

目 录

第二版前言	v
第一版 前言	ix
第一章 基本原理概述	1
1-1 质点力学	1
1-2 质点系力学	5
1-3 约束	13
1-4 达朗伯原理和拉格朗日方程	19
1-5 与速度相关的势和耗散函数	24
1-6 拉格朗日表述的简单应用	29
第二章 变分原理和拉格朗日方程	41
2-1 哈密顿原理	41
2-2 变分计算的某些技巧	43
2-3 由哈密顿原理推导拉格朗日方程	51
2-4 把哈密顿原理扩展到非完整系	53
2-5 变分原理表述的优点	60
2-6 守恒定理和对称性质	64
第三章 两体有心力问题	83
3-1 简化为等效的一体问题	83
3-2 运动方程和初次积分	85
3-3 等效的一维问题以及轨道的分类	90
3-4 维里定理	97
3-5 轨道的微分方程以及可积幂律势	101
3-6 闭合轨道的条件(伯特兰定理)	107
3-7 开普勒问题: 平方反比力定律	111
3-8 开普勒问题中的时间进程	116

3-9	拉普拉斯-龙格-楞次矢量	121
3-10	有心力场中的散射	125
3-11	散射问题变换到实验室坐标	135
第四章	刚体运动学	152
4-1	刚体的独立坐标	152
4-2	正交变换	157
4-3	变换矩阵的形式性质	162
4-4	欧拉角	170
4-5	凯瑞-克莱因参量和相关量	175
4-6	关于刚体运动的欧拉定理	186
4-7	非无限小转动	193
4-8	无限小转动	196
4-9	矢量的变化率	204
4-10	科里奥利力	208
第五章	刚体运动方程	221
5-1	绕一点运动的角动量和动能	221
5-2	张量和并矢式	226
5-3	惯性张量和转动惯量	229
5-4	惯性张量的本征值和主轴变换	232
5-5	求解刚体问题和欧拉运动方程的方法	239
5-6	无力矩刚体运动	241
5-7	有一固定点的对称重陀螺	250
5-8	二分点及卫星轨道的进动	265
5-9	磁场内电荷系统的进动	273
第六章	微幅振荡	287
6-1	问题的表述	287
6-2	本征值方程和主轴变换	290
6-3	自由振动频率和简正坐标	300
6-4	线性三原子分子的自由振动	305
6-5	受迫振动和耗散力效应	311

第七章	经典力学中的狭义相对论	325
7-1	狭义相对论的基本纲领	325
7-2	洛仑兹变换	328
7-3	四维实空间内的洛仑兹变换	341
7-4	洛仑兹变换的进一步阐述	346
7-5	协变四维表述	352
7-6	相对论力学中的力和能量方程	359
7-7	碰撞的相对论运动学和多粒子系统	366
7-8	相对论力学的拉格朗日表述	379
7-9	协变的拉格朗日表述	386
第八章	哈密顿运动方程	402
8-1	勒让德变换和哈密顿运动方程	402
8-2	循环坐标和守恒定理	412
8-3	劳斯方法和关于稳定运动的振荡	416
8-4	相对论力学的哈密顿表述	423
8-5	由变分原理推导哈密顿方程	430
8-6	最小作用量原理	433
第九章	正则变换	449
9-1	正则变换方程	449
9-2	正则变换举例	458
9-3	对正则变换的耦对逼近	464
9-4	泊松括号和其他正则不变量	471
9-5	运动方程, 无限小正则变换以及泊松括号表述中 的守恒定理	480
9-6	角动量泊松括号关系式	494
9-7	力学系统的对称群	498
9-8	刘维定理	506
第十章	哈密顿-雅可比理论	521
10-1	哈密顿主函数的哈密顿-雅可比方程	521
10-2	谐振子问题——哈密顿-雅可比方法的一个例子	526

10-3	哈密顿特征函数的哈密顿-雅可比方程	529
10-4	哈密顿-雅可比方程中变量的分离	533
10-5	一个自由度系统的作用角变量	543
10-6	完全可分离系统的作用角变量	549
10-7	用作用角变量描述的开普勒问题	560
10-8	哈密顿-雅可比理论, 几何光学以及波动力学	575
第十一章 正则微扰理论		592
11-1	引言	592
11-2	与时间有关的微扰(常数变值法)	593
11-3	与时间有关的微扰理论的例证	601
11-4	与时间无关的、一个自由度的一级微扰理论	612
11-5	与时间无关的高级微扰理论	617
11-6	天体力学和空间力学中特有的微扰技巧	627
11-7	绝热不变量	632
第十二章 连续系统和场的拉格朗日和哈密顿表述简介		649
12-1	从分立系统到连续系统的过渡	649
12-2	连续系统的拉格朗日表述	653
12-3	应力-能量张量和守恒定理	662
12-4	哈密顿表述、泊松括号和动量表示	671
12-5	相对论场论	682
12-6	相对论场论举例	688
12-7	诺埃瑟定理	703
附录		719
A	伯特兰定理的证明	719
B	另外两种约定的欧拉角	724
C	$d\Omega$ 的变换性质	729
D	哈密顿-雅可比方程可分离性的斯特克尔条件	731
E	气体中声场的拉格朗日表述	734
文献目录		739
符号索引		750

第一章 基本原理概述

物体的运动是物理学先驱者们最早研究的课题。他们的研究成果逐渐形成了称为分析力学或动力学，或简称力学的广阔领域。到了二十世纪，对这一物理学分支，人们通常称谓“经典力学”，以便与那些较新的物理理论，特别是量子力学相区别。我们将沿袭这一习惯，并把经典力学理解为还应包括由狭义相对论发展起来的那种力学。本书的目的在于研究经典力学的结构，并概述它对纯粹物理学当前有关问题的某些应用。

任何力学表述的基础都是一系列基本物理概念，诸如空间、时间、同时性、质量和力等。在讨论狭义相对论时，将对同时性、时间和长度标度等概念作简要研讨。然而，对这些概念多半将不作仔细分析，仅把它们假设为一些有待定义的术语，并认为这些术语的含意读者是熟悉的。

1-1 质点力学

设 \mathbf{r} 是质点对于某一给定原点的矢径， \mathbf{v} 是质点的矢量速度：

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (1-1)$$

质点的线动量 \mathbf{p} 定义为质点的质量及其速度之乘积：

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \quad (1-2)$$

当质点与外界物体和场相互作用时，就可能受到各种力的作用，如重力或电磁力。作用于质点的这些力的矢量和就是作

用于质点的合力 \mathbf{F} . 质点力学的基础是牛顿第二运动定律. 该定律表明, 在一些参照系中, 用来描述质点运动的是微分方程

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (1-3)$$

或

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}). \quad (1-4)$$

在大多数情况下, 质点的质量是常量, 因而式(1-3)可化为

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}, \quad (1-5)$$

式中 \mathbf{a} 是质点的矢量加速度, 它定义为

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \quad (1-6)$$

因此, 假定 \mathbf{F} 并不依赖于更高阶微商, 运动方程就是一个二阶微分方程.

式(1-3)能够成立的那个参照系称为惯性系或伽利略系. 即使是在经典力学中, 惯性系也是某种理想化的概念. 然而在实践中, 通常总是有可能建立某个坐标系, 使它能按要求的具有所需要的那些性质. 就许多情况来说, 固定于地球的参照系 (“实验室系”) 是一个足够近似的惯性系, 而对于某些天文学的目的来说, 可能需要参照最远的星系来建立惯性系.

力学中的许多重要结论都能以守恒定理的形式来表达, 这些定理表明了在这样的条件下各种力学量才能保持不变. 式(1-3)直接得出了其中的第一条定理, 即

质点的线动量守恒定理: 如果合力 \mathbf{F} 为零, 则 $\dot{\mathbf{p}} = 0$, 线动量 \mathbf{p} 守恒.

质点对于 O 点的角动量用 \mathbf{L} 表示, 其定义为

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \quad (1-7)$$

式中 \mathbf{r} 是从 O 点到质点的矢径。注意，这两个因子的次序颇为重要。今把对于 O 点的力矩定义为

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (1-8)$$

若组成 \mathbf{r} 与式(1-4)的矢积，即可得到类似于式(1-3)的 \mathbf{N} 的方程：

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{N} = \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}). \quad (1-9)$$

利用矢量恒等式

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}), \quad (1-10)$$

式(1-9)能表达成另一形式。因为式(1-10)右边第一项明显为零，所以式(1-9)的形式可以表达成

$$\mathbf{N} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{L}}{dt}. \quad (1-11)$$

注意， \mathbf{N} 和 \mathbf{L} 都与取力矩和动量矩时的参照点 O 点有关。

与式(1-3)的情况一样，力矩方程(1-11)也给出了一个紧接着的守恒定理，这时是

质点的角动量守恒定理：如果合力矩 \mathbf{N} 为零，则 $\dot{\mathbf{L}} = 0$ ，角动量 \mathbf{L} 守恒。

接下来考虑作用于质点的外力 \mathbf{F} 在质点从点 1 移至点 2 的过程中所作之功。按照定义，这个功等于

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \quad (1-12)$$

由于质量是常量(从现在起，除有特别说明外，我们都这样假定)，式(1-12)中的积分可化为

$$\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = m \int \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = \frac{m}{2} \int \frac{d}{dt}(v^2) dt,$$

由此得

$$W_{12} = \frac{m}{2} (v_2^2 - v_1^2). \quad (1-13)$$

标量 $mv^2/2$ 称为质点的动能, 记为 T , 于是所作之功等于动能的变化:

$$W_{12} = T_2 - T_1. \quad (1-14)$$

如果在某一力场中, 对于点 1 与点 2 之间的任何实际可能路径来讲, 功 W_{12} 都相同, 就说该力(以及系统)是保守的. 如果假想质点先沿某一可能路径从点 1 移至点 2, 再沿另一路径回到点 1, 即能得到保守系统的另一种描述. W_{12} 与特定路径无关等于是说: 沿着上述闭合路径所作之功为零, 即

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0. \quad (1-15)$$

实际上, 如果存在摩擦力或其他耗散力, 显然系统不可能是保守的, 因为摩擦力产生的 $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ 总是正的, 而上述积分不可能等于零.

根据熟知的矢量分析理论¹⁾, W_{12} 与质点所取实际路径无关的必要而又充分的条件是, \mathbf{F} 应是某一标量位置函数的梯度:

$$\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r}), \quad (1-16)$$

式中 V 称势或势能. 通过简单的论证可直观地推断出 V 的存在. 如果 W_{12} 与端点 1, 2 之间的积分路径无关, 就一定可以把 W_{12} 表达成仅与两端点的位置有关的某量的变化. 这个量可以记为 $-V$, 从而对于一段微分路径长度来说, 我们有关系式

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -dV$$

或者

1) 例如, 参阅 W. Kaplan, *Advanced Calculus*, 2d ed. (Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1973), P. 311, P. 347.

$$F_s = -\frac{\partial V}{\partial s},$$

这与式(1-16)是等效的。注意,在式(1-16)中,我们可以在 V 上附加某个在空间内处处是常值的量也不致影响其结果。因此, V 的零位是任意的。

对于保守系统,力所作之功为

$$W_{12} = V_1 - V_2. \quad (1-17)$$

把式(1-17)和式(1-14)联立起来,其结果为

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2, \quad (1-18)$$

上式用符号表明了

质点的能量守恒定理:如果作用于质点的力都是保守力,则质点的总能量 $T + V$ 守恒。

作用于质点的力有时可以用某个标量函数的梯度给出,该函数同时显含质点的位置和时间。然而,当质点通过距离 ds 时对质点所作之功

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial V}{\partial s} ds$$

将不再是位移期间 $-V$ 的总变化,因为当质点运动时, V 也明显地随时间而变化。因此,当质点从点1运动到点2时所作之功,不再是两点间函数 V 之差,虽然仍旧可以定义总能量 $T + V$,但它在质点运动期间并不守恒。

1-2 质点系力学

把前节的概念推广到多质点系统时,必须把由系统外部的因素引起的、作用于质点的外力,与系统内所有其他质点作用于第 i 个质点的内力区别开来。因此,第 i 个质点的运动方程(牛顿第二定律)应写成

$$\sum_i \mathbf{F}_{ii} + \mathbf{F}_i^{(e)} = \dot{\mathbf{p}}_i, \quad (1-19)$$

式中 $\mathbf{F}_i^{(e)}$ 指外力; \mathbf{F}_{ij} 是第 j 个质点作用于第 i 个质点的内力 (\mathbf{F}_{ii} 当然是零)。我们将假定 \mathbf{F}_{ij} (象 $\mathbf{F}_i^{(e)}$ 一样) 服从原始形式的牛顿第三运动定律: 两个质点相互作用的力是等值反向的。这一假定(并不适用于所有种类的力)有时被称为弱形式的作用和反作用定律。

对所有质点求和,式(1-19)的形式应为

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \mathbf{F}_{ij}. \quad (1-20)$$

右边第一项所求之和是外力合力 $\mathbf{F}^{(e)}$, 而第二项等于零, 因为作用和反作用定律指出, 每对 $\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji}$ 都等于零。为使左边更简单, 我们定义一个矢量 \mathbf{R} , 把它作为所有质点的平均矢径, 求平均时的权重正比于质点质量:

$$\mathbf{R} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{M}. \quad (1-21)$$

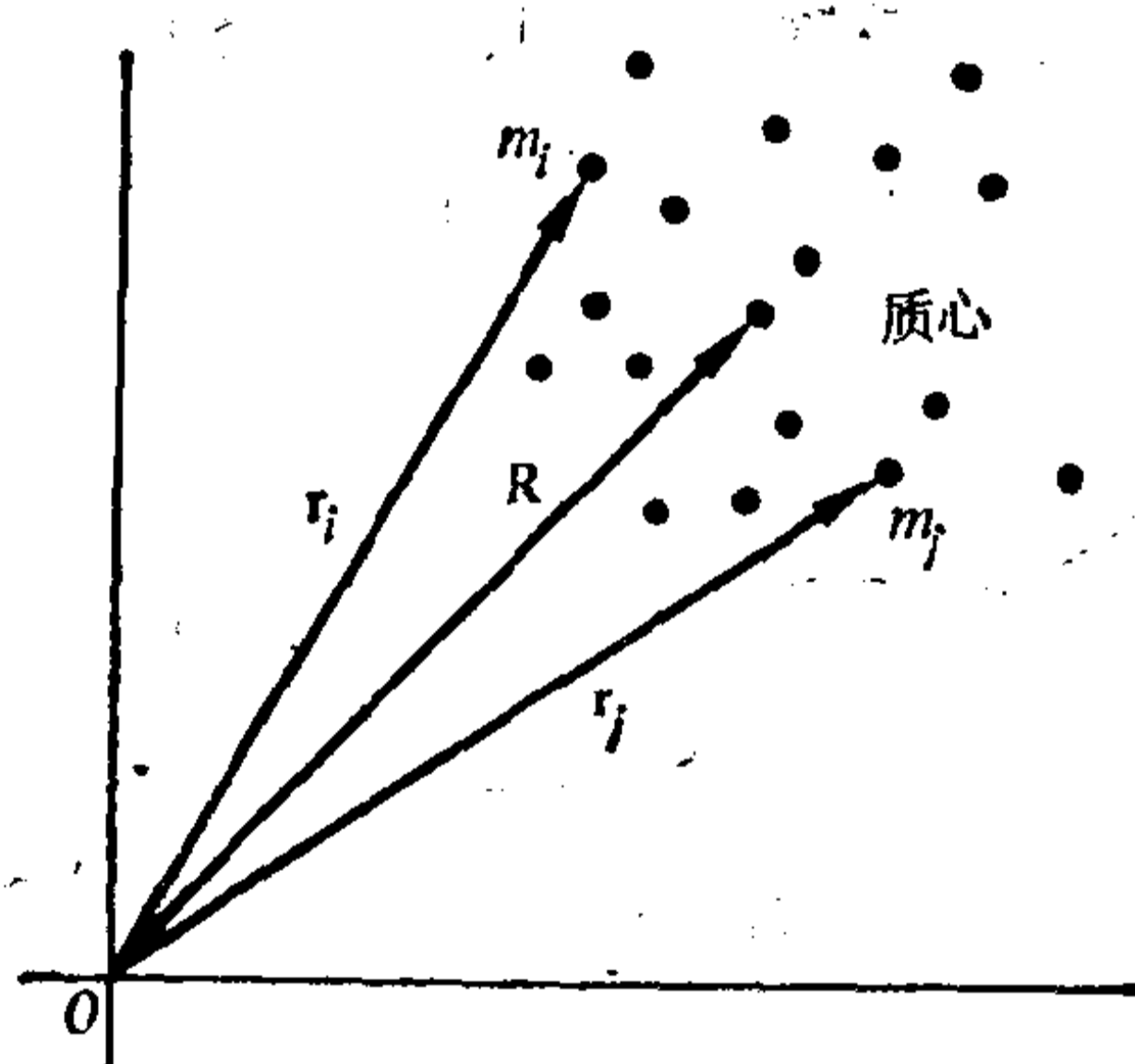


图 1-1 质点系的质心

矢量 \mathbf{R} 确定了一点, 称系统的质心, 或不太严格地称为系统的重心 (见图 1-1)。根据这一定义, 式(1-20)可化为

$$M \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} \equiv \mathbf{F}^{(e)}, \quad (1-22)$$

这表明，质心将象外力的合力作用在集中于质心的系统总质量上一样运动。至于净内力，如果它们遵循牛顿第三定律，则对质心的运动毫无影响。一个经常引用的例子是爆炸壳体的运动：那些碎片的质心就象壳体仍然是一整块似地向前运动（不计空气阻力）。同样的原理也包含在喷气发动机和火箭的推进过程中。为使质心的运动不受影响，排出的气体的高速喷射必须为飞行器的前向运动所抵销。

根据式(1-21)，系统的总线动量

$$\mathbf{p} = \sum m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = M \frac{d\mathbf{R}}{dt} \quad (1-23)$$

等于系统的总质量乘以质心的速度。因此，质心运动方程(1-23)能重新表述为

质点系的线动量守恒定理：如果外力的合力为零，则总线动量守恒。

组成矢积 $\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ 并对 i 求和，我们将得到系统的总角动量。如果在式(1-19)中完成这种运算，并借助等式(1-10)，即得

$$\begin{aligned} \sum_i (\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i) &= \sum_i \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \dot{\mathbf{L}} \\ &= \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji}. \end{aligned} \quad (1-24)$$

式(1-24)右边最后一项可看作是如下形式的成对项之和：

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ij} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ji}, \quad (1-25)$$

这样做是利用了作用和反作用相等的性质。但 $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ 是从 j 到 i 的矢量 \mathbf{r}_{ij} (见图 1-2)，所以式(1-25)的右边能写成

$$\mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{F}_{ji}.$$

如果两质点间的内力不仅等值反向，而且还沿着两质点的连线——这是熟知的强形式的作用和反作用定律的情况——则

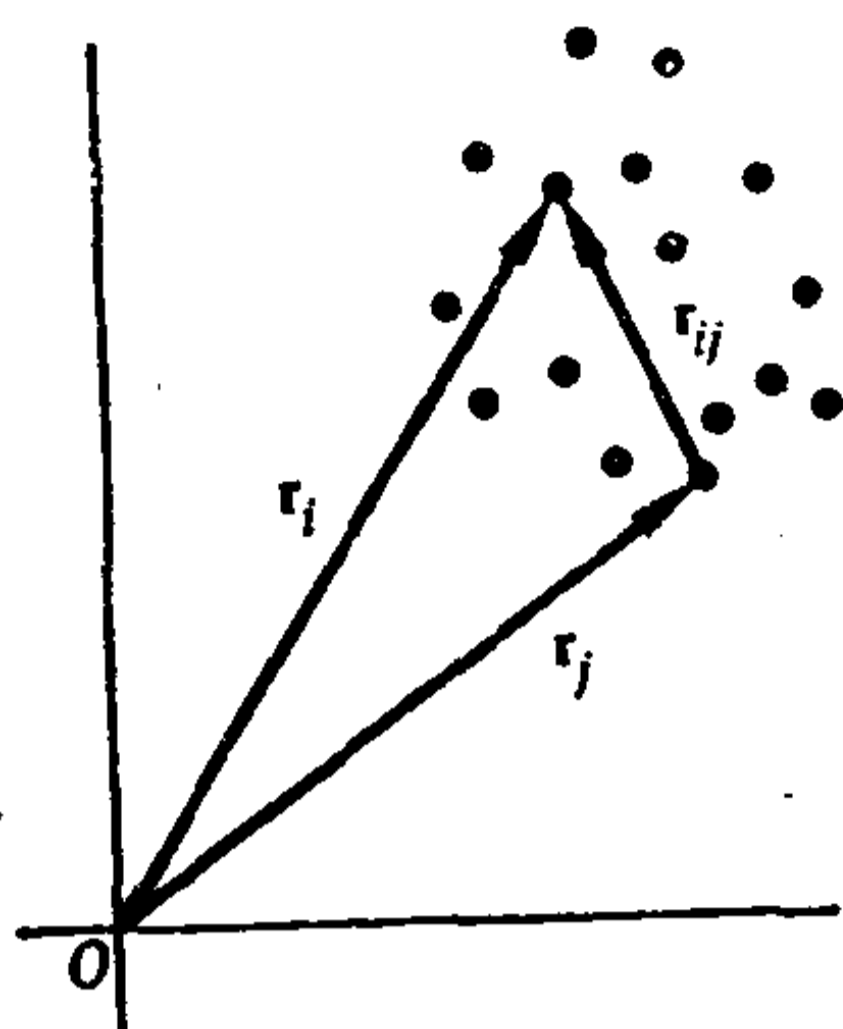


图 1-2 第 i 个质点和第 j 个质点之间的矢量 r_{ij}

所有这些矢积都等于零。根据这种假定，对所有对所求之和为零，式(1-24)可写成

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}^{(e)} \quad (1-26)$$

总角动量的时间微商等于外力关于给定点的力矩。式(1-26)相当于

总角动量守恒定理：如果所加的(外)力矩为零，则 \mathbf{L} 始终不变。

(也许值得强调的是，这是一个矢量定理：即使 $N_x^{(e)}$ 和 $N_y^{(e)}$ 不等于零，只要 $N_z^{(e)}$ 为零， L_z 也一定守恒。)

注意，无外力作用下线动量的守恒认为弱形式的作用和反作用定律对内力是适用的。而无外力矩作用下总角动量的守恒，则要求强形式的作用和反作用定律成立，即要求内力也必须是有心力。物理学中许多常见力，如重力，都满足强形式相互作用定律。但也可能找到一些力，它们虽然不是有心力，但作用和反作用却是相等的(见后文)。在包含运动电荷的系统内，服从毕奥-沙伐尔定律的电荷间作用力，实际上可以违背所有两种形式的作用和反作用定律¹⁾。这时，式(1-23)和

1) 如果两个匀速运动电荷的速度矢量相互平行，但不垂直于它们之间的连线，则它们的相互作用力虽等值反向，却并不沿着电荷间的矢量。再考虑“交叉成T形”(瞬时)运动着的两个电荷，即一个电荷径直向另一个电荷运动，而另一电荷则与前者成 90° 角而运动，这时，后者对前者有一非零作用力，但完全不会受到任何反作用力。

(1-26)以及它们的相应守恒定律不再适用,至少按照这里的形式是不适用的。遇到这种情况时,通常有可能找到某种广义的守恒量 \mathbf{p} 或 \mathbf{L} 。例如,在孤立的运动电荷系统中,这样的守恒量是机械角动量与场的电磁“角动量”之和,这种广义角动量是守恒的。

式(1-23)表明,系统的总线动量,与质量都集中于质心并与质心一起运动时的线动量是相同的。但角动量的类似定理要复杂得多。以原点 O 作为参照点,系统的总角动量为

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i.$$

设 \mathbf{R} 为从 O 点到质心的矢径, \mathbf{r}'_i 为从质心到第 i 个质点的矢径,则有(见图 1-3)

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{R} \quad (1-27)$$

和

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{v},$$

式中

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$$

是质心相对于 O 点的速度,而

$$\mathbf{v}'_i = \frac{d\mathbf{r}'_i}{dt}$$

是第 i 个质点相对于系统质心的速度。利用式(1-27),总角动量的形式为

$$\begin{aligned} \mathbf{L} = & \sum_i \mathbf{R} \times m_i \mathbf{v} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i \\ & + \left(\sum_i m_i \mathbf{r}'_i \right) \times \mathbf{v} + \mathbf{R} \times \frac{d}{dt} \sum_i m_i \mathbf{r}'_i. \end{aligned}$$

式中最后两项为零,因为它们都含有因子 $\sum_i m_i \mathbf{r}'_i$,这一因子

所确定的是原点正好在质心的那个坐标系中质心的矢径，它当然是一个零矢量。重写剩下的两项，即得关于 O 点的总动量

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times M\mathbf{v} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i. \quad (1-28)$$

总之，式(1-28)表明，关于 O 点的总角动量等于集中在质心的系统的角动量与相对于质心所作运动的角动量之和。式(1-28)的形式强调了 \mathbf{L} 一般是通过矢量 \mathbf{R} 与原点 O 相关的。只有当质心相对于 O 点静止不动时，角动量才会与参照点无关。在这种情况下，式(1-28)的首项为零， \mathbf{L} 总是归结为相对于质心所取的角动量。

最后，让我们考虑能量方程。象单质点情况一样，我们先计算使系统从初始位形 1 移动到最终位形 2 时一切力所作之

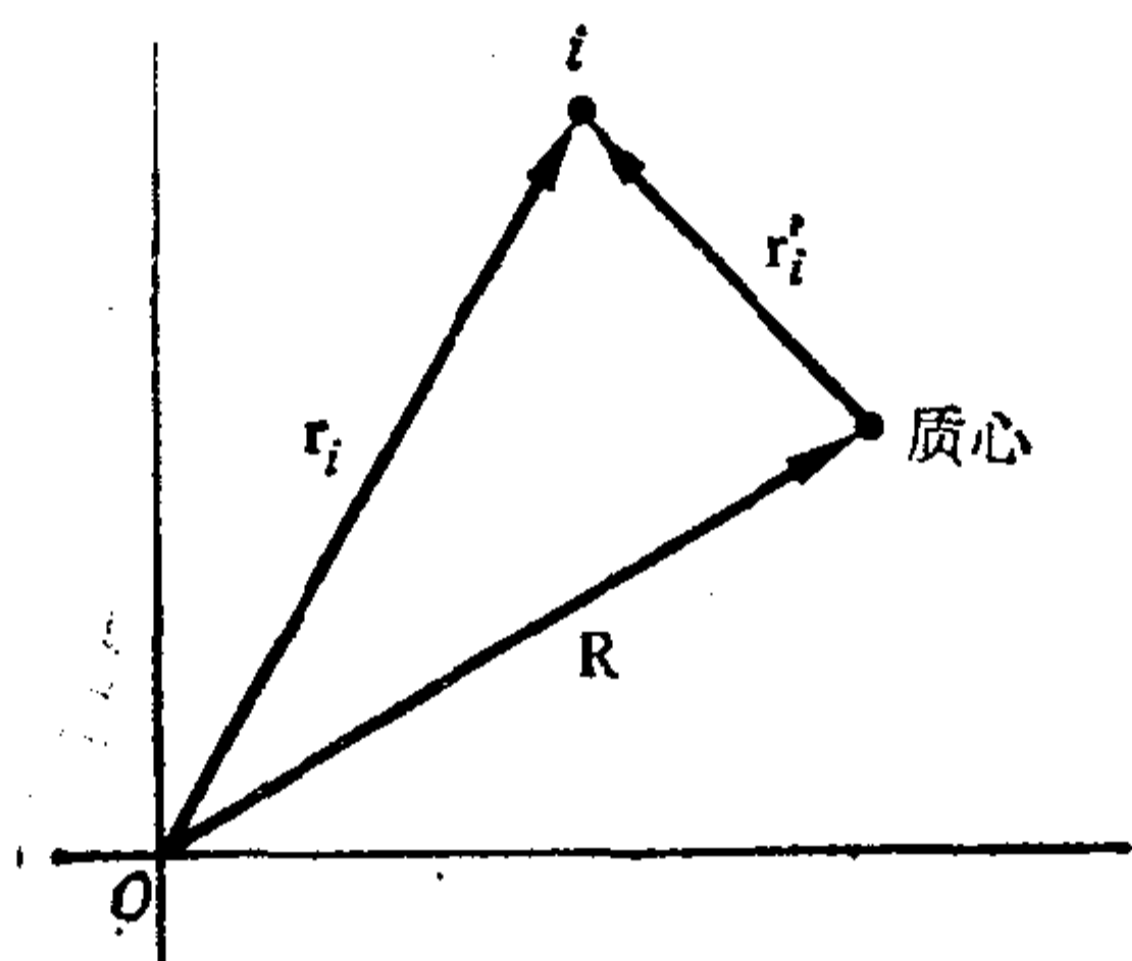


图 1-3 移动角动量参照点时有关的几个矢量

功：

$$W_{12} = \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{s}_i = \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i^{(e)} \cdot d\mathbf{s}_i + \sum_{i \neq j} \int_1^2 \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{s}_i. \quad (1-29)$$

再利用运动方程把这些积分化为

$$\sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{s}_i = \sum_i \int_1^2 m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \mathbf{v}_i dt$$

$$= \sum_i \int_1^2 d\left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right).$$

这样,所作之功仍可写成最终位形与初始位形的动能之差:

$$W_{12} = T_2 - T_1,$$

这里的系统总动能 T 为

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2. \quad (1-30)$$

变换到式(1-27)给出的质心坐标,也可把 T 写成

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{v} + \mathbf{v}'_i) \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{v}'_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i v^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2 \\ &\quad + \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \mathbf{r}'_i \right), \end{aligned}$$

根据计算角动量时所用的论据,最后一项为零,从而只剩下

$$T = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2. \quad (1-31)$$

因此,象角动量一样,动能也包含两个部分:全部质量集中于质心所得的动能加上相对于质心所作运动的动能.

现在考虑式(1-29)的右边.在外力是由势能梯度推导而得的特殊情况下,第一项可以写成

$$\sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i^{(e)} \cdot d\mathbf{s}_i = - \sum_i \int_1^2 \nabla_i V_i \cdot d\mathbf{s}_i = - \sum_i V_i \Big|_1^2,$$

式中 ∇ 算符的下标 i 表明它是对 \mathbf{r}_i 的分量的微商.如果内力也是保守力,则第 i 个和第 j 个质点间的相互作用力能从势函数 V_{ij} 导出.为了满足强形式的作用和反作用定律, V_{ij} 可以仅是质点间距离的函数:

$$V_{ij} = V_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|). \quad (1-32)$$

于是,作用和反作用力必定等值反向:

$$\mathbf{F}_{ij} = -\nabla_i V_{ij} = +\nabla_j V_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}, \quad (1-33)$$

并沿着两质点的连线:

$$\nabla V_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)f, \quad (1-34)$$

式中 f 是某个标量函数. 假如 V_{ij} 也是与质点有关联的其他成对矢量[譬如质点的速度, 或者(步入近代物理的范畴)它们的内禀“自旋”角动量]之差的函数, 则作用和反作用力依然是等值反向的, 但不再沿着质点间的连线方向.

如果那些力全是保守力, 式(1-29)中的第二项可以改写成对所有质点对所求之和, 对于每一对质点来讲, 该项的形式为

$$- \int_1^2 (\nabla_i V_{ij} \cdot d\mathbf{s}_i + \nabla_j V_{ij} \cdot d\mathbf{s}_j).$$

如把矢量差 $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ 记为 \mathbf{r}_{ij} , 用 ∇_{ij} 代表关于 \mathbf{r}_{ij} 的梯度, 则

$$\nabla_i V_{ij} = \nabla_{ij} V_{ij} = -\nabla_j V_{ij}$$

以及

$$d\mathbf{s}_i - d\mathbf{s}_j = d\mathbf{r}_i - d\mathbf{r}_j = d\mathbf{r}_{ij},$$

从而 ij 对项的形式为

$$- \int \nabla_{ij} V_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij}.$$

内力引起的总功则可化为

$$- \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \int_1^2 \nabla_{ij} V_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij} = - \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} V_{ij} \Big|_1^2. \quad (1-35)$$

式(1-35)中出现因子 $1/2$ 是因为对 i 和 j 两者求和时, 给定的每一个质点都被计及两次, 先是对 i 求和, 然后是对 j 求和.

根据这些考虑可清楚地看出, 如果内力和外力都是从势导出的, 就能定义一个系统的总势能

$$V = \sum_i V_i + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} V_{ij}, \quad (1-36)$$

使总能量 $T + V$ 守恒, 这与单质点的守恒定理式(1-18)相似.

式(1-36)右边第二项将被称为系统的内势能。一般说来,它不一定要等于零,更重要的是,当系统随时间变化时,这一项也可能变化。只有对于那些称为刚体的特殊类型的系统,内势能才始终是常数。形式上,刚体可被定义为一种质点系,其中距离 r_{ij} 是固定的、不随时间变化的。在这种情况下,矢量 $d\mathbf{r}_{ij}$ 只能垂直于相应的 \mathbf{r}_{ij} ,因而也垂直于 \mathbf{F}_{ij} 。所以刚体内的内力并不做功,内势能必定保持不变。由于总势能在任何情况下都允许有一个附加常数,所以在讨论系统的运动时完全可以不考虑这一不变的内势能。

1-3 约束

人们可能从前两节得到一个印象,力学中的所有问题已经归结为求解微分方程组(1-19):

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_j \mathbf{F}_{ij}.$$

只要把作用于系统内每个质点上的各种力代进去,然后运用巧妙的数学构思,努力地把答案算出来就行了!然而,即使根据纯粹的物理观点,这种想法也是把情况过分地简单化了。例如,有时可能需要考虑限制系统运动的那些约束。我们早已遇到过一种含有约束的系统,那就是刚体。这时,加于质点运动的约束使距离 r_{ij} 保持不变。其他受约束系统的例子也不难得到。算盘珠被挡杆约束为一维运动;容器内的气体分子由于器壁的约束只能在容器的内部运动;一个置于固体球表面的质点由于约束的限制,只能在表面上或在球外区域内运动。

约束可按多种方式分类,我们将采用下述分类法。如果约束条件可以表示成连接质点坐标(还可能包括时间)的方程,其形式为

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, t) = 0, \quad (1-37)$$

这些约束就称为完全约束。完全约束的最简单的例子也许是刚体,这时,约束方程的形式为

$$(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 - c_{ij}^2 = 0.$$

完全约束的另一个明显例子是质点被约束在某条曲线或某个曲面上运动的情况,这时的约束方程是确定曲线或曲面的方程。

不能表达成这种式样的约束称为非完全约束。气体容器的器壁就是一种非完全约束。把质点放在球表面上的那个例子中的约束也是非完全约束,因为它能表达成一个不等式

$$r^2 - a^2 \geq 0$$

(式中 a 是球半径),这当然不是(1-37)那样的形式。例如,在重力场中,置于球顶的质点将沿表面滚下一段路程,但是最后将会跌离球面。

约束还可以按约束方程显含时间(可变约束)或不显含时间(不可变约束)来分类。在固定于空间的刚性弧形弦线上滑动的珠子所受到的显然是不可变约束。如果弦线按某种指定格式运动时,约束则是可变约束。注意,如果弦线的运动只是对于珠子运动的一种反应,则约束方程中的约束只能通过弧形弦线的坐标(现在是系统坐标的一部分)与时间相关。全部约束因而是不可变约束¹⁾。

约束给力学问题的解带来了两种困难。首先,坐标 r_i 因由

1) 约束的术语可以非常复杂。这可参阅 Kilmisler 和 Reeve, *Rational Mechanics* (New York: American Elsevier, 1966)。把约束划分为**双向约束**(约束方程是等式)与**单向约束**(约束方程含有不等式)有时是有用的。这种命名的选择起源于跟表面有关的约束运动的例子。在表面上的双向约束运动中,约束力的指向可以沿表面的法线向内或向外。而在一个球的表面上或表面外部运动的质点受到的是单向约束,这时,任何约束力只能在一个方向作用,即沿法线向外。

约束方程相关联而不再全部独立,因而运动方程(1-19)也不会完全独立.其次,象弦线对珠子(或器壁对气体质点)所加的那种约束力不是事先给定的.它们是问题的一种未知因素,必须根据我们所求的解来得出.的确,对系统施加约束的另一种说法是:问题中出现了不能直接确定、只能根据它们对系统运动的效应来确定的力.

在完全约束的情况下,第一种困难靠引进广义坐标来解决.到目前为止,不言而喻,我们采用了笛卡儿坐标.一个无约束的 N 个质点的系统具有 $3N$ 个独立坐标或自由度.如果存在 k 个(1-37)形式的完全约束,我们就可以用这些方程来消去 $3N$ 个坐标中的 k 个坐标,使剩下的只有 $3N - k$ 个独立坐标,这时就说系统具有 $3N - k$ 个自由度.消除非独立坐标的另一种办法是引进 $3N - k$ 个新的独立变量 $q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}$,并把原有的坐标 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ 用这些新变量表示成如下形式的方程:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_1(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t), \\ &\vdots \\ \mathbf{r}_N &= \mathbf{r}_N(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t). \end{aligned} \tag{1-38}$$

这些方程自然把那些约束包含在内了.它们是从 (\mathbf{r}_i) 变量组转换为 (q_i) 变量组的变换方程,或者换一种说法,把方程组(1-38)看成是 (\mathbf{r}_i) 变量的参量表达式.通常认为也能从 (q_i) 组变换回 (\mathbf{r}_i) 组,也就是联立式(1-38)与 k 个约束方程,就能反过来得到作为 (\mathbf{r}_i) 变量和时间的函数的任何一个 q_i .

一般地讲,广义坐标 q_i 与笛卡儿坐标不同,它们不能适当地每三个分成一组以组合成一个矢量.例如,在被约束于球表面上运动的质点的情况中,广义坐标显然是球面上的位置,它们分别叫做经度和纬度的两个角度.再如,在同一个平面内运动着的双摆(两个质点由一不可伸长的轻杆相连接,再

用缚在其中一个质点上的同样的轻杆悬挂起来)的例子中,广义坐标是两个角度 θ_1, θ_2 (见图 1-4)。作为在意义上不同于笛

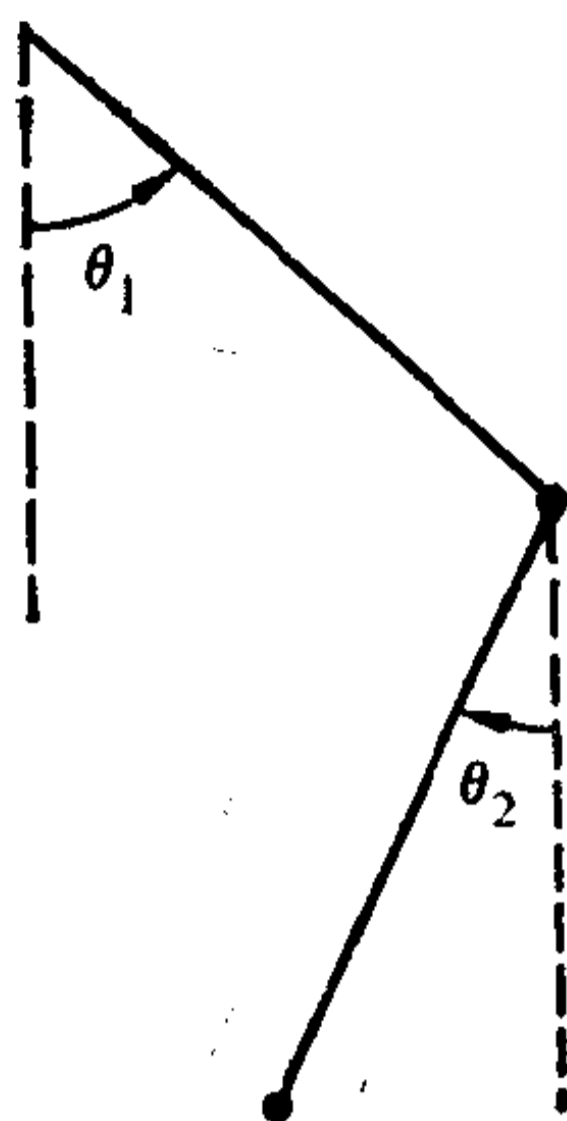


图 1-4 双摆

卡儿坐标的广义坐标,对于无约束系统通常是有用的。例如,在外部有心力场 $[V = V(r)]$ 中运动着的质点的问题中,并不涉及约束,使用球极坐标显然比笛卡儿坐标更为方便。然而,人们一定不要按照用惯的正交位置坐标来想象广义坐标。各种量都可以假想为广义坐标。例如, r_i 的傅里叶展开中的振幅可以用作广义坐标,或者,我们可能发现,把具有能量或角动量量纲的量作为广义坐标也是相宜的。

如果是非完全约束,那么,约束方程就不能用来消去那些非独立坐标。一个经常引用的非完全约束例子是物体在粗糙表面上所作无滑动的滚动。一般地讲,描述系统的坐标包括确定物体取向的角度坐标以及一组描述物体和表面接触点的位置的坐标。这两组坐标由“滚动”约束联系在一起,因而不是独立的。接触点位置的变化当然意味着物体取向的变化。但是“滚动”条件不能象式 (1-37) 那样表达成坐标之间的方程,因而达不到减少坐标的目的。“滚动”实际上只是加于速度的一种条件(即接触点是静止的),而且是一种微分形式的条件,只有在问题解出以后才能把它表达成积分形式。

一个简单的例子可以说明这一点。考虑一个在水平的 xy 平面上滚动的盘子。所加约束使得盘子的平面始终位于铅垂面内。描述运动的坐标可以是盘心的 x, y 坐标,绕盘轴的转动角度 ϕ 以及盘轴与所设 x 轴之间的夹角 θ (见图 1-5)。由于约束的缘故,盘心速度 v 的大小正比于 $\dot{\phi}$:

$$v = a\dot{\phi},$$

式中 a 是盘子的半径, 它的方向垂直于盘轴:

$$\dot{x} = v\sin\theta, \quad \dot{y} = -v\cos\theta.$$

把这些条件结合起来, 即得有关约束的微分方程

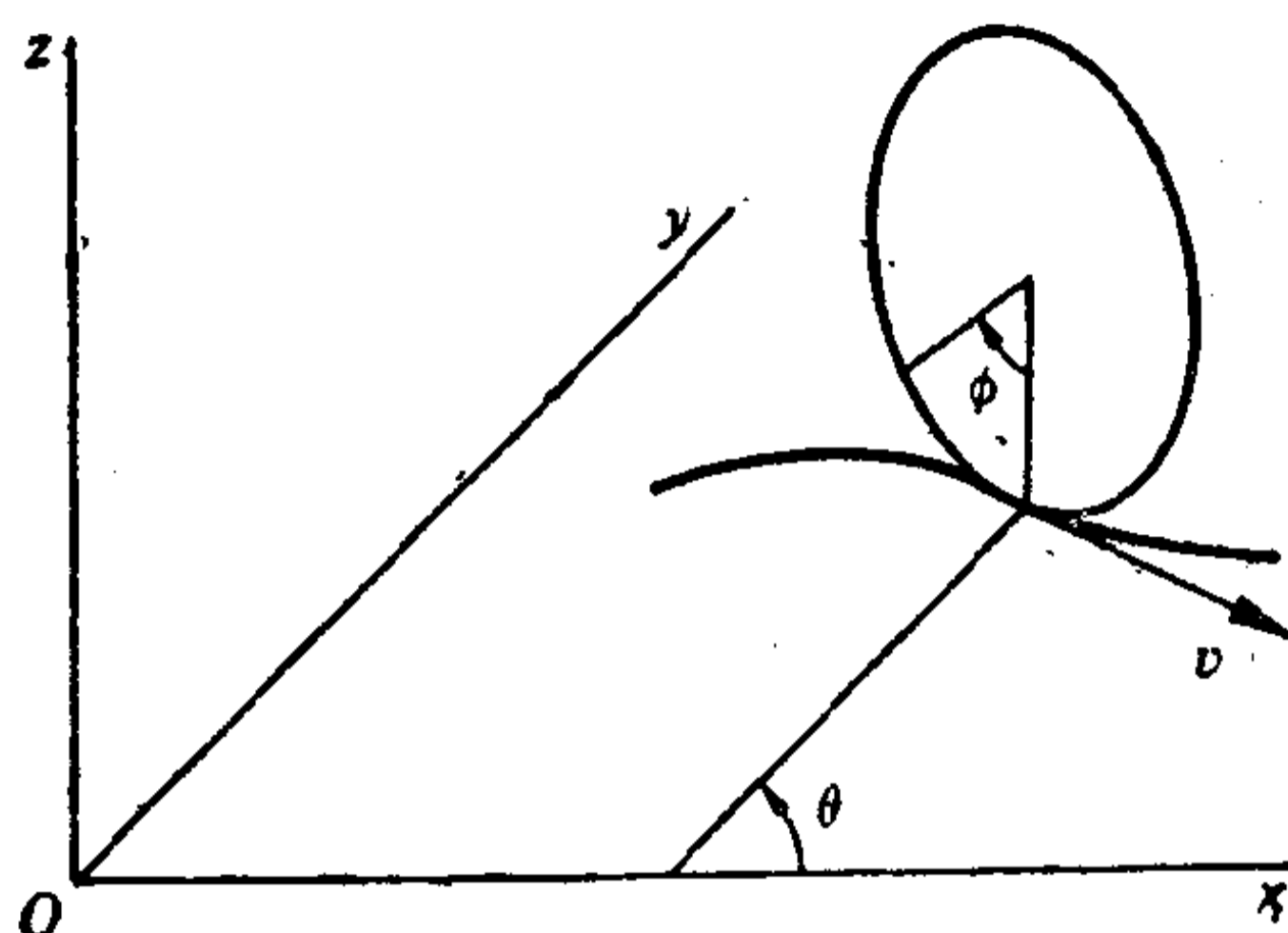


图 1-5 在水平面上滚动的竖立盘

$$\begin{aligned} dx - a\sin\theta d\phi &= 0, \\ dy + a\cos\theta d\phi &= 0, \end{aligned} \tag{1-39}$$

不把问题实际解出, (1-39) 中没有一个方程是可以积分的. 也就是说, 找不到一个积分因子 $f(x, y, \theta, \phi)$ 能使其中之一化为全微分(见习题 7)¹⁾. 这样, 约束不可能化成(1-37)那样的形式, 因而是非完全约束. 实际上, 只要注意到盘子在其路径的任何一点处都能够绕与路径相切的任意半径的圆周滚动, 就可以看出 ϕ 与其他坐标 x, y 和 θ 之间并无直接的函数关系. 绕行一周后, x, y 和 θ 都回到它们的初始值, 但 ϕ 却改变了一定数量, 其值视圆周半径而定.

1) 如果系统只有两个坐标, 约束方程是一个一阶微分方程, 那么, 原则上总是能够找到某个积分因子的(参阅 Kaplan, *Advanced Calculus*, 2d ed., p. 531), 因而这类约束是完全约束. 常见的例子是斜面上滚动的圆环的二维运动.

式(1-39)那样的不可积微分形式的约束当然不是唯一的一种非完全约束。约束条件可能包括更高阶的微商，或者象我们看到过的那样，可能表现为不等式的形式。

在一定程度上讲，由于那些非独立坐标是能够消去的，所以涉及完全约束的问题总可以有一个形式解。但是，并没有处理非完全约束例子的一般方法。正确地说，如果约束是不可积的，则可把约束的微分方程同运动的微分方程一起引入问题，由拉格朗日乘子法事实上能够消去那些非独立方程。这种方法将留待以后讨论。然而，更为麻烦的非完全约束情况必须个别处理，因此，在较为正规的经典力学研究中，凡是碰到约束，几乎总认为它是完全约束。尽管在日常生活中实际上碰到的都是非完全约束，但这种假定对于理论的应用并没有多大的限制。原因是象弦线、表面或器壁对系统施加的约束的整个概念只在宏观的或大线度问题中才特别合适。而物理学家今天的主要兴趣又是原子问题。在这种线度上，不论是系统的内部还是外部，所有物体都同样由受到一定作用力的分子、原子或更小的粒子所组成，约束成了人为的概念并且极少出现。约束仅仅用来作为真实物理情况的数学理想化，或者作为量子力学性质的经典近似。例如把“自旋”设想为刚体转动时，约束便始终是完全约束，自然也就符合于理论的框架。

为了克服第二种困难，即约束力不能预先知道的困难，我们可以用不包含约束力的公式来阐述力学。这样就只涉及已知外力。至于所遵循的步骤，则可由下列事实得到启发：在一个具有约束的特殊系统——刚体内，内力(在这里也就是约束力)所作之功为零。往后各节也将遵循这条线索，并将推广其含义。

1-4 达朗伯原理和拉格朗日方程

系统的(无限小)虚位移指的是系统的位形变化,它是坐标 $\delta \mathbf{r}_i$ 的任意无限小变化的结果,这种变化受制于给定 t 时刻作用于系统上的那些力和约束.把这种位移称为虚位移是为了把它与系统在 dt 时间内发生的实际位移相区别,在这段时间内,那些力和约束都可能变化.假定系统处于平衡态,即作用在每一个质点上的合力为零: $\mathbf{F}_i = 0$, 则力 \mathbf{F}_i 在产生位移 $\delta \mathbf{r}_i$ 期间所作的虚功,即标积 $\mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i$ 也为零.所有质点的这种零值标积的总和也必然等于零:

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (1-40)$$

到目前为止,所说的一切并无任何新的物理内容.如果把 \mathbf{F}_i 分解为外力 $\mathbf{F}_i^{(a)}$ 和约束力 \mathbf{f}_i :

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(a)} + \mathbf{f}_i, \quad (1-41)$$

式(1-40)将成为

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (1-42)$$

现在我们只讨论约束力的净虚功为零的系统.已知,这一条件对于刚体是相符的,并且对于其他许多约束也同样适用.例如,如果一个质点被约束在一表面上运动,则约束力始终垂直于表面,虚位移必然跟表面相切,因而虚功为零.但是,如果有滑动摩擦力,这就不再正确了,因此,这样的系统在我们的阐述中必须排除掉.作这种限制不会有太大的妨碍,因为摩擦本来是一种宏观现象.另外,滚动摩擦力也并不违背这种条件,因为力是作用在瞬时静止的点上的,因此,在滚动约束下的无限小位移期间不可能做功.注意,如果质点被约束在本身也正在运动着的表面上,那么,约束力瞬时地垂直于表

面,这时,即使在 dt 时间的实际位移期间所作之功不一定为零,虚位移期间所作之功也依然等于零。

于是,我们得到系统的平衡条件是外力的虚功等于零:

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (1-43)$$

式(1-43)通常称为虚功原理。注意, $\delta \mathbf{r}_i$ 的系数不能再假设为零,即一般说来, $\mathbf{F}_i^{(a)} \neq 0$,这是因为 $\delta \mathbf{r}_i$ 并不完全独立,而是由约束相互关联着的。为使那些系数为零,就得把这一原理变换成另一种形式,使之包含有独立的 q_i 的虚位移。式(1-43)不含 \mathbf{f}_i 这一点虽然满足这样的要求,但它只涉及静力学,而我们所要的是有关系统的一般运动的条件。

我们将用首先由詹姆斯·伯努利想到、后来由达朗伯发展的方法来推得这种原理。运动方程

$$\mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{p}}_i$$

能表达成

$$\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i = 0,$$

这表明,系统中的质点在一个等于实际力加上“反向有效力” $-\dot{\mathbf{p}}_i$ 的合力作用下将处于平衡状态。这样,我们能直接写出取代式(1-40)的方程

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad (1-44)$$

对外力和约束力作出相同的处理,结果为

$$\sum_i (\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

如果仍旧只讨论约束力的虚功为零的系统,则有

$$\sum_i (\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad (1-45)$$

此式通常称为达朗伯原理。我们的目的已达到,约束力已不

复存在,这时,上标(a)即使不写出也不会引起混乱了.当然,要靠这个式子得出系统的运动方程,它的形式还是不适用的.为此,必须把这个原理变换成含有广义坐标的虚位移的表达式,这些广义坐标应彼此独立(对于那些完全约束来讲),以保证 δq_i 的系数可以分别为零.

我们由变换方程(1-38)

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (\text{设有 } n \text{ 个独立坐标})$$

着手,并根据通常的偏微分计算的“链式法则”¹⁾来实现从符号 \mathbf{r}_i 到符号 q_i 的转化.例如,用 \dot{q}_k 表示的 \mathbf{v}_i 的公式为

$$\mathbf{v}_i \equiv \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}. \quad (1-46)$$

同样,任意虚位移 $\delta \mathbf{r}_i$ 与虚位移 δq_i 的关系则能表达成

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (1-47)$$

注意,这里不包含时间的变化 δt ,这是因为所考虑的虚位移按照定义仅是坐标的位移(如果约束本身是随时间变化的,则所论虚位移仅是垂直于约束力的虚位移).

采用广义坐标时, \mathbf{F}_i 的虚功为

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i,j} \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_i Q_i \delta q_i, \quad (1-48)$$

式中 Q_i 称为广义力的分量,并定义为

$$Q_i = \sum_j \mathbf{F}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i}. \quad (1-49)$$

注意,正象 q 不必具有长度量纲一样, Q 也不一定要有量的量纲,但 $Q_i \delta q_i$ 却必定具有功的量纲.

现在再来讨论式(1-45)中的另一项,它可表达成

1) 例如,可参阅 Kaplan, Advanced Calculus, 2d ed., p. 135.

$$\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i.$$

用式(1-47)表示 $\delta \mathbf{r}_i$, 上式将成为

$$\sum_{i,j} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j.$$

现在考虑关系式

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} &= \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \right. \\ &\quad \left. - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (1-50)$$

我们可以把式(1-50)的最后一项中对 t 和 q_j 的微商相互交换, 因为类似于式(1-46),

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} = \sum_k \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t}$$

根据式(1-46), 此式等于 $\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j}$. 其次, 从式(1-46)还可看到:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}. \quad (1-51)$$

把这些变换代入式(1-50), 即得

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} \right\},$$

而式(1-45)左边能展开成

$$\sum_j \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right\} \delta q_j.$$

把 $\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$ 认为和系统动能 T 一样, 则达朗伯原理成为

$$\sum_j \left[\left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} - Q_j \right] \delta q_j = 0. \quad (1-52)$$

注意，在笛卡儿坐标系中， T 对 q_i 的偏微商为零。用微分几何的术语来说，这一项是由坐标 q_i 的曲率产生的。例如，用极坐标表示时，向心加速度项表现为 T 于对角坐标的偏微商。

直到现在为止，除了在虚位移期间不作功这一点外，对约束的性质并无其他限制。变量 q_i 能够用来描述系统运动的任何一组坐标。但如果约束是完全的，就可能找到一些 q_i 坐标组，使约束条件隐含于变换方程(1-38)中。于是，任何虚位移 δq_i 都与 δq_k 无关，而使得式(1-52)能够成立的唯一办法是让那些系数分别为零：

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad (1-53)$$

这样的方程总共有 n 个。

式(1-53)通常称为拉格朗日方程。但是，人们仅在所有力都是由标量势函数 V 推导而得，即

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_i V$$

时，才把(1-53)那种形式的方程称作拉格朗日方程。这时的广义力为

$$Q_i = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_i} = - \sum_i \nabla_i V \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_i},$$

这与函数 $-V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t)$ 对 q_i 的偏微商的表达式完全相同：

$$Q_i = - \frac{\partial V}{\partial q_i}. \quad (1-54)$$

这样，式(1-53)能重新表达成

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_i} = 0. \quad (1-55)$$

(1-55)形式的运动方程不一定限于保守系；只有在 V 不是时间的显函数时，所述系统才是保守的(见 p.5)。然而，这里所

定义的势函数 V 与广义速度无关。因此能够在对 q_i 的偏微商中加进一项 V ：

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial(T-V)}{\partial q_i} = 0.$$

或者定义一个新函数，即拉格朗日函数 L ¹⁾

$$L = T - V, \quad (1-56)$$

式(1-53)将成为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (1-57)$$

除非特别指明，今后说到“拉格朗日方程”即指方程(1-57)。

必须注意，对于特定的运动方程组，为从式(1-53)推导出含有给定广义坐标的运动方程，所选的拉氏函数不是唯一的。例如，习题 14 指出，如果 $L(q, \dot{q}, t)$ 是一个适当的拉氏函数， $F(q, t)$ 是广义坐标和时间的任何可微函数，则

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{dF}{dt}$$

也是一个能够导致相同运动方程的拉氏函数。除了按此规定构成的那些拉氏函数外，还常常有可能找到另外一些适用的拉氏函数（见习题 18）。尽管式(1-52)总可以用来构成保守系统的拉氏函数，但它提供的并不是适合于给定系统的仅有的拉氏函数。

1-5 与速度相关的势和耗散函数

只要能够根据惯常形式的方程

$$Q_i = - \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \right) \quad (1-58)$$

1) 简称拉氏函数。——译者

从函数 $U(q_j, \dot{q}_j)$ 求得广义力,那么,即使不存在通常意义的势函数 V ,依然可把拉格朗日方程表达成式(1-57)的形式.在这种情况下,采用的拉氏函数为

$$L = T - U, \quad (1-59)$$

仍能由式(1-53)导出式(1-57).这里的 U 可以称为“广义势”或“与速度相关的势”¹⁾. 采用这种“势”是实际的需要,一种极为重要的力场,即作用于运动电荷的电磁力就要用到它.考虑到这种力场的重要性,花一些篇幅讨论一下是完全值得的.

采用高斯单位制的麦克斯韦方程为

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi\rho, \\ \nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \frac{4\pi\mathbf{j}}{c}, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (1-60)$$

作用在电荷 q 上的力并非完全是电力

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = -q\nabla\phi,$$

所以在这种意义上讲,系统并不是保守的.电荷所受的完整的力为

$$\mathbf{F} = q \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right\}. \quad (1-61)$$

因为 $\nabla \times \mathbf{E} \neq 0$,所以 \mathbf{E} 不是标函数的梯度,但从 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

1) 这种势的命名历史颇为奇特. 显然是受到韦伯早期(有错误)的经典电动力学的影响,该电动力学采用了与速度相关的力,德国数学家歇林(E. Schering)首先认真地企图把这种力包括在力学框架之内[见 *Gött. Abh.*, 18, 3(1873)].接着,惠特克(Whittaker)在他的 *Analytical Dynamics* 一书的1904年第一版中,把这种势称为“歇林势函数”,但这一名称显然没有叫熟,因为这一名称在其后的版本中就不再使用了.新近, Morgenstern 及 Szabo 著的 *Vorlesungen über Theoretische Mechanik* 一书的1961年版本中,又把在转动坐标系中导出科兰奥利力的、特有的与速度相关的势称作“歇林势”.但我们宁愿采用“广义势”这一名称,并把仅仅是位置函数的普通势能也包括在内.

可知 \mathbf{B} 可以表达成某个矢量的旋度:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (1-62)$$

式中 \mathbf{A} 称为磁矢量势. 旋度 \mathbf{E} 的方程因而成为

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) &= \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

因此, 可以假设

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi$$

或

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (1-63)$$

采用 ϕ 和 \mathbf{A} 这两种势后, 所谓洛仑兹力式(1-61)成为

$$\mathbf{F} = q \left\{ -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A}) \right\}. \quad (1-64)$$

方程(1-64)中的那些项可以改写成更为方便的形式. 譬如说 x 分量

$$(\nabla \phi)_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

和

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A})_x &= v_y \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \\ &\quad - v_z \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) = v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} \\ &\quad + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} + v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} \\ &\quad - v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} - v_x \frac{\partial A_x}{\partial x}, \end{aligned}$$

式中已加上和减去了 $v_x \frac{\partial A_x}{\partial x}$ 这一项。因而 A_x 的时间全微商为

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} \right),$$

式中第一项是由于 A_x 显含时间引起的, 第二项则是由于粒子随时间运动的结果, 这种运动改变了求解 A_x 时的空间位置。所以 $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$ 的 x 分量可表达成

$$(\nabla \times \nabla \times \mathbf{A})_x = \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \frac{dA_x}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial t}.$$

代入这些量后, 式 (1-64) 成为

$$F_x = q \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} \left(\phi - \frac{1}{c} \nabla \cdot \mathbf{A} \right) - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial v_x} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) \right) \right\}. \quad (1-64')$$

由于标势与速度无关, 所以这个表达式相当于

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial v_x},$$

式中

$$U = q\phi - \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}. \quad (1-65)$$

U 是式 (1-58) 那种意义上的广义势, 而电磁场中带电粒子的拉氏函数能够写成

$$L = T - q\phi + \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}. \quad (1-66)$$

必须注意, 只要不是所有作用于系统的力都是从势导出的, 则拉格朗日方程总可以表达成

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i,$$

这里的 L 同样包含着保守力的势, Q_i 则代表不是由势导出的那些力. 这种情况在有摩擦力时是经常发生的. 通常, 摩擦力正比于粒子的速度, 从而它的 x 分量的形式为

$$F_{ix} = -k_x v_x.$$

这种类型的摩擦力可以从某个函数 \mathcal{F} 来导出, \mathcal{F} 称为瑞利耗散函数, 定义为

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_i (k_x v_{ix}^2 + k_y v_{iy}^2 + k_z v_{iz}^2), \quad (1-67)$$

这里所求之和遍及系统的所有粒子. 按此定义, 显然,

$$F_{ix} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_x},$$

或用符号表示成

$$\mathbf{F}_f = -\nabla_v \mathcal{F}. \quad (1-68)$$

我们还可以对耗散函数作出某种物理解释. 系统克服摩擦所作之功为

$$\begin{aligned} dW_f &= -\mathbf{F}_f \cdot d\mathbf{r} = -\mathbf{F}_f \cdot \mathbf{v} dt \\ &= (k_x v_x^2 + k_y v_y^2 + k_z v_z^2) dt. \end{aligned}$$

因此, $2\mathcal{F}$ 等于摩擦引起的能量耗散率. 而由摩擦力引起的广义力分量根据式(1-51)可以写成

$$\begin{aligned} Q_i &= \sum_j \mathbf{F}_{ij} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_j \nabla_v \mathcal{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \\ &= -\sum_j \nabla_v \mathcal{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_i}. \end{aligned} \quad (1-69)$$

这样, 拉格朗日方程成了

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad (1-70)$$

所以, 要想求得运动方程, 就得预先确定 L 和 \mathcal{F} 这两个标函数.

1-6 拉格朗日表述的简单应用

前几节表明,对于能够定义拉氏函数的那些系统,即外力可从普通势或广义势和无功约束导出的那些完整系,我们有了建立运动方程的非常方便的方法.为了从运动方程中消去约束力,我们采用了拉格朗日表述,这样,不仅消去了约束力,而且还得到许多别的好处.在建立原有形式的运动方程(1-19)时,必须处理许多矢量性质的力和加速度.但拉格朗日方法只涉及两个标量函数 T 和 V , 这使问题大为简化.对于可以采用拉格朗日表述的所有力学问题,都能够建立起一套明确的常规步骤.只要先用广义坐标写出 T 和 V , 并用它们组成 L , 再代入式(1-57), 就可得到运动方程. T 和 V 从笛卡儿坐标到广义坐标所需变换可通过变换方程(1-38)和(1-46)来完成.例如, T 一般被表达成

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2.$$

显然,上式展开以后,用广义坐标表示的 T 的表达式形式将是

$$T = M_0 + \sum_j M_j \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{i,k} M_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k, \quad (1-71)$$

式中 M_0, M_j, M_{ik} 是那些 \mathbf{r} 和 t 、因而也是那些 q 和 t 的确定的函数.事实上,通过比较表明,

$$\begin{aligned} M_0 &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2, \\ M_j &= \sum_i m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}, \\ M_{ik} &= \sum_i m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}. \end{aligned} \quad (1-72)$$

于是系统的动能总可以表达成广义速度的三个齐次函数之和的形式:

$$T = T_0 + T_1 + T_2, \quad (1-73)$$

式中 T_0 与广义速度无关; T_1 是速度的线性项; T_2 则是速度的二次项. 如果变换方程并不显含时间[当约束与时间无关(不可变约束)时, 就会出现这种情况], 则式(1-71)中只有最后一项不等于零, 而 T 则总是广义速度的二次齐次式.

现在让我们来考虑这种步骤的几个简单例子:

1. 空间内的单个质点:

a. 笛卡儿坐标, b. 平面极坐标;

2. 阿德武特机;

3. 与时间相关的约束——在转动弦线上滑动的珠子.

1. (a) 单个质点的运动: 采用笛卡儿坐标 式(1-53)中所需的广义力显然是 F_x , F_y 和 F_z . 于是有

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z},$$

运动方程则为

$$\frac{d}{dt} (m\dot{x}) = F_x,$$

$$\frac{d}{dt} (m\dot{y}) = F_y, \quad (1-74)$$

$$\frac{d}{dt} (m\dot{z}) = F_z.$$

这样, 我们又回到了原来的牛顿运动方程

(b) 单个质点的运动: 采用平面极坐标 这时我们必须用 \dot{r} 和 $\dot{\theta}$ 来表示 T . 在此情况下的变换方程(1-38)简单地为

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

类似于式(1-46), 这时的速度为

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta, \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta.$$

动能 $T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ 在形式上成为

$$T = \frac{1}{2} m[\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2]. \quad (1-75)$$

式(1-75)还有另一种推导方法, 只要我们认识到, 速度沿 \mathbf{r} 方向的平面极坐标分量为 \dot{r} , 沿垂直于 \mathbf{r} 方向(用单位矢量 \mathbf{n} 表示)的分量则为 $r\dot{\theta}$. 因此, 用极坐标表示的速度的平方等于 $\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2$. 广义力的分量可以从定义方程(1-49)导出:

$$Q_r = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = F_r,$$

$$Q_\theta = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \mathbf{F} \cdot r\mathbf{n} = rF_\theta,$$

因为根据微商的定义, \mathbf{r} 对 θ 的微商是 \mathbf{n} 方向上的一个矢量(见图 1-6). 由于有两个广义坐标, 所以也就有两个拉格朗日方程. r 方程中的微商为

$$\frac{\partial T}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r},$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \right) = m\ddot{r},$$

而方程本身则为

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F_r,$$

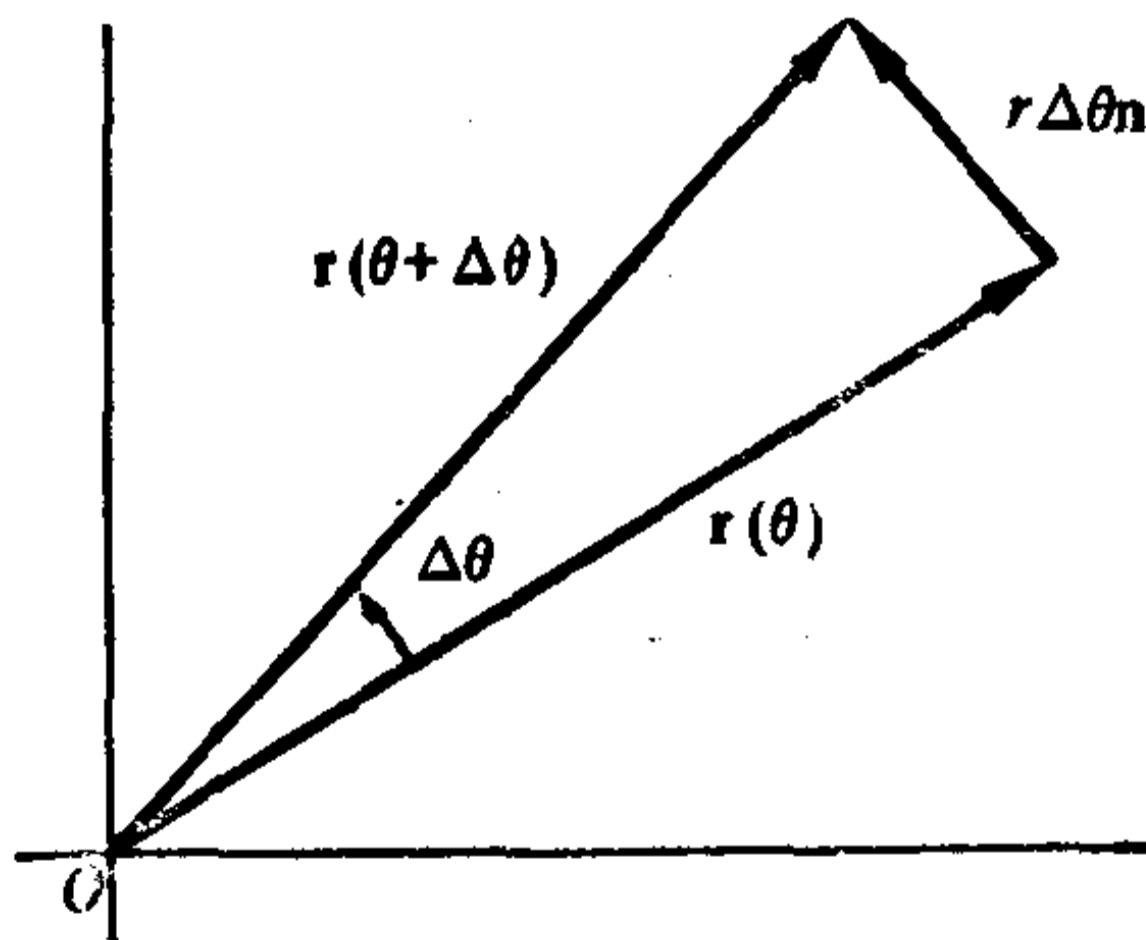


图 1-6 r 关于 θ 的微商

式中第二项是向心加速度项。 θ 方程中的微商是

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta},$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta},$$

这时的方程为

$$\frac{d}{dt}(mr^2\ddot{\theta}) = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = rF_{\theta}.$$

注意,左边正好是角动量的时间微商,右边却是外加力矩,因此我们重又推导出了力矩方程式(1-26)。

2. 阿脱武德机 它是一个具有完全的、不可变约束的保守系的例子(假定滑轮既无摩擦又无质量)。这里显然只有一个独立坐标 x , 另一重物的位置则由两重物间长度为 l 的绳子这样一个约束来决定。势能为

$$V = -M_1gx - M_2g(l - x),$$

动能为

$$T = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)\dot{x}^2.$$

组合两者,拉氏函数的形式为

$$L = T - V = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)\dot{x}^2 + M_1gx + M_2g(l - x).$$

只有一个运动方程,它包含有微商

$$\frac{\partial L}{\partial x} = (M_1 - M_2)g,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M_1 + M_2)\dot{x}.$$

于是得

$$(M_1 + M_2)\ddot{x} = (M_1 - M_2)g$$

或

$$\ddot{x} = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} g,$$

这正是用更为基本的方法得到的熟悉的结果。这一通俗的问题强调指出，在拉格朗日表述的任何一步中都不存在约束力（这里是绳子的张力）。当然也不可能用拉格朗日方法来直接求出绳子的张力。

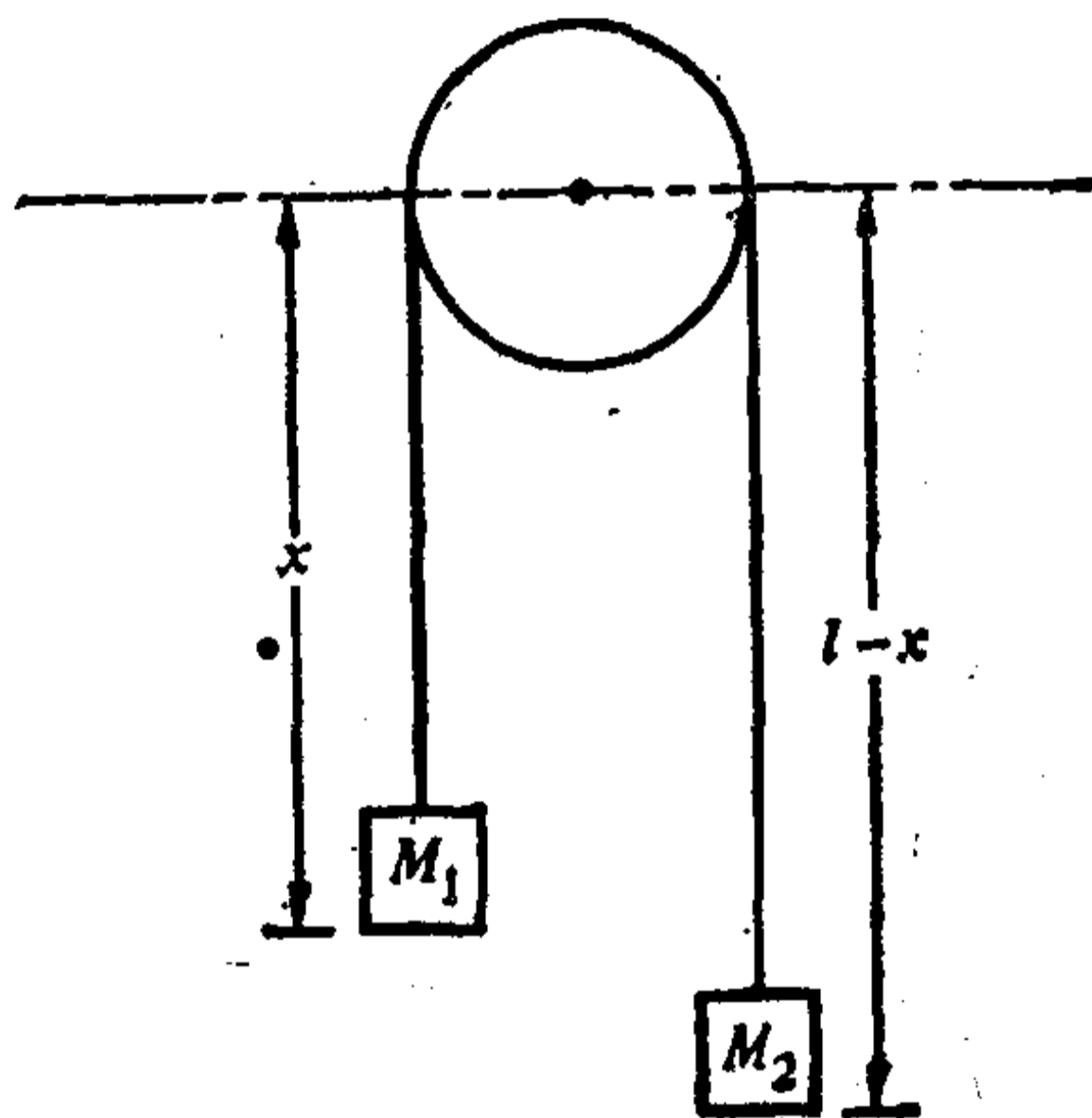


图 1-7 阿脱武德机

3. 在无作用力空间中匀速转动弦线上滑动的珠子 弦线是一直线，并绕垂直于弦线的某固定轴匀速转动。这个例子用来简单地说明与时间相关的约束的情况。它的变换方程当然显含时间：

$$\begin{aligned} x &= r \cos \omega t, \\ y &= r \sin \omega t. \end{aligned} \quad \omega \text{ 是转动角速度.}$$

虽然用求得式(1-71)的相同步骤也能求得 T (这里的 T 与 L 相同), 但直接由式(1-75)着手, 并用关系式 $\dot{\theta} = \omega$ 来表示约

束则更为简单。这时有

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\omega^2).$$

注意,由于式中还有不含 \dot{r} 的附加项,所以 T 不是广义速度的二次齐次函数。于是运动方程为

$$m\ddot{r} - mr\omega^2 = 0$$

或

$$\ddot{r} = r\omega^2,$$

这是一个熟知的结果,珠子将由于向心加速度而向外运动。再次看到,这种方法不可能求得使珠子保持在弦线上的约束力。

推荐参考书目¹⁾

K. R. Symon, *Mechanics* 这是一本出色而又极其详细的中级力学教科书。它有很多长处,能作为本书的入门教材,而且常常能作为本书的补充读物。对于本章内容来讲,特别注意该书关于守恒定理和(象火箭那样的)可变质量系统(见第四章)的讨论,以及关于约束的广泛研究(见第九章)。

W. Hauser, *Introduction to the Principles of Mechanics* 这是另一本中级教程,它具有许多新颖的和原始的观点。特别要注意的是,该书是把(1-53)形式的拉格朗日运动方程当作广义坐标曲线空间内的牛顿运动方程来讨论的。

C. W. Kilmister and J. E. Reeve, *Rational Mechanics* 这是一本中级水准的力学。该书的表述在数学上极为透彻,并且是为攻读数学的学生设计的。特别值得注意的是该书关于各种约束的广泛讨论,以及为了使力学基本概念的表述更为简单而使之公理化的尝试。

C. Ianczos, *The Variational Principles of Mechanics* 该书内容比书名所示更为广博,事实上是所有力学问题的综合性论述,着重讨论了

1) 为了方便起见,每章末的参考书目仅列出简短书名,它们的全称可查阅书末文献目录。

各种表述的基础。书内的一些历史性注释,可能是颇具见地的。

W. F. Osgood, *Mechanics* 该书很久以前就已绝版,但依然值得一找。它的前五章是关于力学课题的简单介绍,作者的长期教学经验给介绍增添了令人愉快的风趣。关于这一点,特别建议读者注意第 102 页!

E. Mach, *The Science of Mechanics* 它对经典力学的一些基本概念作了极好的分析和评价。在该书较早的几个版本中,为相对论在哲学上扫清道路作了大量工作。

R. B. Lindsay and H. Margenau, *Foundations of Physics* 书中第三章包含有经典力学基础的清晰讨论。该书同马赫的著作一起,可作为进一步学习力学基本观念的本质的极好起点。

P. W. Bridgman, "Significance of the Mach Principle," *American Journal of Physics*, 29, 32—36, Jan. 1961 这篇论文讨论了“固定”星系为什么以及在什么程度上可以用来有效地确定一个惯性系。

C. Truesdell, *Essays in the History of Mechanics* 该书的叙述是高度人格化的,也是有说服力的,这些都无可否认。但这些简短的论文充满着强烈的历史感,并具有深奥的学识基础。特别有趣的是“角动量定律从何而来?”这一章,它描述了角动量的各种守恒定理的发展历史。较多注意数学细节以及注重连续系统这两方面,下面一本参考书的第 196 节具有与本书大致相同的见解。

C. Truesdell and R. A. Toupin *The Classical Field Theories* 这本书长达 567 页,是 *Encyclopedia of Physics*(物理学百科全书)卷 3/1 的一部分。顺便提一下,这本近期著作的文献目录 P(p.788f) 中提供了(到 1957 年为止的)有关力学形式公理化论述的一组参考书目。

E. T. Whittaker, *Analytical Dynamics* 这是一本著名的论著,书中用较老的观点对分析力学作了极其详尽的论述。遗憾的是,该书显然具有不喜欢用插图(全书仅四幅)的特点,也不喜欢用矢量记号,并且采用了因被剑桥大学荣誉学位考试所采用而闻名的那种学究式力学问题。然而对于许多专门课题的讨论来讲,本书实际上仍然是唯一的资料来源。作为本章参考的,主要是第 2 章,特别是节 31,它讨论了与速度相关的势。第八章的第 92—94 节谈到了耗散函数。

Lord Rayleigh, The Theory of Sound 在这本经典论著的第一卷第四章中介绍了耗散函数.

习 题

1. 一个原先静止的原子核, 在放射性衰变时发射出一个动量为 $1.73\text{Mev}/c$ 的电子, 在垂直于电子的方向上则发射一个 $1.00\text{Mev}/c$ 的中微子 (Mev 为百万电子伏特, 是近代物理中所用能量单位, 等于 1.60×10^{-6} 尔格. 相应地, Mev/c 是线动量的单位, 等于 5.34×10^{-17} 克·厘米/秒). 试问核沿什么方向反冲? 它的动量等于多少 Mev/c ? 如果剩余核质量为 3.90×10^{-22} 克, 它的动能是多少电子伏特?

2. 地球上粒子的**逃逸速度**是该粒子从地球表面逸出地球引力场所需的最小速度. 如果略去大气阻力, 这个系统就是保守的. 根据势能与动能之和守恒的定理, 证明不考虑月球的影响时, 逸出地球的逃逸速度为 6.95 英里/秒.

3. 火箭是靠从尾部排出的燃烧后废气的动量反作用推进的. 由于这些气体是火箭所带燃料的反应的产物, 所以火箭质量不是常数, 它将随着燃料的消耗而减少. 证明, 如果略去大气阻力, 则在均匀引力场中垂直向上发射的火箭的运动方程为

$$m \frac{dv}{dt} = -v' \frac{dm}{dt} - mg,$$

式中 m 是火箭质量; v' 是逸出气体相对于火箭的速度. 假定质量的时间损失率是一个常数, 试求积这个方程, 得出作为 m 的函数的 v . 再证明, 对于一个原先从静止开始发射的火箭, 如果 v' 等于 6800 英尺/秒, 每秒的质量损失等于原先质量的 $1/60$, 则为了达到逃逸速度, 燃料重量与空火箭重量之比几乎应等于 300!

4. 证明, 对于有着不变质量的单个质点来讲, 运动方程指的是下列动能的微分方程:

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v},$$

但当质量随时间变化时, 则相应的方程为

$$\frac{d(mT)}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{p}.$$

5. 证明, 从任意原点到质心的位置矢量的量值 R 由下式给出:

$$M^2 R^2 = M \sum_i m_i r_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_i m_j r_{ij}^2.$$

6. 假定已经知道一个双质点系统是服从运动方程(1-22)和(1-26)的. 试根据各别质点的运动方程来证明, 两质点间的内力对于弱形式和强形式的作用和反作用定律都是满足的. 这一论证可以推广到任意质点数的系统, 从而证明了导致式(1-22)和(1-26)的那些论证的反论证.

7. 滚动圆盘的约束方程(1-39)是如下形式的一般线性微分约束方程

$$\sum_{i=1}^n g_i(x_1, \dots, x_n) dx_i = 0$$

的特殊情况. 如果要这种约束条件是完全的, 就得找到一个能把它化成一恰当微分的积分函数 $f(x_1, \dots, x_n)$. 显然, 对于所有 $i \neq j$ 的情况来讲, 这样的函数必须保证

$$\frac{\partial(fg_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial(fg_j)}{\partial x_i}.$$

证明, 对于式(1-39)中的任何一个方程都不可能找到这样的积分因子.

8. 两个半径为 a 的轮子装在长度为 b 的公共轴杆的两端, 它们都能独立地转动. 整个装置无滑动地在一平面上滚动. 证明, 有两个非完全约束方程

$$\cos \theta dx + \sin \theta dy = 0,$$

$$\sin \theta dx - \cos \theta dy = a(d\phi + d\phi'),$$

[式中 θ , ϕ 和 ϕ' 与单个竖直圆盘问题中的那些量有着相似的意义, (x, y) 是两轮之间轴杆上某点的坐标] 以及一个完全约束方程

$$\theta = C - \frac{a}{b} (\phi - \phi'),$$

式中 C 是常数.

9. 一质点在 $x-y$ 平面内运动, 所受约束使它的速度矢量总是指向 x 轴上的某点, 该点的横坐标是时间的某一给定函数 $f(t)$. 证明, 如果 $f(t)$ 是可微的, 而在其他方面又是任意的, 则约束是非完全约束.

10. 两个质量为 m 的质点由长为 l 的无重量刚性杆相联结, 它们的质心被约束在一半径为 a 的圆周上运动. 试用广义坐标建立动能表达式.

11. 证明(1-53)形式的拉格朗日方程也能写成

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_j} - 2 \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j.$$

这些方程就是有时称为尼尔森 (Nielsen) 形式的拉格朗日方程.

12. 一质点在空间内运动, 所受力可从下列形式广义势推导而得:

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = V(r) + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L},$$

式中 \mathbf{r} 是从某固定点到质点的矢径, \mathbf{L} 是关于该点的角动量, 而 $\boldsymbol{\sigma}$ 则是空间内的某个固定矢量.

a. 试在式(1-58)基础上求质点所受力的分量, 并分别用笛卡儿坐标和球极坐标表示.

b. 证明, 在这两种坐标系中的分量是按式(1-49)的形式相互关联的.

c. 试求以球极坐标表示的运动方程.

13. 一质点在一平面内运动, 所受力指向力心, 其大小为

$$F = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{\dot{r}^2 - 2\ddot{r}r}{c^2} \right),$$

式中 r 是质点到力心的距离. 求产生这个力的广义势, 并由此求出平面运动的拉氏函数. (F 的这个表达式在韦伯的电动力学中代表两个电荷之间的作用力.)

14. 如果 L 是 n 个自由度的系统的拉氏函数, 并满足拉格朗日方程. 通过直接代入来证明

$$L' = L + \frac{dF(q_1, \dots, q_n, t)}{dt}$$

也满足拉格朗日方程, 其中 F 是它的宗量的某个任意的, 但却是可微的函数.

15. 令 q_1, \dots, q_n 是 n 个自由度的系统的一组独立广义坐标, 该系统的拉氏函数为 $L(q, \dot{q}, t)$. 假定我们通过变换方程

$$q_i = q_i(s_1, \dots, s_n, t) \quad i = 1, \dots, n$$

变换到另一组独立坐标 s_1, \dots, s_n (这种变换称为点变换). 证明, 如果通过变换方程把拉氏函数表达为 s_j, \dot{s}_j 和 t 的函数, 则 L 满足关于 s 坐标的拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial s_j} = 0.$$

换言之, 拉格朗日方程的形式在点变换条件下不变.

16. 某个特殊物理系统的拉氏函数能写成

$$L' = \frac{m}{2} (a\dot{x}^2 + 2b\dot{x}\dot{y} + c\dot{y}^2) - \frac{K}{2} (ax^2 + 2bxy + cy^2),$$

式中 a, b 和 c 是任意常数, 但满足 $b^2 - ac \neq 0$ 这一条件. 试问运动方程如何? 特别是检验一下 $a = 0 = c$ 以及 $b = 0, c = -a$ 这两种情况. 上述拉氏函数所描述的是什么样的物理系统? 证明, 象式(1-56)所定义的、这种系统的常见拉氏函数是通过点变换与 L' 相关联的(见前面习题 15). $b^2 - ac$ 这一数值条件的意义是什么?

17. 试求球面摆的拉格朗日运动方程 (球面摆是由无重量刚性杆悬挂起来的质点).

18. 一质量为 m 的质点作一维运动, 因而它的拉氏函数为

$$L = \frac{m^2 \dot{x}^4}{12} + m\dot{x}^2 V(x) - V^2(x),$$

式中 V 是 x 的某一可微函数. 求 $x(t)$ 的运动方程, 并在这一方程的基础上描述系统的物理本质.

19. 质量分别为 m_1 和 m_2 的两个质点, 由一根穿过光滑桌面上一小孔的弦线相联结, m_1 静止在桌面上, m_2 悬挂着. 假设 m_2 仅在垂直线上运动, 试问系统的广义坐标是什么? 列出系统的拉格朗日方程, 如有可能, 讨论一下其中任何一个可能具有的物理意义. 把问题归结为一个简单的二阶微分方程, 求出这个方程的初次积分. 它的物理意义又如何? (只要考虑 m_1 和 m_2 都不穿过这个小孔的运动.)

20. 试求图 1-4 所示复摆的拉氏函数和运动方程, 摆的长度为 l_1

和 l_2 , 相应的质量为 m_1 和 m_2 .

21. 电磁场在矢势和标势的规范变换下不变, 这两个变换为

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\psi(\mathbf{r}, t), \quad \phi \rightarrow \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial\psi}{\partial t},$$

式中 ψ 是任意(但却是可微的)函数. 这种规范变换对电磁场内运动质点的拉氏函数有何影响? 运动是否会受到影响?

22. 当存在能够从耗散函数 $\frac{1}{2} k v^2$ 求得的摩擦力时, 求重力作用下

垂直下落质点的运动方程. 求积这个方程, 得出作为时间函数的速度, 并证明, 从静止开始下落的最大可能速度为 $v = mg/k$.

第二章 变分原理和拉格朗日方程

2-1 哈密顿原理

前章所述拉格朗日方程的推导，是从对系统的瞬态以及关于瞬态的微小虚位移的考虑出发的，也就是从达朗伯原理那样的“微分原理”出发的。还可能根据另一原理推得拉格朗日方程，这一原理考虑的是系统在 t_1 和 t_2 两时刻之间的整个运动，以及整个运动对于实际运动的微小虚变化。这种性质的原理称为“积分原理”。

在论述积分原理之前，必须先用更为严密的语言来阐述“系统在时刻 t_1 和 t_2 之间的运动”一语的含义。我们用 q_1, \dots, q_n 这 n 个广义坐标的数值来描述系统的瞬时位形，该位形对应于(由 q 坐标构成 n 个坐标轴的)笛卡儿超空间中某个特定点。这一 n 维空间即所谓位形空间。随着时间的推移，系统的状态发生变化，系统点在位形空间内运动，从而描绘出一条称为“系统运动路径”的曲线。前面所说“系统的运动”即被看作是系统点沿着位形空间内的这种路径所作的运动。时间在形式上可以看作是曲线的一个参量，而路径上的每一个点与一个或更多个时间值相关联。必须强调的是，正象广义坐标没有必要与位置坐标相关联一样，位形空间也没有必要与实际三维空间相关联，位形空间内的运动路径也没有必要与实际质点的空间路径相类比；路径上的每一个点代表整个系统在某给定时刻的位形。

积分哈密顿原理描述了(除约束力外的)所有力都是由某个广义标势推得的那些力学系统的运动，这种势可以是坐标、

速度和时间的函数。借用兰克佐斯(Lanczos)采用的术语,把这种系统称为单演系统¹⁾。由于这里提到的势仅是位置坐标的显函数,所以单演系统也是保守的(见节 1-2)。就单演系统而言,哈密顿原理可阐述为:系统从 t_1 时刻到 t_2 时刻的运动,应保证线积分

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (\text{式中 } L = T - V) \quad (2-1)$$

对于正确运动路径有一平稳值²⁾。

也就是说,在系统点从 t_1 时刻位置过渡到 t_2 时刻位置的所有可能路径中,实际上将沿着保证积分式(2-1)之值为平稳值的那条路径而移动。至于线积分的“平稳值”这一术语,我们指的是,沿给定路径的积分与沿所有紧邻路径(即与前者相差一无限小位移的那些路径)的积分在一级无限小范围内具有相同的值(见图 2-1)。线积分的平稳值概念相当于一般函

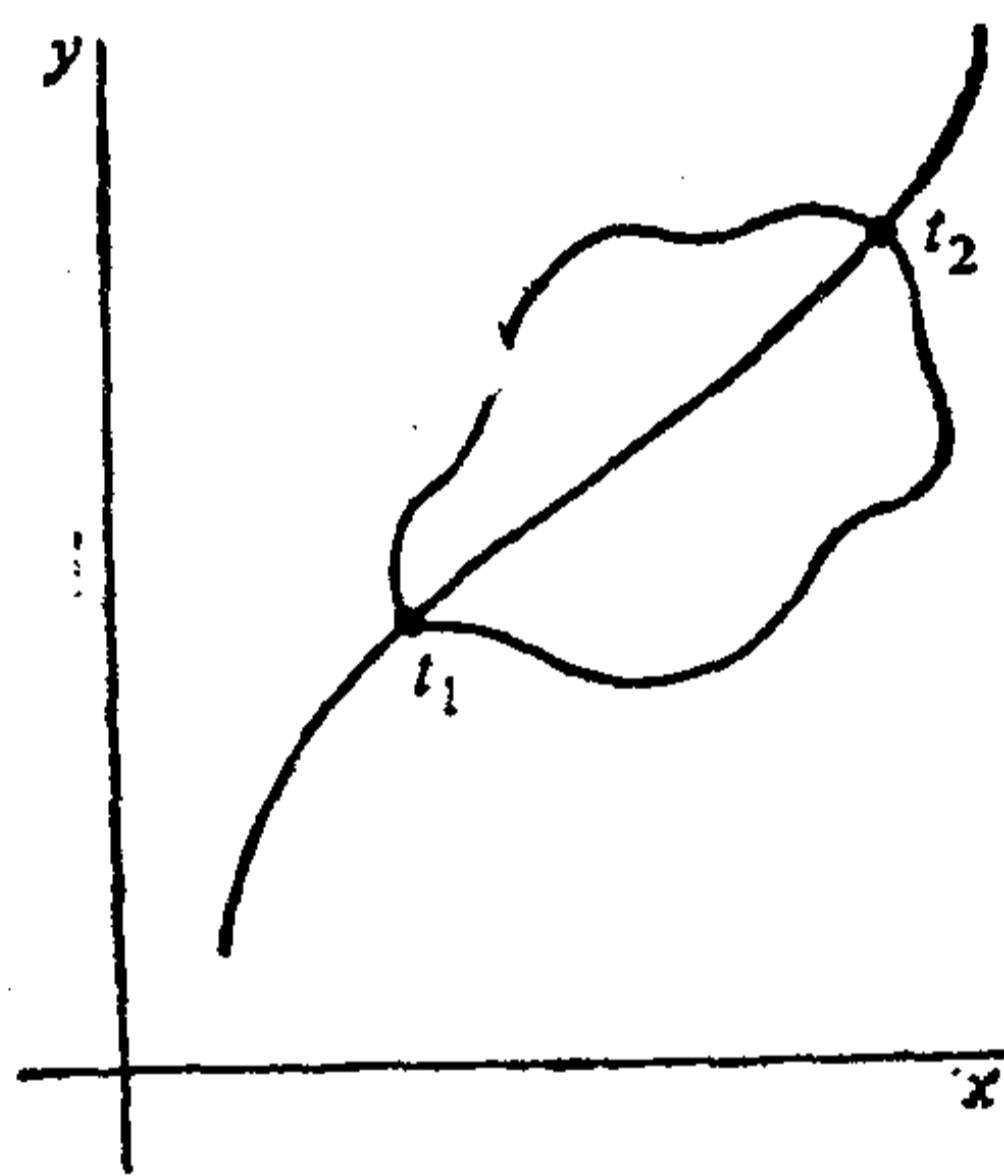


图 2-1 位形空间内系统点的路径

- 1) 见 C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics*, 4th ed. (多伦多: 多伦多大学出版社, 1970), 第 30 页。这一名称意味着所有的力都是由单个函数产生的。
- 2) I 这个量可称为作用量或作用量积分。

数论中的一阶微商的零值。

我们还能够把哈密顿原理概括为另一说法，即所作运动保证线积分 I 对于固定的 t_1 和 t_2 的变分等于零：

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) dt = 0. \quad (2-2)$$

只要系统的约束是完全约束，哈密顿原理式(2-2)就是拉格朗日方程(1-57)的必要而又充分的条件。例如，人们能够证明，从拉格朗日方程能直接导出哈密顿原理（见 Whittaker, *Analytical Dynamics*, 4th ed., p. 245）。但我们宁可证明它的逆定理，亦即证明从哈密顿原理能导出拉格朗日方程，这是一条更为重要的定理。哈密顿原理是推导出运动方程的充分条件这一点，使我们能够以哈密顿原理而不是以牛顿运动定律作为基本假设来建立单演系统的力学。采用这种表述是有好处的，例如，由于积分 I 对于用来表示 L 的广义坐标系显然是不变的，因此不论广义坐标如何变换，运动方程永远具有拉格朗日形式。更为重要的是，当我们试图象场论中那样用经典力学的数学表达方式描述非力学系统时，采用这种变分原理来表述确是必由之路。

2-2 变分计算的某些技巧

在论证拉格朗日方程确实得自式(2-2)以前，必须先离题讨论一下变分计算的方法，因为这种计算的主要问题之一是设法找到一条曲线，使某给定线积分有一平稳值。

先考虑一个本质上是一维形式的问题。假设有一个函数 $f(y, \dot{y}, x)$ ，它是在 x_1 和 x_2 两值之间的某条路径 $y = y(x)$ 上定义的。这里的 \dot{y} 是 y 对 x 的微商，即 $\dot{y} \equiv \frac{dy}{dx}$ 。我们希望在 x_1 和 x_2 之间能找到一条特有的路径 $y(x)$ ，使得函数 f 的线积分

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y, \dot{y}, x) dx \quad (2-3)$$

[相对于同正确函数 $y(x)$ 相差无限小的那些路径来讲]有一平稳值。这里的变量 x 起着参量 t 的作用；另外，我们也只考虑这样一些变化路径，对于这些路径有

$$y(x_1) = y_1 \text{ 以及 } y(x_2) = y_2.$$

(见图2-2)。注意，该图并不代表位形空间。在一维位形空间内，正确路径与其他变化路径都是连结 y_1 与 y_2 的直线段；各路径之间只存在 y 对 x 的函数关系方面的差别。

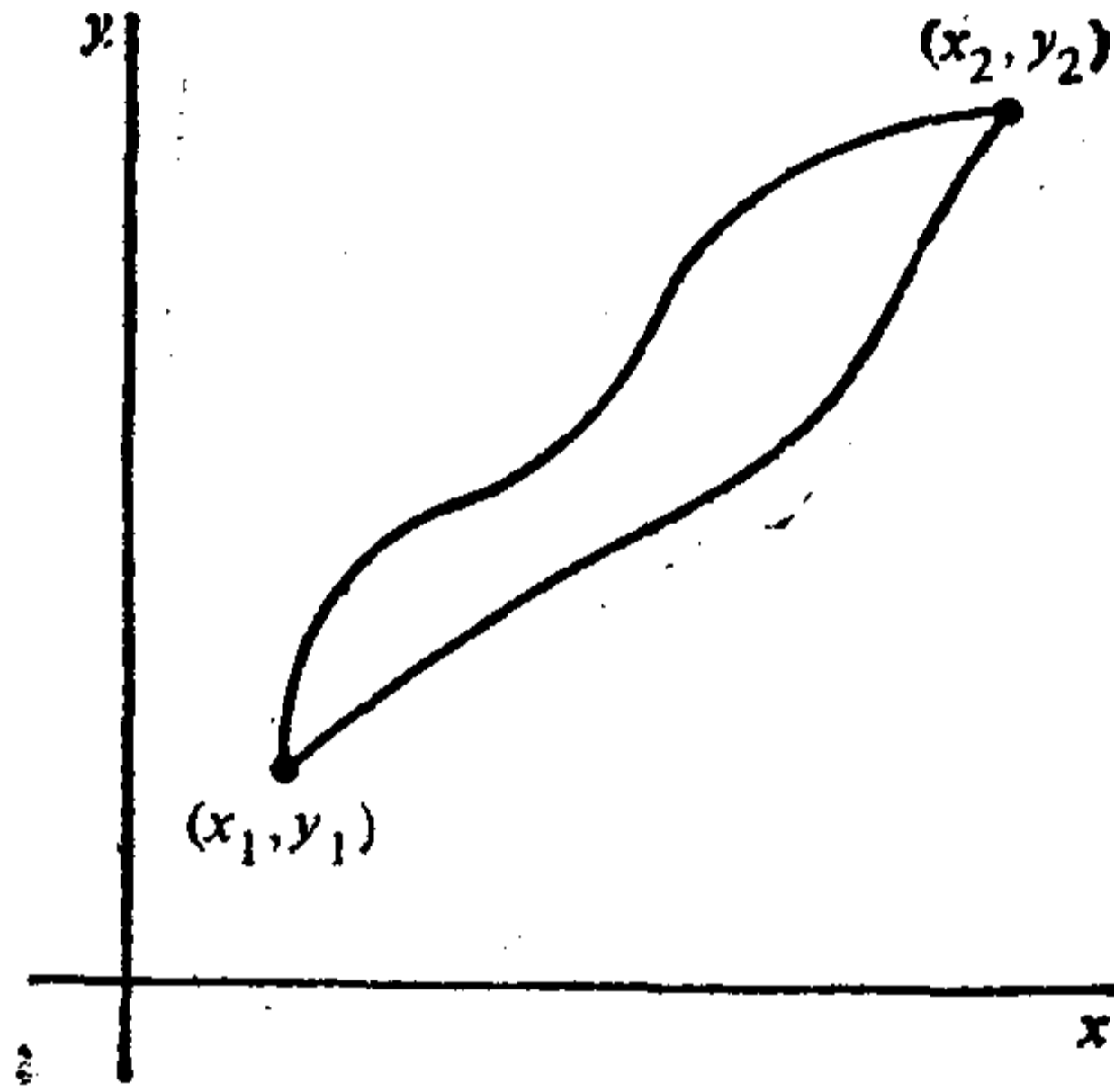


图 2-2 一维极值问题中的不同路径

我们所取问题的表达形式，使我们能够用熟知的微分计算顺序来求取函数的平稳点。由于相对于任何相邻路径来讲，正确路径的 J 必须有一平稳值，因此，相对于用无限小参量 α 标记的某组特定相邻路径，该变分必须为零。这样一组路径可用 $y(x, \alpha)$ 表示，并用 $y(x, 0)$ 代表正确路径。例如，如果我们选取在 $x = x_1$ 和 $x = x_2$ 处为零的某一函数 $\eta(x)$ ，那么，一组可能的变化路径为

$$y(x, \alpha) = y(x, 0) + \alpha \eta(x). \quad (2-4)$$

为简单起见, 假定正确路径 $y(x)$ 和辅助函数 $\eta(x)$ 都是良性函数——在 x_1 和 x_2 之间是连续的和非奇异的, 并在这相同区间内有连续的一阶和二阶微商. 对于任何这种参量曲线族, 式(2-3)中的 J 也是 α 的函数:

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x, \alpha), \dot{y}(x, \alpha), x) dx, \quad (2-5)$$

而得到平稳点的条件则是大家熟知的

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} = 0. \quad (2-6)$$

采用常用的积分号下微分法, 即得

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} \right\} dx. \quad (2-7)$$

今考虑上式中的第二个积分

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \alpha} dx.$$

经分部积分, 上式成为

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \alpha} dx &= \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right|_{x_1}^{x_2} \\ &\quad - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx. \end{aligned} \quad (2-8)$$

对所有这些变分曲线附加的条件是它们都必须通过 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 两点, 因而 y 对 α 的偏微商在 x_1 和 x_2 处必须为零. 所以式(2-8)中的第一项等于零, 式(2-7)成为

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx.$$

平稳值条件式(2-6)则等同于方程

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)_0 dx = 0. \quad (2-9)$$

现在式(2-9)中的 y 对 α 的偏微商是 x 的某个函数, 它除了连续性和端点条件外则是任意的。例如, 对式(2-4)所示的变化路径的特有参量族, 它是任意函数 $\eta(x)$ 。这样就能把变分计算的所谓“基本引理”应用于式(2-9)。该引理表明, 对于经过两次微商后仍是连续的所有任意函数 $\eta(x)$, 如果

$$\int_{x_1}^{x_2} M(x)\eta(x) dx = 0, \quad (2-10)$$

则 $M(x)$ 在 (x_1, x_2) 区间内必定恒等于零。虽然可以从参考书目所列有关变分计算的教材中找到引理的正式的数学证明, 但也不难直观地看出它的正确性。我们可以假想构成一个函数 η , 它在区间内任何选定点的紧邻都是正的, 而在除此之外的任何地方都等于零。因此, 只有当 $M(x)$ 在该(任意)选定点处为零时, 式(2-10)才能成立, 这表明, M 必定在整个区间内都等于零。所以从式(2-9)以及基本引理即能断言: 只当

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) = 0 \quad (2-11)$$

时, J 才能有一平稳值。

微分量

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)_0 d\alpha \equiv \delta y \quad (2-12)$$

代表 x 点处变化路径与正确路径 $y(x)$ 的无限小偏离, 因而相当于第一章中介绍的虚位移(因而记为 δy)。同样, J 相对于正确路径的无限小变化记为

$$\left(\frac{dJ}{d\alpha} \right)_0 d\alpha \equiv \delta J. \quad (2-13)$$

因而 J 对于正确路径应是平稳的这一断言能表达为

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right\} \delta y dx = 0,$$

这要求 $y(x)$ 满足微分方程(2-11)。通过式(2-12)和(2-13)

引进的 δ 记号可用作论述积分变分的方便的缩略记号, 只要经常记住, 它是用来处理式(2-4)那样的一些变化路径参量族的。

现在我们可以考虑应用式(2-11) (它显然象一个拉格朗日方程)的某些简单例子:

1. 平面上两点间的最短距离 平面上的弧长元为

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

1, 2 两点间任一曲线的总长度为

$$I = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

要求曲线是一最短路径的条件是 I 为一极小值. 这是式(2-3)所示极值问题的一个例子, 这里的

$$f = \sqrt{1 + \dot{y}^2}.$$

将

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}$$

代入式(2-11), 即得

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \right) = 0$$

或

$$\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = c,$$

式中 c 为一常数. 要这个解能适用, 必须有

$$\dot{y} = a,$$

式中 a 是一常数, 它与 c 的关系为

$$a = \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}}.$$

这显然是直线方程

$$y = ax + b,$$

式中 b 是另一积分常数。严格说来，我们仅仅证明了这条直线是一极值路径，但它在这个问题中显然还是一个极小值。

a 和 b 这两个积分常数决定于曲线通过两个端点 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 的条件。

同样，若用球面上位置的角度坐标表示球面弧长，即能得到球面上两点间的最短距离。一般地讲，在给定表面上给出两点间最短距离的那些曲线称为表面的短程线。

2. 最小迴转表面 假设在两个固定端点 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 之间作一条曲线，并让它绕 y 轴旋转以形成一个迴转表面（见图 2-3）。现在的问题是要找出使表面面积为极小的那条曲线。

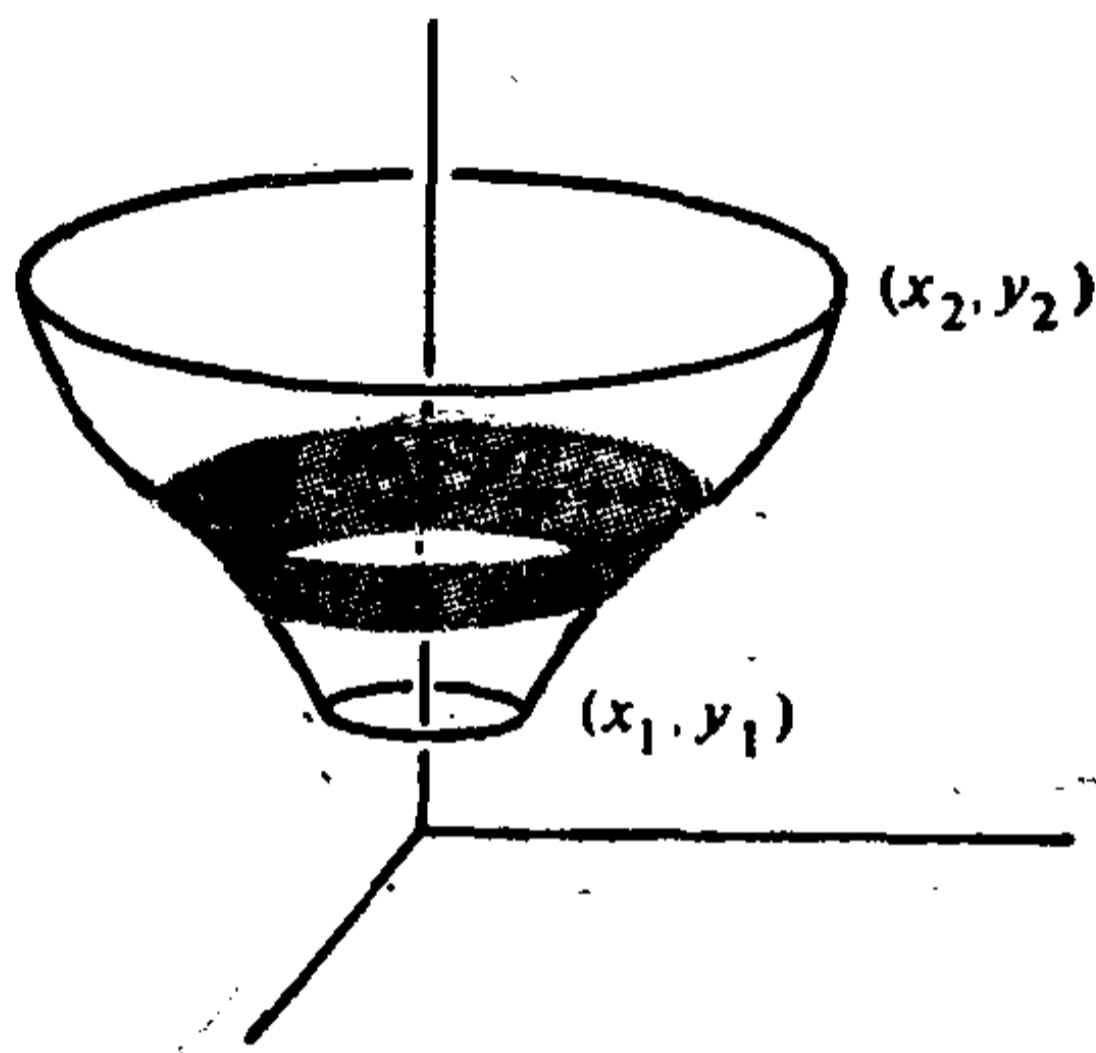


图 2-3 最小迴转表面

表面上狭带面积为 $2\pi x ds = 2\pi x \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx$ ，总面积为

$$2\pi \int_1^2 x \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx.$$

式(2-11)又一次给出了这个积分的极值，这里

$$f = x \sqrt{1 + \dot{y}^2},$$

而

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{x\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}.$$

在这种情况下,式(2-11)成为

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \right) = 0$$

或者

$$\frac{x\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = a,$$

这里的积分常数 a 明显地小于 x 的极小值. 平方上述方程并提出因子 \dot{y}^2 , 即得

$$\dot{y}^2(x^2 - a^2) = a^2,$$

或者解出此式, 即得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

根据 a 的性质, 这个微分方程的一般解为

$$y = a \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} + b = a \operatorname{arc} \cosh \frac{x}{a} + b$$

或

$$x = a \cosh \frac{y - b}{a},$$

这是悬链线方程. a 和 b 两个积分常数原则上也由曲线通过两给定端点这一必要条件来确定. 然而必须指出, 当仔细探究时会发现, 解的性质比这里所考虑的要复杂得多. 对于某些成对端点来讲, 确实能得到单值的积分常数 a 和 b . 但对于另外一些端点却会出现两个悬链线解, 有一些其他场合, 则根本得不到 a, b 的可能值. 还必须记住: 式(2-11)代表了某种条件, 它使所得的曲线 $y(x)$ 经两次微商仍能连续, 从而保

证积分是平稳的。所以悬链线解并不永远代表极小值，它可能给出“拐点”。对于若干端点组合来讲，迴转表面的绝对极小值是由某些直线段组成的曲线给出的——从第一个端点出发平行于 x 轴直达 y 轴，然后沿 y 轴到达 $(0, y_2)$ 点，再沿直线到达第二个端点。这样的曲线具有不连续的一阶微商，不可能指望把它作为式(2-11)的解。这个例子强调了对平稳条件的求导和意义所加的限制，因而是有价值的。更详细的讨论将在某些习题中以及所列变分计算教本中找到。

3. 最速落径问题 这个著名的问题是要找出一条连接两点的曲线，使一个质点在重力作用下从静止开始沿这条曲线由较高点移向较低点的时间为最短。

如果 v 是沿着这条曲线的速率，则降落 ds 弧长所需的时间为 ds/v ，所说的问题就是算出积分

$$t_{12} = \int_1^2 \frac{ds}{v}$$

的极小值。如果 y 值从释放的起点向下量度，则质点的能量守恒定理可以表达为

$$\frac{1}{2} mv^2 = mgy$$

或

$$v = \sqrt{2gy}.$$

因此， t_{12} 的表达式成为

$$t_{12} = \int_1^2 \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx.$$

f 则等于

$$f = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}.$$

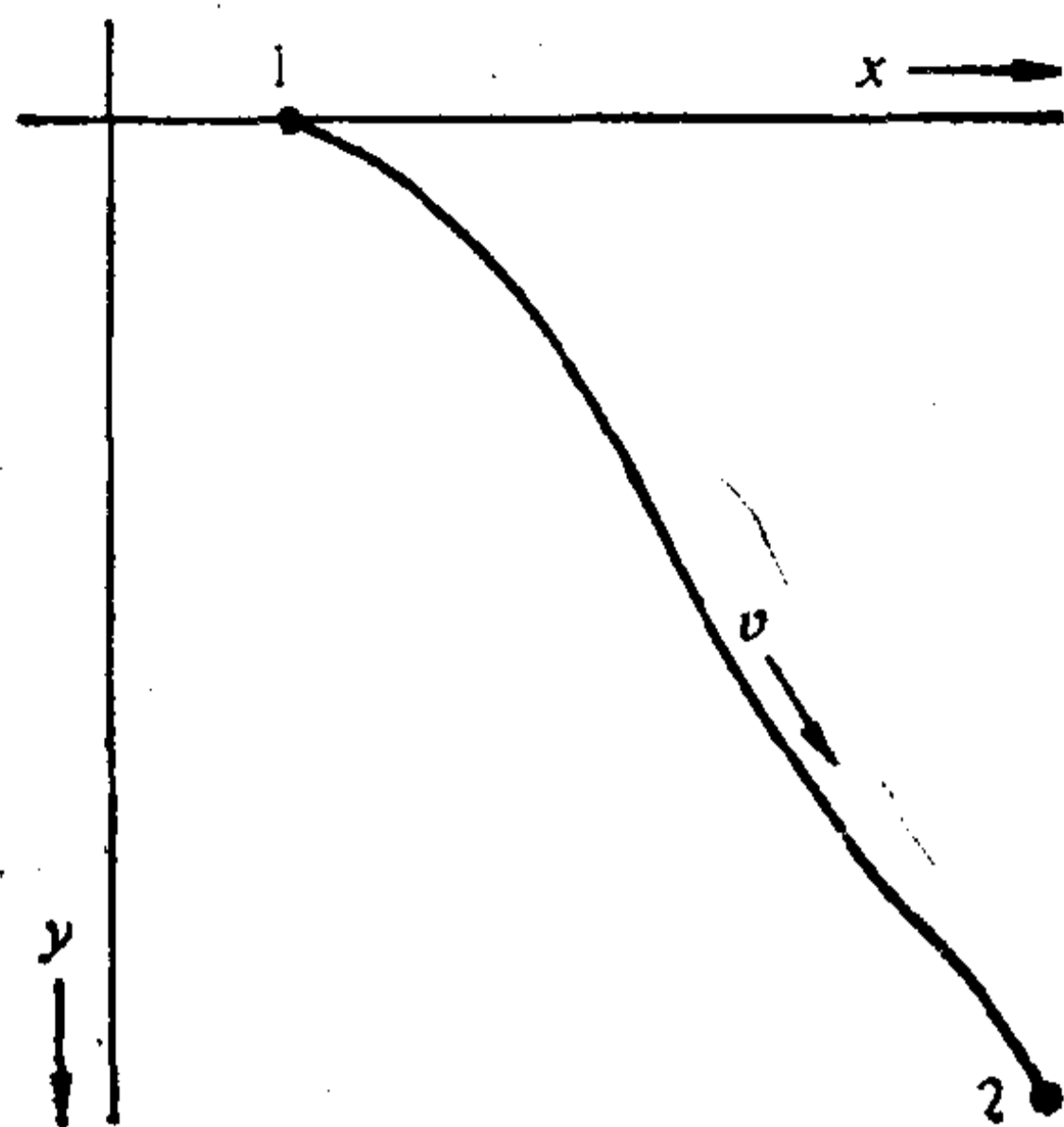


图 2-4 最速落径问题

把这种形式的 f 代入式(2-11), 积分将是直捷了当的, 我们将把它留作本章的习题之一。最速落径问题在数学史上是有名的, 因为正是由于伯努利对这个问题的分析, 才使变分计算得以正式创立。

2-3 由哈密顿原理推导拉格朗日方程

基本的变分计算问题极易推广到 f 是许多独立变量 y_i 及其微商 \dot{y}_i 的函数的情况 (当然, 所有这些量都被认为是参变量 x 的函数)。因此, 要象前面一样来求得积分 J 的变分

$$\delta J = \delta \int_1^2 f(y_1(x), y_2(x), \dots, \dot{y}_1(x), \dot{y}_2(x), \dots, x) dx, \quad (2-14)$$

同样, 只要把 J 看成是标志某组可能曲线 $y_i(x, \alpha)$ 的参量 α 的函数就可以了。为了引进 α , 我们可以令

$$\begin{aligned} y_1(x, \alpha) &= y_1(x, 0) + \alpha \eta_1(x), \\ y_2(x, \alpha) &= y_2(x, 0) + \alpha \eta_2(x), \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2-15)$$

这里的 $y_1(x,0)$ 和 $y_2(x,0)$ 等是极值问题的(待求)解; η_1 和 η_2 等则是 x 的独立函数, 它们在那些端点处等于零, 而且经过两次微商后仍是连续的, 但在其他方面则是完全任意的. 计算步骤与前面相同. J 的变分将借助于方程

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} d\alpha = \int_1^2 \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \alpha} d\alpha \right) dx \quad (2-16)$$

给出. 我们仍用分部积分法来计算式(2-16)中的第二个和式的积分:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial^2 y_i}{\partial \alpha \partial x} dx &= \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} \right|_1^2 \\ &\quad - \int_1^2 \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) dx, \end{aligned}$$

因为所有曲线都通过两个固定的端点, 所以式中第一项为零. 代入式(2-16), δJ 成为

$$\delta J = \int_1^2 \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) \delta y_i dx, \quad (2-17)$$

同式(2-12)一样, 式中变分 δy_i 为

$$\delta y_i = \left(\frac{\partial y_i}{\partial \alpha} \right)_0 d\alpha.$$

由于变量 y 是独立的, 所以变分 δy_i 也是独立的 [例如, 函数 $\eta_i(x)$ 将是彼此独立的]. 因此, 根据基本引理的明显引伸 [见式(2-10)], 要 δJ 等于零, 条件是 δy_i 的系数必须分别为零:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2-18)$$

式(2-18)是式(2-11)适当推广到各种变量的结果, 此式称为欧拉-拉格朗日微分方程. 对于它们的解所代表的曲线来讲, (2-14)形式的积分的变分等于零. 此外, 基本变分问题的进一步推广也完全可能. 如果把 f 看作是更高阶微商 \ddot{y} , $\ddot{\ddot{y}}$ 等的

函数，就会得到与式(2-18)不同的方程。甚至还可以推广到有多种参量 x_j ，因而积分也是多重的情况，这时的 f 还包含有 y_i 对各种参量 x_j 的变量微商。最后，还可以考虑端点不固定的情况下的变分。

这里推导得的一切对于现在的目的已经是足够的了，因为哈密顿原理中的积分

$$I = \int_1^2 L(q_i, \dot{q}_i, t) dt \quad (2-19)$$

在某种变换下正好是(2-14)所规定的形式，这些变换是

$$\begin{aligned} x &\rightarrow t \\ y_i &\rightarrow q_i \\ f(y_i, \dot{y}_i, t) &\rightarrow L(q_i, \dot{q}_i, t). \end{aligned}$$

在推导式(2-18)时，认为 y_i 变量是独立的。因此，与哈密顿原理有关的相应条件是广义坐标必须独立，即要求约束是完全的。这样，对应于积分 I 的欧拉-拉格朗日方程就变成了拉格朗日运动方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

这就达到了我们预期的目标：证明了对于具有完全约束的单演系统来说，可由哈密顿原理推导得拉格朗日方程。

2-4 把哈密顿原理扩展到非完整系

人们至少在形式上能把哈密顿原理推广到包括一定种类的非完整系。在从哈密顿原理或达朗伯原理推导拉格朗日方程的过程中，当把 q_i 变量看作彼此独立时，直至最后才会出现完全约束这一需要。对于非完整系，广义坐标不是彼此独立的，不可能通过 $f(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0$ 这种形式的约束方程使它们的数目进一步减少。因此， q_i 都是独立的这一说法不再正确。

在变分原理论述中必须予以考虑的另一不同之处是构成变化路径的方法的差别。在节 2-2 的讨论中已指出， δy （或 δq ）代表的是从真实路径上一点到紧邻变化路径上某点的虚位移。但对于独立坐标，有意义的是最终的变化路径，而不是这条变化路径是怎样构成的。当坐标并不独立，而是受到约束关系制约时，则变化路径是否由符合各种约束的位移所构成，就成为重要的了。特别是虚位移是否能够满足各种约束就更重要。

看来，要根据变分原理来适当而又直截了当地论述非完整系，必须要求约束方程的形式能够表达成

$$\sum_k a_{lk} dq_k + a_{ll} = 0, \quad (2-20)$$

这是把各个 q 微分连结起来的线性关系式。式中下标 l 表明这样的方程不止一个。今假设共有 m 个，即 $l = 1, 2, \dots, m$ 。应注意的是， a_{lk} ， a_{ll} 可以是 q 和时间的函数。

人们往往希望那些使变化路径或者构成变化路径的位移能满足(2-20)形式的约束。但已证明，除非式(2-20)是可积的，否则根本不可能构成这样的变化路径¹⁾，在这种情况下的约束实际上是完全约束。但若变化路径是根据真实运动的虚位移来构成的，那么，导致正确运动方程的变分原理还是能够得到的。这时，适合那些虚位移的约束方程为

$$\sum_k a_{lk} \delta q_k = 0, \quad (2-21)$$

于是变化路径一般将不会满足式(2-20)。

现在我们可以利用式(2-21)把虚位移的数目缩减到全是独立的虚位移。用来消去那些多余虚位移的方法是拉格朗日

1) 例如，可参阅 H. Rund, *The Hamilton-Jacobi Theory in the Calculus of Variations* (New York: Van Nostrand, 1966), 第五章。

乘子法。如果式(2-21)成立,则

$$\lambda_l \sum_k a_{lk} \delta q_k = 0 \quad (2-22)$$

也成立。上式中的 $\lambda_l (l = 1, 2, \dots, m)$ 是某些待定量, 一般说来, 它们是坐标和时间 t 的函数。另外, 哈密顿原理

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (2-2)$$

被认为对于非完整系是成立的。根据节2-2的研究, 哈密顿原理将意味着

$$\int_1^2 dt \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k = 0. \quad (2-23)$$

如果把式(2-22)对 l 求和, 并把所得结果从点 1 到点 2 对时间求积分:

$$\int_1^2 \sum_{k,l} \lambda_l a_{lk} \delta q_k dt = 0, \quad (2-24)$$

即能把式 (2-23) 与加于虚位移 δq_k 的 m 个约束方程组合起来。式(2-23)和式(2-24)之和就是关系式

$$\int_1^2 dt \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_l \lambda_l a_{lk} \right) \delta q_k = 0. \quad (2-25)$$

当然, 那些 δq_k 仍然不是独立的; 它们由 m 个(2-21)关系式相关联。换句话说, 当最初的 $n - m$ 个 δq_k 可以独立选定时, 剩下的 m 个则必须由式(2-21)来确定。不过, λ_l 的数值仍由我们任意给定。今假设, 我们选定的 λ_l 适合于方程

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_l \lambda_l a_{lk} = 0, \quad (2-26)$$

$$k = n - m + 1, \dots, n,$$

这组方程具有最后 m 个 q_k 变量的运动方程的性质。我们可以用式(2-26)确定的 λ_l 把式(2-25)表达成

$$\int_1^2 dt \sum_{k=1}^{n-m} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_l \lambda_l a_{lk} \right) \delta q_k = 0. \quad (2-27)$$

这里的 δq_k 都是独立的. 因此有

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_l \lambda_l a_{lk} = 0, \\ k = 1, 2, \dots, n-m. \quad (2-28)$$

把式(2-26)和式(2-28)组合起来,最后即得非完整系的全套拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_l \lambda_l a_{lk} \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2-29)$$

但是事情还没有完,因为我们现在有 $n+m$ 个未知量,即 n 个坐标 q_k 和 m 个拉格朗日乘子 λ_l ,而式(2-29)总共只给我们 n 个方程. 当然,另外所需的方程正好是连结那些 q_k 的约束方程(2-20),不过现在它们被看作是一阶微分方程

$$\sum_k a_{lk} \dot{q}_k + a_{li} = 0, \quad (2-30)$$

方程(2-30)和(2-29)一起构成了 $n+m$ 个未知量的 $n+m$ 个方程.

我们在这个过程中得到的比预期的要多. 我们不仅得到了原来想求的那些 q_k , 而且还得到了 m 个 λ_l . 那么这些 λ_l 的物理意义是什么呢? 假设去掉加于系统的那些约束, 代之以使系统运动保持不变的一些外力 Q'_k , 运动方程将依然保持相同. 显然,那些外加作用力必须等于那些约束力,因为这些加于系统的外力就是为了满足约束条件的. 在 Q'_k 这些力的作用下,运动方程为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q'_k. \quad (2-31)$$

但这些方程必须同式(2-29)相一致。所以我们能令 $\sum \lambda_l a_{lk}$ 与 Q_k (广义约束力) 相等。在这类问题中, 我们并不是真的从表述中消去了约束力, 只是把它们作为解答的一部分来处理而已。

虽然并不明显, 但这里对非完整系所用的哈密顿原理的形式也要求约束在虚位移中不作功。只要把哈密顿原理改写成

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} T dt - \delta \int_{t_1}^{t_2} U dt = 0$$

的形式, 即不难看出这一点。如果我们按节 2-3 中的步骤来求对广义势所求积分的变分, 原理的形式将成为

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left(\frac{\partial U}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \right) \right) \delta q_k dt;$$

或者根据式(1-58), 把它写成

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = - \int_{t_1}^{t_2} \sum_k Q_k \delta q_k dt. \quad (2-32)$$

取这种形式时, 哈密顿原理表明: 在相邻两路径间动能的时间积分之差等于路径间虚位移过程中所作功的时间积分的负值。这里提到的功, 仅仅是可从广义势导得的力所作的功。如果我们要使同一个哈密顿原理对于完整系和非完整系都适合, 就要求附加的非完全约束力在 δq_k 这一位移期间不作功。这一限制类似于早先提到的条件, 即完全约束力的虚功也等于零(见节 1-4)。实际上, 这一限制对应用并无多大影响, 正象大多数问题那样, 非完全形式的约束始终与无滑动的滚动联系在一起, 这种情况下的约束当然是无功约束。

的确, 如果我们一开始就假设约束都是无功约束, 则导出式(2-31)的那些物理论证都能直接加以推广, 并用来导出非完整系的全套拉格朗日方程(2-29)。约束力虚功为零这一条

件能表达成

$$\sum_k Q'_k \delta q_k = 0. \quad (2-33)$$

同时,约束方程又指出,

$$\sum_k a_{lk} \delta q_k = 0 \quad l = 1, 2, \dots, m. \quad (2-21)$$

因此,如果常力为

$$Q'_k = \sum_l \lambda_l a_{lk},$$

式(2-33)即能得到满足,式中的 λ_l (至此仍)是待定乘子. 余下的论述可以照前面从式(2-28)开始的步骤来进行¹⁾.

注意,(2-20)式并不是非完全约束的最普遍型式,例如,它并不包括不等式形式的约束方程. 但是,它却包含有完全约束. 完全约束方程

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0 \quad (2-34)$$

等同于微分方程

$$\sum_k \frac{\partial f}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0, \quad (2-35)$$

此式在形式上与式(2-20)相一致,其系数为

$$a_{lk} = \frac{\partial f}{\partial q_k}, \quad a_{lt} = \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (2-36)$$

因此,当(1)不便把所有 q 都化为独立坐标,或(2)有可能求得约束力时,也可以把拉格朗日乘子法用于完全约束的情况.

作为这种方法的例子,考虑下面这个极为通俗的示例

1) 鉴于非完整系变分原理表述相当困难,而运动方程相对讲又比较容易直接求得,这自然会怀疑到变分方法在此情况下究竟有多大用处. 正因为这个道理,今后对变分原理及其结果的讨论,将只限于广义坐标为独立的那些完整系.

——一个从斜面上无滑动滚下的圆环。这一例子中的“滚动”约束确实是完全约束，但这个事实对于讨论无关紧要。另一方面，把圆环置于斜面上这一完全约束将通过广义坐标的选择来体现。

如图 2-5 所示，两个广义坐标是 x 和 θ ，滚动约束方程为

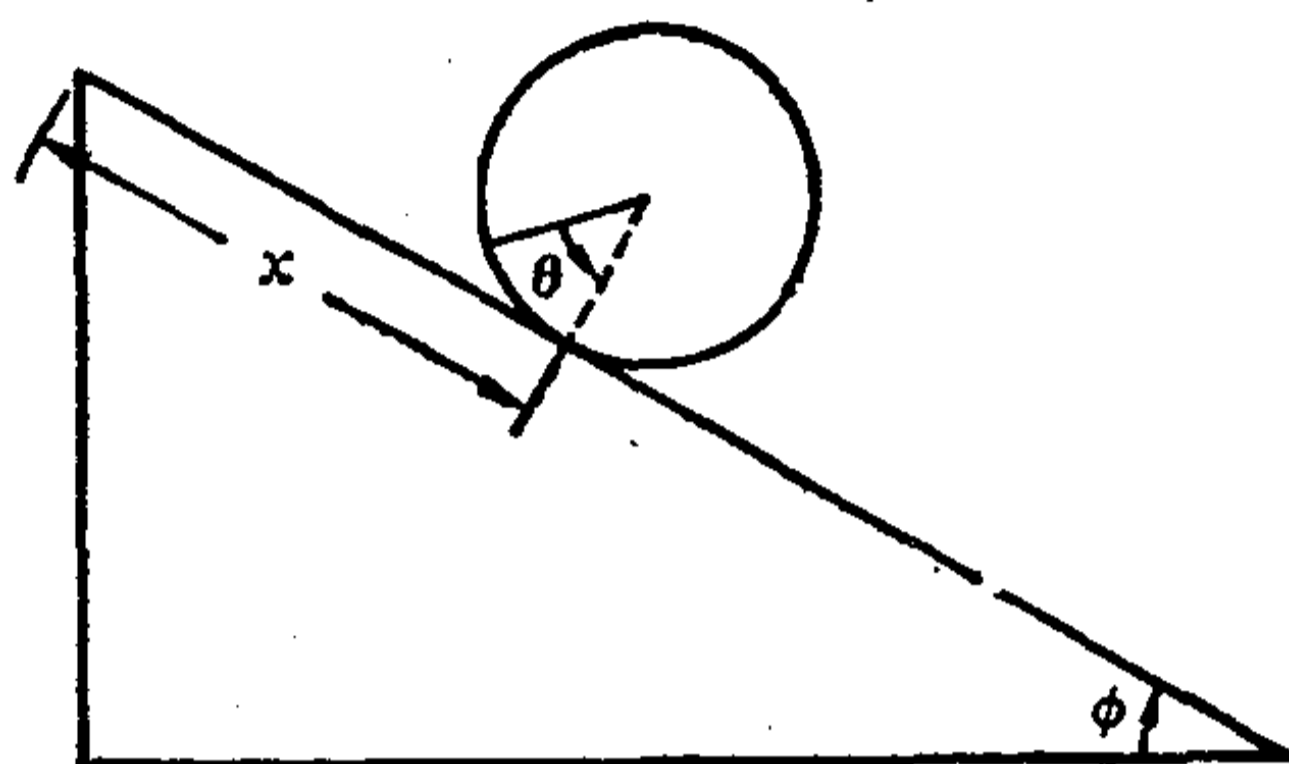


图 2-5 沿斜面滚下的圆环

$$rd\theta = dx.$$

动能可以分解为质心运动的动能加上相对于质心所作运动的动能：

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M r^2 \dot{\theta}^2.$$

势能则为

$$V = Mg(l - x) \sin \phi,$$

式中 l 为斜面长度。拉氏函数为

$$L = T - V = \frac{M \dot{x}^2}{2} + \frac{m r^2 \dot{\theta}^2}{2} - Mg(l - x) \sin \phi.$$

因为只有一个约束方程，所以只需要一个拉格朗日乘子 λ 。约束方程中的系数为

$$a_{\theta} = r, \quad a_x = -1.$$

所以，两个拉格朗日方程为

$$M \ddot{x} - Mg \sin \phi + \lambda = 0, \quad (2-37)$$

$$Mr^2\ddot{\theta} - \lambda r = 0, \quad (2-38)$$

它们同约束方程

$$r\dot{\theta} = \dot{x} \quad (2-39)$$

一起构成了三个未知数 θ, x 和 λ 的三个方程。

将式(2-39)对时间求导,得

$$r\ddot{\theta} = \ddot{x}.$$

因而从式(2-38)即得

$$M\ddot{x} = \lambda,$$

式(2-37)则成为

$$\ddot{x} = \frac{g \sin \phi}{2},$$

同时有

$$\lambda = \frac{Mg \sin \phi}{2}$$

和

$$\ddot{\theta} = \frac{g \sin \phi}{2r}.$$

由此可见,圆环沿斜面滚下时的加速度只有沿光滑斜面滑下时的一半. 摩擦约束力为 $\lambda = Mg \sin \phi / 2$.

