
巴基斯坦				P				
菲律宾	P		P			P		
卡塔尔		O				P		
俄罗斯						G		

队名	1st	2nd	3rd	4st	5st	6st	7st	8th
新加坡	P	P	H		P	P	P	P
韩 国			O					
斯里兰卡								P
塔吉克斯坦						P	P	P
泰 国	P	P	P	H	P	P	P	P
土耳其			P					
土库曼斯坦					P		P	P
乌兹别克斯坦	P		P					
越 南	P	P	P	P	H	P	P	P

注:P表示参加,H表示主办,O表示派观察员参加,G表示以客队身份参加

图书在版编目(CIP)数据

最新国际国内物理奥林匹克竞赛优化解题题典/殷实  
编. —2版. —长春:吉林教育出版社,2009.7(2013.8重印)  
ISBN 978-7-5383-4354-0

I. 最… II. 殷… III. 物理课—中学—解题 IV.  
G634.75

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 095680 号

最新国际国内物理奥林匹克竞赛优化解题题典 殷实 主编

责任编辑 刘艳玲 责任校对 严家山 装帧设计 春雨教育编辑部

出版 吉林教育出版社 (长春市同志街 1997 号 邮编 130021)

发行 江苏春雨教育集团有限公司

印刷 句容市和平印务有限公司

开本 880×1230 毫米 32 开本 27.5 印张 字数 743 千字

版次 2013 年 8 月第 1 版第 6 次印刷

书号 ISBN 978-7-5383-4354-0

定价 48.00 元