从 $\ddot{x} = v \frac{dv}{ds}$ 可得到到达斜面底部时的速度为

$$v = \sqrt{gl \sin \phi},$$

这当然也可以用那些基本的方法来得到。

2-5 变分原理表述的优点

虽然哈密顿原理的原有表述式(2-2)有可能推广到包括某些非完全约束的情况,但实际上,当能够建立起系统的独立坐标的拉氏函数时,这种力学表述最为有用. 变分原理表述

已被公认是“完美”的，因为力可由势来推导的完整系的全部力学都可包含在简洁的哈密顿原理内。哈密顿原理还有一个优点，它只含有不必参照特定广义坐标也可定义的物理量，即动能和势能。因此，所作表述自然不会因系统坐标的不同选择而变化。

从变分哈密顿原理还可明显地看出，为什么对于坐标和时间的任何函数的时间全微商来讲，拉氏函数就象节 1-4 末了所指出的那样总是不确定的。这种全微商在点 1 和点 2 之间的时间积分仅与任意函数在两端点处所取之值有关。由于端点处的变分等于零，因此，附加于拉氏函数的任意时间微商不会影响到积分的变分特性。

另一个好处是，能够容易地把拉格朗日表述推广到在动力学中一般不予考虑的系统，比如说，用它来描述弹性场、电磁场以及基本粒子场的性质等。虽然其中某些推广将在以后予以考虑，但作为一般力学框架之外的一个简单应用例子，让我们考虑下述情况。

假设有一系统，它的拉氏函数为

$$L = \frac{1}{2} \sum_i L_i \dot{q}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{jk \\ i \neq k}} M_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k - \sum_i \frac{q_i^2}{2C_i} + \sum_i E_i(t) q_i, \quad (2-40)$$

耗散函数为

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_i R_i \dot{q}_i^2. \quad (2-41)$$

拉格朗日方程为

$$L_i \frac{d^2 q_i}{dt^2} + \sum_{\substack{k \\ i \neq k}} M_{ik} \frac{d^2 q_k}{dt^2} + R_i \frac{dq_i}{dt} + \frac{q_i}{C_i} = E_i(t). \quad (2-42)$$

这组运动方程至少可以有两种解释。首先，可以把 q 看作是电荷； L_j 是自感； M_{jk} 是互感； R_j 是电阻； C_j 是电容； E_j 则是外加电动势。于是方程(2-42)就是描述互感性耦合网路系统的一组方程。例如， $j = 1, 2, 3$ 时，将得到类似于图 2-6 所示的三个网路。另一方面，可以看出， L 中的前面两项组成了广义

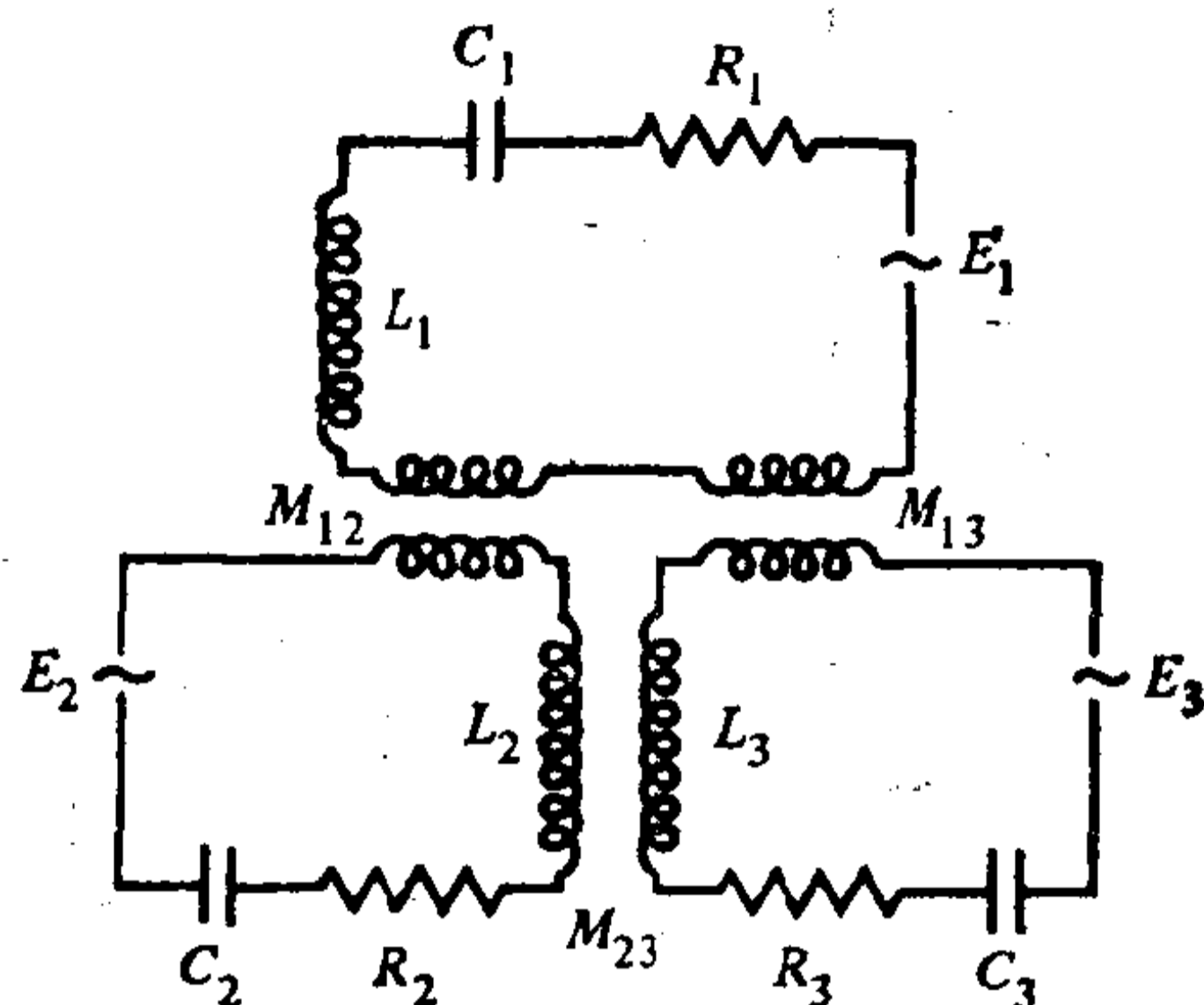


图 2-6 可以应用拉格朗日表述的一种耦合电路系统

速度的一个任意的二次齐次函数。只要系统的那些(完全的)约束与时间无关时，总能把动能 T 表达成这种形式(见 1-6 节)。系数 L_j, M_{jk} 也就具有质量的特征——它们是惯性项。拉氏函数中的下一项正好相当于一系列弹簧——谐振子——的势能，这里的力服从胡克定律

$$F = -kx,$$

由此可得势能为

$$V = \frac{1}{2} kx^2,$$

于是那些 $1/C_j$ 代表的是弹性常数。最后一项则相当于与坐标无关的策动力 $E_j = Q_j$ (譬如重力)引起的势能，只是这里的 E_j 可能是随时间变化的力。最后，这里的耗散函数相当于与

广义速度成正比的耗散力或粘滞力。这样，将得到式(2-40)和式(2-41)或式(2-42)的另一种解释，它使我们想起了受外力策动并在粘滞流体中运动的弹簧，这是一种复杂的质量系统。

把相同形式的拉氏函数来描述两种不同的物理系统，意味着研究其中一种系统时所得全部结果和技巧可以直接用于另一种系统。在这种特殊情况中，对电路特性已经作过大量的研究，也发展了某些特殊技巧；这些都能直接转用于相应的力学系统。因而完成了在表述力学或声学系统的等效电路问题方面的大量工作，反过来也一样。通常属于电路问题所专用的那些术语(电抗、电纳等)，都是许多力学系统振动理论中被认可的表达模式¹⁾。

但是，还有一种力学的广义化型式，它起源于更微妙的等效形式。我们已经看到，拉氏函数和哈密顿原理一起形成了一种隐含力学运动方程的简洁的不变程式。这种可能性并不仅仅限于力学；在几乎每一个物理领域内，变分原理都可以用来表示“运动方程”，不论它们是牛顿方程，麦克斯韦方程，还是薛定谔方程都可以。因此，当把变分原理作为表述基础时，所有这些场至少在某种程度上将显示出结构上的相似性。当实验结果表明需要改变某种场的理论的物理含义时，也往往表明在其他场的理论中可以作出程度相当的类似改变。例如，本世纪早期完成的那些实验同时表明了电磁辐射和基本粒子两者都有量子化的需要。但量子化的方法首先是在质点力学的研究中发展起来的，本质上起源于经典力学的拉格朗日表述。用拉氏函数和相应的哈密顿变分原理来描述电磁场，就有可能借助于质点量子化方法来建立起量子电动力学（见节 12-5 和节 12-6）。

1) 详细说明可参阅 H. F. Olson, *Solutions of Engineering Problems by Dynamic Analogues* (New York: Van Nostrand, 1966).

2-6 守恒定理和对称性质

到目前为止,主要讨论了如何获得运动方程,而对得到方程后就某一特定问题来求解方程则谈得很少.一般讲,这是一个数学问题.一个 n 个自由度的系统将有 n 个总是二阶的微分方程.每个方程的解都要积分两次,结果将引进总共 $2n$ 个积分常数.在某个特定问题中,这些常数将由初始条件,即 n 个 q_i 和 n 个 \dot{q}_i 的初始值来确定.有时,运动方程可用一些已知函数来积分,但并不总是如此.事实上,大多数问题不是完全可积的.然而,即使得不到完全解,也常常有可能获得大量有关系统运动物理性质的数据.确实这类数据可能比作为时间函数的广义坐标完全解更能引起物理学家的兴趣.因此,在不要求问题的完全积分的情况下,重要的是看我们对给定系统的运动能够说明到怎样的程度¹⁾.

在许多问题中,好多运动方程的初次积分都能够直接求得;为此,我们假定它们是

$$f(q_1, q_2, \dots, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, t) = \text{常数} \quad (2-43)$$

类型的关系式,它们都是一阶微分方程.这些初次积分对我们是有益的,因为它们向我们揭示了系统的某些物理内容.其中包括第一章中得到的那些守恒定律.

作为例子,考虑一个质点系统,质点所受作用力是根据仅与位置相关的势来推导的.于是

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \sum \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \end{aligned}$$

1) 除非特别说明,在本节及以下各节中总是假定所论系统的运动完全是用(2-2)形式的哈密顿原理来描述的.

$$= m_i \dot{x}_i = p_{ix},$$

这是与第 i 个质点相关的线动量的 x 分量。这结果显示出动量概念的明显延伸。与坐标 q_i 相关的广义动量将定义为

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (2-44)$$

这里的 p_i 也常被称为正则动量或共轭动量。注意, 如果 q_i 不是笛卡儿坐标, 则 p_i 当然不会具有线动量的量纲。再说, 如果存在与速度相关的势, 那么, 即使 q_i 是笛卡儿坐标, 相关的广义动量与通常的机械动量也不是一致的。例如, 电磁场中一群质点的拉氏函数为[见式(1-66)]

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2 - \sum_i q_i \phi(x_i) + \sum_i \frac{q_i}{c} \mathbf{A}(x_i) \cdot \dot{\mathbf{r}}_i$$

(这里的 q_i 代表电荷), 共轭于 x_i 的广义动量为

$$p_{ix} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i + \frac{q_i A_x}{c}, \quad (2-45)$$

也就是说, 它等于机械动量加上一个附加项。

如果系统的拉氏函数并不包含给定坐标 q_i (尽管它可能包含相应的速度 \dot{q}_i), 就说该坐标是循环的或可遗的。这一定义虽不普遍采用¹⁾, 但却是惯常使用的, 因而这里也将用它。对

1) 这两个术语通常可以交互使用, 并具有上述规定的意义。但少数作者则把它们区分开来, 把动能 T 内不出现的坐标定义为循环坐标, 而把拉氏函数内不出现的坐标称为可遗坐标(见 Webster, *The Dynamics of Particles* 和 Byerly, *Generalized Coordinates*). Ames 和 Murnaghan (*Theoretical Mechanics*) 则交替使用这两个术语, 但明显地只用它们来表示在 T 内不出现的坐标。Lanczos (*Variational Principles of Mechanics*) 重又起用了较老的名词“Kinosthenic”, 也就是循环的或可遗的意思。另外, “循环的”一词有时也用于周期性变量, 但意义不同(见节 9-5 以及 Sygne, *Encyclopedia of Physics*, Vol. 3/1, p. 102).

于循环坐标来讲,拉格朗日运动方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

可化为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

或者

$$\frac{dp_i}{dt} = 0,$$

上式意味着

$$p_i = \text{常数}. \quad (2-46)$$

因而能表达成一条普遍的守恒定理: 共轭于循环坐标的广义动量守恒。

式(2-46)成了运动方程的、(2-43)形式的初次积分。可以用它有效地消去问题中的循环坐标,这样,问题能完全用其余的广义坐标来求解。简单地说,这种最早由劳斯(Routh)提出的步骤实质上是对拉氏函数的修正,使它不再是对应于循环坐标的广义速度的函数,而仅含循环坐标的共轭动量。这样做的好处是,可把 p_i 看作是积分常数之一,其余的积分就只包含那些非循环的坐标了。我们将在阐述哈密顿表述时再详细讨论劳斯方法(两者十分相似)。

注意,广义动量守恒的条件比先前导出的那两个动量守恒定理的条件更具普遍性。例如,在作用和反作用定律被破坏的情况下,即存在电磁力时,仍然可以得到某个守恒定理。假定一单个质点处于 ϕ 和 \mathbf{A} 都不含 x 的场中,则在 L 中决不会出现 x , 于是 x 就是一个循环坐标。因而相应的正则动量 p_x 必定守恒。从式(1-66)可知,现在这一动量的形式为

$$p_x = m\dot{x} + \frac{qA_x}{c} = \text{常数}. \quad (2-47)$$

在这种情况下,不是机械线动量 $m\dot{x}$ 守恒,而是它与 qA_x/c 之和守恒¹⁾。然而,第一章中的那些守恒定理确实包含在与循环坐标有关的普遍规则之内;在适当限制下,式(2-46)应能化为节 1-2 中的那些定理。

首先考虑广义坐标 q_i , 它的变化量 dq_i 代表作为整体的系统在某给定方向上的平移。系统质心的某个笛卡儿坐标即是 q_i 的一个例子。由于速度不受原点移动的影响,所以 q_i 显然不会在 T 的表达式内出现,即 $\frac{\partial T}{\partial q_i}$ 应等于零。再说,我们将假设它们是保守系,因而 V 不会是速度的函数,从而消除了象电磁力那样的一些矛盾。如此定义的坐标的拉格朗日运动方程将化为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \equiv \dot{p}_i = - \frac{\partial V}{\partial q_i} \equiv Q_i. \quad (2-48)$$

现在我们将证明,式(2-48)是总线动量的运动方程,亦即证明 Q_i 代表了合力在 q_i 的平移方向上的分量,而 p_i 则是总线动量在这个方向上的分量。一般讲,广义力 Q_i 为

$$Q_i = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_i}.$$

由于 dq_i 相当于系统沿着某轴的平移,因而矢量 $\mathbf{r}_i(q_i)$ 和 $\mathbf{r}_i(q_i + dq_i)$ 之间的关系如图 2-7 所示。根据微商的定义,我们有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_i} &= \lim_{dq_i \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}_i(q_i + dq_i) - \mathbf{r}_i(q_i)}{dq_i} \\ &= \frac{dq_i}{dq_i} \mathbf{n} = \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (2-49)$$

式中 \mathbf{n} 是沿着平移方向的单位矢量。因此

1) 由经典电动力学可知,在 \mathbf{A} 和 ϕ 都不含 x 的情况下, qA_x/c 正好是 q 电荷电场内电磁线动量的 x 分量。

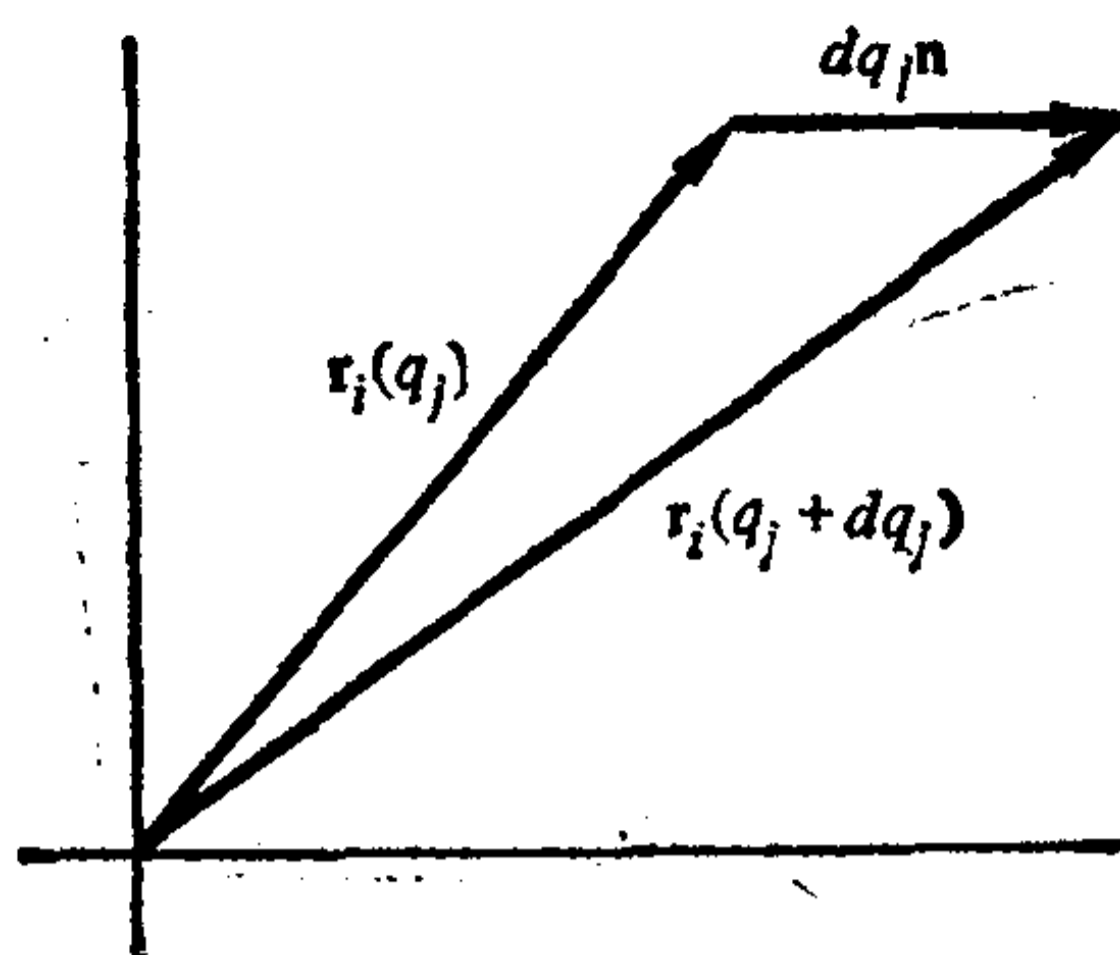


图 2-7 系统平移时位置矢量的变化

$$Q_j = \sum \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{F}.$$

如前所述,它是合力在 \mathbf{n} 方向上的分量。现在再来证明关于 p_j 的说法。这时,注意到对于形式为

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2$$

的动能,可利用式(1-51)得到它的共轭动量

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j},$$

再根据式(2-49),即得

$$p_j = \mathbf{n} \cdot \sum_i m_i \mathbf{v}_i,$$

这正是预期的系统总线动量沿 \mathbf{n} 方向的分量。

今假定上述平移坐标 q_j 是循环的。则 q_j 不可能在 V 中出现,于是

$$-\frac{\partial V}{\partial q_j} \equiv Q_j = 0.$$

这正是熟知的线动量守恒定理:如果外力合力的某个给定分量为零,则线动量的相应分量守恒。

同样可以证明，如果所取循环坐标 q_i 的变化量 dq_i 相当于质点系统绕某轴的转动，则它的共轭动量的守恒就相当于角动量的守恒。按上面用过的相同的论证，由于坐标系的转动不可能影响速度的大小，所以 T 不可能含有 q_i 。因此， T 对 q_i 的偏微商必定同样为零；同时， V 又与 q_i 无关，所以我们重又得到方程(2-48)。但现在想要证明的是，如把 q_i 作为一个转动坐标，则广义力应是总的外力矩沿转动轴的分量，而 p_i 则是总角动量沿同一轴的分量。

现在的广义力 Q_i 仍为

$$Q_i = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_i},$$

只是微商有了不同的意义。现在的 q_i 的变化必定相当于矢量 \mathbf{r}_i 的无限小转动，转动中 \mathbf{r}_i 的大小不变。根据图 2-8，不难得到微商的量值，因为

$$|d\mathbf{r}_i| = r_i \sin \theta dq_i,$$

所以

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_i} \right| = r_i \sin \theta;$$

它的方向则与 \mathbf{r}_i 和 \mathbf{n} 两者都垂直。显然，这一微商可以写成矢量形式

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_i} = \mathbf{n} \times \mathbf{r}_i. \quad (2-50)$$

根据这个结果，广义力成为

$$\begin{aligned} Q_i &= \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{r}_i \\ &= \sum_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i. \end{aligned}$$

并可化为

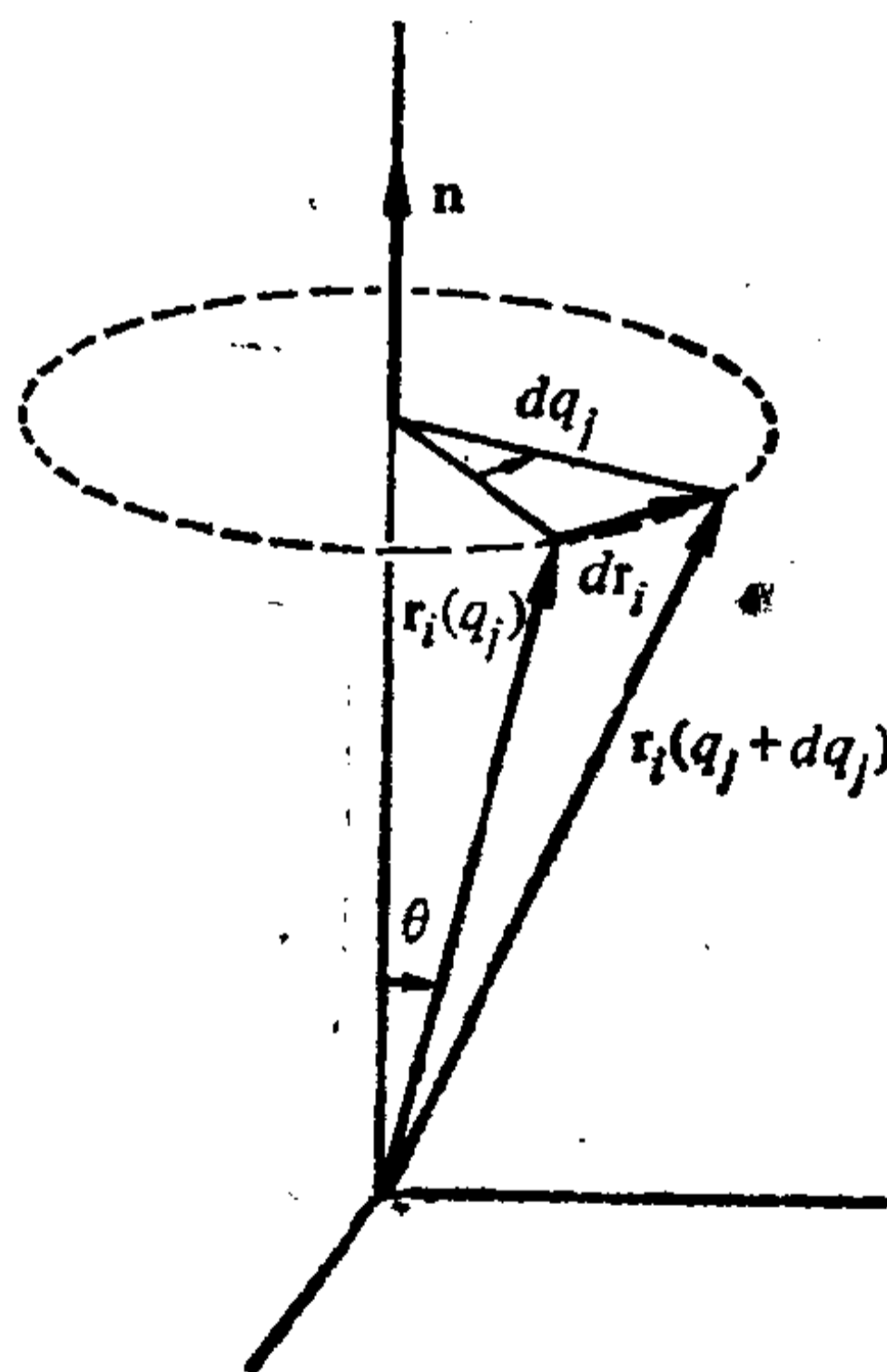


图 2-8 系统转动时位置矢量的变化

$$Q_i = \mathbf{n} \cdot \sum_i \mathbf{N}_i = \mathbf{n} \cdot \mathbf{N},$$

这就证明了说法的第一部分。对 p_i 作类似处理即可证明说法的第二部份：

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_i} \\ &= \sum_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i \\ &= \mathbf{n} \cdot \sum_i \mathbf{L}_i = \mathbf{n} \cdot \mathbf{L}. \end{aligned}$$

综合上述结果可知，如果转动坐标 q_i 是循环的，则外力矩沿 \mathbf{n} 方向的分量 Q_i 为零，但 \mathbf{L} 沿 \mathbf{n} 方向的分量不变。这样，从与循环坐标有关的普遍性守恒定理我们又得到了角动量守恒定理。

平移的或转动的循环坐标对于系统性质的意义，在此应引起一定的注意。如果对应于位移的坐标是循环的，则说明系统（好似刚体一样）的平移对问题毫无影响。换句话说，如果系统沿某给定方向平移时不变，则相应的线动量守恒。同样，转动坐标是循环的（因而共轭角动量守恒）这一事实表明，系统绕给定轴转动时是不变的。因此，动量守恒定理与系统的对称性质紧密相关。如果系统是球对称的，毫无疑问，角动量的所有分量全部守恒。如果系统仅仅关于 z 轴是对称的，那就只有 L_z 是守恒的，对其他的轴则可依次类推。在比较复杂的问题中，往往还能根据这些对称性的考虑来判定是否存在某些运动常数。例如，假设由一组质点组成的系统在一势场内运动，该势场则由均匀分布于某一无限大平面（譬如说 $z = 0$ 平面）内的一些固定源所生成。（如果是引力，所论源可能是质量分布；如果是静电力，则可能是电荷分布。）这样，

问题的对称性保证了拉氏函数在质点系沿 x 或 y 方向 (但不是 z 方向) 平移时不变, 并在系统绕 z 轴转动时同样不变. 这时, 我们可以立即断言, 总线动量沿 x, y 轴的分量 p_x, p_y 以及总角动量的 z 轴分量 L_z 都是运动常数. 然而, 如果那些源只限于 $x \geq 0$ 的半平面内, 则与 x 轴方向上的平移和绕 z 轴的转动相关的对称性将遭到破坏. 这时, p_x 和 L_z 不再守恒, 只有 p_y 仍保持为一运动常数. 在以后几章中, 我们还会多次遇到运动常数与对称性质之间的这类联系.

在拉格朗日表述中我们还可能得到的另一个守恒定理是系统总能量的守恒定理, 这里的力都可从仅含位置的势来推导. 事实上, 我们总有可能阐明某一守恒定理, 使总能量的守恒仅是它的一种特殊情况. 考虑一个一般的拉氏函数, 它是位置 q_i 和速度 \dot{q}_i 的函数, 并且还可能显含时间. (这种明显的时间相关性, 可能是由外加势随时间变化而引起的, 也可能是由与时间相关的约束引起的.) 这样, L 的时间全微商为

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (2-51)$$

根据拉格朗日方程, 有

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right),$$

同时, 式(2-45)可表达成

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}$$

或

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial L}{\partial t}.$$

由此可得

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) + \frac{\partial L}{\partial t} = 0. \quad (2-52)$$

括号内的量常称为能量函数¹⁾，并记为 h ：

$$h(q, \dot{q}, t) = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L, \quad (2-53)$$

从而，式(2-52)可以看成是给出了 h 的时间全微商：

$$\frac{dh}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (2-54)$$

如果拉氏函数不是时间的显函数，即如果 t 并不明显地出现在 L 中，而是仅仅通过 q 和 \dot{q} 而隐含于 L 中，则式(2-54)表明 h 守恒；它是运动的初次积分之一，有时称为雅可比积分²⁾。

在一定情况下，函数 h 是系统的总能量。为了确定所指的是什么情况，我们可以回顾一下系统的总能量往往能表达成

$$T = T_0 + T_1 + T_2, \quad (1-73)$$

式中 T_0 仅是广义坐标的函数； $T_1(q, \dot{q})$ 是广义速度的线性项， $T_2(q, \dot{q})$ 是 \dot{q} 的二次函数。对于许许多多系统和广义坐标组来讲，同样可把拉氏函数按照它对 \dot{q} 变量的函数依存特性来分解：

$$L(q, \dot{q}, t) = L_0(q, t) + L_1(q, \dot{q}, t) + L_2(q, \dot{q}, t). \quad (2-55)$$

这里的 L_2 是 \dot{q} 的二次(不仅是二次式)齐次函数；而 L_1 是 \dot{q} 的一次齐次式。虽然没有理由说凡是力学问题都要求把拉氏函数表达成(2-55)的形式，但事实上几乎对所有感兴趣的问题都是这样做的。只要所有的力可由不含速度的某种势来推

1) 能量函数 h 在数值上恒等于哈密顿函数 H (见第八章)。这里给予不同的名称和符号，是为了强调 h 被看作是 n 个独立变量 q_i 及其时间微商 \dot{q}_i (还有时间) 的函数，而哈密顿函数 H 将看作是 $2n$ 个独立变量 q_i 和 p_i (以及还可能是时间) 的函数。

2) 这一名称在多数情况下指的是受限三体问题中的初次积分。然而，该积分在那里不过是能量函数 h 的特殊情况。历史上也有把雅可比积分这一名称用于更一般情况的先例。

导,拉氏函数显然就具有这种形式.甚至遇到与速度相关的势也如此,我们注意到电磁场中带电粒子的拉氏函数式(1-66)也满足式(2-55).现在回顾一下欧拉定理,该定理表明,如果 f 是变量 x_i 的 n 次齐次函数,则¹⁾

$$\sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = nf. \quad (2-56)$$

把这应用于函数 h ,即式(2-53),则这一定理对于(2-55)形式的拉氏函数来讲就意味着

$$h = 2L_2 + L_1 - L = L_2 - L_0. \quad (2-57)$$

如果定义广义坐标的变换方程(1-38)并不显含时间,则由式(1-68)可知 $T = T_2$.其次,如果势并不含有广义速度,则有 $L_2 = T$ 以及 $L_0 = -V$,从而

$$h = T + V = E, \quad (2-58)$$

能量函数确实等于总能量.在这种情况下,如果 V 不显含时间,则 L 同样不会显含时间;根据式(2-54),在这里作为总能量的 h 将守恒.

应予强调的是, h 守恒的条件与 h 等同于总能量的条件原则上有很大的区别.我们能够得到这样一组广义坐标,使某种特定问题中的 h 虽然守恒,但却不是总能量.也可能出现另一种情况,即 h 是 $T + V$ 形式的总能量,但却并不守恒.还可能注意到的是,虽然可以事先规定

$$L = T - U$$

与广义坐标的选择无关,以致拉氏函数对于各种系统都是唯一地确定的,但是能量函数 h 的大小及其函数形式都与特定的广义坐标组有关.对于同一个系统来讲,具有不同物理含意的各种能量函数 h 的形成,都与所选择的广义坐标有关.

1) 参阅大多数高级微积分教科书,例如 W. Kaplan, *Advanced Calculus*, 2d ed., p. 139.

最后可能注意到的是,所述系统虽然不是保守的,但却有一些可从耗散函数 \mathcal{F} 来推导的摩擦力,这时就不难证明 \mathcal{F} 将与 h 的衰减率有关. 当给出的运动方程是含有耗散函数的式(1-70)时,(2-52)的形式将成为

$$\frac{dh}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i.$$

根据 \mathcal{F} 的定义方程 (1-67) 可以看出,它是 \dot{q} 的二次齐次函数. 因此,再一次应用欧拉定理,即得

$$\frac{dh}{dt} = -2\mathcal{F} - \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (2-59)$$

如果 L 不是时间的显函数,以及所述系统的 h 又与能量相同,则式(2-59)表明, $2\mathcal{F}$ 等于能量耗散率:

$$\frac{dE}{dt} = -2\mathcal{F}. \quad (2-60)$$

这正是前面在不大普遍的情况下所证明过的说法(见第28页).

推荐参考书目

R. Courant 和 D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, vol. 1

论述变分计算的文献的数量是惊人的,远远超过了作为本章参考的需要. 有关“物理学工作者用数学”的大多数专著都有变分计算的某种简要讨论,而在 Courant 和 Hilbert 的这一出色著作的第四章中则提供了最为清晰的论述.

R. Weinstock, *Calculus of Variations* 这是一本物理学工作者都

乐于使用的书. 确实如此,该书的一半以上讨论的都是对物理问题的应用. 第三章一开始论述了基本引理,在节3-7中则描述了最小迴转表面问题连续解的某些困难.

G. A. Bliss, *Calculus of Variations* 在论述变分计算的较老的著

作中,这本小册子是引人注目的,因为它详细讨论了象最速落径这样一些典型问题的解的性质. 第四章中概括了最小迴转表面积方面人们可能要求知道的所有问题.

L. A. Pars, *An Introduction to the Calculus of Variations* 这本细心而又刻苦写就的、具有较简数学形式的变分计算概论,在一定程度上(不及作者所想)注意到了物理方面的应用。第二章论述了基本引理(和某些同族定理)。第 253 页上对非完整系作了简要的说明。

C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics* 该书的前五章从容地概述了本章有关内容,充分反映了作者的原始观点。那包含有历史性记载的第十章特别令人感兴趣。虽然它的处理方法与本章明显不同,但该书或许是有关整章内容的最好的专用参考书。

E. Whittaker, *Analytical Dynamics* 该书对于本章课题的论述也是有益的,特别是许多微妙的辅助说明,也许在别的地方是找不到的。第三章中讨论了守恒定理,而哈密顿原理及其从拉格朗日方程的推导过程(与本章所述过程相反)将在第九章中讨论。只要有一组拉氏函数形式的微分方程,就会有一条相关的变分原理。因此,去探讨一组二次微分方程在什么情况下是、或者能够表达成拉氏函数的形式,也就有着一定的意义。这一问题首先是由亥姆霍兹于 1887 年解决的。他所找到的条件及某些相关结果的绝妙而又详细的评论,可参阅 P. Havas, *Nuovo Cimento Supplement*, Vol. 5, p. 363(1957)。

L. D. Landau 和 E. M. Lifshitz, *Mechanics* 这是《理论物理教程》的第一卷,是 L. 朗道的天才著作。在(英译本的)166 页的紧凑的范围内有着多得难以置信的资料,几乎对本书中的所有课题都是值得一读的。文章风格犹如写在纸上的“随手挥就的论证”,而且推理也往往不够严密。但物理学方面的见解是极其宝贵的。第一、第二两章对本章特别适合。

W. E. Byerly, *Generalized Coordinates* 有幸仍能得到其重印本,这本小册子中关于用拉格朗日技巧来建立和求解力学问题的许多详尽例子,特别具有参考价值。没有编写索引是一大遗憾,使用起来多少会有一些困难。

D. W. Wells, *Lagrangian Dynamics* 虽然有时会觉得失之过简,但这一“概要”实际上包含有论述多种多样拉格朗日力学的大量详细而实用的问题。第六章在拉格朗日框架内极为详尽地论述了摩擦和耗散源(作者的“幂函数”就是我们所说的耗散函数)。第十五章专门论述了

电学系统以及它们与力学系统的相互作用。第十二章(对约束力的论述)以及第十七章(对哈密顿原理的论述)也是有用的。

H. F. Olson, *Solution of Engineering Problems by Dynamical Analogies*

本书极为详尽地讨论了给定力学系统和声学系统的等效电路问题,并阐述了电路理论对于纯力学或纯声学问题的解的应用。拉氏函数本身仅被简要地介绍和采用。一种更为流行的拉格朗日观点则是下列参考书的特点。

B. R. Gossick, *Hamilton's Principle and Physical Systems* 本书

虽然也讨论了其他非力学系统,但着重讨论的是电机工程学提出的那些应用。作者特别感兴趣的是那些非保守的(但却是线性的)系统,同时,把耗散函数的概念扩大到把电磁辐射造成的能量损失也包括在内了。

H. Rund, *Hamilton-Jacobi Theory in the Calculus of Variations*

本书对非完整系的哈密顿原理作了大量论述,但其中大部分是错误的(包括初版中说过的某些错误)。虽然极其数学化,但却有许多有趣的“病理”问题的讨论,这是一些在实际物理世界中会碰到、因而在这里将多次引用的问题。对我们特别适用的是节5.5中关于非完整系的论述,其中断言,(2-2)形式的哈密顿原理只适用于完全约束的情况。这里所用的拉格朗日乘子法是以虚位移构成的变化路径为基础的,这方面的极为详细的讨论可参阅后来在1954年出版的分别由杰弗里斯(H. Jeffreys)和帕尔斯(L. A. Pars)发表的论文,分别见 *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*,第七卷,第335页和第338页。

习 题

1. 求证: 空间内两点间的最短距离为一直线。
2. 证明球表面的短程线是那些大圆,即圆心在球心的那些圆。
3. 求出节2-2中所论最速落径问题的解,并证明所求曲线为一摆线,它的歧点则在质点被释放的起始点上。再证明,如果质点以初动能 $\frac{1}{2}mv_0^2$ 抛射出去,则最速落径仍是通过这两个点的摆线,但它的歧点在起始点上方高度为 z 的地方, z 满足 $v_0^2 = 2gz$ 。

4. 一质点在具有均匀质量密度的圆球形地球内部运动, 求描述最速落径曲线的欧拉-拉格朗日方程. 求出这一微分方程的初次积分, 求解时把它比作雅可比积分 h . 借助于这一积分来证明所描述的曲线是一内摆线(在更大的圆内滚动的圆周上某点所描绘的曲线). 求沿地球表面上两点间最速落径运动的时间表达式. 沿最速落径隧道(假设无摩擦)从纽约到洛杉矶(假设相距 3000 英里)要多长时间? 隧道的最深点在表面下多远?

5. 在最小迴转表面问题中, 探讨一下 $y_2 = y_1, x_2 = -x_1 > 0$ 这一对称情况. 把参数 a 有关的条件表达成用无量纲量 $k = x_2/a$ 和 $\alpha = y_2/x_2$ 组成的超越方程. 证明, α 大于某一定值 α_0 时, k 可能有两个值, $\alpha = \alpha_0$ 时, k 只能有一个值; $\alpha < \alpha_0$ 时, 将不可能得到 k (或 a) 的实数值, 从而在这一区域内不可能有悬链线解. 必要时, 求 α_0 的数字值.

6. 课文中描述的折线段解称为戈德斯密特 (Goldschmidt) 解. 在这种解中, 迴转面积仅仅是半径分别为 y_1 和 y_2 的两个端面圆的面积. 就上面习题 5 中讨论的对称情况, 求悬链线解生成的面积与戈德斯密特解给出的面积之比的表达式. 所得结果应该仅仅是 k 和 α 的函数. 证明, 对于足够大的 α 值, 至少有一个悬链线解给出的面积小于戈德斯密特解给出的面积. 另一方面, 则要证明 $\alpha = \alpha_0$ 时, 戈德斯密特解给出的面积小于悬链线解给出的面积.

7. 一定长度的链子或绳索自由地通过两滑轮, 两滑轮离地高度分别为 y_1 和 y_2 , 它们间的水平距离为 $x_2 - x_1$. 如果链子或绳索具有均匀的质量线密度, 证明, 求取滑轮间所呈曲线的问题等同于求取最小迴转面的问题. (y_1 和 y_2 改变时, 变换为戈德斯密特解的问题将可作为一次惊人的学术报告的论题.)

8. 假如实验告诉我们, 一个质点在 $t_0 = \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$ 这段时间内落下一段给定距离 y_0 , 但不知道落下不等于 y_0 的其他距离所需时间. 再假定问题的拉氏函数是已知的, 但并不是去求解运动方程, 而是猜测作为 t 的函数的 y 的形式为

$$y = at + bt^2.$$

如选定的常数 a 和 b 正好使落下 y_0 距离所需时间总是精确地等于 t_0 ,

直接证明,只有当 $a = 0$ 和 $b = g/2$ 时,积分

$$\int_0^{t_0} L dt$$

才是实数系数值的极值.

9. 当两个弹子球碰撞时,它们之间的瞬时力是非常大的,但仅在无限短时间 Δt 内起作用,并且所取方式使得

$$\int_{\Delta t} F dt$$

始终是一有限值. 这种力称为冲(击)力,它们对于 Δt 的积分则称为这种力的冲量. 证明,如果存在冲力,拉格朗日方程可变换为

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)_f - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)_i = S_i,$$

式中下标 i 和 f 是指冲撞前和冲撞后系统的状态; S_i 是对应于 q_i 的广义冲力的冲量;而 L 则是包含所有非冲力的拉氏函数.

10. 广义力学这一名称已被用来表明某种类型的经典力学,该类力学的拉氏函数包含有 q_i 的高于一阶的时间微商. 利用变分计算方法证明,如果拉氏函数形式为 $L(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, t)$, 而且当 q_i 和 \dot{q}_i 在端点处的变分为零时,哈密顿原理依然适用,则相应的欧拉-拉格朗日方程为

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

把这一结果应用于拉氏函数

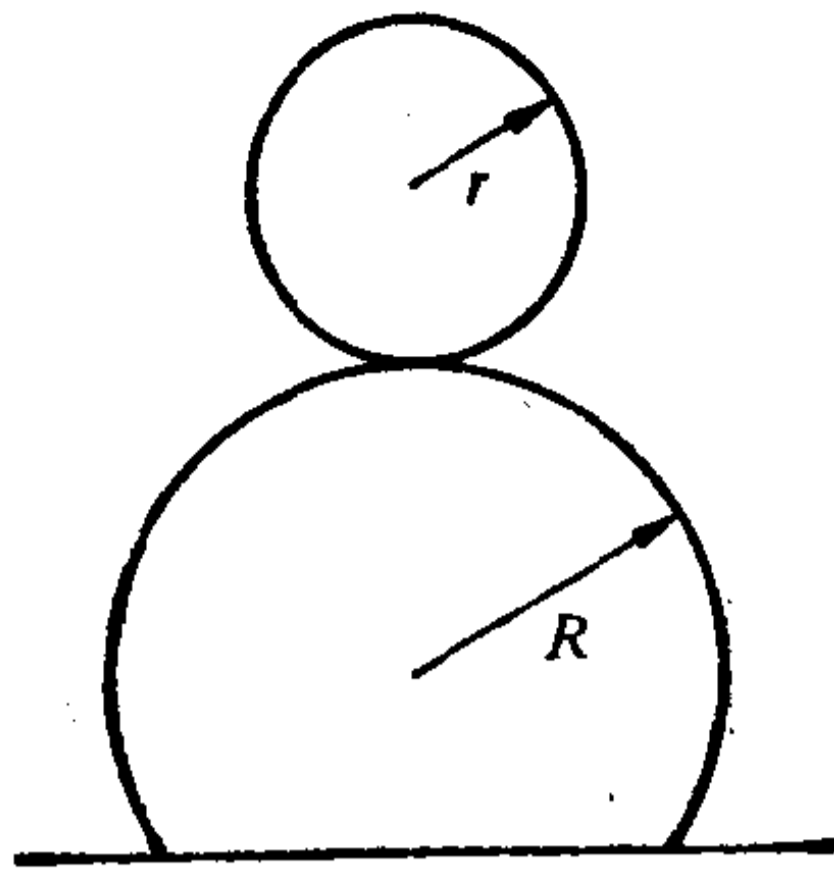
$$L = -\frac{m}{2} q \ddot{q} - \frac{k}{2} q^2.$$

你认识那些运动方程吗?

11. 一个重的质点置于垂直放置的圆环顶端. 利用拉格朗日待定乘子和拉格朗日方程计算圆环对于质点的反作用力. 并求出质点跌离圆环时的高度.

12. 一质量为 m 、半径为 r 的均匀圆环在半径为 R 的固定圆筒上无滑动地滚动,如图所示(见下页). 仅有的外力是重力. 如果圆环在圆筒顶端从静止开始滚动,用拉格朗日乘子法求圆环跌离圆筒的那个点.

13. 某种形式的惠斯顿阻抗电桥,除了通常的四个电阻外,在其中



一个臂上有一电感，而在与之相对的另一臂上则有一电容。试用各元件中的电荷作为坐标来建立不平衡电桥的 L 和 \mathcal{S} 。把基尔霍夫节点条件作为加于电流的约束，求拉格朗日运动方程。并证明，消去那些 λ 能把这些方程化为通常的网络方程。

14. 在一定情况下，特别是在一维系统的情况下，不用引进耗散函数，也可能把摩擦效应组合起来。作为一个例子，求拉氏函数

$$L = e^{rt} \left[\frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{kq^2}{2} \right]$$

的运动方程。你将怎样描述这个系统？有无运动常数？假设点变换的形式为

$$s = e^{rt} q.$$

那么，用 s 来表示的有效拉氏函数是什么？求 s 的运动方程。这些结果又将怎样用来阐述系统的守恒量？

15. 证明，如果拉氏函数中的势包含有与速度相关的项，则整个系统的转动坐标 θ 的相应正则动量不再是机械角动量 L_θ ，而应是

$$p_\theta = L_\theta - \sum_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i \times \nabla_{v_i} U.$$

式中的 ∇_v 是梯度算符，其中的微商也是对各速度分量的微商。 \mathbf{n} 则是转动方向上的单位矢量。如果有关力是电磁力性质的，则正则动量为

$$p_\theta = L_\theta + \sum_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i \times \frac{q_i}{c} \mathbf{A}_i.$$

16. 有时会出现这样的情况：广义坐标分别在动能和势能中出现

的方式,使得 T 和 V 的形式可分别表达成

$$T = \sum_i t_i(q_i) \dot{q}_i^2 \quad \text{和} \quad V = \sum_i V_i(q_i).$$

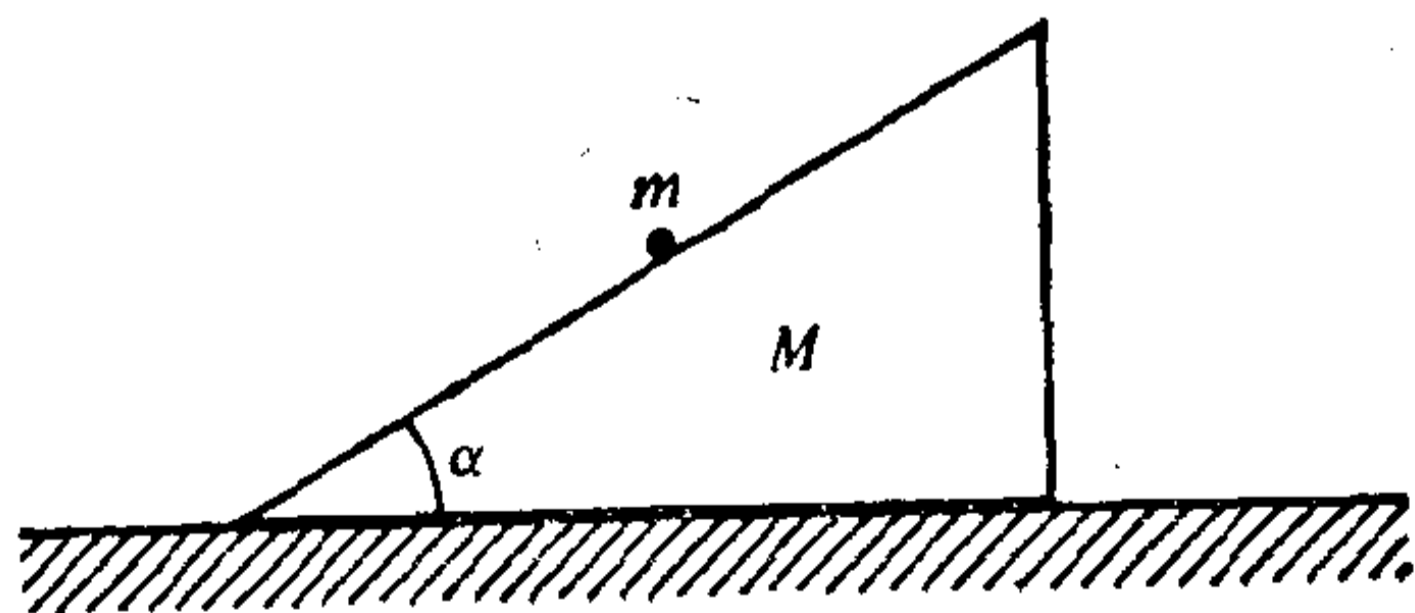
证明,拉格朗日方程是可分离的,而问题总能化为求积分的问题.

17. 一质点被约束在半径为 a 的无质量圆环上运动,而圆环则固定在一个竖直平面内,该平面又以不变的角速度 ω 绕竖直轴旋转. 假设唯一的外力是重力,求取拉格朗日运动方程. 运动常数是什么? 证明,如果 ω 大于某一临界值 ω_0 时,就能得到一个解,该解表明,质点不是在环底而是在环上某点处保持稳定. 但若 $\omega < \omega_0$, 则质点的唯一稳定点是在环底. ω_0 值又等于多大?

18. 一质点在由各种质量分布产生的保守力场中运动. 在各种场合中,由分布体元产生的力总是从正比于体元质量的势来推导的,并且仅仅是与体元的标量距离的函数. 试就下列给定的均匀质量分布情况,说明质点运动中的守恒量:

- (a) 质量均匀分布在 $z = 0$ 平面内.
- (b) 质量均匀分布在 $x = 0, y > 0$ 的半平面内.
- (c) 质量均匀分布在中心轴沿 z 轴的无限长圆柱体内.
- (d) 质量均匀分布在中心轴沿 z 轴的有限长圆柱体内.
- (e) 质量均匀分布在中心轴沿 z 轴、截面为椭圆的无限长直立柱体内.
- (f) 质量均匀分布在中心轴沿 z 轴的哑铃形体内.
- (g) 质量分布成均匀弦线的形式,该弦线又绕成中心轴沿 z 轴的无限长螺线管的几何形状

19. 一个质量为 m 的质点在倾角为 α 、质量为 M 的劈上无摩擦地滑



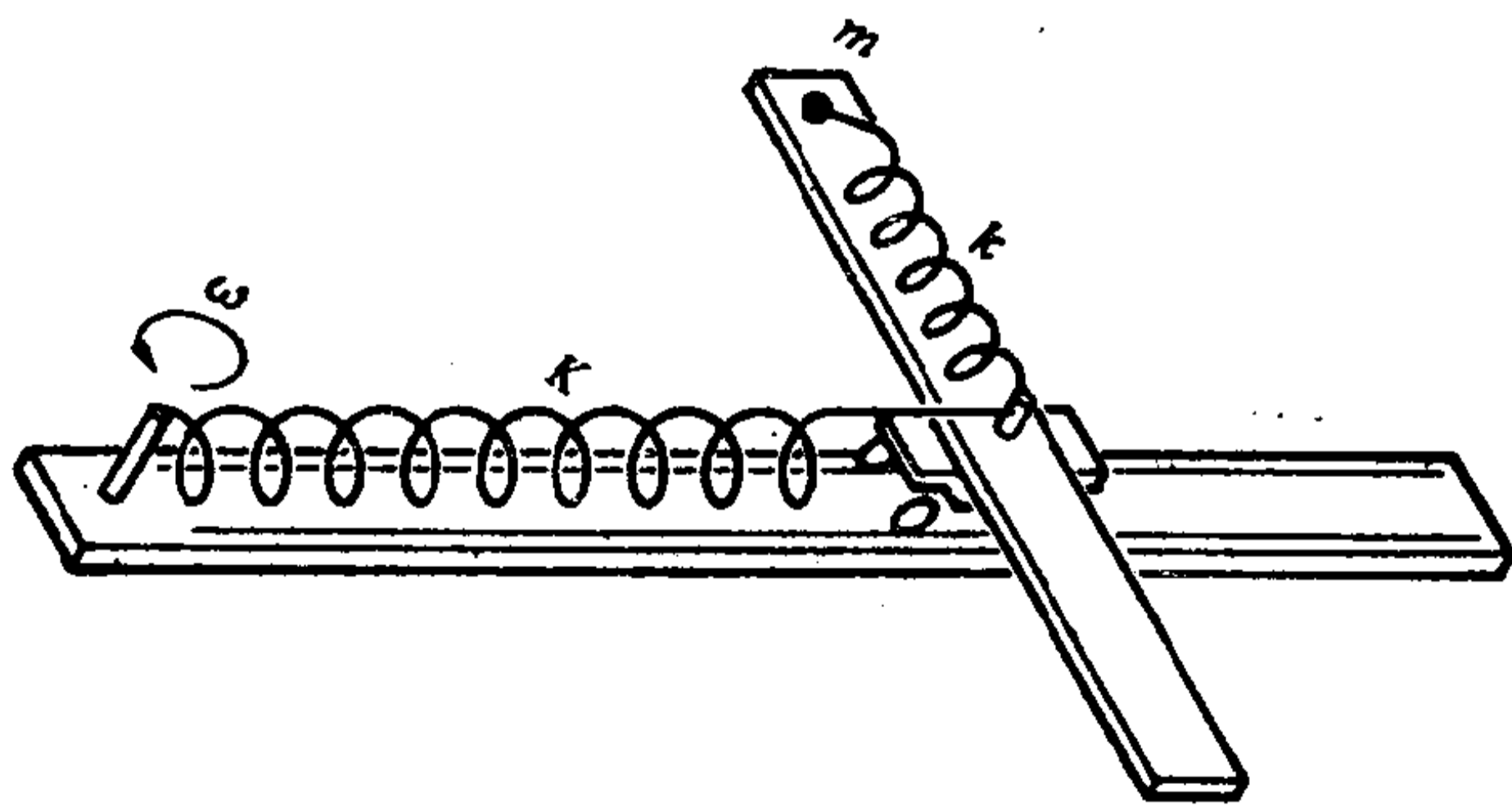
动,该劈则能在光滑水平面上无摩擦地运动(见上页图).用拉格朗日乘子法说明质点在劈上所受的约束,求质点和劈的运动方程.再求取约束力的表达式.计算作用在质点和劈上的约束力在 t 时间内所作之功.系统的运动常数是什么?把上述情况下所得结果与劈被固定的情况下的结果作一对比. **建议:**所论质点可以用 y 轴沿铅垂方向的笛卡儿坐标系,也可以用 y 轴垂直于劈面的笛卡儿坐标系,甚至更为有益的是两者兼而用之.

20.一小车沿着架在刚性平板上的轨道行驶.小车缚在一弹簧的一端,该弹簧的平衡长度为 r_0 ,力常数为 k ,它的另一端被固定在平板上.在小车上又有另一组轨道,它与第一组轨道垂直.一质量为 m 的质点沿第二轨道运动,该质点被固定在平板上的另一弹簧缚住,这一弹簧的力常数为 k ,平衡长度为零.假设平板、轨道、弹簧和小车的质量都等于零.整个系统被迫在一平面内绕第一根弹簧的连接点以恒定角速度 ω 运动(见附图).又假设第二弹簧的长度在任何时候都比 r_0 为小.

(a) 系统的能量是什么?守恒吗?

(b) 采用实验室系广义坐标时,系统的雅可比积分是什么?守恒吗?

(c) 如果采用与某系统相关联的广义坐标,该系统以角速度 ω 转动,则拉氏函数是什么?雅可比积分是什么?守恒吗?讨论两个雅可比积分之间的关系.



21. 一质点在保守势 $V(\mathbf{r})$ 支配下在空间内运动, 但它总是被约束在某个曲面上运动, 该曲面的方程为 $\sigma(\mathbf{r}, t) = 0$. (显含时间 t 意味着该曲面可以是运动的). 瞬时约束力始终垂直于该曲面. 通过分析证明, 如果曲面随着时间的推移而运动, 则质点能量不守恒. 在这种情况下, 能量不守恒的物理方面的原因是什么?

22. 一维谐振子的拉氏函数为 $L = m\dot{x}^2/2 - kx^2/2$. 假设你不知道运动的解, 但知道运动一定是周期性的, 因而可用一傅里叶级数来描述. 该级数形式为

$$x(t) = \sum_{j=0} a_j \cos j\omega t$$

(在转向点处 $\dot{x} = 0$), 式中 ω 是运动的(未知)角频率. $x(t)$ 这一表达式确定了系统点在位形空间内的某条多参量路径. 考虑相隔一个周期 $T = 2\pi/\omega$ 的两个点 T_1 与 T_2 的作用量积分 I . 证明, 系统路径采用这种形式时, 只有当 $a_j = 0 (j \neq 1)$ 以及 $\omega^2 = k/m$ 时, I 才是关于非零 x 的极值.

第三章 两体有心力问题

在这一章中,作为拉格朗日表述的一种应用,我们将讨论在相互有心力作用下运动着的两体问题. 虽然有心力运动问题并非都可以用熟悉的函数来求积,但我们将试图用已有的数学工具尽可能透彻地来探讨这个问题.

3-1 简化为等效的一体问题

考虑两个质点 m_1 和 m_2 组成的单演系统,这里仅有的力都由相互作用势 U 所产生. 首先假定, U 是两个质点间的矢量 $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, 或者它们的相对速度 $\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1$, 或者 $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ 的某一更高阶微商的函数. 这种系统有六个自由度,因而有六个独立的广义坐标. 假设我们所选的这些坐标是质心矢径 \mathbf{R} 的三个分量加上差矢量 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ 的三个分量. 这样,拉氏函数的形式将是

$$L = T(\dot{\mathbf{R}}, \dot{\mathbf{r}}) - U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \dots). \quad (3-1)$$

动能 T 能够写成质心运动的动能与相对于质心的运动的动能 T' 之和:

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\mathbf{R}}^2 + T',$$

其中

$$T' = \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2'^2.$$

这里的 \mathbf{r}'_1 和 \mathbf{r}'_2 是两个质点对于质心的矢径. 它们与 \mathbf{r} 的关系为

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_1 &= -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \\ \mathbf{r}'_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (3-2)$$

通过式(3-2)用 \mathbf{r} 来表示 T' , 即得

$$T' = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}}^2,$$

而总的拉氏函数式(3-1)将成为

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}}^2 - \mathbf{U}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \dots). \quad (3-3)$$

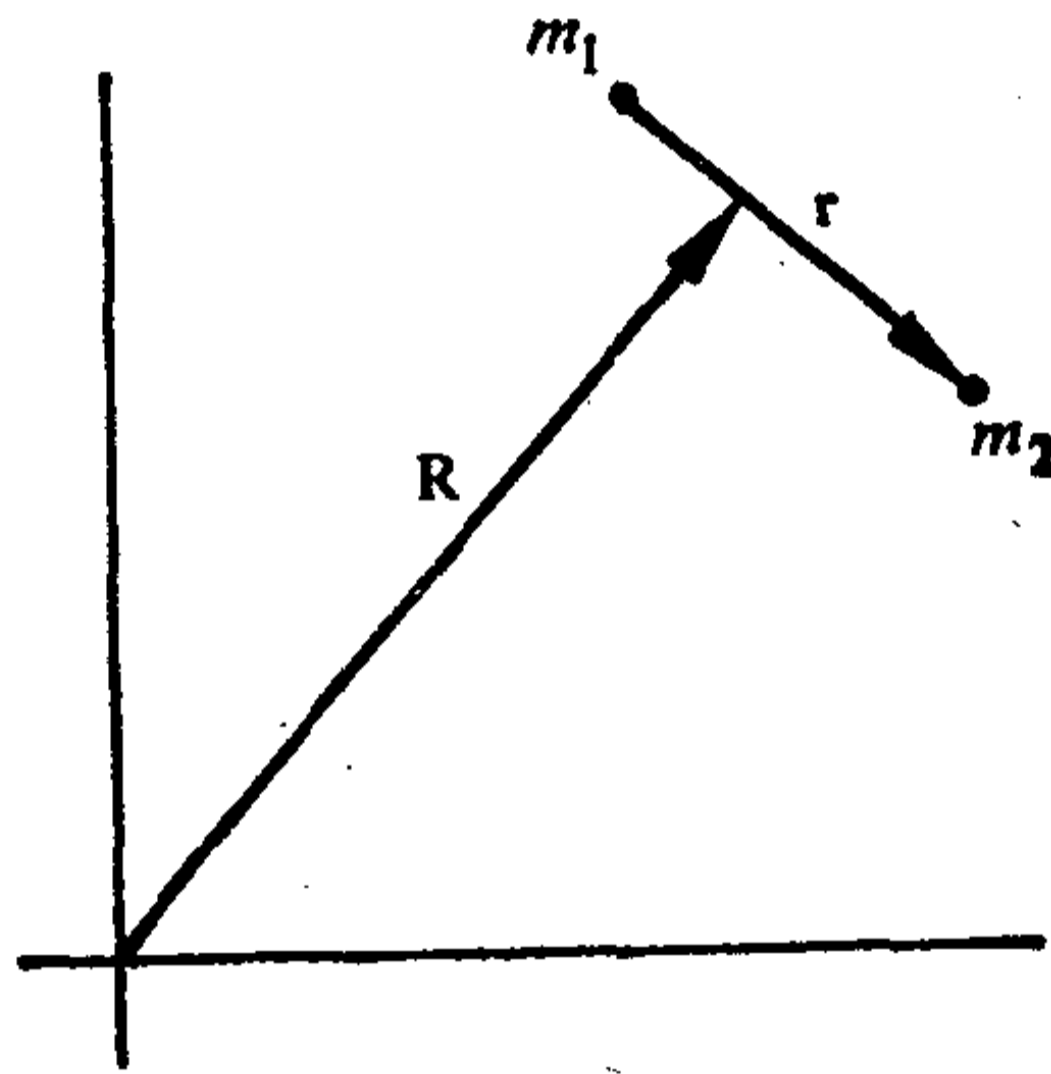


图 3-1 两体问题的坐标

可见, \mathbf{R} 的三个分量是循环的, 所以质心不是静止便是作匀速运动. \mathbf{r} 的那些运动方程中所有各项都不会含有 \mathbf{R} 或 $\dot{\mathbf{R}}$. 因此, 在这里要消去循环坐标特别简单. 只要在以后的讨论中略去拉氏函数的第一项就可以了.

拉氏函数中剩下的那部分实际上正是我们想要得到的结果, 就好象我们有一固定力心, 在与它相距 \mathbf{r} 的地方有一单个质点一样, 这一质点的质量为

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (3-4)$$

这里的 μ 称为约化质量。式(3-4)通常写成

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}. \quad (3-5)$$

因此，两个物体相对于它们质心的有心力运动总能够简化为一个等效一体问题。

3-2 运动方程和初次积分

现在，我们只讨论保守的有心力，这里的势是 $V(r)$ ，它仅是 r 的函数，以致所讨论的力总是沿着 \mathbf{r} 的方向。根据前一节的结果，我们只要考虑相对于某一固定力心运动着的、质量为 m 的单个质点的问题，并把这一力心取作坐标系的原点。由于势能仅仅包含径向距离，使问题具有球对称的性质，也就是说，绕任一固定轴的转动都不会对解有什么影响。因此，代表绕固定轴转动的角度坐标必定是循环的。这种对称性质使问题大为简化。由于系统是球对称的，因此总角动量矢量

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

守恒。由此可知， \mathbf{r} 始终垂直于空间内 \mathbf{L} 的固定方向。要满足这一点， \mathbf{r} 所处平面的法线必须平行于 \mathbf{L} 。如果 \mathbf{L} 为零，则上述论据失效。在这种情况下，运动必定沿着通过力心的某条直线，因为在 $\mathbf{L} = 0$ 的情况下，要求 \mathbf{r} 平行于 $\dot{\mathbf{r}}$ ，只有在直线运动中才能做到¹⁾。因而有心力运动总是在一个平面内的运动。再说，空间内单个质点的运动是用三个坐标来描述的；用球极坐标时，它们是方位角 θ 、天顶角(或余纬度) ϕ 和径向距离 r 。如果所选极轴沿着 \mathbf{L} 的方向，运动将始终处在垂直于极轴的平面内。坐标 ϕ 只有一个不变的数值 $\pi/2$ ，这在以后的讨论中是可以省略的。角动量矢量的守恒提供了三个独立

1) 从数学形式来看， $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{n}_r + r\dot{\theta}\mathbf{n}_\theta$ ，因此，要 $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = 0$ ，必须 $\dot{\theta} = 0$ 。

的运动常数(对应于三个笛卡儿分量).实际上,其中表示角动量固定方向的那两个常数,早被用来使问题从三个自由度缩减为两个自由度.而对应于 \mathbf{L} 量值守恒的第三个常数,仍然保留下来供我们解题时使用.

现在用平面极坐标来表示拉氏函数,则有

$$L = T - V = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r). \quad (3-6)$$

正如所料, θ 是一循环坐标,它的相应的正则动量等于系统的角动量:

$$p_{\theta} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}.$$

因此,两个运动方程之一为

$$\dot{p}_{\theta} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0, \quad (3-7)$$

它的直接积分为

$$mr^2\dot{\theta} = l, \quad (3-8)$$

这里, l 是角动量的常数值.从式(3-7)还可以得到

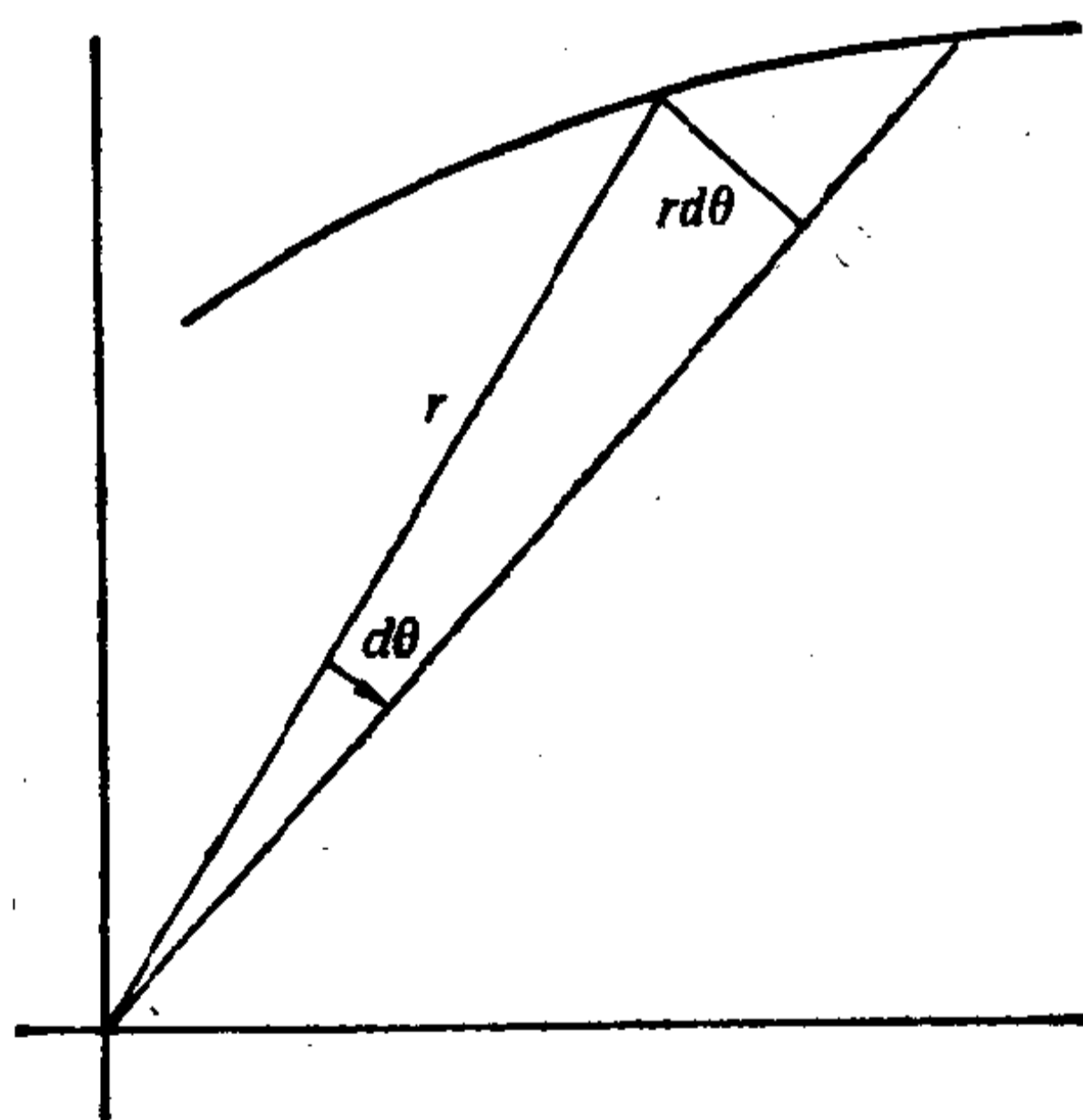


图 3-2 矢径在 dt 时间内扫过的面积

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} \right) = 0. \quad (3-9)$$

这里插入了因子 $1/2$ ，因为 $\frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$ 正好是掠面速度——矢径在单位时间内扫过的面积。从图 3-2 即可得到这一解释，在 dt 时间内扫过的微分面积为

$$dA = \frac{1}{2} r(r d\theta),$$

因此

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}.$$

角动量守恒等于是说掠面速度是常数。这就证明了著名的开普勒行星运动第二定律：矢径在相等时间内扫过相等面积。然而，应该强调的是，掠面速度守恒是有心力运动的普遍性质，并不局限于服从平方反比律的力场。

还有一个有关坐标 r 的拉格朗日方程：

$$\frac{d}{dt} (m\dot{r}) - m r \dot{\theta}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0. \quad (3-10)$$

把 r 方向的力的数值 $-\frac{\partial V}{\partial r}$ 记为 $f(r)$ ，方程可以重新写成

$$m\ddot{r} - m r \dot{\theta}^2 = f(r). \quad (3-11)$$

利用初次积分式(3-8)，可以从运动方程中消去 $\dot{\theta}$ ，从而得到一个仅含 r 的二阶微分方程

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{m r^3} = f(r). \quad (3-12)$$

由于是保守力，所以总能量也是一个有用的运动初次积分。根据一般的能量守恒定理，可直接指出这一运动常数是

$$E = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + V(r), \quad (3-13)$$

式中 E 是系统的能量。或者,也可以从运动方程(3-7)和(3-12)直接推导出这个初次积分。这时,式(3-12)可以写成

$$m\ddot{r} = -\frac{d}{dr}\left(V + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2}\right). \quad (3-14)$$

如果式(3-14)的两边各乘以 \dot{r} , 则左边成为

$$m\dot{r}\ddot{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2\right).$$

右边同样可以写成时间全微商的形式,因为如果 $g(r)$ 是 r 的某个函数,则 g 的时间全微商形式为

$$\frac{d}{dt}g(r) = \frac{dg}{dr}\frac{dr}{dt}.$$

因此,式(3-14)等效于

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2\right) = -\frac{d}{dt}\left(V + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2}\right)$$

或

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2} + V\right) = 0,$$

因而

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2} + V = \text{常数}. \quad (3-15)$$

式(3-15)就是总能量守恒的意思,因为如果利用 l 的表达式(3-8),中间一项可写成

$$\frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2} = \frac{1}{2mr^2}m^2r^4\dot{\theta}^2 = \frac{mr^2\dot{\theta}^2}{2},$$

而式(3-15)则化为式(3-13)。

这两个初次积分事实上给了我们完成问题所必须求积的积分中的两个积分。因为有 r 和 θ 两个变量,所以求解运动方程总共需要四个积分。前两个积分已从拉格朗日方程中求出,

它们是两个一阶方程(3-8)和(3-15);要得到其余的两个积分,(形式上)可以有多种不同的方法.从式(3-15)着手也许最简单.解出 \dot{r} , 即得

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2} \right)} \quad (3-16)$$

或

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2} \right)}} \quad (3-17)$$

令 $t = 0$ 时 r 的初始值为 r_0 , 则方程两边从初始状态到 t 时刻状态的积分形式为

$$t = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2} \right)}} \quad (3-18)$$

正如所示,式(3-18)给出的 t 是 r 以及积分常数 E , l 和 r_0 的函数.然而,至少在形式上可以把它反过来,把 r 表达成 t 和那些常数的函数.一旦解出了 r ,即可从式(3-8)直接得到 θ 的解,因为式(3-8)可以写成

$$d\theta = \frac{l dt}{mr^2} \quad (3-19)$$

如果 θ 的初始值是 θ_0 ,则式(3-19)的积分为

$$\theta = l \int_0^t \frac{dt}{mr^2(t)} + \theta_0 \quad (3-20)$$

(3-18)和(3-20)两式就是那两个余下的积分,而问题也在形式上化成了求积分的问题,四个积分常数是 E , l , r_0 和 θ_0 .并不是说我们只能够考虑这四个常数.我们同样可以取 r_0 , θ_0 , \dot{r}_0 和 $\dot{\theta}_0$,不过, E 和 l 当然总可以用这组常数来决定.然而,对大多数应用来说,包含能量和角动量的那一组常数最为自然.

在量子力学中,象 r, θ 的初始值或者 \dot{r} 和 $\dot{\theta}$ 的初始值这样的常数毫无意义,但系统的能量和角动量对于问题的阐述却是有用的. 确实,经典力学和量子力学间的显著差别就在于 E 和 l 的性质上的差别. 所以要讨论从经典理论到量子理论的过渡,用能量和角动量来对系统作经典描述是十分重要的.

3-3 等效的一维问题以及轨道的分类

虽然问题已在形式上解决了,但实际地讲,(3-18)和(3-20)这两个积分通常很难处理,在某种特定情况下,以某种其他方式来求积往往更为方便. 但是,要得到适用于特定力定律的解,先得了解一下,在并不要求得到显解的情况下,仅用运动方程和守恒定理来研究一般情况下的运动,究竟能得到些什么结果?

举例来说,对于一个具有已知能量和角动量的系统,质点速度的量值和方向是能够用距离 r 直接决定的. 速度的量值 v 能够从能量守恒关系式

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + V(r)$$

直接求得,即

$$v = \sqrt{\frac{2}{m} (E - V(r))}. \quad (3-21)$$

径向速度—— \dot{r} 沿矢径的分量——早已在式(3-16)中给出了. 把量值 v 与式(3-16)联立起来足以确定速度的方向¹⁾. 这些以及更多的结果也能从等效一维问题的研究中求得.

用 l 来表示 θ , 则 r 的运动方程(3-12)只含有 r 及其微

1) 另一种做法是根据角动量守恒来得出角速度 $\dot{\theta}$, 它同 \dot{r} 一起就得到 $\dot{\mathbf{r}}$ 的量值和方向.

商. 这种方程与某种虚构的一维问题中可能得到的方程相同, 在这种一维问题中, 质量为 m 的质点受到的力为

$$f' = f + \frac{l^2}{mr^3}. \quad (3-22)$$

附加项的意义是明显的, 如果把它写成 $mr\dot{\theta}^2 = mv_{\theta}^2/r$, 可以看出它就是熟悉的离心力. 从能量守恒定理能够得到一种等效的说法. 根据式(3-15), 质点沿 r 方向的运动是具有虚构势能

$$V' = V + \frac{1}{2} \frac{l^2}{mr^2} \quad (3-22')$$

的一维问题. 检验一下即能看出,

$$f' = -\frac{\partial V'}{\partial r} = f(r) + \frac{l^2}{mr^3},$$

这与式(3-22)相一致. 因而能量守恒定理式(3-15)能写成

$$E = V' + \frac{1}{2} m\dot{r}^2. \quad (3-15')$$

现在举一个用这种方法研究运动的例证. 我们将就遵循平方反比律的吸引力这一特殊情况来考虑 V' 对 r 的关系图线. 这时的力为

$$f = -\frac{k}{r^2}$$

(对于正值 k , 式中负号保证力指向力心). 这种力的势能为

$$V = -\frac{k}{r},$$

而相应的虚构势能为

$$V' = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}.$$

这种图线如图 3-3 所示: 两条虚线代表各别的分量

$$-\frac{k}{r} \text{ 和 } \frac{l^2}{2mr^2},$$

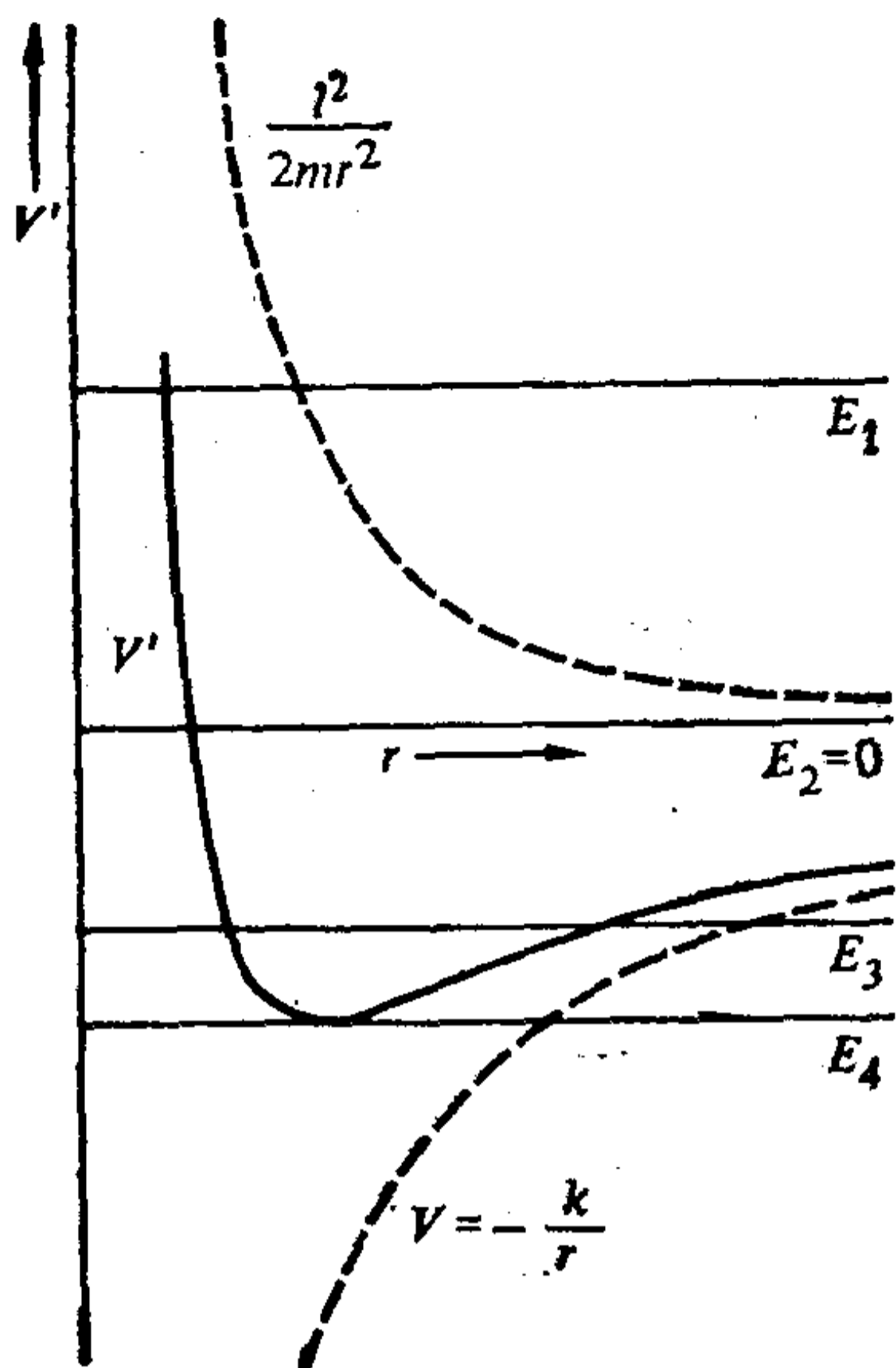


图 3-3 遵循平方反比律的吸引力的等效一维势

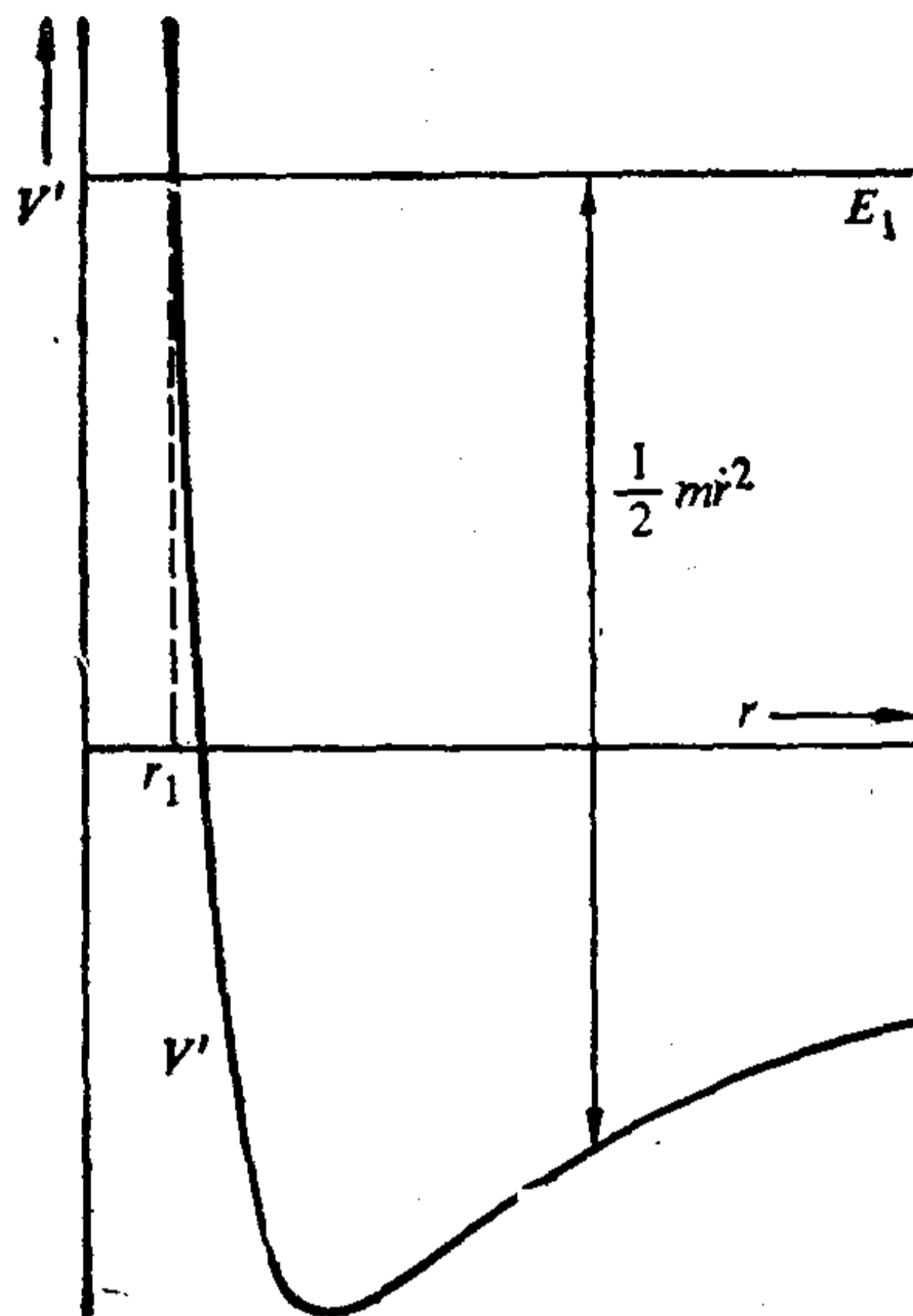


图 3-4 有关力遵循平方反比律而能量为正值的非束缚运动

实线则代表它们的和 V' 。

现在来考虑能量为 E_1 的质点的运动,亦即图 3-3 和图 3-4 所示的运动。显然,这个质点与力心的距离决不会小于 r_1 (见图 3-4)。否则, $r < r_1$, V' 将大于 E_1 , 根据式(3-15'), 动能将取负值, 与之相应的速度将是一个虚数! 另一方面, r 的可能值不存在上限, 所以轨道不是有界的。从无限远处跑来的质点, 碰击“相斥离心势垒”后, 又被推斥回无限远处 (见图 3-5)。 E 和 V' 之间的距离为 $\frac{1}{2} m \dot{r}^2$, 即正比于径向速度的平方, 而在转折点 r_1 处自然将变为零。同时, 图上 E 和 V 之间的距离等于给定 r 值处的动能 $\frac{1}{2} m v^2$ 。 所以 V 和 V' 之间的距离等于

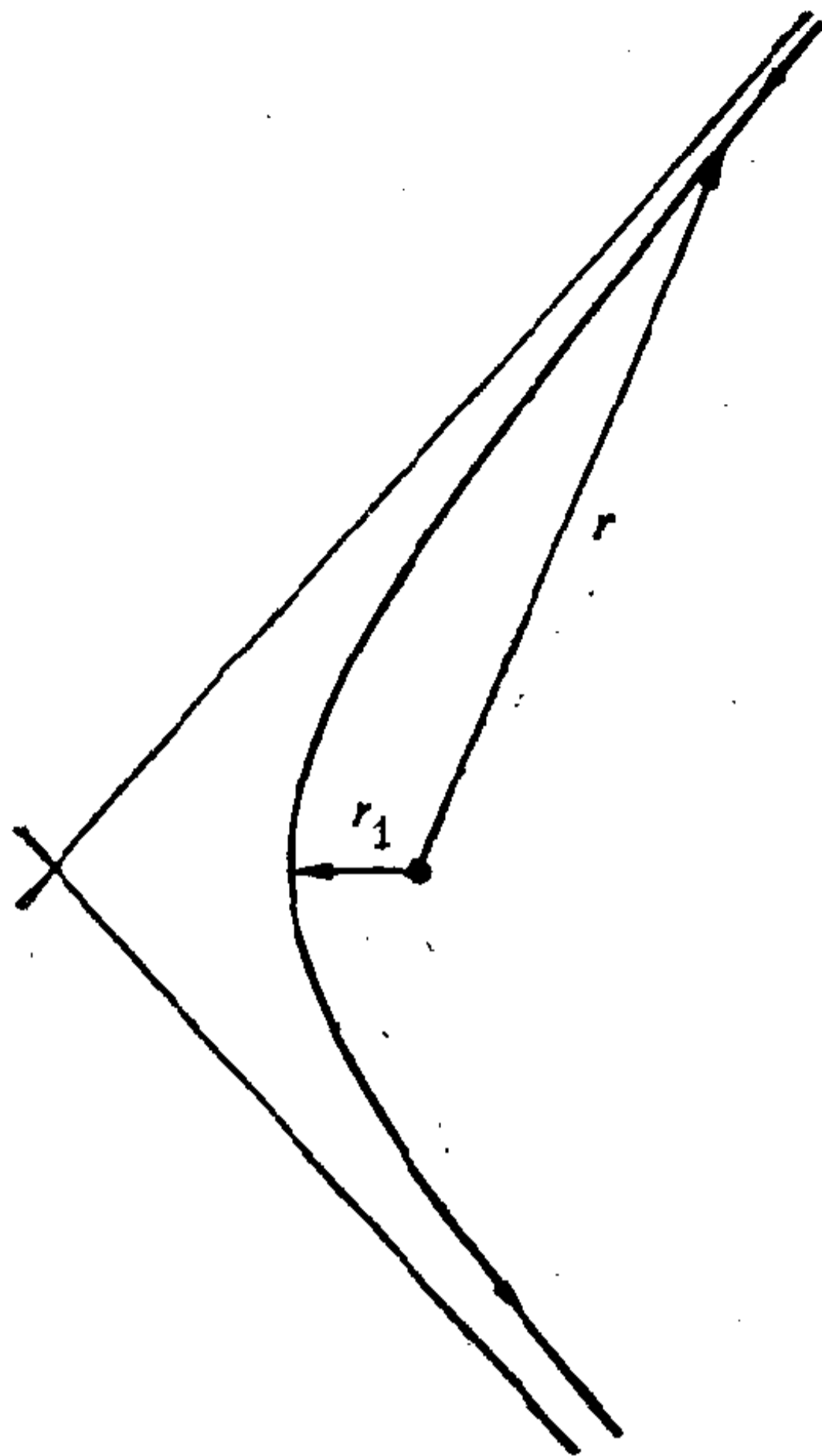


图 3-5 能量为 E_1 的非束缚运动轨道示意图

$\frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2$. 由此可知, 这些曲线给出了具有给定能量和角动量的质点在任何距离 r 处的速度及其分量的量值. 这一切足以勾划出轨道形式的近似图景.

对于能量 $E_2 = 0$ 的情况(见图 3-3), 可以得到大致相似的轨道图景. 但对任何更低的能量, 比如图 3-6 中所示的 E_3 , 则又当别论. 除了下界 r_1 外, 还有一个正值能量时 r 不能超过的最大值 r_2 . 因而运动将是“有界”的, 它有两个转折点 r_1 和 r_2 , 也称为拱(点力心)距. 这并不意味着轨道一定是闭合的. 只能说它们被限制在半径为 r_1 和 r_2 的两圆之间, 所有转折点总是在这两个圆上(见图 3-7).

如果能量为 E_4 , 正如图 3-8 所示, 它正好是虚构势能的极小值, 这时, 两个边界重合. 在这种情况下, 只可能在一个

半径距离上运动;这时的 $\dot{r} = 0$, 轨道则是一个圆. 记得有效“力”等于 V' 曲线斜率的负值, 因而形成圆形轨道的条件简单地说是 $f' = 0$, 或

$$f(r) = -\frac{l^2}{mr^3} = -mr\dot{\theta}^2.$$

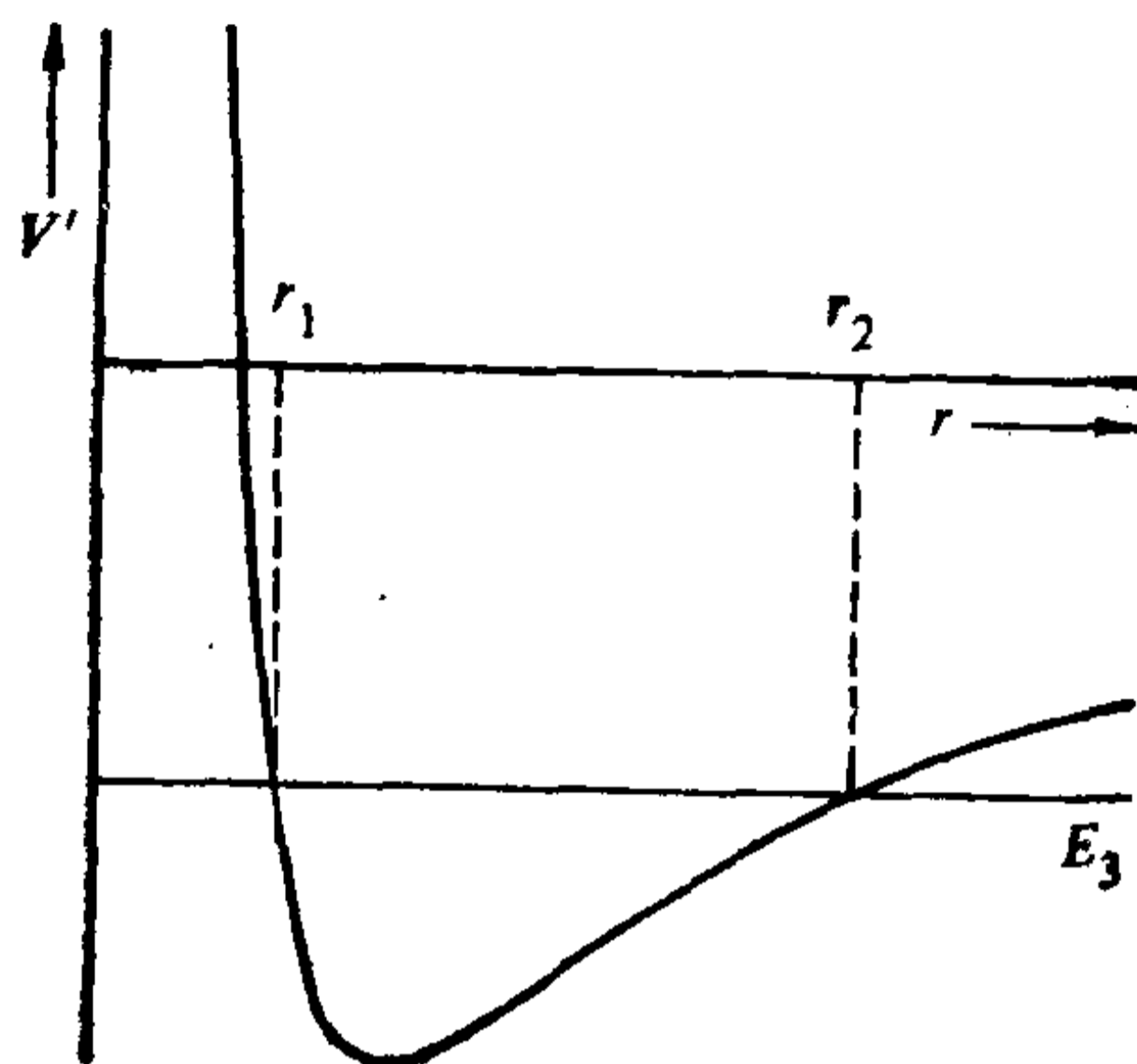


图 3-6 遵循平方反比律的力的等效一维势, 说明了负值能量质点的束缚运动

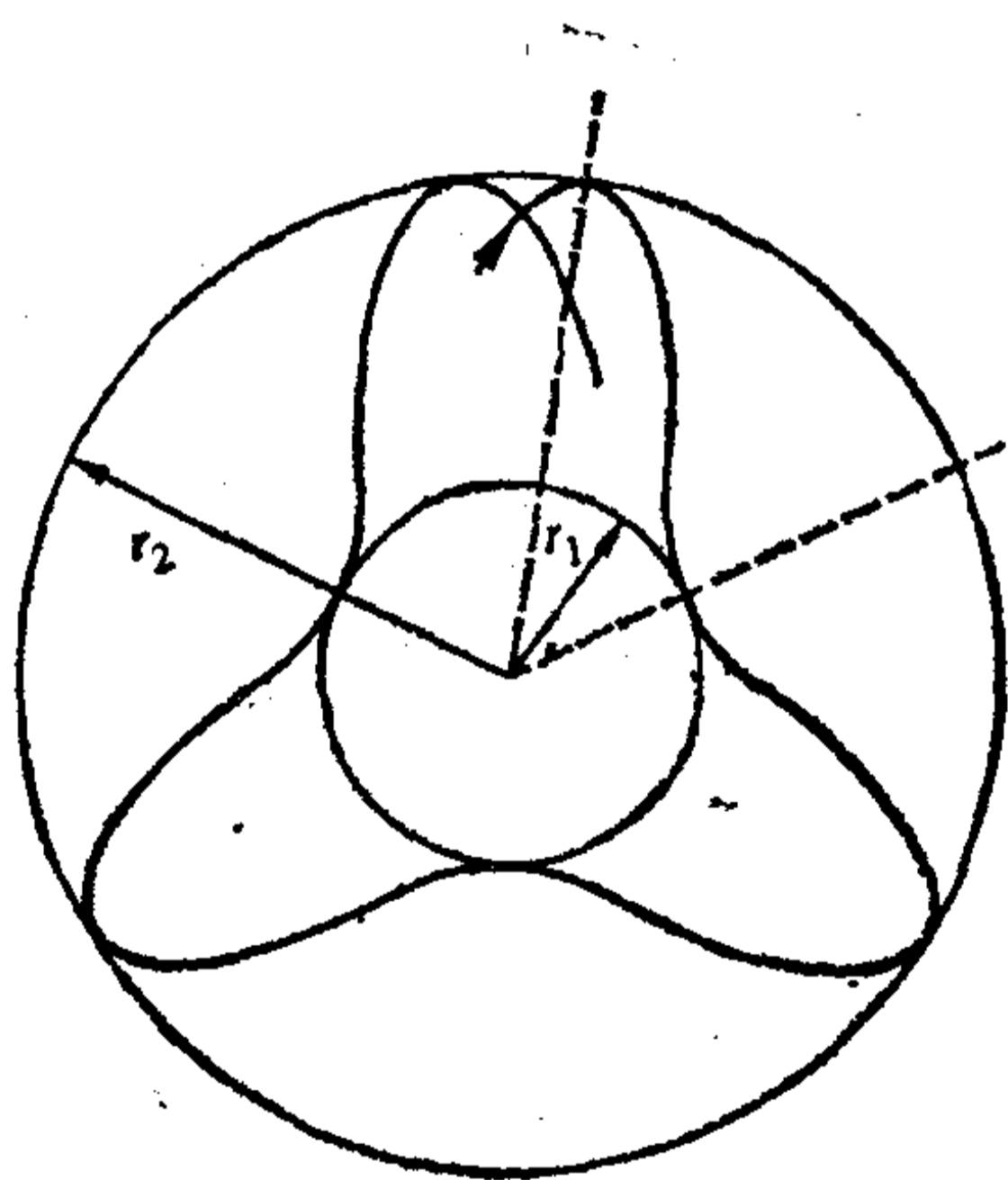


图 3-7 说明束缚运动轨道性质的示意图

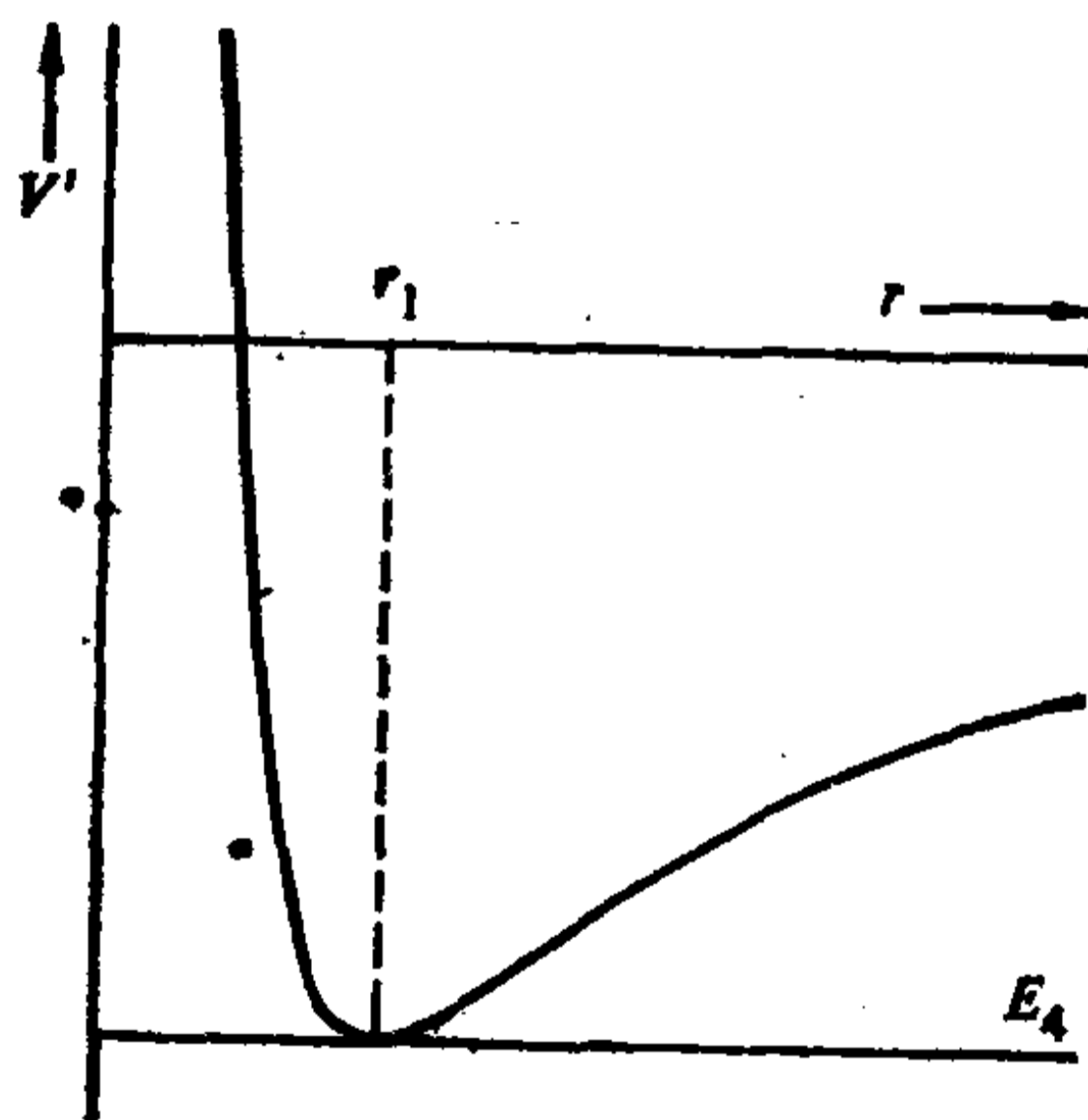


图 3-8 遵循平方反比律的力的等效一维势, 说明了圆形轨道的条件

这是我们所熟悉的、形成圆形轨道的基本条件,即所加外力与向心加速度的“反向有效力”等值、反向¹⁾。圆形轨道的性质及其有关条件将在节 3-6 中作更为详细的研究。

要强调的是,对不同能量轨道所作的讨论只涉及一个角动量值。改变 l 将使 V' 曲线的定量细节有所变化,但不会影响轨道的一般分类。

我们将看到,对于前面讨论的遵循平方反比律的吸引力, E_1 的轨道是一条双曲线, E_2 的是一条抛物线, E_3 的则是一个椭圆。对于其他一些力,轨道形式不可能这样简单。然而,将轨道定性地分为开放的、有界的和圆形的这种相同的一般分类方法,对于符合下列条件的吸引力势仍将是正确的,这些条件是(1) $r \rightarrow \infty$ 时,比 $1/r^2$ 减小得更慢; (2) $r \rightarrow 0$ 时,比 $1/r^2$ 更慢地趋于无限大。第一个条件保证 r 为大数值时势的优势超过离心项; 第二个条件保证 r 为小数值时重要的是离心项。

如果所论势不满足这些必要条件,运动的定性性质就会改变,但是我们仍然可利用等效势的方法来检验轨道的特征。考虑吸引力势 $V(r) = -\frac{a}{r^3}$ 的例子,这时, $f = -\frac{3a}{r^4}$ 。能量图线如图 3-9 所示。对于一个能量值 E , 有两种可能的运动,视 r 的初始值而定。如果 r_0 小于 r_1 , 运动将是有界的, r 始终小于 r_1 , 质点终将通过力心。如果 r 原来大于 r_2 , 则它将始终大于 r_2 , 这时的运动是无界的, 质点决不可能陷入“势”阱。初始条件 $r_1 < r_0 < r_2$ 同样在实际上是不可能的。

这种方法的另一个有趣例子与线性恢复力(各向同性谐振子)的情况有关,这时

1) 对于 $E < E_3$ 的情况,不存在相应的实际可能运动,因为这种情况下的 r^2 应是负值,或者说, r 应是虚数。

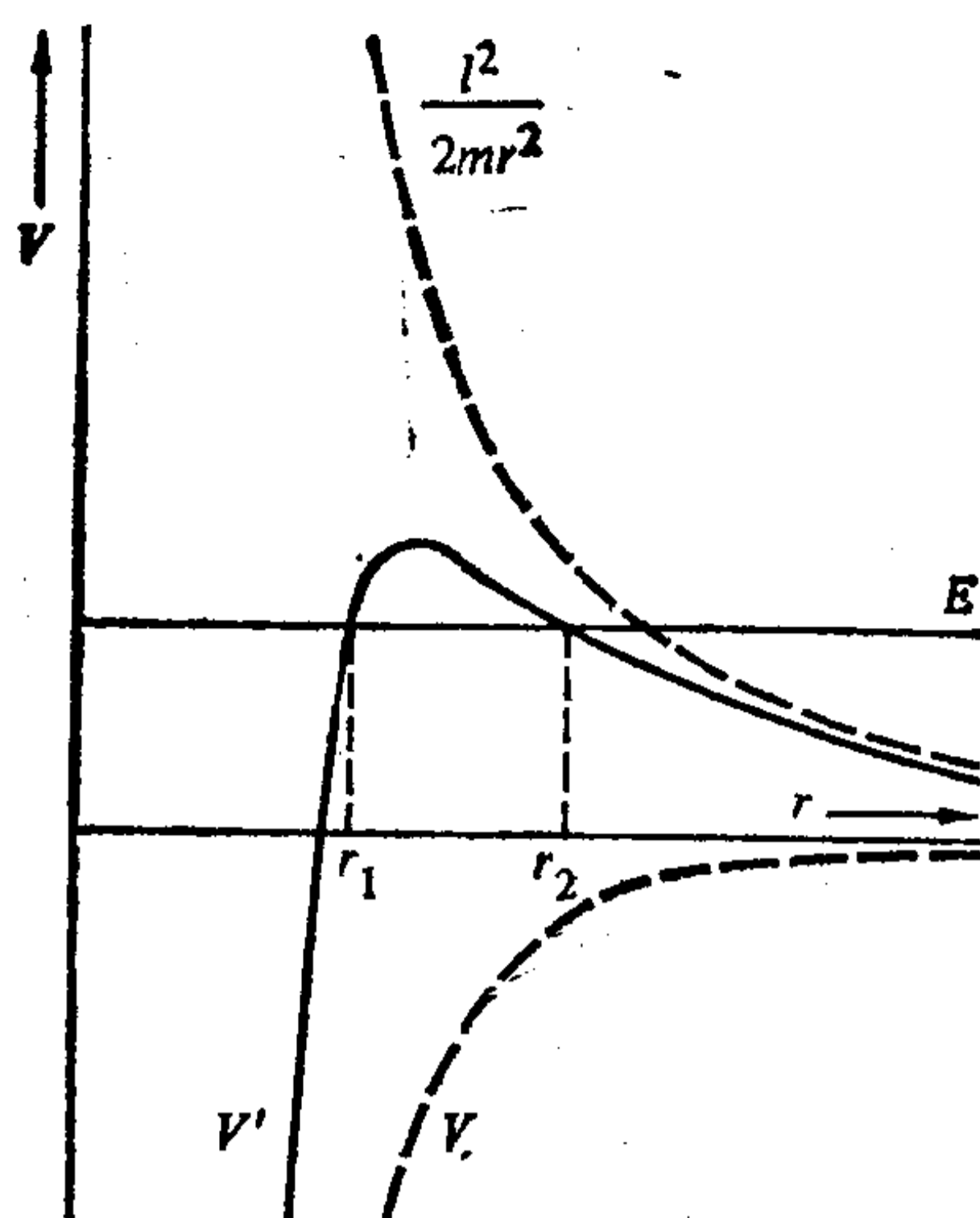


图 3-9 遵循四次方反比律的吸引力的等效一维势

$$f = -kr, \quad V = \frac{1}{2} kr^2.$$

对于与直线运动对应的零值角动量, $V' = V$, 正如图 3-10 所示. 对于正值能量, 运动是有界的, 而且已经知道它还是简谐的. 如果 $l \neq 0$, 就会出现图 3-11 所示的状况. 因而对于实际上可能的所有能量, 运动都是有界的, 而且不会通过力心. 不难看出, 在这种特殊情况下的轨道是椭圆, 因为 $\mathbf{f} = -k\mathbf{r}$, 则力的 x 分量和 y 分量为

$$f_x = -kx, \quad f_y = -ky.$$

因而总的运动是两个相互垂直的同频率简谐振动的合运动, 一般将导致椭圆形轨道. 一个熟知的例子是小振幅球面摆. 常说的李萨如图是两个互相垂直、频率之比为一有理数的两个正弦型振动合成的结果¹⁾. 所以说, 在线性恢复力作用下的

1) 例如, 可参阅 K. R. Symon, *Mechanics*, 3rd ed., (Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1977), 节 3-10.

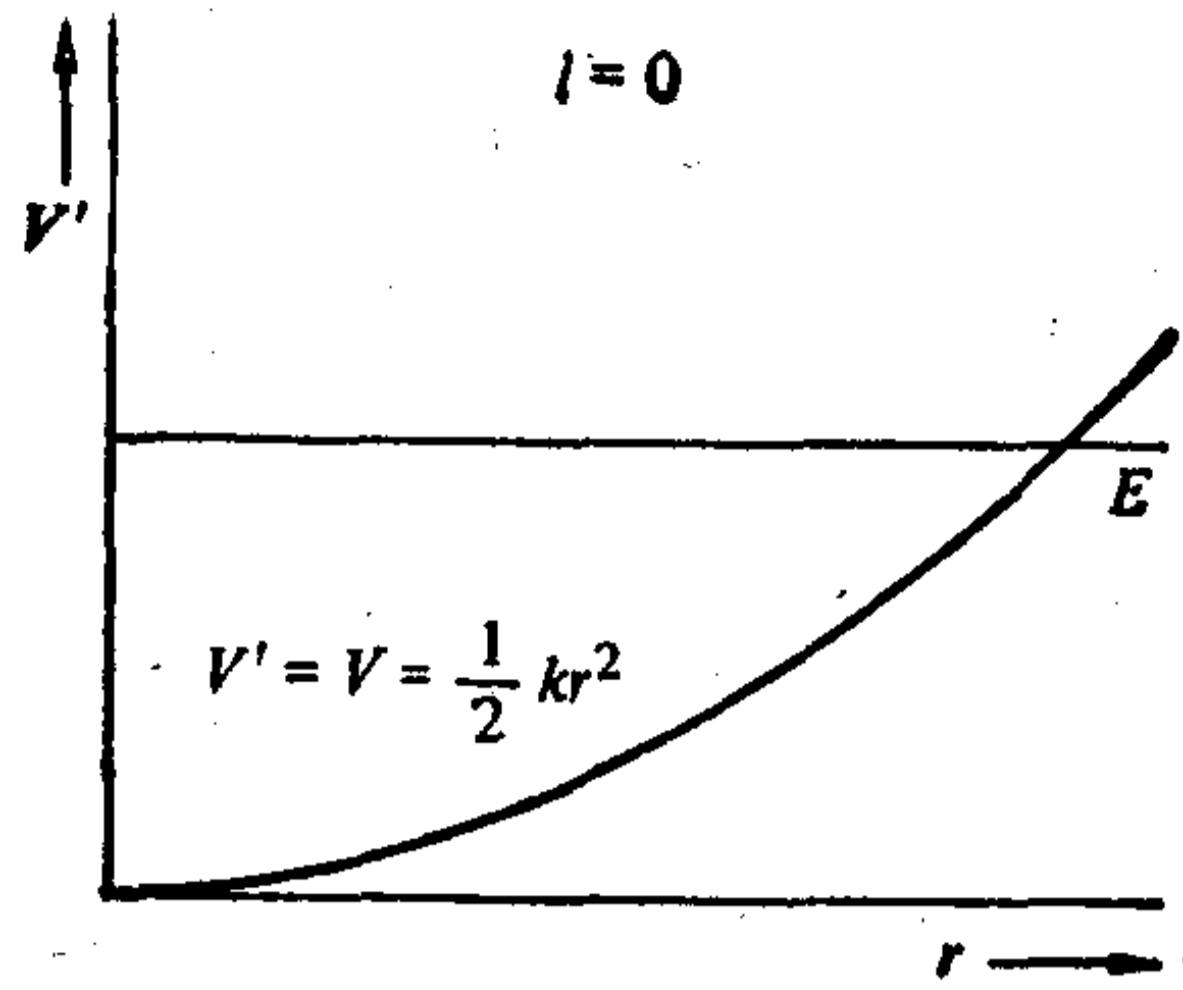


图 3-10

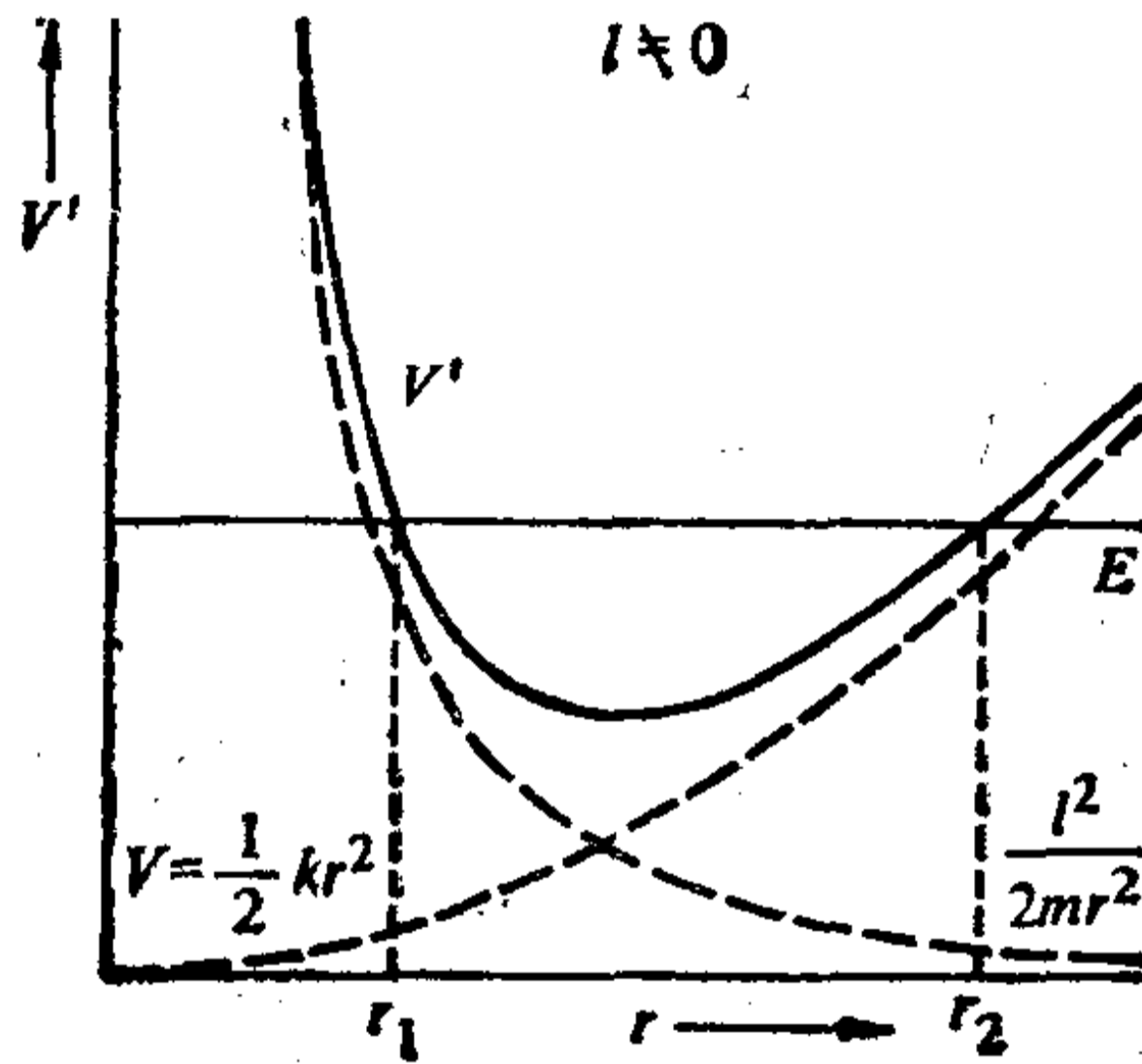


图 3-11

有心力运动构成了最简单的李萨如图。

3-4 维里定理

有心力运动的另一个性质可作为适用于多种系统的一条普遍定理——所谓维里定理——的特殊情况来推导。该定理与前面讨论过的那些定理的不同特性是它的统计性质，即它所考虑的是各种力学量的时间平均值。

考虑一个一般的质点系，各质点的位置矢量为 \mathbf{r}_i ，所受外

力为 \mathbf{F}_i (包括约束力在内)。基本的运动方程是

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i. \quad (1-1)$$

我们感兴趣的量是

$$G = \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i,$$

式中所求之和遍及系统的所有质点。该量的时间全微商为

$$\frac{dG}{dt} = \sum_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{p}_i + \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \mathbf{r}_i. \quad (3-23)$$

第一项可以变换成

$$\sum_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_i m_i v_i^2 = 2T,$$

第二项则根据式(1-1)应为

$$\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i.$$

所以式(3-23)可化为

$$\frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i = 2T + \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i. \quad (3-24)$$

要求得式(3-24)在整个时间间隔 τ 内的时间平均值, 可先将两边从 0 到 τ 对 t 求积后再除以 τ , 这时有

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dG}{dt} dt = \overline{\frac{dG}{dt}} = \overline{2T} + \overline{\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i}$$

或

$$\overline{2T} + \overline{\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i} = \frac{1}{\tau} [G(\tau) - G(0)]. \quad (3-25)$$

如果运动是周期的, 即经一定时间所有坐标重复一次, 那么, 把 τ 作为周期时, 式(3-25)的右边等于零。即使运动不是周期的, 也只要所有质点的坐标和速度都是有限的, 以致 G 有一个上限, 仍可得到相似的结论。如果 τ 选得足够长, 则式(3-

25)的右边要多小就有多小。因此,在以上两种情况下都可得到

$$\bar{T} = -\frac{1}{2} \overline{\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i}. \quad (3-26)$$

式(3-26)称为维里定理,右边叫做克劳修斯维里。这种形式的维里定理在气体分子运动论中极为有用。例如,通过下面的简要论证,即可用维里定理推导出理想气体的玻意耳定律。

考虑由 N 个原子组成的气体,它们被封闭在体积为 V 的容器内。再假设气体的温度为 T (不要与动能符号相混淆)。根据运动论的均分定理,每一个原子的平均动能等于 $\frac{3}{2} kT$ (k 是玻耳兹曼常数),这一关系式事实上是温度的定义。所以式(3-26)的左边等于

$$\frac{3}{2} NkT.$$

在式(3-26)的右边, \mathbf{F}_i 包括原子间的相互作用力和系统所受约束力。所谓理想气体,就是原子间相互作用力对维里的贡献可被略去的气体。例如,如果气体是如此之稀薄,以致原子间的碰撞与原子与器壁间的碰撞相比极为稀少时,即会出现这种情况。正是这些器壁构成了对系统的约束。约束力 \mathbf{F}_i 也只局限于器壁,每当气体原子撞击器壁时就表现出这种约束力。所以式(3-26)右边所求之和,可代之以对整个容器表面所求积分的平均值。约束力代表了器壁产生的反作用,即原子加于器壁的碰撞力的反作用,亦即器壁对气体压强 P 的反作用。按照通常的约定,单位矢量 \mathbf{n} 总是沿表面法线向外指向的。所以,我们能写出

$$d\mathbf{F}_i = -PndA$$

或者

$$\frac{1}{2} \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i = -\frac{P}{2} \int \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} dA.$$

但是,高斯定理表明,

$$\int \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} dA = \int \nabla \cdot \mathbf{r} dV = 3V.$$

因此,对于代表理想气体的系统,维里定理式(3-26)可以写成

$$\frac{3}{2} NkT = \frac{3}{2} PV,$$

消去两边的因子 $3/2$ 后,即得熟知的玻意耳定律. 如果这里的原子间相互作用力对维里有贡献,理想气体定律将不再有效. 所以在经典运动论中,维里定理是这种非理想气体状态方程的主要计算工具.

还能证明,如果力 \mathbf{F}_i 是非摩擦力 \mathbf{F}'_i 和正比于速度的摩擦力 \mathbf{f}_i 之和,维里也只与 \mathbf{F}'_i 有关,并没有来自 \mathbf{f}_i 的贡献. 当然,决不能让系统的运动因摩擦力而停下来. 为了维持运动应不断地对系统补充能量,否则,当 t 无限增大时,所有时间平均值都将等于零.(见习题 4.)

如果力能够从势推导而得,维里定理将变成

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \overline{\sum_i \nabla V \cdot \mathbf{r}_i}, \quad (3-27)$$

对于在有心力作用下运动的单个质点来讲,可简化为

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial V}{\partial r} r}. \quad (3-28)$$

如果 V 是 r 的幂律函数,即

$$V = ar^{n+1}$$

(这里指数的选择应保证力按 r^n 的规律变化),这时有

$$\frac{\partial V}{\partial r} r = (n+1)V,$$

式(3-28)成为

$$\bar{T} = \frac{n+1}{2} \bar{V}. \quad (3-29)$$

把欧拉定理应用于齐次函数(见第72页),显然,每当 V 是 r 的 $n+1$ 次齐次函数时,式(3-29)都是适合的.对于按平方反比律变化的力这种更加特殊的情况来讲, n 等于 -2 ,维里定理则取熟悉的形式

$$\bar{T} = -\frac{1}{2} \bar{V}. \quad (3-30)$$

3-5 轨道的微分方程以及可积幂律势

在处理实际有心力问题的特殊细节时,有必要改变一下我们讨论的方向.到目前为止,求解问题总意味着解出作为时间函数的 r 和 θ ,而把 E, l 等作为积分常数.但在绝大多数情况下,我们真正寻求的是轨道方程,即消去参数 t 后所得 r 对 θ 的关系式.有心力问题的消元步骤特别简单,因为运动方程中的 t 仅是一个微分变量.事实上,式(3-8)提供了微分 dt 和相应的变化 $d\theta$ 之间的确定关系:

$$l dt = m r^2 d\theta. \quad (3-31)$$

对 t 和 θ 的两个微商之间的关系应为

$$\frac{d}{dt} = \frac{1}{m r^2} \frac{d}{d\theta}. \quad (3-32)$$

这些关系式可以用来使运动方程(3-12)转换成一个不同的轨道方程.或者用于式(3-17)给出的运动方程形式解,从而直接得出运动方程.暂时我们将只讨论前一种可能性.

从式(3-32)可得对 t 的二阶微商为

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{l}{m r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{l}{m r^2} \frac{d}{d\theta} \right),$$

而 r 的拉格朗日方程(3-12)成为

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{l}{mr^2} \frac{dr}{d\theta} \right) - \frac{l^2}{mr^3} = f(r). \quad (3-33)$$

要化简式(3-33), 应注意到

$$\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = - \frac{d(1/r)}{d\theta};$$

因此, 如把变量改为 $u = 1/r$, 即可得

$$\frac{l^2 u^2}{m} \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = -f\left(\frac{1}{u}\right). \quad (3-34a)$$

由于

$$\frac{d}{du} = \frac{dr}{du} \frac{d}{dr} = - \frac{1}{u^2} \frac{d}{dr},$$

所以也能够用势把式(3-34a)表达成

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = - \frac{m}{l^2} \frac{d}{du} V\left(\frac{1}{u}\right). \quad (3-34b)$$

如果 f 的变化规律或者势 V 是已知的, 则式(3-34)的上述两种形式都是轨道的微分方程. 反之, 如果已知轨道方程, 即作为 θ 的函数的 r 为已知时, 就可倒过来求得力的变化规律 $f(r)$.

然而, 我们还希望得到某些更为一般的结果. 例如, 从式(3-34)可见, 轨道对于那些转折点是对称的. 现在来证明这一说法. 应该看到, 如果轨道是对称的, 则把它绕转折角方向对折一下, 不应该有任何变化. 如果坐标的选择保证转折点出现在 $\theta = 0$ 处, 即可用 $-\theta$ 替代 θ , 以实现数学上的反射. 显然, 轨道的微分方程(3-34)在这种代换下是不变的. 而且, 这里的初始条件, 即 $\theta = 0$ 时,

$$u = u(0), \quad \left(\frac{du}{d\theta} \right)_0 = 0$$

也同样不会受到影响. 因此, 不论是用 θ 还是用 $-\theta$ 来表示, 轨道方程必定相同. 这就是我们所要得到的结论. 所以, 轨

道在绕拱心矢量的反射下保持不变。这实际上表明，一旦知道了任何两个转折点间的部分轨道，就能描绘出整个轨道。给定的部分轨道绕某一拱心矢量的反射，能产生与之相邻的另一部分轨道，这种过程可以不断地重复，直到轨道的其余部分全部完成为止。如图 3-12 所示。

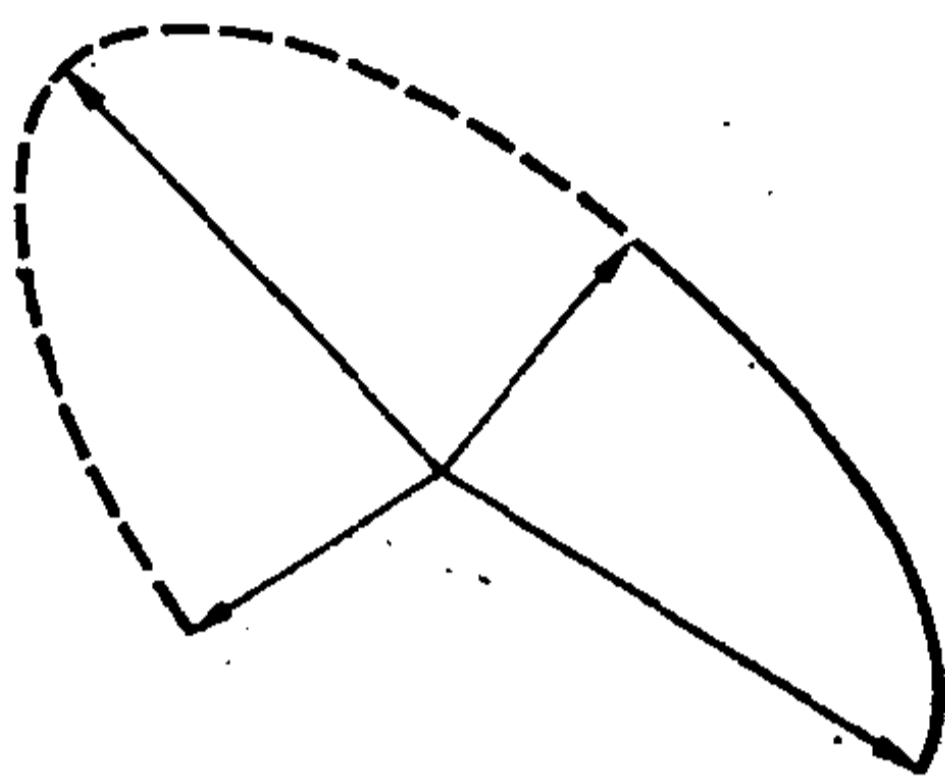


图 3-12 通过部分轨道绕拱心矢量的反射来扩展轨道

对于任何特定形式的力定律，必须对微分方程(3-34a)或(3-34b)求积以后才能得到实际的轨道方程。但大部分工作在求解运动方程(3-12)时已经完成，所以不必重复积分的全过程。现在要做的工作是利用式(3-31)来消去式(3-17)中的 t ，结果为

$$d\theta = \frac{l dr}{m r^2 \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{l^2}{2m r^2} \right)}}. \quad (3-35)$$

稍为演化一下，式(3-35)的积分为

$$\theta = \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mV}{l^2} - \frac{1}{r^2}}} + \theta_0, \quad (3-36)$$

或者把积分变量改为 $u = 1/r$ ，则有

$$\theta = \theta_0 - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mV}{l^2} - u^2}}. \quad (3-37)$$

与运动方程的情况一样,在形式上求解这问题时,式(3-37)并不总是一个适用的解,因为积分往往不可能用一些已知函数来表示.事实上,已经研究过的也只有特定的几种力定律.其中最重要的是 r 的幂律函数

$$V = ar^{n+1}, \quad (3-38)$$

这使力将按 r 的 n 次幂变化¹⁾. 采用这种势后,式(3-37)成为

$$\theta = \theta_0 - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2ma}{l^2} u^{-n-1} - u^2}}. \quad (3-39)$$

这也是只有在某些特定情况下才能用简单函数来求积的形式.如果根号内的量不是 u 的高于二次的项,分母的形式将是 $\sqrt{au^2 + \beta u + \gamma}$,所求积分就能直接用圆函数来表示.这种限制等于要求

$$-n - 1 = 0, 1, 2,$$

或者排除掉 $n = -1$ 的情况,即得

$$n = -2, -3,$$

这是与力的平方反比律、立方反比律相对应的情况.再有一个容易求积的情况是 $n = 1$,即线性力的情况.这时,方程(3-39)可以写成

$$\theta = \theta_0 - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2ma}{l^2} \frac{1}{u^2} - u^2}}. \quad (3-39')$$

如果我们作代换:

$$u^2 = x, \quad du = \frac{dx}{2\sqrt{x}},$$

1) 下面的讨论应排除 $n = -1$ 的情况.因为它在势式(3-38)中相当于不变的势,所以根本没有任何力.力定律中直接使用这一指数也不合理,因为按 r^{-1} 变化的力与对数式势相对应,根本不会是幂律势.这种势对绕一点的运动来说是异乎寻常的,它更象**线状**力源的情况.

则式(3-39')成为

$$\theta = \theta_0 - \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} x - \frac{2ma}{l^2} - x^2}}, \quad (3-40)$$

这也是我们所要求的形式。因此,当指数

$$n = 1, -2, -3$$

时,都可以得到用一些简单函数来表达的解。当然,这并不意味着对其他指数值就是不可积的,只不过所得函数不那么熟悉而已。例如,在一定指数范围内,式(3-39)包含有一些椭圆积分,它们的解必须用椭圆函数来表达。

根据定义,椭圆积分为

$$\int R(x, \omega) dx,$$

式中 R 是 x 和 ω 的某个有理函数,而 ω 则定义为

$$\omega = \sqrt{\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \eta}.$$

当然,式中的 α 和 β 不能同时为零,否则,积分将能用圆函数求解了。能够证明 (Whittaker Watson, Modern Analysis, 4th ed., p. 512), 这种积分都可化为包含圆函数以及第一、二、三类勒让德椭圆积分的形式。很多书中刊有这些标准椭圆积分的完整而详尽的表格,它们的性质和它们与椭圆函数的联系在文献中都有详尽的讨论。从根本上说,使用椭圆函数并不比圆函数需要更高的逻辑概念,只是人们对它们不太熟悉而已。由定义可知,如果 $n = -4, -5$, 式(3-39)中的积分就可以用椭圆函数求解。我们还可以尝试着把积分写成另一种同样能得到椭圆积分的形式,办法是把分子和分母都乘以 u^ρ , 这里的 ρ 是某个待定指数。这样,积分将成为

$$\int \frac{u^\rho du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} u^{2\rho} - \frac{2ma}{l^2} u^{-n-1+2\rho} - u^{2(\rho+1)}}},$$

式中根号内的表达式将是一个高于四次的多项式 ($\rho = 1$ 的情况除外)。所以, 只当

$$\begin{aligned} & -n - 1 + 2 = 0, 1, 2, 3, 4 \\ \text{或} & n = +1, 0, -1, -2, -3 \end{aligned}$$

时, 积分才可能是椭圆函数或圆函数。由于 $n = +1, -2, -3$ 时, 方程的解简化为圆函数, 而 $n = -1$ 的情况又已排除, 所以, 只有 $n = 0$ 时才会得到椭圆函数。

如果把变量改为 $u^2 = x$, 则在一定情况下也能得到椭圆类型的积分。这时的积分为

$$\frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} x - \frac{2ma}{l^2} x^{(1-n)/2} - x^2}},$$

由于

$$\frac{1-n}{2} = 3, 4,$$

所得指数为

$$n = -5, -7,$$

所以这一积分将化为椭圆形式。

最后, 如果我们再一次把分子和分母都乘上 x , 那么, 获得椭圆积分或更简单积分的条件为

$$\frac{1-n}{2} + 2 = 0, 1, 2, 3, 4$$

或

$$n = +5, +3, +1, -1, -3,$$

只当 $n = +5, +3$ 时才会出现新的可能性。所以, 导致椭圆函数的全部整数指数为

$$n = +5, +3, 0, -4, -5, -7.$$

虽然这些已经代表了可能的全部整数指数, 可是某些分数指数经过适当变换后同样能够导致椭圆积分。

3-6 闭合轨道的条件(伯特兰定理)

前面已经得到的结果,并不是我们在不明显求解出运动的情况下,从等效一维势或轨道方程能够获得的全部情况.特别是,还有可能推导得一条极为有用而又发人深思的定理,它可用来论述导致闭合轨道(即质点终将重复它原有径迹的那类轨道)的那些有心吸引力.

我们已描述过一类闭合轨道,即绕力心的圆形轨道的形成条件.对于任何给定 l 值,出现圆形轨道的条件是:等效一维势 $V'(r)$ 在某一距离 r_0 处有一极小或极大值,而且能量 E 正好等于 $V'(r_0)$. 要求 V' 有一极值等于要求 r_0 处的 f' 为零,这就回到了前面推导得的那个条件(见第94页),即

$$f(r_0) = -\frac{l^2}{mr_0^3}, \quad (3-41)$$

此式表明,对于可能的圆形轨道,有关的力必须是吸引力.另外,质点的能量必须是

$$E = V(r_0) + \frac{l^2}{2mr_0^2}, \quad (3-42)$$

根据式(3-15),此式相当于要求圆形轨道的 r 应等于零.(3-41)和(3-42)两式都是基本的、熟悉的关系式.从这两个式子可以看出,对于任何有心吸引力,只要角动量 l 如式(3-41)所示,而质点能量又如式(3-42)所示,那么,总可能在某一任意半径 r_0 处得到一个圆形轨道.

圆形轨道的性质则视 V' 的极值是极小值(如图3-8所示)还是极大值(如图3-9所示)而定.如果能量比给定 l 值的圆形轨道所要求的稍为大一点,则在 V' 取极小值的情况下,运动仍然是有界的,尽管这时轨道不再是圆形的.但当 V' 取极大值时,则根据式(3-34), E 值比圆形轨道所要求的那怕只提

高一点点,运动也将是无界的;这时,质点运动将通过力心,并且在图 3-9 所示势的情况下趋于无限远. 用静态平衡中所用的术语来说,图 3-8 所示的圆形轨道是稳定的,图 3-9 所示的则是不稳定的. 圆形轨道的稳定性质决定于 V' 的二阶微商在圆半径处所取符号,符号为正时 (V' 凹面向上) 是稳定的, V' 的凹面向下时则是不稳定的. 所以,出现稳定轨道的条件是

$$\frac{\partial^2 V'}{\partial r^2} \Big|_{r=r_0} = - \frac{\partial f}{\partial r} \Big|_{r=r_0} + \frac{3l^2}{mr_0^4} > 0.$$

利用式(3-41),能把这一条件写成

$$\frac{\partial f}{\partial r} \Big|_{r=r_0} < - \frac{3f(r_0)}{r_0} \quad (3-43)$$

或

$$\frac{d \ln f}{d \ln r} \Big|_{r=r_0} < -3. \quad (3-43')$$

如果力在圆半径 r_0 附近的行为象 r 的幂律函数,即

$$f = - \frac{k}{r^{n+1}},$$

则式(3-43)所示的稳定性条件将成为

$$- \frac{(n+1)k}{r_0^{n+2}} < - \frac{3k}{r_0^{n+2}}$$

或

$$n < 2. \quad (3-44)$$

因此,对于所有 r_0 值来讲,比 $1/r^2$ 变化更慢的幂律吸引势都可以导致稳定的圆形轨道.

如果圆形轨道是稳定的,则质点能量比圆形轨道所要求的数值略为增加一点,只能使 r 相对于 r_0 有一微小变化. 能够证明(见附录 A),由于对圆形轨道条件的这种偏离,质点运动将表现为 $u (\equiv 1/r)$ 在 u_0 附近的简谐运动:

$$u = u_0 + a \cos \beta \theta, \quad (3-45)$$

式中 a 是振幅，它与给定能量偏离圆形轨道所需能量的情况有关； β 是由力定律 $f(r)$ 在圆形轨道半径 r_0 附近的泰勒级数展开式引起的量。附录 A 中指出， β 值决定于关系式

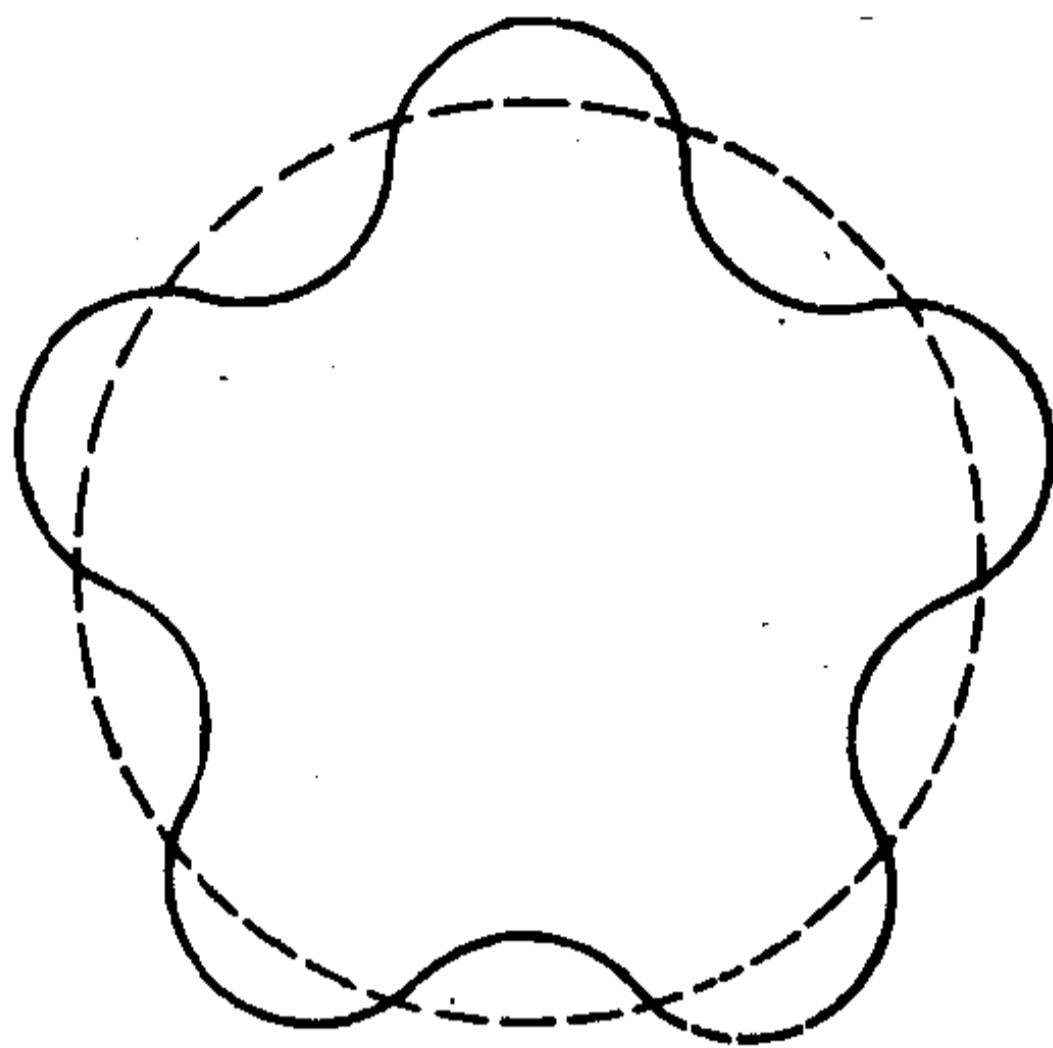


图 3-13 有心力场中稍为偏离圆形轨道的运动轨道

$$\beta^2 = 3 + \frac{r}{f} \left. \frac{df}{dr} \right|_{r=r_0}. \quad (3-46)$$

当质点矢径扫过整个平面时， u 将经历 β 周振荡(见图 3-13)。如果 β 是一有理数，即两个整数之比 p/q ，则矢径转过 q 转后，轨道将开始重复，即轨道必定是闭合的。

在满足不等式 (3-43) 的每个 r_0 处，只要给质点一个由 (3-41) 和 (3-42) 两式规定的初始能量和角动量，就有可能建立起稳定的圆形轨道。问题自然在于究竟应该取什么形式的力定律，才能保证相对于圆形轨道来讲稍为受到扰动的轨道仍是闭合的。显然，在这些条件下， β 不仅必须是个有理数，而且对于可能出现圆形轨道的所有距离，它还必须是相同的有理数。否则，由于 β 只能取不同的值，振荡周期数将随 r_0 不连续地变化，在这些不连续点处，轨道当然不可能是闭合的。由于 β^2 处处是常数，因此， β^2 的定义方程 (3-46) 事实上已成为用

独立变量 r_0 表示的、力定律 f 的微分方程。我们当然可以考虑用 r 来表达式(3-46),但要记住,这时的方程仅在可能出现稳定圆形轨道的 r 范围内才成立。把式(3-46)稍作演化,即得

$$\frac{d \ln f}{d \ln r} = \beta^2 - 3, \quad (3-47)$$

直接求积此式,能够得到力定律

$$f(r) = -\frac{k}{r^{3-\beta^2}}. \quad (3-48)$$

β 为有理数的所有这种形式的力定律,在初始条件与确定圆形轨道的条件只有微小差别的情况下,都能得到闭合的稳定轨道。式(3-48)所容许的那些可能性中,包括有按平方反比律 ($\beta = 1$) 变化的那样一些熟知的力;当然,象 $f = -kr^{-2/3}$ ($\beta = 5/3$) 这样的许多其他特性的力也是允许的。

假定初始条件与形成圆形轨道的条件的偏差并非只是微小的,则同样是这些力定律是否还能得出圆形轨道呢? 这一问题是可以直接回答的,只要在力定律的泰勒级数展开式中保留一个附加项,并解出合成轨道的方程就行了。虽然包含的计算是基本的,但却显得有点冗长。详细计算见附录 A。所得结果是,在与圆形轨道条件的偏差高于一级的情况下,只有当 $\beta^2 = 1$ 和 $\beta^2 = 4$ 时轨道才是闭合的。根据式(3-48),第一个 β^2 值导致相吸引的平方反比律;第二个 β^2 值得出的则是一个正比于径向距离的吸引力——胡克定律! 对于 l 和 E ($E < 0$) 的任意组合来讲,这些力定律,也只有这些力定律才可能得出闭合轨道,事实上,从轨道方程的直接解也可以知道情况确实是如此。因此,对于所有被束缚质点来讲,只有遵循平方反比律和胡克定律的两种有心力才能够得出闭合轨道¹⁾。

1) 显然,这一结论首先由伯特兰 (Bertrand) 于 1873 年得出 (Comptes Rendus, 77, 849—853), 并常被称为伯特兰定理。参阅本章末所列其他有关参考文献。

这是值得重视的结果，即使要作出冗长的代数运算也是值得的。这是天文观测中经常遇到的事，那些天体都被束缚于在一级近似下是闭合的轨道上运动。在大多数情况下，与闭合轨道所以有微小的偏离，是由于象其他天体的存在所引起的那样一些扰动造成的。当我们仅仅考虑太阳系时，或者关注那些已证实的真正双星例子时，闭合轨道确实是普遍存在的。注意，要在所有距离上都保持有效，胡克定律是一个最不符合实际情况的力定律，因为它意味着一个向无限大不断增加的力。因此，在各种初始条件下都存在闭合轨道这一点本身即能得出结论：万有引力是按距离的平方反比规律变化的。例如，要推导得万有引力定律，不一定要用到轨道的椭圆特性。

我们还能用稍为不同的方式来表达这一结论，这在近代物理学中也许更有意义。在一个平面内所作轨道运动，能够看作是两个振荡运动的复合运动，一个是 r 的振荡，另一个是 θ 的振荡。轨道是闭合的这一说法，等于是说两个振荡的周期应成适当比例——即它们是简并的。因此，引力场中轨道的简并特性决定了力定律的形式。以后，我们将遇到简并性和势的性质之间关系的其他表述。

3-7 开普勒问题：平方反比力定律

平方反比律在所有有心力定律中最为重要，因而值得详加探讨。在这种情况下，力和势可以写成

$$f = -\frac{k}{r^2}, \quad V = -\frac{k}{r}. \quad (3-49)$$

求积轨道方程的方法有好几种，最简单的是把式(3-49)代入轨道微分方程(3-34)：

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{-mf(1/u)}{l^2u^2} = \frac{mk}{l^2}. \quad (3-50)$$

改用变量 $y = u - \frac{mk}{l^2}$, 微分方程成为

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} + y = 0,$$

它的直接解为

$$y = B \cos(\theta - \theta'),$$

B 和 θ' 是两个积分常数. 用 r 来表示这个解, 即得

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2} (1 + e \cos(\theta - \theta')), \quad (3-51)$$

式中

$$e = B \frac{l^2}{mk}. \quad (3-52)$$

从形式解式(3-39)来求得轨道方程也颇为有益. 虽然所需步骤比微分方程(3-50)的简单求积要长, 但它也有优点: 解中的重要积分常数 e 将自动地由能量 E 和角动量 l 来推算. 先把式(3-39)表达成不定积分的形式:

$$\theta = \theta' - \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} + \frac{2mku}{l^2} - u^2}}, \quad (3-53)$$

式中的 θ' 是一个由初始条件决定的积分常数, 但不一定是 $t = 0$ 时刻的初始角度 θ_0 . 这样, 它就成了一个标准形式的积分¹⁾:

1) 例如, 可参阅 B. O. Pierce, A Short Table of Integrals, 3d. no. 161; 4th ed. no. 166. 或参阅 I. S. Gradshteyn, I. W. Ryzhik, Table of Integrals, no. 2. 266, 以及 M. R. Spiegel, Mathematical Handbook, no. 14. 280. (这类书的详细介绍可查阅文献目录中“参考著作”一节). 为了得到式(3-45), 在所有这些积分表给出的结果中都要加上一个常数 $-\pi/2$. 因为都是不定积分, 所以这样做是允许的.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \arccos \frac{\beta + 2\gamma x}{\sqrt{q}}, \quad (3-54)$$

式中

$$q = \beta^2 - 4\alpha\gamma.$$

为了把它应用于式(3-53), 必须令

$$\alpha = \frac{2mE}{l^2}, \quad \beta = \frac{2mk}{l^2}, \quad \gamma = -1,$$

因而判别式 q 为

$$q = \left(\frac{2mk}{l^2}\right)^2 \left(1 + \frac{2El^2}{mk^2}\right).$$

采用这些置换后, 式(3-53)将成为

$$\theta = \theta' - \arccos \frac{\frac{l^2 u}{mk} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}}.$$

最后, 解出 $u \left(\equiv \frac{1}{r}\right)$, 即得轨道方程

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} \cos(\theta - \theta')\right), \quad (3-55)$$

此式与式(3-51)相一致, 只是这里的 e 是用 E 和 l 来推算的. 根据式(3-55), 可以把积分常数 θ' 确认为轨道的一个转折角. 应该注意, 四个积分常数中只有三个出现在轨道方程中, 而这永远是轨道的特性. 实际上, 第四个常数是用来确定质点在轨道上的初始位置的. 如果我们仅对轨道方程感兴趣, 这一常数显然毫不相干, 因而在解答中不必出现. 当然, 如果为了完成方程的解, 即希望得到作为时间函数的 r 和 θ , 这个漏掉的常数就得加进去. 例如, 如果选用式(3-55)来求积角动量守恒定理

$$mr^2 d\theta = l dt,$$

则必须另外确定初始角 θ_0 .

已经知道, 有一个焦点位于原点的圆锥曲线的一般方程为

$$\frac{1}{r} = C[1 + e \cos(\theta - \theta')], \quad (3-56)$$

式中的 e 是圆锥曲线的偏心率. 把它与式(3-55)相比较, 可以看出轨道总是一条圆锥曲线, 其偏心率

$$e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}. \quad (3-57)$$

轨道的性质与 e 值有关:

$e > 1$, $E > 0$ 时为双曲线;

$e = 1$, $E = 0$ 时为抛物线;

$e < 1$, $E < 0$ 时为椭圆;

$e = 0$, $E = -\frac{mk^2}{2l^2}$ 时为圆.

这种分类与等效一维势 V' 的能量图线所示轨道的定性讨论相一致. 这里的圆周运动条件略有不同, 但是要把它化成前面的圆形轨道条件所得的结果也没有什么困难. 对于圆形轨道, T 和 V 始终是常数, 而且根据维里定理

$$E \equiv T + V = -\frac{V}{2} + V = \frac{V}{2}.$$

因此,

$$E = -\frac{k}{2r_0}. \quad (3-58)$$

但根据式(3-41)关于有心力与“有效力”相平衡的说法, 我们能列出

$$-\frac{k}{r_0^2} = -\frac{l^2}{mr_0^3}$$

或

$$r_0 = \frac{l^2}{mk} \quad (3-59)$$

利用这一轨道半径公式,式(3-58)成为

$$E = -\frac{mk^2}{2l^2},$$

这就是前面的圆周运动条件。

在椭圆轨道的情况下可以证明,长轴仅与能量有关,这是玻尔原子论中一条相当重要的定理。长半轴等于两个拱距 r_1 和 r_2 之和的一半(见图 3-6)。根据定义,这些点处的径向速度为零,而能量的守恒意味着那些拱距应是方程

$$E - \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{k}{r} = 0$$

或

$$r^2 + \frac{k}{E}r - \frac{l^2}{2mE} = 0 \quad (3-60)$$

的根。已经知道,二次方程中线性项的系数等于两根之和的负数。因此,长半轴为

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2} = -\frac{k}{2E} \quad (3-61)$$

注意,在圆的极限情况下,式(3-61)与式(3-58)是一致的。利用长半轴来表示椭圆的偏心率,则能表达成

$$e = \sqrt{1 - \frac{l^2}{mka}} \quad (3-62)$$

(这是在后一章中将要用到的一个关系式)。其次,根据式(3-62)可得表达式

$$\frac{l^2}{mk} = a(1 - e^2), \quad (3-63)$$

利用这一关系式,椭圆轨道方程(3-51)能写成

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta - \theta')}. \quad (3-64)$$

从式(3-64)可知,两个拱距(出现在 $\theta - \theta'$ 分别等于0和 π 的时候)等于 $a(1 - e)$ 和 $a(1 + e)$,这正好是从椭圆性质得出的结论.

3-8 开普勒问题中的时间进程

现在,对于遵循平方反比力定律的有心力场中的运动轨道方程,能够用一种极为直截了当的方法来求解,并用极其简洁的表达式来说明其结果.然而,要描述质点沿轨道移动过程中的时间进程则是一个极其复杂的问题.一般地讲,质点径向距离 r 与时间(相对于某一起始点)之间的关系由式(3-18)给出,它在这里所取形式为

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{k}{r} - \frac{l^2}{2mr^2} + E}}. \quad (3-65)$$

同样,极角 θ 和时间之间则通过角动量守恒来关联,即

$$dt = \frac{mr^2}{l} d\theta,$$

把此式与轨道方程(3-51)组合起来,即得

$$t = \frac{l^3}{mk^2} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{[1 + e \cos(\theta - \theta')]^{\frac{3}{2}}}, \quad (3-66)$$

这两个积分都可以用基本函数来求解. [有关式(3-66)的情况可以参阅,例如 M. R. Spiegel, *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*, 中的公式 14.391.] 但是,得到的关系式非常

复杂，而且要把 r 和 θ 作为 t 的函数反过来求解也是一个难以解决的问题，特别是当人们要求达到天文观测所需的高精度时困难更大。

为了说明某些困难，我们来考虑一下抛物线运动($e = 1$)的情况，这时的积分运算最为简单。习惯上总是去计算最近点(该点通常称为近日点¹⁾)处与矢径相夹的平面极角。这一约定相当于令轨道方程(3-51)中的 θ' 等于零。时间则相应地从通过近日点的瞬间 T 起算。利用三角恒等式

$$1 + \cos\theta = 2\cos^2 \frac{\theta}{2},$$

则对于抛物线运动来讲，式(3-66)可简化为

$$t = \frac{l^3}{4mk^2} \int_0^\theta \sec^4 \frac{\theta}{2} d\theta.$$

把变量改变为 $x = \tan(\theta/2)$ ，积分运算是容易完成的，所得积分为

$$t = \frac{l^3}{2mk^2} \int_0^{\tan(\theta/2)} (1+x^2) dx$$

或者

$$t = \frac{l^3}{2mk^2} \left(\tan \frac{\theta}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{\theta}{2} \right). \quad (3-67)$$

这是一个把 t 作为 θ 的函数的直截了当的关系式；要反过来求取给定 t 时刻的 θ 值，必须求解 $\tan(\theta/2)$ 的三次方程，然后再求出相应的反正切值。给定时刻的径向距离则通过轨道方程来给出。

1) 正确地说，该名称应限于绕太阳的轨道，更一般的名称应是**近拱点**。然而，不管力心位于何处，使用近日点这一名称已成习惯。甚至对于绕月太空飞船的情况，在轨道参数的正式描述中也称为近日点，近月点反倒是学究式的名称。

对于椭圆运动,通过一个称为偏近点角¹⁾的辅助变量 ψ 来求积式(3-65)最为方便. ψ 由关系式

$$r = a(1 - e \cos \psi) \quad (3-68)$$

来确定. 根据与轨道方程(3-64)的比较可以清楚地看出,当 θ 经历一周时, ψ 将通过 0 到 2π 这一区间; $\psi = 0$ 的地方为近日点(根据约定,这里的 $\theta = 0$), $\psi = \pi = \theta$ 的地方为远日点. 能够对 ψ 作出某种几何解释,但是它只有历史上的意义(参阅 McCuskey, Introduction to Celestial Mechanics, p. 45). 若用 a, e 和 k 表示椭圆运动的 E 和 l , 式(3-65)能表达为

$$t = \sqrt{\frac{m}{2k}} \int_{r_0}^r \frac{r dr}{\sqrt{r - \frac{r^2}{2a} - \frac{a(1-e^2)}{2}}}, \quad (3-69)$$

按照关于起始时刻的约定,这里的 r_0 是近日点距离. 根据式(3-68)用 ψ 代换 r , 那么,经过一定的代数运算,能够把这一积分简化为

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{\pi}} \int_0^\psi (1 - e \cos \psi) d\psi. \quad (3-70)$$

首先可以看到,如果对式(3-70)所作积分遍及 ψ 的整个 2π 区域,得到的将是一个椭圆运动的周期表达式

$$\tau = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (3-71)$$

这一重要结果也能够直接从椭圆的性质求得. 根据角动量守恒定理,掠面速度是一常数,即

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{l}{2m}. \quad (3-72)$$

就整个周期 τ 来求积式(3-53),即能求得轨道的面积:

$$\int_0^\tau \frac{dA}{dt} dt = A = \frac{l\tau}{2m}.$$

1) 此名与中世纪天文学的术语有关,那里把 θ 叫做真近点角.

已知椭圆的面积为

$$A = \pi ab,$$

根据偏心率的定义,式中短半轴 b 与 a 的关系为

$$b = a\sqrt{1 - e^2}.$$

从式(3-62)可知,短半轴也能写成

$$b = a^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{l^2}{mk}},$$

所以周期为

$$\tau = \frac{2m}{l} \pi a^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{l^2}{mk}} = 2\pi a^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{m}{k}},$$

这正是前面所得结果. 式(3-71)表明,其他各量相等时,周期的平方正比于长轴的立方,这一结论通常称为开普勒第三定律¹⁾. 实际上,开普勒当时考虑的是太阳引力场中行星运动这一特定问题. 所以更确切地说,他的定律应是:所有各行星的周期的平方正比于它们长轴的立方. 这种形式的定律只是近似地正确. 应该记得,行星绕太阳的运动是一个两体问题,式(3-71)中的 m 应代之以约化质量

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

式中, m_1 可看作是行星质量; m_2 则可看作是太阳质量. 再说,引力定律是

$$f = -G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

所以常数 k 是

1) 开普勒行星运动三定律发表于 1610 年前后,这是他对行星观测所作创造性分析的结果,并为牛顿的伟大成就奠定了基础. 第二定律论述了掠面速度的守恒,是有心力运动的普遍定理,前面已提及. 第一定律——行星沿椭圆轨道运动,太阳则位于其一个焦点上——以及第三定律特限于遵循平方反比律的有心力场.

$$k = Gm_1m_2. \quad (3-73)$$

如果在这些条件下行星质量 m_1 与太阳质量 m_2 相比可略去不计, 则式(3-71)成为

$$\tau = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{G(m_1 + m_2)}} \approx \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{Gm_2}}. \quad (3-74)$$

式(3-74)表明 τ 正比于 $a^{3/2}$, 所有行星的比例常数都相同, 因此这一近似形式的方程就是开普勒第三定律. 然而, 行星质量 m_1 与太阳质量相比并不总是可以忽略的, 例如, 木星质量约为太阳质量的 0.1%. 相反, 开普勒第三定律对于玻尔原子中的那些电子轨道却是严格成立的, 因为在同一个原子中, 所有轨道的 μ 和 k 都相同.

现在再回到椭圆轨道在各时刻的位置的一般问题, 为此, 我们引进迴转频率

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = \sqrt{\frac{k}{ma^3}}, \quad (3-75)$$

使式(3-70)的形式稍为改变一下. 式(3-70)中的积分当然是容易完成的, 所得关系式

$$\omega t = \psi - e \sin \psi \quad (3-76)$$

称为开普勒方程. 在沿轨道绕转一整周的过程中, 量 ωt 同 ψ 和 θ 一起从 0 变到 2π , 因而也被作为近点角, 并专称平均近点角.

为了求得给定 t 时刻轨道上的位置, 首先使开普勒方程(3-76)倒过来, 以求得相应的偏近点角 ψ . 再由式(3-68)求出径向距离, 而极角 θ 则能通过定义方程(3-68)与轨道方程(3-64)的比较用 ψ 表示:

$$1 + e \cos \theta = \frac{1 - e^2}{1 - e \cos \psi}.$$

经过代数演化, 上式简化为

$$\cos \theta = \frac{\cos \phi - e}{1 - e \cos \phi}. \quad (3-77)$$

把式(3-77)两边先是各加1,再各减1,把所得的两个方程相除,即得另一形式

$$\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{\phi}{2}. \quad (3-78)$$

一旦知道了 ϕ ,就能从式(3-77)或式(3-78)求得 θ .给出给定时刻相应 ϕ 值的、开普勒超越方程(3-76)的解,是自从开普勒早在17世纪提出问题以来已引起许多著名数学家注意的一个问题.例如,今天叫做模拟解的就是由牛顿提出的.确实可以这样说,在整个偏心率范围内要求以弧秒的精度来求解开普勒方程的实际需要,为计算数学在十八、十九世纪的许多发展奠定了基础.在计算机时代前发展起来的一百多个解法中有几个将留作本章的习题.

3-9 拉普拉斯-龙格-楞次矢量

除角动量外,开普勒问题还因存在另一个守恒矢而出名.一般有心力情况下的牛顿第二运动定律能用矢量形式表达成

$$\dot{\mathbf{p}} = f(r) \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (3-79)$$

因此, $\dot{\mathbf{p}}$ 与恒定角动量矢量 \mathbf{L} 的矢积能够展开成

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{L} &= \frac{mf(r)}{r} [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})] \\ &= \frac{mf(r)}{r} [\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - r^2 \dot{\mathbf{r}}]. \end{aligned} \quad (3-80)$$

此式还能进一步化简,只要注意到

$$\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = r \dot{r}$$

(或者,不太严格地说,速度的径向分量为 \dot{r})。由于 \mathbf{L} 是不变量,所以略为演化后式(3-80)可重新表达成

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = -mf(r)r^2 \left[\frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - \frac{\mathbf{r}\dot{r}}{r^2} \right]$$

或

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = -mf(r)r^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right). \quad (3-81)$$

如果不说明 $f(r)$ 的具体形式,我们将无法继续演化下去。但如果 $f(r)$ 反比于 r^2 (开普勒问题),即能对式(3-81)直接求积。因此,把 $f(r)$ 表达成式(3-49)所示形式后,式(3-81)成为

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{mk\mathbf{r}}{r} \right),$$

此式表明,开普勒问题存在着一个守恒矢量 \mathbf{A} , 定义为

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - mk \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (3-82)$$

在近代,矢量 \mathbf{A} 在物理学家中常称为龙格-楞次矢量,但优先权则属于拉普拉斯¹⁾。

根据 \mathbf{A} 的定义,不难看出,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = 0, \quad (3-83)$$

1) 拉普拉斯在他的 *Traite de Mecanique Celeste* 的第一部分中,明显地表述了 \mathbf{A} 的那些分量,此事发生在 1799 年。拉普拉斯矢量这一名称已被大量天体力学著作普遍采用,因此,这样称它是当之无愧的。哈密顿在 1845 年显然也独立地发现了作为守恒量的 \mathbf{A} , 首次用矢量术语作出的推导(实际上就是这里所给出的推导)是 1900 年左右由吉布斯完成的。龙格在 1919 年出版的论述矢量分析的普及德文教材中重复了这种推导,并由楞次在论述受扰氢原子量子力学分析的 1924 年论文中引为参考文献。从此,论述拉普拉斯-龙格-楞次矢量及其用途的论著就大量出现。进一步的历史细节可参阅 H. Goldstein, *American Journal of Physics*, **43**, 735 (1975) 及 44.1123(1976)。

因为 \mathbf{L} 垂直于 $\mathbf{p} \times \mathbf{L}$, 而 \mathbf{r} 又垂直于 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. 根据 \mathbf{A} 与 \mathbf{L} 的这一正交性质可知, \mathbf{A} 必定是轨道平面内的某一固定矢量. 如果用 θ 表示 \mathbf{r} 和 \mathbf{A} 的固定方向之间的夹角, 则 \mathbf{r} 和 \mathbf{A} 的标积应是

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = Ar \cos \theta = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = mkr. \quad (3-84)$$

把三重标积中的那些量交换一下, 即得

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = l^2,$$

从而式(3-84)成为

$$Ar \cos \theta = l^2 - mkr$$

或

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2} \left(1 + \frac{A}{mk} \cos \theta \right). \quad (3-85)$$

因此, 拉普拉斯-龙格-楞次矢量还提供了推导开普勒问题中轨道方程的另一途径! 把(3-85)与(3-51)形式的轨道方程相比证明, \mathbf{A} 确实位于轨道上近日点的矢径方向上, 其量值为

$$A = mke. \quad (3-86)$$

对开普勒问题我们已经有了地位相同的两个矢量运动常数 \mathbf{L} 和 \mathbf{A} 以及一个标量运动常数 E . 由于一个矢量必定有三个独立分量, 因此, 这对应着总共七个守恒量. 已知, 一个象这里所说的三个自由度的系统有六个独立的运动常数, 比如说质点的每一个初始位置和速度都有相应的三个分量. 再说, 我们已经得到的运动常数都是 \mathbf{r} 和 \mathbf{p} 的代数函数, 并且又是作为整体来描述轨道的(空间取向、偏心率等等); 这七个守恒量中没有一个与初始时刻质点在轨道上所处位置有关. 由于总会有一个运动常数与这种情况相关联, 比如说, 以通过近日点的时刻 T 的形式来体现这种联系, 这样, 就能只用五个独立运动常数来描述轨道的大小、形状和空间取向. 因而能断言, 并不是构成 \mathbf{L} , \mathbf{A} 和 E 的所有那些量都能够是独立的; 事

实上,必定有两个关系式连结这些量.已经得到的一个关系式是体现 \mathbf{A} 和 \mathbf{L} 的正交性质的方程 (3-83). 另一个则可从式(3-86)求得,只要根据式(3-57)用 E 和 l 来表示偏心率,就能得到

$$A^2 = m^2 k^2 + 2mEl^2, \quad (3-87)$$

由此证实,七个常数中只有五个是独立常数¹⁾.

角动量矢量和能量只包含四个独立运动常数,所以还得由拉普拉斯-龙格-楞次矢量提供第五个常数.自然会问,为什么对于一般规律的有心力就不能有某些守恒量,这些量按照特定开普勒问题中的拉普拉斯-龙格-楞次矢量的类似方式,与 \mathbf{L} 和 E 一起描述轨道.看来,回答是肯定的,这样一些守恒量事实上是能够构成的²⁾,但一般说来,它们是运动的一些颇为奇特的函数.那些与轨道相关的运动常数共同确定着轨道,得出一个把 r 作为 θ 的函数的轨道方程.已知,有心力运动轨道一般并不闭合;节 3-6 的论证证明,闭合轨道意味着对力定律形式的颇为严格的条件.非闭合轨道有一性质,即曲线终将通过 r 转折点边界间的任意点 (r, θ) . 这从轨道的非闭合性质能直观地看出,当 θ 绕转一整周时,质点决不应重复通过任何先前轨道上它原先通过的各点.因此,轨道方程中的 r 应是 θ 的多值函数(模数为 2π),事实上是 θ 的无限值函数.同 L 和 E 一起确定轨道的相应守恒量,也同样必须包含一个质点运动的无限值函数.但这里的轨道象开普勒问题中一样是闭合的,或者更一般地说,这里的运动是简并的,因此可以期望那附加的守恒量将象拉普拉斯-龙格-楞次矢量一样是 \mathbf{r}

1) 上面所作论证显然是由拉普拉斯于 1799 年作出的,后来他又明显地论证了 \mathbf{A} 的量值与偏心率之间的关系式(3-86).

2) 比如说,参阅 D. M. Fradkin, *Progress of Theoretical Physics*, 37, 798, May 1967.

和 \mathbf{p} 的某个简单代数函数。根据这些论证，有可能对遵循胡克定律的力的情况作一简单类比，认为在此情况下也应该具有这种矢量，并象我们已经看到的那样，这里的轨道也应是简并的。情况确是如此，不过阐述运动常数的固有方式导致的不是矢量，而是一个二级张量(见节 9-7)。因此，除了 E 和 \mathbf{L} 外，如果存在一个附加的运动常数或运动积分(亦即运动的一个简单代数函数)，就足以表明运动是简并的，而且那些有界轨道也是闭合的。

3-10 有心力场中的散射

对有心力的兴趣最早是由天文学上的行星运动问题引起的。但不能说只有这些问题才使人想到有心力运动，玻尔原子中的那些轨道也早已引起了人们的注意。能够用经典力学来研究的另一方面的问题是质点在有心力场中的散射。当然，如果质点是一些原子尺度上的粒子，就一定能预料，经典处理的一些具体结果实际上往往并不正确，因为这样一些领域内的量子效应通常是巨大的。然而，许多经典预言在适当近似下依然适用。更为重要的是，不论是经典力学还是量子力学，描述散射现象的步骤都相同。在经典力学基础上同样能学会如何使用有关术语。

在它的一体问题表述中，散射问题所考虑的是某个力心引起的质点的散射。我们考虑一束射向某一力心的均匀质点，所有质点都具有相同的质量和能量(这里所说的质点无论是电子、 α 粒子或是行星都无关紧要)。入射束的特征由它的强度 I (也称通量密度)来决定，而 I 所给出的是单位时间内穿过垂直于射束的单位面积的质点数。当一个质点靠近力心时，或被吸引，或被推斥，其轨道都将偏离入射时的直线轨线。通过力心后，作用在质点上的力终将消失，从而轨道再次趋近

于某条直线。一般说来，运动的最终方向与入射方向是不相同的，这时，就说质点被散射了。在给定方向上的散射截面 $\sigma(\Omega)$ 定义为

$$\sigma(\Omega)d\Omega = \frac{\text{单位时间内进入立体角 } d\Omega \text{ 内的散射质点数}}{\text{入射强度}}, \quad (3-88)$$

式中 $d\Omega$ 是 Ω 方向上的立体角元。 $\sigma(\Omega)$ 通常称为微分散射截面。对于有心力，围绕入射束轴是完全对称的，因此，立体角元可写作

$$d\Omega = 2\pi \sin \Theta d\Theta, \quad (3-89)$$

式中 Θ 是散射方向与入射方向之间的夹角，称为散射角（见图 3-14，图中所示为相斥散射）。应该注意的是，把 $\sigma(\Omega)$ 称作“截面”只是因为它具有面积的量纲。

任何给定质点的轨道常数以及被散射的总量都取决于它的能量和角动量。用能量和称为碰撞参数的量 s 表示角动量是很方便的， s 定义为力心和入射速度之间的垂直距离。如果质点的入射速率为 v_0 ，则

$$l = mv_0s = s\sqrt{2mE}. \quad (3-90)$$

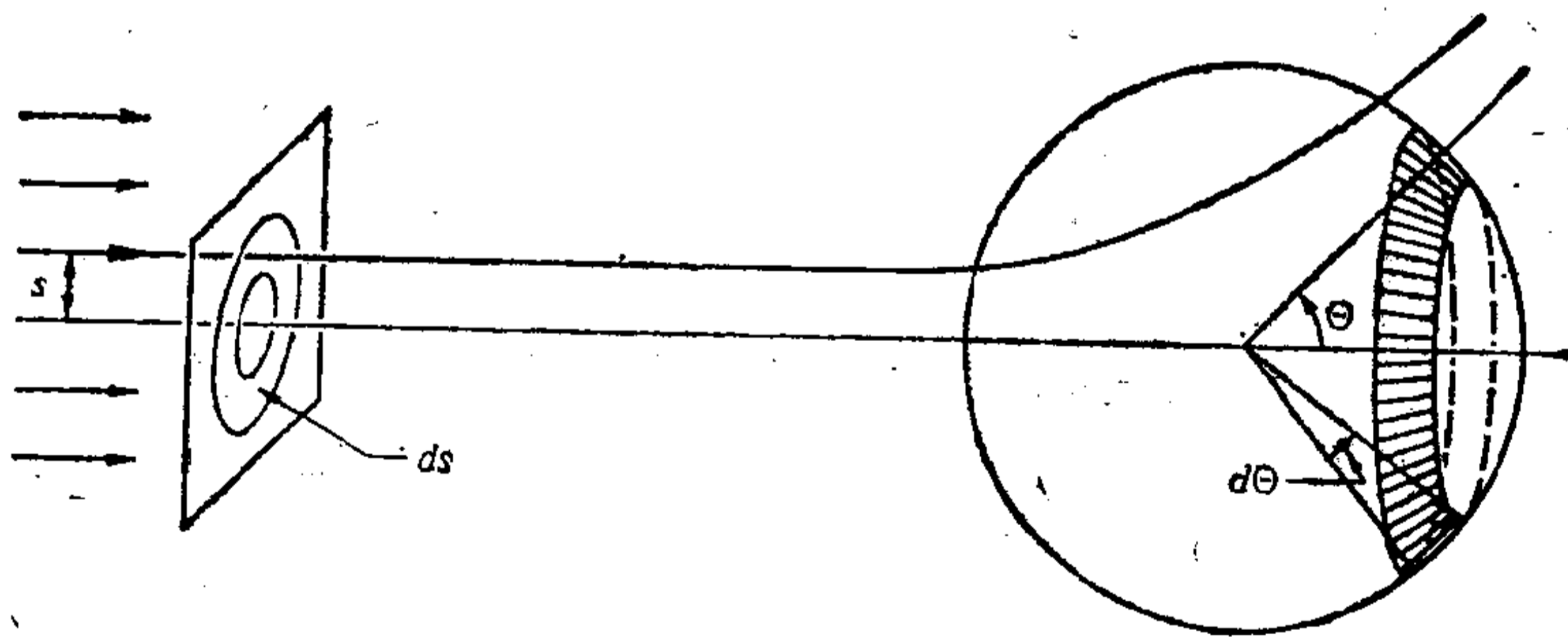


图 3-14 力心引起的人射质点束的散射

一旦给定了 E 和 s , 也就唯一地确定了散射角 Θ 。现在假定不同的 s 值不可能得出相同的散射角。所以进入 Θ 和 $\Theta + d\Theta$ 之间的立体角 $d\Omega$ 内的散射质点数, 必定等于碰撞参数介于相应的 s 和 $s + ds$ 之间的人射质点数:

$$2\pi I s |ds| = 2\pi\sigma(\Theta) I \sin\Theta |d\Theta|. \quad (3-91)$$

(3-91)中引进了绝对值符号, 这是因为质点数必须始终为正数, 而 s 和 Θ 的变化方向常常相反。如果把 s 看作是能量和相应散射角的函数, 即

$$s = s(\Theta, E), \quad (3-92)$$

则微分截面对 Θ 的依存关系为

$$\sigma(\Theta) = \frac{s}{\sin\Theta} \left| \frac{ds}{d\Theta} \right|. \quad (3-93)$$

把散射角 Θ 作为 s 的函数的正式表达式能从轨道方程 (3-36) 直接求得。为了简单起见, 我们再次考虑纯粹相斥散射的情况(见图 3-15)。由于轨道关于近拱点是对称的, 所以

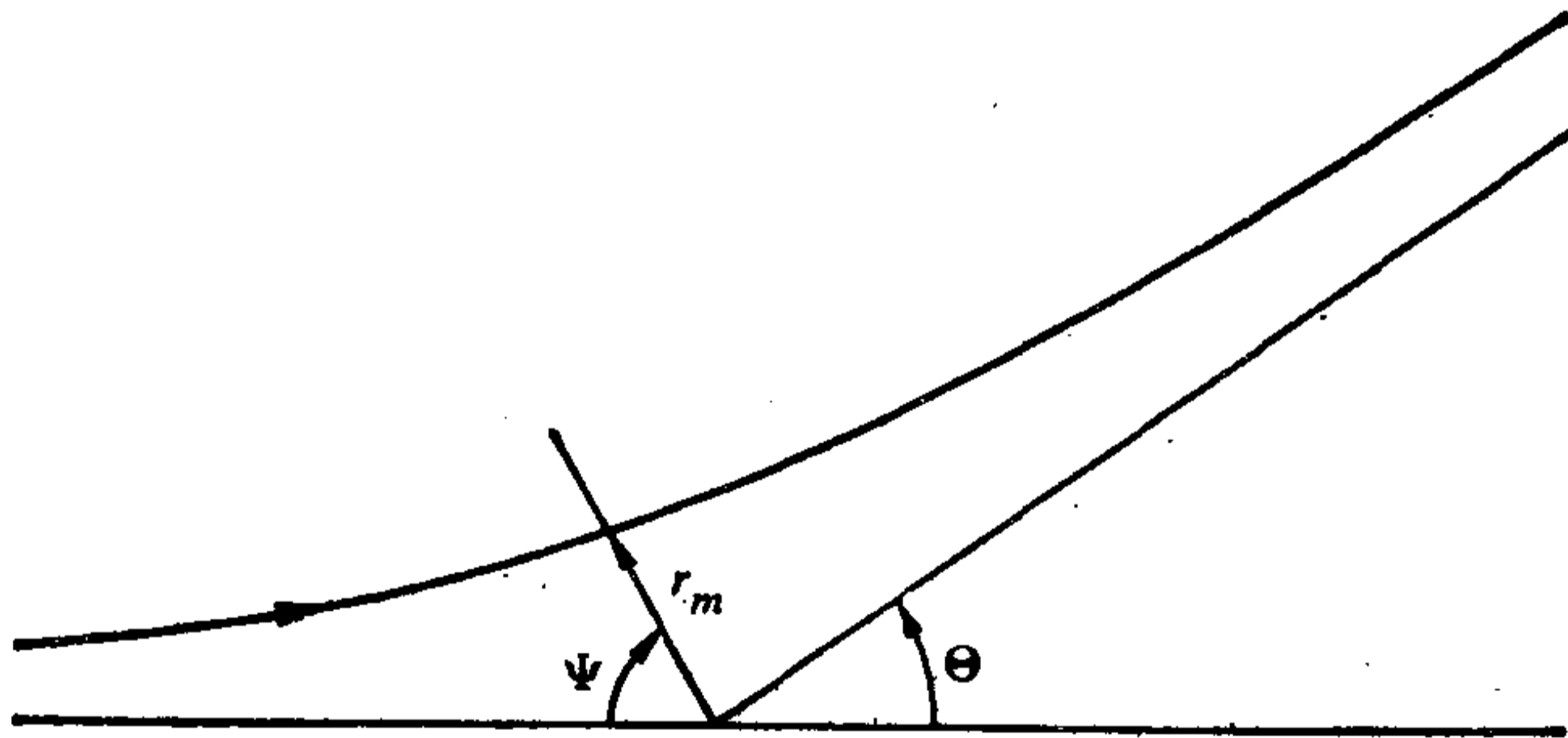


图 3-15 在相斥散射例子中轨道参数和散射角的关系

- 1) 正是在这一点上, 经典力学和量子力学的表述是有分歧的。的确, 量子力学的基本特征是不可能确切地预言任何特定质点的轨线。人们只能给出各个方向上散射的几率。

散射角为

$$\Theta = \pi - 2\Psi, \quad (3-94)$$

式中 Ψ 是人射渐近线与近拱点方向之间的夹角。 Ψ 也同样能从式(3-36)求得。为此,令 $\theta_0 = \pi$ (入射方向)时, $r_0 = \infty$; 而当 $r = r_m$, 即等于距力心的最近距离时, $\theta = \pi - \Psi$ 。这样,经过重新整理后即得

$$\Psi = \int_{r_m}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mV}{l^2} - \frac{1}{r^2}}}. \quad (3-95)$$

用碰撞参数 s 表示 l , 即式(3-90), 则 $\Theta(s)$ 的最后表达式为

$$\Theta = \pi - 2 \int_{r_m}^{\infty} \frac{sdr}{r \sqrt{r^2 \left[1 - \frac{V(r)}{E} \right] - s^2}} \quad (3-96)$$

或

$$\Theta = \pi - 2 \int_0^{u_m} \frac{sdu}{\sqrt{1 - \frac{V(u)}{E} - s^2 u^2}}. \quad (3-97)$$

(3-96) 和 (3-97) 两式除了用来直接计算散射角的数值外,很少用到。但当我们有了一个轨道的解析表达式时,往往只须通过查对即可求得 Θ 和 s 之间的关系。历史上这种解题过程的一个重要例证是库仑场引起的带电粒子的相斥散射。散射力场由固定电荷 $-Ze$ 产生,入射粒子电荷为 $-Z'e$,因而粒子所受作用力为

$$f = \frac{ZZ'e^2}{r^2},$$

这是相斥平方反比律。只要把力常数写成

$$k = -ZZ'e^2, \quad (3-98)$$

节 3-7 的那些结果都可以移用到这里。能量 E 远大于零,轨道

为一双曲线, 偏心率为¹⁾

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{m(ZZ'e^2)^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{2Es}{ZZ'e^2}\right)^2}, \quad (3-99)$$

这里利用了式(3-90)。如果式(3-51)中的 θ' 选为 π , 近拱点将与 $\theta = 0$ 相对应, 轨道方程成为

$$\frac{1}{r} = \frac{mZZ'e^2}{l^2} (\epsilon \cos\theta - 1). \quad (3-100)$$

入射渐近线的方向 Ψ 则由 $r \rightarrow \infty$ 这一条件来决定, 因此

$$\cos\Psi = \frac{1}{\epsilon},$$

或者根据式(3-94),

$$\sin\frac{\Theta}{2} = \frac{1}{\epsilon}.$$

由此可得

$$\cot^2\frac{\Theta}{2} = \epsilon^2 - 1,$$

利用式(3-99)时, 则有

$$\cot\frac{\Theta}{2} = \frac{2Es}{ZZ'e^2}.$$

我们要求的碰撞参数与散射角之间的函数关系将成为

$$s = \frac{ZZ'e^2}{2E} \cot\frac{\Theta}{2}, \quad (3-101)$$

因此, 根据式(3-93)的要求完成全部演算后, 即得 $\sigma(\Theta)$ 的表达式

$$\sigma(\Theta) = \frac{1}{4} \left(\frac{ZZ'e^2}{2E}\right)^2 \csc^4\frac{\Theta}{2}. \quad (3-102)$$

1) 为避免与电子电荷 e 相混淆, 偏心率暂时用 ϵ 表示。

式(3-102)给出了著名的卢瑟福散射截面,最早由卢瑟福根据 α 粒子被原子核散射的实验导出.这一经典结果与非相对论极限情况下量子力学导出的截面完全相同.

在原子物理学中,散射总截面 σ_T 的概念,即

$$\sigma_T = \int_{4\pi} \sigma(\Omega) d\Omega = 2\pi \int_0^\pi \sigma(\Theta) \sin \Theta d\Theta$$

极为重要.然而,如果我们想把式(3-102)代入这一定义方程来计算库仑散射的总截面,结果竟是无限大!其物理原因是不难找到的.根据定义,总截面等于单位时间内单位入射强度在所有方向上的散射粒子总数.已知库仑场是“长程”力的一个例子,它的效应一直扩展到无限远处.只有碰撞参数极大的粒子才会发生极小的偏转.因此,横截面积为无限大的人射束中的所有粒子,都会发生某种程度的散射,并被包括在散射总截面内.因此,无限大 σ_T 值显然不是库仑场所独有的;在经典力学中,只要散射场在不论多大距离处都不等于零, σ_T 就都等于无限大¹⁾.只有当力场被“截断”,即在超过一定距离后作用等于零时,散射截面才会是有限的.实际上,核的库仑场是会发生这种截断的,因为原子的电子“屏蔽”了原子核,在远距离处有效地抵销了核电荷.

在卢瑟福散射中,散射角 Θ 是碰撞参数 s 的光滑单调函数.从式(3-101)可见,当 s 从无限大递减时, Θ 将从零光滑地增加;当 s 变为零时, Θ 将到达 π 值.但对经典系统来讲也可能存在另一种情况,要求对经典截面的原有规定式(3-93)

1) 量子力学中库仑场的 σ_T 也等于无限大,因为已经表明,式(3-98)在量子力学中仍然有效.但在量子力学中,并非所有“长程”力都能产生无限大总截面.可以证明,在较远距离处减弱得比 $1/r^2$ 更快的所有势得出的量子力学散射总截面是有限的.见 Landau 和 Lifschitz, *Course of Theoretical Physics, Vol. 3, Quantum Mechanics* (Reading, Massachusetts, Addison-Wesley, 1965), p. 473.

作出某种修正。例如，当采用相斥势以及能量的定性性质由图 3-16(a) 所示的质点时，实际上不难看出， Θ 对 s 的关系曲线可以表现如图 3-16(b) 所示。因此，正象前面看到的那样，

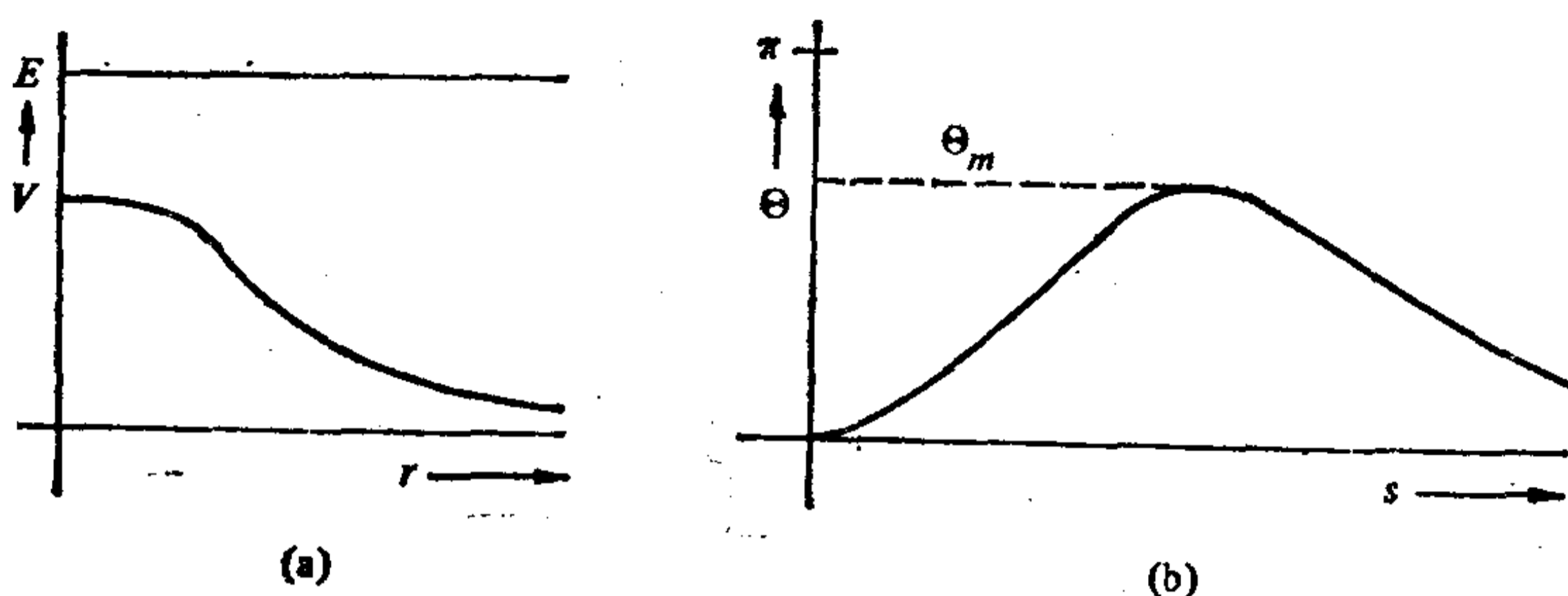


图 3-16 能量足够高情况下的非奇异相斥散射势和散射角 Θ 相对于碰撞参数 s_0 的双值曲线

碰撞参数值极大时，质点对力心始终有一大的径向距离，因而质点只会经受微小的偏转。在另一极端，即 $s = 0$ 时，质点将沿直线对着力心行进，如果能量大于势的最大值，它将继续通过力心而完全不发生散射。因此，当 s 取两个极限值时，散射角为零。对于 s 的某个中间值，散射角必定可以达到最大值 Θ_m 。当 $\Theta < \Theta_m$ 时，将会有两个 s 值得出相同的散射角。每个 s 值对该散射角的散射截面都有贡献。式(3-93)的形式也应相应地修正为

$$\sigma(\Theta) = \sum_i \frac{s_i}{\sin \Theta} \left| \frac{ds}{d\Theta} \right|_i \quad (3-103)$$

这里，下标 i 用来区别产生相同 Θ 值的各种 s 值。

特别感兴趣的是具有最大散射角 Θ_m 的散射截面。由于 Θ 对 s 的微商在此角度处为零，因而从式(3-93)或式(3-103)可以知道， $\Theta \rightarrow \Theta_m$ 时的散射截面必定变成无限大。但对于所有更大角度来讲，截面都等于零，这是因为散射角不可能超

过 Θ_m 。截面无限增长后又突然消失的现象,与几何光学中雨滴引起的阳光散射现象极为相似。正是由于这种相似性,所以把这种现象称为虹霓散射。

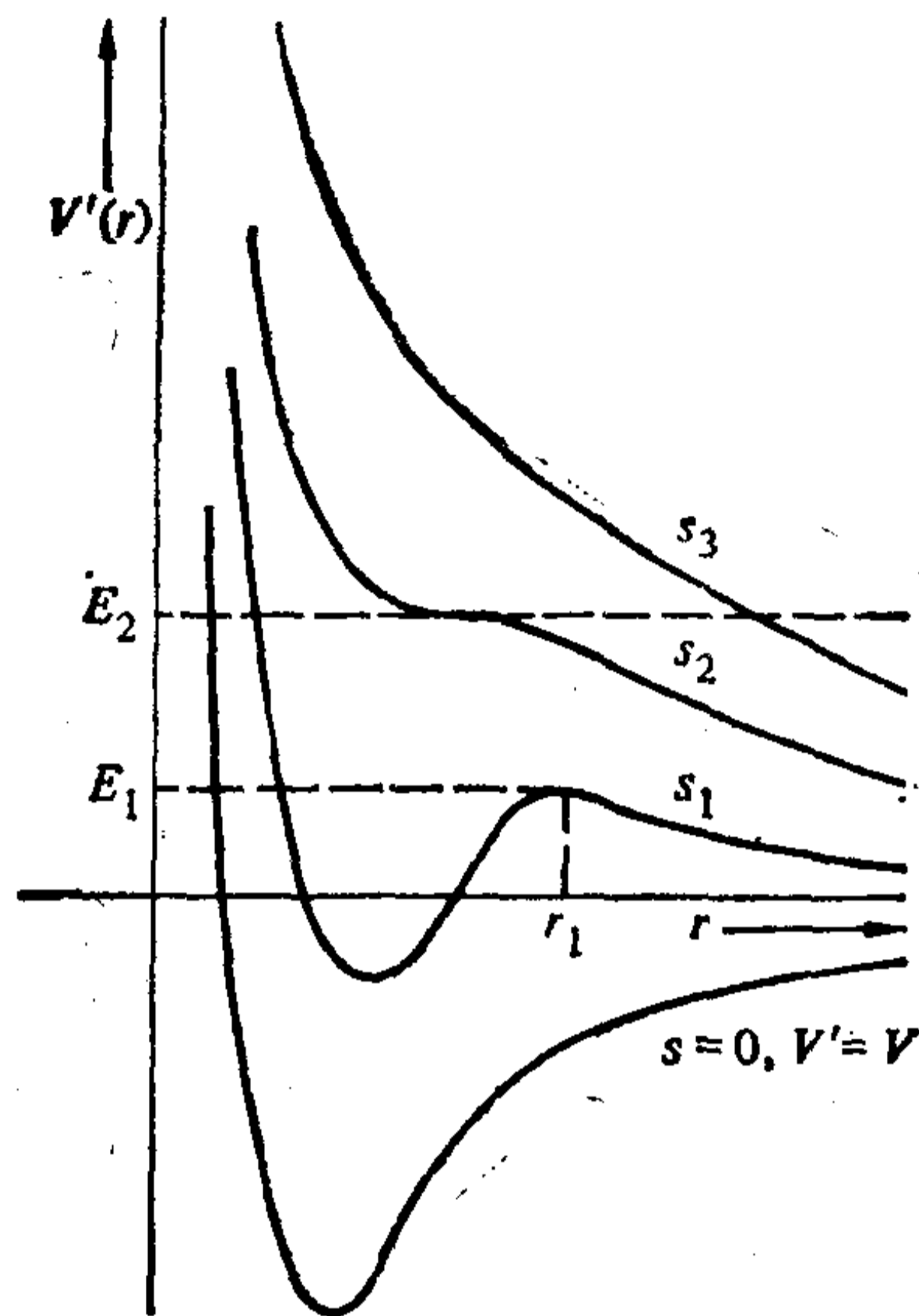


图 3-17 吸引和相斥兼有的散射势以及具有不同碰撞参数 s 值的相应等效一维势

到目前为止,所用的例子都是纯粹的相斥散射。如果散射含有吸引力,就会发生较复杂的情况。吸引作用将使质点折向力心,而不是象图 3-15 所示那样被推斥向外偏转。结果是入射方向与近拱点方向之间的夹角 ψ 可以大于 $\pi/2$, 式 (3-94) 所给出的散射角也将取负值。在求解截面时显然包含有 Θ 的量值,这本身并不是很大的困难。但在一定情况下,式 (3-96) 算出的 Θ 可以大于 2π 。也就是说,散射中的质点沿散射方向最终离去之前,可能绕力心转过一周或一周以上。

为了实际看一看可能出现的情况，考虑一下图 3-17 中 $s = 0$ 曲线所表示的散射势。这是很多分子运动论问题中所采用的、典型的分子间相互作用势——在大距离上减弱得比 $1/r^2$ 更快的吸引势以及在小距离上迅速增加的排斥势。图 3-17 中的其他曲线表示的是式 (3-22') 那样的有效一维势 $V'(r)$ ，它们分别对应于不同的碰撞参数 s 值（或对应于不同的 l 值）。由于对所有大于零的 s 值，排斥离心势垒在大的 r 处都处于支配地位，因此，对于小的 s 值，等效势将出现一突峰。现在来考虑一个入射质点，它的碰撞参数 s_1 和能量 E_1 对应于突峰的最大值。正象节 3-3 中所看到的， E_1 和 $V'(r)$ 之差正比于该距离处径向速度的平方。当入射质点到达 r_1 ，即 V' 为最大值的地点时，径向速度等于零。事实上，根据节 3-6 的讨论应该想起的是，我们在这里得到的是在 r_1 距离处出现一不稳定圆形轨道的条件。在无任何干扰的情况下，具有参数 E_1 和 r_1 的质点一旦到达 r_1 处，就将在该处围绕力心无限期地作不重复的绕行！对于碰撞参数相同、但能量 E 却略高于 E_1 的情况，则不会建立圆形轨道。然而，当质点位于 r_1 紧邻时，径向速率极小，质点将在不相当的长时间内停留在突峰附近。在此期间不受最大值影响的、 r 处的角速度 $\dot{\theta}$ 为

$$\dot{\theta} = \frac{1}{mr_1^2} = \frac{s_1}{r_1^2} \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

在质点通过突峰区域的时间内，角速度可能已使质点绕行了 2π 以上的角度，或者甚至是 2π 的倍数。在这些情况下，经典散射称为环行的或螺旋形的。

当碰撞参数增加时，等效势 V' 的凹下部分和突峰趋向于拉平；当参数增至 s_2 时，只有能量 E_2 处的一个拐点（见图 3-17）。质点能量大于 E_2 时，将不再环行。但是，甚至在这些情况下，对于某个有限的碰撞参数值，有效势的吸引和排斥成份

的联合作用也能保证不发生偏转。在大的能量和小的碰撞参数情况下,主要散射效应由小距离上的强排斥势所引起,散射也就定性地类似于卢瑟福散射的情况。

已经看到,当环行发生时,被散射质点的偏转可能超过 π 。另一方面,在实验室内观测到的散射角介于0和 π 之间。这有助于在这种歧义情况中去区别观测到的散射角 Θ 和式(3-96)或(3-97)右边算得的那种偏转角 Φ 。给定了 Φ 值,角 Θ 决定于关系式

$$\Theta = \pm \Phi - 2m\pi \quad m \text{ 为正整数.}$$

m 的符号和数值的选择保证 Θ 处于0和 π 之间。式(3-103)中所求之和包括有导致相同 Θ 的所有 Φ 值。图3-18表明了图3-17中所示的势在两个不同能值时的 Φ - s 关系图线。 $E = E_1$ 时发生的环行,表现为 $s = s_1$ 时曲线的奇异点。当 $E > E_2$ 时,不再发生环行,但在 $\Theta = -\Phi'$ 时,则有虹霓效应(虽然在散射角很大时有一非零截面)。应注意, $s = s_3$ 时, Θ 为零。根据式(3-93),这意味着在通过 $\sin \Theta$ 零值点的正方向上,截面成为无限大。只要

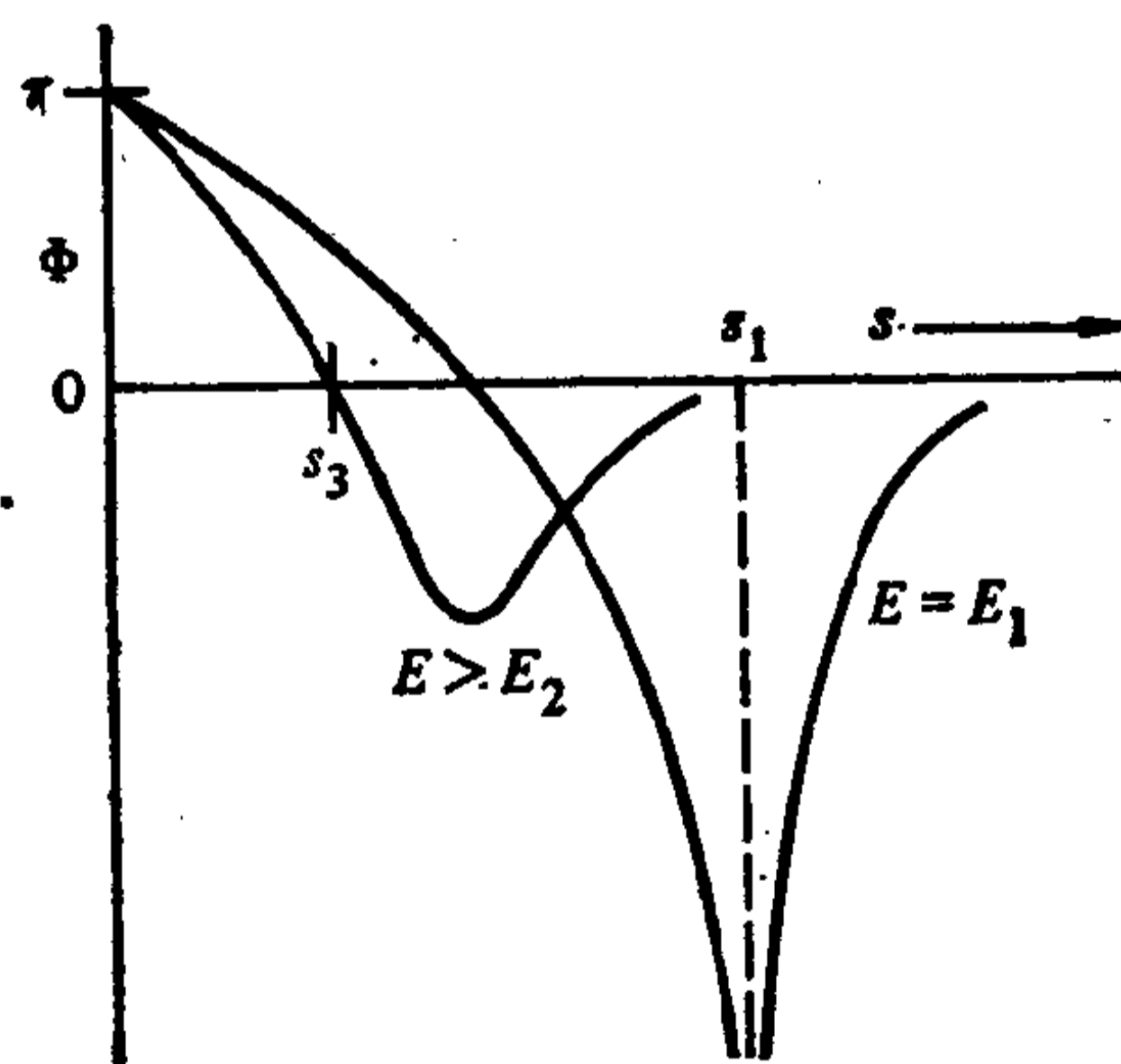


图3-18 就图3-17中所示的势在两个不同能值时所作的偏转角 Φ 关于 s 的关系图线

$$s \left| \frac{ds}{d\Theta} \right|$$

在 $\Theta = \pi$ 时保持有限,反方向上的截面同样能够成为无限大.正方向或反方向散射角的这种无限性称为彩光散射,这又与气象光学中的相应现象相类似¹⁾.

近年来又重新恢复了对经典散射和经典截面计算的兴趣.在某些场合,例如在晶格中低能离子的散射中,量子效应很小,这时,适用经典的计算方法.甚至在量子力学修正显得重要的情况下,也能用作一种近似方法(“半经典”近似),为此,应对经典轨线有所了解.对于几乎所有实际感兴趣的那些势,都不可能得到轨道的解析式,式(3-96)(或者它的变式)是特定 s 区间的近似式,或是数值积分式.

3-11 散射问题变换到实验室坐标

前节论述了由固定力心引起的质点散射的一体问题.但实际中的散射总包含有两个物体,例如,在卢瑟福散射中有 α 粒子和原子核两种粒子.第二个质点并不是固定的,它将由于散射而从原来的位置发生反冲.已经证明,任何两体有心力问题都能归结为一体问题,所以可能会认为,唯一的变化只是用约化质量 μ 代替 m .然而,事情并不这样简单.在实验室中实际测得的散射角(记为 ϑ)是被散射的质点的最终方向与入射方向之间的夹角²⁾.另一方面,根据等效一体问题来计算的角度 Θ ,却是两个质点间相对矢量的最终方向与初始方

1) 反向彩光是飞机旅行者所熟知的,那是投射到下面云层上的飞机阴影周围的光环.顺便说一下,用几何光学术语来描述经典散射现象并非偶然之事.正如节 10-8 将要指出的那样,经典力学极为真实地是量子力学的几何光学(光路图示)极限;对于经典力学中的每一种散射情景都能找到一个相应的几何光学问题.

2) 决不要把散射角 ϑ 与两个质点间的相对矢量 \mathbf{r} 的角坐标 θ 相混淆.

向之间的夹角。只有当第二个质点在整个散射过程中保持静止时,这两种角度才是一致的。但一般说来,第二个质点虽然原来是静止的,但定将被两个质点间的相互作用力所推动,因而象图 3-19 所示,这两个角度的值并不相同。所以在实验室坐标系内测量时,从等效一体问题不能直接得出散射角。

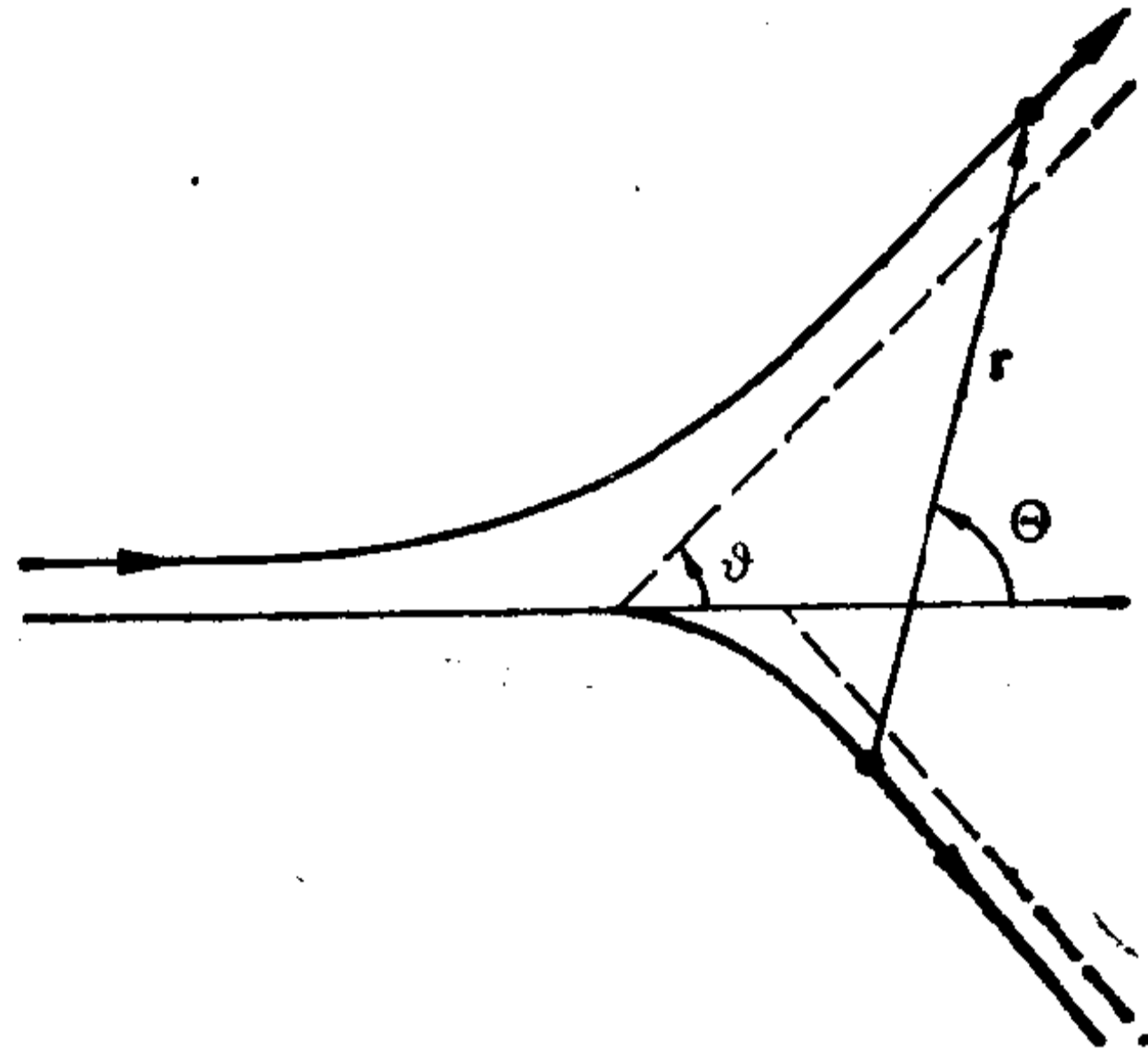


图 3-19 实验室系统内观察到的两个质点的散射

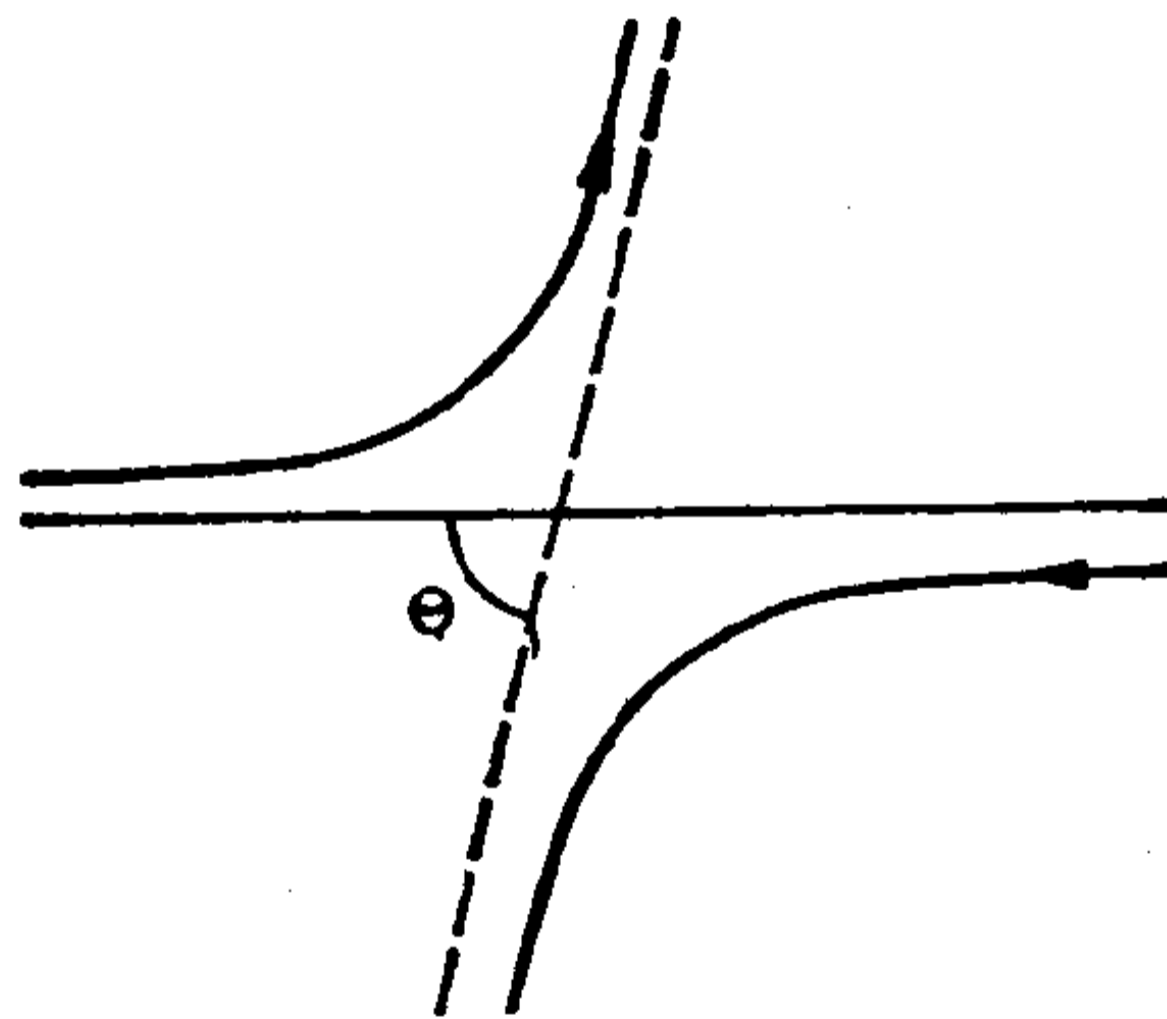


图 3-20 质心系统内观察到的两个质点的散射

要确定散射角 θ 和 φ 之间的关系,可以研究一下与两个质点的质心一起运动的坐标系内发生的散射情况。在这种系统内的总线动量为零,两个质点始终以等值反向的动量运动。

图 3-20 说明了质心系统中的观察者所看到的散射过程. 散射前, 两个质点相向而来; 散射后又相背而去. 因而, 相对矢量的初始方向与最终方向之间的夹角 Θ , 必定与其中任一质点在质心系中的散射角相等. 所以, 只要考虑质心系与实验室系之间的变换, 就能得到两个散射角 Θ 和 ϑ 之间的关联. 这里采用节 3-1 中的术语是会带来方便的, 当然应作某些细微的修正:

\mathbf{r}_1 和 \mathbf{v}_1 是散射后人射质点 1 在实验室系中的位置和速度;

\mathbf{r}'_1 和 \mathbf{v}'_1 是散射后质点 1 在质心系中的位置和速度;

\mathbf{R} 和 \mathbf{V} 则是质心在实验室系中的位置和(恒定)速度. 根据定义, 在任何时刻有

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_1,$$

因此

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{V} + \mathbf{v}'_1. \quad (3-104)$$

图 3-21 以图解方式描绘了散射发生以后的这种矢量关系; 这

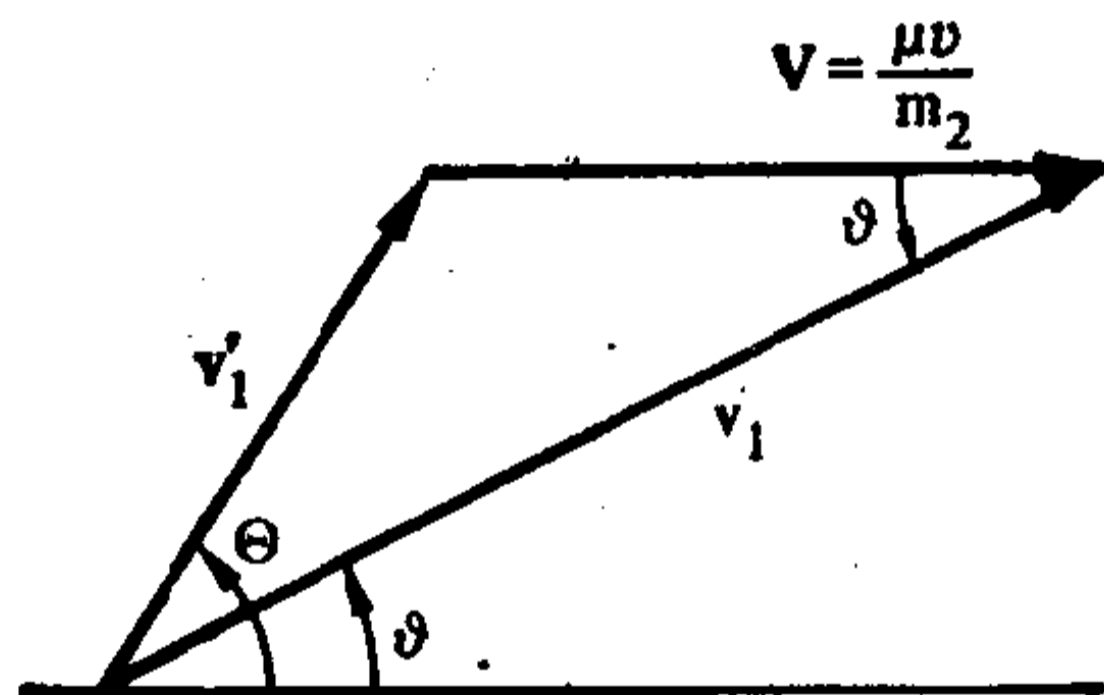


图 3-21 质心系和实验室系中速度之间的关系

时, \mathbf{v}_1 和 \mathbf{v}'_1 分别与初始方向上的矢量 \mathbf{V} 相夹的角度就是 ϑ 和 Θ . 由于实验室系中的靶原来是静止的, 所以质点 1 在该系统内的人射速度 \mathbf{v}_0 , 与两质点原来的相对速度相同. 由于总线动量守恒, 所以质心的恒定速度可由下式决定:

$$(m_1 + m_2)\mathbf{V} = m_1\mathbf{v}_0$$

或

$$\mathbf{V} = \frac{\mu}{m_2} \mathbf{v}_0. \quad (3-105)$$

从图 3-21 不难看出,

$$v_1 \sin \vartheta = v'_1 \sin \Theta$$

以及

$$v_1 \cos \vartheta = v'_1 \cos \Theta + V. \quad (3-106)$$

这两个方程之比给出 ϑ 和 Θ 之间的关系式:

$$\tan \vartheta = \frac{\sin \Theta}{\cos \Theta + \rho}, \quad (3-107)$$

式中 ρ 定义为

$$\rho \equiv \frac{\mu v_0}{m_2 v'_1}. \quad (3-108)$$

把余弦定律应用于图 3-21 中的三角形,就能用其他速率表示 v_1 , 从而可得另一关系式:

$$v_1^2 = v'^2_1 + V^2 + 2v'_1 V \cos \Theta. \quad (3-109)$$

利用此式从式(3-106)中消去 v_1 , 并根据式(3-105)用 v_0 表示 V , 即得

$$\cos \vartheta = \frac{\cos \Theta + \rho}{\sqrt{1 + 2\rho \cos \Theta + \rho^2}}. \quad (3-110)$$

这些关系式依然通过 ρ 包含有速率之比。根据质心的定义, 质点 1 在质心系中的速率 v'_1 与相对速率 v 的关系决定于方程[见式(3-2)]

$$v'_1 = \frac{\mu}{m_1} v.$$

因此, ρ 也能写成

$$\rho = \frac{m_1}{m_2} \frac{v_0}{v}, \quad (3-108')$$

应该强调，式中的 v 是碰撞以后的相对速率。如碰撞是弹性的，两质点的总动能保持不变， v 必定等于 v_0 ，从而

$$\rho = \frac{m_1}{m_2} \quad (\text{弹性碰撞}), \quad (3-111)$$

这一简单关系说明 ρ 与能量或速率无关。如果碰撞是非弹性的，两个质点的总动能将变化（例如，某种动能变成靶的内部激发能的形式）。由于质心运动的动能必须为常数，因此，根据线动量守恒定律，由碰撞引起的能量变化可表达为

$$\frac{\mu v^2}{2} = \frac{\mu v_0^2}{2} + Q. \quad (3-112)$$

所谓非弹性碰撞的 Q 值显然是负值，但符号的选择总是按照惯例，使与原子和原子核反应通常采用的相一致。根据式(3-112)，碰撞前、后的相对速率之比为

$$\frac{v}{v_0} = \sqrt{1 + \frac{m_1 + m_2}{m_2} \frac{Q}{E}}, \quad (3-113)$$

式中 E 是入射质点(在实验室系中)的能量。因此，非弹性散射中的 ρ 为

$$\rho = \frac{m_1}{m_2 \sqrt{1 + \frac{m_1 + m_2}{m_2} \frac{Q}{E}}} \quad (\text{非弹性散射}). \quad (3-114)$$

不仅散射角 ϑ 和 Θ 的数值一般不相同，而且微分截面的数值还同采用这两个角度中的哪一个作为 σ 的宗量有关。两个函数形式之间的联系可根据下列观测得到：在一个特定实验中，不论用 ϑ 还是 Θ 来测量发生的事件，散射进给定立体角元内的质点数必定相同。这一说法能以方程的形式表达成

$$2\pi l \sigma(\Theta) \sin \Theta |d\Theta| = 2\pi l \sigma'(\vartheta) \sin \vartheta |d\vartheta|$$

或

$$\sigma'(\vartheta) = \sigma(\Theta) \frac{\sin \Theta}{\sin \vartheta} \left| \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right| = \sigma(\Theta) \left| \frac{d(\cos \Theta)}{d(\cos \vartheta)} \right|, \quad (3-115)$$

式中, $\sigma'(\vartheta)$ 是用实验室系内散射角表示的微分散射截面。根据式(3-110), 微商是不难计算的, 所得结果为

$$\sigma'(\vartheta) = \sigma(\Theta) \frac{(1 + 2\rho \cos \Theta + \rho^2)^{3/2}}{1 + \rho \cos \Theta}. \quad (3-116)$$

也许应该强调的是, $\sigma(\Theta)$ 不是观测者在质心系中测得的截面。 $\sigma(\Theta)$ 和 $\sigma'(\vartheta)$ 都是实验室系中测得的截面; 它们只是用不同的坐标表示而已。固定于质心系中的观测者看到的人射质点通量密度, 不同于实验室系中测得的通量密度; 如果(由于某种理由)想把两个不同系统中测得的截面联系起来, 应该考虑这种通量密度的变换。

当两个质点的质量相等时, 弹性散射中两个散射角之间的关系特别简单。由此得 $\rho = 1$, 根据式(3-110)即得

$$\cos \vartheta = \sqrt{\frac{1 + \cos \Theta}{2}} = \cos \frac{\Theta}{2}$$

或

$$\vartheta = \frac{\Theta}{2} \quad (\rho = 1).$$

因此, 对于相等质量的情况, 在实验室系中不可能出现大于 90° 的散射角; 所有散射只可能发生在前半球内。相应地, 散射截面则从式(3-116)用 Θ 给出, 即

$$\sigma'(\vartheta) = 4 \cos \vartheta \cdot \sigma(\Theta) \quad \vartheta \leq \frac{\pi}{2}, (\rho = 1).$$

即使散射中在 Θ 方面是各向同性的, 即 $\sigma(\Theta)$ 是与 Θ 无关的常数, 用 ϑ 表示的截面也将按角度的余弦规律变化!

已经看到, 即使在总动能保持常数、靶最初又是静止的弹

性碰撞中,碰撞结果也有一部分动能传输给靶,而入射质点的动能将相应减少. 换言之,碰撞使人射质点慢化了,慢化的程度可从式(3-109)得到,只要分别根据式(3-108)和式(3-105)用 v_0 表示 v_1' 和 V ,就可得到

$$\frac{v_1'^2}{v_0^2} = \left(\frac{\mu}{m_2 \rho} \right)^2 [1 + 2\rho \cos\Theta + \rho^2]. \quad (3-117)$$

对于弹性碰撞, $\rho = m_1/m_2$, 而式(3-120)能够简化为

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{1 + 2\rho \cos\Theta + \rho^2}{(1 + \rho)^2} \quad (\text{弹性碰撞}), \quad (3-117')$$

式中 E_0 是实验室系中入射质点的初动能, E_1 是散射后的相应能量. 当质点质量相等时,关系式成为

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{1 + \cos\Theta}{2} = \cos\vartheta.$$

因此,在实验室系中,具有最大散射角 ($\Theta = \pi, \vartheta = \pi/2$) 的入射质点将失去其全部能量而完全停下来.

这种由散射引起的动能转移显然是热中子反应堆的“减速剂”所依据的原理. 裂变产生的快速中子连续不断地进行弹性散射,一直到它们的动能减小到更易引起裂变而不致被俘获掉的程度. 显然,最佳的减速剂是一些轻元素,最理想的是氢 ($\rho = 1$). 核反应堆中实际所用的氢包含在象水这样的化合物或混合物中. 其他可以利用其减速性质的轻元素,包括质量数为 2 的氘以及质量数为 12 的碳. 目前实验室中常用石蜡、水和塑料中的氢来慢化中子.

尽管它们的应用非常现代,但从实验室坐标变换到质心坐标的计算,以及动能转移的计算,性质上却不是特别“近代的”或“量子的”. 涉及到的经典力学既不特别高级也不怎么困难. 所用到的只不过是动量和能量的守恒原理. 事实上,在大学一年级教科书中也能找到类似的计算,通常是通过象

弹子球之间的弹性碰撞来计算的。但是，正是由于这种极为基本的性质，使得这些计算具有广泛的适用性。只要动量守恒（这一点在量子力学中也同样正确）、 Q 值又是已知的就行了，至于散射过程的细节则无关紧要。事实上，散射质点邻近地区是一个“黑匣”，我们只要考虑进去和出来的质点的状况，至于匣子里面发生的现象究竟是“经典的”还是“量子的”，对问题毫无关系。因此，对本来具有量子性质的现象（譬如中子-质子散射等）作出实验分析时，只要能量足够低以致可忽略相对论效应时，完全可以使用本节的所有公式。（见节 7-7 中关于碰撞运动学的相对论解释的讨论。）

推荐参考书目

E. T. Whittaker, *Analytical Dynamics* 几乎每一本力学教科书都有相当的篇幅讨论有心力运动，但这里只能列举这许多参考书中的少数几本。Whittaker 这本论著的节 47-49 对有心力问题作了简要的讨论，尽管很短，但却有许多独到之处。特别是用椭圆函数来求解力定律的分析，更是仅有的资料来源。

W. D. Macmillan, *Statics and the Dynamics of a Particle* 本参考书的第十二章提供了有心力运动的最详尽的讨论，包括对不同于通常平方反比律的某些力定律轨道的详细研讨。论述方式是基本的，也没有用到拉格朗日表述。开普勒方程是与各种轨道的变异形式一起推导的；并描述了多种解法。拉普拉斯-龙格-楞次运动常数只简略地提及，并且是在节 301 中的“舍弃”线中作为“积分常数”叙述的。

L. D. Landau E. M. Lifshitz, *Mechanics* 如所预料，该参考书在有心力运动和散射问题的讨论中包含有许多新颖而又独特的见解。书中透彻地论证了拉普拉斯-龙格-楞次矢量的不变性质，并用它来推导轨道方程。对碰撞运动学也有相当详细的讨论。

J. B. Marion, *Classical Dynamics of Particles and Systems* 在这本中级教科书中，有一章异常详细地论述了有心力运动，包括开普勒方

程、圆形轨道稳定性以及著名的三体问题的某些基本结果的讨论。由于作者与实验核物理的密切关系，因此论述碰撞运动学和截面计算的那一章所包含的内容特别完整。

J. O. Hirschfelder, D.F. Curtiss, B. B. Bird, *Molecular Theory of Gases and Liquids* 这是一本有关气体和液体的化学物理学的名符其实的百科全书，这本参考书也许是了解经典维里定理应用的最好资料来源。还有很多地方论述了原子间相互作用势和散射截面的问题，虽然 1953 年以来，该领域内的一些重大进展很自然地没有包括在内。

S. W. McCuskey, *Introduction to Celestial Mechanics* 历来把相互作用势按 $1/r$ 规律变化的两体问题的讨论看作是对行星、人造卫星和宇宙飞船运动的一级近似。因此，有关天体力学的所有著作都非常重视“开普勒问题”。这里只能列出许多天体力学论著中的少数几本。这一本书简洁地论述了大量资料，包括各种轨道运动的时间进程的讨论，并且是在较为基本的水平上来探讨问题的。

J. M. A. Danby, *Fundamentals of Celestial Mechanics* 这本著作是由大家熟悉而又备受尊敬的天体力学大师写成的。该书在中级水平上论述了天体力学的许多经典问题，未论及由于计算机和空间时代的到来而取得的最新进展。习题和参考资料是丰富的。详尽地讨论了开普勒方程和运动的时间进程，但未提及拉普拉斯-龙格-楞次矢量和伯特兰定理。

H. C. Plummer *An Introductory Treatise on Dynamical Astronomy*

本书虽然相对地讲老了一点（1918 年初版，1960 年再版），但它依然是伯特兰定理的最适用的参考书，在这一章内所作阐述以 Plummer 方法为基础。在 F. Tisserand 的 *Traité de mécanique céleste* 这一著名论著第一册第一章第六节中描述了不同的证明方法。普卢默 (Plummer) 的著作中也有关于开普勒方程近似解的某些特殊技巧。

H. V. McIntosh, “Symmetry and Degeneracy”, in *Group Theory and its Applications*, vol. II, E. M. Loebl, ed 这一章节热心地综述了简单物理系统的内在对称性，并采用了历史的叙述方式。虽然叙述中文字较多，公式极少，又认为读者对群论和量子力学已有所了解，但是，它确实在 1970 年被认为是有关对称性和简并性之间联系的最好的综

述。对开普勒问题和谐振子的对称性都有所论述；同样，对伯特兰定理也作了推演。

R. G. Newton, *Scattering Theory of Waves and Particles* 虽然这本书大部分论述的是量子散射理论，但在第五章中也讨论了经典质点的散射，并给出了“环行散射”和“彩光散射”的详尽讨论，大部分是依据 K. W. Ford 和 J. A. Wheeler 的基础论著 *Annals of Physics* (N. Y) 7,259(1959)。

习 题

1. 一个质量为 m 的质点，在重力作用下被约束在一旋转抛物面内作无摩擦运动，抛物面的轴沿铅垂方向。求质点运动的等效一维问题。要产生一圆形轨道，质点的初速度应具备什么条件？求关于这一圆周运动的微幅振荡的周期。

2. 一质点在一有心力场中运动，产生该场的势为

$$V = -k \frac{e^{-ar}}{r},$$

式中 k 和 a 是正值常数。利用等效一维势方法来讨论运动的性质，说明适合于各种运动的 l 和 E 的范围。什么时候可能出现圆形轨道？求关于圆周运动的微幅径向振荡的周期。

3. 两个质点在引力作用下彼此相对地作圆形轨道运动，周期为 τ 。在一给定时刻，它们的运动突然停止，然后被释放并允许它们相互接近。证明它们将在时间 $(\sqrt{2}/4)\tau$ 以后碰撞。

4. 有一系统，作用于那些质点上的合力由保守力 \mathbf{F}'_i 和正比于速度的摩擦力 \mathbf{f}_i 合成。证明，适合这种系统的维里定理的形式为

$$\bar{T} = -\frac{1}{2} \overline{\sum_i \mathbf{F}'_i \cdot \mathbf{r}_i},$$

假设运动已达稳定状态，并且不允许因摩擦力而停下来。

5. 假设气体中原子间存在着有心力形式的长程相互作用力，导出这种力的势

$$U(r) = \frac{k}{r^m},$$

式中 r 是任何一对原子间的距离； m 是一正整数。再假设，相对于任何给定原子来讲，其他原子在空间的分布，保证它们的体密度将由玻耳兹曼因子给出：

$$\rho(r) = \frac{N}{V} e^{-U(r)/kT},$$

式中 N 是体积 V 内的原子总数。求由各对原子间的这些力引起的、加于克劳修斯维里的附加项，并计算对玻耳兹曼定律的总改正。把 N 取得足够地大，以使所求之和可代之以积分。虽然对于任何正值 m 都能得到预期的结果，但为使数学简单一些，可取 $m = +1$ 。

6. (a) 证明：如果一个质点在指向圆周上一点的有心吸引力作用下描绘圆形轨道，则这个力将按距离的五次方反比规律变化。

(b) 证明：对于被描绘的轨道，质点的总能量为零。

(c) 求运动周期。

(d) 求 \dot{x} , \dot{y} 和 v ，并表达成绕圆周的角度 θ 的函数。证明：当质点通过力心时，所有这三个量都等于无限大。

7. 证明：当作用力是距离的下列分式指数的幂律函数时，有心力问题可用椭圆函数来求解：

$$n = -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{7}{3}.$$

8. (a) 试就按 $1/r$ 规律变化的吸引势场中具有相同角动量的圆形轨道和抛物线轨道来证明：抛物线近日点距离等于圆半径的一半。

(b) 证明：在 (a) 中所示相同的有心力场中，质点在抛物线轨道上任何一点处的速率等于质点通过圆形轨道上相同点时的速率的 $\sqrt{2}$ 倍。

9. 一流星以速率 v 撞击地球，与天顶的夹角为 ϕ 。假设距地球很远处流星的速率为 v' ，并沿天顶角为 ϕ' 的方向运动；地球重力的作用把它吸引进与地球表面相交的双曲线轨道。证明，通过一些已知常数就能根据 v 和 ϕ 来确定 v' 和 ϕ' 。

10. 证明，在偏心率为很小的开普勒椭圆轨道的空闲焦点上来观察

质点时,质点的角运动对于 e 的一次方来讲是匀速的。(空闲焦点指的是并非吸引中心的那个焦点.)正是这一定理使行星运动的天动说图象成为一个适当的精确近似.在该图象中,太阳被认为在一个圆周上匀速运动,该圆的中心偏离地球一定距离.如果这段偏离距离取作正确椭圆轨道两焦点间的距离,那么,天动说图象所描述的角运动将精确到 e 的一次方.

11. 科学幻想小说的典型主题之一是地球的孪生行星(“X行星”),它同地球具有相同的质量、能量和动量,但在轨道上的位置与地球相差为 90° ,因此将被太阳所遮蔽.然而,由于轨道的椭圆性质,又不会始终是隐蔽的.假如在地球的同一天普勒轨道上确有一颗这样的行星,而且当地球在近日点时它在远日点.试问,从地球看起来,精确到偏心率 e 的一次方,这颗孪生行星与太阳之间所张的最大角度是多少?能从地球上看到这颗孪生行星吗?如果孪生行星所在的椭圆轨道与地球轨道的大小和形状都相同,但却从地球轨道转过 180° ,从而使地球与这颗孪生行星在同一时刻到达近日点.重复上述计算,并比较两种情况中的能见程度.

12. 如果在椭圆引力轨道的近地点处,一质点由于受到一径向冲量 s 的推动(见第二章习题9),从而进入另一椭圆轨道.确定新轨道的长半轴和偏心率,并参照老的长轴来确定新长轴的取向.

13. 在太阳系内均匀分布的粉尘,使作用在行星上的太阳引力还得附加一个力

$$F = -mCr,$$

式中 m 是行星质量; C 是正比于引力常数和粉尘密度的常数; r 是从太阳到行星的矢径(太阳和行星都看作是一质点).这一附加力与太阳、行星原来的引力相比为极小.

(a) 计算: 在这一组合场中半径为 r_0 的行星圆形轨道的周期.

(b) 计算这一圆形轨道由于微扰而引起的径向振荡的周期.

(c) 证明: 几乎所有圆形轨道都可作为某一进动椭圆的近似,并求出进动频率.这种进动与轨道角速度的方向是相同的还是相反的?

14. 证明: 当我们采用绕力心转动或进动的坐标系时,质点在势场

$$V(r) = -\frac{k}{r} + \frac{h}{r^2}$$

中的运动与质点仅受开普勒势作用下的运动相同。

就总能量为负值的情况证明：如果附加势项与开普勒势相比为极小时，椭圆轨道的进动角速度为

$$\dot{\Omega} = \frac{2\pi mh}{l^2 \tau}$$

已经观测到水星近日点的进动率（对行星引起的摄动作出修正后）约为每世纪 40 弧秒。证明这一进动可以作出经典解释，只要无量纲量

$$\eta = \frac{h}{ka}$$

（这是相对于万有引力势的平方反比摄动势的量度）小到等于 7×10^{-8} 就可以了。（水星轨道的偏心率等于 0.206，它的周期为 0.24 年。）

15. 上题中附加的、按 r^{-2} 规律变化的势项看起来极象等效一维势中的离心势垒项。那么，为什么附加力项会引起轨道的进动，而通过 l 的变化附加于势垒的项却不会引起进动呢？

16. 只利用年和月球月（27.3 天）作为时间长度，以及地球轨道（ 1.49×10^8 公里）和月球轨道（ 3.8×10^5 公里）的平均半径，求太阳质量对地球质量之比。

17. 证明：引力场中椭圆运动的径向速率能表达为

$$\dot{r} = \frac{\omega a}{r} \sqrt{a^2 e^2 - (r - a)^2}$$

引进偏(心)近点角变量 ψ 以替代 r ，并证明：最后得到的 ψ 的微分方程能直接求积得开普勒方程。

18. 如果偏心率 e 很小，则作为 ωt 的函数，偏(心)近点角 ψ 的开普勒方程(3-76) 在计算中用迭代法容易把 $e \sin \psi$ 项看作比 ψ 的次数更低的项来求解。用 ψ_n 表示第 n 次迭代解，则明显的迭代关系式为

$$\psi_n = \omega t + e \sin \psi_{n-1}$$

利用这种迭代步骤求用 e 的幂函数展开的、 ψ 的解析形式，至少到 e^2 项为止。

19. 把 $e \sin \psi$ 展开成 ωt 的傅里叶级数，并证明：开普勒方程具有形

式解

$$\psi = \omega t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} J_n(ne) \sin \omega t,$$

式中 J_n 是 n 阶贝塞尔函数. 对于小参量来讲, 贝塞尔函数可以是参量幂级数的近似式, 根据这一结果推导用 e 的幂函数来展开的 ψ 展开式中的开头几项. 有关贝塞尔函数性质的理想资料来源是阿布拉莫维茨 (Abramowitz) 和斯特恩 (Stegun) 著的《数学函数手册》, 特别是第 360 页.

20. 如果用 ρ 代表差值 $\psi - \omega t$, 开普勒方程能写成

$$\rho = e \sin(\omega t + \rho).$$

把 $\sin \rho$ 展开成 ρ 的泰勒级数, 即能得到 ρ 的逐次近似, 再用开普勒方程给出的 ρ 的表达式来代 ρ . 证明: ρ 的一次近似 ρ_1 由下式给出:

$$\tan \rho_1 = \frac{e \sin \omega t}{1 - e \cos \omega t},$$

还要证明: 二次近似由下式求得:

$$\sin(\rho_2 - \rho_1) = -e^3 \sin(\omega t + \rho_1)(1 + e \cos \omega t),$$

这是一个精确到 e^4 项的表达式.

21. 地球连续两次经过近日点间的时间 [近(日)点年] 等于 365.2596 平均太阳日, 轨道偏心率为 0.0167504. 假设地球从近日点开始沿开普勒椭圆轨道运动, 那么在 $1/4$ 近点年的时间内, 地球沿轨道绕转过多大的角度? 所得结果的精确度应达一个弧秒, 或者更高. 可以使用任何一种方法, 包括用计算器或计算机来进行数值计算.

22. 在 $1/r$ 规律势场中的双曲线运动, 有一个相应的偏近点角 F , 它决定于关系式

$$r = a(e \cosh F - 1),$$

式中 $a(e - 1)$ 是最近距离. 求出类似于开普勒方程的表达式. 它作为 F 的函数, 给出的 t 是从最近距离处的时刻算起的.

23. 磁单极 (如果存在的话) 是由形式为 $\mathbf{B} = b\mathbf{r}/r^3$ 的磁场奇(异)性定义的, 这里的 b 是一个常数 (可理解为磁荷的量度). 假设一质量为 m 的质点在磁单极场以及由 $V(r) = -k/r$ 形式的势引起的有心力场内运动.

(a) 利用式(1-61)给出的洛仑兹力求牛顿运动方程的形式. 根据矢积 $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}$ 证明, 尽管机械角动量不守恒(非有心力场), 依然有一守恒矢量

$$\mathbf{D} = \mathbf{L} - \frac{qb}{c} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

(b) 根据从式(3-79)到(3-82)的相似步骤来证明, 存在一个类似于拉普拉斯-龙格-楞次矢量的守恒矢量, 其中, \mathbf{D} 的作用相当于纯粹开普勒力问题中的 \mathbf{L} .

24. 如果质点的速度或动量矢量看作是从力心画起的, 则矢量的箭头将描绘出质点的**矢端曲线**, 即力学史上很古老的根轨曲线, 但它在宇宙飞船动力学中得到了某些方面的恢复. 取 \mathbf{L} 与拉普拉斯-龙格-楞次矢量 \mathbf{A} 的矢积证明: 采用动量矢量时所得椭圆开普勒运动的矢端曲线是一个半径为 mk/l 的圆, 它的起点在 Y 轴上距力心 A/l 距离处.

25. 如果库仑力不是斥力而是引力, 卢瑟福散射如有变化, 应是些什么变化?

26. 分析一下由相斥有心力 $f = kr^{-3}$ 引起的散射. 证明微分截面为

$$\sigma(\Theta)d\Theta = \frac{k}{2E} \frac{(1-x)dx}{x^2(2-x)^2 \sin \pi x},$$

式中 x 是比值 Θ/π ; E 是能量.

27. 在核物理中, 常常碰到的有心力势是**矩形势阱**, 它定义为

$$\begin{aligned} V &= 0 & r > a, \\ &= -V_0 & r \leq a. \end{aligned}$$

证明, 在经典力学中, 由这种势引起的散射等同于光线经过半径为 a 、折射率为

$$n = \sqrt{\frac{E + V_0}{E}}$$

的球时所产生的折射(这一等效性说明有可能用惠更斯波和牛顿机械微粒两者来解释折射现象). 还要证明: 微分截面为

$$\sigma(\Theta) = \frac{n^2 a^2 \left(n \cos \frac{\Theta}{2} - 1 \right) \left(n - \cos \frac{\Theta}{2} \right)}{4 \cos \frac{\Theta}{2} \left(1 + n^2 - 2n \cos \frac{\Theta}{2} \right)^2}.$$

试求总截面。

28. 考虑一个截断排斥库仑势, 它定义为

$$V = k/r \quad r > a,$$

$$= k/a \quad r \leq a.$$

就总能量 $E > k/a$ 的质点, 求出作为 s/s_0 的函数的散射角 Θ 的表达式, 这里的 s_0 是碰撞参数, 对此参数, 在 $r = a$ 这一点处出现近拱点. (这一公式能有一闭合形式, 但并不简单!) 就 $E = 2k/a$ 这一特殊情况, 作一条 Θ 对 s/s_0 的数值关系曲线. 对这一特殊情况, 你能根据 Θ 对 s/s_0 的依存关系对角度散射截面得出什么结论呢?

29. 另一种截断库仑势的形式为

$$V = \frac{k}{r} - \frac{k}{a} \quad r > a,$$

$$= 0 \quad r < a.$$

求出闭合形式的散射角和微分散射截面表达式. 如果采用的参数以 a 作单位来量度最近距离, 则表达最为方便. 求总截面.

30. 证明: 在相斥散射情况中, 作为碰撞参数 s 的函数的散射角表达式(3-96)能表达成

$$\Theta = \pi - 4s \int_0^1 \frac{\rho d\rho}{\sqrt{r_m^2 \left[1 - \frac{V}{E} \right] - s^2(1 - \rho^2)}},$$

或者把积分变量改变到某一函数 $\rho(r)$, 即成为

$$\Theta = \pi - 4s \int_0^1 \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{r_m^2}{\rho^2 E} [V(r_m) - V(r)] + s^2(2 - \rho^2)}}.$$

证明: 对于相斥势来讲, 在 $r \rightarrow r_m$ 的极限情况下, 被积函数决不是奇异的. 由于确定的积分限使这种表述对于 $\Theta(s)$ 的数值计算极为有利, 自然也有利于使用高斯-勒让德求积方法.

31. 应用上题的表述计算 $\Theta(s)$ 和微分截面 $\sigma(\Theta)$ 的数值, 这时的相斥势为

$$V = \frac{V_0}{1 + r},$$

总能量 $E = 1.2V_0$. 提示: 满 16 个点的高斯-勒让德求积法将给出足够的精确度. 散射是否表现为虹霓形式?

32. 如果相斥势随 r 单调递减, 则当能量与 $V(r_m)$ 相比为高时, 散射角将很小. 在这些情况下证明: 能够对式 (3-97) 作出一定的处理, 使偏转角近似地等于

$$\Theta = \frac{1}{E} \int_0^1 \frac{[V(u_m) - V(u)] dy}{(1 - y^2)^{3/2}},$$

式中的 y 显然是 u/u_m .

还要证明: 如果 $V(u)$ 的形式为 Cu^n (n 是正整数), 则在高能量极限情况下的截面正比于 $\Theta^{-2(1+1/n)}$.

33. (a) 证明: 相对于被散射质点的人射方向, 靶质点的反冲角等于 $\Phi = \frac{1}{2}(\pi - \Theta)$.

(b) 已经看到, 弹性散射中的散射截面相对于 Θ 是各向同性的. 试问, 入射质点散射能量 E_1 的相应概率分布如何? 靶质点反冲能量 E_2 的相应概率分布又如何?

34. 证明: 实验室系中的散射角 ϑ 与散射前能量 E_0 和散射后能量 E_1 的关系决定于方程

$$\cos \vartheta = \frac{m_2 + m_1}{2m_1} \sqrt{\frac{E_1}{E_0}} - \frac{m_2 - m_1}{2m_1} \sqrt{\frac{E_0}{E_1}} + \frac{m_2 Q}{2m_1 \sqrt{E_0 E_1}}.$$

第四章 刚体运动学

前面所定义的刚体是在完全约束制约下的质点系统，这种约束使所有各对质点间的距离在整个运动过程中始终保持不变。这种概念虽然有点理想化，但却十分有用，所以对刚体力学作一番深入的讨论还是值得的。本章主要讨论刚体运动学，即刚体运动的本质和特性。有时还将研究一下有关的数学技巧，它们本身也是非常令人感兴趣的，并在其他一些物理领域中也有许多重要应用。在学习了如何描述刚体的运动之后，下一章将在拉格朗日表述的框架内讨论外力和外力矩又是如何产生这种运动的。

4-1 刚体的独立坐标

在讨论刚体运动以前，首先必须明确需要多少个独立坐标才能确定刚体的位形。一个 N 个质点的刚体最多能有 $3N$ 个自由度。但刚体所受约束将使这一数目大为减少，这些约束的形式可表达为方程

$$r_{ij} = c_{ij}, \quad (4-1)$$

式中 r_{ij} 是第 i 个质点和第 j 个质点之间的距离， c 是约束。但自由度的实际数目并不是简单地等于 $3N$ 减去约束方程数，因为象(4-1)形式的方程总共可以有 $\frac{1}{2}N(N-1)$ 个，当 N 是大数值时，这样的方程比 $3N$ 还多。事实上，并不是所有(4-1)形式的方程都是独立的。要确定刚体中的某一个点，只需确定它与任意三个非共线点之间的距离，而无需确定

它与刚体中所有其他点的距离(见图 4-1)。因此,一旦确定

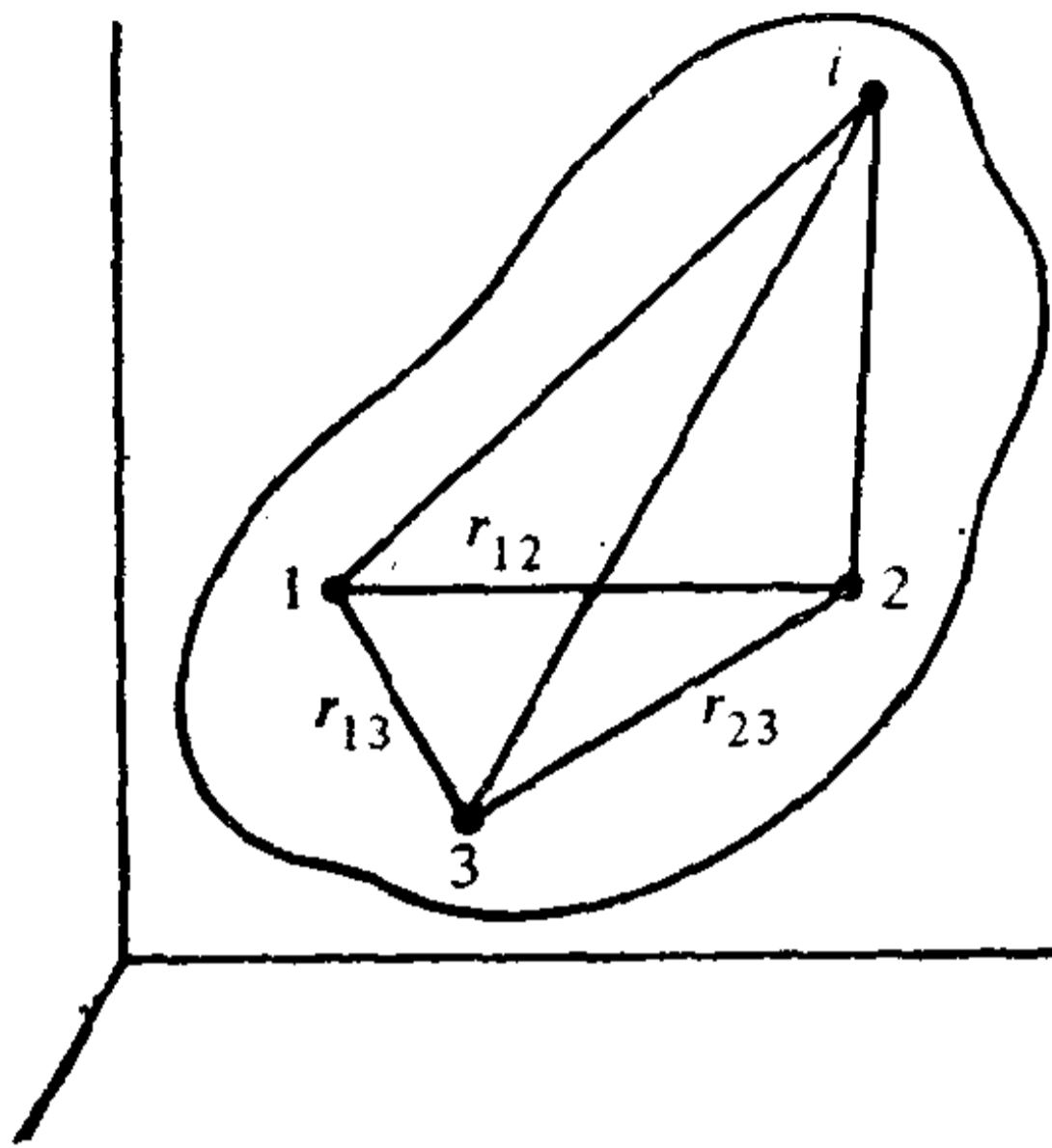


图 4-1 根据某点与三个参照点间的距离来确定该点在刚体中的位置的示意图

了刚体中这样三个质点的位置,则上述约束就会把其余所有质点的位置都固定下来。所以自由度不会超过九个。再说,三个参照点本身也不是独立的。事实上,还有三个刚性约束方程

$$r_{12} = c_{12}, \quad r_{23} = c_{23},$$

$$r_{13} = c_{13},$$

制约着它们,这使自由度数目可以进一步减少到六

个。根据下述考虑也可以看出确实只需要六个坐标。为确立某个参照点的位置,必须提供三个坐标。但是,一旦确定了点 1,那么,只要用两个坐标就可确定点 2,因为它被约束在以点 1 为球心的球面上运动的。这两个点决定以后,点 3 就只有一个自由度,因为它只能绕连接另外两个点的轴线转动。因此,总共只要六个自由度就已足够。

于是,不论刚体可能包含多少个质点,要确定它在刚体内的位形只需要六个独立的广义坐标,即使在连续体的极限情况下也不例外。

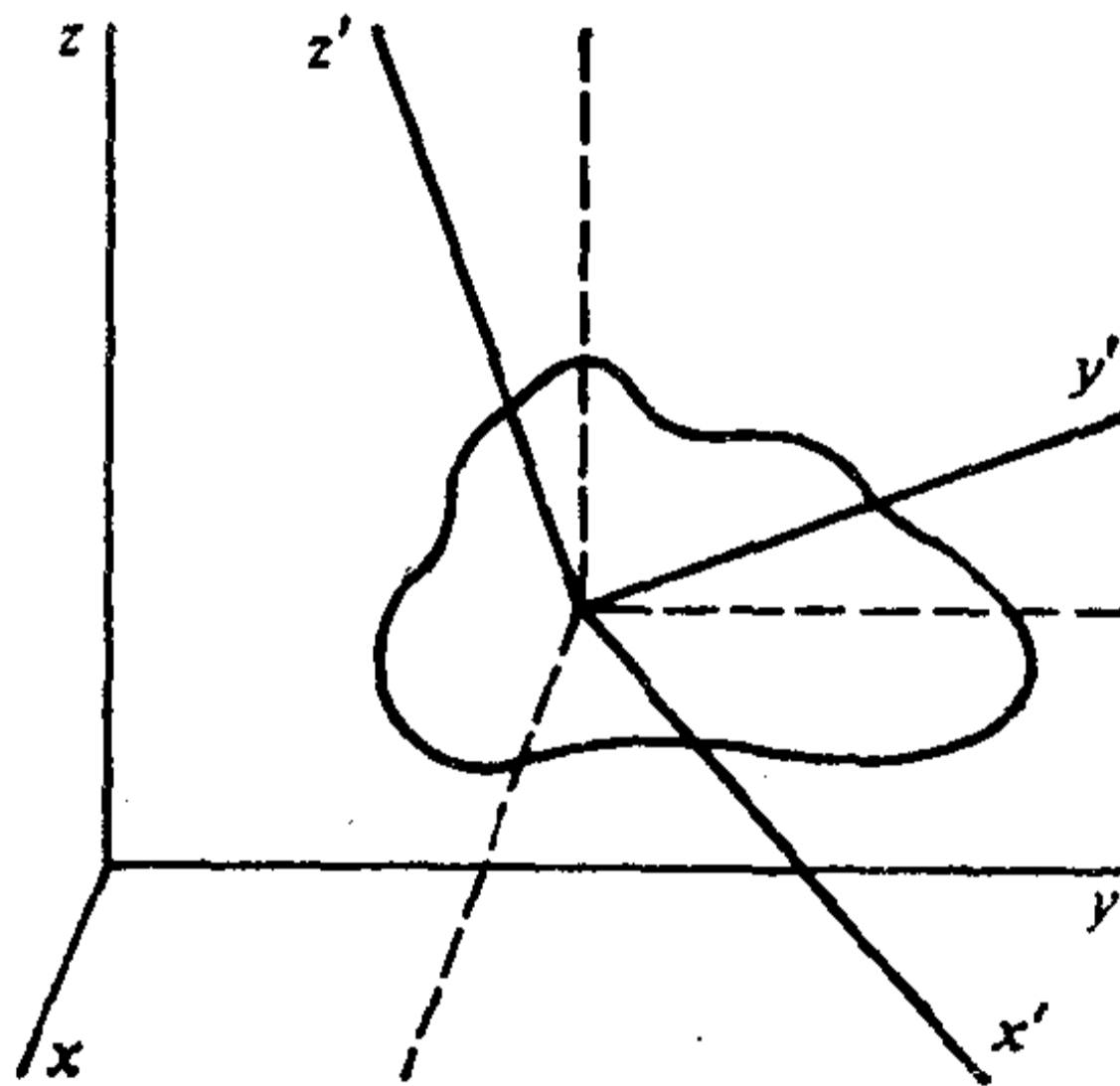


图 4-2 不带撇的轴代表外参照系轴,带撇的轴则是固定在刚体上的坐标轴

当然，除了刚性约束外，物体还可能受到其他一些约束。例如，物体可能被约束在某个表面上运动，或者有一个固定点等等。在这样一些情况下，由于这些附加的约束，将使自由度数目进一步减少，独立坐标也相应减少。

如何来确定这些坐标呢？将看到，刚体位形完全是由固定在刚体上的笛卡儿坐标系(图 4-2 中所示带撇轴)相对于外空间坐标轴的位置关系确定的。显然，需要三个坐标来确定这个“体”轴系原点的坐标。余下的三个坐标必须用来确定带撇轴相对某个坐标系的取向，这个坐标系的轴与外坐标系的轴平行，但与带撇轴具有相同的原点。

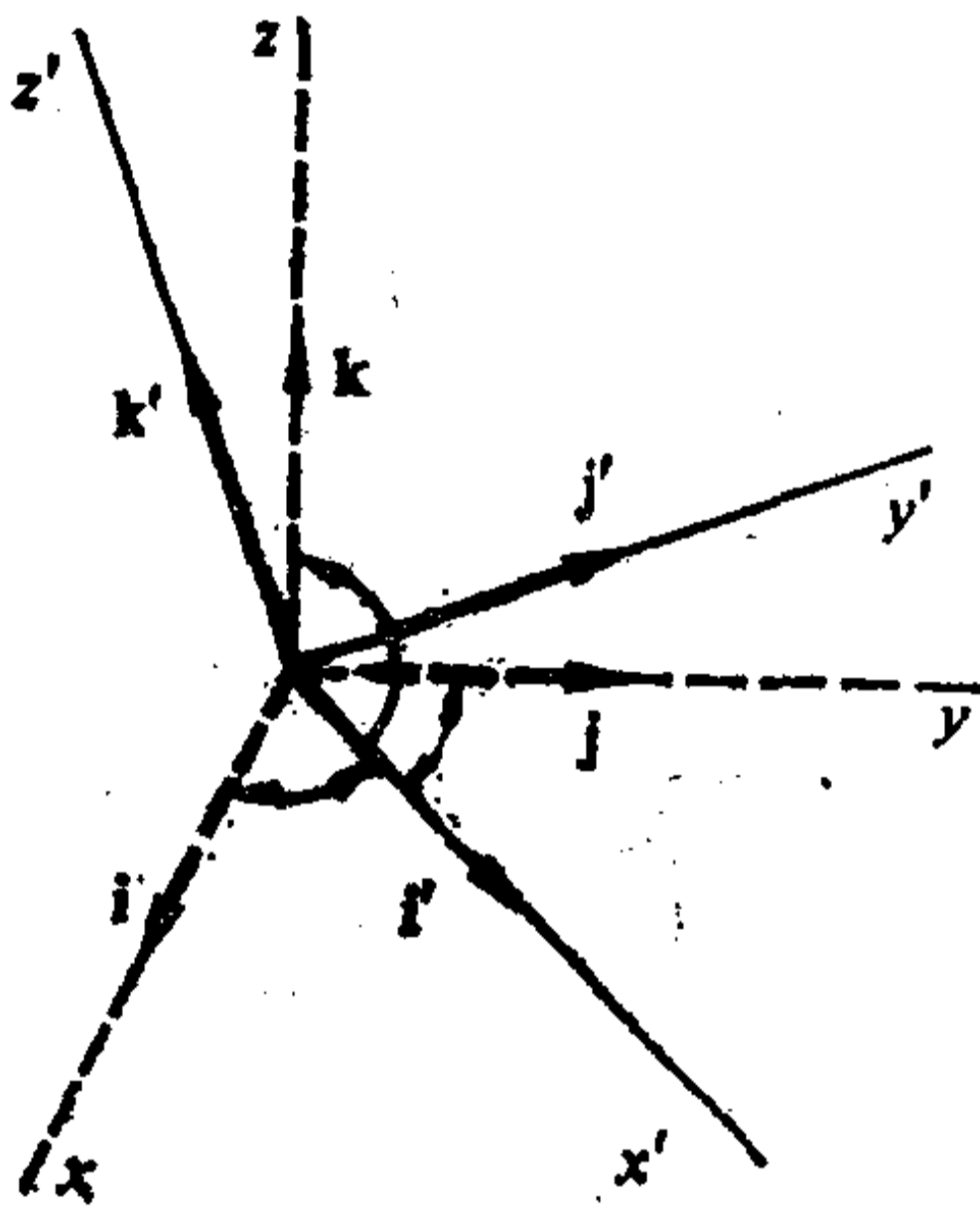


图 4-3 体轴系相对于外轴系的方向余弦

确定一个笛卡儿坐标系相对于另一个具有共同原点的坐标系的取向有多种方法。但最有效的是指明带撇轴相对于不带撇轴的方向余弦。比如说， x' 轴可以用它相对于 x, y, z 轴的三个方向余弦 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 来确定。按照常规，如果 i, j, k 是沿着 x, y, z 的三个单位矢量， i', j', k' 是带撇系中的单位矢量，

则三个方向余弦定义为

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \cos(\mathbf{i}', \mathbf{i}) = \mathbf{i}' \cdot \mathbf{i}, \\ \alpha_2 &= \cos(\mathbf{i}', \mathbf{j}) = \mathbf{i}' \cdot \mathbf{j}, \\ \alpha_3 &= \cos(\mathbf{i}', \mathbf{k}) = \mathbf{i}' \cdot \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (4-2)$$

借助于关系式

$$\mathbf{i}' = (\mathbf{i}' \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{i}' \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{i}' \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}$$

或

$$\mathbf{i}' = \alpha_1 \mathbf{i} + \alpha_2 \mathbf{j} + \alpha_3 \mathbf{k}, \quad (4-3)$$

就可以用 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 来表示矢量 \mathbf{i}' 。同样, y' 轴相对于 x, y, z 的方向余弦如果用 β_1, β_2 和 β_3 表示, 那么, 它们是 \mathbf{j}' 在不带撇参照系中的分量:

$$\mathbf{j}' = \beta_1 \mathbf{i} + \beta_2 \mathbf{j} + \beta_3 \mathbf{k}. \quad (4-4)$$

对于 \mathbf{k}' , 也可以列出一个类似于式 (4-4) 的方程, 而用 γ 来表示 z' 轴的方向余弦. 这九个方向余弦完全确定了 x', y', z' 轴相对于 x, y, z 轴系的取向. 我们同样能把这一过程倒过来, 借助于 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 沿带撇轴的分量关系式, 用方向余弦来表示 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. 这时, 有

$$\mathbf{i} = (\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}') \mathbf{i}' + (\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}') \mathbf{j}' + (\mathbf{i} \cdot \mathbf{k}') \mathbf{k}'$$

或

$$\mathbf{i} = \alpha_1 \mathbf{i}' + \beta_1 \mathbf{j}' + \gamma_1 \mathbf{k}'. \quad (4-5)$$

\mathbf{j} 和 \mathbf{k} 也有类似的方程.

方向余弦还能直接提供给定点在某个系统中的坐标与它在另一系统中的坐标之间的关系. 比如说, 某点在给定参照系中的坐标是位置矢量 \mathbf{r} 沿该系统各轴的分量. 因而由 x, y, z 给出的 x' 坐标为

$$x' = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{i}') = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z,$$

对其他坐标则有

$$\begin{aligned} y' &= \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z, \\ z' &= \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z. \end{aligned} \quad (4-6)$$

这里对 \mathbf{r} 矢量各分量所做的一切, 显然对于任何其他矢量也能够做到. 如果 \mathbf{G} 是某个矢量, 则 \mathbf{G} 沿 x' 轴的分量与它的 x, y, z 分量之间的关系将是

$$G_{x'} = (\mathbf{G} \cdot \mathbf{i}') = \alpha_1 G_x + \alpha_2 G_y + \alpha_3 G_z,$$

依此类推. 因此, 这组九个方向余弦完全说明了两个坐标系

之间的变换。

如果把带撇轴固定在物体上，则当物体由于运动而改变其取向时，九个方向余弦将是时间的函数。在此意义上， α ， β 和 γ 可以看作是描述物体瞬时取向的坐标，这指的是相对于固定在空间内并同体轴系具有相同原点的那个坐标系的取向。但是它们显然不是独立坐标，因为它们一共有九个，而我们已经指出过，为了确定取向，只需要三个坐标。

下面来确定方向余弦间的关系。已经知道，两种坐标系中的单位矢量都是相互正交、并具有单位量值的，所以用符号表示时，可得

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$$

和

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1. \quad (4-7)$$

同理可得 \mathbf{i}' , \mathbf{j}' 和 \mathbf{k}' 的类似关系式。利用式 (4-7) 来构成用 \mathbf{i}' , \mathbf{j}' 和 \mathbf{k}' 来表示的三个 \mathbf{i} , \mathbf{j} 和 \mathbf{k} 的方程 [如同 (4-5) 形式的方程] 之间的全部可能标积，能够得到九个系数所满足的条件：

$$\begin{aligned} \alpha_l \alpha_m + \beta_l \beta_m + \gamma_l \gamma_m &= 0 & l, m = 1, 2, 3, l \neq m; \\ \alpha_l^2 + \beta_l^2 + \gamma_l^2 &= 1 & l = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4-8)$$

这两组总共六个方程足以把独立量的数目从九个减少到三个。如果采用克朗尼格 (Kronecker) δ 符号，即 δ_{lm} ：

$$\begin{aligned} \delta_{lm} &= 1, & l = m, \\ &= 0, & l \neq m, \end{aligned}$$

能从形式上把这六个方程简化为一个方程。式 (4-8) 也就能表达为

$$\alpha_l \alpha_m + \beta_l \beta_m + \gamma_l \gamma_m = \delta_{lm}. \quad (4-9)$$

所以说，把九个方向余弦作为广义坐标来建立拉氏函数以及相应的运动方程是不可能的。为此，我们必须利用由方向余弦组成的三个独立函数组中的某一组。这种独立变量组

以后会讨论,但其中最重要的是欧拉角。然而,用方向余弦来描述两个笛卡儿坐标系之间的联系还是有许多好处的。借助于这些方向余弦,可以使许多刚体运动的定理表达得极其精巧,并带有普遍性;其形式还能很自然地导致狭义相对论和量子力学中必须采用的那些步骤。所以这种描述方式值得在此作进一步讨论。

4-2 正交变换

为了更好地研究上述九个方向余弦的性质,比较方便的做法是把所有的坐标都改记为 x , 并用下标来区分各个轴:

$$x \rightarrow x_1, y \rightarrow x_2, z \rightarrow x_3. \quad (4-10)$$

这样,式(4-6)将成为

$$\begin{aligned} x'_1 &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3, \\ x'_2 &= \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3, \\ x'_3 &= \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3. \end{aligned} \quad (4-11)$$

式(4-11)构成了从 x_1, x_2, x_3 坐标组到 x'_1, x'_2, x'_3 新坐标组的一组变换方程。特别是它们给我们提供了线性变换或矢量变换的一个例子,这种变换的形式为

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{aligned} \quad (4-12)$$

式中 a_{11}, a_{12}, \dots 是一组与 x, x' 无关的常值系数¹⁾。为了使许多表达式看起来比较简单,我们还将采用首先由爱因斯坦引进的求和约定。该约定指出,每当一个下标在某一项中出现两次或两次以上时,那么,不必再用其他任何符号,总是意味着该项是对于这一下标的所有可能值所求之和。根据这一约

1) 当然,式(4-12)并不是最为普遍的一组变换方程,例如,可参阅从 r 变换到 q 的变换方程(1-38)。

定,式(4-12)能写成最紧凑的形式:

$$x'_i = a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4-12')$$

下标 j 的重复出现,意味着(4-12')左边是对哑标 j 的所有可能值(这里的 $j = 1, 2, 3$)所求之和. 在出现被标量的乘幂的地方有可能产生某种二义性,正是由于这种二义性,象

$$\sum_i x_i^2$$

这样的表达式在求和约定下被表达成

$$x_i x_i.$$

往后在阅读方程时,除非另作明确说明,都应自动地承认这一求和约定. 但在方便的地方,或者为了避免二义性,有时也可能把求和号明显地表示出来,例如,为了从和式中排除某些下标值时就是如此.

由于方向余弦不是全部独立的,所以式(4-11)所代表的变换仅是一般线性变换式(4-12)的一种特殊情况. 系数之间的关系式(4-8)在这里可以用新的符号重新加以推导. 由于两种坐标系都是笛卡儿坐标系,所以矢量的量值等于各分量的平方之和. 再说,不论用哪一种坐标系,实际矢量总是不变的,所以矢量量值在两种坐标系中必定相同. 我们可以用符号把这种量值的不变性质表达为

$$x'_i x'_i = x_i x_i. \quad (4-13)$$

于是式(4-13)左边等于

$$a_{ij} a_{ik} x_j x_k,$$

当,且仅当

$$\begin{aligned} a_{ij} a_{ik} &= 1 & j = k, \\ &= 0 & j \neq k, \end{aligned} \quad (4-14)$$

或者写成更紧凑的形式,当

$$a_{ij} a_{ik} = \delta_{ik} \quad j, k = 1, 2, 3 \quad (4-15)$$

时, 式 (4-13) 的左边才能化为 (4-13) 右边的形式. 当这些 a_{ij} 系数用 α, β, γ 表达时, 式 (4-15) 中包含的六个方程与式 (4-9) 相一致.

具有式 (4-15) 所要求的性质的线性变换式 (4-12) 都称为正交变换, 式 (4-15) 因而称为正交化条件. 因此, 从固定于空间的坐标到固定于刚体(但有共同原点)的坐标的过渡应由正交变换来完成. 变换量(方向余弦)的阵列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (4-16)$$

称为变换矩阵, 并用大写字母 \mathbf{A} 表示. 量 a_{ij} 相应地叫做变换矩阵元.

为了使这些形式上的考虑更有意义, 我们来考虑简单的平面运动例子, 这使我们能够仅仅与二维坐标系打交道. 在上述关系式中的下标也只要取 1, 2 两个值, 从而变换矩阵简化为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

四个矩阵元由三个正交条件相关联:

$$a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk} \quad j, k = 1, 2,$$

因而确定变换只要一个独立参量. 但这一结论并不奇怪. 从一个笛卡儿坐标系到另一个笛卡儿坐标系的二维变换与轴线在平面上的转动相对应(见图 4-4), 而这种转动只要用一个量, 即转动角 ϕ 就能完全确定. 用这个单一参量表达时, 变换方程成为

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos \phi + x_2 \sin \phi, \\ x'_2 &= -x_1 \sin \phi + x_2 \cos \phi. \end{aligned}$$

所以各矩阵元为

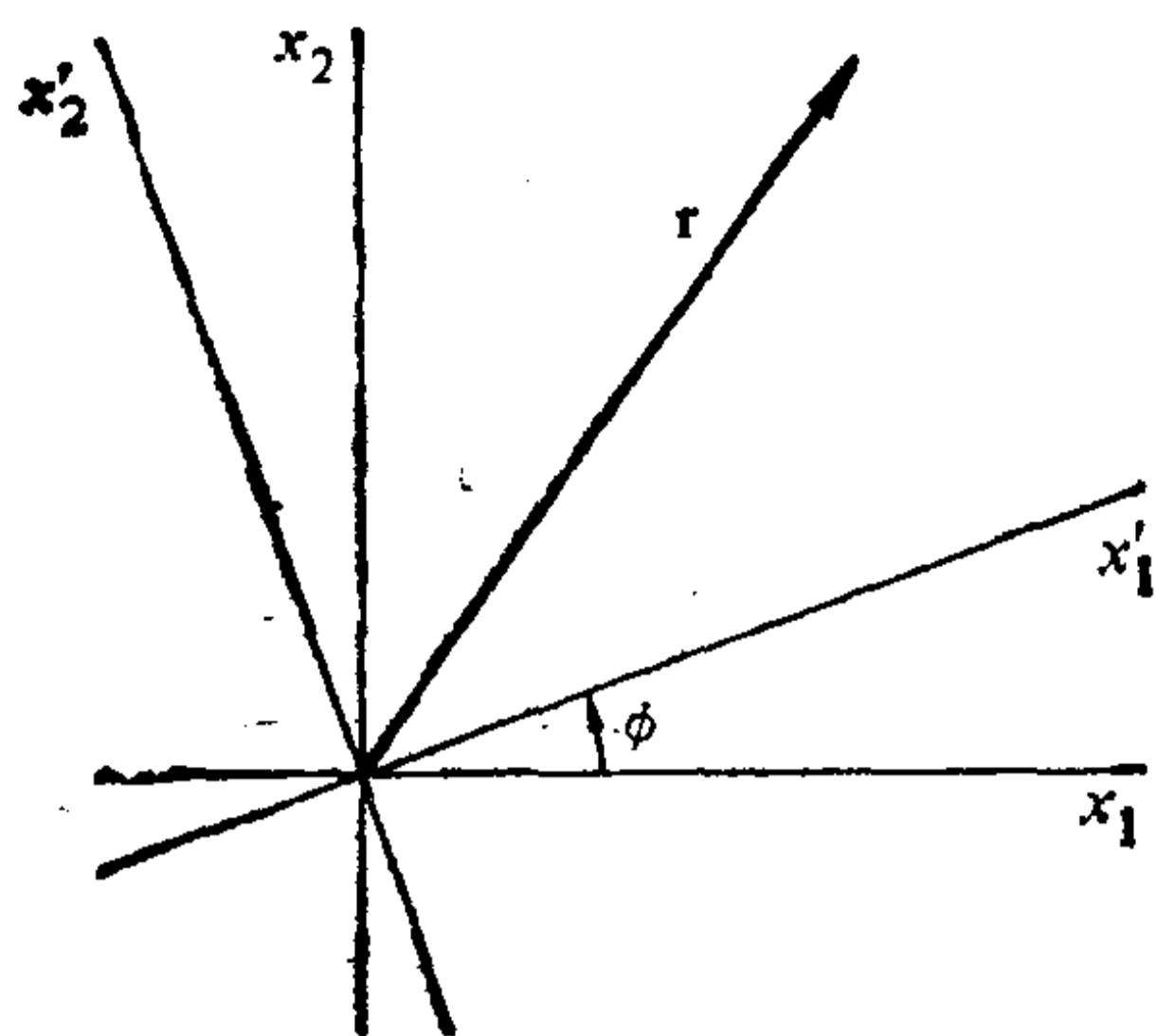


图 4-4 等效于二维正交变换的坐标轴的转动

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \phi, & a_{12} &= \sin \phi, \\ a_{21} &= -\sin \phi, & a_{22} &= \cos \phi, \end{aligned} \quad (4-17)$$

从而矩阵 \mathbf{A} 可以写作

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (4-17')$$

三个正交条件展开成方程

$$\begin{aligned} a_{11}a_{11} + a_{21}a_{21} &= 1, \\ a_{12}a_{12} + a_{22}a_{22} &= 1, \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} &= 0. \end{aligned}$$

显然，矩阵 (4-17') 是满足这些条件的，因为使用式 (4-17) 的矩阵元时，它们能化为恒等式

$$\begin{aligned} \cos^2 \phi + \sin^2 \phi &= 1, \\ \sin^2 \phi + \cos^2 \phi &= 1, \\ \cos \phi \sin \phi - \sin \phi \cos \phi &= 0. \end{aligned}$$

变换矩阵 \mathbf{A} 可以看作是作用于不带撇系统即能使之变换到带撇系统的算符。这一过程可以用符号表达成

$$(\mathbf{r})' = \mathbf{A}\mathbf{r}, \quad (4-18)$$

即矩阵 \mathbf{A} 作用于不带撇系统中矢量的分量上, 即给出该矢量在带撇系统中的分量. 应该强调指出的是, 到目前为止, \mathbf{A} 只作用在坐标系上, 矢量是不变的; 我们想得到的只是它在两个不同坐标系中的分量. 所以, 为清楚起见, 我们在式(4-18)左边 \mathbf{r} 旁边加上一个括弧, 以表明方程两边所包含的是同一个矢量. 只有分量发生了变化. 已经知道, 在两维情况下, 坐标的变换仅仅是一次转动, 因此, \mathbf{A} 等同于平面转动算符.

还必须指出, 即使数学形式不变, 也能把 \mathbf{A} 看作是作用在矢量 \mathbf{r} 上、并把它变换为另一矢量 \mathbf{r}' 的算符:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{A}\mathbf{r}, \quad (4-19)$$

两个矢量都以同一坐标系来表示. 因此, 在两维情况下, 不是逆时针转动坐标系, 而是把矢量 \mathbf{r} 顺时针转过 ϕ 角, 以得出矢量 \mathbf{r}' . 新矢量的各个分量与原来那个矢量的分量之间的联系由描述坐标变换的同一个方程 (4-12) 表示. 所以从形式

上看, 式 (4-18) 不必使用括号; 我们宁愿把它写成 (4-19) 的形式, 不论把它解释为对于坐标系的运算还是对于矢量的运算都一样. 不论遵循这两种观点中的哪一种, 代数运算法则不变. 当用正交变换确定刚体取向时, 把它解释为作用在坐标系上的算符更为确切. 但把它看作是使一个矢量变换成另一个

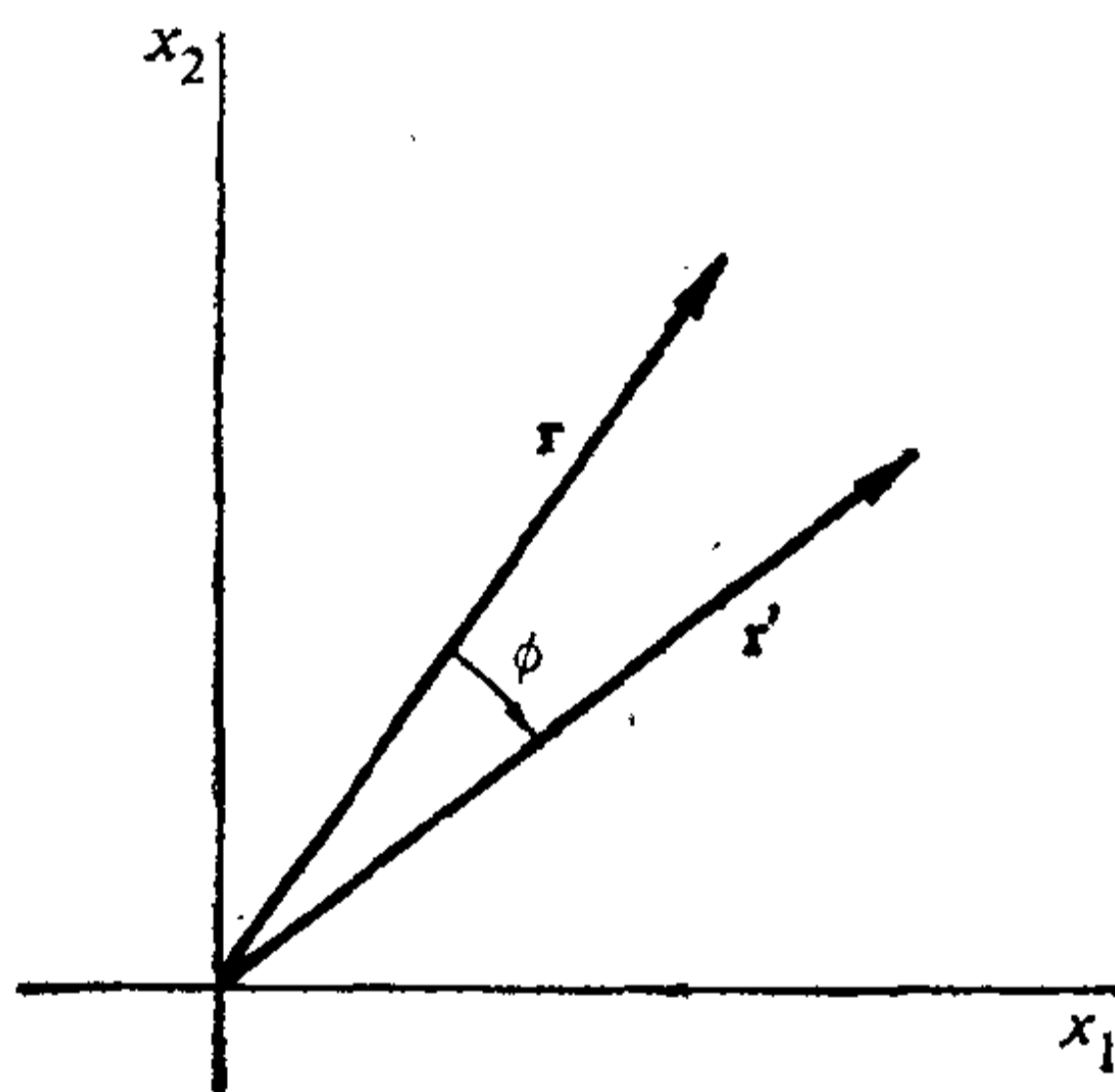


图 4-5 把正交变换解释为矢量的转动, 坐标系保持不变

矢量的算符时, 用途更为广泛. 在数学讨论中, 可以自由选用任何一种解释, 视情况是否合适而定. 当然, 应该强调的是,

A 所代表的运算性质将决定于所选用的解释。比如说，如果把 **A** 应用于坐标系时，它相当于逆时针转过角度 ϕ ，如果把它应用于矢量时，则相当于顺时针的转动。

变换作用的这种两重性，在比正交变换更为一般的其他坐标变换中也是经常出现的。有时可以把它们看作仅仅作用在坐标系上，以使用新坐标系表示某一给定量或函数。而在另一些时候，又可以把它们看作是作用在那些量或函数上，使它们变换成相同坐标系中的新量。当所取变换仅仅作用于坐标系时，就说变换的作用是被动的。当被变换的是矢量或其他物理量时，则说变换的意义是主动的。对变换作用的这两种解释，在下面考虑的各种经典力学表达中将会遇到（见第九章），事实上，在物理学的许多领域中都会出现这种情况。

为了进一步研究刚体相对于固定原点的运动的运动学，我们将一再遇到与变换矩阵有关的代数运算。所以下一节将着重简要概述对正交变换有关的矩阵代数的基本形式。该节将对不熟悉这一数学分支的读者提供所需的介绍。对于我们将采用的特殊术语和符号，也将提供详细的资料，如果读者对矩阵代数早已熟悉，则可略去该节，并从节 4-4 开始学起。

4-3 变换矩阵的形式性质

让我们来考虑一下相继完成两次变换——对应于刚体相继完成两次位移——以后的情况。设第一次从 r 到 r' 的变换记为 **B**：

$$x'_k = b_{kj}x_j, \quad (4-20)$$

接下来完成的从 r' 到第三个坐标 r'' 的变换记为 **A**：

$$x''_i = a_{ik}x'_k. \quad (4-21)$$

联立式 (4-20) 和 (4-21)，得到 x''_i 与 x_j 之间的关系式

$$x''_i = a_{ik}b_{kj}x_j.$$

此式也可写成

$$x_i'' = c_{ij}x_j, \quad (4-22)$$

式中

$$c_{ij} = a_{ik}b_{kj}. \quad (4-23)$$

因此, **A**, **B** 这两次相继的正交变换等效于第三个正交变换 **C**. 可以证明, 由于 **A** 和 **B** 的正交性质, 使 **C** 也是一个正交变换. 证明的详细过程将留作习题. 用符号表示时, 合成算符 **C** 可以看成是 **A** 和 **B** 两个算符的乘积:

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB},$$

而矩阵元 c_{ij} 则按照定义应是方阵 **A** 和 **B** 相乘而得的那个方阵的元素.

注意, 这种“矩阵”或算符的相乘是不对易的, 即

$$\mathbf{BA} \neq \mathbf{AB},$$

因为按照定义, $\mathbf{D} = \mathbf{BA}$ 这一变换的元素为

$$d_{ij} = b_{ik}a_{kj}, \quad (4-24)$$

这与 **C** 的矩阵元式 (4-23) 一般是不一致的. 因此, 最后所得坐标系有赖于 **A** 和 **B** 的应用次序, 即与先 **A** 后 **B**, 还是先 **B** 后 **A** 的次序有关. 然而, 矩阵的乘法都满足结合律; 在三个或更多个矩阵的乘积中, 相乘的次序是无关的:

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}). \quad (4-25)$$

式 (4-19) 中把 **A** 和 **r** 并置只不过是一种符号表示, 表明了 **A** 对坐标系(或对矢量)的作用. 但是, 如果把我们的矩阵概念推广一下, 也可以把这种并置看作是实际的矩阵相乘. 到目前为止, 所论的矩阵都是方阵, 即行数和列数相同的矩阵. 然而, 我们还可以有下列两式定义的所谓单列矩阵:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}. \quad (4-26)$$

根据矩阵相乘的定义,乘积 \mathbf{AX} 也是一个单列矩阵,其元素为

$$(\mathbf{AX})_i = a_{ij}x_j = x'_i.$$

因此,式(4-19)也可写成矩阵方程

$$\mathbf{X}' = \mathbf{AX}.$$

两矩阵相加,虽不如相乘的概念重要,但也是一种常见的运算。如果 \mathbf{A} , \mathbf{B} 之和等于矩阵 \mathbf{C} , 则其元素等于 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的相应元素之和:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

更重要的是 \mathbf{A} 的逆变换,亦即把 r' 变换回 r 的运算。这种变换将称为 \mathbf{A}^{-1} , 它的矩阵元将用 a'_{ij} 表示。于是得方程组

$$x_i = a'_{ij}x'_j, \quad (4-27)$$

它必与

$$x'_k = a_{ki}x_i \quad (4-28)$$

相一致。把式(4-27)中的 x_i 代入式(4-28), 即得

$$x'_k = a_{ki}a'_{ij}x'_j \quad (4-29)$$

由于 \mathbf{r}' 的分量是独立的,所以只有在所求之和恒等地化为 x'_k 时,式(4-29)才能成立。因此,当 $j = k$ 时, x'_j 的系数必须为 1, 而当 $j \neq k$ 时必须为零;以符号表示时,则有

$$a_{ki}a'_{ij} = \delta_{kj}. \quad (4-30)$$

容易看出,式(4-30)的左边是乘积 \mathbf{AA}^{-1} 的矩阵元,右边则是所谓单位矩阵

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4-31)$$

的元素。因此,式(4-30)也可以表达成

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{1}, \quad (4-32)$$

这也说明了把逆矩阵记为 \mathbf{A}^{-1} 的原因。对应于 $\mathbf{1}$ 的变换称为恒等变换,它不会造成坐标系的变化:

$$X = IX.$$

同理,任何矩阵 A 以任何顺序乘 1 , 不会影响到 A :

$$IA = AI = A.$$

稍稍改变一下求证式 (4-32) 的次序即可证明, A 和 A^{-1} 是对易的. 不是用 x' 来代式 (4-29) 中的 x_i , 而是从两个方程中消去 x' 也同样能得到类似的形式

$$a'_{ij}a_{jk} = \delta_{ik}.$$

表达成矩阵的形式, 则有

$$A^{-1}A = I, \quad (4-33)$$

这正是我们所要证明的.

现在来考虑二重和

$$a_{kl}a_{ki}a'_{ij},$$

此式也能表达成

$$c_{li}a'_{ij} \quad (c_{li} = a_{kl}a_{ki}),$$

或

$$a_{kl}d_{kj} \quad (d_{kj} = a_{ki}a'_{ij}).$$

应用正交条件式 (4-15), 从第一种观点所得之和可化为

$$\delta_{li}a'_{ij} = a'_{ij}.$$

再从第二种观点来看, 借助于式 (4-30), 则同是这一个和可以写成

$$a_{kl}\delta_{kj} = a_{il}.$$

因此, 直接矩阵 A 和倒易矩阵 A^{-1} 的各元素之间的关系为

$$a'_{ij} = a_{ji}. \quad (4-34)$$

一般地讲, 把 A 的行和列互换, 将得到一个称为转置矩阵的矩阵, 记为 \tilde{A} . 所以式 (4-34) 表明, 正交矩阵的倒易矩阵同转置矩阵相等:

$$A^{-1} = \tilde{A}. \quad (4-35)$$

如果把这一结果代入式 (4-33), 即得

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{A} = \mathbf{I}, \quad (4-36)$$

如同直接展开能够证明的那样,这是正交条件式(4-15)的简略形式¹⁾. 同样,把式(4-34)代入式(4-30),能够得到正交条件的另一种形式:

$$a_{ki}a_{ji} = \delta_{ki}. \quad (4-37)$$

采用符号形式,式(4-37)能表达成

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{A} = \mathbf{I},$$

只要分别用 \mathbf{A} 左乘和用 \mathbf{A}^{-1} 右乘式(4-36)即可直接推得这一结果.

一个(长方)矩阵如果有 m 行和 n 列,就说它是 $m \times n$ 维矩阵;也就是说,它的矩阵元如果是 a_{ij} ,则 i 的取值从 1 到 m , j 的取值则从 1 到 n . 显然,这样一个矩阵的转置矩阵是 $n \times m$ 维矩阵. 如果把一个矢量列矩阵看作是 $m \times 1$ 维的(长方)矩阵,那么矢量的转置矩阵则是 $1 \times m$ 维矩阵,即单行矩阵. 只有当 \mathbf{A} 的列数与 \mathbf{B} 的行数相同时,才可能存在这两个(长方)矩阵之积 \mathbf{AB} . 这是得出矩阵元

$$c_{ij} = a_{ik}b_{kj}$$

的乘法运算定义的明显结果. 根据这一观点,不存在一个矢量列矩阵与一个方阵的乘积. 我们能够构成的这些量之间的唯一乘积是一个方阵与一个单列矩阵的乘积. 但要注意,一个单行矩阵,即一个矢量的转置矩阵,当然能够事先扩展为一个方阵. 然而,一个矢量的列矩阵与它的转置矩阵之间的区别往往并不重要. 所以,如果需要,符号 \mathbf{X} 可以用来表示一个

1) 从(4-36)形式的正交条件的确能直接得出式(4-35),证明的简略情况说明用符号来处理问题的效能. 用 \mathbf{A}^{-1} 右乘式(4-36):

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1},$$

再根据式(4-32),即得

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^{-1}.$$

列矩阵,或者是一个行矩阵¹⁾. 例如,在表达式 \mathbf{AX} (\mathbf{A} 是一个方阵)中的 \mathbf{X} 代表的是一个列矩阵;而在表达式 \mathbf{XA} 中,则代表排成单行的相同元素. 要注意的是, \mathbf{AX} 的第 i 个分量能写成

$$A_{ij}x_j = x_j(\tilde{\mathbf{A}})_{ji}.$$

因此,我们就有了一个矢量和方阵乘积的有用的对易性质,即

$$\mathbf{AX} = \mathbf{X}\tilde{\mathbf{A}}.$$

一个与它的转置矩阵相同的方阵,即

$$A_{ij} = A_{ji}$$

(由于明显的理由)将被说成是对称的. 当一个矩阵的转置是该矩阵的负值,即

$$A_{ij} = -A_{ji}$$

时,就说该矩阵是反对称的或斜对称的. 显然,在反对称矩阵中,对角元始终等于零. 对于任何方阵 \mathbf{A} 定义为

$$\mathbf{A}_s = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \tilde{\mathbf{A}})$$

的矩阵 \mathbf{A}_s 是对称的,而相应的反对称矩阵则定义为

$$\mathbf{A}_a = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{A}}).$$

显然可得

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_s + \mathbf{A}_a,$$

以及

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_s - \mathbf{A}_a.$$

与转置矩阵记号相关联着的是它的复共轭矩阵,物理学家称之为伴矩阵,并标以剑号[†]:

$$\mathbf{A}^\dagger = (\tilde{\mathbf{A}})^*, \quad (4-38)$$

1) 矢量矩阵上的转置号有时是保留着的,以使用来强调列矩阵与行矩阵之间的区别.

这里的*号按惯例表示复共轭。与正交矩阵的定义式(4-36)相类似,么正矩阵 \mathbf{A} 满足条件

$$\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} = \mathbf{I}. \quad (4-39)$$

在确定刚体取向的问题中, \mathbf{X} 和 \mathbf{X}' 都是实的, 所以变换矩阵也必定是实的。这使正交性质和么正性质之间, 或者转置矩阵和伴矩阵之间不再有什么区别。简而言之, 一个实正交矩阵是么正的。但在这一章中以及往后讨论到相对论时, 将会有机会引进复矩阵。在这种地方, 差别相当显著。转置矩阵的许多性质与伴矩阵的性质明显地相似。但应注意的是, 矢量矩阵的伴矩阵并不等效于矢量, 这是因为还可能有复共轭的影响。与自己的伴矩阵恒等的矩阵称为自伴矩阵或厄密矩阵¹⁾。

把算符理解为用来变换矢量, 或用来变换坐标系的这两种解释, 在我们寻求坐标变化情况下的算符变换时都会涉及到。设 \mathbf{A} 是作用在矢量 \mathbf{F} (或单列矩阵 \mathbf{F}) 上以产生矢量 \mathbf{G} 时所用的算符:

$$\mathbf{G} = \mathbf{A}\mathbf{F}.$$

如果用矩阵 \mathbf{B} 来变换坐标系, 则矢量 \mathbf{G} 在新系统中的分量将满足关系式

$$\mathbf{B}\mathbf{G} = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{F},$$

此式也可写成

$$\mathbf{B}\mathbf{G} = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{F}. \quad (4-40)$$

式(4-40)可以解释为: 将算符 $\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}$ 作用于以新坐标表示的矢量 \mathbf{F} 上, 就产生同样以新坐标表示的矢量 \mathbf{G} , 所以我们可以把 $\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}$ 看作是变换到新坐标时算符 \mathbf{A} 所取的形式:

1) 读者应注意, 伴矩阵这一名称在很多数学论著中具有完全不同的意义, 它被理解成与矩阵之逆相关的概念。这使数学家必须经常与“复共轭转置矩阵”这种不顺口的名称作斗争。这里所用的伴和自伴的意义, 由于量子力学中的应用而深深扎根于物理学之中。

$$\mathbf{A}' = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}. \quad (4-41)$$

(4-41) 形式矩阵的任何变换称为相似变换。

现在来考虑由方阵元素组成的行列式的性质是合适的。按照惯例，我们将用两条竖线来标记这种行列式，比如 $|\mathbf{A}|$ 。应该指出，矩阵乘法的定义与行列式乘法的定义相同(参阅 Bôcher, Introduction to Higher Algebra, p. 26)。因此，有

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|.$$

由于单位矩阵的行列式等于 1，所以正交条件式 (4-36) 的行列式形式为

$$|\tilde{\mathbf{A}}| \cdot |\mathbf{A}| = 1.$$

其次，行列式的值不会因行和列的互换而改变，所以

$$|\mathbf{A}|^2 = 1, \quad (4-42)$$

这表明正交矩阵的行列式只能取 +1 或 -1 两个数值。(这两个数的几何意义将在下节讨论。)

若矩阵不是正交的，行列式的取值当然不会这样简单。然而可以证明，行列式之值在相似变换下是不变的。用 \mathbf{B} 右乘变换矩阵式 (4-41)，即得关系式

$$\mathbf{A}'\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{A},$$

或者写成行列式的形式

$$|\mathbf{A}'| \cdot |\mathbf{B}| = |\mathbf{B}| \cdot |\mathbf{A}|.$$

由于 \mathbf{B} 的行列式仅仅是一个数，而且不等于零¹⁾，所以可以将上式两边各除以 $|\mathbf{B}|$ 来得到所需结果：

$$|\mathbf{A}'| = |\mathbf{A}|.$$

往后在讨论到刚体运动时，将要用到矩阵变换、特别是正交矩阵变换的所有这些性质。除此之外的其他一些性质将在需要时加以推导。

1) 如果它等于零，就不能有逆算符 \mathbf{B}^{-1} [根据克拉默 (Cramer) 规则]，但为了使式 (4-41) 有意义， \mathbf{B}^{-1} 还是需要的。

4-4 欧拉角

早已指出(见第 155 页), 九个元素 a_i 不是独立的量, 所以把它们用作广义坐标并不适宜. 表示正交条件的六个关系式 (4-9) 或 (4-15) 当然能把独立元素的数目归并为三个. 但为了表示刚体运动的特征, 除了表示正交性的那些条件外, 矩阵元还必须满足另一个条件. 前节已指出, 实正交矩阵的行列式能够取 $+1$ 或 -1 两个值. 然而下面的论证表明, 行列式为 -1 的正交矩阵不可能代表刚体的实际位移.

考虑一个行列式为 -1 的简单矩阵:

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1.$$

变换矩阵 S 的作用是改变各分量和坐标轴的符号(见图 4-6).

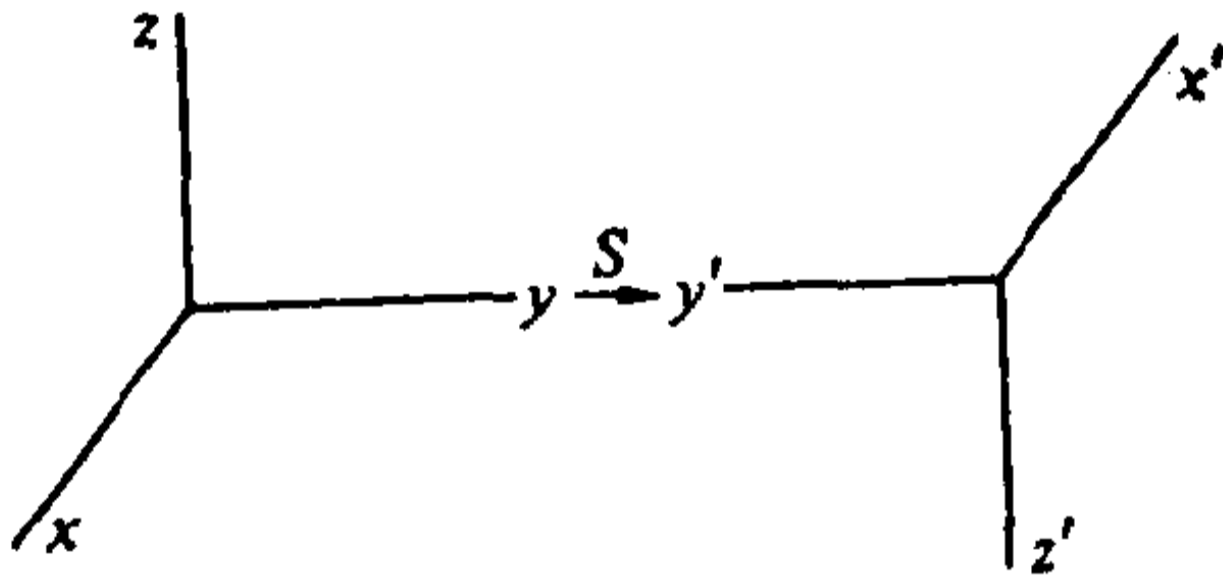


图 4-6 坐标轴的反演

这种运算使右手坐标系变换到左手坐标系, 因而称为坐标轴的反演或反射.

从这一运算的性质清楚地看到, 右手系统反演到左手系统不可能通过坐标轴取向的任何刚性变化

来实现. 所以反演决不会对应于刚体的实际位移. 凡是对 S 是正确的, 对于行列式为 -1 的任何矩阵也同样适合, 因为任何这种矩阵都能表达成 S 与行列式为 $+1$ 的矩阵的乘积, 因而也就包括反演运算在内. 所以, 反演运算不可能描述取向的刚性变化. 因而代表刚体运动的变换必定限于行列式为 $+1$ 的那些矩阵. 导致这一结论的另一种论证方法基于下述事实, 即变换矩阵必须从单位矩阵开始连续推演而得, 单位

矩阵的行列式当然等于 $+1$ 。矩阵行列式在某给定时刻从它的初始值 $+1$ 突然变到 -1 这一情况，与运动的连续性质不相容。行列式为 $+1$ 的正交变换称为正常的，很自然，行列式为 -1 的那些正交变换将称为非正常的。

为了用力学的拉格朗日表述描述刚体运动，必须找到三个独立参量来确定刚体的取向，而且所取方式应保证正交变换矩阵的行列式为 $+1$ 。只有找到了这样一些广义坐标，才能写出系统的拉氏函数，并建立起拉格朗日运动方程。许多组这样的参量在文献中早有描述，但最常见的和最有用的是欧拉角。现在来确定这些角度，并证明，如何用它们来表示正交变换矩阵元。

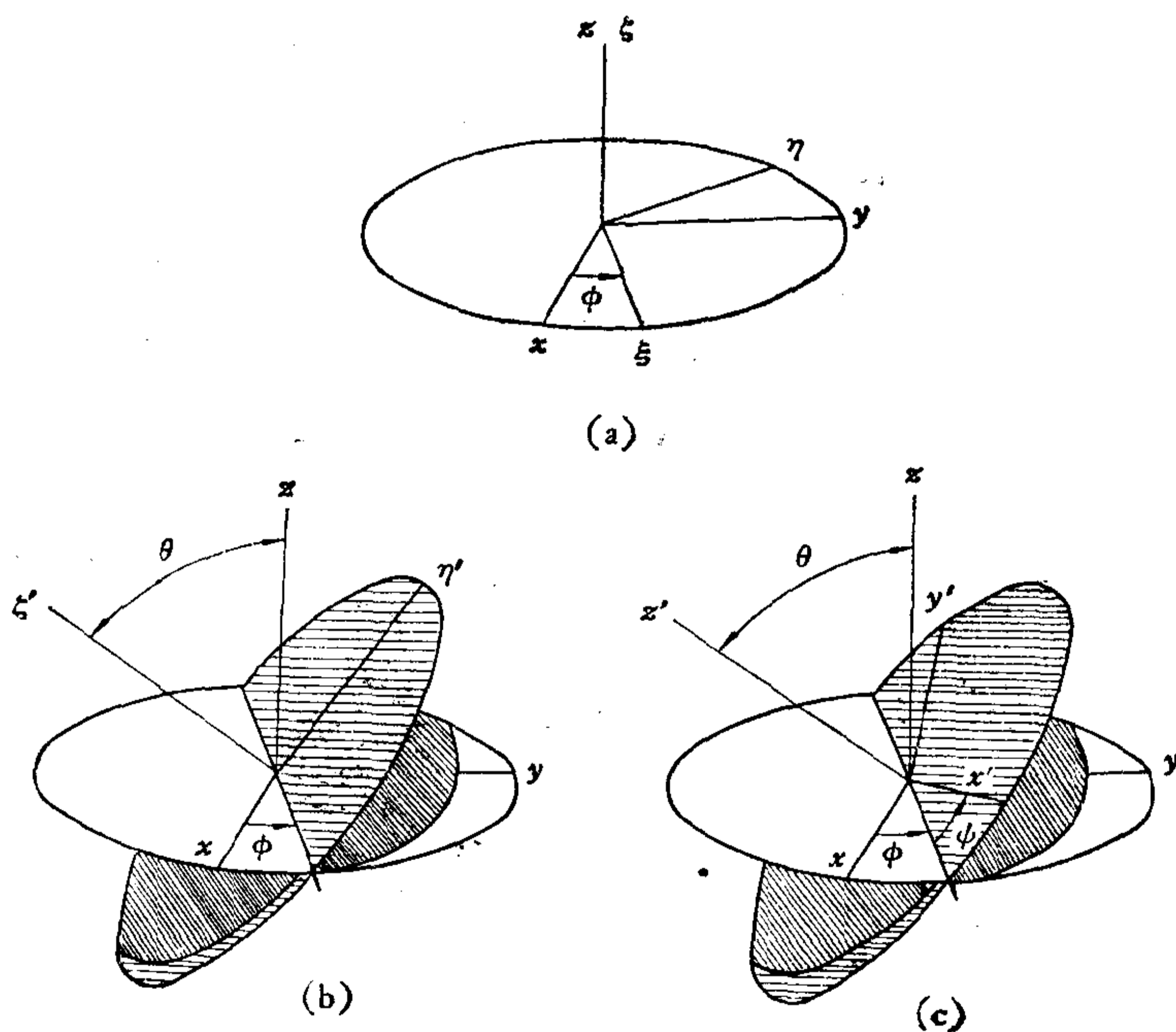


图 4-7 定义欧拉角的三次转动

按照某种特定顺序相继完成三次转动，即能实现从一个笛卡儿坐标系到另一个笛卡儿坐标系的变换。所谓欧拉角也就是这三次相继转动所转过的角度。在一定范围内，转动角的选择是任意的。但这里所遵循的主要约定在天体力学和应用力学中用得很普遍，并常被用于分子物理学和固态物理学中。其他一些约定将在以后再描述。

这里采用的转动顺序是：先把最初的坐标系 xyz 绕 z 轴逆时针转过一个 ϕ 角，得到一个以 $\xi\eta\zeta$ 轴标记的坐标系。接着再使中间轴 $\xi\eta\zeta$ 绕 ξ 轴转过一个 θ 角，以得出另一组中间轴 $\xi'\eta'\zeta'$ 。 ξ' 轴处在 xy 和 $\xi'\eta'$ 两平面的交线上，这一交线即所谓节点线。最后， $\xi'\eta'\zeta'$ 轴再绕 ζ' 轴逆时针转过一个 ψ 角。就得到所需的 $x'y'z'$ 轴系。图 4-7 说明了顺次的各步。三个欧拉角 θ, ϕ 和 ψ 完全确定了 $x'y'z'$ 系相对于 xyz 系的取向，因而能够把它作为所需的三个广义坐标¹⁾。

要得到整个变换矩阵 A 的矩阵元，只要把该矩阵表达成各别转动的三重积；每一次这样的转动都有一个相对简单的矩阵形式。例如绕 z 轴的首次转动可用矩阵 D 来描述：

$$\xi = Dx,$$

这里的 ξ 和 x 代表列矩阵。同理，从 $\xi\eta\zeta$ 到 $\xi'\eta'\zeta'$ 的变换可用矩阵 C 描述：

$$\xi' = C\xi,$$

最后，变换到 $x'y'z'$ 的转动则用矩阵 B 来描述：

$$x' = B\xi'.$$

1) 在老的文献中有些不一致，甚至在这种约定范围内也如此。差别虽不很大，但通常已使我们很难对最终公式，例如矩阵元进行比较了。最大的混乱是偶而有人使用左手坐标系引起的[如奥斯戈德 (Osgood)，又如玛吉纳和墨菲 (Margenau 和 Murphy)]。欧洲大陆的作者一般都采用这里给出的定义，只是 ϕ 和 ψ 的含义往往是互相交换的。

因此,整个变换矩阵

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

是相继三个矩阵之积,即

$$\mathbf{A} = \mathbf{BCD}.$$

已知 \mathbf{D} 变换是绕 z 轴的转动,因而它的矩阵形式为[见式(4-17)]

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4-43)$$

\mathbf{C} 变换对应于绕 ξ 轴的转动,它的矩阵形式为

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (4-44)$$

最后, \mathbf{B} 是绕 ζ' 的转动,所以它同 \mathbf{D} 的形式相同:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4-45)$$

这使矩阵积 $\mathbf{A} = \mathbf{BCD}$ 成为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & \cos \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \sin \psi & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \cos \psi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (4-46)$$

从体坐标到空间轴的逆变换

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}'$$

直接由转置矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 给出:

$$\mathbf{A}^{-1} = \tilde{\mathbf{A}}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & -\sin \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \cos \psi & \sin \theta \sin \phi \\ \cos \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \sin \psi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi & -\sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (4-47)$$

矩阵的相乘以及矩阵 \mathbf{A} 的正交性质的证明将留作习题。

应注意的是，用以确定坐标轴最终取向的转动次序在某种程度上是任意的。最初的转动可以是绕三个笛卡儿坐标中的任何一个轴转动。以后两个转动的唯一限制是决不能绕同一坐标轴相继转动。所以，总共可能有 12 种约定来确定(右手坐标系中的)欧拉角。两种最常用约定的差别，只在于第二次转动所绕坐标轴的选择的不同。上面所描述的，也是本书始终采用的欧拉角定义中，第二次转动是绕中间轴 x 转动。我们将把这种选择称为 x 约定。在量子力学、核物理学、粒子物理学中，第二次转动习惯上定为绕中间轴 y 转动¹⁾，这种形式的约定称为 y 约定。

第三种约定通常在工程技术方面应用。主要用来确定象飞机和人造卫星这些运动中的飞行器的取向。 x 约定和 y 约定都有缺点，当带撇坐标系与不带撇坐标系两者相差甚微时，就无法区别 ϕ 和 ψ 这两个角度，因为各自的转动轴 z 和 z' 这时几乎重合在一起。为了避免发生这种问题，应使三个转动绕不同轴转动。第一个先取绕竖直轴转动，用以给出航向或偏航角。第二个则绕固定在飞行器内、并垂直于图轴的垂直轴转动，用以给出飞行器的俯仰或姿态角。第三个，也是最后一个角度，则是绕飞行器图轴的转动角度，即倾侧或横倾角。由于转动涉及到所有三个轴，故又称 xyz 约定(虽然所选的坐标轴的次序实际上可能是不同的)。这最后一个约定有时称为泰特-布赖恩角。

虽然在课文中仅仅采用 x 约定，但为了参考起见，在附录 B 中同时列举了 y 约定和 xyz 约定中所有与欧拉角有关的公

1) 在 Wigner, Group Theory and Its Applications to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra 和 Rose, Elementary Theory of Angular Momentum 中的用法似乎在这方面起了决定性作用。

式,例如转动矩阵等.

4-5 凯瑞-克莱因参量和相关量

已知,要确定刚体的取向,只需要三个独立量.然而,有时也可以使用这样一些变量组,它们所含参量数超过描述转动所需的最小数目,甚至是一些不宜作为广义坐标的量.例如克莱因引进了一组用他的名字命名的四个参量,他是为了有利于求解复杂的迴转仪问题的积分才引进这些参量的.由于欧拉角涉及到大量三角函数,难于用作数值计算;而这种四元参量表示法更适宜于在计算机上进行有关计算.再说,这种四元参量组对于本书范围外、凡涉及到转动或转动对称性的那些物理学分支也有很大的理论价值.因此,花些篇幅来描述一下这种扩大了参量组似乎是值得的.但本节的结果都不会直接用于下一章对刚体运动的讨论.

在前几节中,我们有时也采用只有 x_1, x_2 轴的二维实空间来阐述正交变换的性质.现在我们将考虑一个不同的二维空间,它具有用 u 和 v 标记的复轴.这种空间内的一般线性变换为

$$\begin{aligned} u' &= \alpha u + \beta v, \\ v' &= \gamma u + \delta v, \end{aligned} \quad (4-48)$$

相应的变换矩阵为

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}. \quad (4-49)$$

由于四个元素都是复数,因此,实际上 Q 有八个待定量.为了把变换简化到只有三个量,必须对 Q 再附加一些条件.对于下面的大多数讨论,要求 Q 是一么正变换就已足够了:

$$Q^\dagger Q = I = QQ^\dagger. \quad (4-50)$$

么正条件还表明, Q 的行列式量值必定等于 1:

$$|\mathbf{Q}|^*|\mathbf{Q}| = 1. \quad (4-51)$$

写成展开的形式，式(4-50)成为方程

$$\begin{aligned} \alpha\alpha^* + \gamma\gamma^* &= 1, \\ \beta\beta^* + \delta\delta^* &= 1, \\ \alpha^*\beta + \gamma^*\delta &= 0. \end{aligned} \quad (4-52)$$

式(4-52)的前两个方程是实数，最后一个是复数，所以总共构成了四个条件。为使 \mathbf{Q} 的元素仅仅包含三个独立量，必须再加一个条件，即要求行列式严格等于+1：

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1. \quad (4-53)$$

式(4-53)是复数式，因此可认为包含有两个条件。但式(4-50)或式(4-52)所表示的那种么正性质已经确定了行列式的量值，所以式(4-53)仅仅是用来确定相角的。因此，式(4-53)所表明的条件中，只有一个条件与已经提到的么正性条件无关。行列式为+1的矩阵称为么模矩阵¹⁾。用么正的么模变换矩阵在二维复空间内所作的变换也就只涉及到三个独立量，这正好与确定刚体取向所需的数目相同。

把参量缩减为独立参量，有时也并不太难。例如，从式(4-52)的最后一式可得

$$\delta = -\alpha^* \frac{\beta}{\gamma}, \quad (4-54)$$

把此式代入行列式条件式(4-53)，即得

$$-\frac{\beta}{\gamma^*}(\alpha\alpha^* + \gamma\gamma^*) = 1.$$

式(4-52)的第一式表明，括号内的量等于1，因而

$$\beta = -\gamma^*. \quad (4-55)$$

于是，根据式(4-54)，即得

$$\delta = \alpha^*. \quad (4-56)$$

1) 这一名称并不普遍适用(甚至与字义也不完全一致)，但似乎用得广泛。

由于这四个条件[式(4-55)和(4-56)], 矩阵 Q 也能表达成

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}, \quad (4-57)$$

并附带一个保留条件[从式(4-52)的第一式或式(4-53)来推导]:

$$\alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1. \quad (4-58)$$

但我们通常宁愿把矩阵仍然表达为(4-49)的形式.

现在的 Q 仅仅被看作是二维复空间内的么正矩阵. 设 P 是这一空间内的矩阵算符, 其特定形式为

$$P = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}. \quad (4-59)$$

在数学中, x, y, z 可以简单地看成是任何三个实数量; 实际上, 将被解释为空间内某点的坐标. 假定 P 矩阵是借助 Q 矩阵来变换的, 其方式为

$$P' = QPQ^\dagger. \quad (4-60)$$

根据 Q 的么正性质, 伴矩阵 Q^\dagger 与逆矩阵 Q^{-1} 相等, 而且当 uv 空间受制于么正变换 Q 时, 方程(4-60)仅仅代表 P 的相似变换. 注意, P 是一个厄密矩阵. 其次, P 的那些对角元之和, 即矩阵的迹, 在这里等于零. 现在可以证明, 在相似变换下, 矩阵的厄密性质和矩阵的迹都不变(见本章末的习题). 因此, P' 必须同样是自伴矩阵, 并且具有零值迹, 当然, 仅当它的形式为

$$P' = \begin{pmatrix} z' & x' - iy' \\ x' + iy' & -z' \end{pmatrix} \quad (4-61)$$

时, 这一点才能成立. 式中的 x', y', z' 都是实数量. P 的行列式在相似变换式(4-60)下也是不变的, 从而可以有等式

$$|P| = -(x^2 + y^2 + z^2) = -(x'^2 + y'^2 + z'^2) = |P'|.$$

这个说法将看作是正交条件; 它要求矢量 $\mathbf{r} = xi + yj + zk$

的长度不受变换的影响。所以，对于二维复空间内的每一个么正矩阵 Q ，总有一个普通三维空间内的实正交变换与它相关联。

根据下述考虑可看出这种关联的性质。设从坐标 x 变换到 x' 的实正交矩阵为 B ：

$$x' = Bx,$$

与之相关联的么正矩阵为 Q_1 ，它满足关系式

$$P' = Q_1 P Q_1^\dagger.$$

从 x' 到 x'' 的第二次正交变换可以用矩阵 A 来完成，即

$$x'' = Ax',$$

相关的矩阵 Q_2 为

$$P'' = Q_2 P' Q_2^\dagger.$$

已知，从 x 到 x'' 的直接变换由矩阵 C 产生，它定义为

$$C = AB.$$

与此相对应，从 P 到 P'' 的直接变换将由某个矩阵 Q_3 的相似变换来实现，所以 Q_3 必定与 C 相关联。然而，我们也可从

$$P'' = Q_2 Q_1 P Q_1^\dagger Q_2^\dagger$$

得到从 P 到 P'' 的变换。不难证明，

$$Q_1^\dagger Q_2^\dagger = (Q_2 Q_1)^\dagger.$$

由于两个么正矩阵的乘积也是么正的，所以 Q_3 必定与乘积 $Q_2 Q_1$ 全等：

$$Q_3 = Q_2 Q_1.$$

因此， 2×2 复么正矩阵与 3×3 实正交矩阵之间的对应关系为：一组矩阵之间的任何关系式必定也为另一组相应矩阵所满足。这样两组矩阵称为是同形的。到目前为止，有关 Q 矩阵与正交变换之间关系的论证只涉及到 Q 矩阵的么正性质。由于一个 2×2 复么正矩阵有四个独立量，因而，对应于相同的正交变换有许多个可能的 Q 矩阵。 Q 的行列式等于 1 这

一附加条件，使等效的 \mathbf{Q} 矩阵的相乘简化到只有一对矩阵。另外还将发现，对么模性质的要求限制了正交变换与 $+1$ 行列式的联系。

群论的数学“行话”也常被用来描述具有这种对应关系的这样两类矩阵，特别是近年来更是如此。不难证明(见习题)，实正常正交矩阵以及复么模矩阵都具有“群的性质”。 3×3 实正常正交矩阵群记为 $O^+(3)$ ，其上标“+”号代表行列式的符号¹⁾。 2×2 复么正么模矩阵群相应地记为 $SU(2)$ (特殊么正)。因此，上面所推导得的对应性也就是 $O^+(3)$ 群与 $SU(2)$ 群之间的对应性。

我们可以用同形 \mathbf{Q} 矩阵的矩阵元来表示正交矩阵的矩阵元。根据式(4-55)和(4-56)， \mathbf{Q} 的伴矩阵为

$$\mathbf{Q}^\dagger = \begin{pmatrix} \alpha^* & \gamma^* \\ \beta^* & \delta^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}.$$

为了简化计算，我们将引进如下定义的简略符号 x_+ 和 x_- ：

$$x_+ = x + iy, \quad x_- = x - iy.$$

这样，变换矩阵 \mathbf{P}' 能够写成

$$\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} z' & x'_- \\ x'_+ & -z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & x_- \\ x_+ & -z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix},$$

或者把所示的乘法计算全部算出来，即得

$$\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} (\alpha\delta + \beta\gamma)z - \alpha\gamma x_- + \beta\delta x_+ & -2\alpha\beta z + \alpha^2 x_- - \beta^2 x_+ \\ 2\gamma\delta z - \gamma^2 x_- + \delta^2 x_+ & -(\alpha\delta + \beta\gamma)z + \alpha\gamma x_- - \beta\delta x_+ \end{pmatrix}. \quad (4-62)$$

让两式中的对应矩阵元相等，则带撇和不带撇坐标系之间的变换方程可以表达成

1) 符号 $SO(3)$ —— S 代表特殊意思——常用来表示 $O^+(3)$ 。

$$\begin{aligned}
 x'_+ &= 2\gamma\delta z & -r^2x_- + \delta^2x_+, \\
 x'_- &= -2\alpha\beta z & +\alpha^2x_- - \beta^2x_+, \\
 z' &= (\alpha\delta + \beta\gamma)z & -\alpha\gamma x_- + \beta\delta x_+.
 \end{aligned}
 \tag{4-63}$$

最后,把式(4-63)与通常所用的变换方程(4-14)相比较,能用 α, β, γ 和 δ 得出矩阵元 a_{ij} . 因此式(4-63)的最后一个式子可以写成

$$z' = (\beta\delta - \alpha\gamma)x + i(\alpha\gamma + \beta\delta)y + (\alpha\delta + \beta\gamma)z,$$

由此立即可得

$$a_{31} = (\beta\delta - \alpha\gamma), \quad a_{32} = i(\alpha\gamma + \beta\delta), \quad a_{33} = \alpha\delta + \beta\gamma.$$

用这个办法,不难得到完全的变换矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\alpha^2 - r^2 + \delta^2 - \beta^2) & \frac{i}{2}(r^2 - \alpha^2 + \delta^2 - \beta^2) & r\delta - \alpha\beta \\ \frac{i}{2}(\alpha^2 + r^2 - \beta^2 - \delta^2) & \frac{1}{2}(\alpha^2 + r^2 + \beta^2 + \delta^2) & -i(\alpha\beta + r\delta) \\ \beta\delta - \alpha\gamma & i(\alpha\gamma + \beta\delta) & \alpha\delta + \beta\gamma \end{pmatrix}.$$

(4-64)

方程(4-64)提供了一个确定刚体取向的矩阵,它完全用 α, β, γ 和 δ 来表示. 因而象欧拉角一样,这四个量提供了某种确立物体取向的途径,习惯上称它们为凯瑞-克莱因参量¹⁾. 当然,四个复数量由关系式(4-55), (4-56)和行列式条件(4-58)联结在一起. 要证明式(4-64)中 \mathbf{A} 的矩阵元的实数性质,可以直接借助于式(4-55)和(4-56)把 α 和 β 用它们的实数部分和虚数部分明显地写成

$$\alpha = e_0 + ie_3, \quad \beta = e_2 + ie_1. \tag{4-65}$$

(为什么选择这些显得有点特别的符号,往后将会搞清楚的,

1) 式(4-64)与惠特克著作第12页中所给出的相应形式并不一致,主要由于矩阵 \mathbf{P} 的最初选择不同. 显然,建立一个行列式为 $-r^2$ 的矩阵的方法有许多种,特殊的选择一般是出于习惯,这里选用式(4-59)是为了同量子力学中的用法相一致.

参阅第 194 页)用这四个实数量来表示,行列式条件方程(4-58)成为

$$e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1. \quad (4-66)$$

经小量的代数运算就能证明,式(4-64)给出的矩阵 \mathbf{A} 可以用四个实数参量写成

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} e_0^2 + e_1^2 - e_2^2 - e_3^2 & 2(e_1e_2 + e_0e_3) & 2(e_1e_3 - e_0e_2) \\ 2(e_1e_2 - e_0e_3) & e_0^2 - e_1^2 + e_2^2 - e_3^2 & 2(e_2e_3 + e_0e_1) \\ 2(e_1e_3 + e_0e_2) & 2(e_2e_3 - e_0e_1) & e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 + e_3^2 \end{pmatrix}. \quad (4-67)$$

矩阵元的实数性质就不言自明了¹⁾. 还容易证明,用这种参量表示的矩阵 \mathbf{A} 不可能表达成反演变换 \mathbf{S} 的形式. 对非对角元以及它们的转置元素的研究证明,只有在至少三个参量为零时,它们才能全部为零. 所以在选择余下的那个非零参量时,不能使所有三个对角元(或只是其中之一)都等于 -1 . 因此式(4-64)或(4-67)所表示的 \mathbf{A} 不可能描述坐标反演或任何非正常正交变换.

我们把式(4-64)中的各个元素直接同借助于 ϕ , θ 和 ψ 表示的那些元素相比较,能够用相应的欧拉角来表示凯瑞-克莱因参量. 然而,比较简单并且更有启发意义的做法是首先构成与定义欧拉角的相继各次转动相对应的 \mathbf{Q} 矩阵,然后再把它们组合成完全矩阵. 例如, ϕ 角是用绕 z 轴的一次转动来定义的,所以用 x_+ , x_- 和 z 来表示的变换为

$$x'_+ = e^{-i\phi}x_+, \quad x'_- = e^{i\phi}x_-, \quad z' = z.$$

把这些方程与式(4-63)相比,可清楚地看出,对于这种简单转动, \mathbf{Q} 的矩阵元的形式必然是

$$\gamma = \beta = 0, \quad \alpha^2 = e^{i\phi}, \quad \delta^2 = e^{-i\phi}$$

1) e_0, e_1, e_2, e_3 这四个实数参量(或其他各种略为不同的参量)在文献中有时也称作凯瑞-克莱因参量,但从历史上较合适的用法看来还是把它们称为**欧拉参量**.

或

$$Q_\phi = \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix}. \quad (4-68)$$

由此可知, 这些矩阵元自动地满足条件(4-55), (4-56)和式(4-58).

下一步(遵循 x 约定的)转动是绕新的 x 轴逆时针转过 θ 角, 相应的矩阵元则以类似方式来确定, 但计算相当复杂. 这里将直接说明相应的 Q 矩阵为

$$Q_\theta = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & i \sin \frac{\theta}{2} \\ i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (4-69)$$

为了便于核查, 可以直接证明

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & i \sin \frac{\theta}{2} \\ i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & x_- \\ x_+ & -z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -i \sin \frac{\theta}{2} \\ -i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z \cos \theta - y \sin \theta & x - i(y \cos \theta + z \sin \theta) \\ x + i(y \cos \theta + z \sin \theta) & -z \cos \theta + y \sin \theta \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

此式导致所要求的变换

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y \cos \theta + z \sin \theta, \\ z' &= -y \sin \theta + z \cos \theta. \end{aligned}$$

最后, 定义 ψ 的转动是绕 z 轴的转动, 所以

$$Q_\psi = \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix}. \quad (4-70)$$

在节 4-4 中, 完全变换的正交矩阵分别是对应于三次转动的三个矩阵之乘积. 从 3×3 实正交矩阵与 Q 矩阵的同形性可

知, 完全变换 Q 同样可由三个转动矩阵 Q_ψ, Q_θ, Q_ϕ 的乘积表示:

$$Q = Q_\psi Q_\theta Q_\phi = \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & i \sin \frac{\theta}{2} \\ i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix},$$

或

$$Q = \begin{pmatrix} e^{i(\psi+\phi)/2} \cos \frac{\theta}{2} & i e^{i(\psi-\phi)/2} \sin \frac{\theta}{2} \\ i e^{-i(\psi-\phi)/2} \sin \frac{\theta}{2} & e^{-i(\psi+\phi)/2} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (4-71)$$

因此, 用欧拉角表示的凯瑞-克莱因参量为

$$\begin{aligned} \alpha &= e^{i(\psi+\phi)/2} \cos \frac{\theta}{2}, & \beta &= i e^{i(\psi-\phi)/2} \sin \frac{\theta}{2}, \\ \gamma &= i e^{-i(\psi-\phi)/2} \sin \frac{\theta}{2}, & \delta &= e^{-i(\psi+\phi)/2} \cos \frac{\theta}{2}, \end{aligned} \quad (4-72)$$

至此证毕. 四个实数欧拉参量的欧拉角表示式直接由式 (4-72) 提供:

$$\begin{aligned} e_0 &= \cos \frac{\phi + \psi}{2} \cos \frac{\theta}{2}, & e_2 &= \sin \frac{\phi - \psi}{2} \sin \frac{\theta}{2}, \\ e_1 &= \cos \frac{\phi - \psi}{2} \sin \frac{\theta}{2}, & e_3 &= \sin \frac{\phi + \psi}{2} \cos \frac{\theta}{2}. \end{aligned} \quad (4-72')$$

附录 B 中列举了用其他约定中定义的欧拉角来表示的凯瑞-克莱因参量和欧拉参量的相应公式.

可以看到, P 矩阵可以写成三个零迹矩阵之和:

$$P = x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3, \quad (4-73)$$

式中的 σ_1, σ_2 和 σ_3 是三个所谓泡利自旋矩阵:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

这三个矩阵能够方便地看作是构成某个矢量的三个分量¹⁾, 从而式(4-73)能紧凑地用符号写成

$$\mathbf{P} = \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (4-73')$$

再加上单位矩阵

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

即泡利自旋矩阵, 就组成一组四个独立矩阵. 结果, 任何包含四个独立量的 2×2 矩阵都可以表示成它们的线性函数. 因此, 用欧拉参量表示的 \mathbf{Q} 矩阵能写成

$$\mathbf{Q} = e_0 1 + i(e_1 \sigma_1 + e_2 \sigma_2 + e_3 \sigma_3), \quad (4-74)$$

这一形式解释了选择这些参量符号的理由²⁾. 我们能够用这些 σ 以一种特别简单的形式来表示绕某坐标轴的转动的相应矩阵 \mathbf{Q} . 例如, 对应于绕 x 轴转动的 \mathbf{Q}_θ , 即式(4-69)可写成

$$\mathbf{Q}_\theta = 1 \cos \frac{\theta}{2} + i \sigma_1 \sin \frac{\theta}{2}. \quad (4-75)$$

同样, 对应于绕 z 轴转动的矩阵 \mathbf{Q}_ϕ 的形式为

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_\phi &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\phi}{2} + i \sin \frac{\phi}{2} & 0 \\ 0 & \cos \frac{\phi}{2} - i \sin \frac{\phi}{2} \end{pmatrix} \\ &= 1 \cos \frac{\phi}{2} + i \sigma_3 \sin \frac{\phi}{2}. \end{aligned} \quad (4-76)$$

-
- 1) 采用这种记号只是为了方便, 当然, 各别矩阵并不是作为位形空间内的矢量分量来变换的. 事实上, 它们必须对于所有笛卡儿空间坐标系都有相同的表示式, 否则式(4-73)就不成立.
 - 2) 熟悉陈旧数学的行家将会看出(4-74)形式的 \mathbf{Q} 表示式就是矩阵**四元数**, 它是哈密顿爵士于1843年构想出来的一个量. 这里的 e_0 是(四元数)标量, 括号内的量则是四元数的矢量.

还可以直接证明,绕 y 轴的转动具有与式 (4-76) 相同的矩阵形式,只是 σ_3 为 σ_2 所代替而已. 因而所有这些基本转动矩阵都可用仅含单位矩阵和相应 σ 矩阵的类似表达式来表示. 每一个泡利自旋矩阵总是与绕某一特定轴的转动相关联的,并可看作是关于该轴的单位转子.

利用泡利自旋矩阵的乘法运算性质能够证明(见习题13)由式 (4-75) 给出的基本转动矩阵 Q_θ 也能用符号表达成

$$Q_\theta = e^{i\sigma_1(\theta/2)}. \quad (4-77)$$

式中矩阵的指数是这个指数的级数表示式的速记,其首项是单位矩阵 I . 由此可知,如果 B 是厄密矩阵,则

$$A = e^{iB}$$

就是么正的(见习题 12). 由于泡利自旋矩阵明显是厄密的,所以 Q 矩阵的么正条件显然是满足的.

凯瑞-克莱因参量和用它们表示的矩阵的特征是它们都包含有半角,这给 uv 空间带来了某些特殊性质. 例如,在普通空间中绕 z 轴转过 2π 角度仅仅再现原来的坐标系. 因此,如果在前一节的 D 矩阵中让 ϕ 等于 2π , 则

$$\cos \phi = 1, \quad \sin \phi = 0,$$

D 将严格地成为对应于恒等变换的单位矩阵 I . 另一方面,如果在 Q_ϕ 的表达式 (4-68) 中作相同的代换,即得

$$Q_{2\pi} = \begin{pmatrix} e^{i\pi} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

它是 $-I$ 而不是 I . 同时, 2×2 矩阵必定也对应于三维恒等变换. 因而有两个 Q 矩阵 (I 和 $-I$) 对应于 3×3 单位矩阵. 一般地讲,如果矩阵 Q 对应于某个实正交矩阵,则 $-Q$ 也对应于相同的矩阵. 因而在这种情况下,两组矩阵之间的同形性包含着单个的 3×3 矩阵和矩阵对 $(Q, -Q)$ 之间、而不是个别矩阵之间的一一对应性,或同构性. 就这种意义来

讲, Q 矩阵是相应三维正交矩阵的双值函数。

这种似非而是的情况与我们的常识不会发生矛盾。如同这里所指出的, uv 空间完全是一种数学结构, 仅是为了建立 3×3 和某种 2×2 矩阵之间的对应性才设想出来的。人们不会、也不可能要求这种空间会具有与实际三维空间相同的性质。数学家对 uv 空间的性质已经给与相当重视, 并把空间内二维复矢量记为旋量。结果表明, 在量子力学中, 旋量空间与物理的实在性比较接近, 因为要包括电子的“自旋”效应, 波函数的全部或部分就必须构成这种旋量。的确, 半角和由它引起的双值性质都密切地与自旋的半整数特征相关联¹⁾。但是继续深入讨论这个课题显然将使我们越出经典力学的范畴。

4-6 关于刚体运动的欧拉定理

— 前几节的讨论提供了描述刚体运动的完整的数学技巧。物体在任何时刻的取向可用一个正交变换来确定, 这个变换的元素可用某组合合适的参量来表示。取向将随时间的推移而改变, 因此变换矩阵是时间的函数, 并记为 $A(t)$ 。如果所选体轴系在 $t = 0$ 时刻与空间坐标轴相重合, 则最初的变换是一简单的恒等变换:

$$A(0) = I,$$

在往后各时刻, $A(t)$ 一般是不同于恒等变换的。但由于实际

1) 虽然波函数在转动下可能是双值的, 但是所有实际上可以观测的量当然是保持单值的。转过两整转, 即转过 4π 的这种转动必定对应于 Q^2 , 并且它总是一个单位矩阵 $+I$ 。狄拉克已指出了相应的拓扑学奇特性, 一根扭曲两整转的丝带能够解开, 即恢复到原来的状态而不需要再次转动。但是, 仅扭曲一整转的丝带则不可能解开! (见 M. Gardner. *New Mathematical Diversions from Scientific American* (St. Louis, Missouri: Fireside, 1971, 第二章, 还可参阅 *Scientific American*, Dec. 1959, p. 166.)

运动必定是连续的,所以 $A(t)$ 也必定是时间的连续函数。因而可以说,变换是从恒等变换开始连续地演化发展的。

有了这种描述运动的方法,就可以仅仅用已有数学工具来揭示刚体运动的重要特性。具有基础性意义的是所谓欧拉定理:有一固定点的刚体的一般位移是绕某一轴线的转动。

如果把体轴系原点作为固定点,则刚体的位移不会包含体轴系的平移,而只涉及取向的变化。于是,根据欧拉定理可知,由初始时刻的体坐标轴(取得与空间系重合)作一单纯的转动,能够得到任何 t 时刻的体坐标轴。换言之,用矩阵 A 描述刚体实际运动的运算为一转动。已知,转动有一特征,就是它的方向,比如说,转轴的方向是不受运算的影响的。因此,沿转动轴的任何矢量,在初始轴和最终轴上的分量必定相同。关于转动的另一必要条件,即矢量量值不应受影响这一点则由于正交条件而自然得到满足。所以,如果能够证明某个矢量 R 在两个系统中具有相同的分量,也就证明了欧拉定理。对矢量施用矩阵符号,上述说法成为

$$R' = AR = R. \quad (4-78)$$

式(4-78)构成了更为一般的方程

$$R' = AR = \lambda R \quad (4-79)$$

的一种特殊情况,式中的 λ 是一个可能是复数的某个常数。那些使式(4-79)为可解的 λ 值称为矩阵的特征值,或本征值¹⁾。探求满足式(4-79)的矢量的问题也就叫做给定矩阵的本征值问题,方程本身称为本征值方程。那些矢量解则相应地称为 A 的本征矢。于是欧拉定理可以重述如下:

若刚体有一固定点,则确定其实际运动的实正交矩阵必定具有本征值 $+1$ 。

1) 这个词是从德文 *eigenwerte* 演化而来的,原意是“固有值”。

本征方程 (4-79) 可以写成

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{R} = 0, \quad (4-80)$$

或者把它展开成

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)X + a_{12}Y + a_{13}Z &= 0, \\ a_{21}X + (a_{22} - \lambda)Y + a_{23}Z &= 0, \\ a_{31}X + a_{32}Y + (a_{33} - \lambda)Z &= 0. \end{aligned} \quad (4-81)$$

式 (4-81) 包含有本征矢 \mathbf{R} 的 X, Y, Z 分量的一组三个齐次联立方程。然而, 这些方程决不会提供这三个分量的确定值, 只能给出各分量间的比值。这实际上相当于只能确定本征矢的方向、而其量值依然无法确定的情况。本征矢与常数的乘积仍是一个本征矢。式 (4-81) 在任何情况下都是齐次方程, 如果有解, 系数行列式必须为零:

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (4-82)$$

式 (4-82) 称为矩阵的特征方程或久期方程。满足方程的那些 λ 值就是所要求的本征值。所以, 欧拉定理又可归纳成下述说法: 对于所考虑的实正交矩阵, 久期方程必定有一个 $\lambda = +1$ 的根。

久期方程一般有三个根, 因而有三个相应的本征矢。为了方便起见, 常用 X_1, X_2, X_3 代替 X, Y, Z 。用这种记号的本征矢分量可以记为 X_{ik} 。第一个下标表明特定的分量, 第二个下标表明三个本征矢中涉及到的那个本征矢。于是, 方程组 (4-81) 中具有代表性的方程可以写成

$$\sum_j a_{ij} X_{jk} = \lambda_k X_{ik},$$

或者改写成

$$\sum_j a_{ij} X_{jk} = \sum_j X_{ij} \delta_{jk} \lambda_k. \quad (4-83)$$

式(4-83)两边都具有矩阵乘积元素的形式, 左边是 \mathbf{A} 与元素为 X_{jk} 的矩阵 \mathbf{X} 的乘积, 右边是 \mathbf{X} 与第 j 个元素为 $\delta_{jk}\lambda_k$ 的矩阵的乘积. 最后那个矩阵是对角矩阵, 它的对角元是 \mathbf{A} 的本征值. 所以我们将把这个矩阵记为 λ :

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (4-84)$$

而式(4-83)也就是矩阵方程

$$\mathbf{AX} = \mathbf{X}\lambda,$$

或者用 \mathbf{X}^{-1} 左乘两边, 即得

$$\mathbf{X}^{-1}\mathbf{AX} = \lambda. \quad (4-85)$$

现在, 左边具有作用于 \mathbf{A} 的相似变换的形式 [只要用符号 \mathbf{Y} 来记 \mathbf{X}^{-1} 就可将它化成式(4-41)的形式]. 因此, 式(4-85)提供了通向本征值问题的另一条途径: 试用一个相似变换来使 \mathbf{A} 对角化. 能实现这一变换的矩阵的每一列都由一个本征矢的分量所组成. 对角化形式的 \mathbf{A} 的那些元素则是相应的本征值.

利用 $\tilde{\mathbf{A}}$ 的正交性质即能直接证明欧拉定理. 考虑表达式

$$(\mathbf{A} - \mathbf{1})\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{1} - \tilde{\mathbf{A}}.$$

如果取构成两边的矩阵的行列式(见节4-3末), 即能写出等式

$$|\mathbf{A} - \mathbf{1}| |\tilde{\mathbf{A}}| = |\mathbf{1} - \tilde{\mathbf{A}}|. \quad (4-86)$$

为了描述刚体运动, 矩阵 $\mathbf{A}(t)$ 必须对应于真正的转动, 所以 \mathbf{A} 及其转置矩阵的行列式必须等于 +1. 其次, 由于一个矩阵的转置矩阵的行列式与该矩阵的行列式一般是相同的, 所以式(4-86)中的转置号可以去掉:

$$|\mathbf{A} - \mathbf{1}| = |\mathbf{1} - \mathbf{A}| \quad (4-87)$$

式(4-87)表明, 特定矩阵的行列式与它的负矩阵的行列式相

同。设 \mathbf{B} 是某个 $n \times n$ 矩阵。则行列式的熟悉的性质是

$$|-\mathbf{B}| = (-1)^n |\mathbf{B}|.$$

由于我们是与三维空间 ($n = 3$) 打交道, 显然, 要式 (4-87) 对于任意正常转动都能成立, 应该有

$$|\mathbf{A} - \mathbf{1}| = 0. \quad (4-88)$$

把式 (4-88) 与久期方程 (4-82) 相比, 可以看出, 满足式 (4-82) 的本征值之一必定始终等于 $\lambda = +1$, 这正是欧拉定理所要求的结果。

从这里还可看出, 在证明欧拉定理时, 强调所论空间的维数是重要的。在偶数维空间内, 式 (4-87) 对于所有矩阵都是一个恒等式, 欧拉定理不再适合。例如, 在二维情况下, 空间内不会有转动后依然不变的矢量——转轴垂直于平面, 因而越出了该空间。

现在来确定三维空间内其他本征值的性质就比较简单。用 λ_3 表示 $+1$ 本征值。任何矩阵的行列式都不会受到相似变换的影响(见节 4-3 末)。因此, 根据式 (4-84) 和 (4-85) 以及作为正常转动的 \mathbf{A} 的性质, 有

$$|\mathbf{A}| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \lambda_1 \lambda_2 = 1. \quad (4-89)$$

其次, 由于 \mathbf{A} 是一个实矩阵, 所以如果 λ 是久期方程 (4-82) 的解, 则其复共轭 λ^* 也必定是该方程的解。

如果给定的本征值 λ_i 是复数, 则满足式 (4-79) 的相应本征矢 \mathbf{R}_i 一般也是一个复数。我们在前面还未论及(实)正交变换下复矢量的性质, 而且对于前面的定义还要作某些修正。复矢量 \mathbf{R} 的长度(或量值)的平方等于 $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^*$, 或者用矩阵符号表示则为 $\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{R}^*$, 这里加在左边矢量上的转置号表明它是由行矩阵代表的。在实正交变换下, 量值的平方不变, 即

$$\tilde{\mathbf{R}}'\mathbf{R}'^* = (\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{R})\mathbf{A}\mathbf{R}^* = \tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{A}\mathbf{R}^* = \tilde{\mathbf{R}}\mathbf{R}^*.$$

今假定 \mathbf{R} 是一个对应于复本征值 λ 的复本征矢, 则根据式

(4-79)

$$\tilde{R}'R^* = \lambda\lambda^*\tilde{R}R^*,$$

这就导致结论：所有本征值的量值都等于 1：

$$\lambda\lambda^* = 1. \quad (4-90)$$

从这些性质可以推断出有三种可能的本征值分布。如果所有本征值都是实数，则只有两种可能情况：

1. 所有本征值都是 +1。因而变换矩阵正好是 I ，这种情况严格地说是毫无意义的。

2. 有一个本征值为 +1，而另外两个为 -1。这种变换可以看作是两个坐标轴在第三轴不变情况下的一次反演。也可以说是绕不变轴方向转过 2π 角度的一次转动。

如果本征值不全是实数，那么，只有一种另外的可能性，即

3. 一个本征值为 +1，而另外两个则互为复共轭，形式分别为 $e^{i\phi}$ 和 $e^{-i\phi}$ 。

欧拉定理的更完整的说法是：任何有价值的实正交矩阵有一个，也只有一个本征值等于 +1。

在本征值方程 (4-81) 中，令 $\lambda = 1$ 并解出 X, Y 和 Z ，能得到转动轴的方向余弦¹⁾。转动角同样也不难求得。通过某一相似变换，总有可能把矩阵 A 变换到 z 轴沿着转动轴的某一坐标系。在这种坐标系中， A' 代表绕 z 轴的转动，转过的角度为 ϕ ，由此可得

$$A' = \begin{pmatrix} \cos \Phi & \sin \Phi & 0 \\ -\sin \Phi & \cos \Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A' 的迹则等于

1) 如果久期方程有多重根，就不能这样简单地求得相应本征矢 (见节 5-4 和节 6-2)。的确，不是总有可能使一个一般矩阵完全对角化的，如果那些本征值不是完全不同的话。这些例外情况对于目前的考虑并不重要，因为欧拉定理表明，所有有价值的正交矩阵的单值根都等于 +1。

$$1 + 2 \cos \Phi.$$

由于迹在相似变换下始终不变,所以关于任何初始坐标系, \mathbf{A} 的迹必须具有相同的形式:

$$\text{Tr } \mathbf{A} = a_{ii} = 1 + 2 \cos \Phi, \quad (4-91)$$

此式用矩阵元给出了转动角 Φ 的量值. 当本征值之和正好等于对角形式 (4-84) 的 \mathbf{A} 的迹时, 转动角 Φ 也与复本征值 λ 的相角相等. 根据欧拉定理和本征值的性质, 所说之和为

$$\text{Tr } \mathbf{A} = \sum_i \lambda_i = 1 + e^{i\Phi} + e^{-i\Phi} = 1 + 2 \cos \Phi.$$

可以看出, 本征值都是实数的情况, 实际上是具有复数本征值的 \mathbf{A} 的特殊情况. 所有等于 $+1$ 的 λ_i 都与零值转动角 Φ 相对应(恒等变换); 而两个本征值为 -1 的情况, 则与 $\Phi = \pi$ 相对应, 正象前面所看到的那样.

转轴方向和转动角的选定并不是唯一的. 显然, 如果 \mathbf{R} 是一个本征矢, 则 $-\mathbf{R}$ 也是一个本征矢, 因此转轴方向并不唯一地确定. 其次, 如果 Φ 满足式 (4-91), 则 $-\Phi$ 也同样满足. 的确, 本征值解显然不会唯一地确定正交变换矩阵 \mathbf{A} . 从行列式久期方程 (4-82) 可知, 逆矩阵 $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$ 具有与 \mathbf{A} 相同的本征值和本征矢. 然而, 只要用 Φ 代 \mathbf{A} 、用 $-\Phi$ 代 \mathbf{A}^{-1} , 并根据右手螺旋法则来确定转轴的方向, 这类不明确性至少可以得到改善.

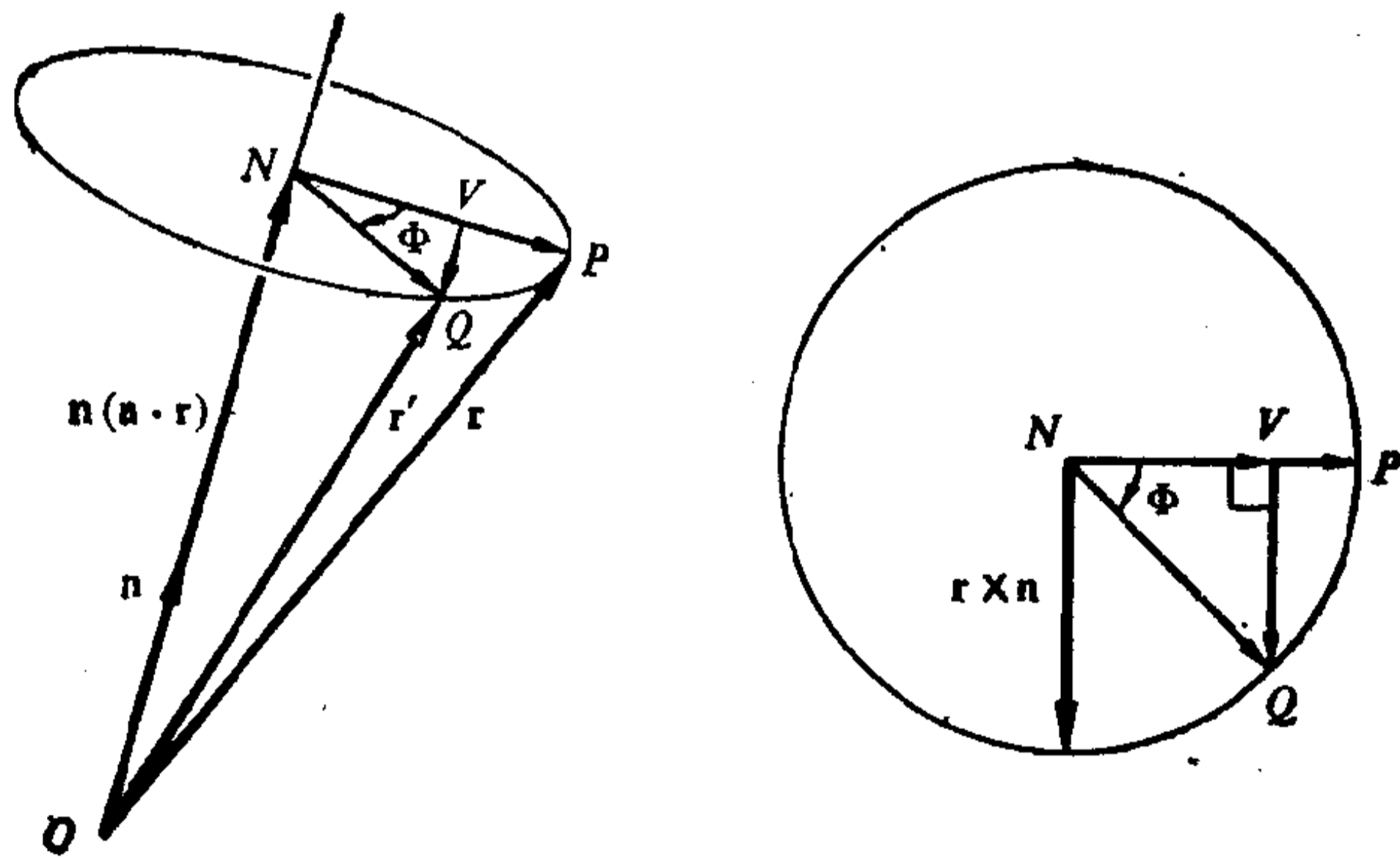
最后应指出, 欧拉定理有一直接的推论, 即所谓蔡斯尔 (Chasle) 定理: 刚体的最一般位移是平动加转动. 这一定理毋须详细证明. 简单地说, 只要去掉具有一个固定点这一运动约束, 即能引进体轴系原点的三个平动自由度¹⁾.

1) 蔡斯尔 (1793—1881) 还证明了该定理的一种更强的形式, 即有可能把体轴系的原点选得使平动方向正好与转轴方向相同. 这种平动与转动的结合称作螺旋运动. 现在似乎很少用到这种形式的蔡斯尔定理, 也不大会去应用十九世纪精心发展起来的螺旋运动的数学. 见 Routh, *Elementary Dynamics of a Rigid Body*, 5th ed. (London; Macmillan, 1891), pp.194—198.

4-7 非无限小转动

我们已经用各种表达方式描述了具有公共原点的两个笛卡尔坐标系的相对取向，包括使一个坐标系变换到另一个坐标系的三个相继转过的欧拉角。前一节已证明，坐标变换能够通过绕一适当方向的单个转动来实现。这就自然要去寻找一种用转动参量，即转动角度和转轴方向余弦表示的坐标变换表示式。

借助某种简单的矢量代数，可以推导得这种表示式。为此，方便的做法是论述主动意义上的变换，即在一个固定坐标系中来转动矢量的那种变换(见节 4-2 末)。应该记得，坐标系的逆时针转动表现为矢量的顺时针转动。在图 4-8(a) 中，矢量的初始位置 \mathbf{r} 记为 \overrightarrow{OP} ，最终位置 \mathbf{r}' 记为 \overrightarrow{OQ} ，而沿转轴的单位矢量记为 \mathbf{n} 。 O 和 N 之间的距离的量值为 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}$ ，所以矢量 \overrightarrow{ON} 能写成 $\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})$ 。图 4-8(b) 是与转轴垂直的平面内的矢量平面图。矢量 \overrightarrow{NP} 也能描述为 $\mathbf{r} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})$ ，但



(a) 整体图

(b) 与转轴垂直的平面

图 4-8 推导转动公式的矢量图

它的量值与矢量 NQ 和 $\mathbf{r} \times \mathbf{n}$ 的量值相同。为了得到 \mathbf{r}' 和 \mathbf{r} 之间的关系式,我们把 \mathbf{r}' 表达为三个矢量之和:

$$\mathbf{r}' = ON + NV + VQ$$

或

$$\mathbf{r}' = \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) + [\mathbf{r} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})] \cos \Phi + (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \sin \Phi.$$

把各项稍为整理一下,最后结果为

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} \cos \Phi + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})[1 - \cos \Phi] + (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \sin \Phi. \quad (4-92)$$

式(4-92)称为转动公式¹⁾。要强调的是,式(4-92)对任何转动,不论其量值为多大都成立,因而是第69页上有关无限小转动下矢量变化的描述用于有限转动(顺时针转动)情况时的另一种形式(也可参阅 p.200)。

引进标量 e_0 和分量为 e_1, e_2, e_3 的矢量 \mathbf{e} , 转动公式(4-92)能表达成更为有用的形式, e_0 和 \mathbf{e} 分别定义为

$$e_0 = \cos \frac{\Phi}{2}, \quad \mathbf{e} = \mathbf{n} \sin \frac{\Phi}{2}. \quad (4-93)$$

这四个量之间的关系决定于条件

$$e_0^2 + e^2 = e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1. \quad (4-94)$$

由此可得, Φ 的三角函数能表达成

$$\cos \Phi = 2e_0^2 - 1 = e_0^2 - e^2 = e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 - e_3^2 \quad (4-95)$$

以及

$$\mathbf{n} \sin \Phi = 2e_0 \mathbf{e}.$$

借助于这些结果并稍加演化,式(4-92)可表达成

1) 显然,它没有用人名命名。Hamel (Theoretische Mechanik, p. 103) 把它归功于法国数学家 O. Rodrigues (1794—1851), 但这可能是一个误会。推测起来,也许是 Gibbs 首先把它表达成矢量形式 (Vector Analysis, p. 338), 但原先的公式要古老得多。

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}(e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 - e_3^2) + 2\mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}) + 2(\mathbf{r} \times \mathbf{e})e_0. \quad (4-96)$$

式(4-96)表明, \mathbf{r}' 的分量是 \mathbf{r} 的分量的线性函数, 事实上, 这是与转动正交矩阵 \mathbf{A} 相对应的线性变换方程的矢量形式. 只要用那些 e 把式(4-96)对各个 x'_i 展开, 并推断出 x_i 的那些系数, 就可以求得矩阵元 a_{ij} . 例如, 根据式(4-96), x' 与 x, y 和 z 的关系为

$$x' = x(e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 - e_3^2) + 2e_1(e_1x + e_2y + e_3z) + 2(ye_3 - ze_2)e_0,$$

因此得

$$\begin{aligned} a_{11} &= e_0^2 + e_1^2 - e_2^2 - e_3^2, \\ a_{12} &= 2(e_1e_2 + e_0e_3), \\ a_{13} &= 2(e_1e_3 - e_0e_2). \end{aligned}$$

与式(4-67)中的矩阵形式比较表明, 与那里所给出的矩阵元完全一致. 因此, 由式(4-93)定义的那些 e 恒等于节4-5中引进的欧拉参量 (这正是选用这些符号的原因). 式(4-94)也就与行列式条件(4-66)相同.

认识了欧拉参量的性质后, 我们就有可能借助转动角及转轴方向来表示前面的许多结果. 例如, 式(4-72')中第一个关于 e_0 的表达式与式(4-93)组合起来, 能够得到用欧拉角表示的转动角:

$$\cos \frac{\Phi}{2} = \cos \frac{\phi + \psi}{2} \cos \frac{\theta}{2}. \quad (4-97)$$

当然, 从矩阵 \mathbf{A} 的迹式(4-46)开始经一定的三角运算, 也能得出这一结果. 从形式为

$$\mathbf{Q} = e_0 \mathbf{1} + i\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

的式(4-74)着手推导, 同样可用这些转动参量来表示与转动矩阵 \mathbf{A} 同形的 2×2 么模矩阵 \mathbf{Q} . 根据式(4-93), \mathbf{Q} 还可表

达成

$$Q = 1 \cos \frac{\Phi}{2} + i \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \sin \frac{\Phi}{2}. \quad (4-98)$$

式(4-98)是式(4-75)直接推广到任意转轴的结果。事实上,通过适当的坐标变换,早就可以这样做了。同样,类似于式(4-77)那样的 Q_θ 的指数表示式,相应地为

$$Q = e^{i \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} (\Phi/2)}, \quad (4-99)$$

其含义与矩阵指数的意义相同。

4-8 无限小转动

在前节中已经把各种矩阵与刚体取向的描述作了联系。然而,矩阵元的数目始终大于独立变量的数目,因而带有各种辅助条件。由于已经肯定任何给定取向都可以通过绕某轴的一次转动来得到,这自然会想到试着把(由三个独立量来表征的)矢量与刚体绕固定点的有限位移相联系。当然,方向的含义是不言自明的——是转轴的方向,而转动角度的任何函数似乎都可取作量值。但是很快就知道,这种对应性是无法建立的。假定联系于变换矩阵 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的是“矢量” \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 。那么,作为矢量,它们在相加时应是对易的:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}.$$

但是,两次转动的相加,即一次转动以后再作另一次转动,与两矩阵的乘积 \mathbf{AB} 是相对应的。然而,矩阵的相乘是不对易的,即 $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, 因而 \mathbf{A}, \mathbf{B} 在相加时也不对易,所以它们也不能被当作是矢量。有限转动之和与转动次序有关这一结论,可以明显地用一简单实验来证明。例如,图 4-9 所说明的砖块的转动顺序是,先绕固定于砖块的 z' 轴转 90° , 再绕 y' 轴转 90° ; 图 4-10 代表了相同的转动,但次序相反。显然,按两种顺序转动所得的最后位置不相同。

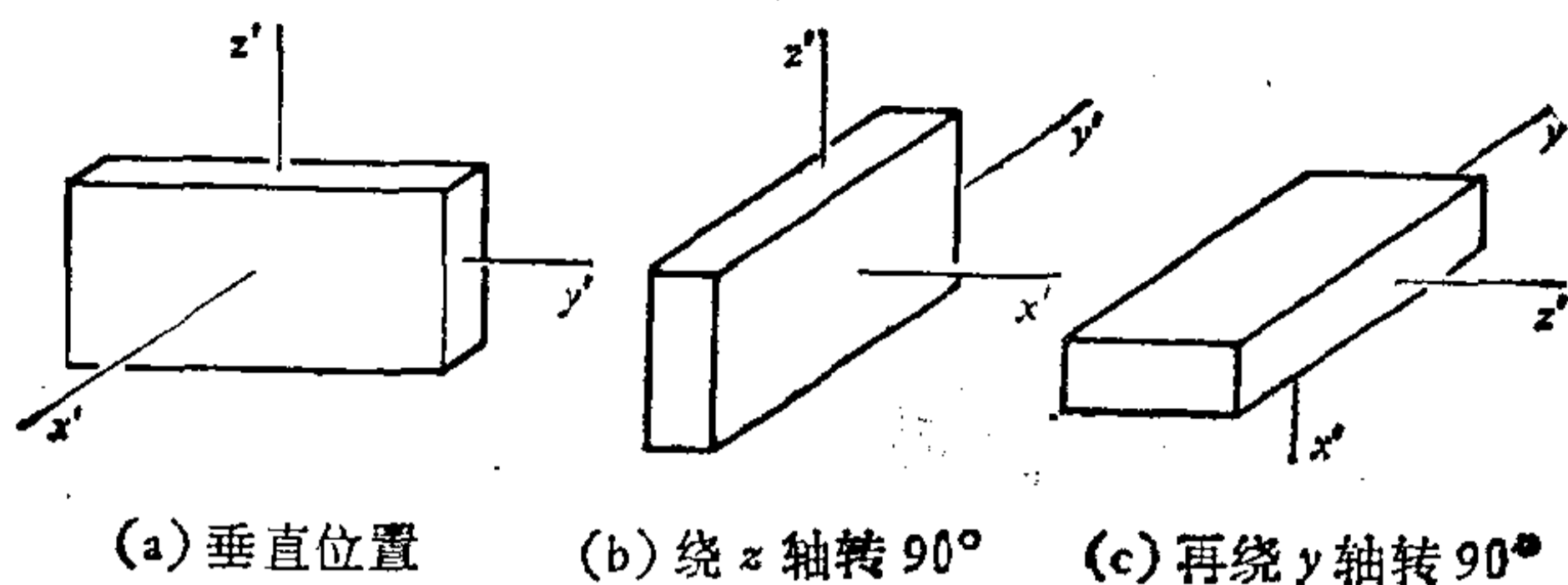


图 4-9 按给定次序完成两次转动的结果

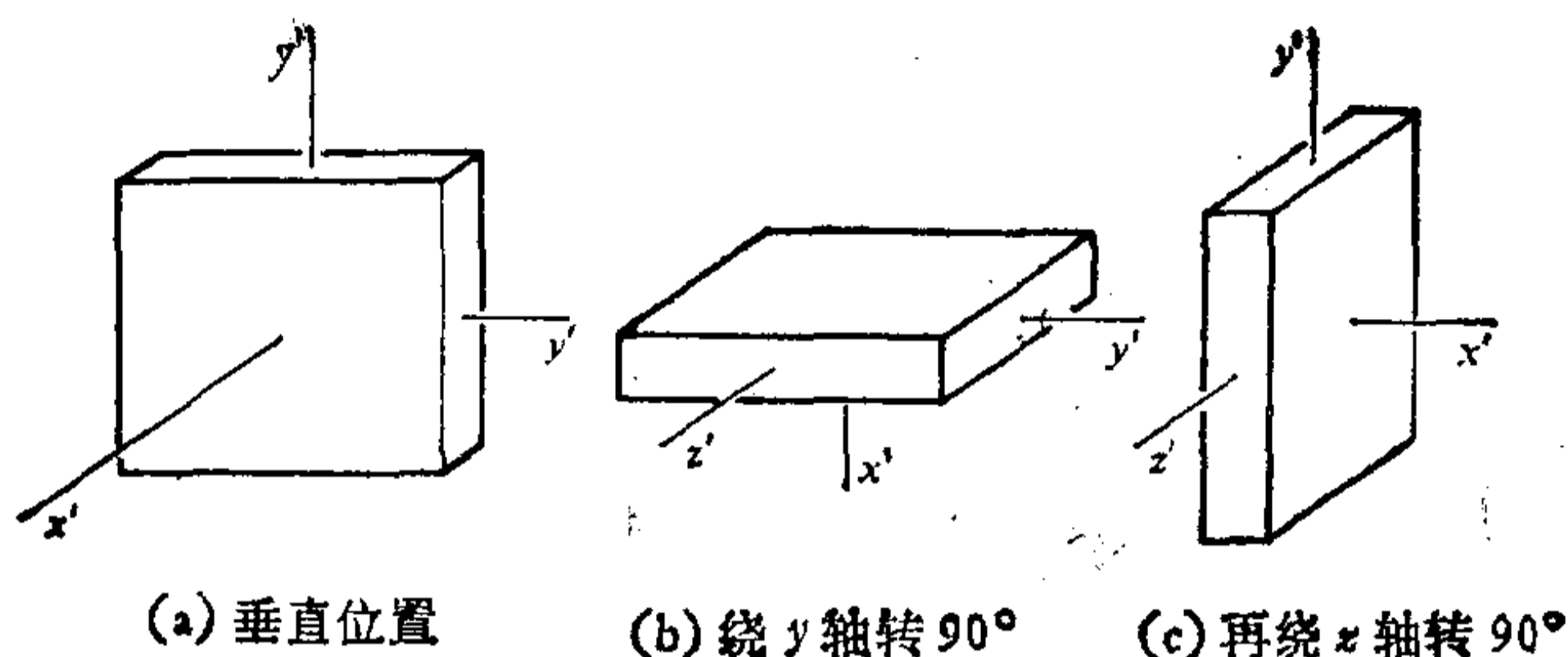


图 4-10 按相反次序完成的图 4-9 所示两次转动

虽然有限转动不能用一个简单的矢量来表示，但如果仅论及无限小转动，则同样的异议并不成立。无限小转动是某种坐标轴的正交变换，在这种变换下，由于变化无限小，所以矢量的分量在两个轴系中几乎相同。因此，某一矢量 \mathbf{r} (在被动的变换意义上) 的 x'_1 分量实际上与 x_1 一样，两者的差别极小：

$$x'_1 = x_1 + \epsilon_{11}x_1 + \epsilon_{12}x_2 + \epsilon_{13}x_3. \quad (4-100)$$

矩阵元 ϵ_{11} , ϵ_{12} 等被认为是无限小的，以致在以后的计算中只要保留 ϵ_{ij} 的一级不为零的项。对于一般的分量 x'_i ，无限小变换的方程可表达成

$$x'_i = x_i + \epsilon_{ij}x_j$$

或

$$x'_i = (\delta_{ij} + \epsilon_{ij})x_j. \quad (4-101)$$

量 δ_{ij} 被认为是单位矩阵的矩阵元, 而式 (4-101) 在采用矩阵符号时为

$$x' = (1 + \epsilon)x. \quad (4-102)$$

式 (4-102) 表明, 无限小变换矩阵的典型形式为 $1 + \epsilon$, 也就是说, 它几乎是一恒等变换, 至多只差一个无限小算符.

现在可以看出, 运算顺序对无限小变换并不重要, 换句话说, 它们是对易的. 如果 $1 + \epsilon_1$ 和 $1 + \epsilon_2$ 是两次无限小变换, 则可能乘积之一是

$$(1 + \epsilon_1)(1 + \epsilon_2) = 1 + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_1\epsilon_2 = 1 + \epsilon_1 + \epsilon_2, \quad (4-103)$$

式中已略去高级无限小. 按相反次序进行时的乘积仅仅交换一下 ϵ_1 和 ϵ_2 , 对结果毫无影响, 因为矩阵的相加总是对易的. 无限小变换的对易性质消除了用矢量来代表它们的异议.

无限小变换的逆矩阵也不难得到. 如果 $A = 1 + \epsilon$ 是变换矩阵, 则逆矩阵为

$$A^{-1} = 1 - \epsilon. \quad (4-104)$$

容易证明, 乘积 AA^{-1} 可归结为单位矩阵:

$$AA^{-1} = (1 + \epsilon)(1 - \epsilon) = 1,$$

这与逆矩阵的定义方程 (4-32) 正好一致. 其次, A 的正交性质表明, $\tilde{A} \equiv 1 + \tilde{\epsilon}$ 必定等于 A^{-1} , 正如式 (4-104) 所示. 因此, 无限小矩阵是反对称的¹⁾:

$$\tilde{\epsilon} = -\epsilon.$$

1) 在这一节中不言而喻地假定无限小正交变换对应于一次转动. 在某种意义上, 这一假定是明显的; 但“无限小反演”在语义上是矛盾的. 形式上, 这一表述得自 ϵ 的反对称性. 因此, $1 + \epsilon$ 的所有对角元都等于 1, 对于一级小量来讲, 变换行列式总等于 +1, 这是转动的标志.

由于反对称矩阵的对角元必须等于零,因而在任何 3×3 反对称矩阵中只能有三个不相等的矩阵元. 所以把 ϵ 表达成

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & d\Omega_3 & -d\Omega_2 \\ -d\Omega_3 & 0 & d\Omega_1 \\ d\Omega_2 & -d\Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4-105)$$

并不会失去其普遍性,式中 $d\Omega_1, d\Omega_2$ 和 $d\Omega_3$ 三个量显然与确定转动的三个独立参量相一致. 现在要证明,这三个量也构成某种特殊类型矢量的三个分量. 根据式 (4-102), 在坐标系的无限小变换下,矢量分量的变化将表达成矩阵方程

$$\mathbf{x}' - \mathbf{x} \equiv d\mathbf{x} = \epsilon \mathbf{x}. \quad (4-106)$$

由于所用的 ϵ 是由式 (4-105) 给出的,因此上式的展开形式为

$$\begin{aligned} dx_1 &= x_2 d\Omega_3 - x_3 d\Omega_2, \\ dx_2 &= x_3 d\Omega_1 - x_1 d\Omega_3, \\ dx_3 &= x_1 d\Omega_2 - x_2 d\Omega_1. \end{aligned} \quad (4-107)$$

式 (4-107) 各式的右边,在形式上都是 \mathbf{r} 和分量为 $d\Omega_1, d\Omega_2, d\Omega_3$ 的矢量 $d\boldsymbol{\Omega}$ 的矢积的分量¹⁾. 所以式 (4-107) 可表达成

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r} \times d\boldsymbol{\Omega}. \quad (4-108)$$

矢量 \mathbf{r} 是在正交矩阵 \mathbf{B} 的作用下按照关系式

$$x'_i = b_{ij} x_j \quad (4-109)$$

变换的 [见式 (4-20)]. 如果要使 $d\boldsymbol{\Omega}$ 成为与 \mathbf{r} 的意义相同的矢量,它就必须在 \mathbf{B} 的作用下按相同的方式变换. 正如我们将要看到的, $d\boldsymbol{\Omega}$ 能经受住作为一个矢量的大多数检验,虽然有一个方面还不够理想. 检查 $d\boldsymbol{\Omega}$ 变换性质的一个方法是探究矩阵 ϵ 在坐标变换下的变换情况. 正象节 4-3 中已经证

1) 应该充分强调 $d\boldsymbol{\Omega}$ 不是某个矢量的微分. 组合成的 $d\boldsymbol{\Omega}$ 代表的是一个微分矢量,即具有微分量值的矢量. 遗憾的是,符号约定使得所具矢量特性只适用于 $\boldsymbol{\Omega}$, 但读者应该清楚,没有什么矢量可使 $d\boldsymbol{\Omega}$ 代表一个微分. 正如所述,有限转动是不可能用一个单个矢量代表的.

明的那样,变换后的矩阵 ϵ' 由相似变换求得:

$$\epsilon' = \mathbf{B}\epsilon\mathbf{B}^{-1}.$$

由于一个矩阵的反对称性质在正交相似变换下是不变的(见习题 3),所以 ϵ' 也能表达成具有非零元 $d\Omega'$ 的式(4-105)那样的形式. 附录 C 中给出的有关这些元素的详细研究表明, ϵ 在相似变换下的变换方式为

$$d\Omega'_i = |\mathbf{B}|b_{ij}d\Omega_j. \quad (4-110)$$

因此 $d\Omega$ 的变换与 \mathbf{r} 的变换几乎相同,所不同的只是多了一个因子 $|\mathbf{B}|$,即多了一个变换矩阵的行列式.

然而,还有一条更简单的途径也能揭示 $d\Omega$ 的矢量特征,并在事实上证明它具有式(4-110)给出的那种变换性质. 在前一节中,矢量公式是针对在坐标系转过有限角度 Φ 的情况下 \mathbf{r} 分量的变化推导的. 令 Φ 趋于无限小角度 $d\Phi$ 这一极限值,就能得到无限小转动的相应矢量的公式. 在这一极限情

况下,式(4-92)中的 $\cos\Phi$ 趋向于 1,而 $\sin\Phi$ 则趋向于 Φ ; 因而 \mathbf{r} 的无限小变化的最终表达式为

$$\mathbf{r}' - \mathbf{r} \equiv d\mathbf{r} = \mathbf{r} \times \mathbf{nd}\Phi. \quad (4-111)$$

与式(4-108)比较表明, $d\Omega$ 确实是一个矢量,并决定于

$$d\Omega = \mathbf{nd}\Phi \quad (4-112)$$

当然,不依靠有限转动公式也能直接推导得式(4-111). 在它的主动意义上来考虑,无限小坐标变换对应于矢量 \mathbf{r} 绕转动轴顺时针转过 $d\Phi$ 角度的一

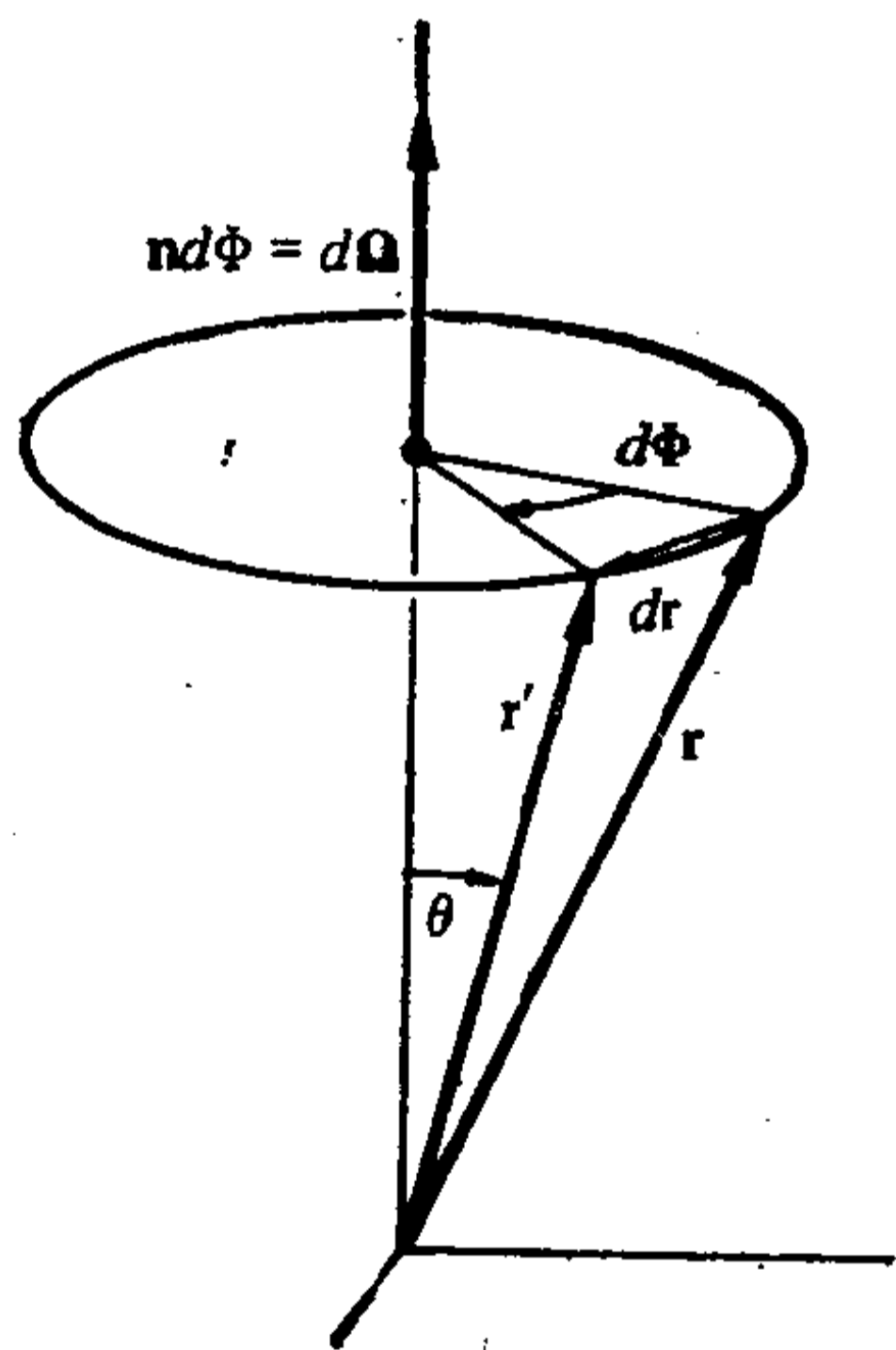


图 4-11 由于矢量的无限小顺时针转动引起的矢量的变化

次转动,这正是图 4-11 所描绘的情况¹⁾. 从图上可知, $d\mathbf{r}$ 的量值对于一级 $d\Phi$ 来讲为

$$dr = r \sin \theta d\Phi,$$

在这一极限情况下, $d\mathbf{r}$ 的方向与 \mathbf{r} 和 $d\Omega = \mathbf{n}d\Phi$ 都垂直. 最后, $d\mathbf{r}$ 的指向是当 \mathbf{r} 转到 $d\Omega$ 时右手螺旋前进的方向. 因此, 图 4-11 证明了 $d\mathbf{r}$ 的量值、方向和指向与式 (4-111) 所予示的完全相同.

象式 (4-112) 所定义的 $d\Omega$ 的变换性质仍有待讨论. 如同由基本矢量代数所熟知的那样²⁾, 就反演下的变换性质而论, 有两类矢量. 按照式 (4-109) 变换的矢量叫做极矢量. 在三维反演下, 即 $S_{ij} = -\delta_{ij}$ 时, 极矢量的所有分量都要改号. 另一方面, 轴矢量或赝矢量在反演下是不改号的. 轴矢量的最简单例子是两个极矢量的矢积:

$$\mathbf{C} = \mathbf{D} \times \mathbf{F},$$

按照习惯, 这里的矢积的分量定义为

$$C_i = D_j F_k - F_j D_k \quad i, j, k \text{ 按循环次序取值.} \quad (4-113)$$

由于 \mathbf{D} 和 \mathbf{F} 的分量在反演下要改号, 因此, \mathbf{C} 的分量不会改号. 许多熟知的物理量都是轴矢量的例子, 如角动量

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

和磁场强度等. 轴矢量的变换规律具有式 (4-110) 的形式. 对正常的正交变换, 轴矢量和极矢量是无法区分的; 但对非正常的变换, 即包含有反演的变换, 行列式 $|\mathbf{B}|$ 等于 -1 , 两种矢量的行为就不同了³⁾.

1) 图 4-11 是把图 2-8 改成顺时针转动后的一种变形.

2) 例如, 可参阅 J. B. Marion, Principles of Vector Analysis, pp. 42-49.

3) 赝矢量和极矢量的标积称为赝标量. 虽然真正标量在正交变换下完全不改号, 但赝标量在非正常转动下将改号.

对于被动意义上的变换，不难看出极矢量的行为为什么与它在反演下的行为是相同的。矢量不受变换的影响，但坐标轴，因而还有各分量将改变。那么对于轴矢量又有什么不同呢？看来，一个轴矢量总是伴随着“手旋”约定的，正象矢积的定义方程(4-113)所表明的那样。经过反演，右手坐标系变换为左手坐标系，式(4-113)所要求的循环次序意味着从右旋约定到左旋约定的相似变化。因此，甚至对被动意义上的变换来讲，反演后的矢积方向事实上也是变化的。

现在就清楚了，为什么 $d\Omega$ 将按照式(4-110)象轴矢量一样变换。从代数学的观点来看，由于式(4-111)中的 \mathbf{r} 和 $d\mathbf{r}$ 都是极矢量，因此 \mathbf{n} 还有 $d\Omega$ 必定是轴矢量。从几何学的观点来看，坐标的反演对应于确定 \mathbf{n} 取向的右螺旋法则到左螺旋法则的转换。

矢积的讨论提供了一个机会，使我们可以引进一个在将来极为有用的记号，那就是排列符号或列维-西维塔密度¹⁾ ϵ_{ijk} 。它的定义是：如果下标 ijk 中有两个相等， ϵ_{ijk} 就等于零，否则就等于 +1 (当 ijk 是 1,2,3 的偶排列时) 或 -1 (当 ijk 是 1,2,3 的奇排列时)。因此，使用排列符号时，矢积分量的表达式(4-113)能写成

$$C_i = \epsilon_{ijk} D_j F_k \quad (4-113')$$

(式中采用了通常的求和约定)。其次，用欧拉参量表示的转动公式(4-96)能表达成

$$x'_i = x_i(e_0^2 - e_k e_k) + 2e_i e_j x_j + 2\epsilon_{ijk} e_0 x_j e_k, \quad (4-114)$$

式中凡遇重复下标就应对 1,2,3 的所有值求和。现在可以用欧拉参量直接表示正交变换矩阵 \mathbf{A} 的矩阵元，只要研究一下

1) 有时也称为交错张量或三级迷向张量。

式(4-114)中 x_j 的系数:

$$a_{ij} = \delta_{ij}(e_0^2 - e_k e_k) + 2e_i e_j + 2\epsilon_{ijk} e_0 e_k. \quad (4-115)$$

稍加探究即能证明: 这一简洁公式事实上描述了式(4-67)中的所有矩阵元.

本章到目前为止所提关于转动的描述, 都是为了表示刚体取向这一目的而发展起来的. 强调了最初所说的变换指的是坐标系的转动. 比如说, 在固定坐标系中, 一个矢量在“主动”意义上的相应转动意味着沿反方向, 即顺时针方向的转动. 但是, 在许多与此有关的力学领域, 或一般讲在许多物理学领域中, 我们所关心的却是转动物理系统及相关矢量时所产生的各种结果. 转动下系统的不变性和角动量的守恒之间的联系早已指出过(节 2-6). 在这样一些应用中, 有必要考虑矢量按通常的逆时针方向转动的结果. 为了参考起见, 这里将把前面给出的一些转动公式列出来, 但仅限于矢量的逆时针转动. 从这里到本节末的所有方程和叙述仅仅适用于这种逆时针转动.

转动公式(4-92)成为

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} \cos \Phi + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})[1 - \cos \Phi] + (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \sin \Phi, \quad (4-92')$$

相应的无限小转动式(4-111)则成为

$$d\mathbf{r}' = d\mathbf{Q} \times \mathbf{r} = (\mathbf{n} \times \mathbf{r})d\Phi. \quad (4-111')$$

其次, 相关的 2×2 复矩阵 \mathbf{Q} 所取形式为

$$\mathbf{Q} = \cos \frac{\Phi}{2} - i\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \sin \frac{\Phi}{2}, \quad (4-98')$$

相应的势则表示成

$$\mathbf{Q} = e^{-i\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} (\Phi/2)}. \quad (4-99')$$

无限小转动的反对称矩阵式(4-105)成为

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & -d\Omega_3 & d\Omega_2 \\ d\Omega_3 & 0 & -d\Omega_1 \\ -d\Omega_2 & d\Omega_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix} d\Phi, \quad (4-105')$$

式中的 n_i 是单位矢量沿转轴的分量。令 $d\mathbf{x}$ 代表无限小变化 $\mathbf{x}' - \mathbf{x}$ ，则式 (4-102) 能表达成转动角度的矩阵微分方程的形式，即

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\Phi} = -\mathbf{N}\mathbf{x}, \quad (4-116)$$

式中 \mathbf{N} 是式 (4-105') 右边的矩阵，其矩阵元为 $N_{ij} = \epsilon_{ijk}n_k$ 。另一个有用的表达式是把式 (4-105') 中的 ϵ 表达成

$$\epsilon = n_i \mathbf{M}_i d\Phi,$$

这里的 \mathbf{M}_i 是三个矩阵：

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4-117)$$

矩阵 \mathbf{M}_i 称为无限小转动生成元，并且具有有趣的性质，即它们乘积之间的关系为

$$\mathbf{M}_i \mathbf{M}_j - \mathbf{M}_j \mathbf{M}_i \equiv [\mathbf{M}_i, \mathbf{M}_j] = \epsilon_{ijk} \mathbf{M}_k. \quad (4-118)$$

两个矩阵乘积之差，或对易子也被叫做 \mathbf{M}_i 的李括号，而式 (4-118) 则定义了用转动角作参量的转动群的李代数。进一步深入探讨转动群论将会离题太远，但我们以后会有机会论及转动运算的这些性质的。

4-9 矢量的变化率

无限小转动的概念为描述刚体随时间的运动提供了一种

有效的工具。今考虑在力学问题中的某个任意矢量 \mathbf{G} ，比如说物体中某点的位置矢量或物体的总角动量等。通常当物体运动时，这种矢量将随时间而改变，但是这种变化往往与观察时所用参照系有关。譬如，如果所述矢量恰好是从体轴系原点指向刚体某点的矢径，那么，从体轴系来测量时，这一矢量显然是不变的。然而对于一个固定于空间坐标系的观察者来讲，如果物体是运动的，则从空间坐标系测得的矢量分量将随时间而改变。

体轴系内观察者所看到的一个一般矢量 \mathbf{G} 的分量在 dt 时间内的变化，与空间坐标系内观察者所看到的相应变化不同。 \mathbf{G} 的两个微分变化之间的关系能在物理论证的基础上来推导。我们能够这样来表达，两者的仅有差别是体轴的转动效应：

$$(d\mathbf{G})_{\text{空间}} = (d\mathbf{G})_{\text{物体}} + (d\mathbf{G})_{\text{转动}}.$$

现在来考虑一个固定于刚体的矢量。当物体转动时，从物体上观察者看起来，即相对于体轴系来讲，这一矢量的分量当然不会有什么变化。对 $(d\mathbf{G})_{\text{空间}}$ 的唯一贡献是物体的转动效应。但由于矢量固定于体轴系内，并和物体一起逆时针转动，所以在空间内观测时，矢量的变化是式 (4-111') 所给出的变化，因而 $(d\mathbf{G})_{\text{转动}}$ 应是

$$(d\mathbf{G})_{\text{转动}} = d\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{G}.$$

对于某个任意矢量，相对于空间轴的变化等于两个作用的总和：

$$(d\mathbf{G})_{\text{空间}} = (d\mathbf{G})_{\text{物体}} + d\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{G}. \quad (4-119)$$

两个观察者所看到的矢量 \mathbf{G} 的时间变化率，等于式 (4-119) 各项除以所考虑的微分时间元 dt ：

$$\left(\frac{d\mathbf{G}}{dt}\right)_{\text{空间}} = \left(\frac{d\mathbf{G}}{dt}\right)_{\text{物体}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G}. \quad (4-120)$$

式中的 ω 是物体的角速度, 它决定于关系式¹⁾

$$\omega dt = d\Omega. \quad (4-121)$$

矢量 ω 位于 t 和 $t + dt$ 之间发生的无限小转动的转轴上, 即沿着所谓瞬时转轴的方向. ω 的量值是物体瞬时转动率的量度.

基本方程 (4-120) 的更为正规的求导可用空间坐标和物体坐标之间的正交变换矩阵来给出. \mathbf{G} 沿第 i 个空间轴的分量与它沿体轴的分量之间是相互关联的:

$$G_i = \tilde{a}_{ij} G'_j = a_{ij} G'_j.$$

当物体随时间运动时, 分量 G'_j 以及变换矩阵元 a_{ij} 都将变化. 因此, 在微分时间元 dt 内 G_i 的变化为

$$dG_i = a_{ij} dG'_j + da_{ij} G'_j. \quad (4-122)$$

若令空间轴与体轴在 t 时刻瞬时重合并不会失去其普遍性. 在这种情况下, 两个坐标系中的分量也将瞬时相同, 但由于两个系统相互之间的相对运动, 微分将不相同. 例如 $G'_j = G_j$, 但 $a_{ij} dG'_j = dG'_i$, 这里的撇强调该微分是在体轴系内量度的. 矩阵 \mathbf{A} 在 dt 时间内的变化是从单位矩阵发生的变化, 所以对应于矩阵 ϵ 的无限小转动. 因此, 利用 ϵ 的反对称性, 即得

$$da_{ij} = (\tilde{\epsilon})_{ij} = -\epsilon_{ij}.$$

利用排列符号 ϵ_{ijk} , ϵ 的矩阵元将是 [见式 (4-105)]

$$-\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ijk} d\Omega_k = \epsilon_{ikj} d\Omega_k.$$

式 (4-122) 现在能够写成

$$dG_i = dG'_i + \epsilon_{ikj} d\Omega_k G'_j.$$

右边最后一项将看作为某个矢积的第 i 个分量的表达式, 从

1) 由于 ω 不是任何矢量的微商, 所以有时把它说成是非完全矢量, 这与非可积微分约束相类似.

而使两个坐标系中的微分之间的最后关系式成为

$$dG_i = dG'_i + (d\Omega \times \mathbf{G})_i \quad (4-123)$$

这同式(4-119)的第 i 个分量相同。

式(4-119)与其说是特定矢量 \mathbf{G} 的方程,还不如说是两个坐标系之间的时间微商的变换方程。为了强调推导过程中所用的 \mathbf{G} 是完全任意的,可以把式(4-120)写成作用于某个给定矢量的算符方程:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_s = \left(\frac{d}{dt}\right)_r + \omega \times. \quad (4-124)$$

这里的下标 s 和 r 表明所示时间微商分别是在空间轴系和(转动中的)体轴系内来观测的。合矢量方程当然能够沿任何需要的坐标系轴来分解,不论坐标系是固定的还是运动的。但必须再次强调,时间变化率仅与特定坐标系相关。当一个矢量的时间微商是相对于某一坐标系的,那么,只有在完成微分以后才可以取沿其他坐标系轴的分量。

用欧拉角和它们的时间微商来表示角速度往往是方便的。与 ω 相关的一般无限小转动可看作由三个相继无限小转动所组成,它们的角速度分别为 $\omega_\phi = \dot{\phi}$, $\omega_\theta = \dot{\theta}$, $\omega_\psi = \dot{\psi}$ 。由于无限小转动的矢量性质,矢量 ω 可以取作这三个角速度矢量之和。遗憾的是, ω_ϕ 、 ω_θ 和 ω_ψ 的方向不是对称分布的: ω_ϕ 沿空间 z 轴, ω_θ 沿节点线,而 ω_ψ 则沿体轴系的 z' 轴。然而,节 4-4 中的正交变换矩阵 \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} 可以用来提供这些矢量沿任何需要的坐标轴的分量。

事实证明,体轴系对运动方程的讨论最为有用,所以我们将采取 ω 对这种坐标系的分量。由于 ω_ϕ 平行于空间 z 轴,因此可以用完全的正交变换 $\mathbf{A} = \mathbf{BCD}$ (4-46) 给出它沿体轴系各轴的分量:

$$(\omega_\phi)_{x'} = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi, \quad (\omega_\phi)_{y'} = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi, \quad (\omega_\phi)_{z'} = \dot{\phi} \cos \theta.$$

作为 ω_θ 方向的节点线与 ξ' 轴重合，所以仅仅应用最后的正交变换 **B** 式 (4-45) 即能得到 ω_θ 沿体轴系各轴的分量：

$$(\omega_\theta)_{x'} = \dot{\theta} \cos \psi, \quad (\omega_\theta)_{y'} = -\dot{\theta} \sin \psi, \quad (\omega_\theta)_{z'} = 0.$$

至于沿 z' 轴的 ω_ψ ，其分量不需任何变换。把三个角速度的分量相加，就得到 ω 沿体轴系各轴的分量

$$\begin{aligned} \omega_{x'} &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \omega_{y'} &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \\ \omega_{z'} &= \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}. \end{aligned} \quad (4-125)$$

利用同样的技巧，可以用欧拉角表示 ω 沿空间坐标系各轴的分量¹⁾。

4-10 科里奥利力

式 (4-102) 是我们赖以建立刚体动力学运动方程的基本运动学定律。但它并不只适用于刚体运动。需要时，也可用来讨论质点或质点系相对于转动坐标系的运动。在这后一范畴中，最为重要的问题是如何描述质点相对于同地球一起转动的坐标轴的运动。记得在节 1-1 中曾把牛顿运动定律适用的系统定义为惯性系统。在许多场合，一个与转动着的地球固定在一起的坐标系是一个足够近似的惯性系。然而，与当地恒星固定在一起的坐标系更加接近于理想的惯性系。详细的探究显示了地球相对于这种近似惯性系的转动引起的一些可观测到的效应。方程 (4-124) 提供了以固定于转动地球的非惯性系为参照的那些运动方程的必要修正。

第一步是把式 (4-124) 应用于从地球系原点指向给定质点的矢径 \mathbf{r} ，这时有

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad (4-126)$$

1) 式 (4-125) 遵循欧拉角的 x 约定。其他欧拉角约定的相应公式可查阅附录 B。

式中的 \mathbf{v}_s 和 \mathbf{v}_r 分别是质点相对于空间坐标系和转动坐标系的速度, $\boldsymbol{\omega}$ 是地球相对于惯性系的(恒定)角速度. 第二步再用式(4-124)求得 \mathbf{v}_r 的时间变化率:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{v}_s}{dt}\right)_s &= \mathbf{a}_s = \left(\frac{d\mathbf{v}_s}{dt}\right)_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r \\ &= \mathbf{a}_r + 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \end{aligned} \quad (4-127)$$

式中 \mathbf{v}_r 已由式(4-126)代入, \mathbf{a}_s 和 \mathbf{a}_r 则是质点在两个系统中的加速度. 最后, 惯性系中的运动方程为

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_s,$$

当以转动坐标表示时, 它将展开成

$$\mathbf{F} - 2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r) - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = m\mathbf{a}_r. \quad (4-128)$$

所以在转动系统内的观察者看起来, 质点似乎在有效力 \mathbf{F}_{eff} 作用下运动, 所说的有效力为

$$\mathbf{F}_{\text{eff}} = \mathbf{F} - 2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r) - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (4-129)$$

让我们来探究一下式(4-129)中各项的性质. 最后一项是一个垂直于 $\boldsymbol{\omega}$ 并指向外面的矢量. 它的量值为 $m\omega^2 r \sin\theta$. 所以, 可以断定这一项就是熟知的离心力. 当质点静止在运动系统内时, 离心力是有效力中唯一的附加项. 然而, 当质点运动时, 称为科里奥利力的中间一项也将起作用. 就地球表面上一个质点来计算求出这两个力的数量级是不难的. 地球相对于恒星以角速度

$$\omega = \left(\frac{2\pi}{24 \times 3600}\right) \left(\frac{366.5}{365.5}\right) = 7.292 \times 10^{-5} \text{ 秒}^{-1}$$

绕北极逆时针转动. 这里的第一个括号给出了相对于到太阳的矢径的角速度. 第二个括号内的量, 即一年内恒星日数与相应太阳日数的比率, 给出了相对于恒星的角速度的改正因子. 根据这一 ω 值以及等于赤道半径的 r , 所得最大向心加

速度为

$$\omega^2 r = 3.38 \text{ 厘米/秒}^2,$$

或者约为重力加速度的 0.3%。这一加速度虽小，却是决不能忽略的。然而，实际测得的重力作用代表了地球质量分布的引力场和向心加速度效应两者的组合作用。人们已习惯把这两者之和说成是地球的重力场，以区别于地球的引力场。

转动中的地球将成为扁平形状，向心加速度的效应会使情况变得更加复杂。如果地球完全是流体，转动的效应将使它的形状变成椭球，其表面必定是组合重力场的等势面。地球的平均海平面非常接近于这一平衡椭球（除去由于风和潮汐引起的局部变化），并确定了所谓地球的水准面。除了局部扰动的影响外，重力将垂直于等势水准面。相应地，局部铅直方向定义为垂直于地球表面给定点处水准面的方向。对于地球上特定部位附近发生的现象，式(4-129)中的向心加速度项可认为已被包含在引力加速度 \mathbf{g} 中，而 \mathbf{g} 则被定位于局部铅垂方向。 \mathbf{g} 的量值当然随地球的纬度而变化。向心加速度的作用以及地球的扁平形状，使赤道上的 \mathbf{g} 比两极的 \mathbf{g} 小大约 0.53%。

顺便说一下，由于地球绕太阳公转引起的、作用在质点上的离心力，与重力相比是可观的，但它几乎完全被太阳的万有引力所平衡。当然，正是这种离心力与引力之间的平衡，使地球（以及它上面的一切）保持在绕日轨道上。

作用在运动质点上的科里奥力与 $\boldsymbol{\omega}$ 和 \mathbf{v} 两者都垂直¹⁾。在北半球， $\boldsymbol{\omega}$ 指向地面外，科里奥力 $2m(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega})$ 将促使沿地球表面发射的抛射体偏向运行方向的右侧（见图 4-12）。

1) 从这里开始， \mathbf{v} 的下标 r 将取消，因为所有速度都是相对于转动坐标轴来取的。

在南半球,科里奥利偏转方向则相反;在赤道上,则由于 ω 是水平指向的,所以不会有这种偏转.科里奥利加速度的量值始终小于

$$2\omega v \simeq 1.5 \times 10^{-4}v,$$

对于 10^5 厘米/秒 (约 2000 米/时) 的抛射速度,这一数值等于 15 厘米/秒²,或者 0.015g. 一般说来,这一加速度极小,但有时也会变得相当重要. 举一个人为的

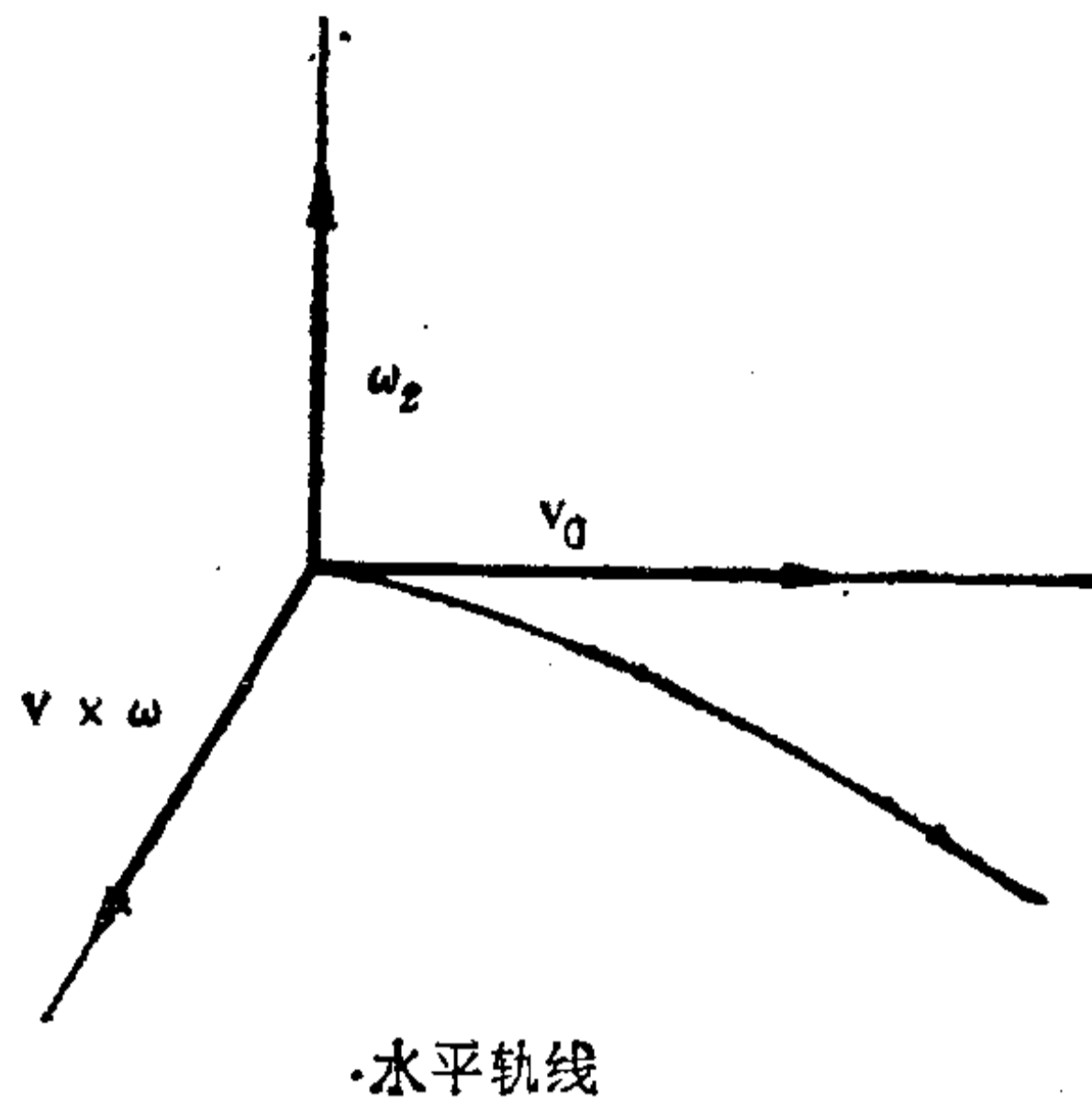


图 4-12 北半球的科里奥利偏转方向

例证,假设有一炮弹从北极水平地发射出来.科里奥利加速度的量值将等于 $2\omega v$,因而在 t 时间后的线偏转为 ωvt^2 ;角偏转将等于线偏转除以飞过的距离:

$$\theta = \frac{\omega vt^2}{vt} = \omega t, \quad (4-130)$$

这等于地球在 t 时间内转过的角度.实际上,这一结果意味着从北极发射出来的炮弹没有初始转动运动,因而它在惯性空间内的轨道是一直线,看到的偏转是由于地球在它下面转动引起的.把 100 秒这一飞行时间(这个数值对于大的抛射体来说是极为寻常的)代入式 (4-130),就可觉察到这一效应的大小.这时的角偏转约为 7×10^{-3} 弧度,约 0.4° ,这是不可忽视的.显然,对远程导弹的影响将更加显著,因为它们的飞行时间要长得多.

科里奥利力在海洋学和气象学的许多现象中起着极为重要的作用,这类现象涉及到长距离上的质量位移,譬如象环流型信风和湾流走向都属这类现象.这些现象的充分描述要求

求解复杂的流体动力学问题,在这些问题中,科里奥利力仅仅是所包含的许多项中的一项.然而,仍有可能看出科里奥利力的贡献的某种迹象,为此,我们考虑一个高度简化的特殊气象学问题——大规模水平风环流.在其他因素不变的情况下,空气质量总是从高压区域流向低压区域,即所谓压力梯度气流.在铅垂方向上,压力梯度大致被引力所平衡,所以只有在水平面内存在空气质量的长距离持续运动——这就是

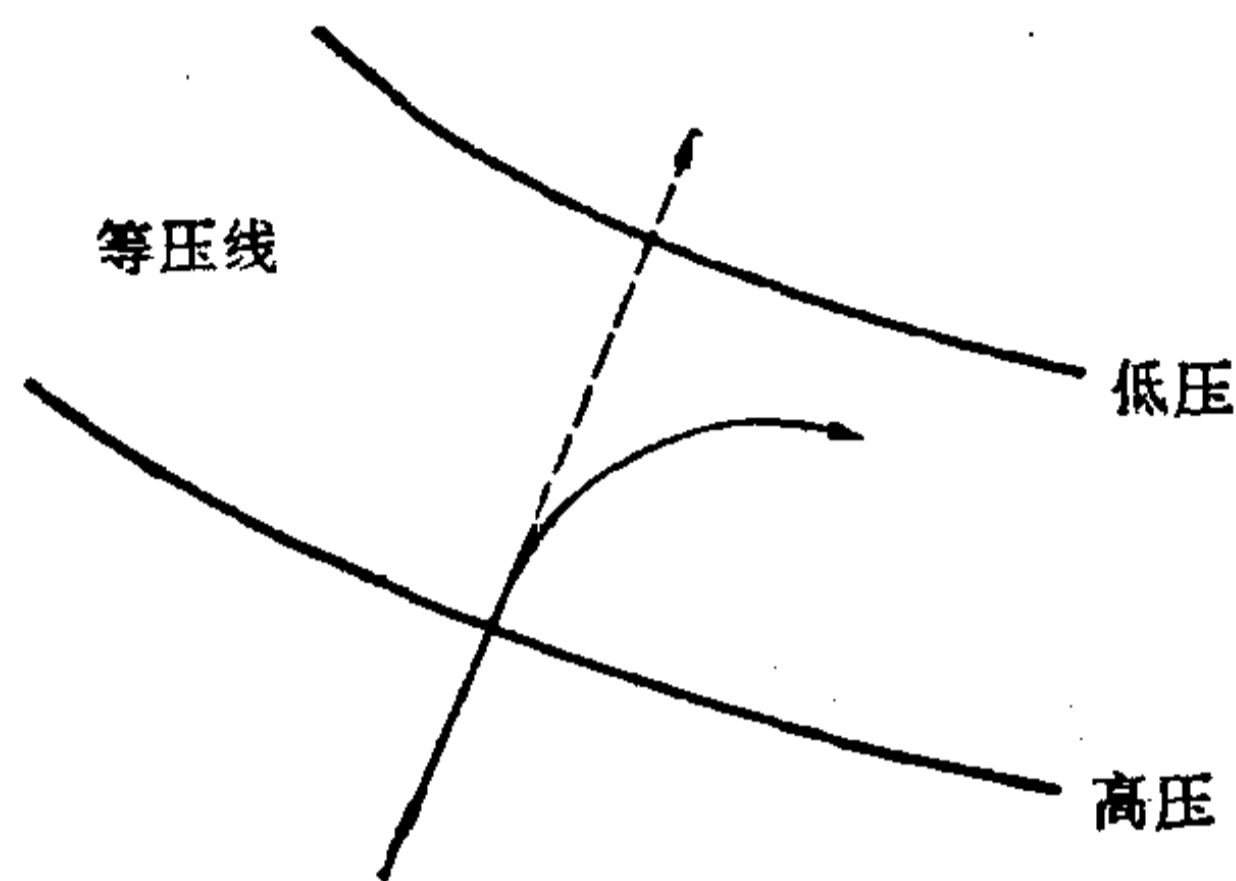
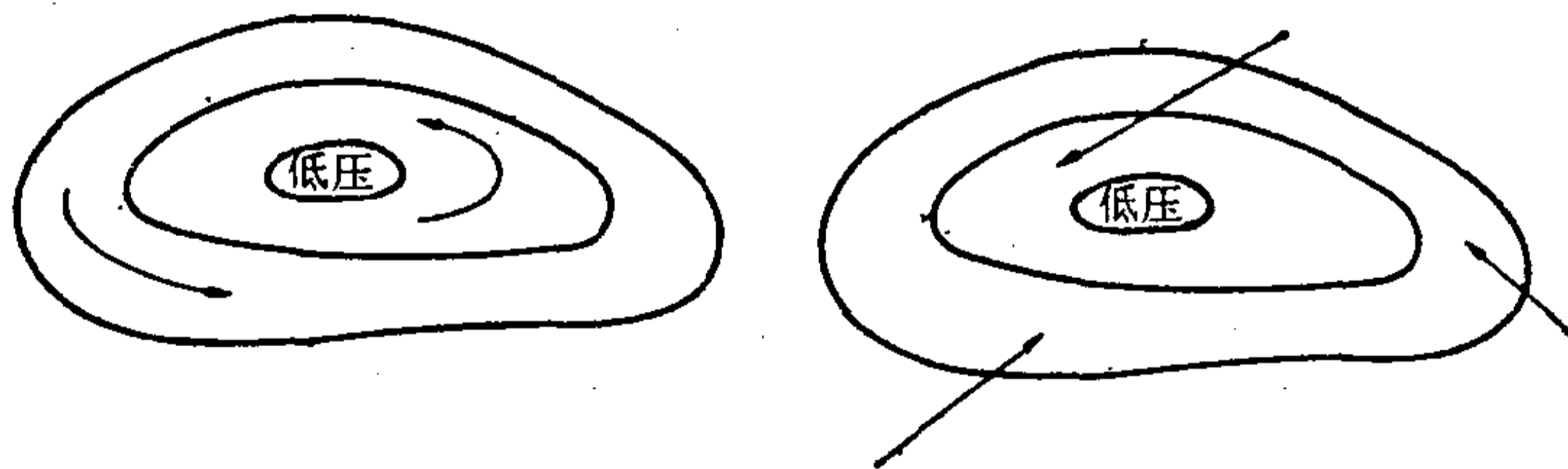


图 4-13 受到科里奥利力作用时,风从压力梯度的方向发生偏转
(图是按北半球的情况画的)

我们所理解的风.压力梯度力非常适中,其量值可以同作用在以常速运动着的空气质量上的科里奥利力相比拟.在无科里奥利力的情况下,风向当然垂直于等压线,如图 4-13 所示.然而,在图中所示情况下,科里奥利力使风偏

转到这一方向的右侧.这种向右侧的偏转一直要持续到风速矢量平行于等压线为止,这时的科里奥利力将与压力梯度力的方向相反,并且正好平衡.风连续地平行于等压线,在北半球将形成绕低压中心的逆时针环流.在南半球,科里奥利力



(a) 理想情况 (b) 实际情况
图 4-14 北半球的气旋图型

的作用方向相反，气旋方向(即绕低压中心的气流)是顺时针的。(这种被偏转到平行于等压线的风称为地转风。)在这一简化了的情景中，略去了摩擦效应。在大气高度低于几公里的地方，涡流的内摩擦的摩擦效应将变得很重要，平衡时的风向决不会严格地平行于等压线，正如图 4-14 所指出的那样。

科里奥利力产生重大影响的另一个传统事例是，自由下落质点从铅垂线的偏转。由于质点速度几乎是铅垂的， ω 又处于北-南方向的垂直平面内，因此偏转力 $2m(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega})$ 将位于东-西方向上。这使北半球的自由下落物体将偏向东侧。如果把地球坐标系的 z 轴选为先前定义的垂直向上的方向，可以使偏转的计算大为简化。如果所选 y 轴指向北方，则在 x (向东)方向上的运动方程为

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v})_x = -2m\omega v_z \sin \theta, \quad (4-131)$$

式中 θ 是余纬度。科里奥利力对 v_z 的影响将构成对于偏转的微小改正，而这种偏转本身又非常小。因此，式 (4-131) 中的垂直速度可以当作没有科里奥利力一样来计算：

$$v_z = -gt$$

以及

$$t = \sqrt{\frac{2z}{g}}$$

把这些数值代进去，式 (4-131) 的求积是容易的，所得偏转为

$$x = \frac{\omega g}{3} t^3 \sin \theta$$

或

$$x = \frac{\omega}{3} \sqrt{\frac{(2z)^3}{g}} \sin \theta.$$

假定 $\theta = \pi/2$ (对应于赤道) 和 $z = 100$ 米，就能看出偏转的

数量级。这样估算得的偏转值约为

$$x \simeq 2.2 \text{ 厘米.}$$

实际上去完成这一实验是困难的，因为小的偏转往往可能被气流、粘滞性或其他各种干扰的影响所掩盖¹⁾。

比较容易观察的是著名的傅科摆实验。如果在北极让一个摆在空间的一个给定平面内摆动，则它垂直于该平面的线动量为零，当地球在它下面转动时，它将继续在这个不变的平面内摆动。地球上的观察者看来，振荡平面每天转过一周。在其他纬度处，结果要复杂得多，但是对这个现象所作的定性解释相同，详细计算将留作习题。

在原子物理学中也存在科里奥利效应。例如，在多原子分子中可能同时出现两种型式的运动，一种是作为刚性整体的分子的转动；另一种是原子相对于它们的平衡位置的振动。由于振动，原子将相对于转动着的分子坐标系运动。因此，科里奥利项不等于零，它使原子将在垂直于原来振荡的方向上运动。分子光谱中由科里奥利力引起的微扰就表现为分子的转动和振动能级之间的相互作用。

推荐参考书目

R. R. Stoll, *Linear Algebra and Matrix Theory* 论述线性代数的教科书，卷数多，易于过时，不能适应眼下的需要。选定这本参考书是经过慎重考虑的，主要因为它的叙述方式并不过于时新，叙述也较从容；它偏重欧氏空间和常见的三维示例。本章中的物理学并不需要更高级的数学推演。

G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists* 具有这类标题的教材通常都有一些矩阵和线性变换的论述，这本书是其中最好的代

1) 利用式(4-131)不难证明，上抛质点落回地面时，将偏向原抛射地点的东侧。

表。第四章关于矩阵和行列式的叙述特别合适，而且还搜集了不少有用的问题。书中讨论了泡利矩阵以及它们的四维推广，即狄拉克矩阵。

H. Jeffreys 和 B. S. Jeffreys, *Methods of Mathematical Physics*

这本书虽然有点陈旧，但它包含有大量物理学方面的应用，这是作者长期从事理论物理学研究的经验结晶。本章的许多论题可参阅该书的第三章和第四章，其中包含有泡利自旋矩阵及其与三维转动矩阵之间的联系。关于欧拉角一节确实难懂，而且不完全是由于用图不当。每章开头是一些机智而诙谐的引语，这一点也是值得借鉴的。第七章的引语也许是不当的，但却显得更加幽默。

J. B. Marion, *Principles of Vector Analysis* 这虽然仅是一本袖珍普及本，但作者极为详尽地论述了正交变换矩阵的性质以及轴矢量和极矢量的变换性质。在这些地方以及以后的一些章节中，大量地应用了排列符号，例如，在推导复杂矢量恒等式时就是如此。

J. L. Synge 和 A. Schild, *Tensor Calculus* 这一著名的专论广泛地涉及到张量的许多方面，包括这里特别感兴趣的那些方面。在节 4.2 中，极其简略地考虑了平坦空间内的张量性质（在本书中，我们将仅仅考虑平坦空间），特别是排列符号的性质。第七章考虑了相对张量或赝张量，即赝矢量的张量推广。有两章根据有点不同寻常的观点考虑了物理学（包括动力学）的应用。

A. I. Borisenko 和 I. E. Tarapov, *Vector and Tensor Analysis with Applications* 虽然通篇都是立足于物理学的应用写的，但方法和观点往往同这里所用的不同。作者非常喜欢使用沿正交轴的单位矢量 \mathbf{n}_i ，例如，他们在证明具有与 \mathbf{g} 相同特性的反对称张量的变换性质时，使用了由 $\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j \times \mathbf{n}_k$ 表示的排列符号表示式。

E. T. Whittaker, *Analytical Dynamics* 第一章中包含有适合我们应用的材料。关于欧拉角那一节，由于没有任何插图而难以阅读。把他的结果同我们的方程相比时，应参阅我们在节 4-5 中的附注。该书的第十二节讨论了凯瑞-克莱因参量与所谓单应变换的关系。

L. A. Pars, *A Treatise on Analytical Dynamics* 这确是一部不朽的论著，具有博学的剑桥传统，使人感到象是惠特克在近代的继承人。可以说，这是一本具有相当学术水平的书，象惠特克一样显示了丰

富的学识。第八章论述了转动理论，并在许多其他条目中包含有转动公式的三种各别的证明。本书为强形式蔡斯尔定理(见第 192 页附注)提供了一种简单的几何证明，该证明并没有超越牛顿原理的范畴。

G. Hamel, *Theoretische Mechanik* 具有德文阅读能力的读者将会发现，这一参考书几乎是一部有关刚性转动运动学资料的完整的百科全书(主要是第二章第八、第九两节)。一些例子详尽地讨论了球极平面射影与克莱因和欧拉参量的关系，以及转动的四元表示式。该书的详尽论述反映了 1925 年左右的物理世界。该书附有 260 页的习题及其解答。

T. C. Bradbury, *Theoretical Mechanics* 本书虽为中级教材，但包含有许多我们感兴趣的条目，有些叙述还独具创见。第一、第三章中对矩阵的论述的基础同我们的大致相同，但似乎更为透彻。它详尽地讨论了排列符号的性质。并为转动系统中的运动建立起了有效的拉氏函数，其中的科里奥利力是根据按特定方式引进的、与速度相关的势推导的。该书确为研究这种非惯性系中的运动提供了有力的工具。

E. J. Saletan 和 A. H. Cromer, *Theoretical Mechanics* 这一本用高级观点写成的教科书，充分利用了中级理论水平的近代数学。第四章中讨论了矩阵以及它们在力学中的应用，并且是作为线性矢量空间讨论的一部分来处理的。在下面一章中讨论了转动运动学，采用了遵循 α 约定的欧拉角。第九章中简要地介绍了根据群论和李代数的观点阐述的转动概念。

F. D. Stacey, *Physics of the Earth* 由于地球形状偏离了球形，在转动中的地球表面上观察到的“重力”场是复杂的。该书的第二、第三章中特别包含有这些效应的详细而又紧凑的讨论。只是没有提到科里奥利力的现象。

G. Herzberg, *Infrared and Raman Spectra* 本书特别详细地讨论了科里奥利力对于多原子分子光谱的作用，特别是第四章第 1, 2 节。虽然要完全理解这个问题需要有微幅振荡理论(见本书第六章)和量子力学方面的基础知识，然而，对于简要的经典论述则可参阅该书第 372—375 页。

S. L. Hess, *Introduction to Theoretical Meteorology* 在该书的第

十一和十二章中，仔细而详尽地介绍了科里奥利力对大气风的影响。第十三章讨论了流体动力学中所谓环流定理中的科里奥利项。尽管停留在初级水平上，推导却是煞费苦心的，并且还回溯到了第一性原理。

习 题

1. 证明：矩阵的乘法满足结合律。还要证明：两个正交矩阵的乘积也是正交的。

2. 证明转置矩阵和伴矩阵的下列性质：

$$\widetilde{\widetilde{\mathbf{A}}\mathbf{B}} = \widetilde{\mathbf{B}}\widetilde{\mathbf{A}}, (\mathbf{AB})^\dagger = \mathbf{B}^\dagger\mathbf{A}^\dagger.$$

3. 证明：矩阵的迹在任何相似变换下都是一个不变量。还证明：矩阵的反对称性质在正交相似变换下依然不变，而厄密性质则在任何么正相似变换下也是不变的。

4. (a) 检查一下反对称 3×3 实矩阵 \mathbf{A} 的本征值，证明 $1 \pm \mathbf{A}$ 是满秩阵。

b) 再证明：在相同条件下，矩阵

$$\mathbf{B} = (\mathbf{1} + \mathbf{A})(\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}$$

是正交矩阵。

5. 作出三个相继转动矩阵的乘积，得出用欧拉角来表示的一般转动矩阵的矩阵元式 (4-46)。直接证明这些矩阵元服从正交性条件。

6. (a) \mathbf{r} 在单位法向矢量为 \mathbf{n} 的平面内反射，求描述这一反射的矢量方程。

(b) 证明：如果 $l_i (i = 1, 2, 3)$ 是 \mathbf{n} 的方向余弦，则变换矩阵元为

$$A_{ij} = \delta_{ij} - 2l_i l_j,$$

并证明： \mathbf{A} 是一个非正常正交矩阵。

7. 根据下列转动顺序，能够通过欧拉角使体轴系与空间轴系相关联：

- (1) 绕 x 轴转过 θ 角度；
- (2) 绕 z' 轴转过 ψ 角度；
- (3) 绕原来 x 轴转过 ϕ 角。

证明：按照这一顺序所得到的变换矩阵元与按照书中给出的转动

顺序得到的变换矩阵元相同。[提示：没有必要明显地作出各转动矩阵的相乘]。

8. 如果 \mathbf{A} 是绕任何轴转过 180° 的转动矩阵, 证明: 如果

$$\mathbf{P}_\pm = \frac{1}{2}(\mathbf{1} \pm \mathbf{A}),$$

则 $\hat{\mathbf{p}}_\pm^2 = \mathbf{P}_\pm$. 求取 \mathbf{P}_\pm 在任何合适坐标系中的元素, 并就 $\mathbf{P}_+, \mathbf{P}_-$ 对任何矢量 \mathbf{F} 的运算作出几何解释。

9. 用欧拉角来表示平面上一个球的“滚动”约束。证明: 这些条件是不可积的, 因而约束是非完全约束。

10. (a) 证明: (4-67) 形式的转动矩阵不可能表达成反演变换矩阵 \mathbf{S} 的形式。

(b) 通过直接相乘证明式 (4-67) 中的矩阵是正交的。

11. 证明: 任何转动都能用两个平面内的相继反射表示, 这两个平面都通过转动轴, 它们之间的平面角为 $\Phi/2$ 。

12. 如果 \mathbf{B} 是一个方阵, 而 \mathbf{A} 是 \mathbf{B} 的指数, 并定义为该指数的无限级数展开式:

$$\mathbf{A} \equiv e^{\mathbf{B}} = \mathbf{1} + \mathbf{B} + \frac{1}{2}\mathbf{B}^2 + \dots + \frac{1}{n!}\mathbf{B}^n + \dots,$$

据此证明下列性质:

(a) 只要 \mathbf{B} 和 \mathbf{C} 是可以交换的, 则 $e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{C}} = e^{\mathbf{B}+\mathbf{C}}$;

(b) $\mathbf{A}^{-1} = e^{-\mathbf{B}}$;

(c) $e^{\mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}} = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}$;

(d) 如果 \mathbf{B} 是反对称的, 则 \mathbf{A} 是正交的。

(e) 如果 \mathbf{B} 是厄密的, 则 $e^{i\mathbf{B}}$ 是么正的。

13. 证明: \mathbf{Q}_θ 可用符号表达成

$$\mathbf{Q}_\theta = e^{i\sigma(\theta/2)},$$

式中的指数取作它的级数展开式, 其首项是 1。

14. (a) 证明三个泡利自旋矩阵互相反对易, 即

$$\sigma_i \sigma_j = -\sigma_j \sigma_i \quad i \neq j,$$

而且它们服从对易关系式

$$\sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i \equiv [\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k.$$

(b) 证明: 对于所有的 i 值, $\sigma_i^2 = 1$.

(c) 如果 σ 代表一个矢量, 其分量为 σ_i , 证明: 如果 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 是任何两个矢量, 则

$$(\sigma \cdot \mathbf{A})(\sigma \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + i\sigma \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}),$$

并因而有

$$[\sigma \cdot \mathbf{A}, \sigma \cdot \mathbf{B}] = 2i\sigma \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}).$$

15. 在把 z 轴作为有限转动转轴的轴系内, 转动矩阵由式 (4-44) 给出, 式中 θ 代之以有限转动角 Φ . 把它变换到任意坐标系, 并用有限转动轴的方向余弦来表示正交变换矩阵, 从而推导转动公式 (4-92).

16. (a) 在式 (4-73') 的基础上证明:

$$\mathbf{r}' \cdot \sigma = \mathbf{r} \cdot \sigma + [\mathbf{Q}, \sigma \cdot \mathbf{r}] \mathbf{Q}^+.$$

(b) 利用这一结果, 以及 \mathbf{Q} 的表示式 (4-98) 和前面的习题 12, 推导转动公式 (4-92).

17. (a) 假设转过 Φ_1 角和 Φ_2 角的两次相继坐标转动, 等效于转过 Φ 角的单次转动. 证明: Φ_1 , Φ_2 和 Φ 可以看作是一个球面三角形的三条边, Φ 的对角是两个转轴之间的夹角.

(b) 证明: 绕任何给定轴的转动可以作为两次相继转动之乘积, 每一次转动都转过 180° .

18. (a) 证明: 排列符号满足用克朗内克 δ 符号表示的等式

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{rmp} = \delta_{ir}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jr}.$$

(b) 证明

$$\epsilon_{ijp}\epsilon_{ijk} = 2\delta_{pk}.$$

19. 证明: 角速度沿空间轴系各轴的分量是用欧拉角表示的, 它们的形式为

$$\omega_x = \dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\phi,$$

$$\omega_y = \dot{\theta}\sin\phi - \dot{\psi}\sin\theta\cos\phi,$$

$$\omega_z = \dot{\theta}\cos\theta + \dot{\phi}.$$

20. 证明: 欧拉参量 e_0 具有运动方程

$$-2\dot{e}_0 = e_1\dot{\omega}_x + e_2\dot{\omega}_y + e_3\dot{\omega}_z,$$

式中的撇号代表体轴系。求其他三个欧拉参量和复凯瑞-克莱因参量 α 和 β 的相应方程。

21. 直接证明：由式 (4-117) 给出的无限小转动矩阵的生成元 \mathbf{M}_i 服从对易关系式

$$[\mathbf{M}_i, \mathbf{M}_j] = \epsilon_{ijk} \mathbf{M}_k.$$

22. 一质点以初速 v_0 垂直上抛至最大高度处并落回地面。证明：当它再次到达地面时的科里奥利偏转与它从相同的最大高度处由静止下落到地面时的科里奥利偏转相比，方向相反，量值则是后者的四倍。

23. 一炮弹沿地球表面水平发射。证明：在一级近似下，由科里奥利力引起的与发射方向的偏离角度将随时间线性地变化，变化率为

$$\omega \cos \theta,$$

式中 ω 是地球转动角频率， θ 是余纬度，它的方向在北半球应偏向右侧。

24. 傅科摆实验是在转动着的地球表面上某点处设置的一个运动中的长摆，使它的动量最初位于包含摆锤和悬点的竖直平面内。证明：在以后的运动中，振荡平面每天均匀地转过 $2\pi \cos \theta$ 度，这里的 θ 是余纬度。试问转动方向如何？如果需要，可以利用微幅振荡的近似。

第五章 刚体运动方程

第四章已经介绍了描述刚体运动所需的全部运动学手段。用欧拉角组成的三个坐标确实相当不对称，但是作为描述刚体取向的广义坐标还是合适的。此外，正交变换方法和有关的矩阵代数研究刚体运动的特性提供了有效而又简洁的技巧。在推导空间坐标系中与体轴系中所观察到的矢量变化率之间的关系式(4-124)时，我们应用了这种技巧。现在将运用这些手段来获得最佳形式的刚体运动动力学方程。借助于这些运动方程就能讨论一些简单而又极为重要的刚体运动问题。

5-1 绕一点运动的角动量和动能

蔡斯尔定理表明，刚体的一般位移都能用一个平动加上一个转动来描述。该定理指出，应该有可能把刚体运动问题分为两个独立的方面：一个方面仅涉及物体的平动，另一个方面仅涉及物体的转动。当然，如果物体有一点被固定，则这种分离是明显的，因为这时只有绕这一固定点的转动，没有任何平动。但是，即使是一般的运动形式，这种分离也往往是可能的。我们早就按照这种划分，把描述运动所需的六个坐标分成了两组，即描述平动所需的刚体固定点的三个笛卡儿坐标，以及描述绕此固定点的运动的三个坐标，譬如说三个欧拉角。此外，如果体轴系原点选在质心，则根据式(1-28)，总角动量自然将分成质心平动的贡献和绕质心转动的贡献两部分。前一项只含质心的笛卡儿坐标，而后面一项只含角坐标。

根据式(1-31), 类似的划分也适用于总动能 T , 它可以写成形式

$$T = \frac{1}{2} M v^2 + T'(\phi, \theta, \psi),$$

即等于整个物体如果集中在质心时所具动能加上绕质心所作运动的动能之和。

有时也能将势能作类似的划分, 使每一项只含一组坐标, 即平动的或转动的坐标。例如, 均匀引力场中的势能只与重心的笛卡儿垂直坐标有关¹⁾。又如, 若物体所受之力是由均匀磁场 \mathbf{B} 作用于物体的磁偶极矩 \mathbf{M} 产生的, 那么, 势能将正比于 $\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}$, 并只与物体的取向有关。当然, 几乎所有可解的实际问题都允许作这样的分离。在这种情况下, 整个力学问题需要分成两部分, 因为拉氏函数 $L = T + V$ 是划分成两部分的, 一部分只含平动坐标, 另一部分只含角坐标。这两组坐标被完全分离后, 平动问题和转动问题就能彼此独立地求解。因此, 获得绕物体固定点所作运动的角动量和动能表达式显然是重要的。为此, 我们将充分利用式(4-124), 用它来连结相对于固定在刚体内某点的坐标系所取的那些微商。显然, 刚体位移的转动角以及瞬时角速度矢量, 与体轴系原点的选择无关。刚体约束的本质是物体的所有质点应一起运动和转动。然而, 作出正式的证明也并不困难。令 \mathbf{R}_1 和 \mathbf{R}_2 是两个体轴系原点相对于某个固定坐标系的位置矢量(见图 5-1)。用 \mathbf{R} 表示两矢量的差矢量, 则有

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}.$$

如果第二个坐标系的原点认为是相对于第一个来定义的, 则 \mathbf{R}_2 对空间坐标轴的时间微商为

1) 当然, 在均匀的引力场中, 重心与质心是重合的。

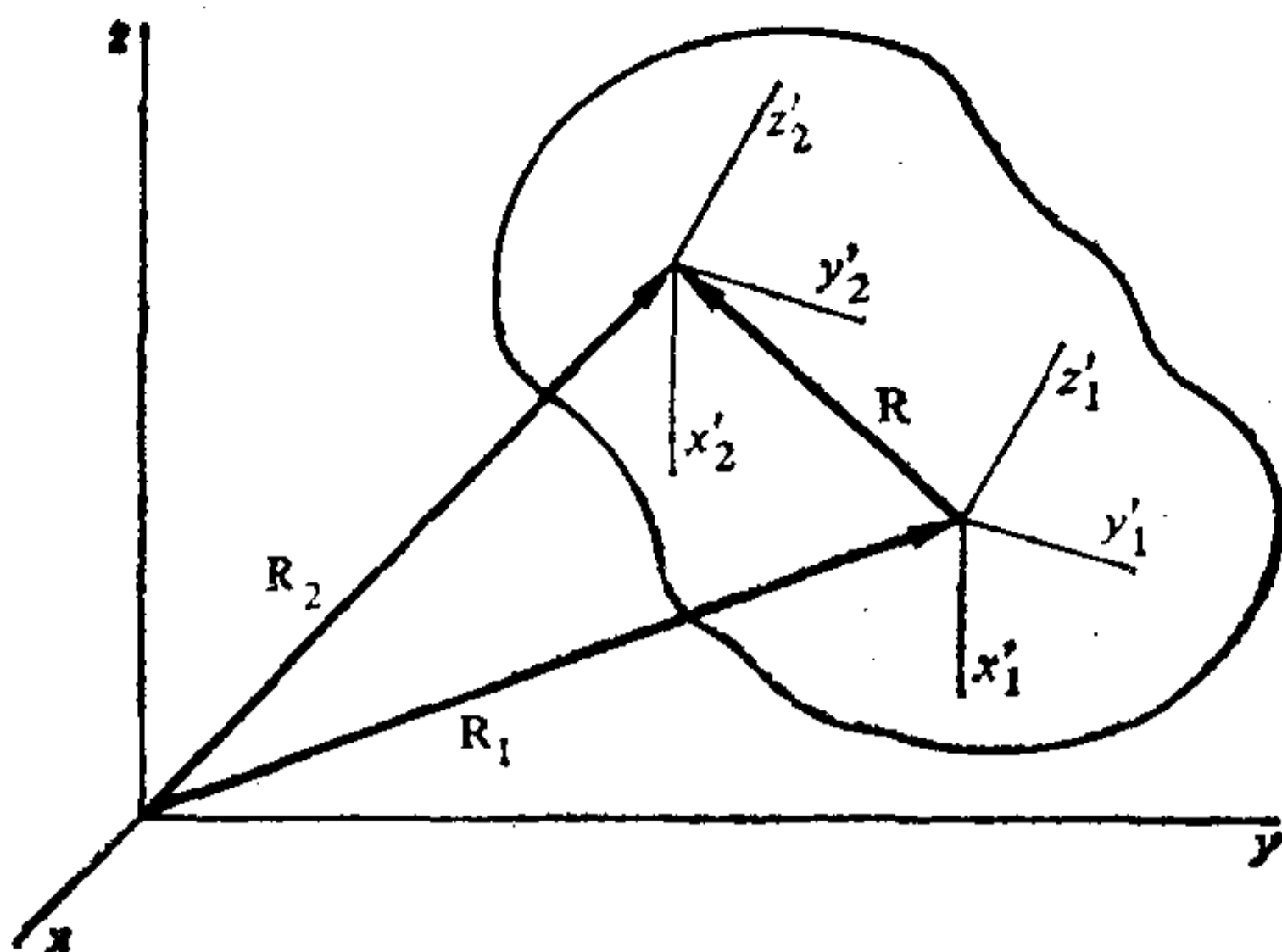


图 5-1 不同原点的刚体坐标系间的矢量关系

$$\left(\frac{d\mathbf{R}_2}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\mathbf{R}_1}{dt}\right)_s + \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\mathbf{R}_1}{dt}\right)_s + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{R}.$$

最后一步得自式 (4-124), 只要记住 \mathbf{R} 对任何刚体坐标轴的微商必定为零, 而 $\boldsymbol{\omega}_1$ 则是适合于第一个坐标系的角速度矢量. 或者也可以把第一个坐标系的原点看作是固定在第二个坐标系内的, 其位置矢量为 $-\mathbf{R}$. 采用同样的方法, 这一原点的位置矢量 \mathbf{R}_1 对固定空间轴的微商能表达成

$$\left(\frac{d\mathbf{R}_1}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\mathbf{R}_2}{dt}\right)_s - \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\mathbf{R}_2}{dt}\right)_s - \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{R}.$$

如所预料, 比较这两个表达式即证明, 两个角速度矢量必定相等:

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_2.$$

角速度矢量对于刚体内的所有坐标系都相同.

若物体运动时有一点固定不动, 则相对于该点的总角动量为

$$\mathbf{L} = m_i(\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i), \quad (5-1)$$

(这里采用了求和约定) 式中 \mathbf{r}_i 和 \mathbf{v}_i 分别是第 i 个质点相对

于给定点的矢径和速度。由于 \mathbf{r}_i 是一个相对于物体的固定矢量，所以，相对于空间坐标系的速度 \mathbf{v}_i 完全由刚体绕固定点的转动所引起。根据式 (4-124)， \mathbf{v}_i 为

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i. \quad (5-2)$$

因此式 (5-1) 能写成

$$\mathbf{L} = m_i[\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)],$$

或者把三重矢积展开，即有

$$\mathbf{L} = m_i[\boldsymbol{\omega} r_i^2 - \mathbf{r}_i(\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega})]. \quad (5-3)$$

再次展开，角动量的 x 分量为

$$L_x = \omega_x m_i (r_i^2 - x_i^2) - \omega_y m_i x_i y_i - \omega_z m_i x_i z_i, \quad (5-4)$$

\mathbf{L} 的其他分量具有相似的表达式。因而角动量的每一个分量都是角速度的所有分量的线性函数。角动量矢量通过线性变换与角速度矢量相关联。为了强调式 (5-4) 与线性变换式 (4-12) 的相似性，我们可以把 L_x 写成

$$L_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z. \quad (5-5)$$

同样可得 L_y 和 L_z 的表达式为

$$L_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z, \quad (5-5')$$

$$L_z = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z.$$

I_{xx}, I_{xy}, \dots 等九个系数是变换矩阵的九个元素。其中的对角元就是通常所说的转动惯量系数，其形式为

$$I_{xx} = m_i (r_i^2 - x_i^2), \quad (5-6)$$

而那些非对角元则称为惯量积，一个典型的惯量积为

$$I_{xy} = -m_i x_i y_i. \quad (5-7)$$

如果刚体由分立质点所组成，则 (5-6) 和 (5-7) 两式所示矩阵元的形式看来都是恰当的。对连续体来说，应以体积积分代替求和，而质点质量应改为质量密度。例如，对角元 I_{xx} 成为

$$I_{xx} = \int_V \rho(\mathbf{r})(r^2 - x^2)dV. \quad (5-6')$$

对连续体来讲,只要略为改变一下符号,就能用一个表达式来说明所有的矩阵元. 因此,如果用 $x_j(j = 1, 2, 3)$ 表示坐标轴,则矩阵元 I_{ik} 能表达成

$$I_{ik} = \int_V \rho(\mathbf{r})(r^2\delta_{ik} - x_jx_k)dV. \quad (5-8)$$

到目前为止,分解 \mathbf{L} 的分量所用坐标系尚待指定. 从现在起,采用固定于物体的坐标系是适宜的¹⁾. 各种距离 x_i, y_i, z_i 也就始终是常数,而那些矩阵元当然同样是常数,它们是所论物体特有的常数,并且与表示矩阵元时所用特定体轴系的原点和取向有关.

可以把与 \mathbf{L} 和 $\boldsymbol{\omega}$ 的分量相关的方程 (5-5) 概括成一个单一的算符方程:

$$\mathbf{L} = \mathbf{l}\boldsymbol{\omega}, \quad (5-9)$$

式中的符号 \mathbf{l} 代表算符, 它的矩阵元是式 (5-5) 中的惯量系数. 对线性变换算符已经有过两种解释(见节 4-2). 显然, 这里的 \mathbf{l} 应认为是作用于矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 而不是作用于坐标系的. 矢量 \mathbf{L} 和 $\boldsymbol{\omega}$ 实际上是具有不同量纲的两个不同的矢量, 并不是仅仅在两个不同坐标系中表示的同一个矢量. 与转动算符不同, \mathbf{l} 将具有 $[ML^2]$ 的量纲, 它不受任何正交性条件的限制. 式 (5-9) 表明, 算符 \mathbf{l} 作用于矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 将得到实际上是新的矢量 \mathbf{L} . 虽然要充分地利用这一符号还得借助于讨论转动算符时发展起来的矩阵代数技巧, 但在这里必须更加注重于算符本身的性质和物理特征. 因此, 有必要首先讨论一下必备的

1) 在第四章中, 用撇号表示这种坐标系. 这里由于很少采用沿空间轴的分量, 为了简化符号, 从现在起, 这一撇号将予省略. 除非另作说明, 本章其余部分所用全部坐标都认为是相对于刚体内坐标系的.

那些数学问题。早已熟悉张量和并矢式的读者，则可直接从节 5-3 开始学习。

5-2 张量和并矢式

由于 \mathbf{l} 和 $\boldsymbol{\omega}$ 之积给出了 \mathbf{L} ，因此，可以把 \mathbf{l} 这个量看作是 \mathbf{L} 和 $\boldsymbol{\omega}$ 之商：

$$\mathbf{l} = \frac{\mathbf{L}}{\boldsymbol{\omega}}.$$

但是两个量的商与相除的因子往往不是同一类量，而可能属于更复杂的类型。例如，两个整数之商一般不是整数，更确切地说是一有理数。同样，两个矢量之商不可能始终规定为矢量一类的量，这是众所周知的。因此，把 \mathbf{l} 看作是一个新型的量，即二级张量就不足为奇了。

在笛卡儿三维空间内， N 级张量 \mathbf{T} 可以按照我们的目的定义为有 3^N 个分量 $T_{ijk}\cdots$ (附有 N 个下标) 的量，它们在坐标的正交变换 \mathbf{A} 的作用下的变换形式为¹⁾

$$T'_{ijk\cdots}(\mathbf{X}') = a_{il}a_{jm}a_{kn}\cdots T_{lmn}\cdots(\mathbf{X}). \quad (5-10)$$

根据这一定义，一个零级张量有一个分量，它在正交变换下不变。因此，标量就是零级张量。一个一级张量有三个分量，其变换形式为

$$T'_i = a_{ij}T_j.$$

与矢量的变换方程 (4-12') 相比较证明，一个一级张量完全

1) 在笛卡儿空间(即具有正交直线轴的空间)内，“协变的”和“抗变的”标志之间没有什么区别，因而也不再需要这种术语。当然，严格说来，这里定义的张量应称为“笛卡儿张量”(见 J. L. Synge 和 A. Schild, Tensor Calculus, Toronto 1949, pp. 127—136)。然而，由于这是本书中将使用的唯一的一种张量(除节 7-3 外)，因而在往后的讨论中将略去这种形容词。

等效于一个矢量¹⁾。最后,一个二级张量的九个分量的变换形式为

$$T'_{ij} = a_{ik}a_{jl}T_{kl}. \quad (5-11)$$

严格说来,必须把二级张量 \mathbf{T} 与由其分量构成的方阵区别开来。一个张量只是根据它在正交坐标变换下的变换性质定义的。而一个矩阵决不会受到它所经历的变换类型的限制,我们考虑矩阵时,完全可以不管它在某种特定类型变换下的性质。然而,不必过份强调这个差别。它们在正交变换范畴内实际上是一致的。张量分量和矩阵元的处理方式相同,对于每一个张量方程都将有一个相应的矩阵方程,反之亦然。根据式(4-41),方阵 \mathbf{V} 的分量在由矩阵 \mathbf{A} 所定义的线性坐标变换下,将按照相似变换来变换:

$$\mathbf{V}' = \mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{A}^{-1}. \quad (5-12)$$

对于正交变换,我们将有

$$\mathbf{V}' = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{V}}$$

或

$$V'_{ij} = a_{ik}a_{kl}a_{jl}. \quad (5-13)$$

与式(5-11)比较表明,在正交变换下,矩阵分量的变换恒等于二级张量分量的变换。矩阵代数的所有术语和运算,象“转置”、“厄密”、“反对称”等等,都能不加改变地适用于张量。张量和矩阵之间的等同性并不限于二级张量。例如,早已知道,作为一级张量的矢量来说,其分量将构成一个列矩阵或行矩阵,矢量的变换完全可以用这些相关的矩阵来处理。

算符 \mathbf{I} 的另一个更为有用的表达式是把它表达成并矢

1) 除反演外,一个三维赝张量将象张量一样变换。一般讲, N 级赝张量的变换方程为[见式(4-110)]

$$T'_{ijk\dots} = |\mathbf{A}|a_{il}a_{jm}a_{kn}\dots T_{lmn\dots}$$

由于刚体运动仅涉及正常转动,所以这里将不再使用一般赝张量。

式。并矢是一对矢量，以一定次序 \mathbf{AB} 表示， \mathbf{A} 是前项， \mathbf{B} 是后项。并矢与矢量 \mathbf{C} 的标积可按两种方式构成，一种是

$$\mathbf{AB} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}),$$

另一种是

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{AB} = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}).$$

第一种情况中的 \mathbf{C} 称为后因子，第二种情况中的 \mathbf{C} 则称为前因子。一般，这两个乘积并不相等，并矢标积是不对易的。应注意的是，在这两种情况中，由标积产生的矢量，其方向和量值一般不同于 \mathbf{C} 。我们还可以把两个并矢的二重标积定义为标量：

$$\mathbf{AB}:\mathbf{CD} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}),$$

一种更为方便的记号是把二重标积表达成

$$\mathbf{AB}:\mathbf{CD} \equiv \mathbf{C} \cdot \mathbf{AB} \cdot \mathbf{D}.$$

并矢式定义为并矢的线性多项式：

$$\mathbf{AB} + \mathbf{CD} + \dots.$$

实际上，如果把矢量 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 表达成用单位矢量 \mathbf{i}, \mathbf{j} 和 \mathbf{k} 表示的分量形式，则任何并矢 \mathbf{AB} 都能表达成并矢式。当用这种方式展开时，该并矢成为

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} = & A_x B_x \mathbf{ii} + A_x B_y \mathbf{ij} + A_x B_z \mathbf{ik} \\ & + A_y B_x \mathbf{ji} + A_y B_y \mathbf{jj} + A_y B_z \mathbf{jk} \\ & + A_z B_x \mathbf{ki} + A_z B_y \mathbf{kj} + A_z B_z \mathbf{kk}. \end{aligned} \quad (5-14)$$

式 (5-14) 是并矢的九元素形式，这样称呼它是由于它含有九个系数。显然，同类并矢式总能够化为九元素形式。不难证明，并矢式的九元素表达式的系数在正交变换下将严格地象二级张量的分量一样来变换(参阅本章习题 1)。它们作为作用在矢量上的算符的作用也相同，因为我们已经看到，一个并矢或并矢式与一个矢量的标积生成一个新的矢量，犹如 \mathbf{l} 和 ω 之积给出 \mathbf{L} 一样。所以一个并矢式始终等同于一个二级张

量。

一个有用的并矢式是单位并矢式 $\mathbf{1}$ ，它定义为一个九元素表示式

$$\mathbf{1} = \mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk}. \quad (5-15)$$

这样来构想单位并矢式颇为有理，因为 $\mathbf{1}$ 的矩阵确实是单位矩阵，直接相乘证明：

$$\mathbf{1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{A}.$$

5-3 惯性张量和转动惯量

现在来考虑一个使 $\boldsymbol{\omega}$ 变换到 \mathbf{L} 的线性算符，即矩阵 \mathbf{I} 它的元素就象是某个二级张量的元素。所以， \mathbf{I} 这个量也可以看作是一个二级张量，通常称为惯性张量或简称惯性张量。用并矢式符号， \mathbf{I} 可以简写成

$$\mathbf{I} = m_i(r_i^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i), \quad (5-16)$$

因为这样一来，

$$\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} = m_i[r_i^2 \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}_i(\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega})] = \mathbf{L}$$

恰好与式 (5-3) 相符。采用并矢式形式的 \mathbf{I} ，其优点是使我们仍可采用惯常的矢量处理方法。例如，我们将因此能以固有形式用并矢式 \mathbf{I} 表达转动动能。绕一点所作运动的动能为

$$T = \frac{1}{2} m_i v_i^2,$$

式中的 \mathbf{v}_i 是在空间坐标系内测得的第 i 个质点相对于某固定点的速度。根据式 (5-2)， T 也可以表达为

$$T = \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i),$$

把三重标积中的矢量交换一下，上式将成为

$$T = \frac{\boldsymbol{\omega}}{2} m_i (\mathbf{r} \times \mathbf{v}_i).$$

对所有 i 求和所得之量可认为是物体绕原点的角动量, 因而动能可写为

$$T = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}}{2} = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\omega}}{2}. \quad (5-17)$$

设 \mathbf{n} 是 $\boldsymbol{\omega}$ 方向上的单位矢量, 从而 $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{n}$. 这样, 动能的另一种形式为

$$T = \frac{\omega^2}{2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{l} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (5-18)$$

式中 I 是一个标量, 其定义为

$$I = \mathbf{n} \cdot \mathbf{l} \cdot \mathbf{n} = m_i [r_i^2 - (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n})^2], \quad (5-19)$$

并称为关于转动轴的转动惯量.

在通常初级教材的讨论中, 关于某轴的转动惯量定义为: 质点的质量乘以离轴垂直距离平方所得之积对物体所有质点所求之和. 必须指出, 这个定义与 (5-19) 形式的表达式相一致. 垂直距离等于矢量 $\mathbf{r}_i \times \mathbf{n}$ 的量值(见图 5-2). 因此, I 的惯用定义可以写成

$$I = m_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{r}_i \times \mathbf{n}).$$

乘以并除以 ω^2 , I 的这一定义也可写成

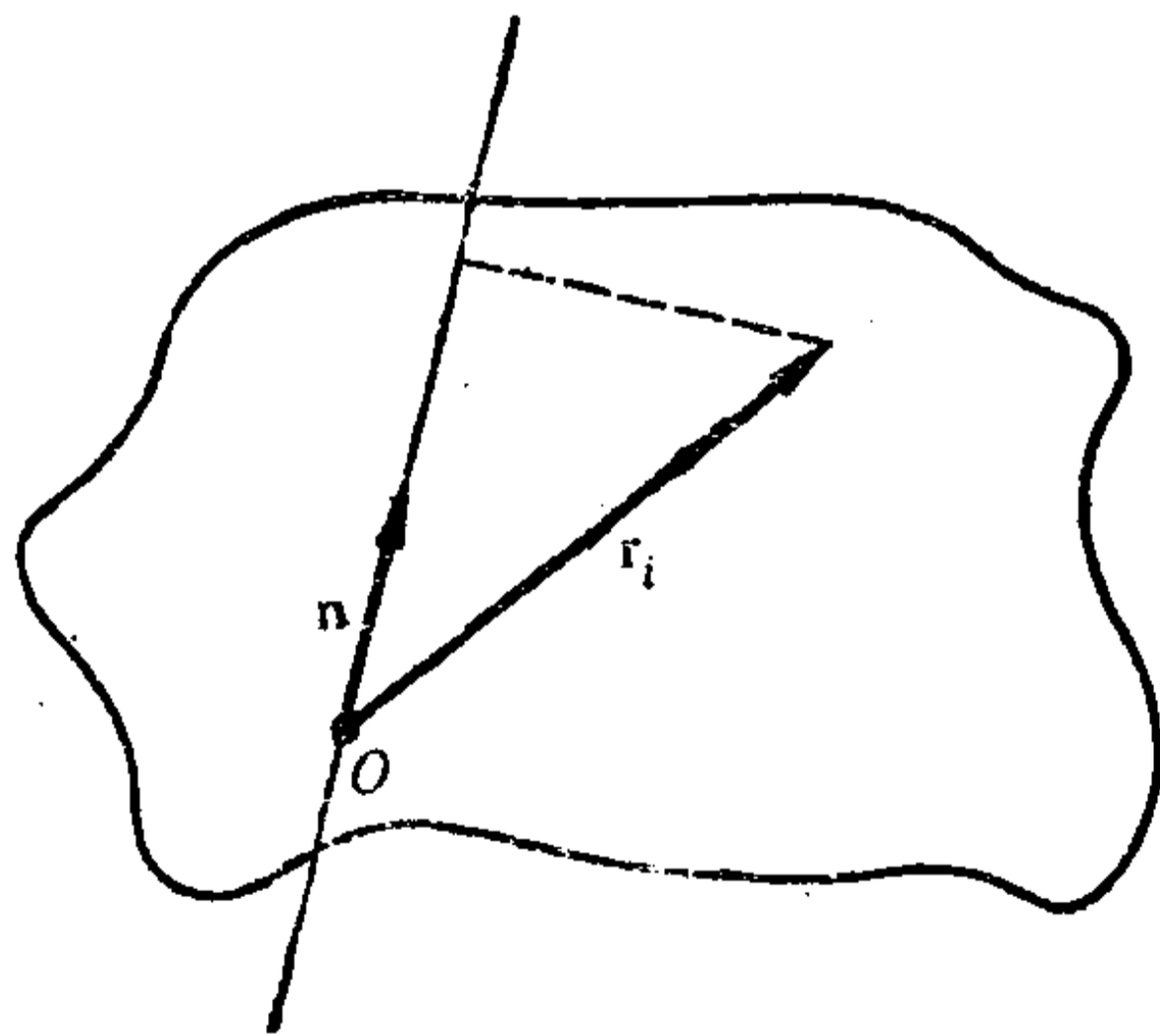


图 5-2 转动惯量定义的图解

$$I = \frac{m_i}{\omega^2} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i).$$

但是这个标积中的各个矢量正好是空间坐标系内测得的相对速度 \mathbf{v}_i . 因此, 这样定义的 I 与动能的关系为

$$I = \frac{T}{2\omega^2},$$

它与式(5-18)相同,因而, I 也必定与式(5-19)定义的标量相一致。

转动惯量的量值与转动轴的方向有关。由于 ω 相对于物体的方向通常是随时改变的,所以也应把转动惯量看作是时间的函数。当物体因所受约束而只能绕一固定轴转动时,转动惯量是一常量。在这种情况下,式(5-17)中的动能几乎已是拉氏函数和运动方程所要求的形式。进而需要的一步,仅仅是把 ω 表达成某个角度的时间微商,这通常是不难做到的。

和惯性张量一样,转动惯量也与体轴系原点的选择有关。然而,关于某一给定轴的转动惯量与关于通过质心的平行轴的转动惯量之间有着简单的关系。设从给定原点 O 到质心的矢径为 \mathbf{R} , 并设从 O 点和质心到第 i 个质点的矢径分别为 \mathbf{r}_i 和 \mathbf{r}'_i 。这样定义的几个矢量相互联系的关系式为(见图 5-3)

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i \quad (5-20)$$

因此,关于 a 轴的转动惯量为

$$\begin{aligned} I_a &= m_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{n})^2 \\ &= m_i [(\mathbf{r}'_i + \mathbf{R}) \\ &\quad \times \mathbf{n}]^2 \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} I_a &= M(\mathbf{R} \times \mathbf{n})^2 \\ &\quad + m_i (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{n})^2 \\ &\quad + 2m_i (\mathbf{R} \times \mathbf{n}) \\ &\quad \cdot (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{n}), \end{aligned}$$

式中 M 是物体的总质量。这一表达式中的最后一项重新整理后

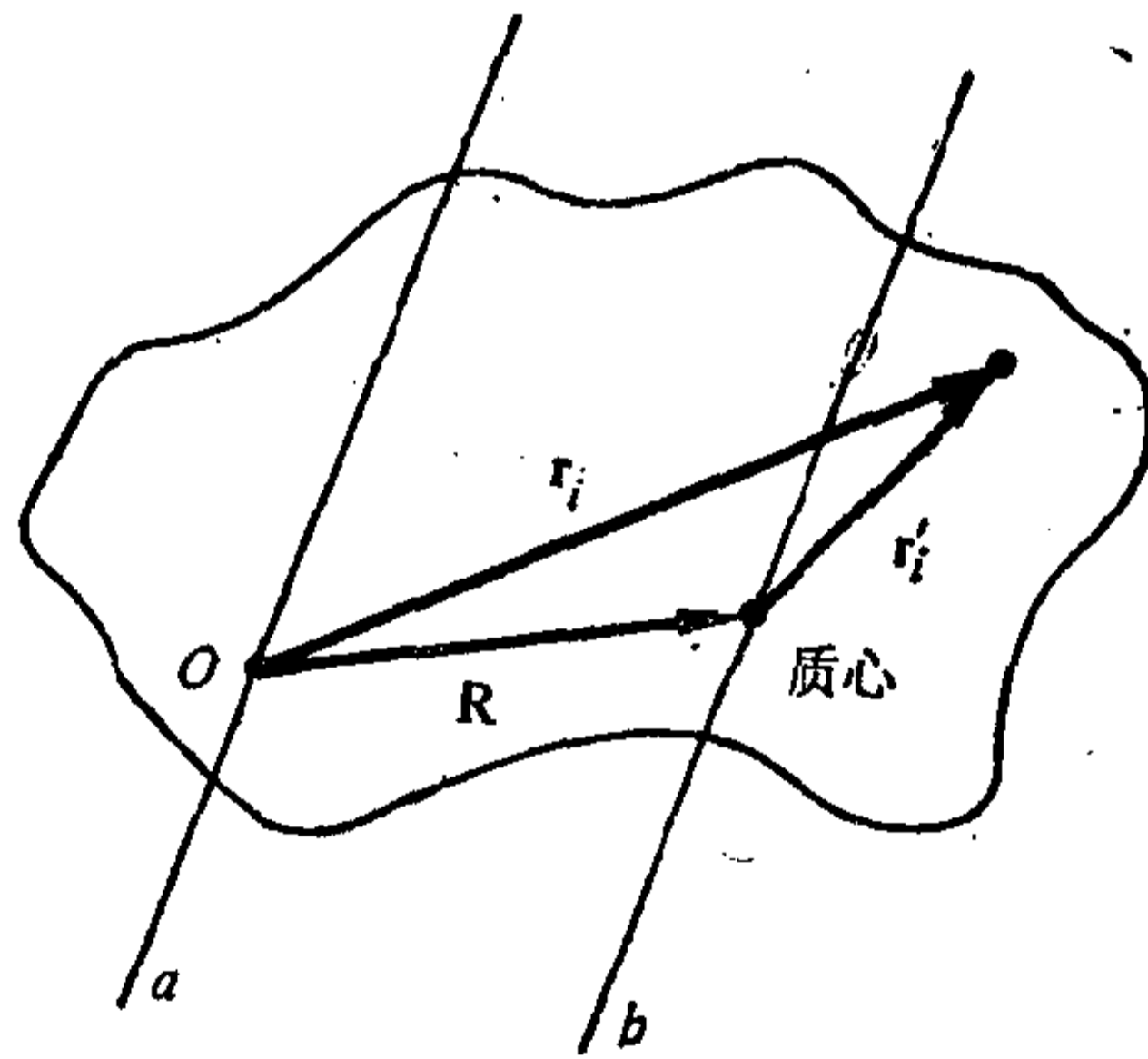


图 5-3 关于平行轴的两个转动惯量之间的关系式中涉及到的几个矢量

为 $-2(\mathbf{R} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n} \times m_i \mathbf{r}'_i)$.

根据质心的定义,和式 $m_i \mathbf{r}'_i$ 等于零. 因此, I_a 可以用关于平行轴 b 的转动惯量表达为

$$I_a = I_b + M(\mathbf{R} \times \mathbf{n})^2. \quad (5-21)$$

$\mathbf{R} \times \mathbf{n}$ 的量值等于质心到过 O 点的轴的垂直距离. 因此, 关于给定轴的转动惯量等于下列两惯量之和, 即关于过质心的平行轴的转动惯量与把物体质量看作是集中于质心时物体关于原来轴的转动惯量之和.

我们能够推导得惯性张量本身的相似的分解形式. 根据式 (5-20) 可得

$$r_i^2 = R^2 + r_i'^2 + 2\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}'_i.$$

在并矢式形式的式 (5-15) 中, 关于原点 O 的惯性张量可表达成

$$\begin{aligned} \mathbf{I} = & MR^2 \mathbf{1} + m_i [(r_i'^2 + 2\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}'_i) \mathbf{1} - (\mathbf{r}'_i \mathbf{r}'_i + \mathbf{R} \mathbf{r}'_i + \mathbf{r}'_i \mathbf{R})] \\ & - M \mathbf{R} \mathbf{R}. \end{aligned}$$

所有 $m_i \mathbf{r}'_i$ 形式之和都等于零, 因此, 表达式化为

$$\mathbf{I} = m_i (r_i'^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}'_i \mathbf{r}'_i) + M (R^2 \mathbf{1} - \mathbf{R} \mathbf{R}). \quad (5-22)$$

第一项是关于质心的惯性张量 I' , 第二项是位于质心的、质量为 M 的单个单点关于 O 点的惯性张量. 因此, 关于质心的转动惯量和惯性张量都具有一种分解型式, 它们非常类似于节 1-2 中所得到的线动量、角动量和动能的分解型式.

5-4 惯性张量的本征值和主轴变换

前面的讨论强调了惯性张量在论述刚体运动时所起的重要作用. 为此, 探讨这个张量以及与它相关的矩阵的性质是有益的. 根据定义方程 (5-7) 可见, 张量的各个分量是对称的, 即

$$I_{xy} = I_{yx}.$$

由于所有分量都是实数, 所以这个张量等于它的伴张量 [见式

(4-38)]，这就是说， \mathbf{I} 是自伴的或厄密的。所以，虽然惯性张量一般有九个分量，但其中独立的只有六个分量，即三个对角元和三个非对角元。

惯性系数既与体轴系原点的位置有关，也与这些轴相对于这物体的取向有关。当然，如果对某一给定的原点能够找到一个特定取向的体轴系，使惯性张量对角化，那将带来很大方便，这时的并矢式能够表达成

$$\mathbf{I} = I_1 \mathbf{ii} + I_2 \mathbf{jj} + I_3 \mathbf{kk}.$$

对于这样一组坐标轴， \mathbf{L} 的每一个分量都只包含 $\boldsymbol{\omega}$ 的相应分量，因此有¹⁾

$$L_1 = I_1 \omega_1, \quad L_2 = I_2 \omega_2, \quad L_3 = I_3 \omega_3. \quad (5-23)$$

动能的形式也可作类似的简化：

$$T = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}}{2} = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2. \quad (5-24)$$

能够证明，总有可能找到这种坐标轴，主要依据是惯性张量的厄密本质。

在节 4-6 中已表明，把矩阵变换成对角化形式，就能够解出该矩阵的本征值方程，因为所得对角矩阵的元素就是所求本征值。因此，寻找一组使 \mathbf{I} 对角化的坐标轴的问题等于是求 \mathbf{I} 矩阵的本征值问题， I_1 ， I_2 和 I_3 即是有关的三个本征值。其次，对于保证 \mathbf{I} 是对角化的坐标系来说，各轴的方向与本征矢的方向相一致。例如，假设 $\boldsymbol{\omega}$ 沿 x 轴，那么，根据式(5-23)可知，角动量 $\mathbf{L} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$ 同样沿 x 轴。因此， \mathbf{I} 对平行于三个坐标轴的任一矢量的作用将产生沿相同方向的另一个矢量。根据定义，这一矢量必定是 \mathbf{I} 的本征矢之一。

在节 4-6 中，我们概述了使任意矩阵对角化、并求出它的

1) 为了进一步的应用，有关这些坐标轴的分量将用 1, 2, 3 作为下标。

本征值的应有步骤。但是，这种步骤本身并不能证明必然有一个保证 \mathbf{l} 是对角化的实笛卡儿坐标系。比如说，我们应该记得，除去无效解情况外，一个正交矩阵只有一个实数本征值，因而也只有一个实际方向与本征矢（即转轴）相对应。与此相反，我们在此要证明的是， \mathbf{l} 的所有本征值都是实数，而且本征矢的三个实际方向彼此正交¹⁾。

令 \mathbf{R}_j 是 \mathbf{l} 的第 j 个本征矢，其本征值为 l_j 。那么，相应的本征值方程是²⁾

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{R}_j = l_j \mathbf{R}_j. \quad (5-25)$$

如果 \mathbf{R}_l 同样代表第 l 个本征矢，那么， \mathbf{R}_l^* 与式 (5-25) 的左乘标积为

$$\mathbf{R}_l^* \cdot \mathbf{l} \cdot \mathbf{R}_j = l_j \mathbf{R}_l^* \cdot \mathbf{R}_j. \quad (5-26)$$

按照式 (5-25) 的模式， \mathbf{R}_l 的本征值方程的复共轭为

$$\mathbf{l}^* \cdot \mathbf{R}_l^* = l_l^* \mathbf{R}_l^*. \quad (5-27)$$

已经知道，通过转置可以使一个并矢和一个矢量的标积的次序相互交换，正象一个方阵与一个列矩阵的乘积一样。从形式上看，如果 \mathbf{A} 是一个并矢， \mathbf{P} 是一个矢量，则标积的第 i 个分量为

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{P})_i = A_{ik} P_k = P_k (\tilde{\mathbf{A}})_{ki} = (\mathbf{P} \cdot \tilde{\mathbf{A}})_i.$$

因此，式 (5-27) 能表达成

$$\mathbf{R}_l^* \cdot \mathbf{l}^* = l_l^* \mathbf{R}_l^*. \quad (5-27')$$

取 \mathbf{R}_j 与这一结果的右乘标积，即得

$$\mathbf{R}_l^* \cdot \mathbf{l}^* \cdot \mathbf{R}_j = l_l^* \mathbf{R}_l^* \cdot \mathbf{R}_j. \quad (5-28)$$

由于 \mathbf{l} 是厄密的，所以 (5-26) 和 (5-28) 两式的左边相同，因

-
- 1) 利用矩阵 \mathbf{X} 使 \mathbf{l} 通过一相似变换达到对角化，那么，这些条件表明， \mathbf{X} 必定是一个**实正交**矩阵，即 \mathbf{X} 使一个实笛卡儿坐标系变换到另一个实笛卡儿坐标系。
 - 2) 从式 (5-25) 到 (5-29) 都不对下标 j 或 l 求和，这从所作的论述来看是明显的。

而这两个方程之差为

$$(I_j - I_i^*)\mathbf{R}_i^* \cdot \mathbf{R}_j = 0. \quad (5-29)$$

如果 i 等于 j , $\mathbf{R}_i^* \cdot \mathbf{R}_i = |\mathbf{R}_i|^2$ 必定是一个正定值。因此, 只有在 $I_i = I_i^*$ 的情况下, 式 (5-29) 才等于零, 这就证明了所要求的一个结果。注意, 证明中只用了 \mathbf{l} 的厄密性质——任何厄密矩阵的本征值都是实数。由于 \mathbf{l} 也是实数, 所以本征矢 \mathbf{R}_i 的方向余弦必定同样是实数, 正如从式 (5-25) 能够看到的一样。

如果所选 i 不等于 j , 本征值也不相同, 这时, 只有当 $\mathbf{R}_i^* \cdot \mathbf{R}_j$ 等于零时, 式 (5-29) 才能得到满足, 这证明了第二个必要条件, 即本征矢必须是正交的¹⁾。如果本征值不是全部不相同, 这种正交性的证明不能成立。但是, 要补救也没有多大困难。举例来说, 假设有两个本征值相等, 即 $I_2 = I_3$ 。那么, 对于这两个本征值来讲, 总有可能找到至少一个本征矢满足式 (5-25)。根据式 (5-29), 这一本征矢与不同本征值 I_1 的本征矢正交。因此能够找到一个右旋笛卡儿坐标系, 使单位矢量 \mathbf{i} 和 \mathbf{j} 沿着上面所得到的两个本征矢的方向。根据本征矢方程

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{i} = I_1 \mathbf{i}, \quad \mathbf{l} \cdot \mathbf{j} = I_2 \mathbf{j}$$

可知, 在这一坐标系内, $I_{12} = I_{13} = I_{23} = 0$ 。但是 \mathbf{l} 的对称性又表明 $I_{31} = I_{32} = 0$, 即在这一系统内的惯性张量是对角化的, 而且 \mathbf{k} 也是 \mathbf{l} 的一个本征矢, 其本征值为 I_2 。这就直接表明, 在由 \mathbf{j} 和 \mathbf{k} 所规定的平面内的任何矢量都是以 I_2 作

1) 这里给出的证明与常微分方程中的斯特姆-刘维问题的理论极为相似。那里证明了厄密微分算符的本征值是实数, 还证明了微分方程的相应本征函数解是正交的。这种相似性并不是偶然的, 我们总是能够构成一些矩阵量, 使之与斯特姆-刘维微分方程有关的任何一个给定的问题相对应, 这一点也正是量子论中矩阵力学表述与波动力学表述之间的对应性中发生的情况。例如, 可以参阅 G. F. Arfken, *Mathematical Methods for Physics*, 节 9.2.

为本征值的本征矢¹⁾。同样,如果所有本征值都相同,则空间内的所有方向都是本征矢。但是, I 在一开始就将是对角的,没有必要再对角化了。

因此,利用矩阵代数方法能够证明:对于刚体内的任何一点都能找到一组使惯性张量是对角化的笛卡儿坐标轴。这些轴称为主轴,而相应的对角元 I_1, I_2 和 I_3 则称为主转动惯量。给出了某个初始的体轴系,就能通过特定的正交变换变换到主轴,这种正交变换称为主轴变换。事实上,主转动惯量当然是 I 的本征值,它们将作为特征方程的根来求解。回顾一下导致特征方程的那些步骤将会看到,形式为

$$(I - I_1) \cdot \mathbf{R} = 0 \quad (5-30)$$

的本征值方程[见式(5-25)],对应于本征矢分量的一组三个线性齐次方程。要这些方程相容,它们的系数行列式必须等于零:

$$\begin{vmatrix} I_{xx} - I & I_{xy} & I_{zx} \\ I_{xy} & I_{yy} - I & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{yz} & I_{zz} - I \end{vmatrix} = 0, \quad (5-31)$$

此式明显地显示了 I 的对称性。式(5-31)是特征方程,它是 I 的三次式,它的三个根正是所要求的主转动惯量。求解式(5-22)能得到对应于每一个根的主轴方向。在大多数容易求解的刚体动力学问题中,只要查对一下就能确定主轴。例如,我们几乎总要论及这样一些刚体,它们是绕某轴旋转的固体,体轴系原点就在对称轴上。所有垂直于对称轴的方向都

1) 从可能的非正交本征矢量组构成正交本征矢量组的一个等效的、也许还是更一般的步骤,是线性代数中的格拉姆-施密特正交化过程。可以参阅 J. A. Eisele 和 R. M. Mason, *Applied Matrix and Tensor Analysis*, Wiley-Interscience, N. Y., 1970, pp. 16—21, 或 M. C. Pease, *Methods of Matrix Algebra*, Academic, N. Y., 1965, pp. 56—61. 在第 253 页以后,也有关于简正模结构方面的类似讨论。

相同，这标志着特征方程有二重根。主轴也就是对称轴以及垂直于对称轴的平面内任何两个相互垂直的轴。

主转动惯量不可能是负值，因为在主轴系内的对角元是平方和的形式。例如 I_{xx} 是[见式(5-6)]

$$I_{xx} = m_i(y_i^2 + z_i^2).$$

为使某一个主转动惯量为零，必须要求物体的每一个质点都有两个坐标为零。显然，要出现这种情况，物体的所有各点必须与对应于零值主转动惯量的主轴成一直线。任何两个垂直于物体的这根线的轴将是另外的两个主轴。事实上，这显然是物体的对称轴通过原点的极限情况。

通过某些几何考虑，也可以导出有关主轴的概念，这是历史上研究这一课题的最早的方法。关于给定轴的转动惯量已定义为 $I = \mathbf{n} \cdot \mathbf{l} \cdot \mathbf{n}$ 。设此轴的方向余弦为 α, β 和 γ ，则

$$\mathbf{n} = \alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j} + \gamma \mathbf{k},$$

因而 I 能表达成

$$I = I_{xx}\alpha^2 + I_{yy}\beta^2 + I_{zz}\gamma^2 + 2I_{xy}\alpha\beta + 2I_{yz}\beta\gamma + 2I_{zx}\gamma\alpha. \quad (5-32)$$

这里显然利用了 \mathbf{l} 的对称性质。为方便起见，特定义一个矢量 ρ ：

$$\rho = \frac{\mathbf{n}}{\sqrt{I}}. \quad (5-33)$$

这样定义的 ρ 的量值与关于方向为 \mathbf{n} 的轴的转动惯量有关。用这个新矢量的分量来表示式(5-32)，所得形式为

$$I = I_{xx}\rho_1^2 + I_{yy}\rho_2^2 + I_{zz}\rho_3^2 + 2I_{xy}\rho_1\rho_2 + 2I_{yz}\rho_2\rho_3 + 2I_{zx}\rho_3\rho_1. \quad (5-34)$$

如果把方程看作是 ρ_1, ρ_2 和 ρ_3 这三个变量的函数，它将成为 ρ 空间内某个曲面的方程。严格说来，式(5-34)是一个椭球方程，该椭球称为惯性椭球。众所周知，它总是能够变换到某

一笛卡儿坐标系,从而使椭球方程具有标准的形式

$$I = I_1 \rho_1'^2 + I_2 \rho_2'^2 + I_3 \rho_3'^2, \quad (5-35)$$

而椭球的主轴则沿各个新的坐标轴. 然而,式(5-34)正好是惯性张量 I 为对角化的坐标系内的方程所具有的形式. 因此,把椭球方程变换到它的标准形式的坐标变换,实际上就是前面讨论过的主轴变换. 主转动惯量决定了惯性椭球的轴的长度. 如果特征方程有两个根相等,惯性椭球将有两个等轴,因而是一个旋转椭球. 如果三个主转动惯量都相等,则惯性椭球是一个球.

与转动惯量密切相关的一个量是迴转半径 R_0 , 它由方程

$$I = MR_0^2 \quad (5-36)$$

决定. 用迴转半径表示的矢量 ρ 能够表达成

$$\rho = \frac{\mathbf{n}}{R_0 \sqrt{M}}.$$

到惯性椭球上某点的矢径与绕这矢量方向的迴转半径成反比.

也许值得再次强调的是, 惯性张量 I 以及与它相关的所有量(主轴、主转动惯量、惯性椭球等)仅仅与固定于物体的某个特定点有关. 如果该点移至物体内其他地方, 所有的量一般都要变化. 因此,式(5-22)给出了参照点从质心移至其他某点时的效应. 在质心处使 I' 对角化的主轴变换不一定能使 $M(R^2 I' - \mathbf{R}\mathbf{R})$ 这一差项对角化, 所以它一般也不是被移动张量 I 的主轴变换. 只有当移位矢量 \mathbf{R} 沿着与质心有关的主轴之一时, 差张量才是该系统内的对角化张量. 在这种特殊情况中, 新的惯性张量 I 具有它在质心处时的相同的主轴. 然而, 主转动惯量是变化的, 只有对应于移位轴的是例外, 因为在这种情况下的差张量显然等于零. 对角化形式惯性张量的“平行轴”定理也就具有一种相当特殊而又受到限制的形式.

5-5 求解刚体问题和欧拉运动方程的方法

到目前为止，我们实际上已经汇集了建立和求解刚体动力学问题所需的一切手段。如果出现非完全约束，则必须采用特殊的方法把这些约束的影响包含在运动方程组内。例如，当存在“滚动约束”时，必须象节 2-4 中那样通过拉格朗日待定乘子法把这些约束引进运动方程组。象节 5-1 中已经讨论过的那样，人们通常总是在物体内寻找一个特定的参照点，使问题分解成两个各别的部分，一部分纯粹是平动，另一部分纯粹是绕参照点的转动。当然，如果物体有一点是固定在惯性系内的，那么该点显然就是参照点。所要考虑的仅是绕该固定点的转动问题。对于没有固定点的物体，参照点几乎总是质心。已经看到，总动能和角动量将被巧妙地分解成两项，一项与质心的平动有关，另一项只涉及绕质心的转动。因此，式 (1-31) 可写成

$$T = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2.$$

对于许多问题(当然都是这里将考虑的那些问题)，类似的分解方法也适用于势能。因而能够独立地对质心的平动和绕质心的转动来求解问题。例如，可以直接使用牛顿运动方程，即关于质心运动的式 (1-22) 以及绕该点所作运动的式 (1-26')。对于完全保守系统，拉格朗日表述是适合的，这时的拉氏函数形式为

$$L(q, \dot{q}) = L_c(q_c, \dot{q}_c) + L_b(q_b, \dot{q}_b).$$

这里的 L_c 是拉氏函数中与质心的广义坐标 q_c (和广义速度 \dot{q}_c) 相关的部分， L_b 则是与物体相对于质心的取向有关的部分，因为这一部分是用 q_b 和 \dot{q}_b 来描述的。因此，实际上存在两个不同的问题，一个问题的拉氏函数为 L_c ，另一问题的拉

氏函数为 L_b 。在牛顿和拉格朗日两种表述中,采用参照点的主轴系统是有利的,因为转动动能可取式(5-24)中给出的简单形式。到目前为止,对于刚体的转动,我们已经有的唯一适当的广义坐标是欧拉角。当然,所论运动实际上往往限于二维运动,就象刚性薄片在平面内的运动那样。这时的转动轴被固定在垂直于平面的方向上,因此只需要一个转动角,从而免去了繁琐的欧拉角方法。

对于绕某一固定点或质心的转动,直接采用牛顿处理方法能够得到一组称为欧拉运动方程的方程组。我们可以考虑原点位于刚体固定点的惯性系,或者是原点位于质心的空间坐标系。在这两种情况中,式(1-26)是适用的,并可简单地表达成

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_s = \mathbf{N}.$$

用下标 s 是因为求取时间微商时的参照轴并不参与物体的转动。然而,可以用式(4-124)来求得对固定于物体的坐标轴的微商:

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_b + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L},$$

或者去掉下标“ b (物体)”:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{N}. \quad (5-37)$$

式(5-37)就是相对于物体坐标轴的适当的牛顿运动方程。式(5-37)的第 i 个分量可写成

$$\frac{dL_i}{dt} + \epsilon_{ijk}\omega_j L_k = N_i. \quad (5-38)$$

假如物体坐标轴被取作与参照点有关的主轴,角动量分量将是 $L_i = I_i\omega_i$ 。于是式(5-38)的形式将为

$$I_i \frac{d\omega_i}{dt} + \epsilon_{ijk} \omega_j \omega_k I_k = N_i, \quad (5-39)$$

这是由于主转动惯量当然是与时间无关的¹⁾。采用展开的形式构成三个方程,使式(5-39)的形式成为

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_3 (I_2 - I_3) &= N_1, \\ I_2 \dot{\omega}_2 - \omega_3 \omega_1 (I_3 - I_1) &= N_2, \\ I_3 \dot{\omega}_3 - \omega_1 \omega_2 (I_1 - I_2) &= N_3. \end{aligned} \quad (5-39')$$

式(5-39)或(5-39')是具有一固定点的刚体的所谓欧拉运动方程。它们也能根据(1-53)形式的拉格朗日方程来推导,在式(1-53)中,广义力 Q_i 是对应于转动欧拉角的力矩。然而,只有一个欧拉角才具有沿某一物体坐标轴的相关力矩,其余两个欧拉方程必须根据循环排列取得(见习题8)。

5-6 无力矩刚体运动

在刚体动力学中,能够应用欧拉方程的一个问题是刚体不受任何净力或净力矩时的运动。这时的质心或是静止或是作匀速运动。在质心处于静止的参照系内来讨论转动,并不会减少所得解的普遍性。在这种情况下,角动量仅是由绕质心的转动引起的,欧拉方程将是整个系统的运动方程。在没有任何净力矩时,方程组将化为

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 &= \omega_2 \omega_3 (I_2 - I_3), \\ I_2 \dot{\omega}_2 &= \omega_3 \omega_1 (I_3 - I_1), \\ I_3 \dot{\omega}_3 &= \omega_1 \omega_2 (I_1 - I_2). \end{aligned} \quad (5-40)$$

当然,这个方程组也能够描述有一固定点的刚体在无净外力矩作用下的运动。由于动能和总角动量必定始终是常数,所以运动的这两个直接积分是知道的。有了这两个积分,就能

1) 显然,作为矢量方程的第 i 个方程,式(5-39)并不涉及对 i 的求和,当然,对重复下标 j 和 k 是要求求和的。

完全用椭圆函数求积式(5-40),但是这种说法不很明确.不过,在不要求问题的完全解的情况下,还是有可能得到运动的非常理想的几何描述,这种描述称为潘索结构.

考虑一个坐标系,它所取方向沿着物体的主轴,但它的坐标轴量度的是式(5-33)所定义的矢量 ρ 沿瞬时转轴的分量.为了方便起见,我们利用动能(这里是常量)方程(5-18),并把 ρ 的定义形式表达成

$$\rho = \frac{\omega}{\omega \sqrt{I}} = \frac{\omega}{\sqrt{2T}}. \quad (5-41)$$

在这一 ρ 空间内,我们定义一个函数

$$F(\rho) = \rho \cdot I \cdot \rho = \frac{1}{2} \rho_i^2 I_i, \quad (5-42)$$

F 等于常数时的曲面是椭球面, $F = 1$ 时的特定曲面为惯性椭球面.当转轴方向随时间变化时,平行的矢量 ρ 将作相应的运动,它的端点始终确定着惯性椭球上的一点. F 在该点的梯度给出了惯性椭球相应的法线方向.根据 $F(\rho)$ 的定义方程(5-42), F 对于 ρ 的梯度的形式为

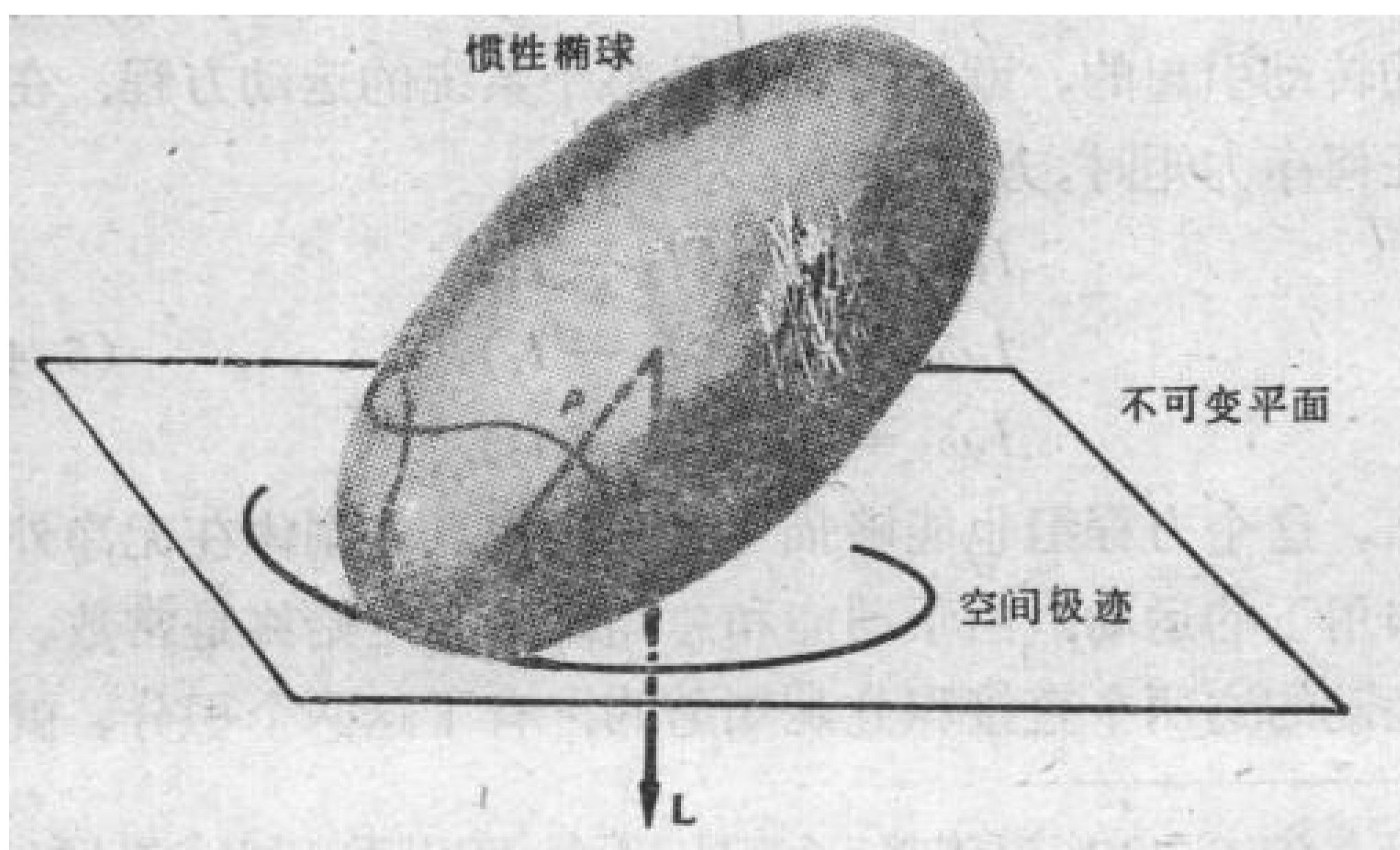


图 5-4 惯性椭球相对于不变平面的运动

$$\nabla_{\rho} F = 2l \cdot \rho = \frac{2l \cdot \omega}{\sqrt{2T}}$$

或

$$\nabla_{\rho} F = \sqrt{\frac{2}{T}} \mathbf{L}. \quad (5-43)$$

ω 矢量的运动始终保证惯性椭球的相应法线位于角动量的方向上。在所讨论的特殊情况下， \mathbf{L} 的方向被固定在空间内，为了保持 ω 和 \mathbf{L} 之间的这种关系，惯性椭球必须在空间内不断地运动(见图 5-4)。

还可以证明，椭球原点与 ρ 点处的切平面之间的距离同样必须始终是常数。这个距离等于 ρ 在 \mathbf{L} 上的投影，并可表达为

$$\frac{\rho \cdot \mathbf{L}}{L} = \frac{\omega \cdot \mathbf{L}}{L \sqrt{2T}}$$

或

$$\frac{\rho \cdot \mathbf{L}}{L} = \frac{\sqrt{2T}}{L}. \quad (5-44)$$

这里应用了式 (5-17)。动能 T 和角动量 \mathbf{L} 都是运动常量，所以切平面与椭球原点之间始终保持一固定的距离。由于平面法线沿着 \mathbf{L} 方向，因而方向也是固定的，切平面也就被称为不可变平面。我们可以把无外力作用的刚体的运动描述为惯性椭球在不可变平面上的无滑行滚动，椭球中心离平面的高度不变。滚动中之所以不会有滑行是因为接触点决定于 ρ 的位置，而 ρ 是沿着瞬时转轴的，所以 ρ 也就是物体瞬间静止时的某个方向。接触点在惯性椭球上描出的曲线称为本体极迹，而在不变平面上描出的类似曲线称为空间极迹¹⁾。

1) 因此可以这样来描述：本体极迹沿着不可变平面上的空间极迹作无滑行的滚动。

用潘索的几何讨论来完整地描述无外力作用时物体的运动是非常理想的。不可变平面的方向及惯性椭球在该平面上的高度决定于初始条件中 T 和 L 的量值。而描绘出本体极迹和空间极迹则是一个几何问题。 ρ 的方向规定了空间中角速度的方向，而物体的瞬时取向则由固定于物体的惯性椭球的取向来规定。在文献中往往可以找到按这种方式得到的无外力运动的详尽阐述¹⁾。在物体为对称体的特殊情况中，惯性椭球是一个旋转椭球，因而椭球上的本体极迹明显地是绕对称轴的圆。不变平面上的空间极迹也同样是一个圆。固定在物体上的观察者看到矢量 ω 在一个圆锥——叫做物体锥——面上运动，圆锥与惯性椭球的交线就是本体极迹。相应地，固定于空间坐标轴的观察者看到矢量 ω 在空间锥面上运动，这时的圆锥与不可变平面的交线是空间极迹。因此，有时把对称刚体的自由运动描述为物体锥在空间锥上的滚动。如果关于对称轴的转动惯量与关于其他两个主轴的转动惯量相比为小时，那么，根据式(5-35)可知，惯性椭球是一拉长椭球，即橄榄球形状——有点象图 5-4 所示形状。这种情况中的物体锥位于空间锥之外。当关于对称轴的转动惯量较大时，椭球将成为扁球形，物体锥将在空间锥内部滚动。不论是何种情况，对运动的实际描述都意味着 ω 方向相对于物体对称轴的持续进动。

潘索结构指出了 ω 的运动状况，但没有告诉我们 L 矢量在体轴系内是如何运动的。然而，另有一个几何描述，它适合

1) 特别参阅 Webster, *Dynamics of Particles and Rigid Bodies*; Macmillan, *Theoretical Mechanics-Dynamics of a Rigid Body*; Routh, *Advanced Rigid Dynamics*; 和 Gray, *Treatise on Gyrostatics and Rotational Motion*. 在这些参考书中给出的潘索结构的许多性质中，反映出一个奇怪的事实：空间极迹的凹面始终向着原点，这与它的名称（意为“类蛇形”）不符。

于描述主轴系内观察者所看到的 \mathbf{L} 矢量的运动路径。式 (5-23) 和 (5-24) 表明, 在这一系统内的动能与角动量分量的关系决定于方程

$$T = \frac{L_1^2}{2I_1} + \frac{L_2^2}{2I_2} + \frac{L_3^2}{2I_3}. \quad (5-45)$$

由于 T 是常量, 所以这一关系式也确定了一个固定在体轴系内的椭球¹⁾, 但与惯性椭球不同。同时, 角动量量值的守恒, 意味着 \mathbf{L} 必定位于某个球上, 该球决定于方程

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2. \quad (5-46)$$

对于给定的初始条件——动能和角动量, \mathbf{L} 在体轴系内的路径由式 (5-45) 定义的椭球与式 (5-46) 定义的球的交线给出。为了看清楚这种交线始终是存在的, 只要把式 (5-45) 表达成采用求和约定的形式:

$$1 = \frac{L_i^2}{a_i^2},$$

式中的 a_i 为椭球的长半轴, 形式为

$$a_i = \sqrt{2TI_i}.$$

由此可知, 对于任何 i 都有

$$a_i^2 = L_i^2 \frac{a_j^2}{a_i^2}.$$

与式 (5-46) 相比表明: 如果 a_i 是最小的长半轴, 则 $a_i^2 < L^2$; 如果 a_i 是最大的长半轴, 则 $a_i^2 > L^2$ 。如果按照惯例使各轴的安排保证

$$I_3 > I_2 > I_1,$$

那么, 上面那些不等式可以概括为关系式

$$\sqrt{2TI_1} < L < \sqrt{2TI_3}.$$

1) 这一椭球有时称为皮纳 (Binet) 椭球。

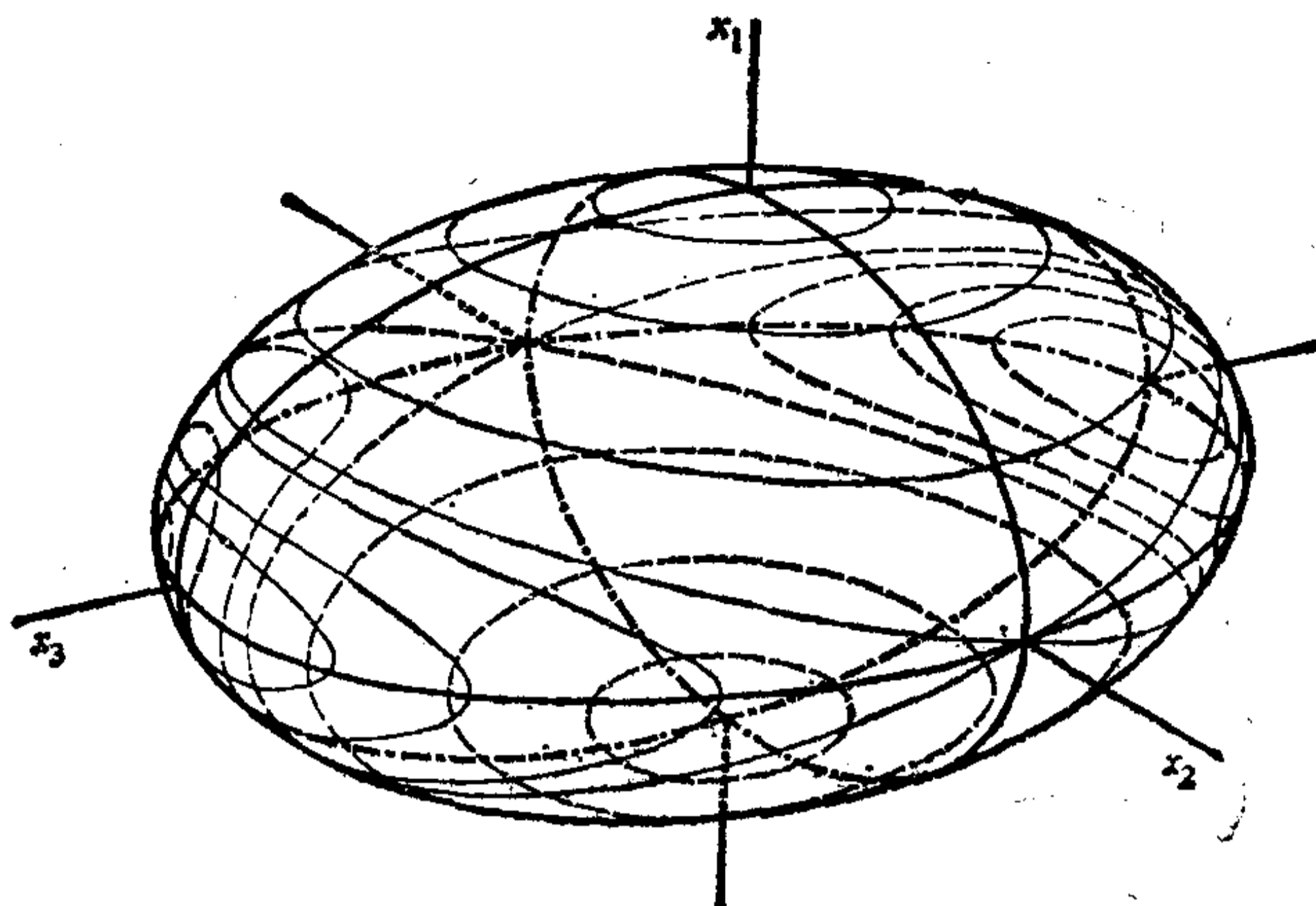


图 5-5 固定在体轴系内的动能椭球或皮纳椭球,以及
矢量 \mathbf{L} 在它表面上的某些可能路径

因此,半径为 L 的动量球始终与动能球相交. 图 5-5 说明了动能椭球的外貌以及矢量 \mathbf{L} 在它表面上的某些可能路径.

借助于这种几何结构,对自由对称物体的可能运动可作出一定的说明. 不难看出,这种物体的稳定转动只可能是绕某一主轴转动. 根据欧拉方程 (5-40),要 $\boldsymbol{\omega}$ 的所有分量都是常量,必须要求

$$\omega_1\omega_2(I_1 - I_2) = \omega_2\omega_3(I_2 - I_3) = \omega_3\omega_1(I_3 - I_1) = 0,$$

这意味着至少有两个分量 ω_i 等于零,即 $\boldsymbol{\omega}$ 仅是沿着一根主轴的. 但是并不是所有这些可能的运动都是稳定的;所谓稳定,就是在微扰下不会远离主轴的运动. 例如,当 $L^2 = 2TI_3$ 时,即会出现绕 x_3 轴的稳定运动. 当稍为偏离这一条件时,角动量球的半径仅仅略为小于这一数值,而且与动能椭球的交线是一个绕 x_3 轴的小圆. 运动将是稳定的,矢量 \mathbf{L} 决不会远离该轴. 同样,在其他极值情况下,当绕具有最小 I 的轴的运动受到扰动时,角动量球的半径仅仅大于最小长半轴. 交

线也是一个绕主轴的小的闭合图形，而且运动也是稳定的。然而，绕中间轴的运动是不稳定的；出现小的偏离时，与角动量球的交线不会是小的闭合曲线，而是遍布整个椭球的曲线。要彻底理解这种现象，只要认识到，在中间轴处的椭球的曲率半径在一个方向上大于切球半径，而在垂直方向上又小于切球半径。在其他两个极值情况下，曲率半径在所有方向上都大于或小于球半径。关于自由物体运动稳定性的这些结论早就知道了，但是它们在论述刚体动力学的早期著作中是晦涩难懂的，只是在近代的一些应用中，例如应用于旋转宇宙飞船的稳定性问题时才变得易于理解¹⁾。

对于对称的刚体，要得到自由运动的解析解是不难的，并且可以直接证实潘索结构所预言的进动。把对称轴作为主轴 z ，从而使 $I_1 = I_2$ 。这时，欧拉方程 (5-40) 化为

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 &= (I_1 - I_3) \omega_3 \omega_2, \\ I_1 \dot{\omega}_2 &= -(I_1 - I_3) \omega_3 \omega_1, \\ I_3 \dot{\omega}_3 &= 0. \end{aligned} \quad (5-47)$$

最后一个方程说明 ω_3 是常数，因而可以把它看作是问题的一个已知初始条件。其余两个方程可以表达成

$$\dot{\omega}_1 = -\Omega \omega_2, \quad \dot{\omega}_2 = \Omega \omega_1, \quad (5-48)$$

式中的 Ω 是角频率：

$$\Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3. \quad (5-49)$$

1) 如有耗散机制，这些有关稳定性的论述就应修正。不难看出，如果物体的 L 是常量，但 T 却是缓慢递减的，则唯一的稳定转动是绕具有最大转动惯量的主轴的转动。对于给定的 L ，绕第 i 个主轴的转动动能为 $T = L^2 / 2I_i$ ，当该轴对应于最大 I_i 时， T 值最小。如使物体绕任何其他主轴自旋，则动能的缓慢递减将促使角速度矢量移位，直至物体的自旋轴对于给定的 L 具有最小 T 值为止。宇宙飞船就有这种耗散效应，这是因为飞船的各种部件在运动期间将发生挠曲，特别是有许多部件还带有各种杆状附件。这些事实是宇宙飞船的早期设计者艰苦探究的课题。

消去式 (5-48) 两个方程中的 ω_2 , 即得简谐运动的标准微分方程

$$\ddot{\omega}_1 = -\Omega^2 \omega_1,$$

其典型解为

$$\omega_1 = A \cos \Omega t.$$

把 ω_1 的这一式子代回式 (5-48) 的第一式, 即得 ω_2 的相应解

$$\omega_2 = A \sin \Omega t.$$

ω_1 和 ω_2 的这两个解表明, 矢量 $\omega_1 \mathbf{i} + \omega_2 \mathbf{j}$ 具有恒定的量值, 并

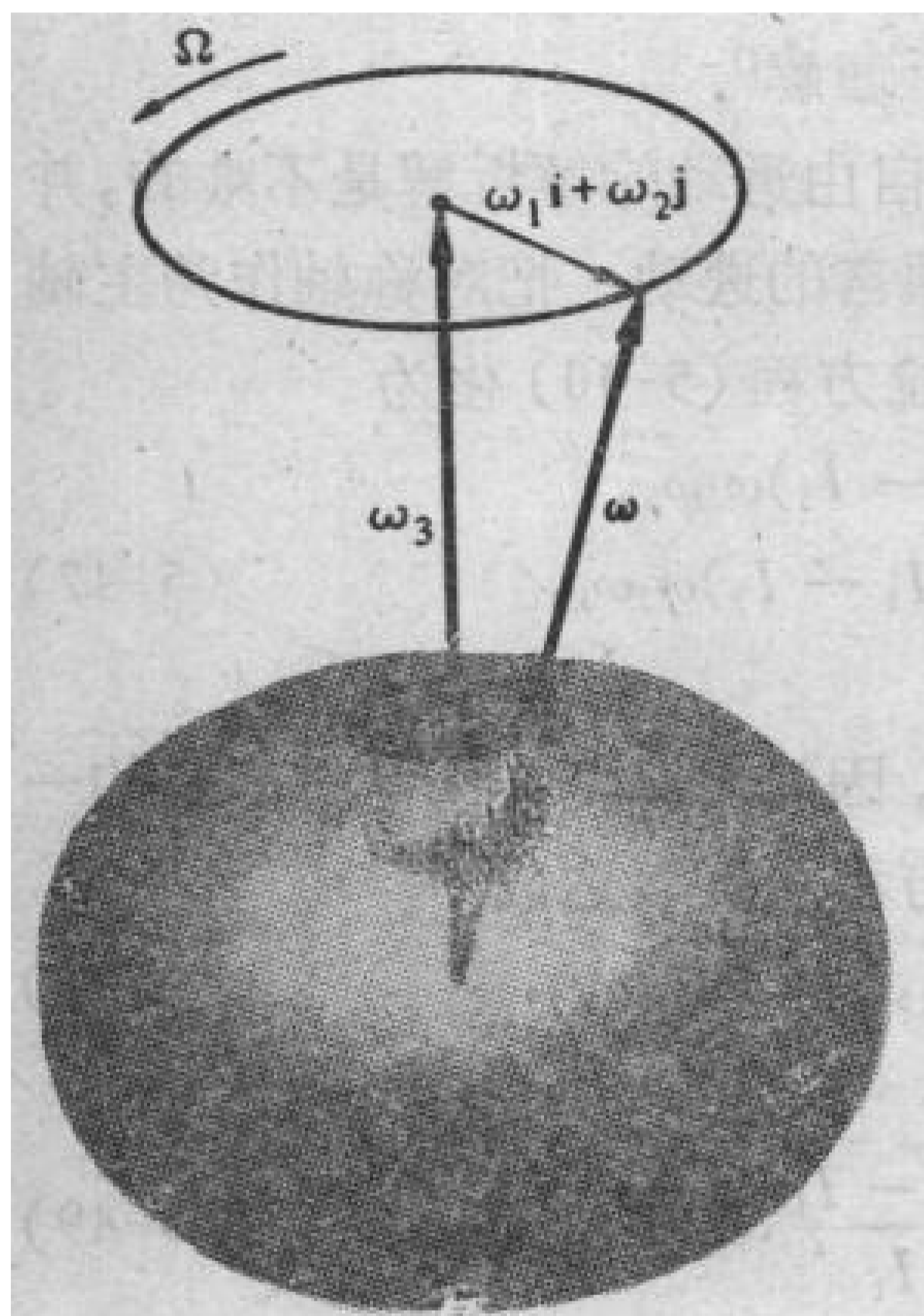


图 5-6 在对称刚体的无外力运动中角速度绕对称轴的进动

以角频率 Ω 绕体轴系 z 轴匀速转动(见图 5-6)。因此, 总角速度 ω 的量值也是常数, 并以相同频率绕 z 轴进动, 实际上, 这是潘索结构所预示的结果¹⁾。应该记住, 这里描述的进动是相对于体轴系的, 而体轴系各轴本身又是在空间内以较大的频率 ω 转动的。从式(5-49)可以看出, I_1 越接近 I_3 , 则与转动频率相比, 进动频率 Ω 愈慢。可以用更为常用的运动常数, 即动能和角动量来计算常量 A (进

1) 还能以另一种方式来说明进动, 即定义一个沿 z 轴的矢量 Ω , 其值由式 (5-49) 给出。这样, 式 (5-47) 等效于矢量方程

$$\dot{\omega} = \omega \times \Omega,$$

此式直接展示了 ω 以频率 Ω 所作的进动。

动幅度)和 ω_3 。 T 和 L^2 都能表达成 A 和 ω_3 的函数:

$$T = \frac{1}{2} I_1 A^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2,$$

$$L^2 = I_1^2 A^2 + I_3^2 \omega_3^2,$$

这些关系式可以反过来用 T 和 L 解出 A 和 ω_3 。

可以预料,地球的转轴应该显示出这种进动,因为作用于地球的外力矩是如此微弱,以致它的转动可以认为是自由体的转动。地球对于极轴是对称的,并在极点处稍显扁平,因而 I_1 小于 I_3 。转动惯量的数值比为

$$\frac{I_3 - I_1}{I_1} = 0.00327,$$

进动角频率的量值应是

$$Q = \frac{\omega_3}{306}.$$

由于 ω_3 事实上与 ω 的量值相同,这一结果预示了 306 日或大约 10 个月的进动周期。如果出现某种情况的干扰,使转轴偏离地球图轴,将预料到转轴每 10 个月绕图轴(即绕北极)作一次进动。实际上,这种进动应该表现为地球表面上各点的表观纬度的周期性变化。仔细测定全世界一整套测点的纬度证明,转轴确实在绕着北极运动;已经测定,在大约一个世纪内,偏离的幅度约为几十分之一秒的纬度(约 10 米)。但情况远比前面的简单分析所预言的结果复杂(和有趣)。图轴与转轴之间的偏差极不规则,所以说它是进动还不如说它是“摇摆”。仔细的频率分析证明了运动有一年度周期,这可能起因于季节的年度循环和大气质量相对于地球的相应平均位移。但是,还有一个强频率成分,出现的周期约为 420 日,称为钱德勒摇摆 (Chandler wobble)。现在相信,这一运动代表了前面得到的自由物体的进动,周期所以有差别,可能是由于地

球不完全是一个刚体,而是某种程度的弹性体.实际上,地球的某一部分将随转轴一起移位,从而减小了主转动惯量之差,延长了周期.(例如,如果地球完全是流体,图轴将随时调整到与转轴的位置一致,因而不可能有进动.)

对观察到的摇摆,还有一些其他不够明确的特性.频率分析表明,还存在着强烈的阻尼效应.相信这是由于潮汐摩擦或地幔和地核之间的结合方面的耗散效应引起的.阻尼周期应在10—20年之间.但尚未观察到钱德勒摇摆幅度的这种衰减;必定存在某种偶然的激发才能使摇摆运动得以持续地进行下去.已经提出了各种激发源.现在的推测指出,深度地震或引起地震的地幔现象有可能引起惯性张量的断续变化,这些变化大到足以激发起自由物体的进动¹⁾.

5-7 有一固定点的对称重陀螺

作为刚体动力学方法的另一个、也是更为复杂的应用实例,我们将考虑对称轴上有一点固定于空间的对称体在均匀引力场中的运动.许多实际系统,从玩具陀螺到复杂的回转导航仪,都可近似地看作是这种对称重陀螺.对称重陀螺的运动之所以值得详加阐述,一方面是由于它的实际应用价值,另一方面是由于它可以作为前面所述许多技巧的例证.

它的对称轴当然是主轴之一,并且将它选作体轴系的 z 轴²⁾.因为有一点静止,所以三个欧拉角可以完全确定陀螺

1) 不要把地轴的自由进动与它相对于黄道法线的慢进动相混淆.天体的二分点进动是由太阳和月球的引力矩引起的,这些引力矩的影响在上面的讨论中未予计及.由于二分点进动周期(26,000年)与约为一年的自由进动周期相比极长,所以上述假设可以成立.天体的进动在以后还要作进一步的讨论.

2) 由于这里需要具体说明的仅限于体轴系,所以在这一节中把它记作 xya 轴系是方便的,不必担心会与空间坐标系相混淆.

的位形。 θ 给出 z 轴偏离铅垂线的倾角； ϕ 代表陀螺绕铅垂线转动的方位角； ψ 则是陀螺绕自身 z 轴转动的角度（见图 5-7）。 它的重心（位于对称轴上）与固定点的距离用 l 表示。

我们将用拉格朗日方法而不是欧拉方程来求解陀螺运动。 由于物体是对称的，动能方程能够表达成

$$T = \frac{1}{2} I_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2,$$

或用式 (4-125) 以欧拉角表示，则可表达成

$$T = \frac{I_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2, \quad (5-50)$$

式中的 ω_1^2 和 ω_2^2 的交叉项已经消去。 这是一个熟知的基本定理：在均匀引力场中的势能与物体集中于质心时所具有的势能相同，但这里可以给出一个简要的正式证明。 物体的势能是所有质点势能之和：

$$V = -m_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{g},$$

这里的 \mathbf{g} 是重力加速度的常值矢量。 根据确定质心的方程 (1-21)，此式相当于

$$V = -M \mathbf{R} \cdot \mathbf{g}, \quad (5-51)$$

这证明了所述定理。 用欧拉角表示，则有

$$V = Mgl \cos \theta, \quad (5-51')$$

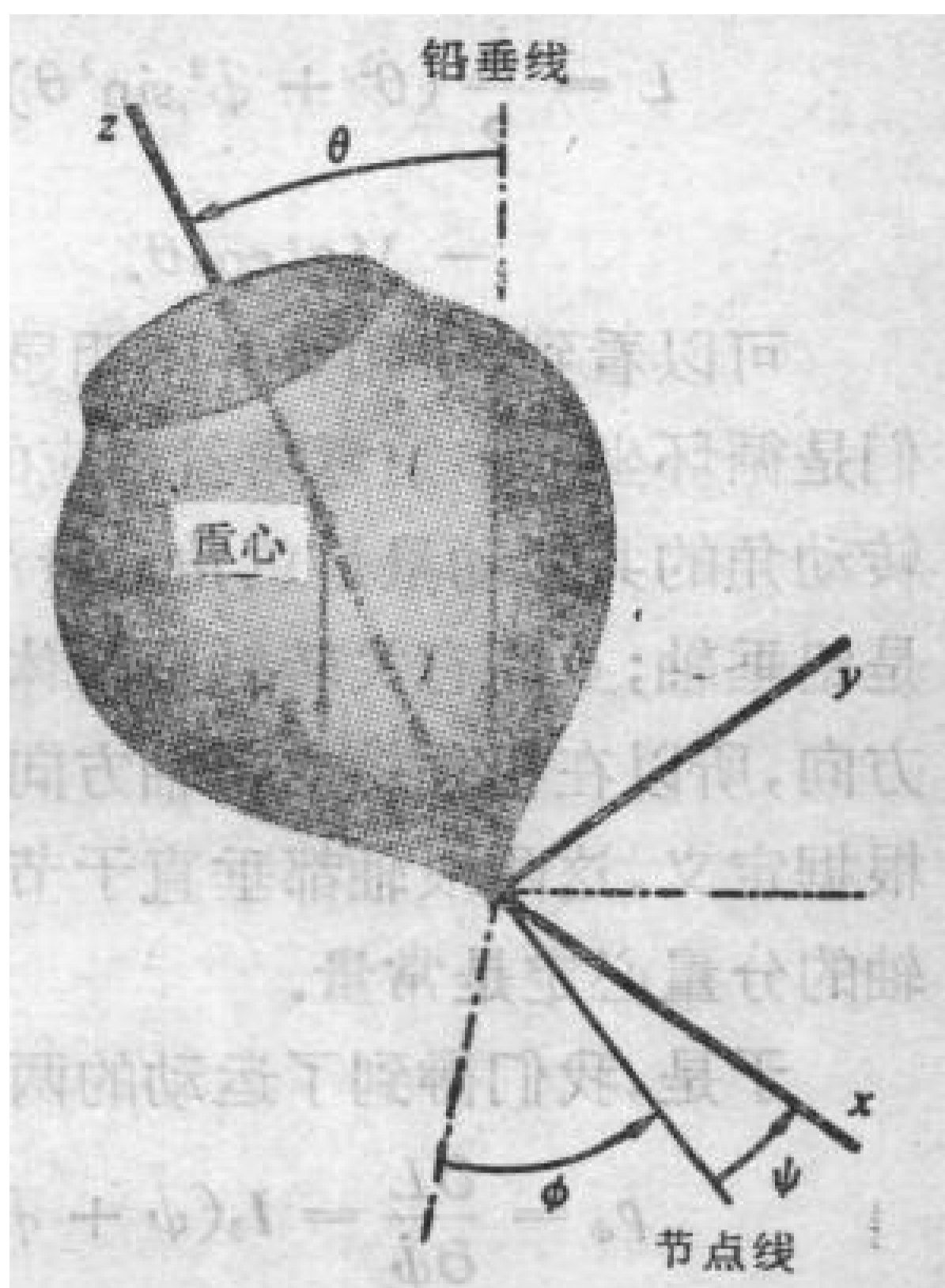


图 5-7 确定对称陀螺取向的欧拉角

于是拉氏函数为

$$L = \frac{I_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - Mgl \cos \theta. \quad (5-52)$$

可以看到, ϕ 和 ψ 并不明显地出现在拉氏函数中, 因而它们是循环坐标, 这意味着相应的广义动量始终是常量. 已知转动角的共轭动量是总角动量沿转轴的分量. ψ 的有关转轴是铅垂轴; ϕ 的有关转轴是物体的 z 轴. 由于重力矩沿节点线方向, 所以在铅垂轴或 z 轴方向上都没有重力矩的分量, 因为根据定义, 这两根轴都垂直于节点线. 所以, 角动量沿这两个轴的分量必定是常量.

于是, 我们得到了运动的两个直接的初次积分:

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = I_3 \omega_3 = I_1 a \quad (5-53)$$

和

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = (I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \dot{\phi} + I_3 \dot{\psi} \cos \theta = I_1 b. \quad (5-54)$$

这里的两个运动常数是用新的常数 a 和 b 表示的. 另外还有一个有用的初次积分. 由于系统是保守的, 所以, 总能量 E 始终是常数:

$$E = T + V = \frac{I_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2} \omega_3^2 + Mgl \cos \theta. \quad (5-55)$$

为了求解问题, 只需另外三个积分, 而且不必直接利用拉格朗日方程组. 只要根据三个初次积分就不难求得这三个积分. 根据方程 (5-53), 用 $\dot{\phi}$ 给出 $\dot{\psi}$:

$$I_3 \dot{\psi} = I_1 a - I_3 \dot{\phi} \cos \theta, \quad (5-56)$$

把这一结果代入式(5-47)即可消去 $\dot{\phi}$:

$$I_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + I_1 a \cos \theta = I_1 b$$

或

$$\dot{\phi} = \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta}. \quad (5-57)$$

如果给定的 θ 是时间的函数,则求积(5-57)可以得到 ϕ 对时间的依赖关系.把式(5-57)代回式(5-56),即得相应的 $\dot{\phi}$ 表达式:

$$\dot{\phi} = \frac{I_1 a}{I_3} - \cos \theta \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta}, \quad (5-58)$$

如果 θ 为已知,则可以由此式求得 ϕ .最后,可以用式(5-57)和式(5-58)消去能量方程中的 $\dot{\phi}$ 和 $\dot{\psi}$,从而得到只含有 θ 的微分方程.首先看到,式(5-53)说明了 ω_3 始终是常数并且等于 $(I_1/I_3)a$.因而 $E - I_3 \omega_3^2/2$ 是一个运动常数,并将记为 E' .利用式(5-57),可以把能量方程表达成

$$E' = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{I_1}{2} \frac{(b - a \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} + Mgl \cos \theta. \quad (5-59)$$

式(5-59)具有等效一维问题的形式,变量为 θ ,有效势为

$$V'(\theta) = Mgl \cos \theta + \frac{I_1}{2} \left(\frac{b - a \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2. \quad (5-60)$$

实际上,我们将用这个一维问题来讨论 θ 的运动,这与节3-3中描述有心力问题的径向运动时所做的一切极为相似.然而,把变量改为 $u = \cos \theta$ 似乎更加方便,式(5-59)因而可以重新表达成

$$E'(1 - u^2) = \frac{I_1}{2} \dot{u}^2 + \frac{I_1}{2} (b - au)^2 + Mglu(1 - u^2).$$

引进两个新的常数

$$\alpha = \frac{2E'}{I_1}, \quad \beta = \frac{2Mgl}{I_1}, \quad (5-61)$$

并将各项重新排列,这一表达式将成为

$$\dot{u}^2 = (1 - u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2, \quad (5-62)$$

此式能直接化为积分

$$t = \int_{u(0)}^{u(t)} \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2}}. \quad (5-63)$$

利用这一结果以及式(5-57)和式(5-58),也能把 ϕ 和 ψ 化成积分。然而根号内是三次多项式,因而要涉及到椭圆积分。可以在参考文献中找到含有椭圆函数的这些解的广泛而又详尽的讨论¹⁾。但是,如同无外力运动的情况那样,物理学将被淹没在数学的汪洋大海之中而无以自明。幸好,实际上不必完成全部积分也能揭示出运动的一般性质。

今用 $f(u)$ 表示式(5-62)的右边。这个三次多项式的根将给出使 $\dot{\theta}$ 易号的那些角度,即 θ 的“转折角”。当 u 很大时, $f(u)$ 中占优势的项是 βu^3 。由于 β 始终大于零[见式(5-61)],所以对于大的正值 u 来说, $f(u)$ 为正;而对于大的负值 u 来说, $f(u)$ 则是负的。在 $u = \pm 1$ 的那些点处, $f(u)$ 将等于 $-(b \mp a)^2$,因而除了 $u = \pm 1$ 是一个根(对应于垂直陀螺)的独特情况外, $f(u)$ 始终为负。所以至少有一个根处在 $u > 1$ 的区间内,这个区间并不对应于实数角度。的确,陀螺的实际运动只有在 \dot{u}^2 是正数时才能发生,并且处在 $u = -1$ 和 $u = +1$ 的区间内,即 θ 必须在 0 和 $+\pi$ 范围内取值。因此必定可以得出结论,对任何实际陀螺来说, $f(u)$ 将在 -1 和 $+1$ 之间有两个根 u_1 和 u_2 (见图5-8),而且陀螺运动总是使

1) 例如,可参阅 F. Klein, A. Sommerfeld; Whittaker, *Analytical Dynamics*. 极为详细的论述则可参阅 Macmillan, *Dynamics of Rigid Bodies*.

$\cos \theta$ 维持在这两个根之间。 这些根的位置以及与两根之间的那些 θ 值相关的 $\dot{\phi}$ 和 $\dot{\theta}$ 的性质提供了陀螺运动的定性信息。

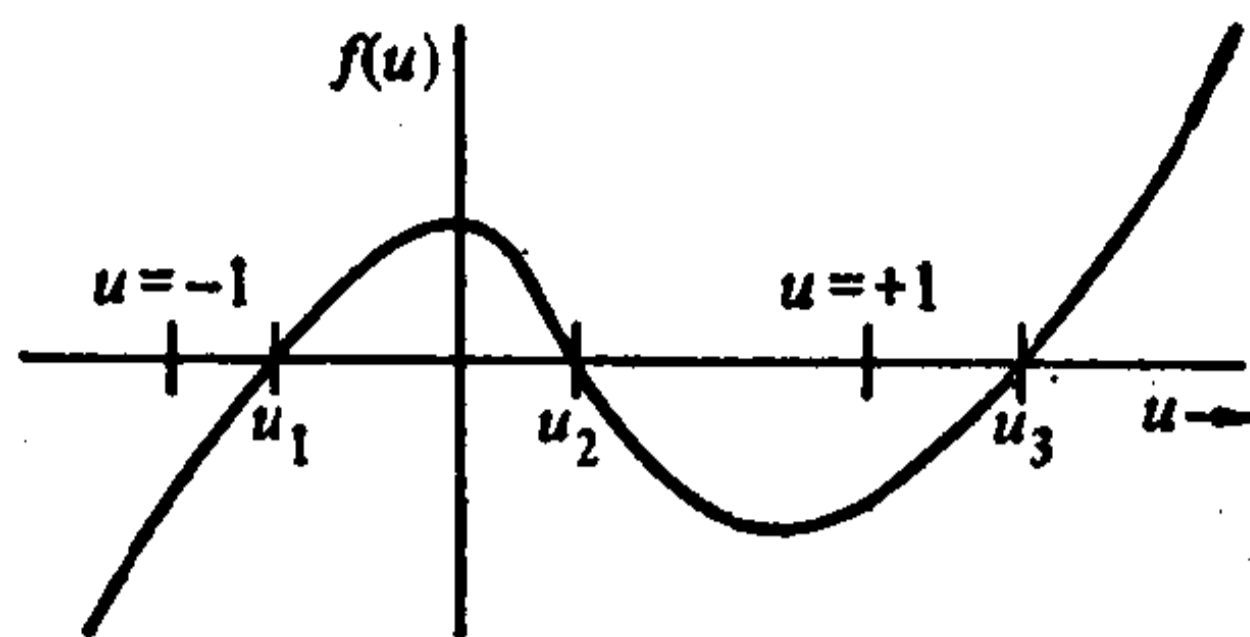


图 5-8 对称重陀螺运动中 θ 的转折角位置的图示

为描述陀螺运动，通常总是描绘出图轴在绕某固定点的单位半径球面上的相交曲线。我们将把这

种曲线称为图轴的轨迹。轨迹上某点的极坐标与体轴系内欧拉角 θ, ϕ 相一致。从上段讨论中可以看出，轨迹位于余纬度 $\theta_1 = \arccos u_1$ 和 $\theta_2 = \arccos u_2$ 的两个界圆之间，在两个圆上， $\dot{\theta}$ 都等于零。轨迹曲线的形状主要由 $b - au$ 的根值决定，我们将把这个根记为

$$u' = \frac{b}{a}. \quad (5-64)$$

例如，假设初始条件保证 u' 大于 u_2 。那么，由式 (5-57) 可知，对于 θ_1 和 θ_2 之间允许的倾角， $\dot{\phi}$ 的符号始终相同。因而图轴轨迹必须与界圆相切，以保证 $\dot{\phi}$ 在 θ_1 和 θ_2 处的方向相同，正如图 [5-9(a)] 所示。由于总有一个方向使 ϕ 一直增加，因而表明了陀螺轴相对于铅垂轴的进动。但它并不是无外力运动中遇到的规则进动，因为当图轴作环绕运动时，它将在界角 θ_1 和 θ_2 之间摆动——陀螺在进动期间的章动。

设 b/a 保证 u' 处于 u_1 和 u_2 之间，进动的方向在两个界圆处并不相同，图轴轨迹呈迴环形，如图 [5-9(b)] 所示。然而， $\dot{\phi}$ 的平均值不等于零，因而总有一个方向存在着净进动。也可能出现 u' 与 $f(u)$ 的一个根重合的情况。这时，在相应的界圆上， $\dot{\theta}$ 和 $\dot{\phi}$ 都必须为零，这要求轨迹在接触到圆时有一尖

点,如图 [5-9(c)] 所示。

这最后一种情况并不象听上去那样特殊,事实上,它相当于陀螺的初级讨论中通常规定的初始条件,即认为陀螺在初始时刻是围绕固定在 θ_0 方向上的图轴自旋的。而图轴又在 $t = 0$ 时被释放,问题是如何来描述以后的运动。显然,这些初始条件是: $t = 0$ 时, $\theta = \theta_0, \dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$ 。因此,角度 θ_0 必定是 $f(u)$ 的一个根,实际上它与上界圆相对应,即

$$u_0 = u_2 = u' = b/a. \quad (5-65)$$

为证明起见,应注意到初始条件 E' 等于 $Mgl \cos \theta_0$, 而且从陀螺动能来推导的 E' 中的各项始终为正。因此,当 $\dot{\theta}$ 和 $\dot{\phi}$ 开始不同于它们的初始零值时,只有通过 $Mgl \cos \theta$ 的减少,即 θ 的增加,才能使能量保持守恒。所以最初的 θ_0 与 θ 的可能最小值 θ_2 相同。当以这种方式释放图轴时,陀螺一开始总是下降的,并将继续下降到另一界角 θ_1 , 在此期间陀螺作进动。接着,图轴再次开始上升到 θ_2 , 整个运动如图 [5-9(c)] 所示。

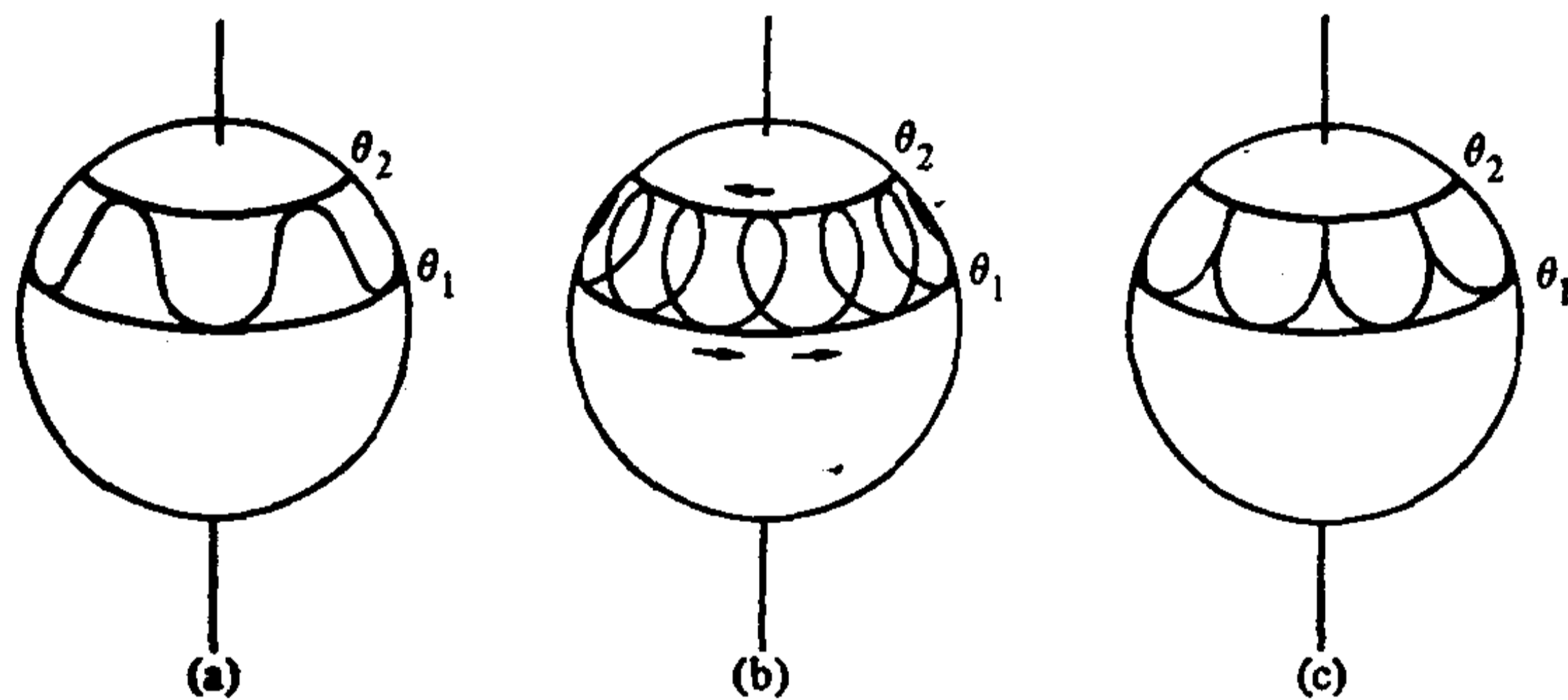


图 5-9 单位球面上图轴轨迹的可能形式

假如初始的转动动能极大于势能的最大变化:

$$\frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 \gg 2Mgl, \quad (5-66)$$

就有可能对陀螺在 $\dot{\theta}$ 和 $\dot{\phi}$ 为零的初始条件下的运动作出某

些定量的预言。引力矩的影响,即进动和伴随的章动,对于占优势的、陀螺绕其图轴的转动来说,只能是一种很小的扰动。在这种情况下,我们就说这个陀螺是一个“快陀螺”。根据这种假设,我们可以得到关于章动量、章动频率以及平均进动频率的表达式。

在这些初始条件下的章动量由 $u_1 - u_0$ 给出,这里的 u 是 $f(u)$ 的其他实根。初始条件 $E' = Mgl \cos \theta_0$ 等效于等式

$$\alpha = \beta u_0.$$

利用这一关系式以及式(5-65)的那些条件, $f(u)$ 可以表达成更简单的形式

$$f(u) = (u_0 - u) \{ \beta(1 - u^2) - a^2(u_0 - u) \}. \quad (5-67)$$

除 u_0 外, $f(u)$ 的根将由大括号内的二次式的根给出,要求的根 u_1 将满足方程

$$(1 - u_1^2) - \frac{a^2}{\beta} (u_0 - u_1) = 0. \quad (5-68)$$

用 x 表示 $u_0 - u$, 用 x_1 表示 $u_0 - u_1$, 式(5-68)可改写成

$$x_1^2 + px_1 - q = 0, \quad (5-69)$$

式中

$$p = \frac{a^2}{\beta} - 2 \cos \theta_0, \quad q = \sin^2 \theta_0.$$

“快”陀螺的条件式(5-66)表明, p 比 q 要大得多。要看出这一点,只要把比值 a^2/β 表达成

$$\frac{a^2}{\beta} = \left(\frac{I_3}{I_1} \right) \frac{I_3 \omega_3^2}{2Mgl}.$$

除了 $I_3 \ll I_1$ (这对应于独特的雪茄状陀螺)外,比值远大于1,而且 $p \gg q$. 对于小量 q/p 的一级近似,实际上可以认可的、式(5-68)的唯一的根是

$$x_1 = \frac{q}{p}.$$

与 a^2/β 相比略去 $2 \cos \theta_0$, 这一结果可表达成

$$x_1 = \frac{\beta \sin^2 \theta_0}{a^2} = \frac{I_1}{I_3} \frac{2Mgl}{I_3 \omega_3^2} \sin^2 \theta_0. \quad (5-70)$$

因此, 当用 $x_1 = u_0 - u_1$ 来量度时, 章动量将随 $1/\omega_3^2$ 而递减; 陀螺自旋得越快, 章动越小.

“快”陀螺的章动频率同样不难求得. 由于章动总量很小, 所以式 (5-67) 中的 $(1 - u^2)$ 项可代之以初始值 $\sin^2 \theta_0$. 借助于式 (5-70), 可把式 (5-67) 表达成

$$f(u) = \dot{x}^2 = a^2 x(x_1 - x).$$

如把变量改为

$$y = x - \frac{x_1}{2},$$

从而把 x 的起始点移到它的区间的中点, 则微分方程将成为

$$\dot{y}^2 = a^2 \left(\frac{x_1^2}{4} - y^2 \right),$$

对此式再次求导, 即能化为常见的简谐运动方程

$$\ddot{y} = -a^2 y.$$

鉴于 $t = 0$ 时 $x = 0$ 这一初始条件, 此式的完全解为

$$x = \frac{x_1}{2} (1 - \cos at), \quad (5-71)$$

式中的 x_1 由式 (5-70) 给出. 在 θ_0 与 θ_1 之间的图轴章动角频率等于

$$a = \frac{I_3}{I_1} \omega_3, \quad (5-72)$$

陀螺最初旋转得越快, 这一频率将增加.

最后, 根据式 (5-57), 进动角速度为

$$\dot{\phi} = \frac{a(u_0 - u)}{\sin^2 \theta} \approx \frac{ax}{\sin^2 \theta_0},$$

或者把式 (5-72) 和式 (5-70) 代入, 即得

$$\dot{\phi} = \frac{\beta}{2a} (1 - \cos at). \quad (5-73)$$

因此, 进动速率是不均匀的, 它将随时间按谐和规律而变化, 并具有与章动相同的频率. 然而, 平均进动频率为

$$\bar{\dot{\phi}} = \frac{\beta}{2a} = \frac{Mgl}{I_3\omega_3}, \quad (5-74)$$

此式表明, 陀螺的初始转速增加时, 进动速率则减小.

现在, 我们能够对图轴初速为零的快陀螺描绘出一幅完整的运动图景. 图轴一经释放, 在重力作用下的螺陀的运动总是下降的. 陀螺下降后, 即获得一个正比于下降量的进动速度, 使图轴开始偏离铅垂线而运动. 最初的下降引起图轴除进动外还有一个章动. 但陀螺最初被旋转得越来越快时, 虽然章动频率是增加的, 当章动量却迅速地减小; 同时, 绕铅垂线的进动则变得更慢. 实际上, 对于足够快的陀螺来讲, 由于支点处的摩擦, 使章动因阻尼而变得无法觉察. 因而陀螺看起来似乎绕铅垂轴匀速进动. 因为进动只是在表观上有规则, 所以克莱因和索末菲称这种进动为赝规则进动. 在大多数有关进动的初级讨论

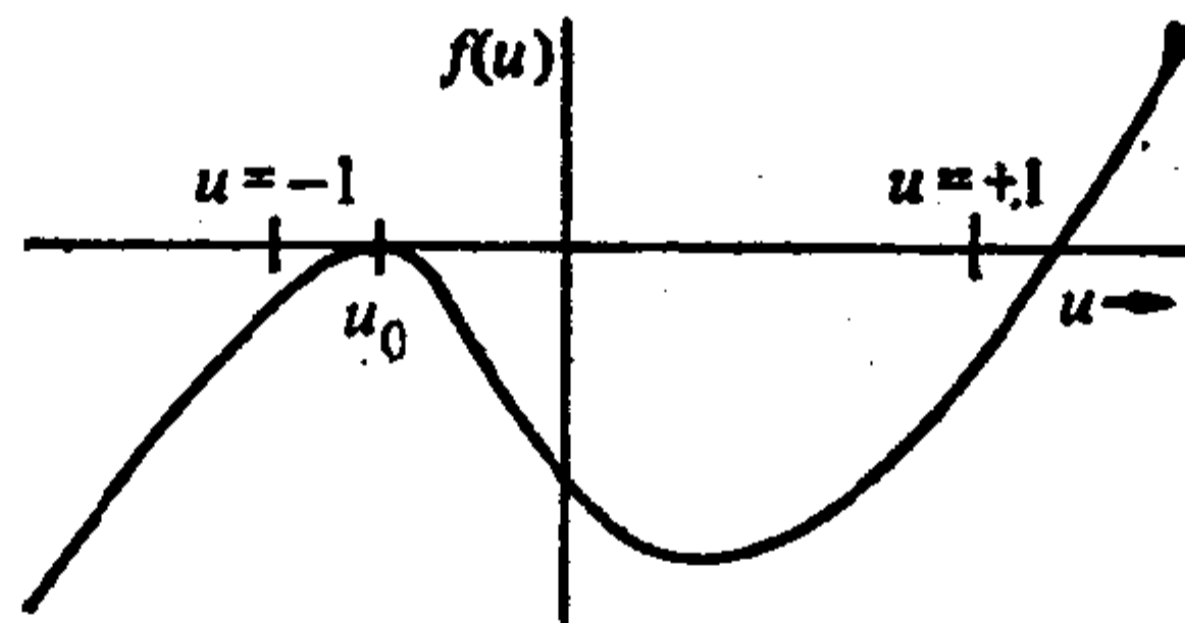


图 5-10 规则进动的 $f(u)$ 图象

中, 章动现象被略而不计. 因此这种推导似乎得出了矛盾的结论, 即认为陀螺一经释放就立即开始匀速进动; 垂直于重力的运动是引起进动的根本原因. 这里关于赝规则进动的讨论足以消除这种谬误; 进动是从静止开始逐渐增大的, 并不存在无限大的加速度, 而且陀螺的最初趋向是在重力方向上

运动。

有意义的是去正确地决定产生真正有规则进动的那些初始条件。在这种情况下， θ 角始终等于其初始值 θ_0 ，这意味着 $\theta_1 = \theta_2 = \theta_0$ ，或者换言之， $f(u)$ 必定在 u_0 处有二重根（见图 5-10），或

$$f(u) = 0, \quad \frac{df}{du} = 0; \quad u = u_0.$$

根据式 (5-62)，其中第一个条件意味着

$$(\alpha - \beta u_0) = \frac{(b - a u_0)^2}{1 - u_0^2}; \quad (5-75)$$

而第二个条件则相当于

$$\frac{\beta}{2} = \frac{a(b - a u_0)}{1 - u_0^2} - u_0 \frac{(\alpha - \beta u_0)}{1 - u_0^2}. \quad (5-76)$$

把式 (5-75) 代入式 (5-76)，并鉴于 $\dot{\phi}$ 的表达式 (5-57)，即可得 $\dot{\phi}$ 的二次方程

$$\frac{\beta}{2} = a\dot{\phi} - \dot{\phi}^2 \cos \theta_0. \quad (5-76')$$

利用 β 的定义方程 (5-61) 以及 a 的定义方程 (5-53)，此式也可表达成其他两种形式，一种是用 ω_3 表示 a 的形式，另一种是用(恒定的) $\dot{\phi}$ 和 $\dot{\phi}$ 表达的式子：

$$Mgl = \dot{\phi}(I_3\omega_3 - I_1\dot{\phi} \cos \theta_0), \quad (5-77a)$$

或

$$Mgl = \dot{\phi}[I_3\dot{\phi} - (I_1 - I_3)\dot{\phi} \cos \theta_0]. \quad (5-77b)$$

重陀螺问题的初始条件要求指明 $t = 0$ 时刻的 $\theta, \phi, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$ 以及 $\dot{\phi}$ 或 ω_3 。由于 ϕ 和 $\dot{\phi}$ 是循环的，所以它们的初始值根本无关紧要，至于其他四个量，则可选择所要求的任何数值。但如果我们还要求图轴运动是一种无章动的匀速进动，这四个初始值的选择就不再是完全任意的，而必须满足式 (5-77)

中的任意一个方程。对于 $\dot{\theta} = 0$ 的情况，我们依然可以近乎任意地选择 θ 和 ω_3 的初始值，而 $\dot{\phi}$ 的值当然也就被确定了。使用“近乎任意”这个词是因为式 (5-77) 是二次式，为使 $\dot{\phi}$ 是实数，式 (5-77a) 的判别式必须为正：

$$I_3^2 \omega_3^2 > 4Mgl \cos \theta_0. \quad (5-78)$$

对于 $\theta_0 < \pi/2$ 的情况(安装陀螺时使其质心低于固定点)，则任何数值的 ω_3 都能得到匀速进动。但对于 $\theta_0 > \pi/2$ 的情况，所选的 ω_3 值就必须大于最小值：

$$\omega_3 > \omega'_3 = \frac{2}{I_3} \sqrt{Mgl \cos \theta_0}, \quad (5-79)$$

才能达到相同的情况。根据式 (5-77b) 也能得到那些 $\dot{\phi}$ 允许值的类似条件。由于式 (5-77) 的二次性质，一般将有两种 $\dot{\phi}$ 解，分别称为“快”和“慢”进动。还将看到，对于有限的 $\dot{\phi}$ 和 ω_3 来讲， $\dot{\phi} = 0$ 决不可能满足式 (5-77)；为了得到匀速进动，必须给陀螺一个推力，使它开始进动。没有这一适当的初始进动速度，最多也只能得到一个赝规则进动。

如果进动很慢，以致 $\dot{\phi} \cos \theta_0$ 与 a 相比可略去不计时， $\dot{\phi}$ 的一个近似解为

$$\dot{\phi} \approx \frac{\beta}{2a} = \frac{Mgl}{I_3 \omega_3} \quad (\text{慢进动}),$$

这与快陀螺的赝规则进动的平均速率相同。当然，这正是预料的结果；如果进动速率是慢的，则在一开始就给迴转仪一个小的推力或根本没有推力之间的差别极微。注意，由于 $\dot{\phi}$ 的这一数值与 a 相比可略去 $\dot{\phi} \cos \theta$ 的这一情况，等于要求 ω_3 必须远大于最小允许值。对于这样一些大的 ω_3 值来讲，当 $\dot{\phi}$ 大到使 Mgl 比式 (5-77 a) 中其他各项小得多时，就能得到“快”进动：

$$\dot{\phi} = \frac{I_3 \omega_3}{I_1 \cos \theta_0} \quad (\text{快进动}).$$

快进动与引力矩无关,事实上是与自由体的进动相关的(见习题 19a).

另外值得注意的是 $u = 1$ 对应于 $f(u)$ 的一个根时的情况¹⁾. 例如,假定一个陀螺开始旋转时的图轴处于铅垂位置,显然有 $b = a$, 这是因为 $I_1 b$ 和 $I_1 a$ 分别是绕铅垂轴和图轴的角动量的常值分量,而且这些轴最初是重合的. 由于初始角速度仅仅是绕图轴的,因此,在 $t = 0$ 时求解的能量方程 (5-59) 表明,

$$E' = E - \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 = Mgl.$$

根据 α 和 β 的定义[式 (5-61)] 可得 $\alpha = \beta$.

任何角度时的能量方程能够写成

$$\dot{u}^2 = (1 - u^2)\beta(1 - u) - a^2(1 - u)^2$$

或

$$\dot{u}^2 = (1 - u)^2\{\beta(1 + u) - a^2\}.$$

方程的形式表明, $u = 1$ 总是一个二重根,它的第三个根为

$$u_3 = \frac{a^2}{\beta} - 1.$$

如果 $a^2/\beta > 2$ (这对应于“快”陀螺条件), 则 u_3 大于 1, 而且只可能有 $u = 1$ 时的运动,陀螺也只是绕铅垂轴不断地旋转. 显示出这种情况的 $f(u)$ 的图线如图 5-11(a) 所示. 另一方面,如果 $a^2/\beta < 2$, 则 u_3 小于 1, $f(u)$ 将取图 5-11(b) 所示的形式,陀螺也将在 $\theta = 0$ 和 $\theta = \theta_3$ 之间章动. 这样,就有一个临界角速度 ω' , 大于此值时,只可能有铅垂方向的运动, ω' 的数值由下式给出:

$$\frac{a^2}{\beta} = \left(\frac{I_3}{I_1}\right) \frac{I_3 \omega'^2}{2Mgl} = 2$$

1) 注意,这应该看作是一种特殊情况,因为在前面的讨论中, $\sin^2 \theta$ 的因子在那些表达式中是被重复地约除的.

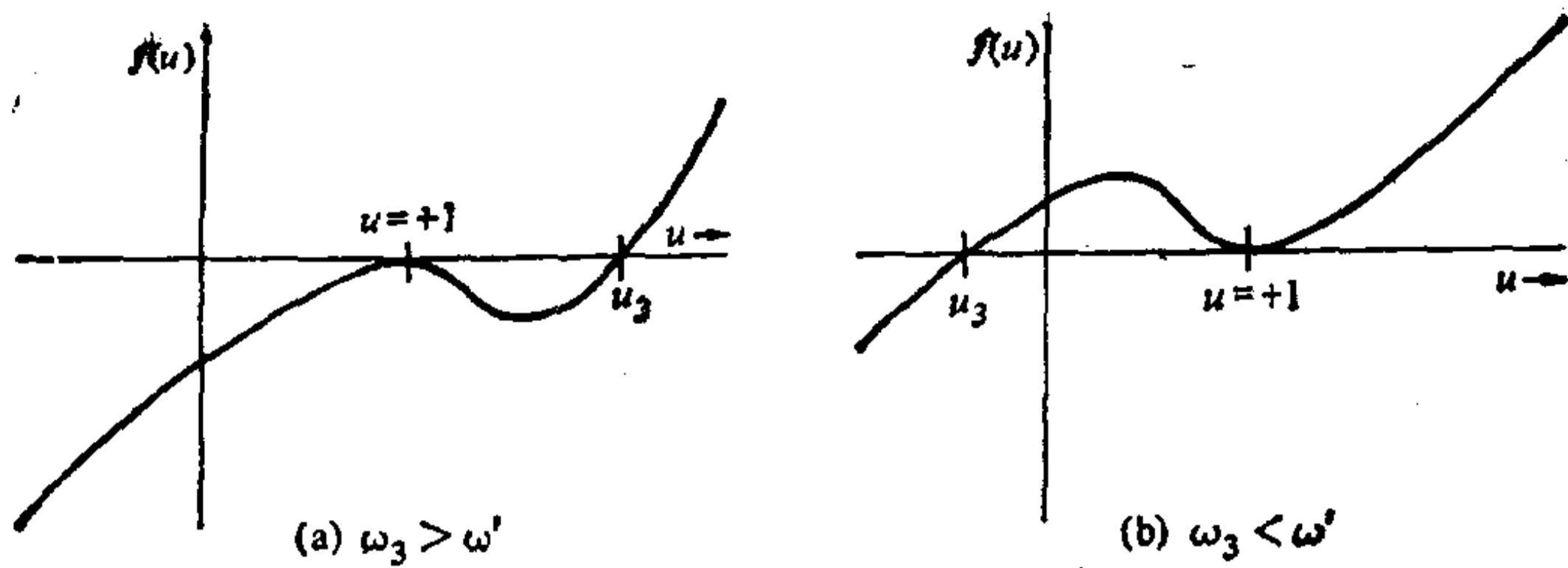


图 5-11 最初的图轴是铅垂时的 $f(u)$ 图线

或

$$\omega'^2 = 4 \frac{MglI_1}{I_3^2}, \quad (5-80)$$

这与 $\theta_0 = 0$ 时匀速进动最小频率的表达式 (5-79) 相一致。实际上,如果陀螺最初以大于临界值的角速度 ω_3 绕铅垂轴旋转,它将暂时平静地绕铅垂轴继续旋转(因而称为“睡”陀螺)。然而,摩擦力将使转动频率逐渐减小到临界值以下,随着旋转的变慢,陀螺开始越来越厉害地摇摆。摩擦效应(这当然不能直接包含在拉格朗日框架之内)能够引起陀螺行为的意想不到的现象。一个值得一提的例子是“倒翻陀螺”,它的形状是一个略大于半个球的截球体,在它的平坦表面上装有一个心柱。当我们在坚硬面上使它的球面向下旋转时,它就开始向一侧滑滚和章动,直到最终翻转过来并在心柱上旋转时为止,在这种位置上,它表现为一个标准的“睡”陀螺。角动量矢量的完全反向,是由陀螺的球表面在滑滚时出现的摩擦力矩引起的¹⁾。

一门普遍而又有影响的工程应用学科是以快速旋转刚体

1) 在廿世纪五十年代,有关“倒翻陀螺”的著作极多。例如可参阅 A. R. Del Campo, *American Journal of Physics* **23**, 544 (1955), 还可参阅 Olsson, *Classical Mechanics*, pp. 254—257.

的应用为基础的，特别是所谓“迴转仪”的应用。迴转仪基本上是一个对称陀螺。它安放在一个常平架上，在外在因素推动下绕图轴高速旋转。虽然它的重心始终静止，但其图轴的运动却是完全任意的。如果施加于迴转仪的外力矩适当，它将经历前面所描述的有关重陀螺的进动和章动。然而，“快”陀螺的条件得到了充分的满足，这样，章动量始终很小，而且安装时还可设法使章动得以阻息。因此，唯一能观察到的迴转现象是进动，而且描述这种进动所需的数学处理也能大为简化。我们能够弄清楚如何通过对称重陀螺情况的推广来做到这一点。如果 \mathbf{R} 是沿图轴从固定点到重心的矢径，则作用于陀螺的引力矩为

$$\mathbf{N} = \mathbf{R} \times M\mathbf{g}, \quad (5-81)$$

这里的 \mathbf{g} 是向下的重力加速度矢量。如果 \mathbf{L}_3 是一个沿图轴的矢量，它描述的是绕图轴的转动角动量，而称为进动矢量的 $\boldsymbol{\omega}_p$ 又与铅垂方向相一致，其量值等于平均角速度 $\bar{\phi}$ [即式 (5-74)]，则(赓规则)进动的方向和量值可表达成

$$\boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{L}_3 = \mathbf{N}. \quad (5-82)$$

由于关于固定点或质心的任何力矩都能表达成类似于式 (5-81) 的形式 $\mathbf{R} \times \mathbf{F}$ ，所以“快”陀螺的最后总进动速率始终能从式(5-82) 推导，其方向为确定进动轴的力 \mathbf{F} 的方向。迴转仪的几乎所有工程应用的平衡特性(即略去瞬态值的情况)都能从式 (5-82) 推导。

撤去任何力矩后，迴转仪的旋转轴将始终保持它最初的方向。因此，迴转陀螺能用来指示或保持特定方向，例如可以提供各种稳定的平台。正如式 (5-82) 所指出的那样，通过进动现象，他们可以感觉到，并量度出角度转动速率和外加力矩。从式 (5-82) 看到，进动率正比于力矩，而在非旋转体的情况下，它是由力矩给出的角加速度。一旦移

去力矩,非旋转体将继续运动;而在相似条件下,迴转陀螺会完全停止进动。

迴转罗盘的讨论更为复杂,因为我们在这里论述的是固定非惯性系内的迴转仪的特性,而地球则在它下面转动。在迴转罗盘中,外力矩将使它自动地经受一个附加的进动,其速率正好是足以平衡地球的转动速率。一旦沿着地球转动的方向,即北极方向来设置迴转罗盘,它将保持这一方向,至少在慢速运动的交通工具内是如此。这里所提到的一切,对于高速旋转体在技术上的各种引人入胜的应用,显然是过于简单和高度压缩的。遗憾的是,如果要在这一方面作进一步探讨,将使我们离题太远。

然而,还有两个进动现象的例子值得提一下,因为现象本身以及作为本章导出的技术应用实例都极为有趣。第一种是由地球赤道“隆起”诱发的力矩造成的进动;第二种是磁场中运动电荷的进动。以下两节将讨论这些例子。

5-8 二分点及卫星轨道的进动

前面已经提到,地球是一个陀螺,其图轴相对于黄道法线作进动,这在天文学上称为二分点进动。如果地球是一圆球体,它就不会受到太阳系中其他星球的力矩作用。但是,正如已经指出的那样,地球与圆球体略有不同,它非常近似于一个旋转扁球体。正是由于赤道隆起部分受到的净力矩,使地球轴在空间内进动,这种净力矩主要

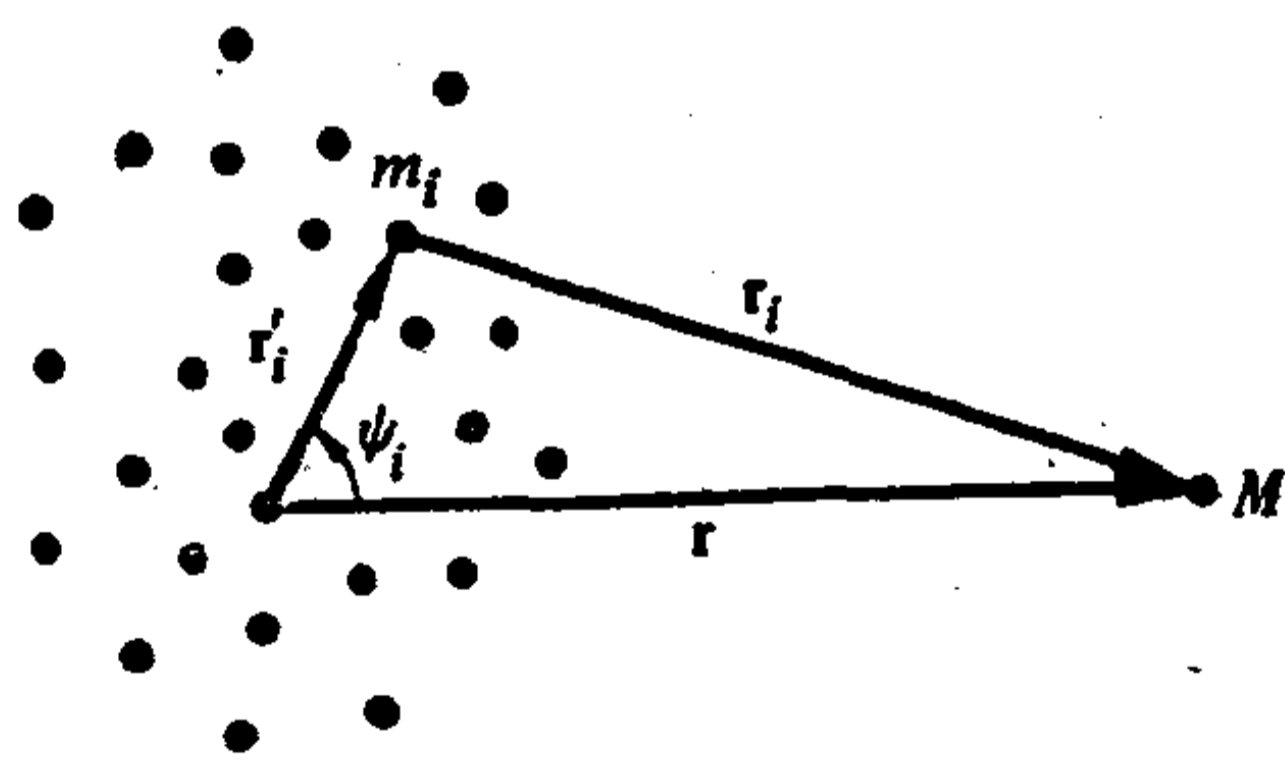


图 5-12 扩展物体和质点间引力势的几何图示

来自太阳和月球的引力作用。

为了计算这种进动的速率,必须求出质点(代表太阳或月球)和非球体物质分布之间的相互引力势,这就要涉及到一些势论的知识。我们将会发现,前面得到的惯性张量的某些性质对于这种势的推导极为有用。

今考虑构成一个物体的质点分布,以及代表另一物体的质量为 M 的单个质点(见图 5-12)。如果 r_i 是分布中第 i 个质点与质点 M 之间的距离,则两个物体之间的相互引力势应为¹⁾

$$V = - \frac{GMm_i}{r_i} = - \frac{GMm_i}{r \sqrt{1 + \left(\frac{r'_i}{r}\right)^2 - 2 \frac{r'_i}{r} \cos \phi_i}}. \quad (5-83)$$

在这一最后表达式内,我们用了图 5-12 的名称, r'_i 是从特定点到第 i 个质点的矢径,这一特定点以后将取作第一个物体的质心; r 是到 M 质点的相应矢径;而 ϕ_i 则是两个矢量之间的夹角。众所周知,利用勒让德多项式可以给出式(5-83)的一个简单的展开式;事实上,式(5-83)中平方根的倒数称为勒让德多项式的生成函数²⁾。因此,只要从原点到 M 的距离 r 大于任何 r'_i ,就能得到

$$V = - \frac{GM}{r} \sum_{n=0} m_i \left(\frac{r'_i}{r}\right)^n P_n(\cos \phi_i). \quad (5-84)$$

我们将只用前三个勒让德多项式,以供参考:

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1). \quad (5-85)$$

对于只有径向密度变化的连续球体,不难证明,式(5-84)中除

1) 提醒一下也许是值得的,式中应对所有的重复下标求和。

2) 例如,参阅 J. Mathews, R. L. Walker, *Mathematical Methods of Physics*, 第一版 p. 164 和 G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, p. 418.

第一项外的所有各项都等于零。例如,对于质量密度为 $\rho(r')$ 的球对称物体,和式内的第 n 项能表达成

$$\iiint dV' \rho(r') \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\phi).$$

用极轴沿 \mathbf{r} 方向的球极坐标表示,此式也能表达成

$$\int r'^2 dr' \rho(r') \left(\frac{r'}{r}\right)^n \int_{-1}^{+1} d(\cos\phi) P_n(\cos\phi).$$

根据 P_n 相对于 P_0 的正交归一性质,除 $n=0$ 的情况外,对 $\cos\phi$ 所求之积分为零,这证明了上面的说法。

如果物体仅仅稍为偏离球对称,就象地球的情况那样,则能预料,式(5-84)中除 $n=0$ 外的所有各项都将随 n 的增加而迅速递减。所以对于球体的势来讲,只要在式(5-84)中保留第一个非零改正项就足够了。现在,选作原点的质心将使 $n=1$ 这一项恒等于零,因为这一项可以写成

$$-\frac{GM}{r^2} m_i r'_i \cos\phi_i = -\frac{GM}{r^3} \mathbf{r} \cdot m_i \mathbf{r}'_i,$$

根据质心的定义,此式当然为零。至于 $n=2$ 的下一项则能表达成

$$\frac{GM}{2r^3} m_i r_i'^2 (1 - 3\cos^2\phi_i).$$

把 $r'_i \cos^2\phi_i$ 表达成并矢式是有用的:

$$r_i'^2 \cos^2\phi_i = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'_i \mathbf{r}'_i \cdot \mathbf{r}}{r^2},$$

这样,只要作出一点合理的加法和减法运算,势能表达式中 $n=2$ 这一项的形式就成为

$$\frac{3}{2} \frac{GM}{r^5} m_i \mathbf{r} \cdot [r_i'^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}'_i \mathbf{r}'_i] \cdot \mathbf{r} - \frac{GM}{r^3} m_i r_i'^2.$$

可以看出,这一表达式中的第一部分正好是惯性张量的并矢形式,根据式(5-6)还可看出,第二部分包含的是惯性张量的

迹。所以我們能够把 $n = 2$ 这一項表达成

$$\frac{3}{2} \frac{GM}{r^5} \mathbf{r} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{r} - \frac{GM}{2r^3} \text{TrI},$$

而非球形物体的势的完备近似形式能够表达成

$$V = -\frac{GMm}{r} + \frac{GM}{2r^3} [3I_r - \text{TrI}], \quad (5-86)$$

式中 m 是第一个物体(地球)的质量; I_r 是对于 \mathbf{r} 方向的转动惯量。根据惯性张量在主轴系统内的对角表示式, 它的迹正好等于主转动惯量之和, 所以 V 可表达为

$$V = \frac{GMm}{r} + \frac{GM}{2r^3} [3I_r - (I_1 + I_2 + I_3)]. \quad (5-87)$$

式(5-87)有时称为马克科累夫 (MacCullagh) 公式。到目前为止, 尚未提及转动的对称性质。今假设我们所取对称轴是沿着第三主轴的, 这时有 $I_1 = I_2$ 。如果 α, β, γ 是 \mathbf{r} 相对于主轴的方向余弦, 则转动惯量 I_r 可表达为

$$I_r = I_1(\alpha^2 + \beta^2) + I_3\gamma^2 = I_1 + (I_3 - I_1)\gamma^2.$$

利用 I_r 的这一形式, 式(5-87)所示之势成为

$$V = -\frac{GMm}{r} + \frac{GM(I_3 - I_1)}{2r^3} [3\gamma^2 - 1]$$

或

$$V = -\frac{GMm}{r} + \frac{GM(I_3 - I_1)}{2r^3} P_2(\gamma). \quad (5-88)$$

式(5-88)这个一般形式从一开始就能料到, 因为根据质量分布推导得的势是服从泊松方程的。众所周知, 适合于物体对称性的解是形式为 $P_n(\gamma)/r^{n+1}$ 的各项组成的展开式, 在这种展开式中, 式(5-88)是头两个非零项。然而, 按这种做法得出各项系数并不比这里所采用的推导简单。还应记得, V 的展开式可以说是任意带电体静电势的多极展开式在引力场

中的类比¹⁾。这里缺少 $n = 1$ 这一项是因为引力“荷”的符号只有一种,而且也不可能有引力偶极矩。其次,惯性张量也是模拟双偶极矩张量定义的。因此,我们所求的力学效应可以说是由扁球形地球的引力四极矩引起的²⁾。

在势的表达式 (5-88) 中,唯一与物体取向有关,因而能产生力矩的那一项是

$$V_2 = \frac{GM(I_3 - I_1)}{2r^3} P_2(\gamma). \quad (5-89)$$

以地球的进动为例,应该记得, γ 是地球图轴与球心到太阳或月球的矢径之间的方向余弦。当这些物体沿它们的表观轨道绕行时, γ 将随之变化。 γ 与更为常用的天文学角度之间的关系能从图 5-13 看出,图中的太阳或月球位于 xy 平面内,物体图轴则位于 xz 平面内。图轴与 z 轴方向之间的夹角 θ 是图轴的倾角。沿图轴的单位矢量与到天体的矢径的标积,仅仅涉及它们的 x 分量的乘积,所以有

$$\gamma = \sin \theta \cos \eta.$$

因而 V_2 能表达成

$$V_2 = \frac{GM(I_3 - I_1)}{2r^3} \times [3\sin^2\theta \cos^2\eta - 1].$$

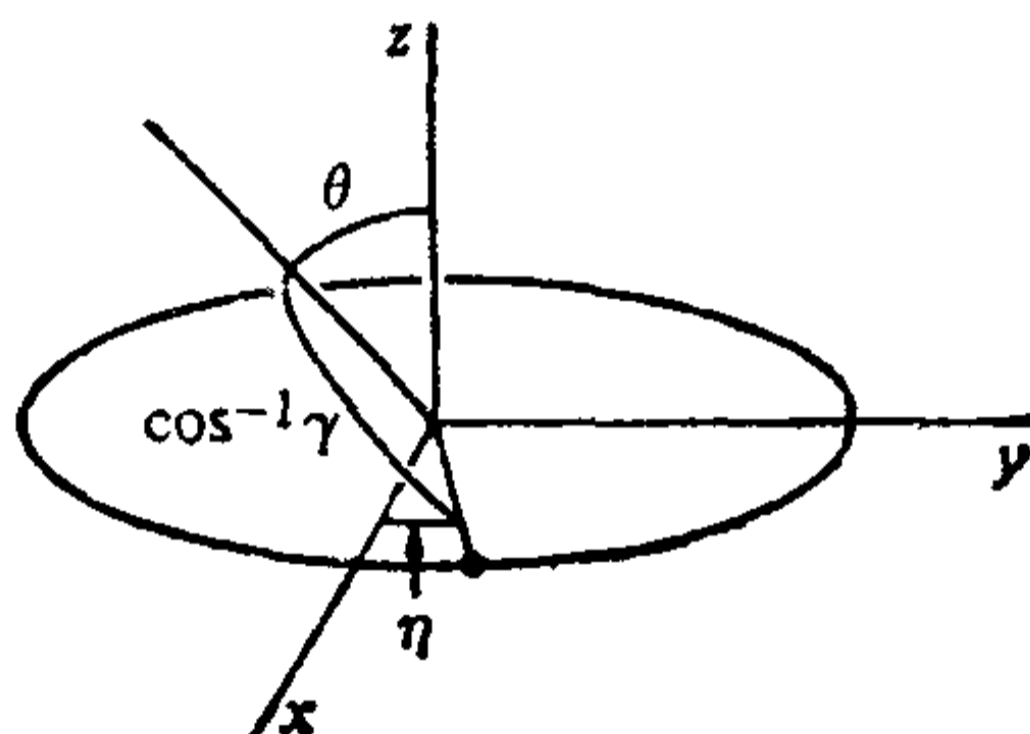


图 5-13 地球图轴与质点轨道之间的关系图

正象我们所看到的那样,轨道运动与进动运动相比是非常快的,为了得到平均进动率,最好是求出 V_2 在有关天体的整个轨道周期内的平均值。由于太阳和月球的表观轨道的偏

- 1) 例如可参阅 J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 节 4.1.
- 2) 注意,到目前为止的论证中,没有任何理由说式 (5-88) 只能限于刚体。只有从现在开始我们要求主轴固定于物体以及相关转动惯量始终不变时,才会有刚性约束。

心率极小, r 可认为是常量, 唯一的变化在于 $\cos^2 \eta$. $\cos^2 \eta$ 在整个周期内的平均值等于 $1/2$, 所以平均势能为

$$\begin{aligned}\bar{V}_2 &= \frac{GM(I_3 - I_1)}{2r^3} \left[\frac{3}{2} \sin^2 \theta - 1 \right] \\ &= \frac{GM(I_3 - I_1)}{2r^3} \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cos^2 \theta \right],\end{aligned}$$

最后得

$$\bar{V}_2 = - \frac{GM(I_3 - I_1)}{2r^3} P_2(\cos \theta). \quad (5-90)$$

从式 (5-90) 推导得的力矩与图轴和轨道法线(它的作用同重陀螺中的铅垂轴一样)都垂直. 因此, 进动将相对于轨道法向矢量的方向进行. 进动率的量值可从式 (5-82) 求得, 但由于势的形式不同于重陀螺情况下的形式, 所以最好还是给出一个较为正式的推导. 由于对称物体的势仅是 $\cos \theta$ 的函数, 所以根据式 (5-52), 拉氏函数能够表达成

$$\begin{aligned}L &= \frac{I_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 \\ &\quad - V(\cos \theta).\end{aligned} \quad (5-91)$$

如果我们只考虑匀速进动, 而不管所需的初始条件如何, 我们就能简单地把运动方程中的 $\dot{\theta}$ 和 $\ddot{\theta}$ 取作零. 对应于 θ 的拉格朗日方程将成为

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = I_1 \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta - I_3 \dot{\phi} \sin \theta (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) - \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$

或

$$I_3 \omega_3 \dot{\phi} - I_1 \dot{\phi}^2 \cos \theta = \frac{\partial V}{\partial (\cos \theta)}, \quad (5-92)$$

这是式 (5-76') 在更为一般的势的情况下的类比. 对于慢进动, 基本上意味着 $\dot{\phi} \ll \omega_3$, 因此式 (5-92) 中的 $\dot{\phi}^2$ 项就可略去, 匀速进动速率也可表达为

$$\dot{\phi} = \frac{1}{I_3 \omega_3} \frac{\partial V}{\partial (\cos \theta)}. \quad (5-93)$$

不难看出,在重陀螺情况下,式(5-93)确实与式(5-74)的结果相符.采用式(5-90)的势,进动速率将等于

$$\dot{\phi} = - \frac{3GM}{2\omega_3 r^3} \frac{I_3 - I_1}{I_3} \cos \theta. \quad (5-94)$$

如果进动是由太阳引起的,这一公式就能表达成更为简单的形式,这时,只要把 r 取作地球轨道的长半轴,并采用开普勒定律式(3-71),它这时的形式为

$$\omega_0^2 = \left(\frac{2\pi}{\tau} \right)^2 = \frac{GM}{r^3}.$$

这样,相对于这一轨道角速度 ω_0 的进动速率将等于

$$\frac{\dot{\phi}}{\omega_0} = - \frac{3}{2} \frac{\omega_0}{\omega_3} \frac{I_3 - I_1}{I_3} \cos \theta. \quad (5-95)$$

采用节 5-6 中给出的 $(I_3 - I_1)/I_3$ 的值以及令 $\theta = 23^\circ 27'$, 式(5-95)将表明,由太阳引起的进动使图轴绕黄道法向每隔大约 81,000 年转过一整周. 月球质量比太阳质量小得多,但它离地球极近,因此,月球的总的影晌还是大的;事实上,月球引起的进动速率超过太阳引起的速率的两倍. 由于月球轨道接近黄道,因此它与太阳表观轨道有着相同的方向,这样,两个进动几乎可以象算术加法一样加在一起,结合以后的所谓月日进动速率等于每年 $50.25''$, 或者大约 26,000 年转过一整周. 注意,这一进动速率是如此之慢,以致与 ω_3 相比略去 $\dot{\phi}$ 后所得近似也是足够满意的. 由于太阳、月球和地球三者处于不变的相对运动中,而且月球轨道对黄道倾斜大约为 5° , 因此,进动表现出不规则性,这种不规则性称为天体章动. 这些周期的不规则性的程度并不大——对 θ 大约是 9 弧秒, $\dot{\phi}$ 大约是 18 弧秒. 即使这样,比起真正章动还是很大的. 克莱

因和索末菲曾经指出,真正章动是通过钱德勒摇摆体现的,其幅度决不会大于一个弧秒的几十分之一。

我们还可以进一步地应用(5-88)形式的势,以及式(5-93)所表示的,与之相关联的匀速进动速率。早已强调指出,势代表了共有的引力相互作用;如果它产生了作用在旋转着的地球上的力矩,也就同时引起作用在 M 质点上的(非有心)力。这些小的力的作用表现为质点轨道平面相对于惯性空间的进动。如果我们再次在旋转刚体特性的基础上来讨论,就有可能得到这种进动的近似公式。由于进动速率与轨道角速度相比很小,所以我们能再次对整个轨道取平均。所谓求平均实际上是用一刚性环来代替质点,这一刚性环的质量为 M ,它的半径与这一(认为是圆形的)轨道的半径相同,而且以轨道的频率围绕环的图轴旋转。式(5-90)给出了这一圆环所在的势场,圆环图轴和地球图轴之间的夹角为 θ 。平均进动速率仍由式(5-93)给出,但现在的 I_3 和 ω_3 应属于旋转圆环而不属于地球。因此,为了更便于这里的应用,可把式(5-93)重新表达成

$$\dot{\phi} = \frac{\tau}{2\pi M r^2} \frac{\partial V}{\partial(\cos\theta)}, \quad (5-93')$$

而式(5-94)则成为

$$\dot{\phi} = - \frac{\tau}{2\pi} \frac{3}{2} \frac{G(I_3 - I_1)}{r^5} \cos\theta. \quad (5-94')$$

例如,可以用式(5-94')求得由于地球的扁球形引起的月球轨道的进动。一个更为流行的应用是把它用于绕地球运行的人造卫星的近似圆形轨道的进动。人造卫星在一个周期内的进动与一次完全进动之比为

$$\frac{\dot{\phi}\tau}{2\pi} = - \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^2 \frac{3}{2} \frac{G(I_3 - I_1)}{r^5} \cos\theta.$$

现在把开普勒定律应用于卫星的周期,这一结果将化为

$$\frac{\dot{\phi}\tau}{2\pi} = -\frac{3}{2} \frac{I_3 - I_1}{mr^2} \cos\theta, \quad (5-96)$$

式中 m 是地球的质量。如果地球是一均匀球体,主转动惯量将是

$$I_3 \sim I_1 = \frac{2}{5} mR^2,$$

式中 R 是地球半径。由于核心要比外层密得多,因此转动惯量较小,事实上可以写成¹⁾

$$I_3 = 0.331mR^2 \approx \frac{1}{3} mR^2.$$

近似的进动公式可以表达成

$$\frac{\dot{\phi}\tau}{2\pi} = -\frac{1}{2} \frac{I_3 - I_1}{I_3} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cos\theta. \quad (5-97)$$

对于“近距”卫星, r 非常接近于 R , 而卫星轨道对赤道的倾角假如是 30° , 那么, 式(5-97)则告诉我们, 卫星绕行大约 700 圈时, 轨道平面将由于进动而整整转过 2π 弧度。由于近距卫星的周期约为 $1\frac{1}{2}$ 小时, 所以轨道平面出现一次完全转动需要花比六个星期略为多一点的时间。显然, 这个效应是非常有意义的。以后, 当我们讨论微扰理论的课题时, 还将论及卫星轨道的进动。

5-9 磁场内电荷系统的进动

带电粒子系统在磁场内的运动一般并不涉及刚体运动。然而在许多特殊事例中, 利用这里就刚体运动发展起来的技

1) I_3 的那些最佳值来自现在对卫星轨道的这些效应的观测。参阅 F. D. Stacey, *Physios of the Earth*, p. 26.

巧来讨论这种运动最为完美。由于这一理由以及它们在原子和原子核物理学中的重要性，我们将在这里简要地考虑几个例子。

运动电荷系统(相对于特定原点)的磁矩定义为¹⁾

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2c} \sum q_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) \rightarrow \frac{1}{2c} \int dV \rho_c(\mathbf{r})(\mathbf{r} \times \mathbf{v}). \quad (5-98)$$

这里的第一个表达式是对所有电荷为 q_i 的单个质点所求之和，而第二个表达式则是对密度为 $\rho_c(\mathbf{r})$ 的连续分布电荷的相应推广。相应约定下的系统角动量为

$$\mathbf{L} = \sum m_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) \rightarrow \int dV \rho_m(\mathbf{r})(\mathbf{r} \times \mathbf{v}).$$

磁矩和角动量两者的形式相似，而且通过一个并矢式相互关联着。然而，这里的讨论将只限于 \mathbf{M} 正比于 \mathbf{L} 的情况，即

$$\mathbf{M} = \Gamma \mathbf{L}, \quad (5-99)$$

最为自然的是，假设所有质点或连续系统内的所有各点处具有相同的荷质比 q/m 。在这些情况中，旋磁比 Γ 为

$$\Gamma = \frac{q}{2mc}, \quad (5-100)$$

但鉴于质点和原子自旋的模式，常把 Γ 看作是一个待定系数。作用于磁偶极子上的力和力矩可以认为是由下式所示之势导出的²⁾：

$$V = -(\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}). \quad (5-101)$$

式 (5-101) 意味着磁场在整个系统内实际上不变。事实上，这种图景最适用于点样磁矩，这种磁矩的量值与它所经历的

1) 例如参阅 J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2d ed., pp. 180—184. 或 W. K. H. Panofsky, M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, 2d ed., pp. 130—133.

2) 见所引 Jackson 的著作第 185—187 页。

运动无关——这是一幅适合于原子或更小尺度上的永久磁体或系统的图景。在 \mathbf{B} 是均匀的情况下，有关的势仅与 \mathbf{M} 相对于 \mathbf{B} 的取向有关。磁矩并不受到力的作用，但却有一力矩

$$\mathbf{N} = \mathbf{M} \times \mathbf{B}. \quad (5-102)$$

[与式 (5-51) 和 (5-81) 相比较] 总角动量的时间变化率等于这一力矩，所以根据式 (5-99) 可有

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{L} \times \gamma \mathbf{B}. \quad (5-103)$$

这实际上是某个量值不变的矢量的运动方程，该矢量以角速度 $\boldsymbol{\omega} = -\gamma \mathbf{B}$ 绕 \mathbf{B} 的方向在空间转动。均匀磁场对永久磁偶极子的作用引起角动量矢量(及磁矩)的匀速进动。对于经典旋磁比式 (5-100)，进动角速度为

$$\boldsymbol{\omega}_i = -\frac{q \mathbf{B}}{2mc}, \quad (5-104)$$

这称为拉摩频率。由于电子的 q 是负值，所以拉摩进动是绕 \mathbf{B} 的方向逆时针的进动。

作为第二个例子，考虑一群运动带电粒子，对它们的运动性质不加任何限制，但认为它们都有相同的荷质比 q/m ，并处于恒定的均匀磁场区域内。还将认为，粒子间的任何相互作用势仅与粒子间的标量距离有关。系统的拉氏函数可以表达成[见式 (1-66)]

$$L = \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \frac{q}{mc} m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{A}_i(\mathbf{r}_i) + V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|), \quad (5-105)$$

这里的恒定磁场 \mathbf{B} 由矢势 \mathbf{A} 生成，而

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r}. \quad (5-106)$$

用 \mathbf{B} 来表示，拉氏函数的形式成为(交换标积和矢积)

$$L = \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \frac{q \mathbf{B}}{2mc} \cdot \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i + V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|). \quad (5-107)$$

与磁场的相互作用项能够表达成另一形式 [见式 (5-101) 和 (5-104)]:

$$\frac{q \mathbf{B} \cdot \mathbf{L}}{2mc} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{B} = -\boldsymbol{\omega}_l \cdot \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i. \quad (5-108)$$

现在假设我们用来表示拉氏函数的坐标是相对于带撇坐标系的,后者与前者有着相同的原点,但后者以角速度 $\boldsymbol{\omega}_l$ 绕 \mathbf{B} 的方向匀速转动.当然,与原点的矢量距离不变,就好象 $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ 那样的标量距离一样.然而,相对于新坐标轴的速度与原来的速度不同,它们之间的关系为

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \boldsymbol{\omega}_l \times \mathbf{r}_i.$$

在拉氏函数中不受变换影响的两项是

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_i v_i^2 &= \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + m_i \mathbf{v}'_i \cdot (\boldsymbol{\omega}_l \times \mathbf{r}_i) + \frac{m_i}{2} (\boldsymbol{\omega}_l \times \mathbf{r}_i) \\ &\cdot (\boldsymbol{\omega}_l \times \mathbf{r}_i), \quad -\boldsymbol{\omega}_l \cdot \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = -\boldsymbol{\omega}_l \cdot (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}'_i) \\ &- \boldsymbol{\omega}_l \cdot [\mathbf{r}_i \times m_i (\boldsymbol{\omega}_l \times \mathbf{r}_i)]. \end{aligned}$$

把标积和矢积换位之后可以看出, $\boldsymbol{\omega}_l$ 和 \mathbf{v}'_i 的线性项正好等值而反向,因而可从拉氏函数中消去.对 $\boldsymbol{\omega}_l$ 的二次项作出类似的换位表明,它们具有相同的形式,并且与系统相对于由 $\boldsymbol{\omega}_l$ 确定的坐标轴的转动惯量有关(见节 5-3 开头部分).拉氏函数中的二次项事实上可以表达成

$$\begin{aligned} -\frac{m_i}{2} (\boldsymbol{\omega}_l \times \mathbf{r}_i) \cdot (\boldsymbol{\omega}_l \times \mathbf{r}_i) &= -\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_l \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}_l \\ &= -\frac{1}{2} I_l \omega_l^2, \end{aligned} \quad (5-109)$$

式中的 I_l 代表相对于 $\boldsymbol{\omega}_l$ 的坐标轴的转动惯量.用转动系统内的坐标表示,拉氏函数具有简单的形式

$$L = \frac{1}{2} m_i v_i^2 + V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) - \frac{1}{2} I_i \omega_i^2, \quad (5-110)$$

由此可见，磁场内的所有线性项都已消去。为了得到二次项相对量值的概念，我们来考虑系统运动以某一频率 ω 转动的一种情况，例如，绕原子核转动的电子。这样，对于与球对称的差别并不太大的系统，动能近似地等于 $I\omega^2/2$ （去掉了转动惯量的下标）， ω_i 的线性项为 $\omega_i \cdot \mathbf{L} \approx I\omega_i\omega$ 的量级。因此，式 (5-110) 中的二次项与动能相比约为 $(\omega_i/\omega)^2$ 的量级；相对于线性项则为 (ω_i/ω) 的量级。在原子或更小尺度上的大多数系统中，固有频率远大于拉莫尔频率。例如，谱线频率（固有频率之差）与简单塞曼效应中的频移相比，后者是正比于拉莫尔频率的。因此，对于这样一些系统，在移动系统内的运动与没有磁场的情况下的实验室系内的运动相同。我们所得到的这个结论就是拉莫尔定理；该定理表明，在 \mathbf{B} 的一级近似下，恒定磁场对经典系统的作用是在正常运动上附加一个以角频率 ω_l 所作的匀速进动。

推荐参考书目

L. Brand, *Vector and Tensor Analysis* 吉卜斯引进了并矢和并矢式，并在他和威尔逊的著名著作 *Vector Analysis* (1901) 中对这一课题作了最充分的阐述。关于并矢式的更广泛的论述可以在威尔逊稍晚的专著 *Vector and Tensor Analysis* 中找到。在前面第四章中作为参考用的有关张量和矩阵分析的教科书可用作本章大多数有关内容的参考。这里还要提一下布兰德 (Brand) 的著作，因为该书不仅有关于张量的权威性资料，而且在他的第四章关于线性矢量函数的论述中详尽地讨论了并矢式。最后一章提供了有关四元数的、容易理解的简要介绍。

K. Symon, *Mechanics* 该著作在论述惯性张量性质的第十章中，举例说明了并矢式的实际应用，给出的大量例子是极为有趣的。并且清晰地论述了并矢式和张量的代数学。

E. J. Routh, *Dynamics of Rigid Bodies, Elementary and Advanced* 刚体动力学是十九世纪力学探索前沿的主要课题之一。劳斯 (Routh) 的两卷集论文(十九世纪九十年代出版的最新版本)是到那时为止该领域内达到的成就的合宜而又详尽的陈述。对许多课题来说,该著作几乎仍是唯一的英文版资料来源。作为麦克斯韦的同事,劳斯是微幅振荡稳定性研究领域的先驱,他的著作直到今天依然适用。

W. D. Macmillan, *Dynamics of Rigid Bodies* 虽然不宜推荐作为刚体动力学系统研究的参考书,但是这一著作仍包含有许多在其他地方不容易得到的资料;特别是第七章中有关潘索运动以及对称陀螺运动的丰富而又详尽的讨论,包括用椭圆函数表示的显解。论述滚动刚体某些复杂问题的那一章也是值得注意的。

A. Gray, *A Treatise on Gyrostatics and Rotational Motion* 这本著作是第一次世界大战时期人们对迴转仪装置的兴趣的产物,它代表了刚体动力学领域内英国传统的顶峰。该著作以稍显浓密而且大部分又是非矢量的论述方式讨论了范围广泛的课题,从地球转动极的漂移直到飞旋镖理论和空中陀螺的运行。许多相同课题的更为系统的讨论可参阅下面克莱因和索末菲的著作。

F. Klein, A. Sommerfeld, *Theorie des Kreisels* 这部陀螺理论的不朽著作,一共四卷,具有德国“手册”那种典型的呆板而又臃肿的一切外表。虽然看起来令人不愉快,而且又是用德文写成的,但却非常容易看懂。那种优雅而又不拘形式的文体,具有索末菲晚期作品的流畅而又注重教学细节的特点。虽然所作论述有时是高度数学化的,但并没有忽视物理领域,也没有陷入公式的迷宫。尽管标题限于陀螺和迴转仪,但实际上提供了所有刚体力学的内容丰富的教材,有时还论及物理学和数学的其他分支。例如,第一章同其他项目一起讨论了欧拉角、无限小转动和凯瑞-克莱因参量以及它们与同图变换、四元数理论等的关系。这一章后面的附注(在第四卷中)还讨论了与电动力学和狭义相对论的关系(量子力学尚未问世)。大体说来,第一卷提供了刚体动力学方面的必要的基础知识,并且用很少的数学公式给出了陀螺运动的实际描绘。

第二卷详尽地阐明了对称重陀螺，虽然也有许多关于潘索运动的讨论并概述了非对称陀螺。这里首先介绍了规则进动和不规则进动之间的区别，作者花了许多时间研究这两种运动以及如何来得到规则进动。花了许多篇幅来彻底否定有关迴转仪进动的通俗的或初级的“推导”。（作者指出，正是这些推导的不恰当性质促使他们写出了这篇论著！）还有相当长的篇幅讨论了运动的稳定性。大多数论述是以椭圆积分解为基础的，而且这种做法也不只限于这里所讨论的近似的微小章动。

第三卷主要论述摄动力（主要是摩擦力）和天文学上的应用（地球章动、二分点进动等）。地极漂移的讨论在发表的当时是特别完整的，它包括了地球的弹性效应和由于风的流通引起的大气物质的输送效应的估算。第四卷是关于技术上的应用，现在已经过时了。

F. Klein, *The Mathematical Theory of the Top* 1896年，F. 克莱因在普林斯顿作了一系列讲演，这些讲稿的片断就形成了这本小册子，最近，同一些并不相关的数学论文一起又予重印。这本书的绝大部分讨论了理论的一些高度抽象的数学细节，不过第一篇讲演提供了凯瑞-克莱因参量的清晰的演算。值得注意的是，这部著作以及他和索末菲合作的专论中都应用了把时间作为第四维的四维非欧空间——这是许多年来在狭义相对论中所期望应用的（见后面第七章）。但是，这种空间在这里纯粹是为了数学上的方便，并没有注意到它的物理意义。

A. Sommerfeld, *Mechanics* 索末菲和克莱因合作的有关陀螺的著作是索末菲的早期出版物之一，而这本书作为有名的丛书 *Lectures on Theoretical Physics* 的一部分，则要晚四十多年才出版，这是他的最后一部著作。他对陀螺的兴趣显然不减当年，他把相当大的篇幅用来定性地论述各种迴转仪和陀螺现象——甚至有一、二页讨论了非对称陀螺。有关整个课题的三十页左右的篇幅几乎占了论述刚体的那一章的全部，实际上成了一部巨著的文摘！所作论述泛而不深，更少详细的讨论。

V. D. Barger 和 M. G. Olsson, *Classical Mechanics, A Modern Perspective* 这一中级教材之所以被推荐为参考书，是因为它也许是简要

描述什么是“倒翻陀螺”以及它是如何运动的唯一的一本书(见第 254 页)。为要形象地证明倒翻陀螺确实风靡于王公贵族之间,而且同样迷住了那些物理学大师,可以参阅罗森塔 (Rozenfel) 编的 Niels Bohr 一书中第 208 页对页的照片。作为前面节 5-7 末所给出的参考书的补充,可参阅 T. R. Kane 和 D. A. Levinson, *Journ. Applied Mech.* **45**, 903 (Dec. 1978)。文中列有倒翻陀螺的近代计算和解,并附有广泛的文献目录。

J. Aharoni, *Lectures on Mechanics* 这是一部论述力学中那些相对独立的课题的论文集,结构比较松散,它之所以值得注意是因为它搜集了大量插图。例如,第 15—17 章中精心构思的插图可以用来说明惯性张量、潘索运动、迴转罗盘以及其他一些项目的某些棘手的方面。

L. Meirovitch, *Methods of Analytical Dynamics* 以及 S. W. Grogg, *Advanced Mechanics* 在力学的近代技术应用方面,刚体动力学是中心,这不仅是由于迴转仪这样的装置,而且还因为它是那些并非完全刚性的系统的一级近似,例如飞船就是这类系统。为了解决实际问题——不仅仅是公式的推导——的需要,就得给与力学方法以某种展望,而这些展望却与物理学家的观点往往是矛盾的。这两本教科书介绍了处理工程问题所需的近代方法。

E. Leimanis, *Motion of Coupled Rigid-Bodies* 俄国和苏联的应用数学家们极为关心一个或几个刚体相对于固定点所作运动的一般问题。他们的努力从十九世纪八十年代的柯瓦列夫斯卡娅时代一直延续到现在。很多著作都没有英译本。这一参考书是按应用数学家的观点写成的刚体运动的近代论著,该著作对俄国文献有充分的理解。象李级数这样一些现代数学技巧亦已编入。

W. H. Munk 和 G. J. F. Macdonald, *The Rotation of the Earth* 刚体动力学的最吸引人的应用之一是对转动中地球现象的应用——当然,首先得弄清楚地球及其附属物与刚体之间的偏离程度。这本参考书对地球物理学的一些应用作了透彻的介绍,文字也很生动,包括根据(日、月)蚀的古老历史记录来说明大陆漂移,直到钱德勒摇摆的地震激发问题。遗憾的是——或者说幸运的是——作出的论述不能看作是定

论,因为这一领域正处于蓬勃发展阶段,而且自从1960年出版以来,已经取得了重大的进展。但是,关于地球转动特征的研究还是从这一著作着手为好。

F. D. Stacey, *Physics of the Earth* 第二章提供了象二分点进动和钱德勒摇摆这样一些课题的简洁讨论,并列有近代的参考文献书目。

W. Wrigley, W. M. Hollister 和 W. G. Denhard, *Gyroscopic Theory, Design and Instrumentation* 迴转仪装置处于惯性导航技术近代成就的核心。已出版的文献相当可观,而尚未出版的报告文献甚至更多(还不包括专业技术人员之间的大量口头传说)。这一专著(有名的马萨诸塞理工学院德雷珀仪表实验室的出版物)是该领域的一本相当近代的综述。从转动矩阵的讨论直到实际装置的详细蓝图。Wrigley 和 Hollister 有一篇简短的评述性文章: *The Gyroscope: Theory and Application, Science, 149, 713 (Aug. 13, 1965)* 可能证明是有启发性的。

习 题

1. 如果 \mathbf{R}_i 是与某系统第 i 个质点的坐标相关的反对称矩阵,其矩阵元为 $R_{mn} = \epsilon_{mni} x_i$. 证明: 惯性张量的矩阵能表达成

$$\mathbf{I} = -m_i (\mathbf{R}_i)^2.$$

2. 通过矢量处理直接证明: 转动惯量的定义

$$I = m_i (\mathbf{r}_i \times \boldsymbol{\omega}) \cdot (\mathbf{r}_i \times \boldsymbol{\omega})$$

可以化为式(5-19)的形式。

3. 如果位于正圆柱体中心外的惯性椭球是一圆球,则该圆柱体的高度与直径之比等于多少?

4. 有一平板刚体,其形状为一个 45° 的直角三角形并具有均匀的质量密度。求相对于该刚体质心的主转动惯量。它的几根主轴是什么?

5. 三个等质量质点分别位于 $(a, 0, 0)$ 、 $(0, a, 2a)$ 和 $(0, 2a, a)$ 。求相对于原点的主转动惯量以及一组主轴。

6. 有一均匀正圆锥,高度为 h 、半角为 α 、密度为 ρ 。它的一条边

在一均匀水平面上无滑动地滚动，在 τ 时间后回到它原来的位置。求该锥体的动能和角动量分量表达式。

7. 证明：绕固定点的一般刚体运动的动能 T 的时间变化率为

$$\frac{dT}{dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{N}.$$

8. 根据 (1-53) 形式的、广义坐标 ψ 的拉格朗日运动方程推导欧拉运动方程 (5-39')。

9. (a) 有一重量可以忽略的棒，长度为 l ，它的两端各有一个质量为 m 的质点。今使棒绕某轴匀速转动，该轴通过棒的中心并与棒成 θ 角度。根据欧拉方程，求使棒转动的力矩沿棒的主轴的分量。

(b) 根据基本力矩方程 (1-26)，求力矩沿固定于空间的那些轴的分量。证明：这些分量与 (a) 中得到的那些分量相一致。

10. 式 (5-38) 对于非刚性系统相对于选定的转动坐标系的运动是成立的。对于一般的非刚性运动，如果所选转轴与连续系统的 (瞬时) 主轴重合，证明：式 (5-39) 由

$$\frac{d(l_i \omega_i)}{dt} + \epsilon_{ijk} \omega_j \omega_k l_k + \frac{dl_i}{dt} + \epsilon_{ijk} l_j \omega_k = N_i \quad i = 1, 2, 3,$$

代替，式中

$$l_i = \int dV \rho(\mathbf{r}) \epsilon_{ijk} x_j v'_k,$$

其中的 $\rho(\mathbf{r})$ 是 \mathbf{r} 处的质量密度， \mathbf{v}' 是系统点在 \mathbf{r} 处相对于转轴的速度。这些方程有时称为**刘维方程**，并且已经应用于准刚性运动的讨论，例如包括大气和海洋在内的地球的运动。



11. 一平面摆由一均匀杆构成。杆的长度为 l 、质量为 m ，厚度则可略去不计，悬其一端使之位于铅垂平面内。它的另一端则系一半径为 a 、质量为 M 的均匀圆盘，该圆盘能在自己的平面即铅垂面内自由转动。试以拉格朗日表述建立运动方程。

12. 有一薄片状刚体，今在其重心以外的某点处将其悬挂于竖直平面内，以构

成一复摆。试用绕重心的迴转半径以及悬挂点到重心的距离来计算微幅振荡的周期。证明：如果对于与重心的距离不相等的两个悬挂点来讲，复摆的周期相同，则这两个距离之和等于等效单摆摆长。

13. 一质量为 M 、长度为 $2l$ 的均匀棒，其一端通过一力常数为 k 的弹簧悬挂起来。该棒只能在一个竖直平面内摆动，而弹簧则因约束只能在铅垂方向运动。试以拉格朗日表述建立运动方程。

14. 一标尺的两端在一光滑的竖直圆环内滑动。如果标尺所张中心角为 120° ，证明：等效单摆摆长等于圆环的半径。

15. 一汽车从静止开始运动，它的一扇门最初与车身成直角。如果车门的铰链装在汽车的前方，当汽车加速时，车门将猛力关上。如果加速度 f 是一常数、门相对于转轴的迴转半径为 r_0 、质心与铰链的距离为 a ，求取把门关上所需时间的公式。并证明：若 f 等于 1 英尺/秒²，而车门是 4 英尺宽的均匀矩形，则所求时间近似地等于 3.04 秒。

16. 一轮子从一平直斜面上滚下，该斜面与水平面的夹角为 α 。轮子因约束致使其平面总是垂直于斜面平面，但它可以绕着斜面表面的法向轴转动。试用拉格朗日方程和待定乘子法求取轮子的二维运动的解。

17. (a) 用欧拉角表示在平坦水平面上无滑动地滚动的均匀球的约束条件。证明，这些约束是非完全约束。

(b) 用拉格朗日乘子法建立这一问题的拉格朗日方程。证明，平动和转动部分的动能是单独守恒的。还有别的运动常数吗？

18. 就无力矩情况下匀速进动的对称体，求作为时间函数的欧拉角解析解。

19. (a) 证明：无力矩对称陀螺的角动量在体轴系内以角频率 Ω 绕对称轴转动，还要证明：对称轴在空间内绕角动量的固定方向转动，其角频率为

$$\dot{\phi} = \frac{I_3 \omega_3}{I_1 \cos \theta},$$

式中 ϕ 是节点线相对于(作为空间 z 轴的)角动量的欧拉角。

(b) 利用第四章习题 19 的结果证明： ω 在空间内以相同频率 $\dot{\phi}$ 绕角动量转动，但 ω 和 L 之间的夹角 θ' 则决定于

$$\sin \theta' = \frac{Q}{\phi} \sin \theta'',$$

式中 θ'' 是 ω 对于对称轴的倾角。利用节 5-6 中给出的图证明：在地球表面上，地球转动轴和角动量轴的距离不超过 0.6 英寸。

(c) 根据 (a) 和 (b) 证明：无外力对称陀螺的运动可以用固定于体轴系内的圆锥的转动描述，体轴系的轴就是对称轴；而上述圆锥又在固定于空间内的另一圆锥上滚动，后者的轴则沿着角动量方向。角速度矢量则沿着这两个圆锥的切线方向。证明：也可以根据潘索结构用惯性椭球直接得到相同的描述。

20. 根据绕各主轴的转动的微小偏差来检验一般非对称刚体的欧拉方程的解，从而用解析方法证明前面第 246 页上用几何方法证明过的稳定性定理。假定 ω 的方向与某一主轴的差别极为微小，以致 ω 沿该轴的分量可以取作常数，而与该轴垂直的各分量的乘积则可略去不计。试就三个主轴中每一个轴来讨论合运动的有界性质。

21. 如果刚体不是对称的，则无力矩运动的欧拉方程解析解不可能用初等函数给出。但要证明：能够用能量和角动量的守恒来得到用椭圆积分表示的 ω 体轴系分量的表达式。

22. 把欧拉方程用于对称陀螺问题，而用欧拉角表示 ω_i 。证明：根据这种形式的欧拉方程能够直接得到两个运动积分式 (5-53) 和 (5-54)。

23. 假定运动是无章动的匀速进动，根据欧拉运动方程求取引力场中对称陀螺的匀速进动条件式 (5-77)。

24. 证明：对称陀螺的角动量值能够表达成仅是 θ 和一些运动常数的函数。再证明：由于上述原因，只有当对称轴匀速进动时，角动量矢量才可能匀速进动。

25. 在节 5-6 中，地球转轴相对于北极的进动是在地球不受力矩作用这一基础上计算的。而在节 5-8 中则指出，由于受到太阳和月球的力矩作用，地球将作受迫进动。事实上，两个结果都成立：转轴相对于对称轴的运动表现为地球在受迫进动期间的章动。为证明这一说法，就对称陀螺的情况把 θ 和 ϕ 作为时间的函数来计算，亦即给出一个初始速度 $\dot{\phi}_0$ ，此值远大于净进动速度 $\beta/2a$ ，但远小于 ω_s 。在这些条

件下,图轴的界圆依然是彼此靠拢的,但图轴轨道表现为图 5-9(b) 中所示的样子,亦即所显示的大圆环只能绕铅垂轴缓慢运动. 就这种情况证明式 (5-71) 依然成立,但这时的形式为

$$x_1 = \left(\frac{\beta}{a^2} - \frac{2\dot{\phi}_0}{a} \right) \sin^2 \theta_0.$$

根据 θ 和 $\dot{\phi}$ 的这些数值来求得 ω_1 和 ω_2 , 并证明: 当 $\beta/2a$ 远小于 $\dot{\phi}_0$ 时,矢量 ω 绕图轴进动的角速度

$$\Omega = \frac{I_1 - I_3}{I_1} \omega_3$$

与式 (5-49) 相符. 根据节 5-6 中给出的那些数字来证实: $\dot{\phi}_0$ 对应于大约 1600 年的周期, 所以 $\dot{\phi}_0$ 与逐日转动相比显然要小得多, 而与 $\beta/2a$ 相比又足够大, 因为 $\beta/2a$ 对应于 26,000 年的进动周期.

26. (a) 考虑一带撇坐标系, 其原点与一惯性坐标系的原点重合, 但却以固定角速度 ω_0 相对于惯性系而转动. 如果一个质点系所受之力是从只同与原点的距离有关的保守势 V 推导的, 证明: 用相对于带撇坐标系的坐标来表示的系统的拉氏函数能表达成

$$L = T' + \omega_0 \cdot \mathbf{L}' + \frac{1}{2} \omega_0 \cdot \mathbf{I}' \cdot \omega_0 - V,$$

式中撇号表明有关量是相对于带撇坐标系来计值的. 试问式中两附加项的物理意义?

(b) 假设 ω_0 位于 $x'_2 x'_3$ 平面内, 并假设一对称陀螺在运动时它的图轴被约束在 $x'_3 x'_1$ 平面内, 所以为了描述它的取向只需要两个欧拉角. 如果物体的设置保证它的质心正好固定在原点, 并且保证 $V = 0$. 试证明: 物体图轴将按照平面摆运动方程绕 x'_3 轴振荡, 求微幅振荡的频率. 这个例子阐明了迴转罗盘的原理.

27. 假设在一对称陀螺中的每一个质量元都有一成比例的电荷与之相关联, 从而荷质比 e/m 是常数——即所谓带电对称陀螺. 如果这样的物体在一均匀磁场内转动, 则根据式 (5-108), 它的拉氏函数应是

$$L = T - \omega_l \cdot \mathbf{L}.$$

证明 T 是常数 (这是洛仑兹力性质的标志, 即磁场对运动电荷并不作

功),并求取其他的运动常数。假设 ω_i 比绕图轴的初始转速小得多,求章动和进动的频率和幅度的表达式。章动和进动的动能又是从哪里来的?

第六章 微幅振荡

有一类机械运动,用拉格朗日表述来讨论最为理想,那就是系统在平衡位置附近的微幅振荡.这种微幅振荡的理论在声学、分子光谱、机械振动和耦合电路等方面具有广泛的实际应用.如果系统与稳定平衡条件的偏离足够小,其运动一般都能描述为线性谐振子耦合系统的运动.这里将认为读者对一个自由度的简谐振子的性质是熟悉的,不论是自由振荡还是受迫振荡,也不论是阻尼的还是无阻尼的都一样.这里要着重讨论适用于一个以上自由度的分立系统的方法.我们将会看到,所要求的数学技巧确实与研究刚体运动时所采用的极为相似,尽管所考虑的力学系统根本没有必要涉及到刚体.稳定运动附近的振荡虽也可以作出类似的论述,但用第八章中提出的哈密顿表述来讨论最为容易.

6-1 问题的表述

我们考虑一些保守系统,其中的势能仅是位置的函数.今假定,确定系统广义坐标 q_1, \dots, q_n 的那些变换方程并不显含时间.这就排除了与时间相关的约束.当作用于系统的广义力为零时:

$$Q_i = \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \right)_0 = 0, \quad (6-1)$$

就说系统处于平衡状态.所以在系统的平衡位形 $q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0n}$ 处,势能有一极值.如果系统的位形最先处在平衡位置,而且初速度 \dot{q}_i 为零,则系统将永远保持平衡状态.可以举出

许多平衡态力学系统的例子：静止的摆、暂不使用因而处于零位的电流计以及竖立着的鸡蛋等等。

如果系统在平衡位置受一微扰仅引起系统在静止位置附近的微小有界运动，就称这类平衡位置是稳定的。如果某个无限小扰动竟然引起无界运动，平衡就是不稳定的。静止的摆处于稳定平衡状态，而竖立着的鸡蛋显然是不稳定平衡的例证。显而易见，当 V 的极值是一极小值时，平衡必然是稳定的。假设一个系统由于能量比平衡位置能量增加 dE 而受到扰动，从而使它离开平衡位置。那么，如果平衡时的 V 是一极小值，则从平衡位置的任何偏离都将使 V 增加。由于能量守恒，所以速度应减小，最后必然为零，这意味着有界运动。反之，如果 V 由于偏离平衡位置而减小，动能和速度必定不断增加，这相当于不稳定运动。研究一下图6-1所示势能曲线的形状，就能形象地得出相同的结论。稳定平衡要求 V 有一极小值的更为严密的数学证明，将在以后的讨论中给出。

我们感兴趣的将是系统在稳定平衡位形紧邻范围内的运动。由于从平衡位置的偏离很小，所以一切函数都可以在平衡位置附近展开成为泰勒级数，并只保留其最低次项。广义

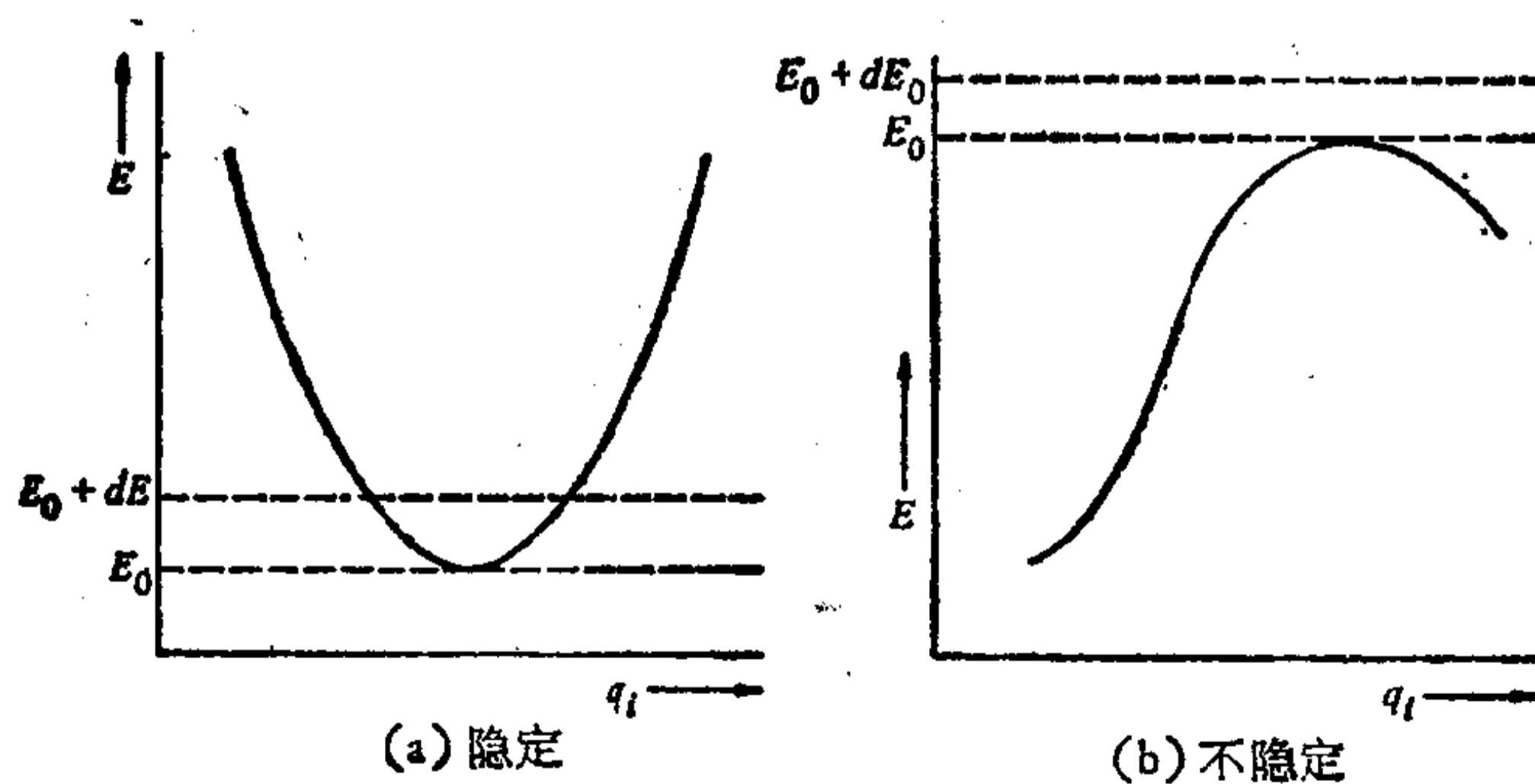


图6-1 平衡态势能曲线的形状

坐标从平衡位置的偏离将记为 η_i , 因此

$$q_i = q_{0i} + \eta_i, \quad (6-2)$$

这些坐标将作为运动的新的广义坐标。将势能在 q_{0i} 附近展开, 即得

$$V(q_1, \dots, q_n) = V(q_{01}, \dots, q_{0n}) + \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_0 \eta_i + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 \eta_i \eta_j + \dots, \quad (6-3)$$

象通常一样, 这里采用了求和约定。根据平衡条件 (6-1), η_i 的线性项将自动为零。级数中的第一项是平衡位置的势能, 移动任意零势能位置, 使它与平衡势能位置相重合, 也可以使这一项等于零。所以作为对 V 的一级近似, 就只剩下二次项:

$$V = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 \eta_i \eta_j = \frac{1}{2} V_{ij} \eta_i \eta_j, \quad (6-4)$$

这里只用与 q_i 的平衡值有关的 V_{ij} 来表示 V 的二阶微商。根据它们的定义可明显地看出, V_{ij} 是对称的, 即 $V_{ij} = V_{ji}$ 。在许多情况下, 系数 V_{ij} 可以等于零。因此, 势能能够与某一特定坐标无关, 因而在该坐标的任意数值处都能出现平衡。我们把这些情况说成是易变化的、不定的或随遇的平衡。势能偶尔也能在该点处显示出象是一个四次函数, 使得一个或几个 V_{ij} 等于零。不论是哪种情况, 都需要在随后的数学讨论中作出专门的论述。

可以得到一个相似的动能级数展开式。由于广义坐标并不显含时间, 所以动能是速度的二次齐次函数 [见式 (1-71)];

$$T = \frac{1}{2} m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} m_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j. \quad (6-5)$$

一般讲, 系数 m_{ij} 是坐标 q_k 的函数, 但它可以在平衡位形附近展开成泰勒级数:

$$m_{ij}(q_1, \dots, q_n) = m_{ij}(q_{01}, \dots, q_{0n}) + \left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k}\right)_0 \eta_k + \dots,$$

由于式(6-5)已经是 η_i 的二次函数, 所以将 m_{ij} 展开式中除第一项外的所有各项全部略去, 得到的就是次数最低而又不等于零的 T 的近似表达式. 用 T_{ij} 表示 m_{ij} 函数在平衡时的常数值, 就能把动能表达成

$$T = \frac{1}{2} T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j. \quad (6-6)$$

由于式(6-6)中的各项都不受下标交换的影响, 所以常数 T_{ij} 显然是对称的. 根据式(6-4)和式(6-6), 拉氏函数为

$$L = \frac{1}{2} (T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - V_{ij} \eta_i \eta_j). \quad (6-7)$$

把 η 作为广义坐标, 即能从(6-7)形式的拉氏函数得出 n 个运动方程:

$$T_{ij} \ddot{\eta}_j + V_{ij} \eta_j = 0, \quad (6-8)$$

这里明显地使用了 V_{ij} 和 T_{ij} 两种系数的对称性质. 式(6-8)中的每一个方程一般将包含所有的 η_i 坐标, 要得到平衡位置附近的运动, 就得求解这一联立微分方程组.

6-2 本征值方程和主轴变换

运动方程(6-8)是常系数线性微分方程, 其形式在电路理论中是众所周知的. 所以我们给它一个下列形式的振荡解:

$$\eta_i = C a_i e^{-i\omega t}. \quad (6-9)$$

式中的 $C a_i$ 给出了每个坐标 η_i 的复数振幅, 因子 C 是为了方便而作为一个比例因子引进的, 它对所有坐标都相同. 不言而喻, 式(6-9)中对应于实际运动的当然是它的实数部分. 将试解式(6-9)代入运动方程, 即得振幅因子的方程

$$(V_{ij} a_j - \omega^2 T_{ij} a_j) = 0. \quad (6-10)$$

式(6-10)构成了 a_i 的 n 个线性齐次方程, 因而要能够有解,

系数行列式必须为零：

$$\begin{vmatrix} V_{11} - \omega^2 T_{11} & V_{12} - \omega^2 T_{12} & \cdots \\ V_{21} - \omega^2 T_{21} & V_{22} - \omega^2 T_{22} & \\ V_{31} - \omega^2 T_{31} & & \\ \vdots & & \end{vmatrix} = 0. \quad (6-11)$$

这一行列式条件实际上是 ω^2 的 n 次代数方程，对于行列式的根所给出的一系列频率来讲，式 (6-9) 代表了运动方程的正确解。对于 ω^2 的每一个这样的数值，都可用式 (6-10) 解出 a_i 的振幅，或者更确切地说，用余下的 a_i 来解出 $n-1$ 个振幅。

所有这一切有一众所周知的环，只要简要地考虑一下一般性问题的某种简单变化形式，就能得到适当的数学描述。假设适当的广义坐标是系统质点的笛卡儿坐标。这样，动能将只包含速度分量的平方。引进乘以质点质量平方根的笛卡儿分量作为广义坐标¹⁾，能把动能表达成

$$T = \frac{1}{2} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_i, \quad (6-12)$$

因而在这种情况下， $T_{ij} = \delta_{ij}$ 。如果用 λ 表示 ω^2 ，齐次方程 (6-10) 将简化为

$$V_{ij} a_j = \lambda a_i. \quad (6-13)$$

但这确实是我们第四章和第五章中所熟知的本征值问题的表述；仅有的差别是矢量空间是 n 维而不是三维。如把 V_{ij} 看作是 $n \times n$ 矩阵 \mathbf{V} 的矩阵元，把 a_i 看作是 n 维矢量 \mathbf{a} 的分量，则式 (6-13) 能表达成

$$\mathbf{V}\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}, \quad (6-14)$$

这与本征值方程 (4-79) 相类似。在这些条件下，行列式方程

1) 有时称为质量加权坐标。

(6-11) 同样可化为本征值 λ 的特征方程。

由于 V 是对称的,而且是实数,所以相应的本征值也是实数(见节 5-4)。如果对应于 n 个本征值的 n 组 a_i 构成矩阵 A ,那么象节 4-6 中那样, A 必定能通过相似变换使 V 对角化。其次, n 个本征矢 a 相互正交(节 5-4),因而使 V 对角化的矩阵 A 也必定是正交的。

这些结论除了 T_{ij} 为对角的这一特殊情况外都有效;也能就一般问题来证明类似的结果。式(6-10)代表了某种类型的本征值方程,把 T_{ij} 表达为矩阵 T 的元素,方程能表达成

$$Va = \lambda Ta. \quad (6-15)$$

式中 V 对本征矢 a 的作用,并不象普通本征值问题中那样,仅仅使得矢量乘上一个 λ 因子。这里的本征矢应保证 V 对 a 的作用是 T 对 a 的作用结果的倍数。我们将证明,由于 T 和 V 的厄密性质,能使式(6-15)得到满足的那些本征值 λ 都是实数,而且事实上还应是正的实数。还将证明,本征矢在某种意义上是正交的。另外,本征矢的矩阵 A 使 T 和 V 都对角化,前者化为单位矩阵 1 ,而后者所得的矩阵,其对角元就是那些本征值 λ 。

参照节 5-4 中的做法,令 a_k 代表第 k 个本征矢的列矩阵,它满足本征值方程¹⁾

$$Va_k = \lambda_k Ta_k. \quad (6-16)$$

λ_l 的伴方程,即转置复共轭方程的形式为

$$a_l^\dagger V = \lambda_l^* a_l^\dagger T. \quad (6-17)$$

这里的 a_l^\dagger 代表伴矢量——复共轭行矩阵——这里显然利用了这样的事实,即 V 和 T 矩阵是实对称矩阵,或者说是厄密

1) 几乎不必另作说明也应知道式(6-16)中并不对 k 求和。事实上,本章中的求和约定仅适用于矩阵或(任何级)张量的分量,并不适用于矩阵和张量本身。

的。用 \mathbf{a}_k 右乘式 (6-17), 再用 \mathbf{a}_l 左乘式 (6-16), 最后从后者减去前者。所得差方程的左边等于零, 结果得

$$0 = (\lambda_k - \lambda_l^*) \mathbf{a}_l^\dagger \mathbf{T} \mathbf{a}_k. \quad (6-18)$$

当 $l = k$ 时, 式 (6-18) 取特殊形式

$$(\lambda_k - \lambda_k^*) \mathbf{a}_k^\dagger \mathbf{T} \mathbf{a}_k = 0. \quad (6-19)$$

取式 (6-19) 中矩阵积的复共轭并利用 \mathbf{T} 的厄密性质, 就能直接证明这一矩阵积是实数。然而, 我们要证明的是, 这一矩阵积不仅是实数, 而且是正定的。为此, 把 \mathbf{a}_k 分解成实数和虚数两部分:

$$\mathbf{a}_k = \alpha_k + i\beta_k.$$

因而矩阵积能表达成

$$\mathbf{a}_k^\dagger \mathbf{T} \mathbf{a}_k = \tilde{\alpha}_k \mathbf{T} \alpha_k + \tilde{\beta}_k \mathbf{T} \beta_k + i(\tilde{\alpha}_k \mathbf{T} \beta_k - \tilde{\beta}_k \mathbf{T} \alpha_k). \quad (6-20)$$

由于 \mathbf{T} 的对称性, 式中虚数项等于零, 所以就象已经说过的那样, 该矩阵积是实数。其次可以看到的是, 式 (6-6) 中的动能可以用列矩阵 $\dot{\eta}$ 表达成

$$T = \frac{1}{2} \dot{\eta}^\dagger \mathbf{T} \dot{\eta}. \quad (6-6')$$

因此, 当速度矩阵 $\dot{\eta}_k$ 之值分别为 α_k 和 β_k 时, 式 (6-20) 中的前两项等于动能的两倍。已知, 按动能的物理性质而言, 它对于实数速度都应是正定的, 因而式 (6-19) 中的矩阵积不可能等于零。由此可知, 本征值 λ_k 必定是实数。

由于那些本征值是实数, 所以由式 (6-16) 决定的本征矢量分量 a_{jk} 必定都是实数。当然, 由于有一个特定的 a_{jk} 值仍然可以任意选定而不会违背式 (6-16), 所以还有某些不确定性, 但我们能够要求这一分量是实数, 从而使 λ_k 的实数性质保证其他所有分量的实数性质。[振幅中的任何复数相因子都将并入式 (6-9) 的因子 C 内。] 今用 $\tilde{\mathbf{a}}_k$ 左乘式 (6-16) 并解出 λ_k , 即得

$$\lambda_k = \frac{\tilde{\mathbf{a}}_k \mathbf{V} \mathbf{a}_k}{\tilde{\mathbf{a}}_k \mathbf{T} \mathbf{a}_k} \quad (6-21)$$

这一表达式的分母等于含速度 a_{ik} 有关的动能的两倍,而那些本征矢又是实数,所以所求之和一定是正定的。同样,分子是与坐标 a_{ik} 有关的势能,为满足 V 在平衡时是一极小值这一条件,要求所求之和必须大于或等于零。分子和分母都不能为负值,而且分母还不能等于零,因此 λ 始终是有限的正值。(然而它可以等于零。)应该记得, λ 是代表 ω^2 的,因此正的 λ 与实数振荡频率相当。如果势能不是一个局部极小值,式(6-21)中的分子可以是负值,从而导至虚数频率,这将造成 η_i 随时间按指数规律无限递增。这类运动显然是不稳定的,至此,我们在数学上证明了稳定运动要求势能有一极小值。

现在,让我们回到式(6-18),鉴于本征值和本征矢的实数性质,此式能写成

$$(\lambda_k - \lambda_l) \tilde{\mathbf{a}}_l \mathbf{T} \mathbf{a}_k = 0. \quad (6-18')$$

如果久期方程的所有根都不相同,那么,式(6-18')要能成立,就要求矩阵积在 l 不等于 k 的情况下等于零:

$$\tilde{\mathbf{a}}_l \mathbf{T} \mathbf{a}_k = 0 \quad l \neq k. \quad (6-22a)$$

曾经多次提到, a_{ik} 之值并不完全由本征值方程(6-10)来决定。要消除这一不确定性,只要进一步要求

$$\tilde{\mathbf{a}}_k \mathbf{T} \mathbf{a}_k = 1. \quad (6-22b)$$

有 n 个(6-22)这样的方程,它们唯一地确定了 n 个本征矢 \mathbf{a}_k 中各个矢量的某个任意分量¹⁾。如果我们用所有本征矢 \mathbf{a}_k 构

1) 式(6-22b)可以化为某种形式,使它明显地表现出足以消除 a_{ik} 的那种不确定性。假设我们想求解的是 a_{1k} 之值,所有其他 a_{jk} 与 a_{1k} 之比均可由式(6-10)求得。这样,式(6-22b)就能写成

$$\sum_{i \neq 1} T_{ij} \frac{a_{jk}}{a_{1k}} \frac{a_{jk}}{a_{1k}} = \frac{1}{a_{1k}^2}$$

左边完全决定于本征值方程,并可直接求解出 a_{1k} 。

成一个具有分量 a_{jk} 的方阵 \mathbf{A} (见节 4-6), 则方程 (6-22a) 和 (6-22b) 能够组合成一个矩阵方程:

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{A} = \mathbf{I}. \quad (6-23)$$

如果有两个或两个以上的根是重复的, 则对于 $\lambda_l = \lambda_k$ 的情况, 推导得式 (6-22a) 的那些论证不再成立. 我们将把简并性这一例外情况放到后面去讨论¹⁾. 现在只需说明以下性质, 即总是能够找到一组能同时满足本征值条件式 (6-10) 和 (6-22a) 的 a_{jk} 系数, 使式 (6-23) 始终成立.

式 (6-23) 使我们回忆起了矩阵 \mathbf{B} 的正交条件 [见式 (4-36)]:

$$\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{B} = \mathbf{I}.$$

为了弄清楚对 \mathbf{A} 所加的条件与正交条件之间的关系, 应该注意到差方程 (6-19) 类似于惯性张量本征矢的相应方程 [见式 (5-29)]:

$$(I_j - I_l)\mathbf{R}_l \cdot \mathbf{R}_j = 0.$$

由这一关系式可推得, 不同的本征矢是正交的:

$$\mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}_j = 0.$$

如果我们决定把本征矢的长度归一化:

$$\mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}_i = 1$$

[类似于式 (6-22b)], 那么, 正交性和归一化条件就能概括为这样的说法, 即包含有所有本征矢的矩阵 \mathbf{X} (见第 234 页附注 1) 必定是正交的:

$$\tilde{\mathbf{X}}\mathbf{X} = \mathbf{I}.$$

同样, 式 (6-23) 等效于这样的条件, 即本征矢 \mathbf{a}_i 是正交的, 并具有单位量值——但这仅限于特定的黎曼空间, 而且毋须

1) “简并性”一词在这里的用法(用以表示久期方程的多重根)与以后几章特别是第 10 章中的意义是不同的.

是笛卡儿空间。

黎曼空间的定义是：空间内的路径元长度 ds 决定于关系式

$$ds^2 = g_{ik} dx_i dx_k, \quad (6-24)$$

式中 g_{ik} 是该空间内度规张量 \mathbf{G} 的元素。与此相应，这种空间内的两个矢量 \mathbf{x}, \mathbf{y} 的标积为

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_i g_{ik} y_k = \tilde{\mathbf{X}} \mathbf{G} \mathbf{y}, \quad (6-25)$$

所以矢量 \mathbf{x} 的量值的平方为

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{X}} \mathbf{G} \mathbf{x}. \quad (6-26)$$

显然，笛卡儿坐标系中的度规张量是单位矩阵 \mathbf{I} 。一般对于曲线正交坐标， \mathbf{G} 将是对角的（见三维球坐标的例子）。

现在，动能方程 (6-6') 能描述为：在 \mathbf{T} 为度规张量的位形空间内，速度矢量量值的平方等于 $2T$ 。同样，式 (6-23) 或者它的分量部分式 (6-22a, b) 表明，这种空间内的本征矢 \mathbf{a}_k 是正交的，并已在该空间内得到了归一化，从而具有单位量值。

在第四章中，矩阵 \mathbf{B} 引起的矩阵 \mathbf{C} 的相似变换决定于方程 [见式 (4-41)]

$$\mathbf{C}' = \mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{B}^{-1}.$$

现在，我们引进由 \mathbf{A} 引起的 \mathbf{C} 的相合变换的概念，这种变换决定于关系式

$$\mathbf{C}' = \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{C} \mathbf{A}. \quad (6-27)$$

如果 \mathbf{A} 是正交的，从而 $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^{-1}$ ，则两种变换之间没有什么本质上的差别（正如用矩阵 \mathbf{E} 表示 \mathbf{A}^{-1} 时所能看到的那样）。因此，式 (6-23) 可以理解为如下的说法，即矩阵 \mathbf{A} 通过一个相合变换使 \mathbf{T} 变换成对角矩阵，特别是变换成单位矩阵。

如果引进矩阵元为 $\lambda_{lk} = \lambda_k \delta_{lk}$ 的对角矩阵 $\boldsymbol{\lambda}$ ，则本征值方程 (6-16) 可以表达成

$$V_{ij}a_{ik} = T_{ij}a_{il}\lambda_k,$$

用矩阵符号表示时,则可写成

$$VA = TA\lambda. \quad (6-28)$$

用 \tilde{A} 左乘此式,其形式成为

$$\tilde{A}VA = \tilde{A}TA\lambda,$$

根据式(6-23),又可简化为

$$\tilde{A}VA = \lambda. \quad (6-29)$$

最后得到的式(6-29)表明,由 A 引起的 V 的相合变换使其变换成一个对角矩阵,矩阵元就是本征值 λ_k .

因此,矩阵 A 同时使 T 和 V 对角化.记得我们曾经把 T 解释为位形空间内的度规张量,所以我们能够赋予对角化过程以下述意义.由变换后的度规张量为 1 这一事实可清楚地看出, A 是从斜轴系变换到笛卡儿正交轴系的线性变换矩阵.同时,新的坐标轴是 V 的正交主轴,从而在变换后的坐标系内, V 也是对角的.因此,求解微幅振荡基本频率的整个过程也就是第五章中讨论过的那种特殊类型的主轴变换¹⁾.

余下的问题只要考虑久期方程的重根情况,这种情况在数学理论中比在实际中更为麻烦.如果一个或几个根重复,那么,那些本征值的独立方程数甚至不足以确定本征矢各分量之比.例如,如果本征值 λ 是一个二重根,则分量 a_i 中有两个可以任意选定,而其余的则可由本征值方程来决定.为说明起见,让我们考虑一个二维系统,该系统内的久期方程为

$$\begin{vmatrix} V_{11} - \lambda T_{11} & V_{12} - \lambda T_{12} \\ V_{12} - \lambda T_{12} & V_{22} - \lambda T_{22} \end{vmatrix} = 0$$

1) 在节 6-3 中讨论简正坐标时,将给出主轴变换的另一种几何解释.

或

$$(V_{12} - \lambda T_{12})^2 - (V_{11} - \lambda T_{11})(V_{22} - \lambda T_{22}) = 0.$$

今假设矩阵元满足关系式

$$\frac{V_{12}}{T_{12}} = \frac{V_{11}}{T_{11}} = \frac{V_{22}}{T_{22}} = \lambda_0. \quad (6-30)$$

这样,久期方程能表达成

$$(T_{12}^2 - T_{11}T_{22})(\lambda_0 - \lambda)^2 = 0,$$

这表明, λ_0 是久期方程的一个二重根. 但这个根的本征值方程为

$$\begin{aligned} (V_{11} - \lambda_0 T_{11})a_1 + (V_{12} - \lambda_0 T_{12})a_2 &= 0, \\ (V_{12} - \lambda_0 T_{12})a_1 + (V_{22} - \lambda_0 T_{22})a_2 &= 0, \end{aligned}$$

根据条件(6-30)可知, a 的所有系数都恒等于零. 于是这两个 a 的任何一组值都将满足本征值方程. 即使具备了归一化条件(6-22b), 还会有对应于久期方程二重根的、本征矢的单一无限性, 以及对应于三重根的双重无限性等等.

一般讲, 从无限组容许矢量中随意选出的任何一对本征矢不会正交的. 不过, 总有可能构成一对正交矢量, 并且还能用来组成正交矩阵 \mathbf{A} . 为简便起见, 考虑与二重根相应的步骤. 设 \mathbf{a}'_k 和 \mathbf{a}'_l 是已知二重根 λ 的任何两个容许本征矢, 而且都已归一化以适合式(6-22b). \mathbf{a}'_k 和 \mathbf{a}'_l 的任何线性组合也将是 λ 根的一个本征矢. 所以我们将设法构成一个矢量 \mathbf{a}_l :

$$\mathbf{a}_l = c_1 \mathbf{a}'_k + c_2 \mathbf{a}'_l, \quad (6-31)$$

式中 c_1 和 c_2 是常数, 它们保证 \mathbf{a}_l 垂直于 \mathbf{a}'_k . 于是, 正交性条件(6-22a)要求

$$\tilde{\mathbf{a}}_l \mathbf{T} \mathbf{a}'_k = c_1 + c_2 \tilde{\mathbf{a}}_l \mathbf{T} \mathbf{a}'_k = 0,$$

这里利用了 \mathbf{a}'_k 的归一化性质. 由此得, c_1 与 c_2 之比必定为

$$\frac{c_1}{c_2} = -\tilde{\mathbf{a}}_l \mathbf{T} \mathbf{a}'_k \equiv -\tau_l. \quad (6-32)$$

另外, \mathbf{a}_l 必须是归一化的这一要求还提出了两个系数必须满足的另一个条件, 这一条件可用式(6-32)所定义的 τ_l 表达成形式

$$\tilde{\mathbf{a}}_l \mathbf{T} \mathbf{a}_l = 1 = c_1^2 + c_2^2 + 2c_1 c_2 \tau_l. \quad (6-33)$$

两个方程一起决定了系数 c_1 和 c_2 , 因而也就决定了矢量 \mathbf{a}_l . \mathbf{a}_l 和 $\mathbf{a}_k \equiv \mathbf{a}'_k$ 都自动地垂直于不同本征值的其他本征矢, 于是以式(6-18')为基础所作的论证依然有效. 而我们也得到了一组 n 个本征矢 \mathbf{a}_j , 它们的分量构成了满足式(6-23)的矩阵 \mathbf{A} .

对于更高程度的重根, 也可作出类似的处理. 如果 λ 是一个 m 重根, 那么, 任何 m 个相应本征矢 $\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_m$ 的线性组合都能组成正交归一的本征矢. 第一个“正交归一”本征矢 \mathbf{a}_1 被选成 \mathbf{a}'_1 的某个倍数; 而 \mathbf{a}_2 则取作 \mathbf{a}'_1 和 \mathbf{a}'_2 的某个线性组合等等. 按照这种方法, 待定的常数数目等于最初 m 个整数之和, 或 $\frac{1}{2} m(m+1)$. 归一化要求提供了 m 个条件, 另外还有 $\frac{1}{2} m(m-1)$ 个正交条件, 这些条件加在一起正好足以唯一地确定所有待定的常数.

在多重根情况下构成正交本征矢的这种过程, 与由任意组函数构成一系列正交函数的格拉姆-施密特(Gram-Schmidt)方法完全类同. 用几何术语来表达, 则与第五章中惯性张量多重本征值所遵循的步骤也是一致的. 例如, 二重根情况下附加于本征矢分量的不确定性, 意味着平面内所有矢量都是本征矢. 我们只不过是把平面内的任何两个垂直方向选作新的主轴, 而 \mathbf{A} 的本征矢则是沿着这些轴的单位矢量¹⁾.

1) 还可参阅第 235 页的附注.

6-3 自由振动频率和简正坐标

前节中显得有点冗长的论证说明了(6-9)形式的振荡解不仅对于一个频率,而且一般讲对于一组 n 个频率 ω_k 都是满足运动方程的。因此,运动方程的完全解包含了所有容许频率的振荡的叠加。例如,如果一系统从平衡位置稍微移开并随之释放,系统就将经历平衡位置附近的微幅振荡,这些振荡的频率为 $\omega_1, \dots, \omega_n$ 。而久期方程的解则常常称为系统的自由振动频率或共振频率。

现在可以把运动方程的一般解表达成对下标 k 求和的形式:

$$\eta_i = C_k a_{ik} e^{-i\omega_k t}, \quad (6-34)$$

此式对于各个共振频率都有一个复数比例因子 C_k 。也许会认为,对于久期方程的每一个解 λ_k ,都有两个共振频率 $+\omega_k$ 和 $-\omega_k$ 。对于这两个频率,本征矢 \mathbf{a}_k 应该相同,但比例因子 C_k^+ 和 C_k^- 可以认为是不同的。在这一基础上,一般解的形式应为

$$\eta_i = a_{ik}(C_k^+ e^{+i\omega_k t} + C_k^- e^{-i\omega_k t}). \quad (6-35)$$

然而,我们还记得,实际运动是复数解的实数部分,而不论是式(6-34)还是式(6-35)的实数部分都能表达成形式

$$\eta_i = f_k a_{ik} \cos(\omega_k t + \delta_k), \quad (6-36)$$

这里的振幅 f_k 和位相 δ_k 由初始条件决定。(6-34)和(6-35)这两个解因而都将代表实际运动。当然,前者更为方便。

\mathbf{A} 的正交性质极大地有利于用初始条件来确定比例因子 C_k 。在 $t=0$ 时,式(6-34)的实数部分可化为

$$\eta_i(0) = \operatorname{Re} C_k a_{ik}, \quad (6-37)$$

这里的 Re 表示“实数部分”。同样,速度的初始值为

$$\dot{\eta}_i(0) = \text{Im} C_k a_{ik} \omega_k, \quad (6-38)$$

这里的 $\text{Im} C_k$ 代表 C_k 的虚数部分。根据这 $2n$ 个方程可算出 n 个常数 C_k 的实数和虚数部分。例如,为求解式 (6-37),我们首先用列矩阵 $\eta(0)$ 和 C 把它表达成

$$\eta(0) = A \text{Re} C. \quad (6-37')$$

如果我们用 $\tilde{A}T$ 左乘上式并利用式 (6-23), 就能立即得到 $\text{Re} C$ 的解:

$$\text{Re} C = \tilde{A}T\eta(0),$$

或者取第 l 个分量,即得

$$\text{Re} C_l = a_{jl} T_{ik} \eta_k(0), \quad (6-39)$$

采用相似的步骤也能得到比例因子的虚数部分¹⁾

$$\text{Im} C_l = \frac{1}{\omega_l} \sum_{i,k} a_{il} T_{ik} \dot{\eta}_k(0). \quad (6-40)$$

(6-39) 和 (6-40) 两式使我们有可能用初始条件和矩阵 T, A 直接计算复数因子 C_l (因而还有振幅和位相)。

各坐标的解 (6-34) 一般讲是一些简谐振荡之和,这些振荡的频率包括满足久期方程的所有频率 ω_k 。除了所有频率是可公度的,即互为有理分数这一偶然情况外, η_i 决不会重复它的初始值,因而本身不会是时间的周期函数。然而总有可能把 η_i 变换为一组新的广义坐标,这些坐标都是时间的简单周期函数——这是一组称为简正坐标的变量。

我们定义一组新的坐标 ζ_i , 它们与原来坐标 η_i 的关系决定于方程

$$\eta_i = a_{ij} \zeta_j, \quad (6-41)$$

或者用单列矩阵 η 和 ζ 表达成

$$\eta = A\zeta. \quad (6-41')$$

1) 明显地指出对 j 和 k 求和是由于不要对重复下标 l 求和。

用矩阵记号时,势能表达式(6-4)成为

$$V = \frac{1}{2} \tilde{\eta} V \eta. \quad (6-42)$$

已知单行转置矩阵 $\tilde{\eta}$ 和 $\tilde{\zeta}$ 之间关系为

$$\tilde{\eta} = \tilde{A} \tilde{\zeta} = \tilde{\zeta} A,$$

从而势能也能表达成

$$V = \frac{1}{2} \tilde{\zeta} \tilde{A} V A \zeta.$$

但是 A 通过一相合变换使 V 对角化 [见式(6-29)], 所以势能可简单地化为

$$V = \frac{1}{2} \tilde{\zeta} \lambda \zeta = \frac{1}{2} \omega_k^2 \zeta_k^2. \quad (6-43)$$

在新坐标中,动能的形式甚至更加简单. 由于速度象坐标一样变换,所以式(6-6')所给出的 T 将变换为

$$T = \frac{1}{2} \tilde{\zeta} \tilde{A} T A \zeta,$$

根据式(6-23),此式化为

$$T = \frac{1}{2} \tilde{\zeta} \dot{\zeta} = \frac{1}{2} \dot{\zeta}_i \dot{\zeta}_i. \quad (6-44)$$

式(6-43)和(6-44)表明,在新坐标中动能和势能都只是一些平方项之和,并无任何交叉项. 当然,这一结果仅是以另一种方式表明: A 产生了某一主轴变换. 记得,惯性张量的主轴变换是特地用来将转动惯量化为平方项之和的,而新轴则是惯性椭球的主轴. 这里的动能和势能也是二次形式(象转动惯量一样),并且也都是由 A 使之对角化的. 由于这一理由,这里所采用的主轴变换就是熟知的两个二次式同时对角化这一代数过程的特殊例子.

另一种处理 T 和 V 的主轴变换的方法与第五章中描述惯性张量对角化过程时所用的术语更为接近. 虽然它并不提供

更为简单的计算过程，但却有助于说明为什么有可能使两个二次式同时对角化，以及为什么一般不可能使三个二次式同时对角化。矩阵 T 是实数的而且又是对称的，同惯性张量 $\mathbf{1}$ 一样。如果我们现在把 η 空间看成是 n 维笛卡儿空间，就有可能求得一个变换到新的笛卡儿坐标系的实正交变换 B ：

$$y = B\eta,$$

式中的 T 是对角的。矩阵 B 必须通过一相似变换使 T 变换到对角矩阵 C ：

$$BTB^{-1} = BT\tilde{B} = C.$$

由于逆变换为

$$\eta = \tilde{B}y, \quad \tilde{\eta} = yB,$$

所以动能的变换形式为

$$2T = \tilde{\eta}T\eta = \tilde{y}BT\tilde{y} = \tilde{y}Cy = C_i y_i^2.$$

如所预料，新坐标轴是动能椭圆的主轴。由于动能对于任何有限速度来讲决不会等于零，即它应该是正定的，所以主值 C_i 始终大于零。这使我们总有可能引进新的坐标 z_i ，它定义为

$$z_i = y_i \sqrt{C_i} \quad (\text{不对 } i \text{ 求和}), \quad (6-45)$$

用这些新的坐标，动能将成为

$$2T = \dot{z}_i z_i = \tilde{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{z}}.$$

坐标变换式 (6-45) 并不涉及坐标轴的任何转动，只是改变了沿各 y_i 轴的标度。这里所做的实际上只是使每一个主轴伸展或压缩，直到动能椭圆变成一个圆球为止！

连续两次坐标变换一般并不使 V 对角化，但势能的形式将成为

$$2V = \mathbf{z}D\mathbf{z},$$

这里的 D 是一个对称实矩阵。因而有可能得到由实正交矩阵

F产生的第三个、也是最后一个坐标变换:

$$\zeta = Fz,$$

此式通过一相似变换使 D 对角化为对角矩阵 λ , 以致

$$2V = \tilde{\zeta}\lambda\zeta = \lambda_i\zeta_i^2.$$

坐标的这种最后的转动不会影响动能的形式, 因为一个球在转动系统内始终是对角的。因此, 要使两个二次式(其中一个为正定的)同时对角化, 诀窍在于找到这样一个坐标系, 在此坐标系内, 由正定形式确定的是一个球, 因而所有方向都是主轴。现在可以明白为什么三个二次式一般不可能同时对角化。最后的转动可用来使其中之一对角化, 但总要留下一个二次式依然保持非对角的形式。当我们考虑耗散效应时, 这种令人遗憾的情况将是重要的。

现在再来讨论 ζ_i 坐标系的性质, 这时将看到, 所有运动方程同样由于采用了这些新坐标而得到简化。新的拉氏函数为

$$L = \frac{1}{2} (\dot{\zeta}_k \dot{\zeta}_k - \omega_k^2 \zeta_k^2), \quad (6-46)$$

所以 ζ_k 的拉格朗日方程为

$$\ddot{\zeta}_k + \omega_k^2 \zeta_k = 0. \quad (6-47)$$

式(6-47)的直接解为

$$\zeta_k = C_k e^{-i\omega_k t}, \quad (6-48)$$

当然, 这可以直接从式(6-34)和(6-41)看出。因此, 每一个新坐标都是只包含一个共振频率的简单周期函数。正象已经提到过的那样, 习惯上总是把那些 ζ 称为系统的简正坐标。

每一个简正坐标对应于只有一个频率的系统的振动, 这些分振动称为振动的简正模式。各模式中的所有质点以相同的频率和位相振动¹⁾, 相对振幅则由矩阵元 a_{ik} 决定。整个运

1) 如果 a 具有相反的符号, 质点的位相可能相反。

动就是由这些简正模式之和所构成,而以那些 C_k 中所包含的适当振幅和相因子作为权重。

因为约定振幅是微小的,所以在整个运动中根本不会有基频的谐频。这使我们能够把势能表达成二次形式,这是简谐运动的特征。简正坐标变换强调了这种情况,因为简正坐标的拉氏函数式(6-46)是频率为 ω_k 的一系列谐振子拉氏函数之和。因此,我们能把微幅振荡的整个运动看作是不同强度和位相的各种受激谐振子的组合¹⁾。

6-4 线性三原子分子的自由振动

为说明求取共振频率和简正模式的技巧,我们将详细地讨论一个以对称的线性三原子分子为基础的模型。在分子的平衡位形处,两个质量为 m 的原子对称地位于质量

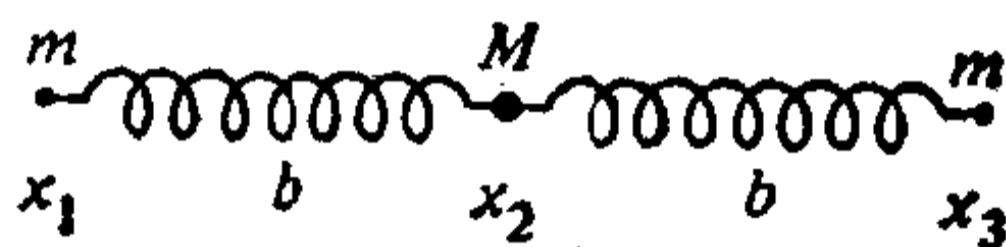


图 6-2 对称的线性三原子分子模型

为 M 的原子的两边(见图 6-2)。三个原子位于一直线上,平衡时相互间距离用 b 表示。为简单起见,我们首先将只考虑沿分子线所作的振动,实际上颇为复杂的原子间的势能,将近似地用连接三个原子的、力常数为 k 的两个弹簧的弹性势能表示。标明三个原子在直线上的位置有三个明显的坐标。以这些坐标表示的势能为

$$V = \frac{k}{2} (x_2 - x_1 - b)^2 + \frac{k}{2} (x_3 - x_2 - b)^2.$$

现在引进相对于平衡位置的坐标

$$\eta_i = x_i - x_{0i},$$

1) 这里要提出作为将来参考的是,电磁场量子化中也会出现同样的情景。谐振子频率就是光子频率,激发幅度则与分立的量子化“占有数”——每个频率的光子数相当。

这里的

$$x_{02} - x_{01} = b = x_{03} - x_{02}.$$

于是势能将化为

$$V = \frac{k}{2} (\eta_2 - \eta_1)^2 + \frac{k}{2} (\eta_3 - \eta_2)^2$$

或

$$V = \frac{k}{2} (\eta_1^2 + 2\eta_2^2 + \eta_3^2 - 2\eta_1\eta_2 - 2\eta_2\eta_3). \quad (6-49)$$

因此, 矩阵 V 的形式为

$$V = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix}. \quad (6-50)$$

动能具有更为简单的形式:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_3^2) + \frac{M}{2} \dot{\eta}_2^2, \quad (6-51)$$

因而矩阵 T 是对角的:

$$T = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}. \quad (6-52)$$

把这两个矩阵组合起来, 久期方程成为

$$|V - \omega^2 T| = \begin{vmatrix} k - \omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k - \omega^2 M & -k \\ 0 & -k & k - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0. \quad (6-53)$$

直接求解行列式, 即得 ω^2 的三次方程

$$\omega^2(k - \omega^2 m)[k(M + 2m) - \omega^2 M m] = 0, \quad (6-54)$$

此式的明显解为

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 + \frac{2m}{M}\right)}. \quad (6-55)$$

第一个本征值 $\omega_1 = 0$ 看起来可能有点奇怪,甚至有点不可思议. 这种解根本不会与任何振荡运动相当,因为它的相应的简正坐标运动方程为

$$\ddot{\zeta} = 0,$$

这只能产生匀速平移运动. 但是,这恰是解决困难的关键所在. 所以会有零值频率是由于分子可沿其轴线作刚性平移而势能仍保持不变,这是前面提到的随遇平衡的一个例子. 由于反抗这一运动的回复力为零,故有效“频率”必然也为零. 我们已假设分子有三个振动自由度,而实际上,其中之一是一个刚体自由度.

有许多有趣的问题可以与零值共振频率联系起来讨论. 从式(6-21)可以看出,只有当势能为正值而不是正定值时,也就是说,即使不是所有的 η_i 都等于零,势能也能够等于零时, ω 值才可能为零. 对 V 的表达式(6-49)的研究表明, V 不是正定的,而且当所有的 η 都相等时, V 事实上等于零(匀速平移).

由于这里得到的零值频率对于感兴趣的振动频率无关紧要,所以在讨论这个问题时,常常可以在一开始就将此根消去. 要做到这一点的最简单的办法是在这里加上一个条件或约束,即质心在原点处保持静止:

$$m(x_1 + x_3) + Mx_2 = 0. \quad (6-56)$$

可用式(6-56)从 V 和 T 中消去一个坐标,使问题简化为两个自由度的问题(见本章习题3).

运动被限制在分子轴上,因而只能有一种型式的匀速刚体运动. 然而,如果考虑在所有三个方向上的、更为一般的振动问题,则刚体自由度的数目一般将增至六个. 分子可能沿三个坐标轴匀速平移,或绕坐标轴匀速转动. 因此,在任何 n 个自由度的一般系统内,将有六个零值频率,而真正的振动频

率只有 $n - 6$ 个。再说，对各坐标附加上线动量和角动量守恒的条件，还可以事先缩减自由度的数目。

已经指出，除了刚体运动外，如果在平衡位置处， V 的一阶和二阶微商都等于零，也可能出现零值共振频率。在这种情况下，如果四阶微商不同时为零（对于稳定平衡来讲，三阶微商必定为零），依然可能产生微幅振荡，但振动将不是简谐的。这种情况使我们不能再使用惯常的微幅振荡方法，幸而这种情况是不常出现的。

现在再来研究共振频率。可以看出， ω_2 是熟悉的、悬挂于（力常数为 k 的）弹簧一端的 m 质量质点的振动频率。所以我们会这样想，只有端点处的原子参与这种振动，位于中心的分子将保持静止。仅仅在与 ω_3 相对应的第三种振动模式中， M 质量才能够参与振荡运动。研究一下三种简正模式的那些本征矢，即能证实这些预言。

对于每一个频率来说，分量 a_{ij} 决定于方程

$$\begin{aligned} (k - \omega_j^2 m) a_{1j} - k a_{2j} &= 0, \\ -k a_{1j} + (2k - \omega_j^2 M) a_{2j} - k a_{3j} &= 0, \\ -k a_{2j} + (k - \omega_j^2 m) a_{3j} &= 0, \end{aligned} \quad (6-57)$$

加上归一化条件

$$m(a_{1j}^2 + a_{3j}^2) + M a_{2j}^2 = 1. \quad (6-58)$$

由于 $\omega_1 = 0$ ，所以根据式 (6-57) 的第一、第三两式立即可以知道，所有三个系数都相等，即 $a_{11} = a_{21} = a_{31}$ 。当然，根据运动的平移特性，这确实是我们所期望的结果（见图 6-3a）。归一化条件决定了 a_{1j} 的值，所以有

$$a_{11} = \frac{1}{\sqrt{2m + M}}, \quad a_{12} = \frac{1}{\sqrt{2m + M}}, \quad a_{13} = \frac{1}{\sqrt{2m + M}}. \quad (6-59a)$$

因子 $(k - \omega_2^2 m)$ 对于第二种模式应等于零, 而式 (6-57) 则直接证明 $a_{22} = 0$ (正如预料的一样) 以及

$$a_{12} = -a_{32}.$$

根据式 (6-58) 可得, 这些量的数值为

$$a_{12} = \frac{1}{\sqrt{2m}}, \quad a_{22} = 0,$$

$$a_{32} = -\frac{1}{\sqrt{2m}}.$$

(6-59b)

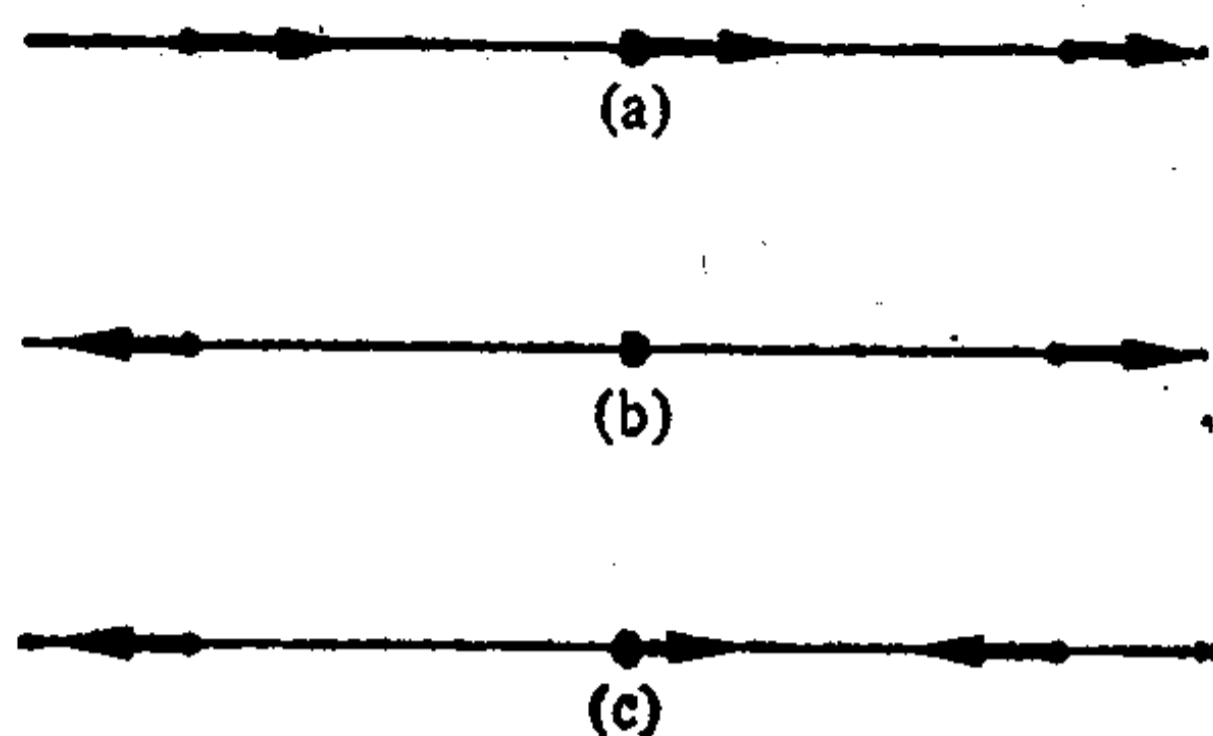


图 6-3 对称的线性三原子分子的纵向简正模式

在此模式中, 中心原子保持静止, 而两端的原子的振动确实是反相的(这是保持线动量守恒所必需的), 见图 6-3b. 最后, 当 $\omega = \omega_3$ 时, 根据式 (6-57) 的第一、第三两式可看出, a_{13} 和 a_{33} 必定相等. 这一模式的其余的计算并不象其他模式那样非常简单, 写出它的最后结果就已足够:

$$a_{13} = \frac{1}{\sqrt{2m \left(1 + \frac{2m}{M}\right)}}, \quad a_{23} = \frac{-2}{\sqrt{2M \left(2 + \frac{M}{m}\right)}},$$

$$a_{33} = \frac{1}{\sqrt{2m \left(1 + \frac{2m}{M}\right)}}. \quad (6-59c)$$

这里, 两端的两个原子的振动有着相同的振幅, 中间原子的振动与它们反相并有不同的振幅 (见图 6-3c). 任何不包含刚性平移的一般分子纵振动将是简正模式 ω_2 和 ω_3 的某种线性组合. 这两个简正模式的振幅以及它们之间的相对位相当然将由初始条件决定(见习题 5).

到目前为止, 我们只是讨论了沿轴向的振动; 而在实际分

子中，还有垂直于轴向的简正振动模式。整组简正模式当然比仅仅是纵振动模式更难确定，因为所有方向上的一般运动对应于九个自由度。尽管计算步骤是直截了当的，但代数运算一下子变得非常复杂，这里无法列出详细的计算。然而，有可能根据一般原理作出定性的讨论，完全解的大多数结果还是能够预言的。

一般的问题将有许多对应于可能刚体运动的零共振频率。对于线性分子将有三个刚性平移自由度，但刚性转动仅仅涉及两个自由度。绕分子轴的转动显然毫无意义，因而不会成为一种刚体运动模式。因而只剩下四种真正的振动模式。其中两种是我们已经研究过的纵振动模式，所以只有两种垂直于轴向的振动模式。然而，分子的轴对称性质表明，这两种垂直振动模式必然是简并的。 y 方向的振动与 z 方向的振动无法加以区别，两者的频率必定相等。简并模式本征矢的其他不确定性在此则表现为垂直于分子轴的一切方向都相同。在垂直于分子的平面内，任何两个正交轴，都可选作简并

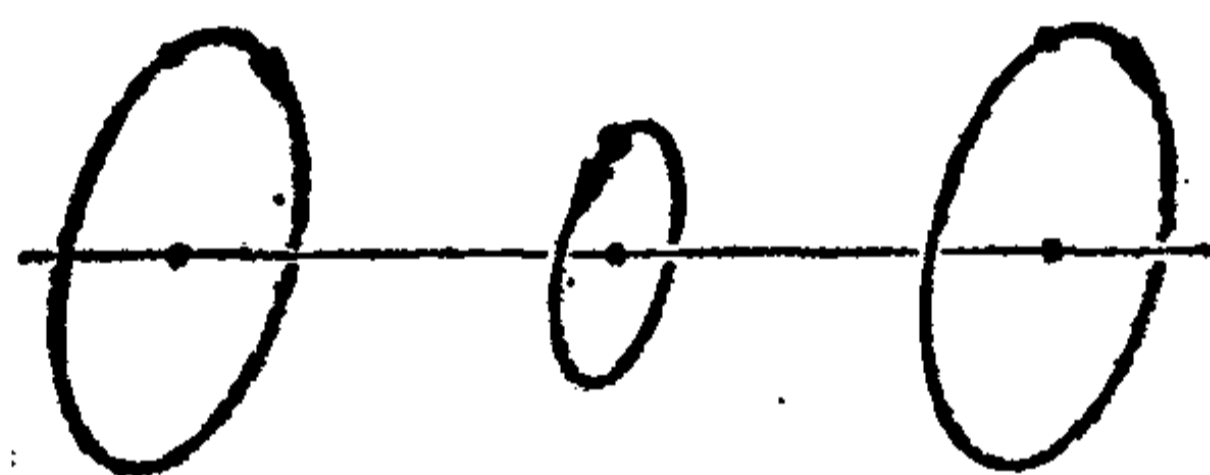


图 6-4 对称三原子分子的简并模式

模式的振动方向。垂直于分子轴的整个原子运动将与两个简并模式的振幅和相对位相有关。如果两者都被激发并且完全是同

位相的，则原子将在经过其平衡位形的直线上运动。但是，如果它们是反相的，则合运动将是一椭圆形李萨如图形，就象是一个二维各向同性振子一样。于是，两种模式代表的是转动而不是振动。

显然，根据分子的对称性，两端原子的振幅的量值必定恒等。完整的计算表明，两端的原子还将沿着李萨如图形作同

向移动。因此,为要保持角动量守恒,中心原子必须按相反方向旋转。图 6-4 说明了位相差 90° 时的简并模式的运动。

分子结构越复杂,特征行列式的规模越庞大,求取简正频率和振幅也将变成一个工作量相当可观的问题。然而,我们已经看到,即使象在线性三原子分子这样简单的情形,研究振动中可望存在的对称性质也会使计算大为简化。大量的数学技巧已被用来发掘复杂分子的内在对称性质,以减轻求解它们的振动频率的工作量。对称群理论已被成功地用来把庞大的特征行列式分解成较小的单元,而这些小单元都是可以分别使其对角化的。然而,曾指出过,这种精心构思的数学处理在过去数值计算显得困难而又冗长的时期是较为合适的。如果考虑到近代计算机的运算速度和存储容量,那么,那种直截了当的计算方法终究更为容易和更加精确。今天,求解庞大矩阵本征值问题的快速而又精确的程序,就是对中等规模的科学计算机来说也是现存的手段。已经出现一种用质量加权的笛卡儿坐标(见第 291 页)表述问题的趋向,这是一种显得有点“蛮干”的做法。分子振动的动能椭球已经是一个圆球,而求取简正模式的运算则可归结为使势能对角化的问题。看来,这很可能是将来在物理化学问题中计算振动频率时所遵循的方向。

6-5 受迫振动和耗散力效应

当系统最初被从平衡位形移开,然后让它自己振荡时,就会产生自由振动。但在大多数情况下,系统的振动是由 $t = 0$ 时刻开始持续地作用于系统的外来策动力引起的。这种受迫振荡的频率决定于策动力频率而不是共振频率。不过,在求解受迫振动的振幅时,简正模式极为重要;而用自由模式中所得的简正坐标,问题将简单得多。

设 F_i 是对应于坐标 η_i 的广义力, 根据式 (1-49), 对应于简正坐标 ζ_i 的广义力 Q_i 为

$$Q_i = a_{ji} F_j. \quad (6-60)$$

当用简正坐标表示时, 运动方程成为

$$\ddot{\zeta}_i + \omega_i^2 \zeta_i = Q_i. \quad (6-61)$$

式 (6-61) 是一组 n 个非齐次微分方程, 它们只在我们知道了 Q_i 对时间的依存关系后才能够求解。尽管所求之解不会象自由振动情况那样简单, 但简正坐标保持了变量可以分离的优点, 而且每一个方程将只包含一个坐标。

策动力往往是随时间按正弦规律变化的。例如, 在声学问题中, 策动力可能来自系统所受冲击声波的压力, 这时的 Q_i 具有同声波相同的频率。再有, 如果系统是一多原子分子, 当分子受到单色光束照射时, 将会受到一个按正弦规律变化的策动力的作用。分子中的每个原子都将受到一个变化频率与人射光频率相同的电磁力的作用。即使策动力不是单一频率的正弦力, 也往往可以看作是由这些正弦型项迭加而成的。例如, 如果策动力是周期性的, 它就能用一个傅里叶级数表示; 而有的时候则适合用傅里叶积分表示。由于式 (6-61) 是线性方程, 它的一些特定频率的解可以迭加, 从而得到给定 Q_i 的完全解。所以, 研究一下当广义力能表达成下列形式时的振荡性质是有普遍意义的:

$$Q_i = Q_{0i} \cos(\omega t + \delta_i), \quad (6-62)$$

式中 ω 是外力的角频率。于是运动方程表现为

$$\ddot{\zeta}_i + \omega_i^2 \zeta_i = Q_{0i} \cos(\omega t + \delta_i). \quad (6-63)$$

式 (6-63) 的完全解是由齐次方程的一般解 (即自由振动模式) 加上非齐次方程的一个特解所构成。适当选择初始条件可以

使迭加在一起的自由振动为零¹⁾，把我们的注意力集中于式(6-63)的特解，它的形式显然为

$$\zeta_i = B_i \cos(\omega t + \delta_i). \quad (6-64)$$

将这一解代入式(6-63)就能确定这里的振幅 B_i ：

$$B_i = \frac{Q_{0i}}{\omega_i^2 - \omega^2}. \quad (6-65)$$

于是完全解为

$$\eta_i = a_{ii}\zeta_i = \frac{a_{ii}Q_{0i} \cos(\omega t + \delta_i)}{\omega_i^2 - \omega^2}. \quad (6-66)$$

因而每个质点的振动是由一系列简正模式的线性组合构成的，但现在每个简正振荡的频率都等于策动力的频率。

决定各简正模式激发程度的因子有两个。一个是广义策动力 Q_{0i} 的幅度。如果作用于每个质点的力在某个特定简正模式的振动方向上没有分量，那么，对应于该模式的广义力显然为零， Q_{0i} 也将等于零。一个外力只有在它能够促使质点沿给定模式的相同方向运动时，才能激发起简正模式的振动。第二个因子是策动力频率与模式的自由振动频率的接近程度。根据式(6-66)中的分母可知， ω 越接近某个 ω_i ，该模式被激发的程度对于其他模式来说就越强烈。的确，当策动力频率正好等于某一 ω_i 时，式(6-66)明显地表明将出现无限大振幅——这就是熟知的共振现象。当然，式(6-66)所依据的理论实际上认为只存在平衡位置附近的微幅振荡；当公式所预言的振幅变大时，这种假设就不成立，式(6-66)也不再有效。注意，当策动力频率小于共振频率时，振荡与策动力同相；但在通过共振时，将会发生 180° 的相位变化。

1) 自由振动本质上是由策动力作用引起的瞬态响应。假设系统原来处于平衡位形，然后使策动力从零开始缓慢增强，就不会发生这种瞬态响应。另一说法是，假设存在耗散力(见后文)，则它们也会抑制自由振动。

由于假设并无耗散力或摩擦力，因此讨论是没有实际意义的。在大多数物理系统中，这些力(如果存在)都正比于质点速度，因而能根据某一耗散函数 \mathcal{F} 来推导(见节 1-5)。现在，我们首先考虑摩擦力对自由振动模式的影响。

按照定义， \mathcal{F} 必定是速度的二次齐次函数：

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \mathcal{F}_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j. \quad (6-67)$$

系数 \mathcal{F}_{ij} 显然是对称的，即 $\mathcal{F}_{ij} = \mathcal{F}_{ji}$ ，而且一般讲是坐标的函数。因为我们只讨论平衡位置附近的微幅振动，所以完全可以将系数在平衡位置附近展开。并只保留其首项常数项，这实际上与已经做过的有关动能的情况完全一样。以后应用式(6-67)时，将把 \mathcal{F}_{ij} 看作是这些常数因子。记得 $2\mathcal{F}$ 是由摩擦力引起的能量耗散率[见式(2-60)]，因而耗散函数 \mathcal{F} 决不能是负值。完整的拉格朗日运动方程组将成为(见节 1-5)

$$T_{ij} \ddot{\eta}_j + \mathcal{F}_{ij} \dot{\eta}_j + V_{ij} \eta_j = 0. \quad (6-68)$$

显然，为了找到能使运动方程得以退耦的简正坐标，就有必要找到一个使三个二次式 T ， V 和 \mathcal{F} 同时对角化的主轴变换。但是，正如前面所指出的那样，这一般是不可能的；对任何任意的耗散函数，通常不可能得到简正模式。然而，当有可能同时对角化时，也有某些例外的情况。例如，如果摩擦力与质点速度及其质量都成正比，那么，只要 T 是对角的， \mathcal{F} 也将是对角的。当这种同时对角化有可能实现时，运动方程就是退耦的，用简正坐标表示时，其形式为

$$\ddot{\zeta}_i + \mathcal{F}_i \dot{\zeta}_i + \omega_i^2 \zeta_i = 0 \quad (\text{不对 } i \text{ 求和}). \quad (6-69)$$

当用 ζ_i 表示时，这里的 \mathcal{F}_i 是 \mathcal{F} 的对角化形式中的非负系数。常系数线性微分方程组(6-69)可以用下列形式的函数

来求解:

$$\zeta_i = C_i e^{-i\omega'_i t},$$

这里的 ω'_i 满足二次方程

$$\omega_i'^2 + i\omega'_i \mathcal{F}_i - \omega_i^2 = 0 \quad (\text{不对 } i \text{ 求和}). \quad (6-70)$$

式 (6-70) 有两个解:

$$\omega'_i = \pm \sqrt{\omega_i^2 - \frac{\mathcal{F}_i^2}{4}} - i \frac{\mathcal{F}_i}{2}. \quad (6-71)$$

由于 ω' 是复数, 所以运动不是一个纯振荡. 由式 (6-71) 可见, ω'_i 的虚数部分产生一因子 $\exp[-\mathcal{F}_i t/2]$, 并由于 \mathcal{F}_i 的非负性质, 这一因子始终是时间的递减函数¹⁾. 出现一个由摩擦而引起的阻尼因子是不难预料的. 质点振动时因反抗摩擦力而做功, 系统能量(因而还有振幅)必然随时间而递减. 式 (6-71) 的实数部分对应于运动中的振荡因子, 而且将看到, 摩擦的存在也影响到振动频率. 然而, 如果耗散小, 就可略去 \mathcal{F}_i 的平方项, 振荡频率将简化为无摩擦情况下的数值. 整个运动也将成为按指数律阻尼的自由振动模式:

$$\zeta_i = C_i e^{-\mathcal{F}_i t/2} e^{-i\omega_i t}. \quad (6-72)$$

如果耗散函数不能随同 T 和 V 一起对角化, 求解起来将更加困难. 然而, 解的一般性质几乎完全相同, 都等于一个指数阻尼因子乘以一个振荡指数函数. 假设我们所求的式 (6-68) 的解的形式为

$$\eta_j = C a_j e^{-i\omega t} = C a_j e^{-\kappa t} e^{-2\pi i \nu t}. \quad (6-73)$$

应用此解, 式 (6-68) 将成为一组联立线性方程

$$V_{jj} a_j - i\omega \mathcal{F}_{jj} a_j - \omega^2 T_{jj} a_j = 0. \quad (6-74)$$

为方便起见, 把 ω 写成 $i\gamma$, 即有

$$\gamma = -i\omega = -\kappa - 2\pi i \nu, \quad (6-75)$$

1) 某些(而不是全部) \mathcal{F}_i 可以等于零, 这意味着在相应的简正模式中并无摩擦效应. 重要的问题是所有 \mathcal{F}_i 都不能取负值.

因而 $-\kappa$ 是 γ 的实数部分。利用 V, T 和 \mathcal{S} 的方阵, 则方程组 (6-74) 将成为一个包含有 γ 的列矩阵方程:

$$Va + \gamma Fa + \gamma^2 Ta = 0. \quad (6-76)$$

齐次方程组 (6-74) 或 (6-76) 只对某一些 ω 或 γ 值才能解出 a_j 。用不着真正解出相应的久期方程, 也能证明 κ 必定始终是非负值。用 a^\dagger 左乘矩阵方程 (6-76), 能够把它变换成 γ 的标量方程:

$$a^\dagger Va + \gamma a^\dagger Fa + \gamma^2 a^\dagger Ta = 0. \quad (6-77)$$

式 (6-77) 是 γ 的二次方程, 其系数是一些一般型式的矩阵积, 与式 (6-19) 中所遇到的相同。根据 V, F 和 T 的对称性, 这些矩阵积都是实数, 就象把 a 按 $\alpha + i\beta$ 展开时所能看到的那样 [见式 (6-20)]。因此, 如果 γ 是二次方程的一个解, 则它的复共轭 γ^* 也必定是一个解。已知, 二次方程的两根之和等于线性项系数除以平方项系数所得之商的负值:

$$\gamma + \gamma^* = -2\kappa = -\frac{a^\dagger Fa}{a^\dagger Ta}. \quad (6-78)$$

因此, κ 能够用 a_j 的实数部分和虚数部分表达成

$$\kappa = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{S}_{ii}(\alpha_i \alpha_i + \beta_i \beta_i)}{T_{ii}(\alpha_i \alpha_i + \beta_i \beta_i)}. \quad (6-79)$$

耗散函数 \mathcal{S} 必定始终是正值, 而 T 又是正定的, 所以 κ 不可能为负值。系统的振荡可以随时间按指数律递减, 而决不可能随时间递增。注意, 如果 \mathcal{S} 是正定的, κ 必定不等于零 (和正值), 所有模式都将有一个指数阻尼因子。由 ω 的实数部分给出的振荡频率当然会受到耗散力的影响, 但是, 如果在一个振荡周期内, 阻尼不是很大, 这种变化将是微小的。

最后, 我们可以考虑有耗散力情况下的正弦形受迫振荡。策动力随时间的变化可表达为

$$F_j = F_0 e^{-i\omega t},$$

这里的 F_{0j} 可以是复数, 而运动方程为

$$V_{ij}\eta_j + \mathcal{F}_{ij}\dot{\eta}_j + T_{ij}\ddot{\eta}_j = F_{0j}e^{-i\omega t}. \quad (6-80)$$

如果我们所求的这些方程的特解的形式为

$$\eta_j = A_j e^{-i\omega t},$$

我们就会得到振幅 A_j 的非齐次线性方程组

$$(V_{ij} - i\omega\mathcal{F}_{ij} - \omega^2 T_{ij})A_j - F_{0i} = 0. \quad (6-81)$$

根据克拉默 (Cramer) 定则, 不难求得这些方程的解¹⁾:

$$A_j = \frac{D_j(\omega)}{D(\omega)}, \quad (6-82)$$

这里的 $D(\omega)$ 是式 (6-81) 中 A_j 的系数行列式; $D_j(\omega)$ 是用 $F_{01} \cdots F_{0n}$ 置换第 j 列时引起的对 $D(\omega)$ 的修正. 由于共振基本上是由分母的代数形式决定的, 所以我们在这里主要关心的是分母 $D(\omega)$. 已知 D 对应于齐次方程式 (6-74) 的久期方程中的行列式, 它的根是自由振动模式的复数频率. 根据式 (6-75), 要 γ 和 γ^* 都是式 (6-77) 的根意味着: 如果 ω_j 是 $D(\omega)$ 的一个根, 那么 $-\omega_j^*$ 也应是它的一个根. 对于 n 个自由度的系统来讲, $D(\omega)$ 有可能表达成

$$D(\omega) = G(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2) \cdots (\omega - \omega_n)(\omega + \omega_1^*) \cdot (\omega + \omega_2^*) \cdots (\omega + \omega_n^*),$$

式中的 G 是某个常数. 利用求积符号, 并用 $2\pi\nu$ 表示 ω , 这一表达式能写成

$$D(\omega) = G \prod_{i=1}^n [2\pi(\nu - \nu_i) + \kappa_i][2\pi(\nu + \nu_i) + i\kappa_i]. \quad (6-83)$$

如果我们把式 (6-83) 有理化, 从而把 A_j 分解为实数部分和虚数部分, 分母将成为

1) 当然, 它们仅是式 (6-74) 的非齐次变型.

$$D^*(\omega)D(\omega) = GG^* \prod_{i=1}^n [4\pi^2(\nu - \nu_i)^2 + \kappa_i^2] \cdot [4\pi^2(\nu + \nu_i)^2 + \kappa_i^2]. \quad (6-84)$$

因此,在自由振荡频率附近的 $\pm \nu_i$ 范围内,受迫振荡的振幅表现出典型的共振特性. 由于存在着阻尼常数 κ_i , 因此自由模式频率处的共振分母不再为零, 振幅也保持是有限的. 使振幅达到峰值的策动频率不再正好处在自由频率处, 因为起作用的是 A_i 项的频率依存性, 而不是特定的共振分母. 然而, 只要阻尼小到足以使共振峰值可予辨认的程度, 则共振频率的偏移通常就是小的.

我们仅就力学系统讨论了微幅振荡的性质. 但毫无疑问, 读者已经注意到它们与电路网络振荡理论的相似性. 只要把系数 V_{ij} 理解为倒易电容, 把 \mathcal{R}_{ij} 理解为电阻, 把 T_{ij} 理解为电感, 运动方程 (6-68) 就成了 n 个耦合电路的电路方程. 如策动力代之以加于一个或几个电路的、频率为 ω 的电源, 受迫振动方程 (6-80) 就成了第二章中提及的电路方程 (2-39). 这里仅仅提出了微幅振荡处理技巧和一般性运动定理的一部分. 例如, 篇幅不允许我们讨论拉普拉斯变换技巧, 而这在研究线性振荡系统对任意含有时间的策动力的响应时是极为有用的. 这里也不宜去考虑非线性振荡这种尚在发展中的课题, 在这种振荡中, 势能将包含高于二次的一些项, 运动不再是简谐的. (在以后论述微扰理论时将恰当地介绍这一领域的某些方面.) 正如已经指出的那样, 稳定运动附近的微幅振荡理论将在以后讨论哈密顿力学表述时再给予正式的探究. 值得注意的另一种推广是无限个自由度的那些连续系统的振荡. 问题在于建立起类似于处理分立系统经典力学那样的连续系统处理方法. 我们将在研究过分立力学的正则表述, 并且搞清楚了牛顿力学结构应如何作出狭义相对论修正

以后,在第十二章中再讨论连续系统的这些概念.

推荐参考书目

H. Jeffreys 和 B. S. Jeffreys, *Methods of Mathematical Physics*

矩阵或成对正定二次式的对角化是为物理学家编写的数学方法课本所共有的课题. 所以选择这一特定的参考书是因为第四章中的贴切讨论显然是特意于微幅振荡问题而写的. 书中给出了很多定理, 讨论了特征行列式根的性质, 这对实际上求取本征频率是有帮助的.

E. T. Whittaker, *Analytical Dynamics* 第七章中论述了振动理论, 并明显地证明了 T 和 V 能够同时对角化. 但是, 在这方面的论述不是很清晰的. 更为有价值的是该章的后面几节中详尽地讨论了约束的作用和稳定运动附近的振动. 第八章第 94 节中关于有耗散力情况下振动的论述比较零星, 而且只限于两个自由度的情况.

D. Ter Haar, *Elements of Hamiltonian Mechanics* 尽管用此标题, 但本书决不限于哈密顿力学, 第三章关于微幅振动的论述仅仅采用了拉格朗日力学. 所作的论述与详细地列出所有矩阵元的矩阵处理是不相同的. 书中有大量的例子, 并附有各种简正振动模式的有用图示. 但关于线性三原子分子振动的对称性质的某些结论是不可靠的.

D. Ter Haar, *Elements of Hamiltonian Mechanics* 尽管用此标题, 但本书决不限于哈密顿力学, 第三章关于微幅振动的论述仅仅采用了拉格朗日力学. 所作的论述与详细地列出所有矩阵元的矩阵处理是不相同的. 书中有大量的例子, 并附有各种简正振动模式的有用图示. 但关于线性三原子分子振动的对称性质的某些结论是不可靠的.

D. Ter Haar, *Elements of Hamiltonian Mechanics* 尽管用此标题, 但本书决不限于哈密顿力学, 第三章关于微幅振动的论述仅仅采用了拉格朗日力学. 所作的论述与详细地列出所有矩阵元的矩阵处理是不相同的. 书中有大量的例子, 并附有各种简正振动模式的有用图示. 但关于线性三原子分子振动的对称性质的某些结论是不可靠的.

J. L. Synge 和 A. Schild, *Tensor Calculus* 这一专著的第二章介绍了黎曼空间和相关的度规张量, 内容非常适合于我们的参考. 特别是, 他们直接引进了协变量和抗变量的求导, 这两个量在这里还没有必要把它们区分开来, 但在后面第七章中将会看出它们的差别.

L. D. Landau 和 E. M. Lifshitz, *Mechanics* 正如所料, 微幅振荡这一课题的叙述相当紧凑, 但是它涉及到广泛的基础知识. 该书还相当详细地考虑了线性的和“弯曲”的三原子分子的振荡. 本章所考虑的仅仅是线性振荡, 势能和动能矩阵的参量元素被认为始终是常数. 这些元素随时间变化的振子以及非线性振子的参量激发的研究在最近几十年内发展得非常快, 成了需要把它单独分出来加以详尽论述的一个领域. 作者在第 27—30 节中对该课题作了简要介绍, 在这一方面, 俄国学者的贡献一直是特别值得注意的. 然而, 讨论中所揭示的还仅仅

是冰山的尖顶。

L. Meirovitch, *Methods of Analytical Dynamics* 这里给出了振荡系统的近代处理方法,但叙述方式并没有失去与实际真实性的联系.本章的课题在该书中是借助于线性自激系统的形式来表述的,但重点则放在运动是否稳定的讨论上,这一问题是我们从一开始就预先假定了的.经典的和近代的(例如李雅普诺夫方法)判据都讨论到了.还有一章专门讨论了(非自激系统的)参量振荡.

Y. Chen, *Vibrations: Theoretical Methods* 这是一本偏重于工程学的教科书,大部分篇幅用来引述力学的基本概念,以及论述连续系统的振动.其余部分涉及到本章的领域,书中举出了许多推导好的例子,并明显地(有时则是笨拙地)列出了有关矩阵的矩阵元.特别感兴趣的是用拉普拉斯和傅里叶变换方法来处理受迫(或策动)振荡问题.

H. C. Corben 和 P. Stehle, *Classical Mechanics* 这一著名教科书中论述微幅振荡的主要一章集中地论述了大量例子而不是一般性理论.特别应该提到的是附录 3,其中简要地介绍了如何利用群论方法来使分子的本征频率问题变得较为简单,论述是以系统所显示的固有对称性为基础的.在计算机时代到来之前,解题都依赖于笔算,因此,有助于使计算量减少的任何方法自然会成为着重讨论和研究的课题.但计算机的出现使得这些计算方法失去了它原有的重要性,当然,利用对称性质辨认零值频率或简并频率还是值得注意的.这一方面可参阅 W. D. Gwinn: *Normal Coordinates: General Theory, Redundant Coordinates, and General Analysis Using Electronic Computers*, *Jour. Chem. Phys.*, **55**, 477 (July 15, 1971).

G. Herzberg, *Infrared and Raman Spectra of Polyatomic Molecules* 这一专著提供了把微幅振荡的经典理论应用于分子结构的许多例证.利用运动常数 and 对称性质来简化计算的一些技巧,在这里被用来求解许多分子模型的显解.并用图解方法画出了许多分子的各种简正模式.

E. B. Wilson, Jr.; J. C. Decius; 和 P. C. Cross, *Molecular Vibrations* 这一 1955 年出版的专著明显地保留着化学家所习惯的分子振

动问题的标准写法。完全反映了计算机时代之前的精神——在论述苯分子的一章的末尾，要求读者在“标准台式计算机”上来检验该章的计算，从而使矩阵处理更为简便。该书相当详细地论述了对称群的应用。阅读时需要一定的量子力学知识。

Lord Rayleigh, *Theory of Sound* 这是物理学的经典著作之一。这一专著包含有振动理论各个方面的大量定理和实际例证。作者本人曾对许多理论的发展有所贡献，特别是耗散函数的引进。他的论述顺畅清晰，并且包含有一些很少论及的课题，例如约束的作用以及本征频率的稳定性等。作者从劳斯的著作中得益非浅，劳斯因1877年的阿达姆斯获奖论文和教科书 *Rigid Dynamics* 而成为系统论述微幅振荡的最早一批学者之一。

E. A. Guillemin, *The Mathematics of Circuit Analysis* 列出该书是为了说明微幅振动理论在近代电机工程学中的重要意义。书中极为注意二次形式以及它们的主轴变换。那广泛地应用矩阵代数学的论述，既高级又精巧。

习 题

1. 一质点在恒定的铅垂引力场中沿一曲线运动，该曲线的方程为 $y = ax^4$ ，式中 y 沿铅垂方向，求平衡位置附近的微幅振荡的运动方程。

2. 求取图 1-4 所示复摆的简正振动模式，设两个摆的长度相等但质量不等。证明：当下面一个质点的质量与上面一个相比为小时，两个共振频率几乎相等。如果两个摆的运动是由于上面的质点被稍稍推离垂直位置然后释放而引起的，证明：在往后的运动中，每隔一定时间，一个摆处于静止时，另一个摆则达到它的最大幅度。这就是熟知的“拍”现象。

3. 线性三原子分子问题能够化为两个自由度的问题，只要引进坐标 $y_1 = x_2 - x_1$, $y_2 = x_3 - x_2$ ，并令质心保持静止，从而消去 x_2 就可以了。求取用这些坐标表示的简正模式的频率，并证明它们与节 6-4 中的结果相一致。原子间的距离 y_1 和 y_2 称为分子的内坐标。

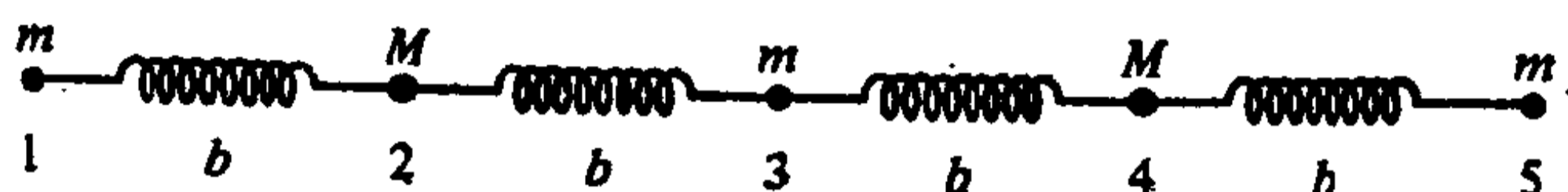
4. 求节 6-4 中讨论过的分子纵振动频率，不过现在的中心原子看

作是由力常数为 k 的某个弹簧束缚于原点的。证明：在这些条件下不再有平移模式。

5. (a) 在线性三原子分子中，假设初始条件是中心原子保持静止，但已从平衡位置移过了一段距离 a_0 ，而其他两个原子则仍在它们的平衡位置处。求质心附近微幅纵振动的振幅。给出简正模式的振幅。

(b) 重复 (a) 中的问题，不过现在的中心原子最初位于平衡位置并有一初速度 v_0 。

6. 把一些质点和理想弹簧排列起来模拟一个线性五原子分子，其形状如下图所示：



所有弹簧的力常数都相等。求纵振动的本征频率和简正模式。[提示：把坐标 η_i 变换为 ξ_i ，它们的定义为

$$\eta_3 = \xi_3, \quad \eta_1 = \frac{\xi_1 + \xi_3}{\sqrt{2}}, \quad \eta_5 = \frac{\xi_1 - \xi_3}{\sqrt{2}}$$

加上 η_2 和 η_4 的对称表达式。这样，特征行列式将分解成较低阶的行列式。]

7. 在线性三原子分子中，假设 y, z 方向上的运动决定于势

$$V_y = \frac{k}{2} (y_2 - y_1)^2 + \frac{k}{2} (y_3 - y_2)^2,$$

$$V_z = \frac{k}{2} (z_2 - z_1)^2 + \frac{k}{2} (z_3 - z_2)^2.$$

求取三维方向上的微幅振动的本征频率，并描述它们的简正模式。零值频率代表哪一种对称性？你可以利用习题 6 中提出的那类中间坐标。

8. 令三个等质量原子位于由三个相等力常数的弹簧连结成的 45° 直角三角形的三个角顶处，从而构成一个分子的平衡位形。求平面振动模式的特征行列式，并把各列重新排列，从而证明特征方程有一三重根 $\omega = 0$ 。把这个行列式化为三阶行列式，并求自由振动的非零值频

率。

9. 直接证明：下列各种运动满足上题中的运动方程：

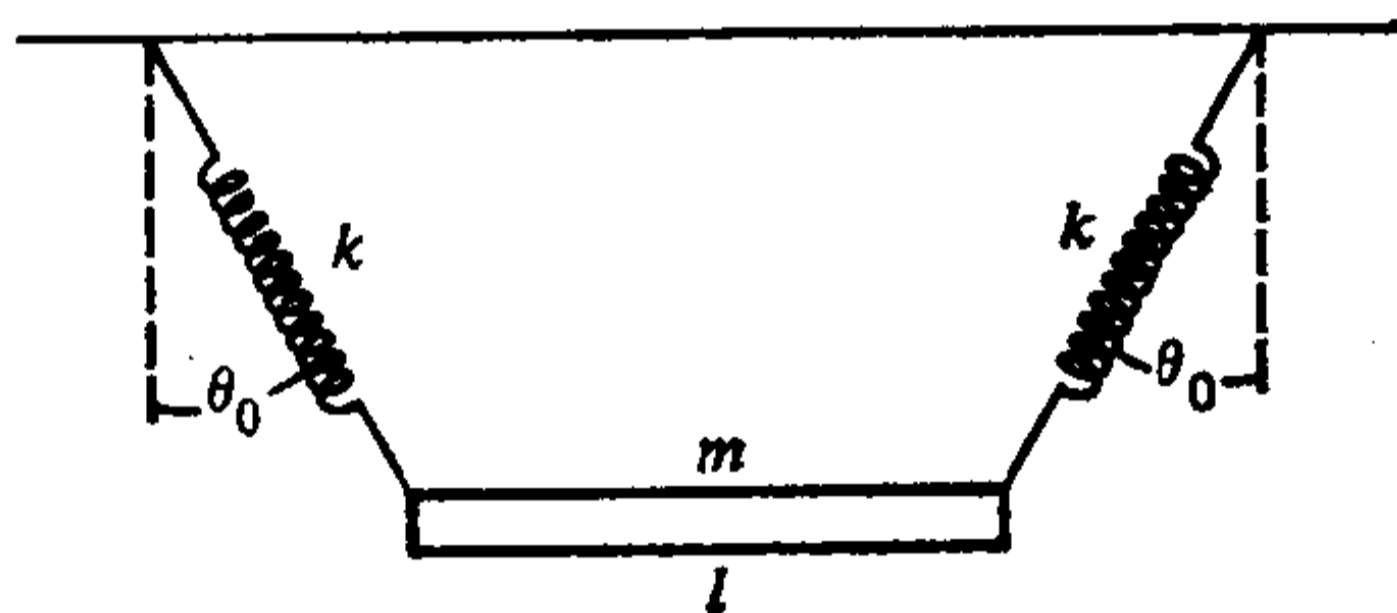
- (a) 所有原子沿 x 轴的匀速平移；
- (b) 沿 y 轴的匀速平移；
- (c) 绕 z 轴的匀速转动。

10. (a) 三个等质量质点的平衡位置是一等边三角形的三个角顶。它们由三个相等的弹簧相联系，这些弹簧是沿三角形外接圆的圆弧放置的。约束使质点和弹簧只能在圆周上运动，以致弹簧的势能决定于它所覆盖的那段圆弧的长度。确定平面内微幅振荡的本征频率及其简正模式。并从物理上来识别各零值频率。

(b) 假设有一根弹簧的力常数变化 δk ，而其他弹簧保持不变。则精确到一级 δk 时，本征频率和简正模式的变化如何？

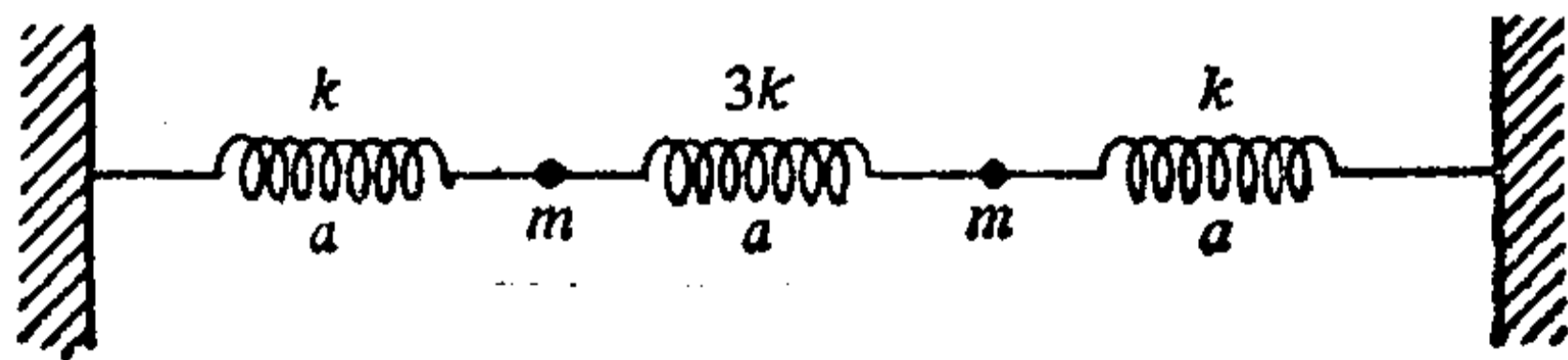
(c) 假设所发生的变化仅是质点之一的质量改变了 δm 。那么简正本征频率和简正模式将怎样变化？

11. 一根长度为 l 、质量为 m 的均匀棒由平衡长度为 b 、力常数为 k 的两个相等弹簧悬挂起来，如下图所示。

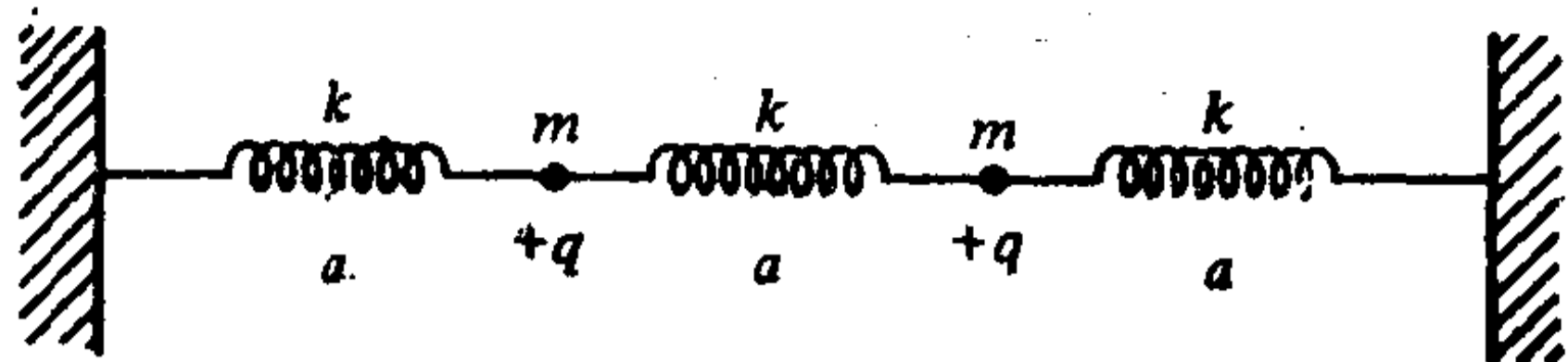


求平面内微幅振荡的简正模式。

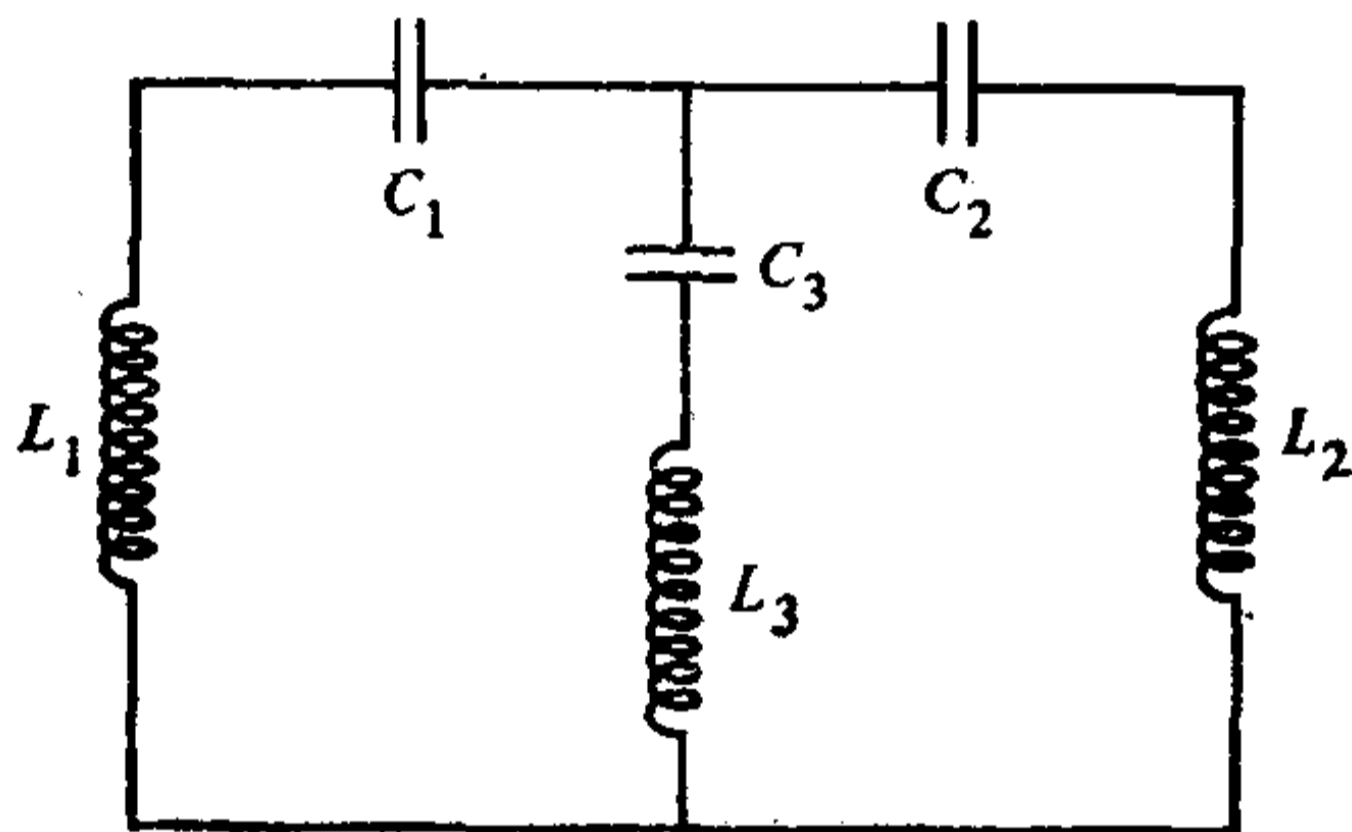
12. 有两个质点，在三个弹簧的连接点处作一维运动，如图所示。所有弹簧的平衡长度都等于 a ，它们的力常数和质量则如图中所示。求系统的本征频率和简正模式。



13. 两个质量都等于 m 的质点，由力常数都是 k 的三个弹簧相连接并置于两固定点处(如图所示)。每个弹簧的平衡长度都等于 a 。每个质点都带有正电荷 $+q$ ，并且按库仑定律相互排斥。试建立那些本征频率的久期方程。



14. 求下列耦合电路的本征频率表达式。



15. 如果广义策动力 Q_i 不按正弦规律变化,证明: 简正坐标的无阻尼受迫振动决定于

$$\xi_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_i(\omega)}{\omega_i^2 - \omega^2} e^{-i\omega t} d\omega$$

式中 $G_i(\omega)$ 是由下式定义的 Q_i 的傅里叶变换:

$$Q_i(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G_i(\omega) e^{-i\omega t} d\omega.$$

如果耗散函数随同 T 和 V 一起被对角化,证明: 受迫振荡可表达为

$$\xi_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_i(\omega)(\omega_i^2 - \omega^2 + i\omega\mathcal{F}_i)}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\mathcal{F}_i^2} e^{-i\omega t} d\omega.$$

此式具有典型的共振分母形式。这些结果是用极为有效的运算微积分法处理瞬态振动的简单例证。

第七章 经典力学中的狭义相对论

我们对经典力学的研究都是以第一章中提出的一系列定义和假设为基础的。然而，众所周知的是，当所涉及的速度接近光速时，这些假设不再反映实验事实，而必须加以改变，使它适合于所谓狭义相对论。这是力学结构的一种修正，决不要把这种修正与量子力学所要求的更彻底的改动混为一谈。在很多物理学事例中，量子效应是重要的，但相对论改正则可忽略。反过来，也常常会出现这样一些现象，它们涉及到相对论速度，但量子力学的改进并不影响讨论。可见，在狭义相对论和量子力学之间并不存在固有的联系，在讨论其中之一的效应时，不必考虑另一个的影响。所以在经典力学表述中研究狭义相对论所要求的变化是有重大现实意义的。

然而，我们打算对狭义相对论及其结果作出全面的讨论，也不准备大量论述导致相对论理论结构的那些事件和实验。更不会去论述它的哲学含义和（明显地嘲弄了人们的常识的）表观佯谬。我们将认为读者对匀速运动系统间的相对论变换以及由此而引起的更为惊人的物理现象至少已经有了初步的了解。这里要着重论述的是如何使狭义相对论能纳入经典力学的范畴，而且也只讨论为完成这一使命所必需的那些理论。

7-1 狭义相对论的基本纲领

在前面几章的讨论中，经常用到象“空间系统”或“固定于空间的系统”这样一些词组，它们仅被用来表示某个惯性系

统,在这种系统内,牛顿运动定律

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (7-1)$$

是适用的。固定在相对于惯性系转动的物体上的系统就不满足这一条件,而必须在式(7-1)中加上描述转动影响的某些项。还将发现,相对于某一“空间系统”匀速运动的系统本身也应是一个惯性系统。如果 \mathbf{r}' 代表从第二个系统的原点到给定点的矢径, \mathbf{r} 代表第一个系统中的相应矢径(见图7-1),显然,这两个系统如果在 $t = 0$ 时刻是重合的,那么两个矢径之间的联系将决定于关系式

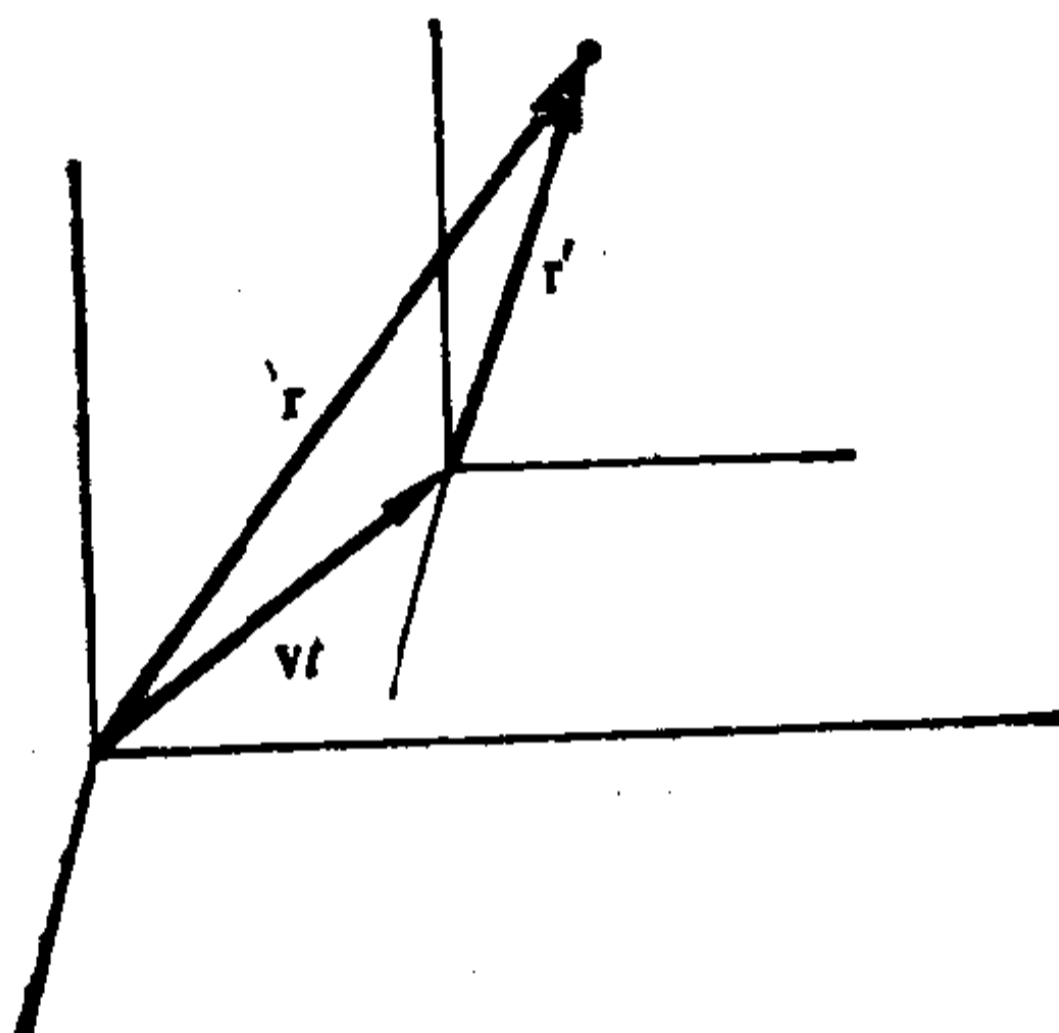


图7-1 伽利略变换的简单图示

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t. \quad (7-2)$$

由于相对速度是常数,所以式(7-2)的一阶时间微商为

$$\dot{\mathbf{r}}' = \dot{\mathbf{r}} - \mathbf{v}, \quad (7-3)$$

二阶微商为

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a}, \quad (7-4)$$

因而两个系统中的加速度相同。如果牛顿定律方程(7-1)在一个系统中成立,则在另一个系统中亦必成立,只要力在两个系统中的形式相同。在许多通常的力学问题中,力在两个系统之间显然是不变的,例如,象 $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ 这样的恒定力场就是

如此。只要用来推导力的势仅是系统内质点间的标量距离的函数，则力在带撇的或不带撇的系统内的形式显然相同，相应的运动方程也同样不变¹⁾。

另一方面，式(6-2)和式(6-4)所表达的变换称为伽利略变换，这一变换预言光速在两个系统内应该相同。例如，假设在不带撇系统的原点处有一光源，它向外发射以速率为 c 传播的球面波。设矢径 \mathbf{r} 为给定波面上某点的位置矢量。则不带撇系统中波面上该点的速度是 $\dot{\mathbf{r}} = c\mathbf{n}$ ，这里， \mathbf{n} 是沿 \mathbf{r} 方向的单位矢量。但根据式(7-2)可知，带撇系统中的相应波速是 $\dot{\mathbf{r}}' = c\mathbf{n} - \mathbf{v}$ 。在相对于光源运动的系统内，波速的量值一般讲不再等于 c 。事实上，由于波速与方向有关，因此，这些波将不再是球面波。

一系列的探究，特别是著名的迈克耳孙-莫雷实验已经表明，光速在所有方向上始终相同，与观测者、传播介质和光源的相对匀速运动无关²⁾。由于光在真空中的传播速率为 c 。这一结论是麦克斯韦方程的结果，因此必能断言，伽利略变换不可能使麦克斯韦方程的形式保持不变。自从伽利略和牛顿时代以来，一直作为物理学假设的说法是：一切物理现象在彼此作相对匀速运动的所有系统内都应该相同。完全在一个给定系统内部所作的测量，必定无法把该系统与一切相对于该系统作匀速运动的其他系统区别开来。这一等效性假设要求物理学定律在所有匀速运动系统内都以相同的方式来描

- 1) 值得注意的是，具有这种势的拉氏函数在两个系统内的形式并不相同。但可证明，两者之差仅是一个位置函数的全微商（见习题1），但运动方程在两个系统中看起来是相同的。
- 2) 这些实验证明中的一个较为引人注目的实验，涉及到测定 π^0 介子在飞行过程中衰变时发射出来的光子的速率。虽然光源本身的运动几乎同光一样快，但在实验室系中测得的发射光子的速度，在实验误差范围内与 c 的量值相一致，相差的数值小于0.01%。参阅 T. Alvager 等的论文，*Physics Letters*, 12, 260 (October 1, 1964)。

述，也就是说，在经受伽利略变换时，这些定律应是协变的。但是，物理学在二十世纪的转折时期所面临的佯谬是：从实验角度来看，牛顿定律和麦克斯韦方程似乎都满足这一等效性假设，但在理论上，按照伽利略变换，麦克斯韦方程并不满足这一假设。坚信这一等效性假设的爱因斯坦断言，正是因为麦克斯韦方程的形式必须保持不变，所以伽利略变换不可能是正确的。因此，必须找到匀速运动系统之间的某个新的关系，即洛仑兹变换，由它来保证光速在所有匀速运动系统内都保持相同。爱因斯坦指出，这种变换要求修正通常的时间概念和同时性概念。

因此，完全可预先推断出牛顿运动方程也应加以修正，因为它们只有在伽利略变换下才能满足等效性假设，现在看来是不正确的。还可能有一些其他公认的物理定律在洛仑兹变换下不会保持它们的形式不变，因而必须推广使之具有正常的变换性质。当然，作出的推广在伽利略变换近似正确的时候，应能化回到速度远小于光速时的更为惯常的形式。

所以，狭义相对论的纲领应该包括两个方面。第一，必须找到两个匀速运动系统之间的某个变换，这种变换将保持光速不变。第二，物理定律应根据它们在洛仑兹变换下的变换性质来检验。那些不能保持其形式不变的定律，应推广到使之能适合这一等效性假设。按此纲领描绘出的物理学蓝图已为大量实验所证实，归根到底，也只有实验才能证实爱因斯坦基本假设的正确性。

7-2 洛仑兹变换

这里假设读者已遇到过洛仑兹变换方程¹⁾。今考虑两个

1) 洛仑兹变换的推导很多，复杂性和严密程度各异，可参阅本章末所列参考书的注释。

系统,从这两个系统内的观测者看来,两系统的原点在 $t = 0$ 时是重合的. 我们把其中一个系统称为带撇系,它相对于另一个不带撇系以速度 v 作匀速运动,运动方向平行于 z 轴. 这样,在这两个系统内测得的坐标和时间之间的洛仑兹变换决定于方程

$$\begin{aligned} x' &= x, & y' &= y, \\ z' &= \frac{z - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ t' &= \frac{t - \frac{vz}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned} \quad (7-5)$$

式中 β 为 v/c , 即 v 与光速之比. 显然,这些变换方程具备我们预先要求它们具有的所有性质. 首先,它们使光速在两个系统内保持不变. 假设在不带撇系原点处的一个点光源在 $t = 0$ 时发射一光波. 在不带撇系内观测时,波前方程是一个球方程:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2. \quad (7-6)$$

经一定的代数演化,并利用变换方程 (7-5) 即可证明,在带撇系内观测到的变换后波前也是一个球,它的扩展速率为 c :

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2. \quad (7-7)$$

如果仅保留 v/c 的一次项,式 (7-5) 可化为

$$\begin{aligned} x' &= x, & y' &= y, \\ z' &= z - vt, & t' &= t. \end{aligned} \quad (7-8)$$

因此,在相对速度为很小的极限情况下,洛仑兹变换方程将化为伽利略变换式 (7-2), 并且明显地表明,在两个系统内的时间是相同的.

式 (7-5) 表明, x, y 坐标经变换后是不变的,这是意料之中的结果. 在垂直于相对运动方向的那些方向上不应该受到

运动的影响.更为正式地说,空间的各向同性已预先假设一个方向上的相对运动不应引起其他方向上的任何变化.变换方程必须是线性的,这一性质虽然可能不明显,但却有助于保证这种变换在小速度的极限情况下能化为线性的伽利略变换.事实上可以证明¹⁾,为使系统在洛伦兹变换下仍然是惯性系,变换必须是线性的.由于对牛顿运动方程的有效性有怀疑,爱因斯坦给惯性系下了一个新的定义,认为惯性系中不受相互作用的孤立质点将保持静止或匀速运动状态.如果一个系统里的匀速运动要变换为另一个系统里的匀速运动,则洛伦兹变换方程必须是线性的.

最后可以预期,洛伦兹变换方程确实是相对的,即逆变换具有相同的形式,只有 v 应改号.只要用 x', y', z' 和 t' 求出 x, y, z 和 t 的直接解,即不难证明式(7-5)满足这一条件.

洛伦兹变换方程能够容易地表达成矢量形式,它不需要为相对速度选定任何特定的方向.如果 \mathbf{v} 沿着 z 轴,则变换方程(7-5)的空间部分能重新表达成

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \left(\frac{z - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} - z \right) \frac{\mathbf{v}}{v}.$$

为了消去明显出现的 z ,只要利用关系式

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = vz,$$

从而得

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) \frac{\mathbf{v}}{v^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right) - \frac{\mathbf{v}t}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (7-9)$$

式(7-9)能化为更紧凑的形式,只要利用矢量 $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$,以

1) 可以参阅 R. D. Sard, *Relativistic Mechanics*, p. 596 或 V. Fock, *The Theory of Space, Time and Gravitation*, 2d ed., pp. 20-24.

及把 γ 定义为

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (7-10)$$

最后的方程为

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \frac{(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\beta}}{\beta^2} (\gamma - 1) - \boldsymbol{\beta}\gamma ct. \quad (7-11)$$

相应的时间变换方程的形式为

$$t' = \gamma t - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}) \frac{\gamma}{c}. \quad (7-12)$$

式 (7-11) 和式 (7-12) 构成了两个坐标系之间的洛伦兹变换方程, 这两个坐标系具有相互平行的轴, 彼此作相对的匀速运动, 运动速度 \mathbf{v} 则是任意取向的.

一般的洛伦兹变换方程 (7-11) 和 (7-12) 具有从一个四维坐标系到另一个四维坐标系的线性变换形式. 因此, 前几章中得到的处理线性变换的所有数学工具都能用于洛伦兹变换. 明可夫斯基指出, 如果把四维笛卡儿空间内的第四个坐标取作 ict , 则洛伦兹变换可表达成特别简单而又熟悉的形式. 在这种四维空间 (称作明可夫斯基空间) 内, 位置矢量量值的平方的形式为

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2. \quad (7-13)$$

已知, 我们设想出洛伦兹变换是为了使光速在两个系统内保持不变, 但根据式 (7-7) 和式 (7-13), 这样的条件等于要求在四维空间内的位置矢量量值在变换时保持不变. 在第四章中已经看到, 不会影响矢量量值的线性变换是正交变换. 因此, 洛伦兹变换应是明可夫斯基四维空间内的正交变换.

洛伦兹变换能够用其他四维坐标系来描述 (见节 7-3). 任何包含时间轴的四维空间都称为世界空间. 但我们的大部分讨论仅仅述及明可夫斯基空间.

由于第四个坐标是虚数,所以明可夫斯基空间是复空间,而这一空间内的洛仑兹变换矩阵元就可能是虚数。我们可以从矢量形式的变换方程(7-11)和(7-12)直接求得矩阵元的明显形式。我们将用 L 表示明可夫斯基空间内的洛仑兹变换矩阵:

$$x' = Lx, \quad (7-14)$$

L 的一般矩阵元为 $L_{\mu\nu}$ ¹⁾。为方便起见,我们用希腊字母作为遍及所有四个坐标的下标,而用罗马字母来作为仅仅遍及空间分量的下标。同前面一样,我们将采用求和约定,除非明确作出否定。

在明可夫斯基空间内,式(7-11)和式(7-12)采取的形式为

$$x'_i = x_i + \frac{\beta_j \beta_k x_k}{\beta^2} (\gamma - 1) + i\beta_j \gamma x_4, \quad (7-15)$$

$$x'_4 = -i\beta_k x_k \gamma + \gamma x_4. \quad (7-16)$$

因此,对于任意方向的 β , L 的矩阵元为

$$\begin{aligned} L_{jk} &= \delta_{jk} + \frac{\beta_j \beta_k}{\beta^2} (\gamma - 1), \\ L_{j4} &= i\beta_j \gamma, \\ L_{4k} &= -i\beta_k \gamma, \\ L_{44} &= \gamma. \end{aligned} \quad (7-17)$$

例如,在本节开始时所提到的那个特殊的洛仑兹变换就有沿 x 轴的相对速度,因而矩阵 L 将采取简单的形式

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\beta\gamma \\ 0 & 0 & -i\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}. \quad (7-18)$$

1) 遗憾的是, L 早已用来表示拉氏函数和角动量,但在实际使用时,参照上下文的意思几乎是不会发生什么混淆的。

在第四章中已经看到，正交矩阵的基本性质是转置矩阵等于逆矩阵。相对速度矢量为 β 的洛伦兹变换的逆矩阵必定是相同的矩阵，只是速度应代之以 $-\beta$ 。检查一下式 (7-17) 立即可见，那些矩阵元是满足这一条件的。改变 β_i 的符号就相当于转置下标。

L 与三维正交变换还可以作出进一步的类比。从式 (7-18) 可见，第三、第四坐标的 2×2 子阵类似于三维坐标系绕一个轴转动的相应子阵：

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}.$$

与此相对应，式 (7-18) 能够说成是明可夫斯基空间的 x_3x_4 平面内的一次转动，不过转过的角度 ϕ 是一虚数：

$$\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \sin \phi = \frac{i\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (7-19)$$

如果使用虚数角度不方便，则可引进一个实数角度 ψ ，它由 $\phi = i\psi$ 来定义，对此有

$$\cosh \psi = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \sinh \psi = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (7-20)$$

从而式 (7-18) 中的 (x_3, x_4) 子阵能够表达为

$$\begin{pmatrix} \cosh \psi & i \sinh \psi \\ -i \sinh \psi & \cosh \psi \end{pmatrix}.$$

借助于等效转动角，洛伦兹变换矩阵的运用有时是能够简化的。假设 L 是相对速度为 β 并沿 x_3 轴的两个系统之间的洛伦兹变换，而 L' 则是相对速度为 β' 但仍沿 x_3 轴的又一次洛伦兹变换。那么，相继应用 L 和 L' 的洛伦兹变换 $L'' = L'L$ 又等效于什么呢？由于两次洛伦兹变换是相同平面内的转动，所以转动角度可以简单地相加（正象把两个矩阵相乘可以证明的那样）， L'' 的转动角度 ϕ'' 等于 $\phi + \phi'$ 。根据式 (7-19) 可

得

$$\tan \phi = i\beta, \quad (7-21)$$

而且由于

$$\tan \phi'' = \tan(\phi + \phi') = \frac{\tan \phi + \tan \phi'}{1 - \tan \phi \tan \phi'},$$

因此,我们立即可以断言,两次相继进行的洛仑兹变换相当于相对速度为

$$\beta'' = \frac{\beta + \beta'}{1 + \beta\beta'} \quad (7-22)$$

的一次单独的洛仑兹变换。式(7-22)是著名的爱因斯坦平行速度加法定律¹⁾。这一结果可以有两个推论:(1)在相应的非相对论问题中,等效速度仅是两个变换速度之和;而在相对论问题中,则有通过分母中那一项给出的改正。(2)改正的效应是,即使 β 和 β' 任意地接近于1(速率接近 c), β'' 也决不会达到1,更不用说超过1了。所以借助于相继的洛仑兹变换不可能变得比光速更快。或者说,从观察者是静止的那个系统开始,不可能变换到另一个比光速更快运动的系统。从这种意义上讲,光速是“终极速率”。

很容易看出,除了式(7-17)所给出的那种形式的矩阵外,我们还能够找到一些明可夫斯基空间内的正交矩阵。例如,假设 $L_{44} = 1$, $L_{4i} = L_{i4} = 0$, 而 L 的其余九个元素构成一个在寻常三维空间内是正交的 3×3 矩阵 R 。这样定义的矩阵 L 在明可夫斯基空间内显然是正交的。但是变换并不涉及两个系统的相对运动;它的全部效应仅是一次空间坐标的转动。因此,所有空间转动都属于洛仑兹变换的某个子集。同样,式(7-14)所定义的并不是最一般的坐标变换,在这种变换

1) 同样可以用实数角度 ψ 以及两角之和的双曲线函数公式来推导。

下,物理方程的形式应该保持不变.明可夫斯基空间内坐标原点的偏移——空间平移加上时间零点的变化——也不应该影响物理定律的描述.洛仑兹变换在式(7-17)范围之外的推广的可能性也还没有穷尽.所以,在这里,把这些可能性系统地整理一下也许是适宜的.

这时,明可夫斯基空间内使光速保持不变的最一般的变换形式为

$$\mathbf{x}' = \mathbf{L}\mathbf{x} + \mathbf{a}, \quad (7-23)$$

式中 \mathbf{a} 是原点的一个任意位移矢量, \mathbf{L} 是一正交矩阵.式(7-23)所表示的变换称为彭加勒变换或非齐次洛仑兹变换.正交条件

$$\tilde{\mathbf{L}}\mathbf{L} = \mathbf{L}\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{1} \quad (7-24)$$

对应于四维空间内加于 \mathbf{L} 各元素的十个约束(四个对角条件和六个非对角条件),它使 \mathbf{L} 的独立量只剩下六个.另外四个独立元素就得要求于 \mathbf{a} ,因而彭加勒变换一般要求确定十个独立量.对于现在的目的来说,我们只需要论及齐次的洛仑兹变换:

$$\tilde{\mathbf{x}}' = \mathbf{L}\tilde{\mathbf{x}}, \quad (7-14)$$

它只涉及六个独立元素.当我们采用普通的空间正交变换时,正交条件要求 \mathbf{L} 行列式的平方等于1:

$$|\mathbf{L}|^2 = 1, \quad (7-25)$$

在满足式(7-25)的那些可能行列式中,只有使 $|\mathbf{L}| = 1$ 的那些矩阵才能够连续地参与恒等变换.正象三维情况中那样,这种形式的 \mathbf{L} 称为正常洛仑兹变换¹⁾.然而,包含所有空间坐标和时间坐标同时反演的变换也将有一个等于+1的行列

1) 从式(7-17)中的矩阵元可以看出,行列式 $|\mathbf{L}|$ 是实数——行列式展开式至多只能同时包含两个虚数矩阵元的乘积.因此,仅有的另一可能性是 $|\mathbf{L}| = -1$,这相当于包含坐标反演的非正常变换.

式。根据下面的论证不难看出， L_{44}^2 一般必定大于或等于 1。式 (7-24) 的 44 元素可表达成

$$L_{44}^2 + L_{4j}L_{4j} = 1. \quad (7-26)$$

这样，矩阵元 L_{4j} 把第四个虚坐标与那些实数空间坐标连结了起来。所以 L_{4j} (L_{j4} 也一样) 必定是纯虚数，从而和式 $L_{4j}L_{4j}$ 必定是负值。因此

$$L_{44}^2 \geq 1. \quad (7-27)$$

根据类似的论证， L_{44} 必定是实数。式 (7-27) 所显示的两种可能性中， $L_{44} \leq -1$ 包含了时间的反演，只有 $L_{44} \geq +1$ 才可能连续地参与恒等变换。 $L_{44} \geq +1$ 的洛仑兹变换称为正时的，如果 $L_{44} \leq -1$ ，变换将称为非正时的。在 $|L|$ 和 L_{44} 的符号的四种可能选择中，只有正时的正常洛仑兹变换才可能连续地从恒等变换来推导。这种变换称为限制洛仑兹变换¹⁾——只有它们能够包含正常转动，并能够在小的相对速度的极限情况下化为伽利略变换。显然，式 (7-17) 中那些矩阵元平方根前的符号，保证了它们是一个限制洛仑兹变换。正象莫里哀小说中那乐于学习的男主角一样，他一生都在谈论着散文，可他并不懂得散文，我们从本节一开始就在谈论限制洛仑兹变换，但我们并没有认识它。我们的讨论将继续限于限制洛仑兹变换；除非另作明显说明，否则前面的形容词是不言而喻的。

如果某个限制洛仑兹变换所描述的是具有平行轴并彼此相对作匀速运动(即没有任何空间转动)的两个系统之间的关系，就说它是一个纯洛仑兹变换，或用行话来说，它是一次

1) 能够证明(见习题 9)，限制洛仑兹变换的乘积也是限制的，其他三类变换的乘积并不会保持在它们原来的那一类内。因而只有限制洛仑兹变换才能够具有群的性质。

“推动”。显然，式(7-17)给出的变换矩阵是纯洛仑兹变换的矩阵。凭直觉就可以知道，任何一个限制洛仑兹变换都能分解成一个纯洛仑兹变换和一个无相对运动的（不论按哪一种次序的）空间转动。能够简要地说明建立部分变换的步骤。假设一个洛仑兹变换被表达为一个纯变换再加一个空间转动的乘积：

$$L = RP. \quad (7-28)$$

变换后空间内某点的坐标 x'_ν 与原来空间内坐标之间的关系为

$$x_\mu = L_{\nu\mu} x'_\nu.$$

则不带撇系内的观察者看来，带撇系的原点 ($x'_i = 0$) 的运动有多快呢？该原点在不带撇系内的坐标为

$$x_j = L_{4j} x'_4, x_4 = L_{44} x'_4.$$

因此，带撇系原点的相对速度矢量的分量为

$$\beta_j = \frac{x_j}{ct} = \frac{ix_j}{x_4} = \frac{iL_{4j}}{L_{44}}. \quad (7-29)$$

根据式(7-26)即可得到

$$L_{44}^2(1 - \beta_i\beta_i) = 1.$$

L_{44} 的实数性质直接表明，由式(7-29)确定的 β 值处于 0 和 1 之间，而用这样的 β 值时， L_{44} 之值必定为

$$L_{44} = (1 - \beta^2)^{1/2} \equiv \gamma. \quad (7-30)$$

现在来建立一个对应于相对速度矢量式(7-29)的纯洛仑兹变换 $P(\beta)$ 。逆变换的矩阵为 $P(-\beta)$ 。因而矩阵 R 可表达成乘积

$$R = LP(-\beta). \quad (7-31)$$

从 $P(-\beta)$ 的矩阵元和 L 的正交性可推论得 4×4 矩阵 R 具有空间转动的形式，这一推论的正式证明将留作习题，然而，应该清楚的是， R 只可能是一空间转动。由 $P(\beta)$ 定义的中问坐标系相对于最后一组坐标轴是静止的， R 的作用只能使

坐标旋转。注意,按照这种分解, L 的六个独立元素中,三个由相对速度矢量 β 的分量给出,另外三个则由用来确定 R 所代表的空间转动的那些参量(如三个欧拉角)给出。

相继应用两次纯洛伦兹变换当然相当于最初和最终坐标系之间的一次单独的洛伦兹变换。但是,除非相继两次变换的相对速度是平行的,否则,最后的等效变换不会是一个纯洛伦兹变换。前面所描述的分解过程能通过两个纯洛伦兹变换的乘积进行,从而明确地得到由两次相继的“推动”产生的坐标轴的转动。一般地讲,涉及的代数运算是令人望而生畏的,往往足以使我们失去把转动矩阵实际演算出来的信心。然而,有一种特殊情况,可作出一些可以容许的近似,使计算变得比较简单,而所得结果在近代物理的许多领域内都有着重要的应用。这里所说的就是称为托马斯进动的现象。

考虑三个坐标系:实验室系 O_1 、以速度 β 相对于 O_1 运动的坐标系 O_2 以及以速度 $\Delta\beta \equiv \beta'$ 相对于 O_2 运动的坐标系 O_3 。使 β 沿着 O_1 的 z 轴,而使 β' 位于 O_2 的 $y-z$ 平面内,即 β 、 β' 确定了 O_2 的 $y-z$ 平面,这样做并不会失去其普遍性。 β' 的那些分量将认为是无限小的,只需要保留它们的非零的最低次项。因此,在 O_2 和 O_3 之间的变换中, r' 能够代之以1。在这基础上, L 的矩阵,即 O_1 和 O_2 之间的纯洛伦兹变换将具有式(7-18)的形式,而从 O_2 到 O_3 的相应的变换矩阵为

$$L' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i\beta'_2 \\ 0 & 0 & 1 & i\beta'_3 \\ 0 & -i\beta'_2 & -i\beta'_3 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7-32)$$

这里, β'_2 和 β'_3 是 β' 的分量。在相同的近似程度上,积矩阵为

$$L'' = L'L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta\beta_2\gamma & i\beta_2\gamma \\ 0 & 0 & \gamma & i\beta\gamma \\ 0 & -i\beta_2' & -i\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}. \quad (7-33)$$

显然, L'' 不可能代表一个纯洛仑兹变换, 正如式 (7-17) 所示, 对于纯洛仑兹变换来讲, 矩阵元 L''_{ik} 必须是对称的. 根据式 (7-29), O_1 和 O_3 之间的有效相对速度的非零分量为¹⁾

$$\beta_2'' = \frac{\beta_2'}{\gamma}, \quad \beta_3'' = \beta. \quad (7-34)$$

由于 $(\beta'')^2 = (\beta_2'')^2 + (\beta_3'')^2 \simeq \beta^2$, 从而 $\gamma'' \simeq \gamma$, 因此相对速度为 $-\beta''$ 的纯洛仑兹变换可近似地表达为

$$P(-\beta'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\beta_2'}{\beta\gamma}(\gamma-1) & -i\beta_2' \\ 0 & \frac{\beta_2'}{\beta\gamma}(\gamma-1) & \gamma & -i\beta\gamma \\ 0 & i\beta_2' & i\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}. \quad (7-35)$$

最后, 经过一些代数学的简化并略去 β' 的较高次项, 则从 O_1 系看来, 表征 O_3 坐标轴转动的转动矩阵将是

$$R = L''P(-\beta'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\beta_2'}{\beta\gamma}(\gamma-1) & 0 \\ 0 & \frac{-\beta_2'}{\beta\gamma}(\gamma-1) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7-36)$$

与式 (4-105) 比较表明, R 意味着 O_3 相对于 O_1 绕 x 轴转过一无限小角度

1) 把 β' 作为微小速度来处理, 使 β_2' 与 β 相比小到可以略去.

$$\Delta Q_1 = \frac{\beta'_2}{\beta\gamma} (\gamma - 1) = \beta'_2 \beta \frac{(\gamma - 1)}{\beta^2}. \quad (7-37)$$

相继应用两次平行轴洛仑兹变换产生的空间转动所显示出来的表观佯谬，同经常论及的、明显违背常识的、譬如“孪生佯谬”相比毫不逊色。但是，这一特殊的佯谬有着重要的应用，特别是在原子物理学中，因而得到了充分的实验证明。考虑一个在实验室系中运动的质点，它的速度 \mathbf{v} 并不是常数。由于质点静止在其中的那个系统相对于实验室系是被加速的，因而两个系统之间不应该由洛仑兹变换来连结。但是，我们能够用一种常用的策略绕开这一困难（有些人把它提高到相对论的附加假设的地位）。我们假想有无限个相对于实验室系匀速运动着的惯性系，其中必定有一个系统的速度与质点的速度瞬时相符，因此，在这个能够通过洛仑兹变换与实验室系相联系的惯性系内，质点是瞬时静止的。这里认为，这一洛仑兹变换还将描述该质点的性质，以及从实验室系看起来确实处于静止的那个系统的性质。

今假设 O_1 是实验室系，而 O_2 和 O_3 是两个瞬时静止的系统，质点运动的时间间隔为 Δt 。根据式 (7-34)，实验室内观察者将看到这段时间内质点速度的变化为 $\Delta \mathbf{v}$ ，该速度只有一个 y 分量 $\beta'_2 c$ 。由于最初所选的 z 轴沿着 \mathbf{v} 的方向，因此在这段时间内无限小转动的矢量能表达成

$$\Delta \boldsymbol{\Omega} = -(\gamma - 1) \frac{\mathbf{v} \times \Delta \mathbf{v}}{v^2}. \quad (7-38)$$

因此，如果质点有某个附属于它的特定方向（例如一个自旋矢量），那么，从实验室系看来，这一方向的进动角速度为

$$\boldsymbol{\omega} = -(\gamma - 1) \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{v^2}, \quad (7-39)$$

式中的 \mathbf{a} 是从 O_1 看到的质点的加速度。当 v 小到足以使 γ

能被近似时,我们经常会遇到式(7-39)所取的形式为

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2c^2} (\mathbf{a} \times \mathbf{v}). \quad (7-39')$$

不论哪一种形式的 $\boldsymbol{\omega}$ 都称为托马斯进动频率。

7-3 四维实空间内的洛伦兹变换¹⁾

虽然洛伦兹变换¹⁾保持了使光速不变的性质,它也能够看成是四维实空间内的线性变换.在这种空间内,第四个坐标通常用 $x_0 = ct$ 表示.为使光线在所有系统内的各个方向上都能以速率 c 传输,矢量的平方应该依然由式(7-13)给出.因此,该实空间不可能是欧氏空间,但必定是一黎曼空间,它的对角度规张量 \mathbf{G} 的形式为

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (7-40)$$

这里各坐标所附下标遍及1, 2, 3, 0. 从式(6-26)可以想到,在这一空间内的矢量的平方决定于

$$\bar{\mathbf{x}}\mathbf{G}\mathbf{x} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2, \quad (7-41)$$

这与式(7-13)完全相同²⁾. 一个齐次洛伦兹变换在这一实空间内是一个线性变换,它使矢量的量值保持不变.由于变换的元素是实数,因而不同于 \mathbf{L} ,我们将用 \mathbf{A} 表示这种实洛伦兹变换.矢量在变换前、后具有相同量值的条件是

$$\bar{\mathbf{x}}'\mathbf{G}\mathbf{x}' = \bar{\mathbf{x}}\mathbf{G}\mathbf{x}. \quad (7-42)$$

但是我们有

- 1) 本书其余部分所需要的、洛伦兹变换的几乎所有运动学特性都已在前节中列出,尽管这一节和下一节对于洛伦兹变换在近代物理各部分中的应用是重要的,但它们可以被略去而不致影响相对论粒子的经典力学讨论.
- 2) 由于平方可以是正值也可以是负值,所以可以说,式(7-40)那样的度规张量定义的是一个不定度规.

$$\tilde{x}'Gx' = \tilde{\Lambda}_x G \Lambda_x = \tilde{x} \tilde{\Lambda} G \Lambda x.$$

因此,为保持式(7-42)有效, Λ 必须满足

$$\tilde{\Lambda} G \Lambda = G. \quad (7-43)$$

式(7-43)可以被理解为:同余变换 Λ 使度规张量保持不变.但是,更有意义的是把式(7-43)看作类似于欧氏空间内(那里的度规张量为1)式(7-24)那样的正交矩阵条件.的确,式(7-43)可以看作是度规张量为 G 的实黎曼空间内加于 Λ 的正交条件.

在明可夫斯基空间内和四维实空间内表示的两种公式之间不难相互转换,因为

$$x_4 = ix_0. \quad (7-44)$$

由此可得

$$\Lambda_{j0} = iL_{j4}, \quad \Lambda_{0k} = -iL_{4k}, \quad (7-45)$$

而其他元素都保持不变.因此,与式(7-18)相对应,相对速度沿着 z 轴的纯洛伦兹变换将具有实对称矩阵

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\beta\gamma \\ 0 & 0 & -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}. \quad (7-46)$$

前节中的所有运动学公式都同样能够毫无困难地重新改写.应该记得, x 和 y 所代表的、两个矢量的标积现在必须写成[见式(6-25)]

$$\tilde{x}Gy = \tilde{x}Gx = x_\mu g_{\mu\nu} y_\nu.$$

[正交条件式(7-43)保证这一标积在 Λ 变换下不变.]

改变一下符号,就可能避免到处出现度规张量,并使那些公式更象是笛卡儿空间内的公式,这要求简要地说一下黎曼几何学.假设我们用坐标元 dx_μ 组成一个矢量,并考虑它在

$$y_\nu = f_\nu(x_1, x_2, \dots) \quad (7-47)$$

这类一般坐标变换下的特点.这时, dx_μ 的变换性质是

$$dy_\nu = \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu} dx_\mu = \frac{\partial y_\nu}{\partial x_\mu} dx_\mu. \quad (7-48)$$

这里的微商是 (x) 和 (y) 之间的雅可比变换矩阵元。对于线性变换 \mathbf{A} ，它们将简单地等于矩阵元 $A_{\nu\mu}$ 。另一方面，梯度矢量各元素将按照下式变换：

$$\frac{\partial}{\partial y_\nu} = \frac{\partial x_\mu}{\partial y_\nu} \frac{\partial}{\partial x_\mu}. \quad (7-49)$$

式(7-49)中各系数是从 y 到 x 的逆变换的雅可比矩阵元。按式(7-48)变换的矢量称为逆变矢量，并且按照约定附加一个上标：

$$D'^\nu = \frac{\partial y_\nu}{\partial x_\mu} D^\mu, \quad (7-48')$$

而协变矢量则按式(7-49)变换，并用下标表示：

$$F'_\nu = \frac{\partial x_\mu}{\partial y_\nu} F_\mu. \quad (7-49')$$

如果从 (x) 变换到 (y) ，然后再回到 (x) ，其最终结果当然是一个恒等变换。因此，某个变换及其逆变换的雅可比矩阵之积必定是一个单位矩阵。由此可得，一个逆变矢量和一个协变矢量的内积(标积)在变换下是不变的，因为

$$D'^\nu F'_\nu = \frac{\partial y_\nu}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_\rho}{\partial y_\nu} D^\mu F_\rho = \delta_{\mu\rho} D^\mu F_\rho = D^\mu F_\mu.$$

在笛卡儿空间内，正交线性变换下的协变矢量和逆变矢量之间并没有什么差别。例如，如果矩阵 \mathbf{A} 描述了这种变换，那么，逆变矢量的变换应是

$$D'^\nu = A_{\nu\mu} D^\mu,$$

而协变矢量的变换则是

$$F'_\nu = (\mathbf{A}^{-1})_{\mu\nu} F_\mu = (\tilde{\mathbf{A}})_{\mu\nu} F_\mu = A_{\nu\mu} F_\mu.$$

所以到目前为止，我们没有什么必要去区别这两种变换。

协变性和逆变性的性质能够容易地被推广到更高级数的

张量。例如，二级协变张量 G 的变换为

$$G'_{\mu\nu} = G_{\rho\lambda} \frac{\partial x_\rho}{\partial y_\mu} \frac{\partial x_\lambda}{\partial y_\nu}, \quad (7-50)$$

同样能证明象二级协变张量与两个逆变矢量的缩并， $G_{\mu\nu} D^\mu F^\nu$ 在变换时的形式也是不变的。在黎曼空间内，路径长度元 [见式 (6-24)]

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (7-51)$$

在我们所关心的变换下是不变的，由此可知，度规张量是一个协变张量¹⁾。根据类似的论证，一个二级协变张量和一个逆变矢量的缩并，将象一个协变矢量那样来变换：

$$\begin{aligned} F'_\mu &= G'_{\mu\nu} D'^\nu = G_{\rho\lambda} \frac{\partial x_\rho}{\partial y_\mu} \frac{\partial x_\lambda}{\partial y_\nu} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_\tau} D^\tau \\ &= G_{\rho\lambda} \frac{\partial x_\rho}{\partial y_\mu} \delta_{\lambda\tau} D^\tau \\ &= G_{\rho\lambda} D^\lambda \frac{\partial x_\rho}{\partial y_\mu} = F_\nu \frac{\partial x_\rho}{\partial y_\mu}. \end{aligned}$$

最后，在我们的四维实空间内，两个逆变矢量 A^μ, B^ν 的标积

$$g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu$$

能够重新表达成

$$A_\nu B^\nu,$$

这里的 A_ν 是协变矢量：

$$A_\nu = g_{\mu\nu} A^\mu. \quad (7-52)$$

采用这种方法时，四维实空间内位置矢量量值的平方可表达成

$$x_\mu x^\mu$$

而不用特为引进度规张量。只是必须记住，标积中的一个因

1) 对洛伦兹变换来说，这一点也能直接从形式为

$$G = \tilde{A}^{-1} G A^{-1}$$

的正交条件式 (7-43) 看出，并称这种变换为 G 的同余变换。

子由与度规张量的缩并所组成的一个协变矢量所代替¹⁾,

应用实空间时的一种变化形式是引进度规张量

$$G' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}. \quad (7-53)$$

于是位置矢量量值的平方为

$$xG'x \equiv x_{\mu}G'_{\mu\nu}x_{\nu} = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + c^2t^2. \quad (7-41')$$

显然,保持这一量值不变的某个变换也将使光速保持不变,而相应的洛伦兹变换必定恒等于前面的 Λ . 前面的所有公式照旧不变,只是标积值必须改号. (7-53) 形式的度规张量的支持者们指出,它将消去往后在质点动力学公式中出现的某些负号. 另一方面,这种度规代表了与普通三维空间内所考虑的矢量量值的某种突变. 有时说度规张量 G' 具有 (---+) 的“标记”,而 G , 即式(7-40)的标记则为 (+++-). 我们还可以根据张量的迹来识别它们, G 的迹为 +2, 而 G' 的迹为 -2.

米斯纳 (Misner)、索恩 (Thorne) 和惠勒 (Wheeler) 在论述重力的长篇专著²⁾中要求废弃明可夫斯基复空间: “以后与狭义相对论打交道的人应该摒弃 ‘ $x^4 = ict$ ’”. 据说,应用了笛卡儿空间,将掩盖度规的基本不定性质——矢量量值的平方可以是正值、零或负值. 其次,笛卡儿复空间的构思也只适用于狭义相对论;在广义相对论中,空间是弯曲的,这就不可避免地要使用非笛卡儿度规张量. 还要指出,在量子力学中,波函数或态矢量是复数,使用虚坐标将使复共轭的运算更

1) 如果讨论的是两个协变矢量的标积,则通过与度规张量的逆张量(能够证明它是逆变的)的缩并,就能使指数“上升”. 这里所用度规张量(它们是对角的并有元素±1)是它们自己的逆张量,协变的和逆变的度规张量之间也并无差别.

2) C. W. Misner, K. S. Thorne, J.A. Wheeler, Gravitation. 1973, p.51.

为复杂。这些论据看来很有说服力，具有不定度规（它的迹通常等于-2）的四维实空间，在量子力学和粒子物理学中应用得非常广泛。

要反对如此有权威的论点是困难的。不过，我们将在这里抵制这种把明可夫斯基空间平白取消的做法。不论是广义相对论还是量子力学都不是本书所讨论的；我们没有必要屈从它们的特殊要求。线元的不定特性在复空间内的显、隐程度也与在实空间内的一样；我们仍将坚持用复空间讨论问题。另一方面，明可夫斯基复空间内的公式通常特别简单和紧凑，也不受度规张量或（这里的）协变量与逆变量之间的人为区别的拖累。它还允许我们把普通三维空间内得到的经验加以自然延伸。由于这些理由，从这里开始，我们将几乎无一例外地应用明可夫斯基空间的形式。大多数方程不论在哪一空间内看起来都相同；在任何情况下，从一个空间到另一个空间的换算都是一个简单的问题。我们将仅在极个别的场合（象下一节那样的场合）中才使用实空间，在这种场合中这种做法特别方便，因而碰到的也几乎总是迹为+2的度规。

7-4 洛伦兹变换的进一步阐述

应用实数时间坐标能使求导更为简单，一个实例是证明洛伦兹变换和某类 2×2 复矩阵之间的同态性。根据节 4-5，使我们想起正常空间转动和行列式为 +1 的么正复矩阵（“么模的”）之间存在着的同态性。就洛伦兹变换而言，同样能够论证类似的同态性，所用方法与空间转动情况下所采用的方法几乎完全相同。

考虑一个 2×2 矩阵 S ，它定义为

$$S \equiv \begin{pmatrix} z + ct & x - iy \\ x + iy & -z + ct \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}. \quad (7-54)$$

这里, \mathbf{S} 作为式 (4-59) 所给出的 \mathbf{P} 的推广是一个厄密矩阵. 事实上, 它是 x_μ 可能是实数的、最一般厄密 2×2 矩阵的形式. 在节 4-5 中我们已看到, 泡利自旋矩阵式 (4-74) 与单位矩阵一起组成了 2×2 厄密矩阵的完整基集. 如把单位矩阵记作 σ_0 , 就能用这一基本矩阵组来表示 \mathbf{S} ; 从而 \mathbf{S} 能表达成

$$\mathbf{S} = x_\mu \sigma_\mu, \quad (7-55)$$

这里的求和从 0 一直到 3. 不难求得 \mathbf{S} 的行列式为

$$|\mathbf{S}| = -x^2 - y^2 - z^2 + c^2 t^2, \quad (7-56)$$

因而正比于四维空间内位置矢量的平方. 令 \mathbf{Q} 是一个一般的复 2×2 矩阵, 与节 4-5 中 [式 (4-49)] 给出的相同. 仅有的限制是 \mathbf{Q} 的行列式等于 +1, 即 \mathbf{Q} 是么模的. 由于 \mathbf{Q} 的元素一般是复数, 所以行列式条件提供了两个约束方程, 使 \mathbf{Q} 的独立元素数减少到六个, 而这正是齐次洛仑兹变换中所需要的数目. 让我们借助 \mathbf{Q} 来变换 \mathbf{S} , 变换方式为 [见式 (4-60)]

$$\mathbf{S}' = \mathbf{Q}\mathbf{S}\mathbf{Q}^\dagger. \quad (7-57)$$

由于 \mathbf{Q} 不是么正的, 所以这不是一个相似变换, 但要证明它也保持有 \mathbf{S} 的厄密特性是简单的. 因此, 变换后的矩阵 \mathbf{S}' 必定具有类似于式 (7-55) 的形式: $\mathbf{S}' = x'_\nu \sigma_\nu$, 这里的 x'_ν 必定是实数. 其次, 由于 \mathbf{Q} 是么模的, 所以 \mathbf{S}' 的行列式必须与 \mathbf{S} 的行列式相同. 所以能够说, \mathbf{Q} 产生了从坐标 x_μ 到坐标 x'_μ 的某个变换, 所取方式与保持光速不变的方式相同, 也就是说, \mathbf{Q} 至少对于洛仑兹变换的某个子集是同态的.

有可能证明, 等效于 \mathbf{Q} 的洛仑兹变换必定是正常而又正时的, 正式证明较复杂¹⁾. 然而, 还是可以简要地提一下

1) 可参阅 A. O. Barut, *Electrodynamics and Classical Theory of Fields*, p. 23 或 A. J. MacFarlane, *Jour. Math. Phys.*, **3**, 1116 (1962).

个可取的论证。按照节 4-5 中所用的步骤，不难证明，如果 L_1 和 L_2 是两个对应于 Q_1 和 Q_2 的洛伦兹变换，那么，对应于 $Q_3 = Q_1 Q_2$ 的 $L_1 L_2$ 也是么模的。因此，与 Q 矩阵同态的洛伦兹变换的子集应保证两个洛伦兹变换之积依然属于同一子集——这是最重要的“群的性质”之一。已知，只有两类洛伦兹变换具有这一性质：一般的齐次洛伦兹变换以及限制洛伦兹变换。为了在这两种可能性中作出选择，可能已经注意到，强行求解式 (7-57) 中的矩阵积时证明了 L_{44} 是用 Q 的那些元素[式 (4-49)]给出的：

$$L_{44} = \Lambda_{44} = \frac{1}{2} (\alpha\alpha^* + \beta\beta^* + \gamma\gamma^* + \delta\delta^*),$$

它是正定的。对于非正时变换， L_{44} 取负值，事实上 ≤ -1 。在这两类中间， Q 矩阵只可能与限制洛伦兹变换同态，正象么模矩阵只可能与正常空间转动同态一样。

其次，象在三维情况中那样，由于 $+Q$ 和 $-Q$ 都导致相同的洛伦兹变换，从而 L 和 Q 之间的相关性是双值的。因此，把这种关系称为同态而不是同构。用 Q 的元素表示的元素 $L_{\mu\nu}$ 的实际表达式，可以通过强行求解式 (7-57) 来得到，或者更理想的是借助于前面列举的巴鲁脱 (Barut) 和麦克法莱恩 (MacFarlane) 所著参考书中所用的方法来得到。然而，可以就纯洛伦兹变换对 Q 作出某种简单的描述，它类似于正常空间转动的式 (4-98)。直接求解式 (7-57) 就能证明么模矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} e^{-\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{\psi/2} \end{pmatrix}, \quad (7-58)$$

这里的 ψ 是实数，并对应于洛伦兹变换

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1, \\ x'_2 &= x_2, \\ x'_3 &= x_3 \cosh \psi - x_0 \sinh \psi, \end{aligned}$$

$$x'_0 = -x_3 \sinh \psi + x_0 \cosh \psi. \quad (7-59)$$

式(7-59)被认为是沿 x_3 轴的相对运动的纯洛伦兹变换式(7-46), 式中的 ψ 则由式(7-20)确定. (7-58)形式的矩阵也能表达成

$$Q = I \cosh \frac{\psi}{2} - \sigma_3 \sinh \frac{\psi}{2}, \quad (7-60)$$

这类似于绕 z 轴的空间转动式(4-76). 我们能够容易地把这一结果推广到任意纯洛伦兹变换. 正象正常转动可以用某个转轴方向和某个有限的转动角度作参量一样, 一个纯洛伦兹变换也可以用相对运动方向上的单位矢量 κ 和式(7-20)确定的某个“角度” ψ 来描述. 矢量形式的洛伦兹变换式(7-11)和(7-12)能够用这些参量重新表达成

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + (\kappa \cdot \mathbf{r})\kappa(\cosh \psi - 1) - \kappa x_0 \sinh \psi, \quad (7-61)$$

$$x'_0 = -(\kappa \cdot \mathbf{r}) \sinh \psi + x_0 \cosh \psi. \quad (7-62)$$

式(7-61)非常类似于有限转动公式的形式[式(4-92)]. 把式(7-60)明显地推广到给定 κ 方向上的相对运动时, 其形式为

$$Q(\kappa, \psi) = I \cosh \frac{\psi}{2} - \kappa \cdot \sigma \sinh \frac{\psi}{2}, \quad (7-63)$$

此式可与空间转动的式(4-98)相类比¹⁾. 注意, 式(7-63)的形式证明了纯洛伦兹变换的 Q 矩阵是厄密的, 而对于正常的转动, 它们是么正的. 当具有纯转动时, 式(7-63)意味着纯洛伦兹变换的 Q 矩阵的指数表示式:

$$Q(\kappa, \psi) = \exp[-\kappa \cdot \sigma(\psi/2)]. \quad (7-64)$$

由于限制洛伦兹变换是一个推动和一个空间转动之积, 所以我们可以把式(7-64)与式(4-99)组合起来以求得 Q 矩阵的相应形式:

1) 由于不同于正常转动, 因此不可能引进任何类似于“欧拉角”这样的量, 两个非共线纯洛伦兹变换之积不是一个纯洛伦兹变换.

$$Q(\mathbf{n}\phi; \kappa, \phi) = \exp[i\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\phi/2)] \exp[-\kappa \cdot \boldsymbol{\sigma}(\phi/2)]. \quad (7-65)$$

应该记得,指数代表的当然是级数表示式.

当我们想把两个纯洛仑兹变换之积分解成一个空间转动和一个纯洛仑兹变换时,洛仑兹变换的么模表示式的优点变得很明显.正如已经指出的那样,要我们通过直截了当地相乘来解出有效速度和转动矢量是颇为棘手的代数运算.采用 Q 矩阵形式时,尽管依然需要可观的运算,但要简单得多(见习题 13).

无限小变换在空间转动中起着如此巨大的作用,自然会想到去寻求与它们相应的洛仑兹变换.我们在推导托马斯进动时,早已利用了无限小洛仑兹变换[见式(7-32)].虽然不象在空间转动中那样直接有用,但无限小洛仑兹变换在某些应用中仍是有价值的(正如我们在节 9-7 中将看到的那样),它们提供了洛仑兹变换在数学上群的结构识别标记.用 κ 和 ϕ 表示时,实纯洛仑兹变换将取形式[直接从式(7-61)和式(7-62)推导,或经由式(7-17)推导]

$$\begin{aligned} \Lambda_{ij} &= \delta_{ij} + \kappa_i \kappa_j (\cosh \phi - 1), \\ \Lambda_{i0} &= \Lambda_{0i} = -\kappa_i \sinh \phi, \\ \Lambda_{00} &= \cosh \phi. \end{aligned} \quad (7-66)$$

一个无限小纯洛仑兹变换由两个系统之间的无限小相对速度来表征,或者也可以由一个无限小“角度” $\Delta\phi$ 来表征.根据式(7-66),一个无限小纯洛仑兹变换能够表达成

$$\Lambda = 1 + \delta, \quad (7-67)$$

这里,

$$\delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\kappa_1 \Delta\phi \\ 0 & 0 & 0 & -\kappa_2 \Delta\phi \\ 0 & 0 & 0 & -\kappa_3 \Delta\phi \\ -\kappa_1 \Delta\phi & -\kappa_2 \Delta\phi & -\kappa_3 \Delta\phi & 0 \end{pmatrix}.$$

类似于空间转动的式(4-117),我们能够引进无限小纯洛仑兹变换的生成矩阵的概念:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{K}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{K}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7-68)$$

用 \mathbf{K}_i 表示时,无限小矩阵 δ 能够非常简单地表达成

$$\delta = -\kappa_i \mathbf{K}_i \Delta\phi,$$

同时,在无限小纯洛仑兹变换下,四维实空间内一个矢量(写成矩阵 x) 的变化,完全决定于

$$\Delta x = -\kappa_i \mathbf{K}_i x \Delta\phi. \quad (7-69)$$

事实上,式(7-69)构成了生成有限纯洛仑兹变换的一个微分方程.

由于空间转动是洛仑兹变换的某个子群,因而在 \mathbf{A} 形式中应该对它们附加上一些无限小空间转动的生成元,它们与式(4-117)中所定义的 \mathbf{M}_i 相同,只是附加上去的第四行和列都是零.用这种形式时, \mathbf{M}_i 的对易子或李括号保持不变,即

$$[\mathbf{M}_i, \mathbf{M}_j] = \epsilon_{ijk} \mathbf{M}_k. \quad (4-118)$$

直接相乘证明, \mathbf{K}_i 满足对易关系式

$$[\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_j] = -\epsilon_{ijk} \mathbf{M}_k \quad (7-70)$$

以及

$$[\mathbf{K}_i, \mathbf{M}_j] = \epsilon_{ijk} \mathbf{K}_k.$$

式(4-118)和式(7-70)一起确定了限制洛仑兹群的李代数,并成为鉴别该群的标志.我们将意外地发现,它们看来与开普勒问题中的非相对论性无界运动相关(见节9-7).

7-5 协变四维表述

在求得了替代不恰当的伽利略变换的洛伦兹变换后，我们能够进一步要求力学定律，更一般地讲，要求一切物理学定律在所有匀速运动系统内都有相同的形式。如果使用前节中引进的四维世界来表达这些物理定律，那么，要检查它们在洛伦兹变换下的形式的不变性要省事得多。确实，正如将要指出的那样，甚至只要逐项检验就能证实一个给定方程的洛伦兹不变性。

在洛伦兹变换下形式的不变性并不是物理学定律所要求的唯一的不变性。显然，任何给定关系式的物理含义不可能受到空间坐标轴所选的特定取向的影响；在刚性转动，即正常的空间正交变换下，物理学定律的形式也必须不变。研究一下这种更为熟悉的不变性要求，就能搞清楚建立洛伦兹变换下的不变性所应遵循的步骤。

一般讲，我们的理论在空间转动下的不变性是没有必要担心的。在建立任何方程时，总是要求方程的各项全是标量，或全是矢量；一般地讲，要求所有各项必须全是同级张量，这一要求自动地保证了转动情况下所需要的不变性。因而标量关系式的一般形式将是

$$a = b,$$

由于方程的两边(都是标量)在空间转动下都不变，因而这一关系式显然在所有坐标系内都能成立。矢量关系式

$$\mathbf{F} = \mathbf{G}$$

实际上代表了矢量分量之间的三个独立的关系式：

$$F_i = G_i.$$

当然，这些分量的数值在空间转动下不是不变的，而是变换到新的数值 F'_i, G'_i ，它们是变换后矢量 \mathbf{F}', \mathbf{G}' 的分量。但因

为分量关系式的两边的变换方式相同，所以变换后的分量之间依然保持着相同的关系式

$$F'_i = G'_i.$$

于是，两个矢量之间的关系不会受到空间转动的干扰，在新坐标系内依然有

$$\mathbf{F}' = \mathbf{G}'.$$

注意，关系式形式的不变性完全是由于关系式两边都是作为矢量变换的结果。我们把方程的这些项说成是协变的¹⁾。同样，两个二级张量之间的等式

$$\mathbf{C} = \mathbf{D}$$

必然意味着两个变换后张量之间的相同等式

$$\mathbf{C}' = \mathbf{D}'.$$

这是因为两个张量在空间转动下是协变地变换的。另一方面，单单包含某个矢量的一个分量，或者说是某个张量的一个分量的方程，在三维正交变换下，其形式显然不可能保持不变。空间坐标系在的转动下物理学定律的不变性要求在三维正交变换下方程各项具有协变性。

现在，限制洛伦兹变换已被认作明可夫斯基空间或世界空间内的正交变换。我们早已在这种四维空间内处理过标量和矢量。我们同样能够在这一空间内建立起其他级的张量，它们的变换性质是三维变换的明显推广。这些不同级的张量称为世界张量，它起始于世界标量、世界矢量(或四维矢量)等等。因此，一旦被表达成协变四维形式，即所有各项都是同级世界张量，那么，在洛伦兹变换下的任何物理学定律形式的不变性将立即变得显而易见。不符合等效原则要求的定律不可

1) 这里所用的，“协变的”这一术语与节 7-3 中所用的“协变变换”的概念毫不相干。遗憾的是，我们在此又有了另一个实例，说明数学家和物理学家把相同的术语用于两个完全不相关的概念。这些习惯用法已牢固确立，现在要改变已不可能。

能表达成协变的形式。所以物理学定律中各项的四维变换性质就成了检验该定律是否适合于相对论的试金石。

四维矢量的一个最简单的例子是明可夫斯基空间内某“点”的位置矢量，其分量为 x_1, x_2, x_3 和 x_4 。由于一个世界点的四个坐标说明了寻常空间内某事发生的地点以及时间，因此，把四维空间内的一点说成是某一事件也许更形象化。虽然我们将经常使用三维术语来论述世界空间，但还是应该记住两个空间之间在物理意义上的重要差别。

当一个质点在寻常空间内运动时，它在四维空间内的相应点将描绘出一条称为世界线的路径。四维矢量 dx_μ 代表四维位置矢量在沿世界线作微分运动时的变化。能够从 dx_μ 的自乘标积来构成一个世界标量（因而是一个洛仑兹不变量），并记为 $d\tau$ ，它决定于方程

$$(d\tau)^2 = -\frac{1}{c^2} dx_\mu dx_\mu. \quad (7-71)$$

如果我们在质点处于瞬时静止的洛仑兹系统内来求解式 (7-71)，就可以明白 $d\tau$ 的意义。在这种系统内，变换后矢量 dx'_μ 的分量为 $(0, 0, 0, icdt')$ ，而不变量 $d\tau$ 则决定于

$$(d\tau)^2 = -\frac{1}{c^2} dx'_\mu dx'_\mu = (dt')^2.$$

因此， $d\tau$ 是在与质点一起运动的时钟上测得的时间间隔¹⁾，因而称作质点的原时或世界时的时间间隔。

直接把定义方程 (7-71) 展开，即能导出 $d\tau$ 与给定洛仑兹系统内测得的时间间隔的关系

$$(d\tau)^2 = -\frac{1}{c^2} [(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - c^2(dt)^2],$$

1) 按照定义， $d\tau$ 取作式 (7-71) 给出的表达式的正值平方根。如用迹为 -2 的度规式 (7-53)，平方根内的负号已被消去。

或

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right]},$$

此式等同于关系式

$$\frac{d\tau}{\sqrt{1 - \beta^2}} = dt. \quad (7-72)$$

式(7-72)中使用 β 这一符号似乎会引起混淆。到目前为止， β 仅被看作是由洛伦兹变换相关联的两个惯性系统之间的相对速度(以 c 为单位)。在这里，它被用来表示惯性系统(实验室系)内观测到的质点速度。实际上，正如我们在提到托马斯进动时曾经指出过的那样，这种用法与我们通过相对于质点处于瞬时静止的洛伦兹系统来考虑的问题是一致的。 β 既是观测者的系统和瞬时静止系统之间的相对速度，又是被观测到的质点的速度。式(7-72)表明，在静止系统内测得的时间间隔总是长于在质点不是静止的某个系统内观测到的相应时间间隔。这是现今有名的“时间膨胀”的一个例子，它已经得到了充分的实验证实，其中最著名的实验是对飞行中衰变的不稳定粒子的寿命的观测¹⁾。

正如已经提到的那样，四维矢量量值的平方不一定是正定的。量值的平方大于或等于零的四维矢量称为类空矢量；当量值的平方为负值时，就称它们是类时矢量。由于是矢量的自乘标积(它们是世界标量)造成了这些特性，这样的命名在洛伦兹变换下显然是不变的。命名所依据的事实是一个空间矢量的平方始终是正定的，而一个类空四维矢量总是能够变换得使它的第四个分量等于零，正如我们将要看到的那样。另一方面，一个类时四维矢量必定总有一个第四分量，但经

1) 参阅 R. D. Sard, *Relativistic Mechanics*, 1970, pp. 96—100 中的讨论。

变换可以使它的前三个分量等于零。作为这些概念的一个例子,可以看一下两个世界点之间的差矢量既可能是类空的,也可能是类时的。令 X_μ 是这个差矢量,定义为

$$X_\mu = x_{1\mu} - x_{2\mu},$$

下标 1 和 2 表示两个事件。 X_μ 的量值为

$$X_\mu X_\mu = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2 - c^2(t_1 - t_2)^2.$$

因此,如果两个世界点的位置关系保证

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2 \geq c^2(t_1 - t_2)^2,$$

则 X_μ 是类空的。如果

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2 < c^2(t_1 - t_2)^2,$$

则 X_μ 是类时的。类时差矢量的条件相当于:有可能用一个光讯号来跨接两个事件之间的距离,但两个点若被一类空差矢量隔离,就不可能用以速率 c 传播的任何波动来连接这两个点。

空间坐标轴总是能够被设置得使空间差矢量 $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ 正好沿着 z 轴,并使 $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ 等于 $z_1 - z_2$ 。在速度 v 平行于 z 轴的洛伦兹变换下, X_μ 的第四个分量将按照式(7-5)变换:

$$c(t'_1 - t'_2) = \frac{c(t_1 - t_2) - (v/c)(z_1 - z_2)}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

如果 X_μ 是类空的,而且指定的两个事件保证 $t_2 > t_1$, 则

$$c(t_1 - t_2) < z_1 - z_2,$$

因此,如前面所说的那样,有可能找到一个速度 $v < c$, 使得 $ic(t'_1 - t'_2) \equiv X'_4$ 等于零。实际上, X'_4 等于零意味着:如果两个事件之间的距离是类空的,则总是能够找到一个洛伦兹系统,使其中的两个事件是同时的,另一方面,如果两个事件被类时分隔,就不可能找到一个洛伦兹变换来使两个事件是同时的,更不必说是改变这两个事件的时间顺序了。因此,“之前”和“之后”两个概念在洛伦兹变换下是不变的,而且因果性

也保持不变。类空分隔的事件的顺序能够颠倒而又不会破坏事件的因果关系,因为根据定义,一个事件无法去影响另一事件。例如,我们现在在地球上能够作出的事情中没有一件会影响到下一个十年内在 10 光年远处一个恒星周围某个行星上所发生的事情。

不难找到更多的四维矢量的例子。例如,四维速度 u_ν 定义为质点位置矢量对于它的原时的变化率:

$$u_\nu = \frac{dx_\nu}{d\tau}, \quad (7-73)$$

它的空间和时间分量为

$$u_i = \frac{v_i}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{和} \quad u_4 = \frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (7-74)$$

由于累和 $u_\nu u_\nu$ 为

$$u_\nu u_\nu = \frac{v^2}{1-\beta^2} - \frac{c^2}{1-\beta^2} = -c^2, \quad (7-75)$$

所以,世界速度的量值是一常数,而且也是类时的。

能够证明,电流密度 \mathbf{j} 和 $ic\rho$ (ρ 是电荷密度)也构成一个四维矢量 j_μ ¹⁾。电荷、电流的连续性方程

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

能以明可夫斯基空间的术语表达成

$$\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0. \quad (7-76)$$

已经看到[见第 343 页],根据 L 的正交条件有

$$\frac{\partial}{\partial x'_\nu} = \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\nu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} = L'_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} = L_{\nu\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad (7-77)$$

1) j_μ 就是四维矢量 $\rho_0 u_\mu$, 这里的 ρ_0 是电荷处于静止状态的那个系统内的电荷密度,即“原电荷密度”。参阅 Panofsky 和 Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, 或 Jackson, *Classical Electrodynamics*.

所以，四维梯度算符在明可夫斯基空间内将作为一个四维矢量来变换¹⁾。因此，式(7-76)的左边是一个四维矢量的四维散度，即是一个世界标量，因而在洛伦兹变换下是不变的。这个例子可以用来说明：以明可夫斯基空间的术语来重新描述物理学定律就可以明确地看出它的洛伦兹协变性。

另一个例证涉及电磁的矢势和标势，它们一起构成了一个四维矢量 $A_\mu \rightarrow (\mathbf{A}, i\phi)$ 。若这些势满足洛伦兹规范条件

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \quad (7-78)$$

那么，它们将分别满足波方程

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \\ \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -4\pi\rho. \end{aligned} \quad (7-79)$$

[见前面所引的佩诺夫斯基 (Panofsky) 和菲利普斯 (Phillips) 或杰克逊 (Jackson) 的著作] 用明可夫斯基空间的术语来表述，洛伦兹条件能够以明显的协变形式表达成

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0. \quad (7-80)$$

作为三维算符 ∇ 的明显推广，可以用符号 \square 表示四维梯度算符。因而 \square 的自乘标积 \square^2 (称为达朗伯算符) 就是一个世界标量微分算符：

$$\square^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\mu} = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

因此，波动方程组 (7-78) 能表达成一个明显的协变世界矢量的方程：

$$\square^2 A_\mu = -\frac{4\pi j_\mu}{c}. \quad (7-81)$$

1) 它在非笛卡儿空间内协变地变换(按数学家的说法)，式(7-76)因而是协变矢量和逆变矢量的不变标积。

正是由于能把规范条件和波动方程写成(7-80)和(7-81)的形式,因而足以证明麦克斯韦电磁理论应与狭义相对论而不是与伽利略相对论相一致。

7-6 相对论力学中的力和能量方程

已知,牛顿运动方程在伽利略变换下是不变的,但在洛伦兹变换下则不可能不变,因而必须把它们作适当的推广,以便得出一个满足狭义相对论协变性要求的力定律。当然,我们探求的推广必须保证:在速度远小于 c 的情况下,单个质点的新方程能化为熟知的形式

$$\frac{d}{dt}(mv_i) = F_i. \quad (7-82)$$

其次,四维矢量的各个空间分量本身构成了一个空间矢量,因为 $L_{4i} = L_{i4} = 0$ 、 $L_{44} = 1$ 的洛伦兹变换不过是一次寻常的空间转动,因而只影响到四维矢量的空间分量。然而,反过来并不成立,空间矢量的分量不一定要象四维矢量的分量那样变换。一个寻常矢量的分量可以乘以 β 的任何函数而不会改变它们的空间转动性质。但这种相乘将严重影响到它们在洛伦兹变换下的变化方式¹⁾。因此,世界速度 u_r 的空间分量将构成矢量 $\mathbf{v}/\sqrt{1-\beta^2}$ 。但要注意, \mathbf{v} 本身并非四维矢量的一部分,它必须首先除以 $\sqrt{1-\beta^2}$ 。

尽管式(7-82)本身并不是洛伦兹不变式,但我们还是能够期望它的相对论性推广将是一个四维矢量方程,其空间分量在 $\beta \rightarrow 0$ 的极限情况下能够化为式(7-82)。方程左边的四维矢量是不难推广的。能在小速度情况下把空间部分化为 \mathbf{v} 的、仅有的四维矢量是世界速度 u_r 。其次,尽管 m 能取作质

1) 和前面一样, β (和 \mathbf{v})可以交替地用作实验室坐标系内观测到的质点速度,或者质点处于瞬时静止的那个洛伦兹系统的速度。

点的一种不变性质,但我们知道,时间 t 并不是一个洛仑兹不变量. 不过,它能够用标量原时 τ 来代替,当 $\beta \rightarrow 0$ 时, τ 就趋近于 t . 所以单个质点的牛顿运动方程所要求的推广形式应是

$$\frac{d}{d\tau}(mu_x) = K_x, \quad (7-83)$$

这里的 K_x 是某个四维矢量,称为明可夫斯基力.

决不能认为 K_x 的空间分量就是力的分量. 式(7-82)所要求的仅仅是在小速度的极限情况下 K_x 才能化为 F_x . 因此, K_x 可以等于 F_x 与 β 的任何函数的乘积,在 $\beta \rightarrow 0$ 时,该函数等于 1; 而实际的关系式显然决定于力的分量的洛仑兹变换性质. 过去已用过两种方法来确定 \mathbf{F} 在洛仑兹变换下的特性.

一种方法开始时就已指出,力的物理来源基本上只有很少的几个,能碰到的力或是引力、或是电磁力,还可能是核力. 描述各种物理现象的正确理论的任务在于提供有关力的表达式; 如果以协变形式来表述,这些表达式将会自动地告诉我们有关力的各个分量的变换性质. 遗憾的是,我们并没有所有可能力源的协变理论,对于核力来说,几乎没有任何值得一提的理论. 我们处心积虑地构成洛仑兹变换,目的正是为了保持理论的不变性,所以只有经典电磁理论可望提供一个协变的力方程. 但这对我们的目的来说已经足够; 不论力的来源是什么,变换性质必然对于所有力都相同. “一个质点在两个力的作用下处于平衡状态”这一说法必然在所有洛仑兹系统内都成立,当然,只有当所有的力都以相同方式变换时,才可能是这种情况.

在节 1-5 中已指出,作用于质点的电磁力为 [见式(1-64')]

$$F_i = -q \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\phi - \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \right) + \frac{1}{c} \frac{dA_i}{dt} \right]. \quad (7-84)$$

借助于四维矢势 A_μ , 表达式 $\phi - \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$ 能够协变地表达成

$$\phi - \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c} \sqrt{1 - \beta^2} u_\nu A_\nu, \quad (7-85)$$

而力的分量 F_i 将成为

$$F_i = -\frac{q}{c} \sqrt{1 - \beta^2} \left[-\frac{\partial}{\partial x_i} (u_\nu A_\nu) + \frac{dA_i}{d\tau} \right]. \quad (7-86)$$

括号内的表达式是作为四维矢量的空间分量来变换的, 从而 F_i 等于 $\sqrt{1 - \beta^2}$ 与一个四维矢量的空间分量的乘积, 这个四维矢量原来与明可夫斯基力是一致的. 因此, 不论力源是什么, 寻常力与明可夫斯基力之间的关系应为

$$F_i = K_i \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (7-87)$$

这一推导还表明: 带电质点所受特殊形式的明可夫斯基力为

$$K_\mu = \frac{q}{c} \left[\frac{\partial}{\partial x_\mu} (u_\nu A_\nu) - \frac{dA_\mu}{d\tau} \right]. \quad (7-88)$$

另外一种方法则试图除了力学本身外不再需要利用其他物理理论, 在所有洛伦兹系统内, 力都被简单地定义为动量的时间变化率:

$$\frac{dp_i}{dt} = F_i. \quad (7-89)$$

然而, 式(7-89)中所指的动量不等于 mv_i , 而是某种相对论性推广, 它在小速度的极限情况下化为 mv_i . 刘易斯 (Lewis) 和托尔曼 (Tolman)¹⁾ 注意到式(7-89)这一定义的洛伦兹不变性结果就是无外力时动量的守恒, 从而得到了一个相对论动量表达式, 它与(7-83)形式的力定律无关. 他们研究了两个质点的弹性碰撞, 找到了在所有洛伦兹系统内都守恒的这

1) R. D. Sard, *Relativistic Mechanics*, pp. 146—152.

类碰撞中的 p_i 的形式。但是，如果把式(7-83)看作是力定律的形式，并把它化为尽可能类似于式(7-89)的形式，即能直接看出相对论动量以及 K_i 的意义。根据 τ 和 t 之间的关系式以及世界速度的定义，式(7-83)的空间分量能表达成

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv_i}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = K_i \sqrt{1-\beta^2}.$$

与式(7-89)比较表明，只要动量定义为

$$p_i = \frac{mv_i}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (7-90)$$

则动量守恒定理是不变式，还表明， F_i 和 K_i 是按照式(7-87)相互关联的。应该注意，当 $\beta \rightarrow 0$ 时，式(7-90)正确地化为 mv_i 。因此，两种方法得出了相同的结论。把式(7-90)与定义四维速度的式(7-74)比较表明， p_i 构成了一个四维矢量的空间部分，它被定义为四维动量：

$$p_\nu = mv_\nu. \quad (7-91)$$

因而推广后的、单个质点的运动方程能表达成

$$\frac{dp_\nu}{d\tau} = K_\nu. \quad (7-83')$$

到目前为止，我们只讨论了四维矢量方程(7-83)，(7-83')的空间部分，根本未论及第四个方程的物理意义。四维矢量 K_μ 的类时部分能直接得自式(7-83)与世界速度的标积：

$$u_\nu \frac{d}{d\tau} (mv_\nu) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{m}{2} u_\nu u_\nu \right) = K_\nu u_\nu. \quad (7-92)$$

由于 u_ν 量值的平方等于常数 $-c^2$ [见式(7-75)]， m 在这里也同样是常数，所以式(7-92)的左边为零，即

$$K_\nu u_\nu \equiv \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{1-\beta^2} + \frac{icK_4}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0. \quad (7-93)$$

由此可知，明可夫斯基力的第四个分量为

$$K_4 = \frac{i}{c} \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (7-94)$$

式(7-83)的相应的第四个分量则成为

$$\frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \quad (7-95)$$

已知,动能 T 一般是这样定义的: 力对质点所作功的功率 $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ 等于 T 的时间增加率:

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \quad (7-95')$$

这一动能定义与通常非相对论形式 $\frac{1}{2}mv^2$ 相一致; 根据比较, 它的相对论表达式可由式(7-95)得出, 看起来, 这是一个能量方程, 其动能为

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (7-96)$$

当 β^2 变得远小于 1 的极限时, 式(7-96)能展开成

$$T \rightarrow mc^2 \left(1 + \frac{\beta^2}{2} \right) = mc^2 + \frac{mv^2}{2}. \quad (7-97)$$

这一极限值并不符合所期待的非相对论形式, 这里有一附加项 mc^2 . 然而, 一看就知道这一项并不重要, 因为式(7-96)的右边显然可以加上一个任意的积分常数而不会影响式(7-95')的成立. 特别是这个常数能够是 $-mc^2$, 这将会使 T 符合于非相对论值.

然而, 最好还是使 T 保持为(7-96)的形式, 因为根据(7-91)与式(7-96)比较表明, iT/c 就是四维动量的第四个分量. 为了保证正确地过渡到非相对论值, 宁愿把“动能”这一名称转用于独立量 K , 它定义为

$$K = T - mc^2 = mc^2(\gamma - 1). \quad (7-96')$$

在文献中, T 的称谓并不一致, 有时把它称为“总能量”, 虽

然严格地说，这仅仅适合于无相互作用的自由质点。比较经常的是把它简单地称为能量。

不论是用哪一个名称， T 都具有有趣而又有用的性质。例如，能够证明式(7-96)给出的 T 有一种颇为优越的性质，即保证空间线动量守恒的任何情况，必然也能使 T 保持守恒。为证明这一定理，只要注意到“空间线动量是守恒的”这一说法，在洛仑兹变换下必定是不变的。（事实上，在爱因斯坦提出的惯性系定义中，隐含了这种不变性，见第 329 页）变换后的线动量分量 p'_i 是作为 p_i 和 T 的线性函数给出的。因此，在所有洛仑兹系统内 p'_i 的守恒，同时要求 p_i 的所有分量也都守恒，这正是我们所期待的结论。

在非相对论力学中，线动量守恒和动能守恒是两个独立的问题。的确，在第三章中已看到，在非弹性碰撞或反应中，反应物线动量是守恒的，但它们的动能却不守恒。然而，由于相对论动能的变换性质象一个世界矢量的第四分量，因此，甚至在非弹性碰撞中，它也必定与空间动量一起守恒。称为静止能量的 mc^2 这一项因而也将有着重要的物理意义。

一个简单的例子将证明，作为反应或非弹性碰撞的结果， T 的守恒意味着系统静止质量的变化。例如，考虑两个等质量的质点或系统，在实验室系中以等值、反向的速度相向而行。因而，在实验室系内总的空间线动量等于零。我们能够构成一个系统的总四维动量

$$P_\mu = p_\mu(1) + p_\mu(2),$$

因而它除了有一个零值空间分量，还有一个第四分量 $2iT/c$ ，这里的 T 是式(7-96)定义的每个质点的能量。今假设碰撞是完全非弹性的——碰撞后的所有质点完全停下来，并静止在实验室系内，象两个油灰球碰撞后粘结在一起一样。这时的总能量等于最后的组合系统的静止能量，该系统的质量为

$$M = 2m + \Delta M.$$

碰撞中 P_4 的守恒意味着

$$2T = Mc^2. \quad (7-98)$$

已知,为了使静止在实验室系内的各质点有一初速度,所需的能量为

$$\Delta E = 2(T - mc^2) = \Delta Mc^2. \quad (7-99)$$

经过非弹性碰撞,实验室系内最初的运动能量将根据有名的爱因斯坦关系式(7-99)全部转变为系统增加的静止质量。

在两个油灰球的碰撞中,我们通常总是说碰撞中损失的人射运动能量转变成了热.狭义相对论告诉我们,系统的静止质量或惯量的增加正比于所产生的热.如果系统由一已知力所策动,则质量的增量原则上是可以测定的¹⁾.例如,在原子或核的尺度上,入射的运动能量可能产生出一个新的第三粒子.在近代物理中有着大量类似事例;在下一节中,将要论及这种碰撞的相对论运动学.当然,过程也可以倒过来——静止能量反过来转变为运动能量.世上最惊人的例子也许是人为核爆炸.我们再次看到,核装置或核武器的总能量 T 在爆炸中保持不变;大量动能的释放是以反应物静止质量的减小为代价的.尽管产生的能量如此惊人,但质量的损失只有原来质量的大约 0.1%.

形式上,能量 T 和动量之间的关系可以这样来表述:四维动量矢量的量值为常数,即

$$p_\mu p_\mu = -m^2 c^2 = p^2 - \frac{T^2}{c^2}$$

或

$$T^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (7-100)$$

1) 在这种宏观碰撞中,质量的变化当然是极小的,因为 1 焦耳能量只相当于 1.1×10^{-14} 克的质量.

式(7-100)是与非相对论力学中的关系式 $T = p^2/2m$ 相类比的相对论关系式,不同的是这里的 T 还包含有静止能量.根据 T 的定义式(7-96),当速度趋近于光速时,具有限静止质量的质点的能量显然将趋于无限.换句话说,使一个质点(或空间飞船)的速率从静止增加到光速 c 需要无限的能量.这里又一次证明:从任何小于 c 的有限速率增加到或超过光速是不可能的¹⁾.

7-7 碰撞的相对论运动学和多粒子系统

前几节的表述,使我们有可能把节 3-11 中讨论过的各种系统间的碰撞现象的变换作出相对论性的推广.这一课题在实验高能物理学中是颇感兴趣的.尽管基本粒子间的力知道得很不完整,而且无疑不是经典性质的,但是,只要反应中的粒子处于相互作用区域之外,那么,它们的平均运动仍然可以用经典力学来描述.此外,变换中涉及到的主要原理——四维动量矢量的守恒——在经典力学和量子力学中都适用.实际的碰撞或反应总认为是在一个点上发生的——或者是在一个极小的黑匣内发生的——而且人们也仅仅着眼于粒子在碰撞前、后的行为.由于它对高能物理的极端重要性,所以这方面的相对论运动学已成为大家精心研究的领域²⁾.当然,在这

1) 有人指出,如果有粒子生来就具有大于光速的速率,也不致破坏这一说法.对于这种“超光速粒子”,只当与粒子相关的“质量”是虚数时,式(7-96)给出的能量才可能是实数.这实际上意味着超光速粒子是由一个实数参量 m' 描述的,这里的 m' 保证粒子总能量为 $T = m'c^2/\sqrt{\beta^2 - 1}$.对超光速粒子的本性及其相互作用的推测已经引起了热烈的争论,以便弄清楚它们怎样才能符合于我们通常的因果观点.在这一方面作进一步讨论是没有意义的,因为到目前为止,还没有任何实验依据能说明确实存在这种粒子.

2) 称为“运动学”是有点牵强,因为它实际上论述的是动量和能量这样的动力学量,但现在已普遍采用这一名称,不容更改了.

里不可能作详尽的讨论,只能提供一些重要的手段,并引用几个简单的例子来阐明我们所用的技巧。

把一个点看作质心的想法显然给洛仑兹不变性理论带来了一些困难.但可把质心系适当地推广为洛仑兹参照系,在这样的参照系内,所有粒子的总的空间线动量等于零.这样一个洛仑兹参照系总是能够找到的,因为有一个定理表明:一个质点系的总四维动量矢量是类时的.便于说明这个结论的方法是引进一种标记法;采用这种标记法时,四维矢量的分量将有两个下标:一个下标代表粒子(通常是 r, s, t 等),另一个惯用的希腊字母则用以指明分量.这样,总的四维动量将表达成

$$P_{\mu} = \sum_r p_{r\mu}. \quad (7-101)$$

鉴于式(7-91)、(7-74)和(7-75),该矢量量值的平方为

$$\begin{aligned} P_{\mu}P_{\mu} &= \sum_{r,s} p_{r\mu}p_{s\mu} = -\sum_r m_r^2c^2 + \sum_{r \neq s} p_{r\mu}p_{s\mu} \\ &= -\sum_r m_r^2c^2 - \sum_{r \neq s} m_r m_s \gamma_r \gamma_s (c^2 - \mathbf{v}_r \cdot \mathbf{v}_s). \end{aligned}$$

由于实物粒子的速度始终小于 c ,所以 P_{μ} 量值的平方始终是负值.因此,一定会有某种洛仑兹坐标系,它保证被变换矢量 P_{μ} 的空间分量全部为零.这种坐标系称为动量中心系,或者不太严格地称为质心系,并用缩写“C-O-M 系”来标记.

能够应用的主要动力学原理——事实上,几乎所有情况的物理学都允许我们采用这一原理——是碰撞前、后总的四维动量矢量的守恒.正如已经看到的那样,这自动地意味着空间线动量的守恒和总能量(包括静止质能)的守恒.为利用这个守恒原理,我们的主要手段是变换到动量中心系和起始于动量中心系的洛仑兹变换;同时构成一些在所有洛仑兹系统内都有相同数值的洛仑兹不变量(世量标量).许多步骤与

非相对论碰撞中所用的相似。但在某种程度上，有些结果在相对论运动学中更容易求得。人们不必为动量和能量的各别守恒而操心。而且实验室和动量中心系之间的变换也只不过是洛仑兹变换的特殊情况。

作为洛仑兹不变量的一个应用例子，考虑由两个粒子引起的反应，它产生出另一组质量为 m_r ($r = 3, 4, 5, \dots$) 的粒子。在 C-O-M 系内，变换后的总动量 P'_μ 具有零值空间分量以及一个第四分量 iT'/c 。把 C-O-M 系看作是质量为 $M = T'/c^2$ 的复合质量粒子的固有系统或静止系统往往是方便的¹⁾。 P_μ 量值的平方在所有洛仑兹系统内必定是不变量(并在反应中守恒)。因此，我们有

$$P_\mu P_\mu = P'_\mu P'_\mu = -\frac{T'^2}{c^2} = -M^2 c^2. \quad (7-102)$$

但对于原有的粒子， $P_\mu P_\mu$ 能够按下式来计算：

$$P_\mu P_\mu = -(m_1^2 + m_2^2)c^2 + 2p_{1\mu} p_{2\mu}. \quad (7-103)$$

C-O-M 系内的能量或等效质量 M ，可依据入射粒子表达成 $T'^2 \equiv M^2 c^4 = (m_1^2 + m_2^2)c^4 + 2(T_1 T_2 - c^2 \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2)$ 。 (7-104) 今按照习惯，假设有一个粒子，比如说是粒子 2，在实验室系内是静止的。那么，由于 $\mathbf{p}_2 = 0$ 和 $T_2 = m_2 c^2$ ，C-O-M 能量将成为

$$T'^2 \equiv M^2 c^4 = (m_1^2 + m_2^2)c^4 + 2m_2 c^2 T_1. \quad (7-105)$$

如果把 T_1 超过静止质能的部分(即动能)记为 K_1 ，此式能表达成

$$T'^2 \equiv M^2 c^4 = (m_1 + m_2)^2 c^4 + 2m_2 c^2 K_1. \quad (7-105')$$

显然，C-O-M 系内的有效能量仅随入射动能缓慢地增加。甚至在运动动能远大于静止质能的“超相对论”区域内， T' 也仅

1) 虽然在高能物理习惯使用的单位中， $c = 1$ ，但象这种引论性叙述中始终保留 c 的各次幂似乎是有帮助的。

仅按 K_1 的平方根增加。

在 C-O-M 系中适用的小数量入射能量按比例增加的效应, 是用阈能明显表示的。显然, 有可能引起反应(除了弹性散射)的最低能量是反应产物静止在 C-O-M 系内时的能量。任何有限动能都要求一个较高的 T' , 或者说要求一个较高的人射能量。反应以后, C-O-M 系内的总四维动量记为 P''_{μ} , 它在阈值处的量值决定于

$$P''_{\mu}P''_{\mu} = -c^2 \left(\sum_r m_r \right)^2, \quad (7-106)$$

由于动量的守恒, 此式必定与式 (7-102) 相同。对于静止靶, 由于式 (7-105') 的结果, 阈值处入射运动能量将决定于

$$\frac{K_1}{m_1 c^2} = \frac{\left(\sum_r m_r \right)^2 - (m_1 + m_2)^2}{2m_1 m_2}.$$

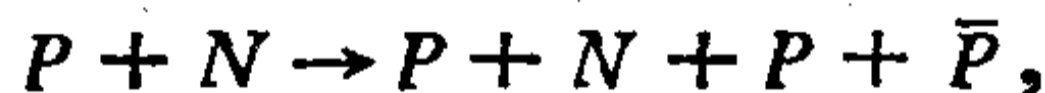
如果反应的 Q 定义为¹⁾

$$Q = \sum_r m_r - (m_1 + m_2), \quad (7-107)$$

这一阈能将成为

$$\frac{K_1}{m_1 c^2} = \frac{Q^2 + 2Q(m_1 + m_2)}{2m_1 m_2}. \quad (7-108)$$

式 (7-108) 的一个常见例证是把它应用于历史性的反质子的生成, 其反应方程为



这里, N 是核子, 可以是中子或质子。在 938 MeV 等效静止质能以及 $Q = 2m$ 情况下, 所有有关粒子的质量近乎相等。因而式 (7-108) 表明, 入射粒子动能的阈值必定等于

$$K_1 = 6mc^2 = 5.57 \text{ GeV},$$

1) 这里的 Q 与式 (3-112) 所用的习惯用法的符号相反。

这相当于 Q 所代表的能量的三倍!然而,如果引起反应的是以等值、反向速度相向入射的两个核子,则实验室系与 C-O-M 系相同。在这种情况下,所有动能都可用来生成质子-反质子对,而且阈值处的每个人射粒子需要的运动动能只相当于一个质子的质量,即 938MeV 。正因为这样,人们才如此热衷于建造束流对撞机!

另一个计算阈值的、有启发性的例子是光介子的生成,它的反应方程可以是

$$\gamma + P = \Sigma^0 + K^+, \quad (7-109)$$

式中 γ 代表光子。在经典力学中,光子是一种零质量粒子,它的空间动量为 ${}^0\mathbf{p}$, 能量为 ${}^0\mathbf{p}c$ ¹⁾。在计算 Q 时, m_1 的质量等于零:

$$Q = (\Sigma^0 + K^+ - P) = 748\text{MeV}.$$

对于包含有一个入射光子的反应来说,式 (7-108) 可重新表达成

$$K_1 = {}^0pc = c^2 \frac{Q^2 + 2Qm_2}{2m_2}.$$

根据 Q 值以及质子的静止质能 m_2 , 式 (7-109) 的反应阈能将是

$$K_1 = 1.05 \text{ GeV},$$

此值仅比 Q 值略高。

我们也不难求得实验室系内反应产物在阈值处的能量。C-O-M 系是质量 M 的静止系统, 它的 $P_4 = iMc$ 。在任何其他系统中, 四维矢量的第四分量是 $P_4 = iMc\gamma$ 。但在实验室系内则为

1) 光子的四维动量矢量量值的平方等于零; 该矢量有时被称作“类光”矢量。只当所有粒子都是光子, 甚至只当所有光子都以相同方向运动时, 才会危及(第 367 页所提到的)动量中心定理。

$$P_1 = \frac{i}{c} (T_1 + T_2) = \frac{i}{c} (T_1 + m_2 c^2),$$

这里的最后一个等式只有对于静止靶粒子才能成立。因此，C-O-M 系统相对于实验室系的运动应使

$$\gamma = \frac{T_1 + m_2 c^2}{M c^2}. \quad (7-110)$$

但在阈值处，所有的反应产物在 C-O-M 系内都是静止的，因此， $M = \sum_r m_r$ ，这时有

$$\gamma = \frac{K_1 + (m_1 + m_2) c^2}{\sum_r m_r c^2} \quad (\text{阈值}). \quad (7-111)$$

在实验室系内，第 s 个反应产物的动能是

$$K_s = m_s c^2 (\gamma - 1). \quad (7-112)$$

因此，反质子在阈值处的运动动能为 $K_p = m c^2 = 938 \text{ MeV}$ 。与之相对照， K^+ 介子在阈值处发射的运动动能则为 88.4 MeV 。

在节 3-11 中，研究了二体非相对论碰撞的运动学变换。式 (3-117') 是把一个人射粒子受到一个静止靶的弹性散射后能量的减少作为 C-O-M 系内散射角的函数给出的。相对论性的类似推导则提供了相对论运动学方法的另一个有趣的例子。这里使用洛仑兹不变量并不特别有帮助；代替它们的是直接作出实验室系和 C-O-M 系之间的洛仑兹变换。图 7-2 说明的是两个系统内入射和散射的空间动量矢量之间的关系。入射和散射动量矢量确定了一个平面，它的取向在洛仑兹变换下不变，在这里取作 xz 平面，而入射方向则沿 z 轴。由于碰撞是弹性的，入射粒子的质量 m_1 和静止靶的质量 m_2 都保持不变，即 $m_3 = m_1$ ， $m_4 = m_2$ 。带撇号的矢量代表 C-O-M 系内的值，而不带撇的矢量则是实验室系内的矢量。为

了明显地区别散射前和散射后,我们将用 3, 4 表示散射后的矢量。只是应该记住, 3 代表被散射的入射粒子, 4 代表反冲的靶粒子。各粒子的四维矢量的分量总是具有两个下标: 第一个代表粒子, 第二个代表分量。

从实验室系到 C-O-M 系的洛伦兹变换由式 (7-110) 的 γ 来确定, M 则由式 (7-105) 给出:

$$\gamma = \frac{T_1 + m_2 c^2}{\sqrt{2m_2 c^2 T_1 + (m_1^2 + m_2^2) c^4}} = \frac{K_1 + (m_1 + m_2) c^2}{\sqrt{2m_2 c^2 K_1 + (m_1 + m_2)^2 c^4}} \quad (7-113)$$

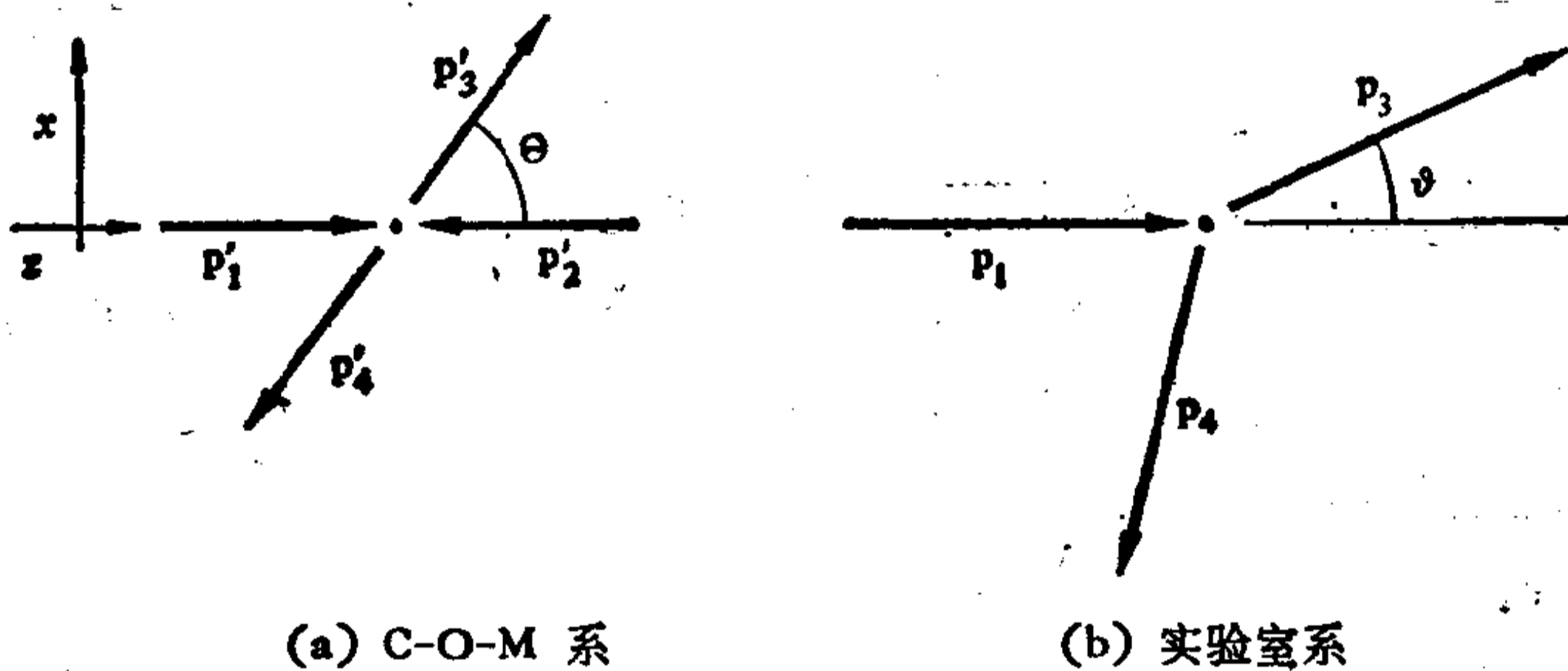


图 7-2 C-O-M 系和实验室洛伦兹系内相对论弹性散射的动量矢量图

β 则可从 γ 求得; 或者根据求取 γ 时所用类似的论证更加直接地求得。在 C-O-M 系内, 总的四维动量矢量的空间部分等于零; 在任何其他系统中, 空间部分等于 $Mc\beta\gamma$ 。然而, 在实验室系内的空间部分为 \mathbf{p}_1 。因此, 根据式 (7-110), β 应为

$$\beta = \frac{\mathbf{p}_1 c}{T_1 + m_2 c^2} = \frac{\mathbf{p}_1 c}{K_1 + (m_1 + m_2) c^2} \quad (7-114)$$

由于 β 沿着 z 轴, 因此洛伦兹变换取式 (7-18) 的形式, 而 p'_{1z} 在 C-O-M 系内的分量为

$$p'_1 = p'_{1z} = \gamma \left(p_1 - \frac{\beta T_1}{c} \right),$$

$$\frac{iT'_1}{c} = p'_{14} = i\gamma\left(\frac{T_1}{c} - \beta p_1\right). \quad (7-115)$$

碰撞后的 \mathbf{p}'_3 不再沿 z 轴, 但由于碰撞是弹性的. 其量值与 \mathbf{p}'_1 的量值相同. 如果 \mathbf{p}'_3 与人射方向之间的夹角为 Θ , 就象节 3-11 中那样, 那么, $\mathbf{p}'_{3\mu}$ 在 C-O-M 系内的分量为

$$\begin{aligned} p'_{31} &= p'_1 \sin \Theta, & p'_{33} &= p'_1 \cos \Theta, \\ p'_{34} &= p'_{14} = \frac{iT'_1}{c}. \end{aligned} \quad (7-116)$$

返回到实验室系的变换是相同的洛仑兹变换, 但相对速度为 $-\beta$. 因此, \mathbf{p}_3 的分量为

$$\begin{aligned} p_{31} &= p'_{31} = p'_1 \sin \Theta, \\ p_{33} &= \gamma(p'_{33} - i\beta p'_{34}) = \gamma\left(p'_1 \cos \Theta + \frac{\beta T'_1}{c}\right), \\ p_{34} &= \gamma(p'_{34} + i\beta p'_{33}) = i\gamma\left(\frac{T'_1}{c} + \beta p'_1 \cos \Theta\right). \end{aligned} \quad (7-117)$$

如果根据式 (7-115) 把 T'_1 和 p'_1 代入式 (7-117) 的最后部分, 并稍加简化, 即得借助其入射性质表示的、散射后的粒子能量表达式

$$T_3 = T_1 - \gamma^2 \beta (1 - \cos \Theta) (p_1 c - \beta T_1). \quad (7-118)$$

式 (7-118) 中的 γ 和 β 必须通过式 (7-113) 和 (7-114) 用各入射量表示, 所得关系式为

$$\gamma^2 \beta (p_1 c - \beta T_1) = \frac{m_2 p_1^2 c^2}{2m_2 T_1 + (m_1^2 + m_2^2) c^2}$$

借助于 p_1 和 T_1 之间的关系式 (7-100), 此式能表达成

$$\gamma^2 \beta (p_1 c - \beta T_1) = \frac{m_2 K_1 (K_1 + 2m_1 c^2)}{2m_2 K_1 + (m_1 + m_2)^2 c^2}. \quad (7-119)$$

经过一定的代数运算, 能把式 (7-118) 重新表达成

$$\frac{K_3}{K_1} = 1 - \frac{2\rho(1 + \mathcal{E}_1/2)}{(1 + \rho)^2 + 2\rho\mathcal{E}_1} (1 - \cos \Theta), \quad (7-120)$$

式中的 $\rho = m_2/m_1$ (就象节 3-11 中的弹性碰撞情况一样),

而 \mathcal{E}_1 是以静止质能为单位的人射粒子动能:

$$\mathcal{E}_1 = \frac{K_1}{m_1 c^2}. \quad (7-121)$$

式 (7-120) 是式 (3-117') 的相对论对应式. 不难看出, 当 $\mathcal{E}_1 \rightarrow 0$ 时, 式 (7-120) 将化为非相对论的情况, 如果 $\rho = 1$ (质量相等), 那么相对论改正将完全消失. 式 (7-120) 表明, 以 $m_1 c^2$ 为单位时, 散射后的最小能量为

$$(\mathcal{E}_3)_{\min} = \mathcal{E}_1 \frac{(1 - \rho)^2}{(1 + \rho)^2 + 2\rho\mathcal{E}_1}. \quad (7-122)$$

在非相对论极限情况下, 散射后的最小能量比为

$$\frac{(\mathcal{E}_3)_{\min}}{\mathcal{E}_1} = \left(\frac{1 - \rho}{1 + \rho} \right)^2 \quad \mathcal{E}_1 \ll 1, \quad (7-123)$$

这是一个熟知的结果, 不难从式 (3-117') 求得. 式 (7-123) 表明, 在非相对论范围内, 质量为 m_1 的粒子受到重得多的粒子散射时 (即相当于 $\rho \ll 1$ 的情况), 不可能损失很多动能, 这显然与常识相符. 然而, 在超相对论范围内, 当 $\rho\mathcal{E}_1 \gg 1$ 时, 散射后的最小能量与 \mathcal{E}_1 无关:

$$(K_3)_{\min} = \frac{(m_2 - m_1)^2 c^2}{2m_2} \quad \rho\mathcal{E}_1 \gg 1. \quad (7-124)$$

由于加于 \mathcal{E}_1 的条件等于要求 $K_1 \gg m_2 c^2$, 从式 (7-124) 可知, 甚至当这种粒子受到比它重得多的粒子的散射时, 也能够失去它的大部分能量. 这种现象是出乎意料的, 但应记住, 具有这些能量的粒子的运动速度非常接近于光速, 速度的微小变化都会造成能量的大幅度变动.

最后, 我们也不难得到 C-O-M 系和实验室系内的散射角之间的关系, 只要注意到

$$\tan \vartheta = \frac{p_{31}}{p_{33}} = \frac{\sin \Theta}{\gamma \left(\cos \Theta + \frac{\beta T'_1}{p'_1 c} \right)}.$$

根据式(7-90)及(7-96),

$$\frac{p'_1 c}{T'_1} = \frac{v'_1}{c} \equiv \beta'_1,$$

从而 $\tan \vartheta$ 也能表达成

$$\tan \vartheta = \frac{\sin \Theta}{\gamma(\cos \Theta + \beta/\beta'_1)}.$$

用各个初始量表示时,式(7-115)表明,

$$\frac{\beta T'_1}{p'_1 c} = \frac{\beta \left(\frac{T_1}{c} - \beta p_1 \right)}{p_1 - \frac{\beta T_1}{c}}.$$

此式可进一步化简,只要采用关系式[见式(7-114)]

$$\frac{\beta}{p_1 - \frac{\beta T_1}{c}} = \frac{1}{m_2 c},$$

$$T_1 - \beta p_1 = \frac{m_1(m_1 + m_2)c^4 + m_2 c^2 K_1}{(m_1 + m_2)c^2 + K_1}.$$

于是, $\tan \vartheta$ 的最后表达式能写成

$$\tan \vartheta = \frac{\sin \Theta}{\gamma[\cos \Theta + \rho g(\rho, \mathcal{E}_1)]}, \quad (7-125)$$

这里的 $g(\rho, \mathcal{E}_1)$ 是函数

$$g(\rho, \mathcal{E}_1) = \frac{1 + \rho(1 + \mathcal{E}_1)}{(1 + \mathcal{E}_1) + \rho}, \quad (7-126)$$

根据式(7-113), γ 的形式为

$$\gamma(\rho, \mathcal{E}_1) = \frac{1 + \mathcal{E}_1 + \rho}{\sqrt{(1 + \rho)^2 + 2\rho\mathcal{E}_1}}. \quad (7-127)$$

同样,在非相对论范围内, γ 和 g 趋向于 1, 而式(7-125)将化为式(3-107). 改正函数 $g(\rho, \mathcal{E}_1)$ 实际上决不会很大, 当 \mathcal{E}_1 变成很大时, 它将趋向于常数极限值 ρ . 影响变换角的重要因子是 γ , 当 \mathcal{E}_1 增加时它当然将无限度地增加. 它并不会

影响 $\Theta = 0$ 或 π 时角度分布的两个界限, 但它的存在意味着在其他角度处, ϑ 总是小于它的非相对论数值的. 因此, 从 C-O-M 系到实验室系的洛仑兹变换(不会影响到动量的横向分量)总是使散射的角分布偏向于直进方向.

这里将要提到的另一课题是角动量的相对论性推广, 它同碰撞的关系不大, 但与 C-O-M 系的概念是紧密相关的. 在第一章中证明了非相对论角动量服从与线动量方程极为相似的运动方程, 只是用力矩替代了力; 还证明了对于服从作用和反作用定律的孤立系统来讲, 总角动量守恒, 而且在质心系中与参照点无关. 所有这些说法, 在相对论中都有相应的叙述, 当然, 往往包含有某些附加限制.

可以就单个粒子来定义明可夫斯基空间内的反对称二级张量, 其元素 $m_{\mu\nu}$ 为

$$m_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu^{1)} \quad (7-128)$$

因此, 象节 4-7 中所看到的那样, 3×3 子张量 m_{ij} 显然相当于粒子的空间角动量. 为了得到 $m_{\mu\nu}$ 的运动方程, 可以取它对于粒子原时的微商, 并利用式 (7-83'), 这时有

$$\frac{dm_{\mu\nu}}{d\tau} = (u_\mu p_\nu - u_\nu p_\mu) + (x_\mu K_\nu - x_\nu K_\mu),$$

这里的 K_ν 是明可夫斯基力的分量. 根据四维动量的定义, $p_\lambda = mu_\lambda$, 所以右边的第一项显然为零, 而表达式的另一项显然可以非常理想地看作是力矩的相对论性推广:

$$N_{\mu\nu} = x_\mu K_\nu - x_\nu K_\mu, \quad (7-129)$$

因而 $m_{\mu\nu}$ 将服从运动方程

$$\frac{dm_{\mu\nu}}{d\tau} = N_{\mu\nu}, \quad (7-130)$$

并以式 (1-11) 作为它的非相对论极限形式.

1) $m_{\mu\nu}$ 有两个下标, 因此它与粒子质量完全不同.

对于包含有一批粒子的系统，总的四维角动量张量可以（类似于总的四维线动量矢量）定义为

$$M_{\mu\nu} = \sum_s m_{s\mu\nu}, \quad (7-131)$$

这里的下标 s 代表第 s 个粒子。要建立 $M_{\mu\nu}$ 的运动方程就比较困难，因为每个粒子都有它自己的原时。（由于相同的理由，甚至不想去建立 P_μ 的运动方程。）但在某些条件下，对于 $M_{\mu\nu}$ 的守恒问题倒可以作一点似乎是有理的论证。如果系统是完全孤立的，而且粒子间没有相互作用，也不与外界（包括各种场）相互作用，那么，每个粒子的 $M_{\mu\nu}$ ，根据式(7-130)应守恒，因而 $M_{\mu\nu}$ 也应该守恒。即使粒子间有相互作用，但这种相互作用仅存在于某点处的双粒子碰撞中，那么，正象从下面的论证中可以看到的那样，同样可能有守恒量。两个粒子在碰撞的瞬间一起被引进，并具有相同的原时。（换句话说，它们的世界线是交叉的，它们共同参与了同一个事件。）所以，我们能够为它们的角动量之和列出(7-130)形式的运动方程。如果接触时的冲击力是等值、反向力——根据碰撞中线动量的守恒，这是可以预料到的——那么，冲击力矩之和相互抵销，从而这种碰撞中的相对论角动量也守恒。注意，这与非相对论情况不一样，这里的相互作用只限于瞬时点碰撞。

相对论角动量与非相对论角动量一样服从同类型的参照点平移定理。在定义方程(7-128)和(7-131)中，参照点（实际上是参照“事件”）是洛伦兹系的任意原点。相对于其他某个参照事件 a_1 ，总角动量则为

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu}(a_2) &= \sum_s [(x_{s\mu} - a_\mu)p_{s\nu} - (x_{s\nu} - a_\nu)p_{s\mu}] \\ &= M_{\mu\nu}(0) - (a_\mu P_\nu - a_\nu P_\mu). \end{aligned} \quad (7-132)$$

同非相对论的情况一样，现在角动量的变化等于整个系统都处于 a_2 时它相对于原点的角动量。

在第一章中，一个特定的参照点——质心起了重要的作用。如果我们在这里研究一下 $M_{\mu\nu}$ 的三个非空间分量的性质，比如 $M_{4j} = -M_{j4}$ ，那么，至少能够在洛伦兹系统内得到某种类似的结果。根据定义，在某个特定的洛伦兹参照系内，这些分量为

$$\begin{aligned} M_{4j} &= \sum_s (x_{s4} p_{sj} - x_{sj} p_{s4}) \\ &= ic \sum_s \left(t p_{sj} - \frac{x_{sj} T_s}{c^2} \right). \end{aligned}$$

在 C—O—M 系内，总线动量 P_j 为零，而 M_{4j} 在这一参照系内的形式为

$$M_{4j} = -ic \sum_s \frac{x_{sj} T_s}{c^2}. \quad (7-133)$$

如果象前面所描述的那样，所论系统的总角动量守恒，则 M_{4j} 同其他分量一起都将守恒，因而

$$\sum_s x_{sj} T_s = \text{常数}.$$

总线动量的守恒意味着 $T = \sum T_s$ 同样守恒。这就有可能定义一个与系统相关联的空间点 R_j ：

$$R_j = \frac{\sum_s x_{sj} T_s}{\sum_s T_s}, \quad (7-134)$$

它在 C—O—M 坐标系内是静止的。在非相对论极限情况下（这里对一级近似 $T_s = m_s c^2$ 而言），式 (7-134) 将化为通常的定义式 (1-21)。因此，在狭义相对论中，只能借助于角动量张量并只对某个特定的参照系才能定义一个有意义的质心（有时称为能量中心）。最后还应注意的是，根据式 (7-132)，角动量张量的空间部分 M_{ij} 与 C—O—M 系内的参照点无关，这同非相对论情况完全一样。

到目前为止，除了点碰撞的特殊情况外，我们谨慎地避开了先给出明可夫斯基力，然后再求解相对论粒子运动的问题。对于这种更为一般的问题，我们将在下一节拉格朗日表述的(标称)框架内讨论。

7-8 相对论力学的拉格朗日表述

在将牛顿运动方程适当推广到狭义相对论后，现在就能试着建立所得相对论力学的拉格朗日表述。一般地说，已用两种方法作过这种尝试：一种方法并不想成为一个明显的协变表述，而是致力于就某一特定的洛仑兹系统来建立运动方程(7-89)的空间部分。力 F_i 可能与或者不与某个协变的明可夫斯基力适当地关联。另一种方法则致力于求得一个协变的哈密顿原理以及相应的拉格朗日方程，其中的空间和时间则以通常的方式当作四维位形空间内的坐标。第一种方法的基础有时很不可靠，特别是当有关的力不能很好地作出相对论表述时更是如此。然而在多数情况下，如此求得的运动方程虽然不是明显地协变的，但对于某个特定的洛仑兹系统来讲，却是一个适当的相对论形式。另一方面，第二种方法看来似乎是适宜的，但很快就会遇到即使对于单个粒子也应巧妙地避开的困难。对于一个以上粒子的系统，它几乎一开始就失灵了。除了很少的几种特殊情况外，根本不存在适用于相互作用多粒子系统的令人满意的经典相对论力学表述。这个课题依然是一个需要积极探索的领域。

本节将论述第一种方法，也就是设法找到一个拉氏函数，以便求得用某一特定惯性系坐标表示的相对论运动方程。在这些限制下，要建立一个适当的拉氏函数不会有多大困难。当然，在这里，要象节 1-4 中那样从达朗伯原理推导拉氏函数是行不通的。尽管原理本身(在任何给定的洛仑兹参照系内)

依然有效,但以 $p_i = m_i v_i$ 为基础的推导,在相对论情况下不再适用.不过我们还有另外一个办法,那就是根据哈密顿原理来得到拉格朗日表述(节 2-1),并简单地试着求得一个函数 L ,使得从变分原理

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (7-135)$$

得到的欧拉-拉格朗日方程与已知的相对论运动方程(7-89)相一致.

如果一个单个粒子受到与速度无关的保守力的作用,那么,它的合适的相对论拉氏函数为

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} - V, \quad (7-136)$$

这里的 V 是仅与位置有关的势能, $\beta^2 = v^2/c^2$, 而 v 是所论洛伦兹系统内粒子的速率.要证明这是一个恰当的拉氏函数,只要证明所得的拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$

与式(7-89)相一致.由于势能与速度无关,所以 v_i 仅仅出现在式(7-136)的第一项中,于是

$$\frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{mv_i}{\sqrt{1 - \beta^2}} = p_i. \quad (7-137)$$

从拉氏函数式(7-136)推导得的运动方程为

$$\frac{d}{dt} \frac{mv_i}{\sqrt{1 - \beta^2}} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} = F_i,$$

这与式(7-84)是一致的.注意,拉氏函数不再是 $L = T - V$, 而 L 对速度的偏微商却依然是动量.事实上,正是这最后一个事实保证了拉格朗日方程的正确性,而且从式(7-137)往回推算,至少能得到拉氏函数对速度的依存关系.

我们能够容易地把(7-136)形式的拉氏函数推广到多粒

子系统，并且从笛卡儿坐标变换到任何一组合适的广义坐标 q_i 。那些正则动量将依然定义为

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (7-138)$$

从而使循环坐标和相应动量的守恒之间的关系象非相对论中的情况一样。其次，正象节 2-6 中那样，如果 L 不显含时间，就会有一个运动常数

$$h = \dot{q}_i p_i - L. \quad (7-139)$$

但对于象 (7-136) 形式的拉氏函数，我们不可能照节 (2-6) 中的相同方式把 h 确认为能量。应看到，(7-136) 形式的 L 毕竟不是各速度分量的齐次函数。然而，如根据式 (7-136) 直接求解式 (7-139)，就可看出，这种情况下的 h 确实是总能量：

$$h = \frac{mv_i v_i}{\sqrt{1 - \beta^2}} + mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} + V,$$

归并各项后，此式简化为

$$h = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + V = T + V = E. \quad (7-140)$$

再次看到， h 这个量就是总能量 E ，因而，它在这些条件下是一个运动常数。

在这里引进与速度相关的势也不特别困难，并且确实可以按节 1-5 中用于非相对论力学的相同方式来进行。例如，电磁场中单个粒子的拉氏函数为

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} - q\phi + \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}. \quad (7-141)$$

注意，正则动量现在不再是 mu_i ；而必须再加上与速度相关的那部分势所引起的项：

$$p_i = mu_i + \frac{q}{c} A_i. \quad (7-142)$$

这种现象当然不是相对论性的；事实上，在早先的论述中已经

有过这种相同的附加项 [见式 (2-47)]。式 (7-141) 的表述不是明显协变的。但我们有信心期望所得结果在所有洛仑兹参照系内都成立, 因为能够从式 (7-141) 中与速度相关的势推得的洛仑兹力是具有相对论协变性的。

因此, 前面为求解特定力学问题而设想的所有方法几乎都能继续用于相对论力学。这里, 我们将举几个例子予以说明。

1. 在恒力作用下的运动; 双曲线运动 把 x 轴取作恒力的方向并不会失去其普遍性。于是, 拉氏函数为

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} - max, \quad (7-143)$$

这里的 β 是 \dot{x}/c ; a 是单位质量所受力的恒定量值。根据式 (7-143) 或者直接以式 (7-89) 为基础, 都不难得到运动方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = \frac{a}{c}.$$

初次积分后得

$$\frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{at + \alpha}{c}$$

或

$$\beta = \frac{at + \alpha}{\sqrt{c^2 + (at + \alpha)^2}},$$

式中 α 是一积分常数。第二次积分的积分限 t 从 0 到 t , 而 x 则从 x_0 到 x , 即

$$x - x_0 = c \int_0^t \frac{(at' + \alpha) dt'}{\sqrt{c^2 + (at' + \alpha)^2}},$$

由此得全解

$$x - x_0 = \frac{c}{a} (\sqrt{c^2 + (at + \alpha)^2} - \sqrt{c^2 + \alpha^2}). \quad (7-144)$$

如果粒子最初位于原点, 并从静止开始运动, 即 $x_0 = 0$ 和

$v_0 = 0 = \alpha$, 那么, 式 (7-144) 能够表达成

$$\left(x + \frac{c^2}{a}\right)^2 - c^2 t^2 = \frac{c^4}{a^2},$$

这是 x, t 平面内的双曲线方程。(相同条件下的非相对论性运动当然是 x, t 平面内的抛物线。) 如果把 $(at + \alpha)$ 看作远小于 c , 即可从式 (7-144) 得到非相对论的极限情况; 就这样轻而易举地得到了作为 t 的函数的、 x 的公式, 也就是通常大学低年级所遇到的公式, 只是应认识到, 在这一极限情况下, $\alpha \rightarrow v_0$ 。

这一例子中所描述的运动是相当现实的。譬如说, 这正好相当于实验室系内的电子在恒定而又均匀的电场作用下, 被加速到相对论速率的情况。其次要考虑的例证就比较学究气了, 但作为所采用的技巧的例子是有益的。

2. 相对论一维谐振子 这种情况下的拉氏函数具有 (7-136) 的形式, 其中

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2. \quad (7-145)$$

由于 L 不是时间的显函数, 而且与速度无关, 所以总能量 E 是一个常数。现在, 可以用式 (7-140) 求解速度 \dot{x} , 这时有

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 1 - \frac{m^2 c^4}{(E - V)^2}. \quad (7-146)$$

我们暂时可以不去代入特殊形式的 $V(x)$, 而把问题略加推广, 以便把任何一个具有式 (7-145) 定性特点的势函数都包括进来。例如, 假设 $V(x)$ 这一势函数关于原点对称的, 并在该点处有一最小值。那么, 只要 E 处在 $V(0)$ 和 V 的最大值之间, 运动将在极限值 $x = -b$ 和 $x = +b$ 之间振荡, 这决定于

$$V(\pm b) = E.$$

根据式 (7-146), 振荡运动的周期得自

$$\tau = \frac{4}{c} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{m^2 c^4}{[E - V(x)]^2}}} \quad (7-147)$$

当 $V(x)$ 只限于特定的胡克定律形式时,式(7-147)可以用椭圆积分来表示¹⁾.我们现在要研究的是在势能总是远小于静止质能 mc^2 时的一级相对论改正. 改变一下符号是有益的. 能量 E 能够表达成

$$E = mc^2(1 + \mathcal{E}),$$

因而有

$$\frac{E - V(x)}{mc^2} = 1 + \mathcal{E} - \kappa x^2 = 1 + \kappa(b^2 - x^2), \quad (7-148)$$

式中

$$\kappa = \frac{k}{2mc^2}. \quad (7-149)$$

到 $(\kappa b^2)^2$ 这一级, (7-147) 形式的周期将化为

$$\tau \simeq \frac{4}{c} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{2\kappa(b^2 - x^2)}} \left(1 - \frac{3\kappa}{4}(b^2 - x^2) \right). \quad (7-150)$$

式(7-150)中的积分可用初等方法求解,最简单的是改变一下变量,令 $x = b \sin \phi$, 最后的结果为

$$\tau \simeq \frac{2\pi}{c} \frac{1}{\sqrt{2\kappa}} \left[1 - \frac{3}{8} \kappa b^2 \right] = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \left[1 - \frac{3kb^2}{16mc^2} \right].$$

可以看出,括号前的表达式正好是谐振子的非相对论周期 τ_0 . 因此,在狭义相对论中,谐振子的周期与振幅并非无关,而是有一个与振幅相关的改正项,它近似地为

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = -\frac{\Delta\tau}{\tau_0} \simeq \frac{3}{16} \frac{kb^2}{mc^2} = \frac{3}{8} \mathcal{E}. \quad (7-151)$$

3. 带电粒子在恒定磁场中的运动 原则上,我们将从

1) 参阅 Encyclopedia of Physics, 1960, 卷III/1 中的 J. L. Synge, Classical Dynamics, p. 211.

(7-141)形式的拉氏函数着手,这里的 $\phi = 0$, 而 \mathbf{A} 则相当于一个恒定磁场[式(5-106)]. 但我们知道,这种拉氏函数对应于带电粒子所受的洛伦兹力,即[见式(1-61)]

$$\mathbf{F} = \frac{q}{c}(\mathbf{V} \times \mathbf{B}). \quad (7-152)$$

因而运动方程必为

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{q}{c}(\mathbf{V} \times \mathbf{B}) = \frac{q}{mc\gamma}(\mathbf{p} \times \mathbf{B}). \quad (7-153)$$

(7-152)形式的力的性质显然使磁场对粒子不作功,即 $\mathbf{F} \cdot \mathbf{V} = 0$. 因此,根据式(7-95), T 必定是一个常数,而根据式(7-100), p 和 γ 也是常数. 此外,根据式(7-152),在平行于 \mathbf{B} 的方向上没有力的分量,而沿着该方向的动量分量必定保持不变. 所以仅仅考虑在垂直于 \mathbf{B} 的平面内的运动,并让 \mathbf{p} 代表总线动量在该平面上的投影都不会失去其普遍性. 因而式(7-153)表明,矢量 \mathbf{p} (其量值不变)将绕磁场方向进动,其频率为

$$\Omega = \frac{qB}{mc\gamma}. \quad (7-154)$$

由于 γ 是常数,因而该平面内的速度矢量也具有恒定的量值,并以相同的频率转动. 所以粒子必定在平面内沿某一圆形轨道匀速运动,其角速度为 Ω . 由此可得,平面内线动量量值必定为

$$p = m\gamma r\Omega.$$

把这一表达式同式(7-154)组合起来,即得圆半径和动量之间的关系式

$$r = \frac{p}{qB/c}. \quad (7-155)$$

粒子运动弯曲的曲率半径仅通过比值 $pc/q (= Br)$ 与粒子的性质相关,这种情况有时称为粒子的磁刚性. 注意,尽管

由于 γ 的存在, Q [式 (7-154)] 显现出了相对论改正, 而 r 和 p 之间的关系式在相对论和非相对论情况下都相同. 应该记住, 式 (7-154) 和 (7-155) 中的 p 都是垂直于 \mathbf{B} 的动量的量值, 但在计算 γ 的时候, 必须同时利用垂直的和平行的分量先求得 β^0 .

7-9 协变的拉格朗日表述

前面给出的拉格朗日表述显然预示了正确的相对论运动方程. 但还只是“某种意义上”的相对论表述. 尚未作出努力使所有力学定律都保持理想的协变四维形式. 例如, 时间 t 被看作是一个完全不同于空间坐标的参量, 而协变表述则要求把空间和时间看作是世界空间内完全相同的坐标. 显然, 我们应该用某个不变参量而不是用 t 来描绘系统点在位形空间内的演变. 此外, 前节所讨论的那些拉氏函数的例子, 也不具备任何特定的洛伦兹变换性质. 哈密顿原理本身应该是明显协变的, 这只能意味着在这种情况下的作用量积分应该是一个世界标量. 如果积分参量是一个洛伦兹不变量, 则拉氏函数本身在任何协变表述中都应是一个世界标量. 最后, 拉氏函数不再是 x_i 和 \dot{x}_i 的函数, 而应是明可夫斯基空间内的坐标以及它们对于不变参量的微商的函数.

我们将主要考虑只有一个粒子的系统. 在这种系统内, 似乎很自然地应选择粒子的原时 τ 作为不变参量. 但这样一来, 广义速度的各个分量 u_ν 必须服从关系式

$$-u_\nu u_\nu = c^2, \quad (7-75)$$

-
- 1) 回转频率 (7-154) 不应与式 (5-104) 给出的拉莫尔频率相混淆. 的确, 节 (5-9) 的拉莫尔定理在这里是不适用的, 因为平面内的运动动能与式 (5-110) 中的 ω_j^2 项具有相同的数量级, 两者都可以与 B 的线性项相比拟. 因此, 拉莫尔定理的条件在这种情况下是不满足的.

这表明它们不是独立的。所以，我们将改为假设，所选的某个洛仑兹不变量 θ 除了它是世界点沿粒子世界线演变的一个单调函数外，对它不再作进一步的规定。为了作这样的讨论，我们将用右上角的一撇表示对 θ 的微商：

$$x'_\nu \equiv \frac{dx_\nu}{d\theta},$$

而用字母上的一点表示对 t 的微商。因此，一个合适的协变哈密顿原理必定表现为

$$\delta I = \delta \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Lambda(x_\mu, x'_\mu) d\theta, \quad (7-156)$$

这里的拉氏函数 Λ 必定是一个世界标量。注意，这种表述包括了通常所说的“与时间相关的拉氏函数”，因为 Λ 被看作是 x_4 的函数。对应于式(7-156)的欧拉-拉格朗日方程为

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\mu} \right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\mu} = 0. \quad (7-157)$$

问题在于求得某种形式的 Λ ，使式(7-157)等效于运动方程(7-83)。

求取 Λ 的方法之一是把作用量积分从通常的对 t 的积分变换为对 θ 的积分；同时不把拉氏函数中显含的时间 t 看作是一个参量，而是看作一个附加的广义坐标。由于从某个洛仑兹系统内测量时， θ 必定是 t 的一个单调函数，因而有

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dx_i}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = ic \frac{x'_i}{x'_4}. \quad (7-158)$$

而作用量积分则被变换为

$$\begin{aligned} I &= \int_{t_1}^{t_2} L(x_j, t, \dot{x}_j) dt \\ &= -\frac{i}{c} \int_{\theta_1}^{\theta_2} L \left(x_\mu, ic \frac{x'_j}{x'_4} \right) x'_4 d\theta. \end{aligned}$$

所以一个可取的 Λ 形式似乎应该是

$$\Lambda(x_\mu, x'_\mu) = -\frac{ix'_4}{c} L\left(x_\mu, ic \frac{x'_j}{x'_4}\right). \quad (7-159)$$

然而用这种方法求得的拉氏函数是一个奇怪的东西,与我们到目前为止所遇到过的任何拉氏函数都不同. 注意,不论 L 的函数形式如何,新的拉氏函数 Λ 总是广义速度的一次齐次函数:

$$\Lambda(x_\mu, ax'_\mu) = a\Lambda(x_\mu, x'_\mu). \quad (7-160)$$

这种现象并不是相对论物理学所固有的:它是一种数学结果,目的是为了扩大位形空间,以便把 t 作为一个动力学变量,并用其他某个参量来表示系统点在空间内的移动.服从式(7-160)的拉氏函数常称为齐次拉氏函数(这多少会引起一点误解),而相应的变分计算的“齐次”问题则需要特殊处理¹⁾.这样引起的最严重的困难将出现在哈密顿表述中,但我们还是能窥见其一、二的,例如,按照式(2-56),就会看到能量函数 h 结果将恒等于零.根据齐次函数的欧拉定理可知,如果 Λ 对于 x'_μ 的一次是齐次的,则

$$\Lambda = x'_\mu \frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\mu}.$$

因而能够证明(见章末习题 29),函数 Λ 同样满足下列关系式:

$$\left[\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\mu} \right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\mu} \right] x'_\mu = 0. \quad (7-161)$$

因此,如果式(7-157)中的任何三个拉氏函数是满足的,那么,仅仅根据 Λ 的齐次性质就可断定第四个拉氏函数也同样满足.

所以说,当我们把这种变换用于一个自由粒子时,必须小

1) 充分的说明可参阅 H. Rund, *The Hamilton-Jacobi Theory in the Calculus of Variations* (New York, Van Nostrand 1966), 第三章.

心从事。根据式(7-136),自由粒子的“非协变”拉氏函数为

$$L = -mc\sqrt{c^2 - \dot{x}_i \dot{x}_i}.$$

根据式(7-159)的变换,一个可能的协变拉氏函数是¹⁾

$$\Lambda = -mc\sqrt{-x'_\mu x'_\mu}. \quad (7-162)$$

采用这种拉氏函数的欧拉-拉格朗日方程相当于

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{mcx'_\nu}{\sqrt{-x'_\mu x'_\mu}} \right) = 0.$$

参量 θ 必定是原时 τ 的一个单调函数,以致对 θ 的微商将通过 τ 与那些参量相关联,并服从关系式

$$x'_\nu \equiv \frac{dx_\nu}{d\theta} = \frac{d\tau}{d\theta} u_\nu.$$

因此,拉格朗日方程相当于

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{mcu_\nu}{\sqrt{-u_\nu u_\nu}} \right) = \frac{d(mu_\nu)}{d\tau} = 0,$$

这正是关于自由粒子的式(7-83)。前面已看到,这些方程中的第四个方程表明动能 T 守恒[见式(7-95)],这当然不是新结果,而是能够从其他三个方程推导而得的。

这就是我们得到的、协变的拉格朗日步骤,它至少对于单个自由粒子是起作用的,只是推演起来颇为曲折。然而,只要采取一些大胆而又富有实效的步骤,这种精心推敲而得的结构是能够大为简化的。首先,我们能够避免利用 θ ,并根据狄拉克在内容稍为不同的叙述中引进的步骤,直接利用原时 τ 。通过 τ 加于广义速度的约束式(7-75)并不是对运动的真正

1) 在推导式(7-162)的代数运算中,必须解决符号上存在的二重性,以便使 Ldt 和 $\Lambda d\theta$ 具有相同的数值。推导中的最后一步应表达成

$$\begin{aligned} \Lambda &= imc \sqrt{x'^2_4 + x'_j x'_j} = -mc \sqrt{(-i)^2} \cdot \sqrt{x'^2_4 + x'_j x'_j} \\ &= -mc \sqrt{-x'_\mu x'_\mu}. \end{aligned}$$

还要注意,选择特殊的度规式(7-53)时,将消去平方根内的负号,但会带来符号上的其他复杂情况。

的动力学约束，而是用什么方法来定义 τ 的一个几何结果。式(7-75)实际上表明我们不能在整个四维 u_ν 空间内任意驰骋，而只能局限于该空间内的某一特定的三维表面上。狄拉克把式(7-75)这样的关系式叫做弱方程。我们能够泰然地把 u_ν 作为无约束量来处理，只在完成了所有微商运算之后才需要加上式(7-75)的条件。当然，在前面求取自由粒子拉氏函数时，也可以采用这种步骤。如果一开始即让 θ 等于 τ ，并到最后一步才应用式(7-75)，则同前面的做法不会有什么差别。以此为条件，就能直接用 τ 把协变的拉格朗日方程表达成

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial u_\nu} \right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\nu} = 0. \quad (7-163)$$

其次，哈密顿原理中的作用量积分不论是用 t 还是用 θ (或 τ) 表示都必定具有相同的数值，这并不是一条神圣不可侵犯的物理定律。没有必要墨守式(7-159)的陈规。全部要求仅仅在于 Λ 必须是一个能够得出正确运动方程的世界标量 (或是世界标量的某个函数)。它也不一定要是广义速度的一次齐次函数。例如，适用于自由粒子的 Λ 显然将是二次式

$$\Lambda = \frac{1}{2} m u_\nu u_\nu. \quad (7-164)$$

当然，还有许多其他的可能性¹⁾。在所有往后的讨论中，都将使用式(7-162)作为拉氏函数的“动能”部分，从而可以避免掉现在和将来的许多麻烦。

1) 一般， Λ 具有 $m f(u_\nu u_\nu)$ 的形式，其中 $f(y)$ 是保证

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y=-c^2} = \frac{1}{2}$$

的 y 的任何一个函数。式(7-164)中使用了

$$f(u_\nu, u_\nu) = \frac{1}{2} u_\nu u_\nu.$$

式(7-162)则选用 $f(u_\nu, u_\nu) = -c \sqrt{-u_\nu u_\nu}$.

如果粒子受到外力作用,因而不是自由的,则应在式(7-164)的拉氏函数中加上相互作用项,以得到相应的明可夫斯基力.除了这种附加项必须是洛仑兹不变量外,现在这个时候对它们几乎没有什么可以说的了.例如,如果 G_μ 是某个(外加的)四维矢量,那么, $G_\mu x_\mu$ 将是一个合适的相互作用项.如果在某个特定的洛仑兹参照系内, $G_1 = ma$,而其他分量都等于零,我们就会有一个象前节中讨论过的恒力的例子.一般,这些附加项将代表粒子与某个外场的相互作用.特有的形式将取决于场论的协变表述.我们只有一个曾经以协变方式表达的场的例子——电磁场.因此,研究电磁场中粒子的拉氏函数是有启发意义的.

不难看出,合适的拉氏函数是

$$\Lambda(x_\mu, u_\mu) = \frac{1}{2} m u_\mu u_\mu + \frac{q}{c} u_\mu A_\mu(x_\lambda). \quad (7-165)$$

相应的拉格朗日方程则是

$$\frac{d}{d\tau} (m u_\nu) = -\frac{q}{c} \frac{dA_\nu}{d\tau} + \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\frac{q}{c} u_\mu A_\mu \right),$$

这正好是广义的运动方程(7-83)式,作用于粒子上的明可夫斯基力 K_ν ,则由式(7-88)给出.注意,四维“机械动量”矢量 p_μ 由于电磁势的线性项的存在又一次不同于正则动量 p_μ :

$$p_\mu = \frac{\partial \Lambda}{\partial u_\mu} = m u_\mu + \frac{q}{c} A_\mu = p_\mu + \frac{q}{c} A_\mu. \quad (7-166)$$

所以,共轭于 x_4 的正则动量为

$$p_4 = \frac{iT}{c} + \frac{iq\phi}{c} = \frac{i}{c} E,$$

式中的 E 是粒子的总能量 $T + q\phi$.因而共轭于时间坐标的动量正比于总能量.这两个量之间的一个相似的共轭关系将在以后的非相对论中重新提到.空间“机械”动量的量值与能

量 T 之间的关系仍由式 (7-100) 给出。从式 (7-166) 可以看到，共轭于 x_i 的正则动量构成了空间笛卡儿矢量 \mathbf{p} 的各个分量， \mathbf{p} 与 \mathbf{p} 之间的关系为

$$\mathbf{p} = \mathbf{p} + \frac{q}{c} \mathbf{A}. \quad (7-167)$$

借助于 \mathbf{p} ，式 (7-100) 能重新表达成

$$T^2 = \left(\mathbf{p} + \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 + m^2 c^4, \quad (7-168)$$

这是能量 T 与正则动量矢量 \mathbf{p} 之间的一个非常有用的关系式。

式 (7-165) 的拉氏函数中的相互作用项是矢量场相互作用 (因而也是 $G_\mu x_\mu$ 形式的那种项) 的一个例子。还可能有一个简单的标量场的相互作用，这时，加于拉氏函数的附加项将是某个世界标量 $\phi(x_\mu)$ 。或者，还可能构想出一些更复杂的不变的相互作用项，它们将涉及某个外加张量场。这些拉氏函数的性质完全起源于有关的物理场论，在此不可能再进一步讨论。

到目前为止，我们提到的仅仅是包含单个质点的系统。多粒子系统会引进新的复杂性。明显的问题是要设法找到一个不变参量来描述系统的演变——系统内的每一个粒子都有它自己的原时。但很快就能想出解决这一困难的办法。例如，与 C—O—M 系相联系的原时包含有对所有粒子的对称处理，也许可以证明它是合适的。在这种描述中，还能包括粒子与外场的相互作用，这同单个粒子的情况非常相似。然而，巨大的障碍是处理在非相对论力学中极为自然而又常见的那类相互作用——粒子间的直接相互作用。

乍一看来，似乎这种相互作用在相对论力学中是完全不可能的。作用在一个粒子上的力有赖于其他粒子在同一时刻

的位置和速度，这种说法意味着效应的传播能以无限的速度从一个粒子传到另一个粒子——“超距作用”。在狭义相对论中，讯号的传播不可能快于光速，超距的作用似乎是不允许的。但从某种意义上来说，这一说法又好象是正确的。早在1963年就已正式证明，如果我们要求系统的某些性质能以正常的方式表现出来(象总线动量守恒等)，那么，除了接触力，粒子之间不可能有协变的直接相互作用。

近几年来，曾多次企图弄清这一“非相互作用”定理。最后，终于看到了电磁力是能够协变地表示的，静电场引起了库仑引力定律，其形式与本来应予禁止的牛顿引力的形式相同。某些尝试已经导致一些近似的协变拉氏函数，它们在 v^2/c^2 这一级是正确的¹⁾。其他尝试则涉及到一些与通常结构不相符合的力学表述；比如说，大多数表述都不可能用一个简单的哈密顿原理来阐明。在这个领域内，积极的探索仍在继续进行，现在就预言其最终结局为时尚早。我们也不清楚这些发展将对其他物理学分支(象粒子物理学)会产生什么结果。这一领域到1973年为止的状况，可参阅后面所引的某些参考资料。

推荐参考书目

A. P. Franch, *Special Relativity* 相对论著作的出版已是具有世界规模的行业之一，特别是在近几十年内。即使列出极小一部分有价值的参考书，也是篇幅所不允许的，因此，这里只能给出少数几本由个人精选的参考书。Franch的这本书已经被公正地赞誉最佳的引论之一。书中所用数学相当于大学一、二年级物理专业的水平，书中着重强调了那些导致并证实狭义相对论的实验现象。与力学有关的两章主

1) 许多拉氏函数到 v^2/c^2 这一级是协变的，这在“非相互作用”定理前的许多年就已经知道了，例如，两个运动带电粒子间的相互作用的布赖特-达尔文拉氏函数早在1920年就已发表了。

要论述了守恒定理和相对论力。

Albert Einstein, *The Meaning of Relativity* 这不是一部适合于大众读者的论著。在这简短的著作中，只有三分之一左右论述了狭义相对论，但它却包含有极为丰富的资料。该书认为读者已经具备了相当好的电动力学基础。

R. D. Sard, *Relativistic Mechanics: Special Relativity and Classical Particle Dynamics* 这是一部中级力学教程水平的相对论力学；没有讨论拉格朗日力学。书中有着别处找不到的多得难以置信的资料。在推导洛伦兹变换时，特别注意把必要的先决条件压缩到最少。相当突出地讨论了质点运动学。几乎自始至终都采用了明可夫斯基空间。

K. R. Symon, *Mechanics* 作为一部中级水平的教科书，最后两章的详尽程度在相对论论著中是不多见的。很早就同迹为 +2 的度规张量一起引述了四维空间，因而为在非欧空间内处理问题作了从容的准备。

J. L. Synge 和 A. Schild, *Tensor Calculus* 该书的第二章是在黎曼空间内处理张量的最为简洁的参考之一。名家的相对论著作，不论是狭义的还是广义的，都是一些多卷集，致使偶而涉足的读者难免会望而却步，但即使是这样，这部著作还是应该阅读的。

J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics* 这本著名教科书的第一版几乎包含有狭义相对论的全部课题，从迈克耳孙-莫雷实验到粒子加速器中的相对论运动，其中有一节极为广泛地论述了反应运动学。书中采用了 $x_4 = ict$ 的明可夫斯基复空间。第二版中改用了迹等于 -2 的空间，并且删除了大多数早期实验以及所有论述运动学的章节。有关拉格朗日表述的讨论已经推广到包括一个以上粒子的拉氏函数，它们仅是近似的相对论表述，另有各种场的拉氏函数，它们都是在后面第十二章中讨论的。这两个版本合在一起，对于狭义相对论来说，几乎是应有的了。事实上，初版本更适合于作为本章的参考。

H. M. Schwartz, *Introduction to Special Relativity* 这本参考书是全面论述狭义相对论的代表性专著，特别是论述方式与我们的大致相同。值得注意的是对洛伦兹变换的群的性质和对托马斯进动的论述。开始时的讨论是以明可夫斯基空间为基础的。虽然张量在平坦空间内

的应用讨论得极为详细，但不清楚最后所用的是怎样的迹或符号差。

V. Fock, *Theory of Space, Time and Gravitation* 卓越的俄国物理学家的这本专著,大部分论述了我们所说的广义相对论。但在前100页讨论了狭义相对论,并有许多独到之处,象对“佯谬”实验的详尽分析以及把洛仑兹变换分成一个转动和一个纯洛仑兹变换等。凡是用到张量的地方,空间的迹或符号差大多为 -2 。

C. W. Misner, K. S. Thorne 和 J. A. Wheeler, *Gravitation* 这本厚厚的专著 [1279 页! (双关语极为普遍)], 因努力设法帮助读者顺利通过迷津而受到赞扬。教学注释分别包括有标记轨道、各类框图、旁注和精心设计的示意图。书末有一吹喇叭的天使, 并因在其他条目中有几首法国歌曲和忠实的“相对论者”的颇相学示图而驰名。这使得读起来饶有风趣, 但也不是毫无困难的。平坦时空(即狭义相对论)只占193页, 在论述其中的每一方面时都有着令人清新的新观点。第51页上宣告了 *ict* 的末日, 并改用了符号差为 $+2$ 的度规。

A. O. Barut, *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles* 作为洛仑兹协变场论的初步论述, 作者简要地介绍了协变的质点动力学。值得注意的课题包括有洛仑兹变换的群的结构、隐含于洛仑兹变换中的转动矩阵, 以及各种协变拉氏函数等。所用度规的迹为 -2 。

R. Hagedorn, *Relativistic Kinematics* 当然, 这本书的论题范围比我们讨论的运动学要广泛得多, 但包括了这里讨论的所有课题。书中直接利用了洛仑兹变换方程, 而且在大多数情况下是与各种不变量一起使用的, 但有一章简略地讨论了张量符号, 并对符号差 -2 和 $+2$ 分别给出了一套公式。按照粒子物理学中的惯例, 自始至终用 β 代替了 v (虽然仍写成 v), 所用质量则是相对于质子质量而言的。

H. Rund, *Hamilton-Jacobi Theory in the Calculus of Variations* 这本参考书是公然正视齐次问题并给予详细讨论的少数几本参考书之一(见第三章)。我们没有采用它所给出的特解。但该书在数学方面的讨论具有指导意义。在讨论相对论时采用了明可夫斯基空间。

R. A. MANN, *The Classical Dynamics of Particles: Galilean and Lorentz Relativity* 狭义相对论只占这本相对简短的著作中的一

小部分,它基本上是论述力学的一般性教科书,因而作出的论述比我们所期望的更为简略.但它是论及超光速粒子并对“非相互作用”定理作出证明的极少数几本书籍之一.狭义相对论的描述采用了符号差为 -2 的空间.作者对群论简直是着了迷.

E. H. Kerner, *Theory of Action-at-a-Distance in Relativistic Particle Dynamics* 本书主要是把论述本题的一些基本论文收集在一起而成的.其中有一篇是编者根据到1972年为止的事态写就的概括性简要引论.从那时以来,这一领域已经、并将继续得到发展.我们应及时注意期刊上的文献.

习 题

1. 考虑一个由 n 个质点组成的力学系统,它有一保守势,势的各项仅与各对质点之间的标量距离有关.明显地证明,当用由伽利略变换导得的坐标表示时,这个系统的拉氏函数在形式上与原先的拉氏函数只差一项,这一项是位置矢量的函数的时间全微商.这是点变换下不变性的一种特殊情况(见第一章习题15).

2. 对式(7-18)作一相似变换来求取洛伦兹变换,所得变换中的速度是从 x 轴逆时针转过一无限小角度 $d\theta$ 处的速度.直接证明最后所得的矩阵是正交的,并证明,用 $-v$ 代替 v 即得其逆矩阵.

3. 证明,如果 $\mathbf{K}(\beta)$ 是并矢式

$$\mathbf{K}(\beta) = 1 + \frac{\beta\beta(\gamma - 1)}{\beta^2},$$

则纯洛伦兹变换空间部分的并矢式形式为

$$\mathbf{r}' = \mathbf{K}(\beta) \cdot (\mathbf{r} - \beta ct).$$

4. 长度为 l_0 的火箭在其静止系统内沿一惯性系的 x 轴以恒定速率运动着.在这一系统的原点处的观测者根据火箭头、尾在某一时刻的 x 坐标观测了火箭的表现长度.试问当火箭从观测者的极左边运动到极右边时,这一表现长度是如何变化的?

5. 系统 A 内观测到的系统 B 的速度矢量与系统 B 内观测到的系统 A 的速度矢量的量值相等、符号相反,这在狭义相对论中不一定是明显的.根据 \mathbf{L} 的正交性质证明,这两个矢量具有相同的量值,而且事实

上是相互反向的。为简单起见，可假设是纯洛仑兹变换，虽然这一条件对于证明并不是必要的。

6. 根据下述想法也能求得爱因斯坦加法定律：第二个速度与四维速度的空间分量直接相关，因而可以通过一个洛仑兹变换可以回到最初的系统。如果第二个系统在 z 轴方向上以速率 v' 相对于第一个系统运动，而第三个系统又以任意取向的速度 v'' 相对于第二个系统运动，试就这一过程证明第一个和第三个系统之间的速度 v 的量值为

$$\sqrt{1 - \beta^2} = \frac{\sqrt{1 - \beta'^2} \sqrt{1 - \beta''^2}}{1 - \beta' \beta''}$$

而 v 的各个分量为

$$\beta_x = \frac{\beta''_x \sqrt{1 - \beta'^2}}{1 + \beta' \beta''_x}, \quad \beta_y = \frac{\beta''_y \sqrt{1 - \beta'^2}}{1 + \beta' \beta''_x},$$

$$\beta_z = \frac{\beta' + \beta''_z}{1 + \beta' \beta''_z}.$$

这里的 $\beta''_x = v''_x/c$ ，其余类推。注意，如果 v'' 沿 z 轴，则 β_x 的方程正确地将化为式 (7-22) (当然，符号是不同的)。

7. 证明，前一习题中第一和第三两系统之间的速度的量值一般可表达成

$$\beta^2 = \frac{(\beta' + \beta'')^2 - (\beta' \times \beta'')^2}{(1 + \beta' \beta'')^2}.$$

8. 以均匀速度运动的一束粒子与静止在一个特定系统内的一群靶粒子相碰撞。设 σ_0 是这一系统内观测到的碰撞截面。在另一系统内，入射粒子具有归一速度 β_1 ，而靶粒子的归一速度为 β_2 。如果 σ 是这另一系统内观测到的截面，证明

$$\sigma = \sigma_0 \sqrt{1 - \frac{(\beta_1 \times \beta_2)^2}{(\beta_1 - \beta_2)^2}}.$$

记住，洛仑兹变换下的碰撞率必定是不变量。

9. 如果一变换集具有下列四个特点，就说它们具有群的性质：

(1) 等效于两次相继变换(各变换之“积”)的变换是该集的一个成员。

(2) 乘积运算服从结合律。

(3) 恒等变换是该集的一个成员。

(4) 该集中各个变换的逆变换也是该集的一个成员。

证明, 完全洛伦兹变换集和限制洛伦兹变换集(分别)具有群的性质, 但其它类洛伦兹变换则不然。

10. 证明, 式(7-31)定义的矩阵 R 具有空间转动的形式。只要明显地构成元素 R_{ii} , R_{ij} 和 R_{ji} , 并检查一下元素为 R_{ij} 的 3×3 矩阵的性质即可证明这一点。还要证明, 不可能有两个转动矩阵使式(7-28)得到满足, 即 R 是唯一的。最后证明, L 同样可以唯一地分解为一次转动和一个纯洛伦兹变换, 其形式为

$$L = P'R'$$

11. 试从数值上计算地球“切近”卫星(长半轴近似地等于地球的半径)的托马斯进动率的数值。把这一结果与由于地球的扁球形引起的轨道进动率相比较。假设卫星轨道平面对赤道平面倾斜 30° 。

12. 把矢量形式的洛伦兹变换(7-61)和式(7-62)直接相乘, 证明

$$r'^2 - c^2t'^2 = r^2 - c^2t^2$$

13. 乘上适当的 Q 矩阵式(7-63)来检查一下对应于两个纯洛伦兹变换之积的变换。证明, 该乘积包含有一个空间转动, 其方向由 $\kappa_1 \times \kappa_2$ 给出, 转过的角度 θ 则决定于方程

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos h\psi_1 + \cos h\psi_2 + \cos h\psi_3}{4 \cos h \frac{\psi_1}{2} \cos h \frac{\psi_2}{2} \cos h \frac{\psi_3}{2}}$$

式中 ψ_3 给出了两次相继变换的有效相对速率, 其形式为

$$\cos h\psi_3 = \cos h\psi_1 \cos h\psi_2 + \kappa_1 \cdot \kappa_2 \sinh\psi_1 \sinh\psi_2$$

14. 证明, 每一个平面波都有一个包含有频率和波数的协变四维矢量与之相关联。从四维矢量各分量的最后变换方程来推导多普勒效应方程。

15. 根据世界加速度的变换性质证明, 加速度 \mathbf{a} 的各个分量是用(相对于质点瞬时静止的系统内的)变换后加速度 \mathbf{a}' 给出的, 有关公式为

$$a'_x = \frac{a_x}{1 - \beta^2}, \quad a'_y = \frac{a_y}{1 - \beta^2}, \quad a'_z = \frac{a_z}{(1 - \beta^2)^{3/2}}$$

x 轴则选在相对速度的方向上。

16. 把动量为式(7-90)的运动方程(7-89)展开,从而证明,只当速度平行或者垂直于加速度时,力才会平行于加速度.求取这两种情况下加速度系数的表达式.在老的文献中,这些系数分别称为纵质量和横质量.

17. 观测到质量为 m_1 和 m_2 的两个质点沿着观测者的 z 轴分别以速率 v_1 和 v_2 相向运动着.碰撞后,看到它们结合成一个质点,其静止质量为 m_3 ,并以速率 v_3 相对于观测者而运动.试用 m_1, m_2, v_1 和 v_2 表示 m_3 和 v_3 .如果 m_1 和 m_2 都不等于零,那么,所得质点是否可能是光子,即 $m_3 = 0$?

18. 在第一章习题 1 中论及的 β 衰变中,电子质量具有相当于 0.511 MeV 静止能量,而中微子的质量为零.试问,电子和中微子带走的总能量是多少?核质量的多大部分转变为动能(包括电子的静止能量在内)?

19. 一个质量为 π 的介子静止下来,并且衰变为一个质量为 μ 的介子和一个零质量中微子.证明, μ 介子的运动动能(即不包含静止质能)为

$$T = \frac{(\pi - \mu)^2}{2\pi} c^2.$$

20. 一个静止质量为 139.6 MeV 的 π^+ 介子,与静止质量为 939.6 MeV、并静止在实验室系内的一个中子相碰撞,从而产生一个静止质量为 494 MeV 的 K^+ 介子和一个静止质量为 1115 MeV 的 Δ 超子.试问实验室系内这一反应的阈能是多少?

21. 一个光子可被经典地描述为一个零质量粒子,它的动量为 $h/\lambda = h\nu/c$,因而动能为 $h\nu$.如果光子与一个质量为 m 的静止电子相碰撞,它就会被散射,假设散射角为 θ ,新的能量为 $h\nu'$.证明,能量变化与散射角度的关系可表达成公式

$$\lambda' - \lambda = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

式中 $\lambda_c = h/mc$ 称为康普顿波长.再证明电子的反冲运动的动能为

$$T = h\nu \frac{2 \left(\frac{\lambda_c}{\lambda} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2}}{1 + 2 \left(\frac{\lambda_c}{\lambda} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2}}.$$

22. 一个能量为 \mathcal{E} 的光子以 θ 角度与另一个能量为 E 的光子相碰撞. 证明, 有可能生成质量为 m 的粒子对的最小 \mathcal{E} 值为

$$\mathcal{E}_{th} = \frac{2m^2c^4}{E(1 - \cos\theta)}.$$

23. 第一章习题 3 中论述的火箭运动理论, 在相对论领域内不再适用, 部分原因是质量不再守恒. 现在的所有的守恒定律组合成了世界动量的守恒, 在无限小 dt 时间内, 火箭的世界动量各分量的变化, 应与这段时间内火箭喷出气体的 p_v 的同一分量值相当. 证明, 如果无外力作用于火箭, 则作为质量的函数, 它的速度的微分方程应为

$$m \frac{dv}{dm} + a \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = 0,$$

式中 a 是排出的气体相对于火箭的常值速度. 证明解的形式为

$$\beta = \frac{1 - \left(\frac{m}{m_0} \right)^{2a/c}}{1 + \left(\frac{m}{m_0} \right)^{2a/c}},$$

式中 m_0 是火箭原来的质量. 由于质量不守恒, 损失的质量将会怎么样呢?

24. 求取从静止原点开始所作双曲线运动中的时间 t_0 , 如在这 t_0 时间后从原点发射光子, 则该光子决不可能赶上运动中的粒子.

25. 一个静止质量为 m 、电荷为 q 的质点, 以初速 v_0 进入垂直于 v_0 的匀强电场 \mathbf{E} 中. 求以后质点的轨道, 并证明, 当极限值 c 趋于无穷大时它将成为抛物线.

26. 证明, 在平方反比律引力作用下的质点的相对论运动是一个进动的椭圆. 计算这种效应引起的水星近日点的进动. (答案是每一世纪约为 $7''$, 这一数值远小于每世纪 $40''$ 的实际进动值, 后者只有根据广义相对论才能正确地求得.)

27. 根据运动方程 (7-89) 推导维里定理在相对论中的对应定理, 该定理表明, 对于束缚于空间而且涉及到的速度并不无限趋近于 c 的运动, 有

$$L_0 + \bar{T} = -\overline{\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}},$$

式中 L_0 是无外力作用下拉氏函数所取的形式. 注意, 虽然 L_0 和 T 实际

上都不完全相当于非相对论力学中的动能,但它们之和 $L_0 + T$ 却相当于非相对论维里定理(3-26)中动能的两倍。

28. 一个适用于单个质点协变拉氏函数的广义势为

$$\mathcal{U} = -A_{\lambda\nu}(x_\mu)u_\lambda u_\nu,$$

式中 $A_{\lambda\nu}$ 代表对称的二级世界张量, u_ν 是世界速度的分量。如果拉氏函数等于式(7-164)减去 \mathcal{U} , 试求拉格朗日运动方程。明可夫斯基力是什么? 给出某一洛仑兹参照系内观测到的力的各个分量。

29. 明显地构成式(7-161)中出现的 θ 的全微商, 从而证明, 如果 Λ 满足拉格朗日方程, 那么, 根据 Λ 的齐次性, 它也同样满足式(7-161)。

30. 采用拉格朗日乘子法并引进式(7-75)的约束, 以构成用原时表示的单个质点的协变拉格朗日方程。在变分原理中, 拉氏函数 Λ (假设它并不显含 τ) 为下式所替代:

$$\Lambda' = \Lambda + \frac{\lambda(\tau)}{2}(c^2 + u_\mu u_\mu).$$

证明, λ 的欧拉-拉格朗日方程给出了式(7-75)。 x_μ 的欧拉-拉格朗日方程包含有 λ 对 τ 的微商。再证明, 求积这些方程就能给出一个 λ 的表达式, 从该式得到拉格朗日方程

$$\frac{d}{d\tau} \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial u_\nu} \left(\delta_{\mu\nu} + \frac{u_\mu u_\nu}{c^2} \right) - \frac{\Lambda u_\mu}{c^2} \right] - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\mu} = 0.$$

第八章 哈密顿运动方程

在开头两章中,我们主要研究了力学的拉格朗日表述,其后的讨论大多数具有应用的性质,但仍在拉格朗日方法的范围之内.在这一章中,我们将重新致力于力学形式的探讨,而把注意力转向陈述另一种称为哈密顿表述的理论结构.没有添加什么新的物理含义,只是用已经建立的物理原理探索另一种(更有效)的研究方法.对于力学问题的直接解,哈密顿方法比拉格朗日技巧并不特别高明.更确切地说,哈密顿观点的优越性在于提供了一个在许多物理学领域内作理论推广的框架.在经典力学范围内,哈密顿表述为哈密顿-雅可比理论和微扰法这样一些进一步的发展奠定了基础.在经典力学之外,哈密顿表述为今天的统计力学和量子力学的建立提供了丰富的术语.在以后几章中,我们将假设所述力学系统都是完整动力学系统,而有关的力都是单演的,也就是说,它们或是从仅与位置有关的势,或是从节 1-5 中讨论过的与速度相关的那种广义势导出的.

8-1 勒让德变换和哈密顿运动方程

在(非相对论)拉格朗日表述中, n 个自由度的系统有 n 个运动方程,其形式为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (8-1)$$

由于是二阶方程,所以要决定系统在任何时刻的运动都必须先给定 $2n$ 个初始值,例如,在特定的 t_1 时刻的 n 个 q_i 和 n 个

\dot{q}_i , 或者在 t_1, t_2 两个时刻的 n 个 q_i . 我们用某个 n 维位形空间内的一点代表系统的状态 (该空间的坐标是 n 个广义坐标 q_i), 并在系统点沿着它在位形空间内的路径移动时及时地跟踪该点的运动. 实际上, 按照拉格朗日的观点, 一个 n 个独立自由度的系统是一个含有 n 个独立变量 $q_i(t)$ 的问题, 而 \dot{q}_i 仅仅被作为 q_i 的时间微商的速写而已.

哈密顿表述则以根本不相同的概念为基础. 我们希望能用一阶运动方程来描述运动. 由于决定运动的初始条件当然仍应是 $2n$ 个, 所以必须有用 $2n$ 个独立变量表示的 $2n$ 个独立的一阶方程. 这 $2n$ 个运动方程描述了以 $2n$ 个独立变量为坐标的相空间内系统点的特性. 在这样加了一倍的两组独立量中, 很自然 (虽然不是非此不可的), 所选择的一半是 n 个广义坐标 q_i . 正如我们将要看到的那样, 如果我们所选的另一半独立量组是广义的或共轭的动量 p_i , 则表述近乎是对称的. 这种 p_i 早就被引进了, 其定义为 [见式 (2-44)]

$$p_i = \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial \dot{q}_i}. \quad (8-2)$$

量 (q, p) 称为正则变量¹⁾.

然而, 从数学观点来看, 完全可以把 q 和 \dot{q} 看作是不同的变量. 在拉格朗日方程 (8-1) 中, L 对于 q_i 的偏微商意味着求导时把所有其他的 q 和所有的 \dot{q} 都看作是常数. 同样, 在对于 \dot{q} 的偏微商中, 所有的 q 都保持不变. 严格地作为数学问题看待时, 从拉格朗日表述过渡到哈密顿表述, 就相当于我们的力学函数中的变量从 (q, \dot{q}, t) 改变为 (q, p, t) , 这里的 p 通过式 (8-2) 与 q 和 \dot{q} 相关联. 以这种方式来代换变量的

1) 除非另作说明, 在这一章及以后各章中的 p 只用来表示共轭动量或正则动量. 当力与速度相关时, 正则动量与相应的机械动量是不同的 [见式 (2-47)].

步骤由勒让德变换来提供¹⁾,这一变换是特地为这类变量代换而构想的。

考虑只有两个变量的函数 $f(x, y)$, 这时, f 的微分形式为

$$df = udx + vdy, \quad (8-3)$$

式中

$$u = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial f}{\partial y}. \quad (8-4)$$

现在我们希望把描述的基础从 x, y 改变为某一新的不同的变量组 u, y , 使得各微分量用微分 du 和 dy 表示. 令 g 是 u 和 y 的函数, 它定义为

$$g = f - ux, \quad (8-5)$$

由此得 g 的微分为

$$dg = df - udx - xdu,$$

或者根据式 (8-3), 把它表达成

$$dg = vdy - xdu,$$

此式正是所要求的形式. 这里的 x 和 v 两个量是变量 u 和 y 的函数:

$$x = -\frac{\partial g}{\partial u}, \quad v = \frac{\partial g}{\partial y}, \quad (8-6)$$

这实际上是式 (8-4) 的逆关系式.

这样定义的勒让德变换在热力学中是经常用到的. 例如, 焓 X 是熵 S 和压强 P 的函数, 它服从关系式

$$\frac{\partial X}{\partial S} = T, \quad \frac{\partial X}{\partial P} = V,$$

从而有

1) 勒让德变换的几何解释以及它在微分方程论中所起的作用, 可参阅 R. Courant 和 D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics, Vol. II*, pp. 32-39, 1962.

$$dX = TdS + VdP,$$

这里的 T 和 V 分别是温度和体积。焓在研究等熵和等压过程时是有用的,但是,更为经常遇到的是等温和等压过程。在这种情况下,仅仅只要一个 T 和 P 的热力学函数。勒让德变换表明,所要求的函数可定义为

$$G = X - TS,$$

因而

$$dG = -SdT + VdP, \quad (8-7)$$

这里的 G 是熟知的吉卜斯函数或自由能,而式 (8-7) 正确地给出了它的性质。

从 (q, \dot{q}, t) 到 (q, p, t) 的变换与所考虑的从式 (8-3) 到式 (8-5) 的变换的不同之处只是被变换的变量不止一个。为了替代拉氏函数,让我们来考虑一个除了负号外其定义与式 (8-5) 相类似的函数:

$$H(q, p, t) = \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t) \quad (8-8)$$

(当然,这里采用了求和约定)。这里的 H 称为哈密顿函数。如果把 H 看作仅是 q, p 和 t 的函数,那么,它的微分是

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt, \quad (8-9)$$

但根据定义方程 (8-8),它也能表达成

$$dH = \dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (8-10)$$

根据广义动量的定义,式 (8-10) 中含有 $d\dot{q}_i$ 的各项都被消去,再根据拉格朗日方程可得

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot{p}_i.$$

于是,式 (8-10) 化成了简单的形式

$$dH = \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (8-11)$$

与式(8-9)相比,即可得到类似于式(8-6)的、由 $2n+1$ 个关系式组成的方程组

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad -\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (8-12)$$

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (8-13)$$

式(8-12)称为哈密顿正则方程,它们构成了一个用以替代拉格朗日方程的 $2n$ 个一阶运动方程组成的方程组¹⁾。

哈密顿方程的前一半给出了作为 (q, p, t) 的函数的各个 \dot{q}_i 。因此,它们成了把动量 p_i 定义为 (q, \dot{q}, t) 的函数的基本方程(8-2)的逆方程。因而可以说,它们并没有提供任何新的信息。借助正则方程求解力学问题这样的说法是正确的。但在哈密顿描述的范围内 $[H(q, p, t)$ 是某个任意取得的给定函数],哈密顿方程组的两半同样都是独立的和富有意义的。前一半表明了 \dot{q} 与 q, p 和 t 的依赖关系;后一半则说明了 \dot{p} 与 q, p 和 t 的依赖关系。

当然,哈密顿函数 H 是以相同方式构成的,并同式(2-53)所定义的能量函数 h 具有完全相同的数值。但它们是含有不同变量的函数:象拉氏函数一样, h 是 q, \dot{q} (可能还有 t)的函数,而 H 总是应表达成 q, p (可能还有 t)的函数。正是为了强调这种函数特性方面的差别,所以对各量使用了不同的符号,尽管它们具有相同的数值。

1) 就某种意义来讲,正则一词在这里是为说明这是一组简单而又一般的标准方程。这一名称似乎首先由雅可比于1837年所引进(Comptes rendus de L'Academie des Sciences de Paris, 5, P. 61),当时是为了把哈密顿运动方程应用于微扰理论,上、下文与这里略有不同。虽然该名称很快被普遍采用,但为什么要引进它甚至对同时代的人来说也显然是不清楚的。到1879年,在哈密顿明显地引进了他的方程之后仅仅45年,汤姆逊(开尔文爵士)和泰特(Tait)就“正则的”这一形容词声称“为什么作此称呼很难解释”(Treatise on Natural Philosophy, 1879, Vol. 1, p. 307)。

名义上，每个问题的哈密顿函数都应经由拉格朗日表述来建立。正式的步骤必须分好多步进行：

1. 根据选定的广义坐标组 q_i 建立拉氏函数 $L(q_i, \dot{q}_i, t)$;
2. 根据式 (8-2) 把共轭动量定义为 q_i, \dot{q}_i 和 t 的函数;
3. 利用式 (8-8) 构成哈密顿函数。在这一步中，我们得到的是 h 而不是 H ，或者更确切地说，是 q_i, \dot{q}_i, p_i 和 t 的某个混合函数;
4. 把式 (8-2) 反过来求得作为 (q, p, t) 的函数的 \dot{q}_i 。反演运算中可能出现的困难将在后面讨论;
5. 接下来利用前一步的结果从 H 中消去 \dot{q}_i ，从而把 H 表达为仅是 (q, p, t) 的函数。

现在，我们就可以把哈密顿函数直接用于正则运动方程了。

对于许多物理系统，有可能非常明显地把这种冗长的步骤加以缩短。正如节 2-6 中已经描述过的那样，在许多问题中，拉氏函数是一些函数之和，它们分别是广义速度的 0, 1 和 2 次齐次函数。在这种情况下，按照式 (8-8) 的规定， H 应为 [见式(2-57)]

$$H = L_2 - L_0, \quad (8-14)$$

式中的 L_0 是与广义速度无关的那部分拉氏函数； L_2 是 \dot{q}_i 的二次齐次的那部分拉氏函数。其次，如果定义广义坐标的那些方程并不显含时间，则 $L_2 = T$ ；如果有关的力是从某一保守势 V 推导的，则 $L_0 = -V$ 。当这两个条件都得到满足时，哈密顿函数自然就是总能量，即

$$H = T + V = E. \quad (8-15)$$

只要式 (8-14) 和式 (8-15) 中有一个成立，前面第 3 步中的许多代数运算就可省略掉。

有时还可作进一步的简化。在大量问题中， L_2 可能是广

义速度的二次函数，而 L_1 则是相同变量的线性函数。因此，从第 2 到第 5 步中所要求的代数运算能够一次完成，至少在形式上是如此。为了说明这一点，让我们把 q_i 组合成一个单列矩阵 \mathbf{q} 。根据给定的假设，拉氏函数可以表达成

$$L(q, \dot{q}, t) = L_0(q, t) + \bar{\mathbf{q}}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\bar{\mathbf{q}}\mathbf{T}\dot{\mathbf{q}}, \quad (8-16)$$

考虑到以后的运算需要，式中的单行矩阵已被明显地表达成单列矩阵的转置矩阵。这里的 \mathbf{a} 是一个列矩阵， \mathbf{T} 是一个 $n \times n$ 方阵（极象第六章中引进的相应矩阵）。这两个矩阵的元素一般都是 q 和 t 的函数。根据式(8-2)，被看作是一个行矩阵的共轭动量 \mathbf{P} 将表达成

$$\mathbf{P} = \mathbf{T}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{a}, \quad (8-17)$$

这能反过来表达成(第 4 步)

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{P} - \mathbf{a}). \quad (8-18)$$

这一步预先假定了 \mathbf{T}^{-1} 的存在，根据动能的正定性质，这一假定确实是正确的。根据式(8-14)，与能量函数 h 恒等的哈密顿函数为

$$h = \frac{1}{2}\bar{\mathbf{q}}\mathbf{T}\dot{\mathbf{q}} - L_0.$$

为了得到 H 的正确的函数形式，必须用式(8-18)替代 h 的二次部分中的 $\dot{\mathbf{q}}$ (第 5 步)。现在的 \mathbf{T} 明显地是一个对称矩阵，而且它的逆矩阵也必定是对称的。由此可得

$$\bar{\mathbf{q}}\mathbf{T}\dot{\mathbf{q}} = (\tilde{\mathbf{P}} - \bar{\mathbf{a}})\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{P} - \mathbf{a}).$$

因此，哈密顿函数的最后形式是

$$H(q, p, t) = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{P}} - \bar{\mathbf{a}})\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{P} - \mathbf{a}) - L_0(q, t). \quad (8-19)$$

如果拉氏函数能够写成式(8-16)的形式，就能跳过中间的各项直接把哈密顿函数表达成式(8-19)。能够最方便地、直截

了当地求得逆矩阵 T^{-1} :

$$T^{-1} = \frac{\tilde{T}_c}{|T|}. \quad (8-20)$$

这里的 \tilde{T}_c 是余因子矩阵, 其矩阵元 $(\tilde{T}_c)_{ik}$ 等于 $(-1)^{i+k}$ 乘以把 T 的第 i 行和第 k 列划去后所得矩阵的行列式. 不难看出, 如果 T 是对角的, 那么 T^{-1} 也是对角的, 而且它的那些元素正好是 T 的相应元素的倒数.

在章末习题中可以找到把这种形式应用于各种力学系统的许多练习. 在此, 可以考虑两个非常简单的例子, 特别是因为这两个例子说明了所述技巧的某些重要方面. 首先考虑一下一质点在有心力场中的空间运动, 并用球极坐标 (r, θ, ϕ) 作为广义坐标. 势能是某个函数 $V(r)$, 动能则是

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 + r^2 \dot{\theta}^2).$$

显然, 哈密顿函数与总能量 $T + V$ 相同, 并且由于 T 是对角的, 所以根据观察即可知道 H 的形式为

$$H(r, \theta, p_r, p_\theta, p_\phi) = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + V(r). \quad (8-21)$$

注意, 如果广义坐标选的是质点的笛卡儿坐标 x_i , 哈密顿函数将会有不同的函数形式. 动能也就具有形式

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\dot{x}_i\dot{x}_i}{2},$$

以致哈密顿函数成为

- 1) 可参阅论述物理学数学方法或矩阵的几乎任何一本参考书, 例如, Margenau 和 Murphy, *The Mathematics of Physics and Chemistry*, 1943, p. 295; Hildebrand, *Methods of Applied Mathematics*, 2d ed. 1965, p. 16; 或 Nering, *Linear Algebra and Matrix Theory*, 1963, p. 83. 顺便提一下, \tilde{T}_c 就是数学家所说 T 的伴矩阵 (见前面节 4-3 末).

$$H(x_i, p_i) = \frac{p_i p_i}{2m} + V(\sqrt{x_i x_i}). \quad (8-22)$$

有时为了方便起见，可以把共轭于 x_i 的正则动量组合成一个矢量 \mathbf{p} ，以保证哈密顿函数能表达成

$$H(x_i, p_i) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}}{2m} + V(\sqrt{|r|}). \quad (8-23)$$

当然，我们能够取 \mathbf{p} 相对于我们所需任何坐标系（例如，曲线球面坐标）的分量。但是，重要的是不要把 p_θ 与 \mathbf{p} 的 θ 分量 $(\mathbf{p})_\theta$ 相混淆。前者是共轭于坐标 θ 的正则动量，后者则是共轭于笛卡儿坐标的动量矢量的 θ 分量。拿量纲来说，它们显然是完全不同的量， p_θ 是角动量，而 $(\mathbf{p})_\theta$ 则是线动量。从现在开始，凡是用来代表正则动量的矢量都将看作是共轭于笛卡儿位置坐标的动量。

其次要考虑的例子是在电磁场中运动的单个（非相对论）质点。根据式（1-66），这种系统的拉氏函数为

$$L = T - V = \frac{1}{2} m v^2 - q\phi + \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{V}.$$

用笛卡儿位置坐标作为广义坐标，拉氏函数能表达成

$$L = \frac{m \dot{x}_i \dot{x}_i}{2} + \frac{q}{c} A_i \dot{x}_i - q\phi, \quad (8-24)$$

式中的势函数 ϕ 和 \mathbf{A} 一般总是 x_i 和时间的函数（ q 在这里当然是质点的电荷而不是广义坐标）。这时存在着广义速度的一个线性项，它保证矩阵 \mathbf{a} 具有元素 qA_i/c 。由于 U 的这一线性项，哈密顿函数不再是 $T + U$ 。然而，在这种情况下，它仍然是总能量，这是因为电磁场中的“势”能仅仅决定于 ϕ 。根据式（8-2）或式（8-17），正则动量为

$$p_i = m \dot{x}_i + \frac{q}{c} A_i, \quad (8-25)$$

哈密顿函数 [见式（8-19）] 为

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_i - \frac{q}{c} A_i \right) \left(p_i - \frac{q}{c} A_i \right) + q\phi, \quad (8-26)$$

这是质点的总能量。此外，动量 p_i 可以组合成一个矢量 \mathbf{p} ，而 H 则表达成

$$H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 + q\phi, \quad (8-27)$$

再次应记住的是， \mathbf{p} 指的仅仅是共轭于 x_i 的动量。

将会看到，哈密顿运动方程并不会以完全对称的方式来处理坐标和动量。 \dot{p} 的方程有一负号，而在 \dot{q} 的方程中则没有。在设想构成完全对称的方程或者把两组方程组合为一个方程的各种命名方案方面不乏巧思。这些方案中的大多数只不过是一种奇想，但有一个却证明是处理正则方程和同类表达式的一种精巧而又有用的手段。

对于 n 个自由度的系统，我们可以构成一个有 $2n$ 个元素的列矩阵 η ，使得

$$\eta_i = q_i, \quad \eta_{i+n} = p_i, \quad i \leq n. \quad (8-28)$$

同样，列矩阵 $\frac{\partial H}{\partial \eta}$ 的元素为

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \eta} \right)_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial \eta} \right)_{i+n} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad i \leq n. \quad (8-29)$$

最后，令 \mathbf{J} 是一个 $2n \times 2n$ 方阵，它由 $n \times n$ 零矩阵和 $n \times n$ 单位矩阵所组成，其形式为

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (8-30)$$

这里的 $\mathbf{0}$ 是所有矩阵元都等于零的 $n \times n$ 矩阵， $\mathbf{1}$ 则是标准的 $n \times n$ 单位矩阵。这样，哈密顿运动方程就能以紧凑的形式表达成

$$\dot{\eta} = \mathbf{J} \frac{\partial H}{\partial \eta}. \quad (8-31)$$

这种用来显示正则运动方程的方法将看作是以矩阵或耦对¹⁾记号来表示哈密顿方程。在往后的几章中，我们将经常采用这种矩阵形式的方程。为了以后的应用，可以了解一下有关 J 的某些容易验证的性质。这个矩阵 J (它没有标准的名称) 是 i 乘以泡利矩阵 σ_2 的一种 $2n \times 2n$ 变型 [见式 (4-74)]，所以它的平方等于 $2n \times 2n$ 单位矩阵的负值：

$$J^2 = -1. \quad (8-32)$$

它也是正交的：

$$\tilde{J}J = 1, \quad (8-33)$$

因此，

$$\tilde{J} = -J = J^{-1}. \quad (8-34)$$

根据正交性质可知，行列式的平方等于 1，但事实上我们能够证明(见习题 25) 一种更强有力的说法，即

$$|J| = +1. \quad (8-34')$$

8-2 循环坐标和守恒定理

按照节 2-6 中给出的定义，循环坐标 q_i 是在拉氏函数中并不明显出现的坐标；因此，根据拉格朗日方程，它的共轭动量 p_i 应该是一个常数。但把式 (8-9) 与式 (8-10) 相比，早就说明，

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} = - \frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

因此，一个循环的坐标同样也不应出现在哈密顿函数中²⁾。反

1) 耦对这一名称起源于希腊语 “intertwined” 一词，它特别适合于这样一些哈密顿方程，即其中的 \dot{q} 与对于 p 的微商相匹配，同样， \dot{p} 则与 q 微商的负值相匹配。H. Weyl 于 1939 年在 *The Classical Groups* (1939 年初版和 1946 年再版中都是 p. 165) 中首先引用了这一名称。

2) 我们也可从式 (8-8) 的定义得出这一结论，因为 H 与 $-L$ 仅仅相差 $p_i \dot{q}_i$ ，它并不明显地包含 q_i 。

过来,如果一个广义坐标并不出现在 H 中,它的共轭动量就是守恒的。只要用 H 代替 L ,即可把节2-6中的动量守恒定理转用于哈密顿表述。特别是我们也能够借助于哈密顿函数来导得物理系统的不变性或对称性质与运动常数之间的关系。例如,如果系统完全是自持的,即只存在质点之间的内力,则系统可以作为一个刚性系综来移动而不会影响到各个力或者往后的运动。这时就说性系在刚性位移下是不变的。因此,描述这种刚性运动的广义坐标不会明显地出现在哈密顿函数中,而相应的共轭动量将守恒。如果刚性运动是沿某一特定方向的平移,那么,守恒的动量就是系统总的(正则)线动量的相应笛卡儿分量。由于方向是任意的,因此,总的矢量线动量守恒。刚性位移可以是一个转动,由此可知,总角动量矢量是守恒的。甚至当系统与外力相互作用时,在导致守恒正则动量的情况中也可能存在某种对称性。假设系统关于某一给定轴是对称的,从而使 H 绕该轴转动时保持不变,则 H 显然不可能包含绕该轴的转动角度,而特定的角变量必然是一个循环坐标。由此可知,象节2-6中那样,绕该轴的角动量的分量守恒。

节2-6中对 h 的研究早已表明,如果 L [由于式(8-13),因而还有 H]不是 t 的显函数,则 H 是一运动常数。我们从运动方程(8-12)也能直接看出这一点,只要把哈密顿函数的时间全微商表达成

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial t}.$$

根据运动方程(8-12),右边的前两个和相互抵销,因而得

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (8-35)$$

因此,如果 L 不显含 t ,则 t 也不会出现在 H 中, H 将不随时

间而变化。

此外，节 2-6 中已证明，如果定义广义坐标

$$\mathbf{r}_m = \mathbf{r}_m(q_1, \dots, q_n; t)$$

的变换方程 (1-38) 不显含时间，而且势能又与速度无关，那么， H 将是总能量 $T + V$ 。把 H 确认为一个运动常数和把它确认为系统总能量是两件互不相干的事情，对其中之一是充分的条件对于另一个并不是足够的。也可能出现这样的情况：式 (1-38) 确实显含时间，但 H 则不然。在这种情况下， H 是一个运动常数，但不是总能量。正如我们在节 2-6 中已强调过的那样，哈密顿函数的量值和函数形式都与最初所选广义坐标有关。对于拉氏函数，我们有一个特殊规定，即 $L = T - V$ 。在这种规定的范围内，广义坐标的变化可以改变 L 的函数形式，但不能改变其量值。另一方面，在哈密顿函数的定义方程 (8-8) 中采用不同的广义坐标组，可能导致哈密顿函数的某个完全不同的量。有可能对于某组广义坐标来讲 H 是守恒的，但对于另一组则又随时间而变化。

为了以一个简单例子来说明其中的某些要点，我们可以考虑一个有点人为设想的一维系统。假设一个质量为 m 的质点，系于一个力常数为 k 的弹簧，该弹簧的另一端则固定于一个无质量手车上，该车在外界策动下以速率 v_0 作匀速运动（见图 8-1）。如果我们把质点在静止系统内的位置 x 取作广义坐标，则系统的拉氏函数显然是

$$L(x, \dot{x}, t) = T - V = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{k}{2}(x - v_0 t)^2. \quad (8-36)$$

（为简单起见，所选的原点保证手车在 $t = 0$ 时刻通过它。）相应的运动方程显然是

$$m\ddot{x} = -k(x - v_0 t).$$

求解这一方程的一种明显的方法是把未知量变换为 $x'(t)$ ，它

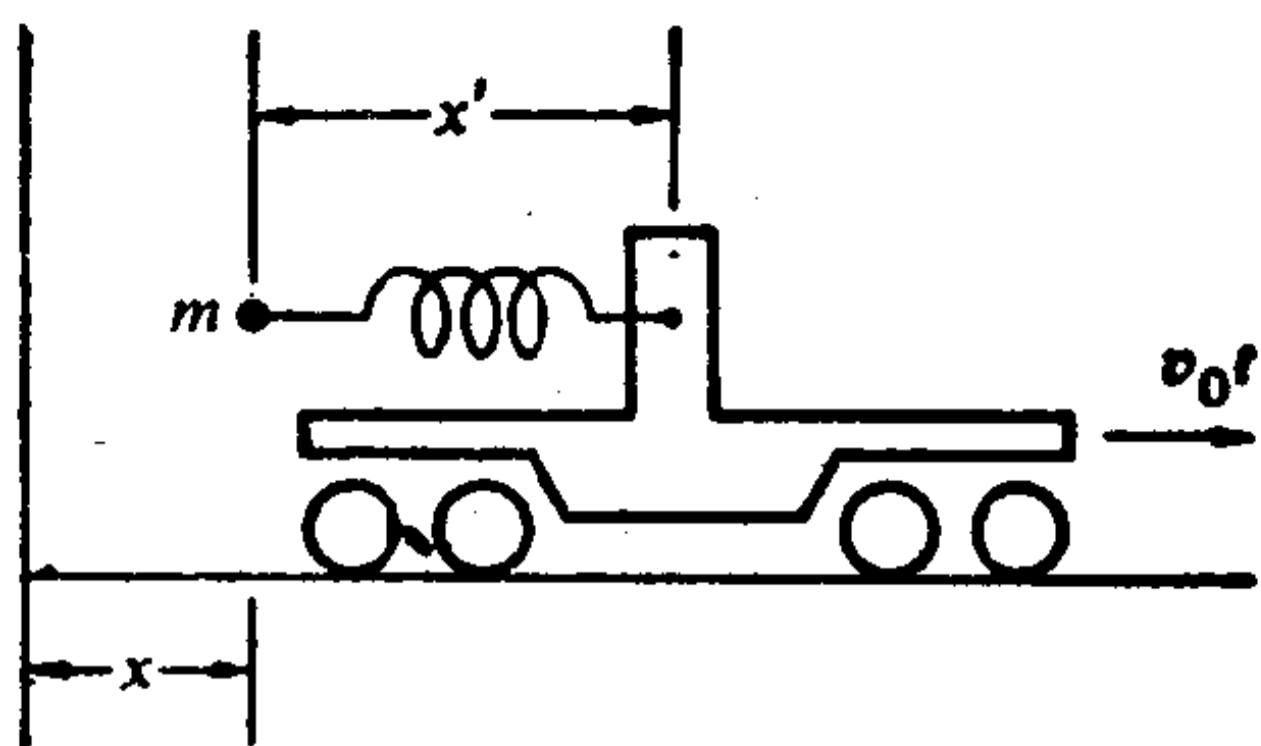


图 8-1 固定于匀速运动手车上的谐振子例子

定义为

$$x' = x - v_0 t, \quad (8-37)$$

从而使运动方程成为

$$m\ddot{x}' = -kx'. \quad (8-38)$$

根据式(8-37), x' 是质点相对于手车的位移;而式(8-38)则表明对于手车上的观察者来说,质点是在作简谐运动,这正是伽利略相对论中的等效原理所预言的情况。

看到了运动的性质以后,让我们考虑哈密顿表述。由于 x 是质点的笛卡儿坐标,而势又不含广义速度,因此,与 x 相关的哈密顿函数就等于动能与势能之和,即等于总能量。用函数形式表示的哈密顿函数为

$$H(x, p, t) = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2} (x - v_0 t)^2. \quad (8-39)$$

这个哈密顿函数显然是系统的总能量,但由于它明显地是 t 的函数,所以它并不守恒。实际上,这是可以理解的,为使手车能够反抗振荡质点的反作用以保持其匀速运动,“外部的机械装置”必须不断地输入和输出能量¹⁾。

现在假设我们从一开始就用相对坐标 x' 来表述拉氏函

1) 换言之,运动着的手车构成了对质点的一种与时间相关的约束,而约束力在系统的实际(不是虚)位移中确实是作功的。

数。则由同一个规定给出的拉氏函数为

$$L(x', \dot{x}') = \frac{1}{2}m\dot{x}'^2 + m\dot{x}'v_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}kx'^2. \quad (8-40)$$

在建立相应的哈密顿函数时,我们注意到有一个 x' 的线性项,而 \mathbf{a} 的单个分量为 mv_0 。因此,新的哈密顿函数为

$$H'(x', p') = \frac{(p' - mv_0)^2}{2m} + \frac{1}{2}kx'^2 - \frac{1}{2}mv_0^2. \quad (8-41)$$

注意,最后一项是一个既不涉及 x' 又不涉及 p' 的常数,如果愿意的话,完全可把它从 H' 中删除掉而不会影响到最后的运动方程。现在, H' 不是系统的总能量,但却是守恒的。除最后一项外,不难看出,它能够看作是质点相对于运动手车所作运动的总能量。两个哈密顿函数在量值、时间相关性和函数特性方面都不同。但读者不难证明,两者都能得出相同的质点运动。

8-3 劳斯方法和关于稳定运动的振荡

已经看到,哈密顿表述对直接求解力学问题并不是特别有帮助的。为了求解这 $2n$ 个一阶方程,往往只要消去某些变量(例如 p 变量)就会立即回到二阶拉格朗日运动方程。但是,有一个重要的例外情况还是应该注意的。在处理包含有循环坐标的问题时,哈密顿方法特别合适。考虑一下拉格朗日表述中的情况,这时,如果某个坐标(譬如说 q_n) 是循环的,则作为 q 和 \dot{q} 的函数的拉氏函数能表达成

$$L = L(q_1, \dots, q_{n-1}; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t).$$

所有的广义速度依然出现在拉氏函数中,而且一般都将是时间的函数。尽管有一个自由度对应于循环坐标,我们还得去求解一个 n 个自由度的问题。另一方面,哈密顿表述中的循环坐标确实还有另一层“可以略去的”的意思,因为在同样情

况中, p_n 是某个常数 α , 而 H 的形式为

$$H = H(q_1, \dots, q_{n-1}; p_1, \dots, p_{n-1}; \alpha; t).$$

事实上, 哈密顿函数现在所描述的问题仅涉及到 $n-1$ 个坐标, 在求解这种问题时, 完全可以忽略其中的循环坐标, 只是积分常数 α 则明显地应根据初始条件来决定. 求积运动方程

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial \alpha}$$

就可得到循环坐标本身与时间的依赖关系.

采用劳斯设想的方法, 可以把哈密顿表述在处理循环坐标方面的优点与拉格朗日步骤结合起来. 实质上, 人们只对循环的坐标才进行从 q, \dot{q} 基到 q, p 基的数学变换, 同时得到这些循环坐标的哈密顿形式的运动方程. 其余的坐标则服从拉格朗日方程. 如果把循环坐标记为 q_{s+1}, \dots, q_n , 就可以引进一个称为劳斯函数¹⁾ 的新函数 R , 它定义为

$$R(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s; p_{s+1}, \dots, p_n; t) = \sum_{i=s+1}^n p_i \dot{q}_i - L. \quad (8-42)$$

因此, R 的微分为

$$\begin{aligned} dR = & \sum_{i=s+1}^n \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \\ & - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \end{aligned}$$

由此可得

$$\frac{\partial R}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad i = 1, \dots, s; \quad (8-43)$$

$$\frac{\partial R}{\partial q_i} = -\dot{p}_i, \quad \frac{\partial R}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad i = s+1, \dots, n. \quad (8-44)$$

1) 为了能够与 H 的定义方程(8-8)相一致, 这里定义的 R 函数与习惯上采用的形式是异号的.

$n - s$ 个可略坐标 q_{s+1}, \dots, q_n 的方程(8-44)是哈密顿运动方程的形式,而以 R 作为哈密顿函数. 方程(8-43)则表明, s 个不可略坐标服从拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, \dots, s, \quad (8-45)$$

这里的 R 成了拉氏函数! 至此,尚未明显地用到从 q_{s+1} 到 q_n 这些坐标的循环性质. 在 L 中未出现的坐标同样不会出现在劳斯函数中. $n - s$ 个共轭于循环坐标的动量(从 p_{s+1} 到 p_n) 都是常数,在劳斯函数中可代之以由初始条件决定的一组常数 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, 其中 $r = n - s$. 作出这些修正后,劳斯函数中仅有的变量是 s 个非循环坐标以及它们的广义速度:

$$R = R(q_1, \dots, q_s; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s; \alpha_1, \dots, \alpha_r; t). \quad (8-46)$$

现在可以求解非循环坐标的拉格朗日方程了,这时,可以完全不考虑循环坐标的特性,就象在哈密顿表述中的情况一样. 实际上,我们已经把问题化为 s 个自由度的系统的拉格朗日问题,而且除了 r 个常值参量 α_i 外,其它的自由度都能“略去”.

可以有效地应用劳斯方法的最好例子是用来研究对于稳定运动的偏离和这些偏离的稳定性问题. 我们早就考虑过稳定运动的多种实例. 在节 3-6 中,我们已就各种有心力定律情况研究了质点沿着绕力心的圆形轨道作稳定运动时的稳定性. 在节 5-7 中讨论过的重陀螺的匀速进动构成了一种稳定运动,而章动现象则表现为对这种稳定运动的某种偏离. 在这些以及其他例子中,稳定运动的特征是所有非循环坐标都是常数. 因此,在具有 r 和 θ 两个坐标的有心力问题中,圆形轨道意味着仅有的非循环坐标是常数. 同样,在拉格朗日表达式(5-50)中,有三个欧拉角坐标 θ, ϕ, ψ 的重陀螺问题中,仅有的非循环坐标是 θ , 它在匀速进动中是常数. 如果我们

只限于讨论拉氏函数不是时间的显函数的情况，那么，稳定运动中的循环坐标将是时间的线性函数。这一点可以从循环或可略坐标的运动方程(8-44)看出。用(8-46)形式的劳斯函数时，这些方程意味着可略坐标 q_i 的广义速度是用非循环变量给出的，某种典型的关系式为

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(q_1, \dots, q_s; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s; \alpha_1, \dots, \alpha_r) \\ i = s + 1, \dots, n. \quad (8-47)$$

对于稳定运动， q_1, \dots, q_s 是常数， $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s$ 等于零，因而循环变量的 \dot{q}_i 是常数，而 q_i 将随时间线性地变化。例如，圆形轨道稳定运动中的循环坐标 θ 是随时间均匀增加的。再如，当重陀螺匀速进动时，循环坐标的角速度，譬如 $\dot{\phi}$ 和 $\dot{\psi}$ 都是常数。

至于“修改后的” s 个自由度的系统问题，则已化为平衡位置 q_{0i} 附近的振荡问题，这在第六章中已研究过了。在那种情况下，对应于 q_i 的广义力在平衡位置处必定为零，这表明，

$$\frac{\partial R}{\partial q_{0i}} \equiv \left(\frac{\partial R}{\partial q_i} \right)_0 = 0 \quad i = 1, \dots, s. \quad (8-48)$$

[见式(6-1).]事实上，第六章中所遵循的大多数步骤在这里不必作明显改变即可应用。主要的差别是一开始就必须选用特定的广义变量以保证各坐标在稳定运动中是可略的。这样， R 也许不是广义速度的一个简单的二次函数，而可能具有更为复杂的形式。

为了搞清楚它与平衡位形附近的微幅振荡的异同，我们将按这种步骤来推演，至少完成其中的一部分。在本节的余下部分中，我们将再次用求和约定来完成从 1 到 s 的求和，并象式(8-48)所示的那样，用下标“0”表示稳定运动“平衡位形”处计算得的数值和微商。并象第六章中一样，用新变量 ρ_i 代表对平衡位形的偏离：

$$q_i = q_{0i} + \rho_i, \quad \dot{q}_i = \dot{\rho}_i \quad i = 1, \dots, s. \quad (8-49)$$

如果 R 能够在稳定运动位形附近展开成泰勒级数, 并能只保留不高于二阶的那些项, 则 ρ_i 和 $\dot{\rho}_i$ 这两个量就可看作是小量. 根据式 (8-48), 展开式的形式为

$$R = R_0 + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_{0i}} \dot{\rho}_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 R}{\partial q_{0i} \partial q_{0j}} \rho_i \rho_j + \frac{\partial^2 R}{\partial q_{0i} \partial \dot{q}_{0i}} \rho_i \dot{\rho}_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 R}{\partial \dot{q}_{0i} \partial \dot{q}_{0i}} \dot{\rho}_i \dot{\rho}_i. \quad (8-50)$$

R 以及它的所有微商都仅仅是非循环的 q_i 、相应的 \dot{q}_i 以及常数的函数. 在稳定运动中, 所有的 q_i 都是常数, 而 \dot{q}_i 则等于零. 因此, 式 (8-50) 中的 R_0 及所有系数都始终是常数, 因而作为附加常数的 R_0 将能从 R 中略去. $\dot{\rho}_i$ 的线性项是自动满足拉格朗日运动方程的, 因为 $\dot{\rho}_i$ 的系数始终是常数, 并与 ρ_i 无关. 因而这一项也可以略去, R 因而能改写为

$$R = \frac{1}{2} a_{ij} \dot{\rho}_i \dot{\rho}_j + g_{ij} \rho_i \dot{\rho}_j - \frac{1}{2} c_{ij} \rho_i \rho_j. \quad (8-51)$$

注意, 矩阵元 a_{ij} 和 c_{ij} 是对称的. 但 g_{ij} 不一定如此. 在 R 表达式中的那些 $\dot{\rho}_i$ 和 $\dot{\rho}_j$ 的双线性项有时称作“迴转项”, 因为它们往往出现在迴转运动问题中. 因此, 变量 ρ_i 的拉格朗日运动方程将取形式

$$a_{ij} \ddot{\rho}_j - b_{ij} \dot{\rho}_j + c_{ij} \rho_j = 0, \quad (8-52)$$

式中

$$b_{ij} = g_{ij} - g_{ji}.$$

把它与第六章中的运动方程 (6-8) 比较可见, a_{ij} 起到了 T_{ij} 的作用, 而 c_{ij} 则对应于 V_{ij} (因此符号的选择也相同), 但 $\dot{\rho}_j$ 这一项并无对应项. (它并不对应于 R 中没有的耗散力项; 一般讲, 迴转力并不做功, 不会破坏 H 的守恒.) R 中的双线性项使我们不可能象第六章中那样通过位形空间内的某个变换使 R

中的所有各项同时对角化,所以无法由此得到简正模式¹⁾. 然而我们能够再次探求(6-9)形式的振荡的指数解,其角频率 ω 将是特征行列式

$$|c + i\omega b - \omega^2 a| = 0 \quad (8-53)$$

的根 [见式(6-11)]. 不论 ω 线性项的形式如何,根据 b 的反对称性和其他矩阵的对称性就能证明²⁾: 久期方程仅是 ω^2 的函数 (正如在物理学基础上根据时间反演下的对称性所能预期到的那样). 如果式(8-53)的根对应于实数 ω , 则对稳定运动的偏离能够是有界的, 并有可能达到稳定. 而虚数 ω 则能使 ρ 随时间无限地增加, 这意味着稳定运动的不稳定性.

应该承认, 关于运动的一般稳定性问题的这些说法是高度简化了的. 当式(8-53)有重根或零值根时, 还会出现许多复杂情况, 其中至少有一个运动性质的问题. 更大的麻烦是无法确定线性化的运动方程(8-52)能在多大程度上代表 (甚至是微幅的) 振荡; 也无法确定非线性解的性质. 运动稳定性的一般问题在今天是一个非常活跃的研究领域, 它往往要用到远远超出本书范围的、非常高级的数学工具.

我们可用一个简单而又平常的例子来说明劳斯方法和各有关量的物理意义. 考虑节 3-6 中研究过的情况, 即一个单个质点在导自势函数 $V(r)$ 的有心力 $f(r)$ 作用下在一个平面内的运动. 这时的拉氏函数为

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r).$$

前面已知可略坐标是 θ , 如果再用 l 表示常数共轭于动量, 则

- 1) 相应的哈密顿函数是能够通过相空间内的变换来对角化的, 但要求有正则变换理论, 这将在下一章中讨论. 可参阅物理学百科全书卷 III/1 第 192 页上 J. L. Synge 的论文, 以及第九章的习题 20.
- 2) 参阅 K. R. Symon, *Mechanics*, 3d ed. (Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1971). p. 483.

相应的劳斯函数为

$$R = \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) - \frac{m}{2} \dot{r}^2.$$

从物理上看出, 劳斯函数等于等效一维势 $V'(r)$ 减去径向运动的动能. [出现减号是因为由式 (8-42) 定义的劳斯函数是有效一维问题拉氏函数的负值] 在稳定运动中, 非循环坐标 r (在 r_0 处) 是常数, 循环坐标 θ 则随时间均匀地增加, 即质点是以恒定角速度沿一圆形轨道运动的. 稳态条件决定于式 (8-48), 在这里, 这一条件等于说 $V'(r)$ 在 $r = r_0$ 处是一极值:

$$\frac{\partial R}{\partial r_0} \equiv \frac{\partial V'(r)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = -\frac{l^2}{mr_0^3} + \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 0$$

或者

$$f(r_0) = -\frac{l^3}{mr_0^3},$$

这就是式 (3-41). 把 R 在稳态附近展开成泰勒级数, 则线性化的劳斯函数的形式为

$$R = \frac{a_{11}\rho^2}{2} - \frac{c_{11}\rho^2}{2},$$

式中

$$a_{11} = \frac{\partial^2 R}{\partial \dot{r}_0^2} = -m, \quad c_{11} = -\frac{\partial^2 R}{\partial r_0^2} = -\frac{3l^2}{mr_0^4} + \frac{\partial f}{\partial r_0}.$$

特征行列式方程 (8-53) 简化为一个单项

$$c_{11} - \omega^2 a_{11} = 0.$$

因而运动是稳定的, ω 是实数这一条件等于要求 $c_{11}/a_{11} > 0$, 或者利用稳定运动条件, 则有

$$\frac{\partial f}{\partial r_0} + \frac{3f(r_0)}{r_0} < 0,$$

这是式 (3-43), 即稳定运动的稳定性判别式.

事实上，劳斯方法对于早先在节 3-6 中给出的分析并没有加上什么新的物理内容，只是使分析能自动地进行。在许多自由度的复杂问题中，这一特点可能带来显著的好处。因此，说劳斯方法的最大用处是可以用来直接求解与工程应用有关的问题也就不足为奇了。但是，劳斯函数基本上是一种混合物，没有什么独创可言，它只是把拉格朗日和哈密顿描述的某些特点组合起来。对于经典力学的各种形式的发展来讲，完整的哈密顿表述更为有效。

8-4 相对论力学的哈密顿表述

同狭义相对论的拉格朗日描述一样，对相对论力学的哈密顿表述可以取两种态度。第一种态度是不事先认为它是某种协变描述，而只是把问题置于某一特定的洛伦兹或惯性系内讨论。在这一特定洛伦兹系内测得的时间与其他坐标不会有相同的地位，而只是象非相对论力学中那样，把它作为描述系统演变的某个参量。然而，如果推导得哈密顿函数的拉氏函数本身是以相对论性不变的物理理论（例如麦克斯韦方程和洛伦兹力）为基础的，那么，所得到的哈密顿描述在相对论中就是正确的。第二种方法当然希望哈密顿表述是一种充分的协变描述。但是，曾使相应的拉格朗日方法变得复杂的那些困难（见节 7-9）在这里将更为严重。因此，我们将首先考虑非协变的方法。

对于 (7-136) 形式的单质点的拉氏函数

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} - V,$$

已经证明，哈密顿函数（以能量函数 h 的形式出现的）等于系统的总能量：

$$H = T + V.$$

能量 T 能够通过式(7-100)用正则动量 p_i 式(7-137)表示，即

$$T^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4,$$

所以哈密顿函数的合适形式为

$$H = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} + V. \quad (8-54)$$

如果系统是由电磁场中运动的单个质点所组成, 则拉氏函数已经表达成 [见式 (7-141)]

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} + q\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\beta} - q\phi.$$

正如我们已经看到的, L 中的速度线性项将不会出现在哈密顿函数中, 而第一项则给出哈密顿函数中的 T . 于是, 哈密顿函数再次等于质点的总能量:

$$H = T + q\phi. \quad (8-55)$$

对于这一系统, 共轭于质点笛卡儿坐标的正则动量定义为 [见式 (7-142)]

$$p_i = mu_i + \frac{q}{c} A_i,$$

从而 T 和 p_i 之间的关系由式 (7-168) 给出, 而哈密顿函数的最后形式为

$$H = \sqrt{\left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A}\right)^2 c^2 + m^2 c^4} + q\phi. \quad (8-56)$$

应该再次强调的是, 这里的 \mathbf{p} 是共轭于质点笛卡儿位置坐标的正则动量矢量. 还可以看到, iH/c 是世界矢量的第四个分量

$$mu_\nu + \frac{q}{c} A_\nu,$$

[见式 (7-74)、(7-96) 和 (7-166)]. 尽管哈密顿函数式 (8-56) 不是以协变形式表示的, 但作为某个洛伦兹系内的一个世界矢量的第四分量, 它在洛伦兹变换下确实具有某种确定的变换特性.

在哈密顿表述的协变处理中, 时间应与空间坐标以相同

的方式来处理，即时间应取作具有相关共轭动量的正则坐标之一。事实上，相空间维数的这种扩展的基础在非相对论力学中也是可以建立起来的。按照节 7-9 中作出的描绘，系统点沿着它在相空间内的轨道的行进可以用某个参量 θ 来标志。而 t 则被“释放”出来（打个比喻说）作为一个附加坐标。如果对 θ 的微商用上撇表示，则 $(q_1, \dots, q_n; t)$ 位形空间内的拉氏函数为[见式 (7-159)]

$$\Lambda(q, q', t, t') = t' L\left(q, \frac{q'}{t'}, t\right). \quad (8-57)$$

于是，共轭于 t 的动量为

$$p_t = \frac{\partial \Lambda}{\partial t'} = L + t' \frac{\partial L}{\partial t'}.$$

如果我们明显地利用关系式 $\dot{q} = q'/t'$ ，则这一关系式将成为

$$p_t = L - \frac{q'_i}{t'} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = L - \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = -H. \quad (8-58)$$

所以共轭于时间“坐标”的动量等于寻常哈密顿函数的负值¹⁾。尽管这一推导的框架完全是非相对论的，但这一结果符合于把四维动量矢量的时间分量作为 iE/c 的看法。正如我们从定义方程 (8-2) 所能看到的那样，如果 q 乘以常数 α ，则共轭动量就得除以 α 。于是共轭于 ict 的正则动量等于 iH/c 。

因此，似乎有一条可用来建立相对论性协变哈密顿函数的自然路线。但这条路线证明是布满着荆棘的。应该记得，在过程的一开始所用的协变拉氏函数式(7-159)或式(8-57)是广义速度 q' 的一次齐次函数，对于这种拉氏函数，前面所描述的建立哈密顿表述的诀窍(见第 407 页)根本无效。如果 L

1) 当从 t 变换到 θ 时，其余的动量不变，要看出这一点，只要计算一下相应的微商：

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial q'_i} = t' \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = t' \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{1}{t'} \right) = p_i.$$

具有 L_1 的形式, 则[称为 $H(q, t, p, p_i)$ 的]相应的哈密顿函数恒等于零! 然而, 甚至在我们到达这一步之前, 求取哈密顿函数的第 4 步, 即要求将方程组 (8-2) 反演过来以求得作为 (q_i, p_i) 的函数的广义速度的那一步, 就已经行不通了. 对于 L_1 这样的拉氏函数, 要完成这种反演是不可能的. 如果 L 由于只是 q_i 的线性函数因而是一个一次齐次函数, 那么这一点极其明显. 在这种情况下, p_i 与所有 q_i 都无关, 因而也无法用 p_i 来求得 q_i . 如果拉氏函数是更为一般形式的 L_1 , 要证明不可能作出这种反演将更为复杂. 根据一般的隐函数定理可知, 如果 n 个变量 y_i 被作为 n 个变量 x_i 的函数来给出, 即

$$y_i = y_i(x_1, \dots, x_n),$$

那么, 要能把这些函数反演过来以求得作为 y_i 的函数的 x_i , 必须要求矩阵元为

$$M_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \quad (8-59)$$

的雅可比矩阵 M 的行列式不等于零¹⁾. 应用于式 (8-2) 即可看出, 它们只对非零行列式

$$|W| = \left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_i} \right|$$

才能作出反演. 因此, 如果 L 具有 L_1 的形式, 则有

$$\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = L.$$

再对 q_i 求导, 即得条件

$$\dot{q}_i \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_i} = 0, \quad (8-60)$$

或者表达成矩阵形式

1) 许多高等微积分书籍都有隐函数定理的讨论; 参阅 S. Lang, A. Second Course in Calculus, 2d ed., 1968, p. 529. 特别仔细的证明可参阅 E. Hille, Analysis, Vol. 2, 1966, p. 367.

$$\delta W = 0. \quad (8-60')$$

式(8-60)可解释为行列式的一列可用其他列来表示,而这意味着这个行列式为零.或者换一种说法,把式(8-60')理解为 W 只有零值本征值,而这同样意味着这个行列式为零.当然,雅可比行列式为零意味着不是所有的动量都是独立的.如果把相空间扩展到包括 t 和 p_t 在内的一般表述,式(8-58)可表达成

$$p_t = -H(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n; t),$$

这明显表明, p_t 并不独立,而是用所有其他坐标和动量给出的.在相对论情况中,比如说在自由质点的例子中,已经看到这种加于动量的约束实际上相当于四维矢量 p_ν 有一不变的量值.

所以,必须得出结论,如果拉氏函数是 q_i 的一次齐次函数,通常将不能采用哈密顿步骤.已经设想出了许多方法来表述“齐次问题”中的哈密顿函数¹⁾.所有的方法都明显地考虑到了意味着雅可比行列式为零的约束,但它们都很复杂,没有一个可以选为标准的技巧.看来,只要有可能,就应尽量避免使用“不可反演的”齐次拉氏函数.

幸好,并无任何令人信服的理由一定要求协变拉氏函数是一次齐次函数,至少对于经典相对论力学是如此.早已看到,对于单个自由质点,协变拉氏函数

1) 多少有点按物理学家的观点论述“齐次问题”的文献现在是非常广泛的,但能够引为参考书的只有很少几本. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics*, 4th ed., 1970, p. 187 所述大约是最为简单的, Dirac 在 1933 年开始发表的许多论文中,提出了一种与众不同的方法,并已归纳在他的简要著作 *Lectures on Quantum Mechanics* (1964) 中. 按别的方法处理这一问题的参考资料则有 H. Rund, *The Hamilton-Jacobi Theory in the Calculus of Variation*, 1966, 第三章. 可以看到,勒让德变换过程是可逆的: 给定一个哈密顿函数,即能得到相应的拉氏函数(见习题 1). 但反过来同样有困难. 如果假设给定的哈密顿函数是动量的一次齐次函数,就不可能得到一个等效的拉氏函数.

$$\Lambda(x_\mu, u_\mu) = \frac{1}{2} m u_\mu u_\mu$$

得出了正确的运动方程。当然，四维速度分量 u_μ 依然不是全部独立的，但这个约束可以看作是一种“弱条件”，只有在所有求导运算都已完成之后才会用到它¹⁾。因此，按照非相对论力学中的相同途径，是不难从这种拉氏函数求得哈密顿函数的；其结果显然是

$$\mathbf{H} = \frac{p_\mu p_\mu}{2m}. \quad (8-61)$$

对于电磁场中的单个质点，前面已经得到了一个协变的拉氏函数。

$$\Lambda(x_\mu, u_\mu) = \frac{1}{2} m u_\mu u_\mu + \frac{q}{c} u_\mu A_\mu(x_\lambda), \quad (7-165)$$

它的正则动量为

$$p_\mu = m u_\mu + \frac{q}{c} A_\mu. \quad (7-166)$$

在相应的哈密顿函数中， u_μ 的线性项通常并不出现，而用正则动量表示的余下的 L_2 部分是

$$\mathbf{H} = \frac{\left(p_\mu - \frac{q}{c} A_\mu\right)\left(p_\mu - \frac{q}{c} A_\mu\right)}{2m}. \quad (8-62)$$

哈密顿函数 (8-61) 和 (8-62) 两式都是常数，并具有相同数值 $-mc^2/2$ ，但为了求得运动方程，重要的是与位置和动量的四维矢量的函数依存关系。单质点系统的协变哈密顿函数将得出八个一阶运动方程

$$\frac{dx_\nu}{d\tau} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_\nu}, \quad \frac{dp_\nu}{d\tau} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_\nu}. \quad (8-63)$$

1) 约束的这种分类可参阅 Dirac, Lectures on Quantum Mechanics.

大家知道,这些方程不可能全是独立的。式(8-63)的空间部分明显地导致空间运动方程。所以应该预料到,其余两个方程不会再告诉我们什么新东西,完全象在拉格朗日情况中一样。要证实这一点,只要研究一下某特定洛伦兹系中 $\nu = 4$ 的那些方程。其中之一是由 p_4 构成的方程:

$$u_4 = \frac{\partial H}{\partial p_4} = \frac{1}{m} \left(p_4 - \frac{q}{c} A_4 \right)$$

或者

$$p_4 = \frac{i}{c} (T + q\phi) = \frac{iH}{c},$$

这是前面已经看到的一般结论。另一个方程可以表达成

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{dp_4}{dt} = -\frac{1}{ic} \frac{\partial H}{\partial t}$$

或者

$$\frac{dH}{dt} = \sqrt{1-\beta^2} \frac{\partial H}{\partial t}.$$

把式(8-60)的形式与 H 表达式(8-56)的形式比较表明,

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{T}{mc^2} \frac{\partial H}{\partial t},$$

因而运动方程成为

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t},$$

这是在式(8-35)中早就表明了的一般结果。

当采用协变的拉格朗日表述时,必须在拉氏函数中找出一些合适的协变势能项以使用来描述并非电磁性质的力。在多质点系统中,我们面临的关键性困难主要是如何把那些并非与场的相互作用也包括进来。用哈密顿术语来说,“非相互作用”定理已归诸于下述说法:只有在质点间不存在直接相

相互作用时，才能用通常的位置坐标和相应的正则动量来描述洛仑兹不变系统。因此，相对论哈密顿框架是受到很大限制的，在大多数情况下，我们将只限于论述非相对论力学。

8-5 由变分原理推导哈密顿方程

已经证明，拉格朗日方程是从变分原理，即节 2-1 中的哈密顿原理推得的。的确，变分法往往证明是推导拉格朗日方程的理想方法，因它能适用于通常不属于力学范畴的那些系统。如果能够找到一个直接导出哈密顿方程的变分原理，当然同样有益。适合于这一目的的哈密顿原理是

$$\delta I \equiv \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0. \quad (8-64)$$

但是，正象它原来的表述那样，它参照的是位形空间内的路径。所以首先要修正的是使积分应该沿着系统点在相空间内的轨道来计值，而那些变化路径应该位于这一相空间轨道的邻近。按照哈密顿表述的观点， q 和 p 都应作为相空间的独立坐标，因而是独立变化的。为此，作用量积分式(8-64)中的被积函数应通过式(8-8)表达成 q, p 以及它们的时间微商的函数。于是式(8-64)成为

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)) dt = 0. \quad (8-65)$$

作为相空间内的一种变分原理，式(8-65)有时称为“修正的哈密顿原理”。虽然大多数情况都是与变换理论一起使用的(见第九章)，但我们现在的主要兴趣在于指出该原理能够导致哈密顿正则运动方程。

修正的哈密顿原理完全是节 2-3 中所考虑的 $2n$ 维空间内变分问题的形式[见式(2-14)]:

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} f(q, \dot{q}, p, \dot{p}, t) dt = 0, \quad (8-66)$$

而有关的 $2n$ 个欧拉-拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial f}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n, \quad (8-67)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{p}_i} \right) - \frac{\partial f}{\partial p_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n. \quad (8-68)$$

式 (8-65) 中给出的被积函数 f 仅通过 $p_i \dot{q}_i$ 项包含 \dot{q}_i , 而 q_i 则仅仅包含在 H 之中. 因此, 式 (8-67) 将导致

$$\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0. \quad (8-69)$$

另一方面, 式 (8-65) 中的被积函数并不明显地依存于 \dot{p}_i . 所以式 (8-68) 将简单地化为

$$\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0. \quad (8-70)$$

(8-69) 和 (8-70) 两式正好是哈密顿运动方程 (8-12). 修正的哈密顿原理的欧拉-拉格朗日方程也就是所要求的正则运动方程.

从变分原理推导哈密顿方程的做法竟然如此简洁, 简直有点象是要魔术. 人们会猜想, 当我们被魔术师的隐语迷惑时, 是否已经有某种外加物暗中溜了进来. 修正的哈密顿原理是否等同于哈密顿原理, 或者它是否包含有某种新的物理内容? 这样的问题非常不恰当; 修正的哈密顿原理之所以有道理, 主要是由于从它得出了相空间内的正则运动方程. 除了论证它与拉格朗日运动方程相当之外, 对于哈密顿原理的有效性终究没有给出任何进一步的论据. 只要能够构成哈密顿函数, 勒让德变换过程就意味着: 拉格朗日和哈密顿表述以及连同它们各自的变分原理都有相同的物理内容.

然而, 能够提出的一个问题是, 所作推导是否对哈密顿

原理中并不存在的轨道变分加上了某些限制。导致欧拉-拉格朗日方程的变分原理的表述，应同节 2-2 中一样，使独立变量的变分在端点处为零。在相空间内，则要求端点处的 $\delta q_i = 0$ 和 $\delta p_i = 0$ ，而在相同情况下，哈密顿原理仅要求 δq_i 为零。然而，查看一下节 2-2 中详述过的推导就可看出，要求变分在端点处为零只是为了摆脱独立变量的时间微商中由变分引起的被积项。尽管式 (8-66) 中对应于修正的哈密顿原理式 (8-65) 的 f 函数确实是 q_i 的函数，也不会明显地出现 p_i 。因而不必规定 p_i 在端点处的变分也可以从式 (8-65) 得出式 (8-68) 和 (8-70)。在与哈密顿原理中相同的变分条件下，从 [被积函数 L 是由式 (8-8) 用哈密顿函数来定义的] 修正的哈密顿原理得出了哈密顿方程¹⁾。

然而，要求修正的哈密顿原理中的变化路径不论是 q 还是 p 都回到相同的端点是有益的，因为这样一来，我们就有了哈密顿运动方程的更为一般的条件。如果在采用哈密顿原理时不存在端点处的变分，则在不影响变分原理成立的情况下，我们就能在被积函数上附加一个任意（二次可微）函数 $F(q, p, t)$ 的时间全微商。例如，假设我们从式 (8-65) 的被积函数中减去

1) 也许有人认为 q 和 p 是不可能独立变化的，因为定义方程 (8-2) 使 p 与 q 和 \dot{q} 相联结。因此，不可能有了 q (和 \dot{q}) 的变分而没有 p 的变分。按照这种异议，有人试图在式 (8-2) 中用一个新的独立变量，比如说 r_i 来取代 \dot{x}_i ，从而使修正的哈密顿原理中的 q 和 r 成为独立变量，而 p_i 则是一个导出函数。这样得到的运动方程将受到 $r_i = \dot{x}_i$ 这样的约束，原来这就是哈密顿运动方程！（参阅 Ter Haar, Elements of Hamiltonian Mechanics, 1961, p. 100.）但这种步骤是不必要的，事实上，整个异议与哈密顿描述的目的和精神完全背道而驰。哈密顿表述一旦建立，式 (8-2) 就不再是它的一部分。动量已被提高到同坐标具有同等基础的独立变量的地位，并且仅仅通过运动方程本身的媒介而不是根据任何事先确定的关系与坐标、时间相关联。

$$\frac{d}{dt}(q_i p_i),$$

那么修正的哈密顿原理将成为

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (-\dot{p}_i q_i - H(q, p, t)) dt = 0. \quad (8-71)$$

这时,式(8-66)的被积函数 f 是 \dot{p}_i 的函数,而且不难证实,具有这种 f 的欧拉-拉格朗日方程(8-67)和(8-68)也对应于哈密顿运动方程(8-12)。然而,式(8-71)中的被积函数不会是拉氏函数,而且一般也不能简单地通过位形空间内的点变换与拉氏函数相关联。如果限定 q 和 p 的变分在端点处都等于零,那么修正的哈密顿原理将提供一条建立哈密顿运动方程的独立而又一般的途径,而不必依赖于拉格朗日表述。如果愿意,就可避开把哈密顿正则变量和一组相应的拉格朗日广义坐标和广义速度连接起来的必要。这在下一章中对我们是至为重要的,在那里,我们将研究使运动方程保持哈密顿形式的相空间变量的变换。

要求 q 和 p 的变分都是独立的这一要求对于上面的推导是必不可少的,正是这一点突出了拉格朗日表述和哈密顿表述之间的根本差别。坐标 q_i 和动量 p_i 都没有被看作是更基本的变量组;两者都同样是独立的。只有把独立变量的范围从 n 个扩大到 $2n$ 个量,才能得到一阶的运动方程。在某种意义上讲,“坐标”和“动量”这样的名称并不相宜,因为它们造成了空间坐标和线动量或者充其量是角动量这样的形象。现在必须给予这些名称以更普遍的意义。区分坐标和动量只不过是把描述运动的独立变量分成两组,它们通过哈密顿方程相互间具有近乎对称的关系。

8-6 最小作用量原理

另一个与哈密顿表述相关的变分原理称作最小作用量原

理。它包含有一种需要详加解释的新型的变分，我们将称之为 Δ -变分。在第二章中讨论哈密顿原理时所用的 δ -变分过程中，位形空间内的变化路径总是在两个端点处终止的，这样的两个端点代表了与正确路径相同的时刻 t_1 和 t_2 时的系统位形。为了求得拉格朗日运动方程，我们还要求变化路径在位形空间内回到相同的端点，即要求 $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ 。 Δ -变分的约束则比较少；一般讲，用来计算积分的变化路径可以在与正确路径不同的时刻终止，并在端点处可以有坐标的变分。然而，我们能利用同 δ -变分中的变化路径相同的参量化。按照节 2-3 中的符号，一族可能的变化路径被定义为函数

$$q_i(t, \alpha) = q_i(t, 0) + \alpha \eta_i(t), \quad (8-72)$$

这里的 α 是一个无限小参量，对于正确路径，它趋向于零。式中的函数 η_i 在端点处不一定要等于零，不论它是原来的端点还是变化后的端点都一样。全部要求在于它们应是连续的和可微的。图 8-2 通过图解说明了位形空间内 Δ -变分的正确路径和变化路径。

让我们来计算作用量积分的 Δ -变分，即

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt \equiv \int_{t_1 + \Delta t_1}^{t_2 + \Delta t_2} L(\alpha) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(0) dt, \quad (8-73)$$

式中的 $L(\alpha)$ 意味着积分应沿着变化路径计值，而 $L(0)$ 则相应地指实际的运动路径。变分显然是由两部分所组成。其一，由积分限的变化所引起的部分，精确到一级无限小时，这一部分就等于实际路径上的被积函数乘以时间限之差。第二部分则由变化路径上被积函数的变化所引起，不过现在是与原来相同的积分的时间限之间的变化。所以我们可以把作用量积分的 Δ -变分表达成

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = L(t_2) \Delta t_2 - L(t_1) \Delta t_1 + \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt. \quad (8-74)$$

这里的第二个积分中的变分可以通过变化路径的某种参量化

来实现,完全象对于哈密顿原理一样,只是 q_i 的变分在端点处并不为零.在分部积分中引起的端点项应予保留,而右边的积分项则成为

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_1^2.$$

根据拉格朗日方程,方括号中的量等于零,所以 Δ -变分的形式成为

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = (L \Delta t + p_i \delta q_i) \Big|_1^2. \quad (8-75)$$

式(8-75)中的 δq_i 指的是 q_i 在原来端点时刻 t_1 和 t_2 处的变分.我们则希望用 Δq_i 来表示 Δ -变分, Δq_i 是实际路径端点处的 q_i 和变化路径端点处的 q_i 之间的变化,包括端点时刻的变化在内.从图8-2可清楚地看出,这两个变化由下列关系式相联系¹⁾:

$$\Delta q_i = \delta q_i + \dot{q}_i \Delta t. \quad (8-76)$$

因此,式(8-75)能表达成

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = (L \Delta t - p_i \dot{q}_i \Delta t + p_i \Delta q_i) \Big|_1^2$$

或

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = (p_i \Delta q_i - H \Delta t) \Big|_1^2. \quad (8-77)$$

为了得到最小作用量原理,在往后的考虑中有三条重要的限制性条件:

1) 式(8-76)在形式上可由变化路径的参量形式(8-72)来推导.例如,在上端点处,我们有

$$\Delta q_i(2) = q_i(t_2 + \Delta t_2, \alpha) - q_i(t_2, 0) = q_i(t_2 + \Delta t_2, 0) - q_i(t_2, 0) + \alpha \eta_i(t_2 + \Delta t_2),$$

精确到 α 和 Δt_2 的一级小量时,则是

$$\Delta q_i(2) = \dot{q}_i(2) \Delta t_2 + \delta q_i(2),$$

这是式(8-76)所预示的结果.

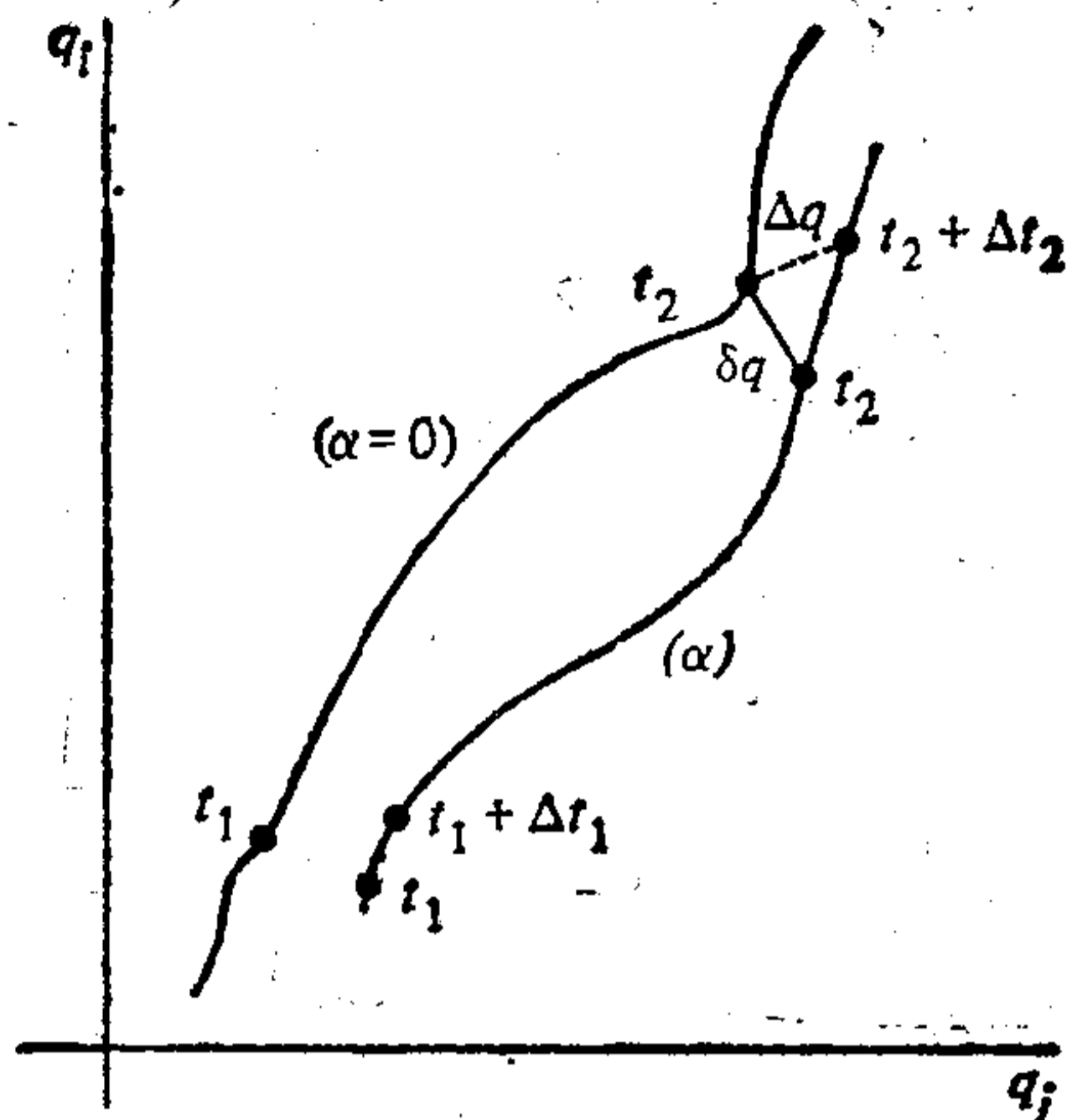


图 8-2 位形空间内 Δ -变分的图示

1. 所考虑的系统只限于 L (因而还有 H) 不是时间的显函数, 从而是 H 守恒的系统;
2. 所取变分应使 H 在变化路径上和实际路径上都守恒;
3. 对变化路径还有进一步的限制, 即要求 Δq_i 在端点处等于零 (Δt 则不然).

要说明这样得到的变分的本质, 只要注意到, 满足这些条件的变化路径可以在位形空间内很好地描绘同实际路径一样的曲线. 差别在于系统点沿这条曲线移动的速率不一样, 即函数 $q_i(t)$ 在变化路径上将是变动的. 因此, 为使哈密顿函数在变化路径上所有各点都保持相同的数值, 就必须改变两端点的时刻. 满足了这三个限制条件后, 作用量积分的 Δ -变分式 (8-77) 简化为

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = -H(\Delta t_2 - \Delta t_1). \quad (8-78)$$

但在相同条件下, 作用量积分本身成为

$$\int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} p_i \dot{q}_i dt - H(t_2 - t_1),$$

它的 Δ -变分为

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \Delta \int_{t_1}^{t_2} p_i \dot{q}_i dt - H(\Delta t_2 - \Delta t_1). \quad (8-79)$$

比较式(8-78)和式(8-79),最后得最小作用量原理¹⁾:

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} p_i \dot{q}_i dt = 0. \quad (8-80)$$

为谨慎起见,应注意到修正的哈密顿原理在表面上可以表达成与式(8-80)相类似的形式. 如果用参量 θ 描述系统点的轨道,那么,就象节 7-9 和节 8-4 中的情况一样,修正的哈密顿原理将成为

$$\delta \int_{\theta_1}^{\theta_2} (p_i \dot{q}_i - H) t' d\theta = 0. \quad (8-81)$$

应该记得(见第 425 页附注),当 t 变换到 θ 时,动量 p_i 不变,而且 $\dot{q}_i t' = \dot{q}_i$. 其次,共轭于 t 的动量等于 $-H$. 所以式(8-81)能重新表达为

$$\delta \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sum_{i=1}^{n+1} p_i \dot{q}_i d\theta = 0, \quad (8-82)$$

这里的 t 已用 q_{n+1} 表示. 然而,不应该把式(8-82)与最小作用量相混淆. 式(8-82)论及的是 $(2n+2)$ 维的相空间,这可根据对 $i = n+1$ 的明显求和看出,而式(8-80)则在通常

1) 式(8-80)中的积分在旧文献中常被称为作用量或作用量积分,本书初版遵循了这一惯例. 近年来,把哈密顿原理中的积分称为作用量的已越来越普遍,我们在这里也接受这种用法. 按照 Landau 和 Lifshitz 的 *Mechanics*, 1960, p. 141, 式(8-80)中的积分称为**简约作用量**.

最小作用量原理通常与莫珀图伊斯 (Maupertuis) 的名字联系在一起,某些作者称有关积分为**莫珀图伊斯作用量**. 然而,莫珀图伊斯最初于 1744 年对该原理的原始阐述带有含糊的目的论色彩,在今天当然是难以符合要求的. 对原理的客观阐述还得归功于欧拉和拉格朗日. 当然,定理的名称更确切地说应该是**稳定作用量原理**, 但它的历史名称在文献中已经根深蒂固,今天要把它改过来是很难的. 在有些情况下,简约作用量确实就是最小值,这可参阅 E. T. Whittaker, *A Treatise on Analytical Dynamics*, 4th ed., 1936, p. 250.

的位形空间内。但最为重要的是，最小作用量原理使用的是常数 H 的 Δ -变分，而式(8-82)用的则是 δ -变分， H 在原则上可以是时间的函数。式(8-82)不过是修正的哈密顿原理。不出现哈密顿函数仅仅反映了“齐次问题”的哈密顿函数恒等于零。

最小作用量原理本身能够显示出许多种形式。在非相对论力学中，如果广义坐标的定义方程并不显含时间，则动能将是 q_i 的二次函数[见式(1-71)]：

$$T = \frac{1}{2} M_{jk}(q) \dot{q}_j \dot{q}_k. \quad (8-83)$$

另外，如果势与速度无关，则仅仅从 T 就能推导得正则动量，所得结果为

$$p_i q_i = 2T.$$

因此，这种系统的最小作用量原理能表达成

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = 0. \quad (8-84)$$

再说，如果并无外力作用于系统，例如，象无净外力作用的刚体那样，那么， T 将与总能量 H 一起守恒。最小作用量原理亦将取特殊的形式

$$\Delta(t_2 - t_1) = 0. \quad (8-85)$$

式(8-85)表明，在两点间保持能量守恒的所有可能路径中，系统将沿着运动时间为最短(严格地说是一极值)的特定路径运动。这种形式的最小作用量原理使我们联想到几何光学中的费马原理，即在两点之间，光线将沿着传输时间为最短的路径传输。在第十章中，当我们讨论到哈密顿表述和几何光学之间的联系时，还有机会研究这些情况。

在论述微幅振荡的第六章中，我们引进了曲线位形空间的概念(见第296页)，对这种空间来讲，矩阵 \mathbf{T} 的元素构成了

度规张量. 这种位形空间有一个性质, 即 $2T$ 等于系统点速度矢量的平方. 在这里, 只要 T 具有式 (8-83) 的形式, 我们就能够作出完全相似的处理¹⁾. 亦即构成一个位形空间, 使 M_{ik} 系数构成度规张量. 一般讲, 这个空间将是曲线的和非正交的. 因此在该空间内的路径长度元将定义为 [见式 (6-24)]

$$(d\rho)^2 = M_{ik}dq_idq_k, \quad (8-86)$$

从而动能的形式为

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2, \quad (8-87)$$

或者等同地为

$$dt = \frac{d\rho}{\sqrt{T}}. \quad (8-88)$$

式(8-88)使我们有可能把简约作用量积分中的变量由 t 变换为 ρ , 而使最小作用量原理成为

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = 0 = \Delta \int_{\rho_1}^{\rho_2} \sqrt{T} d\rho,$$

最后得

$$\Delta \int_{\rho_1}^{\rho_2} \sqrt{H - V(q)} d\rho = 0. \quad (8-89)$$

式(8-89)常常被称为雅可比形式的最小作用量原理. 现在它指的是系统点在特殊的曲线位形空间内的路径, 这种空间由元素为 M_{ik} 的度规张量来表征. 系统点将以 $\sqrt{2T}$ 的速率沿着这一位形空间内的路径运动. 如果无外力作用于物体, T 就是常数, 根据雅可比原理, 系统点将沿着位形空间内的最短路径运动. 等同的说法是, 系统的运动将使系统点沿着该位形空间的短程线运动.

1) T 的元素与对于平衡位置的位移无关. 而这里的元素 M_{ik} 一般讲是 q 的函数. 但这种差别决不会影响到有关表述.

应该强调的是，雅可比形式的最小作用量原理论述的是系统点的路径，而不是它随时间的运动。式(8-89)是关于路径长度元 $d\rho$ 的说明，由于 H 是常数，而 V 又只与 q_i 有关，所以决不会出现时间。确实，有可能用雅可比形式的原理来求得路径的微分方程，经历的过程有点象推导拉格朗日方程时所经历的过程。用费马原理的形式，最小作用量原理的雅可比变型能够提供几何光学和电子光学中的许多富有成效的应用。但任何进一步的探讨都将使我们离题太远。

我们还能够以许多种方式来推得经典力学的大量类似的变分原理。举其一例，即由最小作用量原理直接导致赫兹最小曲率原理，该原理表明，在无外力作用时，质点将沿曲率为最小的路径运动。根据雅可比原理，这种路径必定是短程的，而最小曲率的几何性质是大家熟知的短程线特征之一。已经指出，变分原理本身并不包含新的物理内容，并且也不大可能简化给定力学问题的实际解。它们的价值主要在于作为经典力学理论结构新表述的起点。对此，哈密顿原理特别有成效，其次就要算最小作用量原理了。其他的则除了导致毫无意义的目的论者的臆测之外几乎一无用处，在此对它们作进一步探讨似乎毫无意义。

推荐参考书目

P. H. Badger, *Equilibrium Thermodynamics* 许多热力学教科书都在一定程度上提到了勒让德变换对热力学势的应用。这本参考书的第十章中有着特别长而又清晰的论述。

R. Courant 和 D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*
正如已经提到过的那样，勒让德变换对于偏微分方程理论具有正式的数学应用。Courant 在这一著作的第二卷中提供了这方面以及勒让德变换的几何意义的清晰易懂的讨论（第一章，第6节）。

E. T. Whittaker, *Analytical Dynamics* 经典力学中所遇变分原

理的课题可以变得非常复杂,表面上互不相关的许多领域内它都有极其深刻的影响.例如,哈密顿原理与一般的二阶偏微分方程论之间就有着紧密的联系.其中有些论题将在下几章中讨论;但有许多内容对于我们这里的讨论并无裨益.同样,象哈密顿原理中的极值究竟是极大还是极小这样的问题对我们是不足取的;而且要研究变分原理的许多分支也不可能(或不必要).对这类性质的问题感兴趣的学生将能找到足够的参考文献;实际上,“多得令人发愁”.能够在这里列出来的只是可以得到的参考书中的一小部分,而这一著作则是其中的主要著作之一.书中第九章和第十章的开头两节与本章内容有关.第七章的最后四节也有许多关于稳定运动的振荡方面的资料和例子,但是一如往常,经他叙述后问题看起来要比实际上复杂些.

C. Lanczos, *Variational Principles of Mechanics* 在论述正则方程的第六章中,值得注意的是它强调了变换到哈密顿表述时使变量域的维数倍增的问题——指从位形空间到相空间的变换.在第五章中,有关最小作用量原理的论述与这里所给出的观点略有不同.

J. L. Synge, *Classical Dynamics* 这是一本篇幅适中的书(224页),后来作为一篇文章被收集在 *Encyclopedia of Physics* 卷 III/1 中.它包括许多通常的课题,但往往是根据高度新颖的观点论述的.论述一般动力学理论的 E 节系统地表述了各种用过的变量空间,并且被扩大到包含有时间和能量的相空间.读起来往往有些困难,但作一番努力还是值得的.

L. A. Pars, *Treatise on Analytical Dynamics* 哈密顿方程只是作为“拉格朗日方程的进一步应用”这一章中的一节提出的.但(第九章中)对适用于稳定运动附近的振荡的劳斯方法则有着极其丰富而又有用的资料.尽管显得有点紊乱.

K. R. Symon, *Mechanics* (节 12.6 中)作者对稳定运动附近的微幅振荡的讨论,由于不愿提及劳斯函数而遇到一定的困难,但他是以专家的口吻来谈论这个课题的.他的研究兴趣涉及到加速器理论,在这种理论中,微幅振荡的稳定性是一个重要的问题.电子感应加速器的振荡是作为一个例子来讨论的.另一个不同寻常的例子是三体问题中所谓拉格朗日点的稳定性问题.

D. A. Wells, *Lagrangian Dynamics* 书中讨论了哈密顿方程,但非常简要而且提供的资料也很少。然而,其中有一章根据劳斯的观点广泛地论述了稳定运动附近的振荡,并附有大量图示及例子,大部分都与工程问题有关。

P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics* 这是一本篇幅不大的书,是他的某些讲稿的再版本,书中汇集了他关于从经典力学过渡到量子力学的考虑。概述了他提出的处理齐次问题的方法,并为此设想了弱约束和强约束的等级体系。略为懂得一点正则变换(在下一章中给出)对于理解问题是有帮助的。

H. Rund, *Hamilton-Jacobi Theory in the Calculus of Variation* 这里给出了前一章中提到的有关齐次问题的广泛论述,尽管处理方式似乎并非普遍认可的。

D. Ter Haar, *Elements of Hamiltonian Mechanics* 前面(第432页)提到了与作者对修正的哈密顿原理的论述不一致的原因。然而,值得注意的是对变分原理的论述,这里的时间,就象是在最小作用量原理中一样是变化的,而且在形式上把时间和能量推广成了正则变量——然而对齐次问题中固有的危险则估计不足。

P.- Brunet, *Étude Historique sur le Principe de la Moindre Action* 对最小作用量原理的早期历史感兴趣的人将会发现,这里的论述是从容不迫的,从莫珀图伊斯的目的论开始讲起,直到它变成发展力学的可靠工具的拉格朗日时代为止。

R. L. Lindsay 和 H. Margenau, *Foundations of Physics* 哈密顿原理和最小作用量原理的阐述,似乎把先觉的认识赋予了力学系统,认为运动所导致的终态是知道的。这种表象当然是一种错觉,系统的运动只决定于初始条件。但在过去,这种见解曾经导致许多哲学上的推测。这本教材的第三章对于这一点以及类似的方面都作了充分的讨论,并为这方面的进一步阅读提供了参考资料。

习 题

1. (a) 把勒让德变换反过来,从 $H(q_i, p_i, t)$ 来推导 $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ 的

性质 (其中的 q_i 作为独立变量)。并证明它将给出拉格朗日运动方程。

(b) 按照相同的步骤,用函数

$$L'(p, \dot{p}, t) = -\dot{p}_i q_i - H(q, p, t)$$

求运动方程。

2. 建立哈密顿表述中两质点的有心力运动问题, 消去循环变量并把问题化为求积分的问题。

3. 用哈密顿函数和哈密顿运动方程表述图 1-4 所示的双摆问题。建议不但直接根据 L 而且也根据式 (8-19) 来求哈密顿函数。

4. 某系统的拉氏函数能表达成

$$L = ax^2 + b \frac{\dot{y}}{x} + cx\dot{y} + fy^2\dot{x}\dot{z} + g\dot{y} - k\sqrt{x^2 + y^2},$$

式中的 a, b, c, f, g 和 k 都是常数。哈密顿函数如何? 哪些量是守恒的?

5. 一动力学系统的拉氏函数为

$$L = \dot{q}_1^2 + \frac{\dot{q}_2^2}{a + bq_1^2} + k_1 q_1^2 + k_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2.$$

式中 a, b, k_1 和 k_2 是常数。求哈密顿表述中的运动方程。

6. 一个自由度的哈密顿函数的形式为

$$H = \frac{p^2}{2\alpha} - bqpe^{-\alpha t} + \frac{ba}{2} q^2 e^{-\alpha t} (\alpha + be^{-\alpha t}) + \frac{kq^2}{2},$$

式中 a, b, α 和 k 是常数。

(a) 求对应于这一哈密顿函数的拉氏函数;

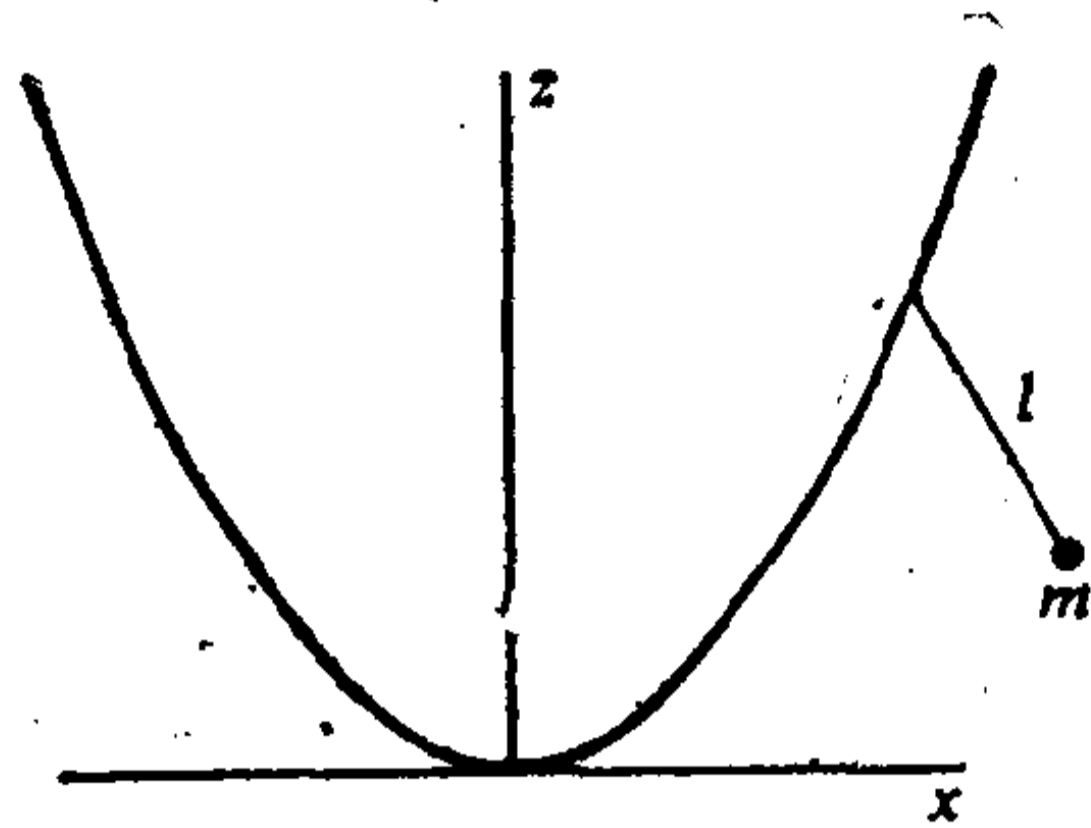
(b) 求不显含时间的等效拉氏函数;

(c) 对应于这第二个拉氏函数的哈密顿函数是什么? 两个哈密顿函数之间的关系又如何?

7. 求第五章习题 13 中所描述的系统的哈密顿函数, 并求这一系统的哈密顿运动方程。在求取哈密顿函数时同时采用直接的和矩阵的处理的两种方法。

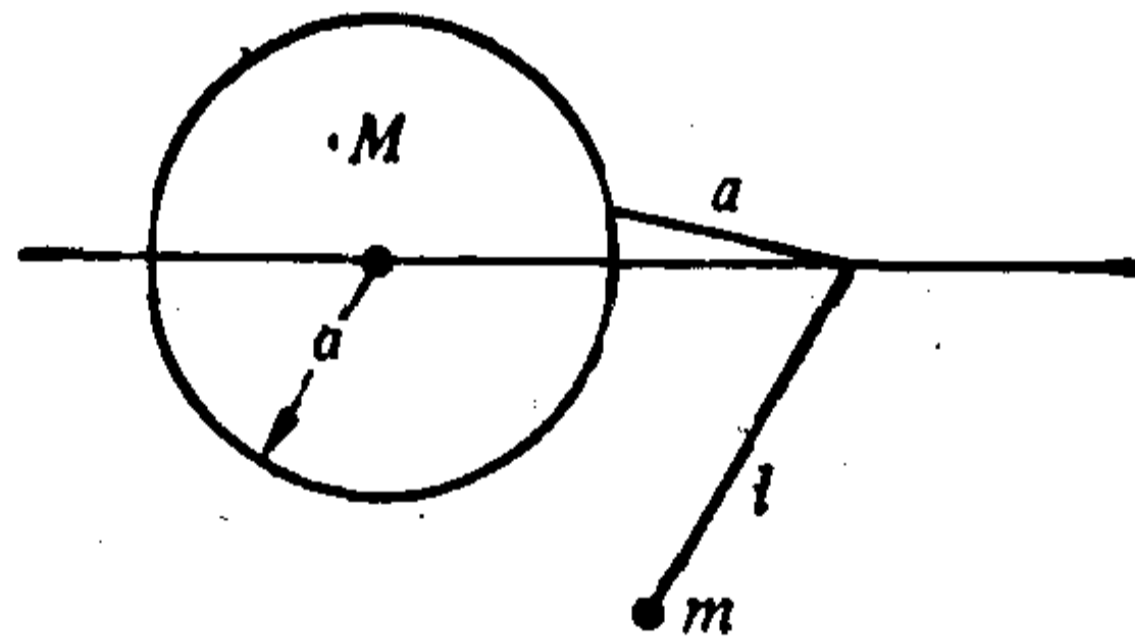
8. 重复前一习题, 只是现在允许摆的运动是三维的, 即一个装有弹簧的球面摆。用直接的或矩阵的处理方法都可以。

9. 一个长度为 l 、质量为 m 的单摆的悬挂点被约束在竖直平面内的抛物线 $z = ax^2$ 上运动。推导支配摆及其悬挂点的运动的哈密顿函数。求哈密顿运动方程。



10. 求长度为 l 、质点质量为 m 的平面摆的哈密顿运动方程，其悬挂半径在半径为 a 的竖直圆的周界线上匀速转动。从物理学观点来描述正则动量和哈密顿函数的本质。

11.(a) 一质量为 m 、长度为 l 的平面单摆悬挂点被约束着沿一水平轨道运动，该悬挂点通过一长度为 a 的无质量连杆与质量为 M 、半径亦为 a 的均匀飞轮周界上某点相连，如图所示。飞轮绕着固定在轨道上的一个中心转动。求组合系统的哈密顿函数和哈密顿运动方程。



(b) 假设悬挂点沿轨道的运动服从时间的函数 $x = f(t)$ ，式中 x 在 $x = +2a$ (相对于飞轮的中心) 处反向变化。再次求哈密顿函数和哈密顿运动方程。

12. 求取第二章习题 20 中所描述的系统的哈密顿函数，首先用实验室系中的坐标，再用转动坐标系中的坐标表示，什么是哈密顿函数的

守恒性质,它们与系统能量的关系如何?

13. (a) 一质量为 m 、电荷为 e 的质点在有心力势 $V(r)$ 以及恒定均匀磁场 \mathbf{B} 的作用下在一平面内运动, \mathbf{B} 垂直于该平面并由静矢势

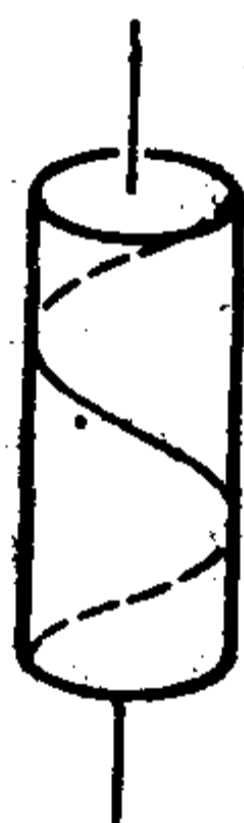
$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{i}$$

产生. 求用观测者的惯性系坐标表示的哈密顿函数.

(b) 用相对于前面的坐标系的转动坐标重复 (a) 中的推导, 转轴垂直于平面, 转动角速度

$$\omega = -\frac{eB}{2mc}.$$

14. 一半径为 a 、密度为 ρ 的均匀圆柱体被配置得能够绕一竖直轴自由转动. 圆柱体外面是一刚性固定的均匀螺旋形轨道, 一质量为 m 的质点能够沿着该轨道无摩擦地滑动. 假设质点最初静止于该圆柱体的顶部, 并在重力作用下下滑. 利用任何一组坐标来推导质点和圆柱体的组合系统的哈密顿函数并求解系统的运动.



15. 假设上题中的圆柱体因约束使它以角频率 ω 作匀速转动. 分别用惯性坐标系和固定于转动圆柱体的坐标系建立质点的哈密顿函数. 说明各种情况下哈密顿函数的物理性质, 并指出哈密顿函数是否守恒.

16. 一质量为 m 的质点能在两弹簧作用下作一维运动, 两弹簧连结在相距为 a 的两固定点之间 (见图). 弹簧服从胡克定律, 未被拉伸时的长度为零, 力常数分别为 k_1 和 k_2 .

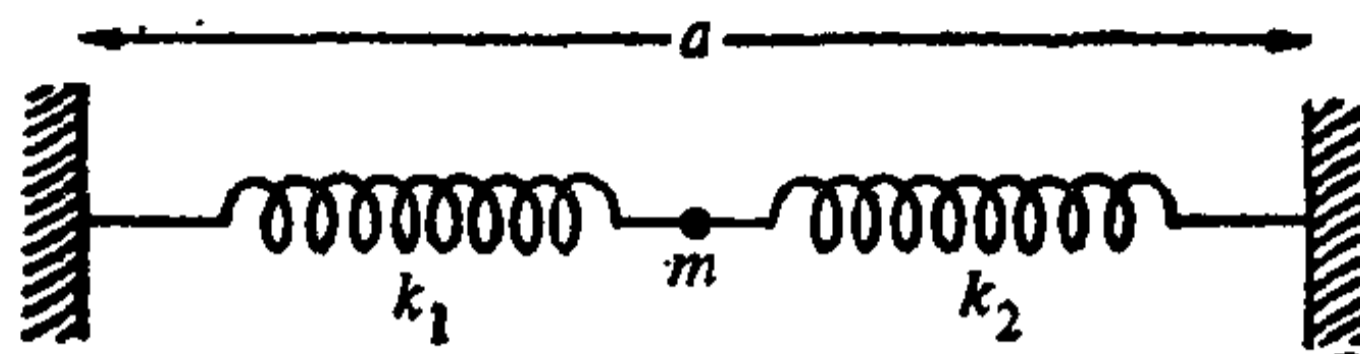
(a) 把质点位置与某一固定点的距离作为广义坐标, 求拉氏函数和

相应的哈密顿函数。能量是否守恒？哈密顿函数是否守恒？

(b) 引进一新的坐标 Q ，其定义为

$$Q = q - b \sin \omega t, \quad b = \frac{k_2 a}{k_1 + k_2}.$$

用 Q 表示的拉氏函数是什么？相应的哈密顿函数是什么？能量是否守



恒？哈密顿函数是否守恒？

17. (a) 具有一个自由度的系统的拉氏函数可表达成

$$L = \frac{m}{2} (\dot{q}^2 \sin^2 \omega t + \dot{q} q \omega \sin 2\omega t + q^2 \omega^2).$$

相应的哈密顿函数是什么？是否守恒？

(b) 引进一个新坐标 Q ，其定义为

$$Q = q \sin \omega t.$$

求用这一新坐标表示的拉氏函数和相应的哈密顿函数。 H 是否守恒？

18. 考虑一个质点系统，各质点间通过仅与它们之间的标量距离有关的势相互作用着，并受到来自一固定点的保守有心力的作用。求质点相对于一个轴系的哈密顿函数，这个轴系的原点位于力心，并以角速度 ω 绕惯性系中某轴转动。在这种情况下，哈密顿函数的物理意义是什么？是否是一个运动常数？

19. 前面已看到，把 q_i 和 t 的函数的时间全微商加于拉氏函数而不致改变运动方程。这种附加项对于正则动量和哈密顿函数起什么作用？证明，用这种新的哈密顿函数得到的运动方程可化为原来的哈密顿运动方程。

20. 假定拉氏函数是 q 的不高于二次的多项式。试利用拉氏函数的矩阵形式，把 $2n$ 个方程

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

变换为用 q 和 p 表示的 $2n$ 个 \dot{q}_i 和 \dot{p}_i 的方程。证明，这些方程与我们从哈密顿运动方程求得的方程相同。

21. 能够建立一个‘类哈密顿’表述，其中的 q_i 和 p_i 是独立变量，而‘哈密顿函数’为 $G(q_i, p_i, t)$ 。（这里的 p_i 是以通常方式用 q_i 和 \dot{q}_i 定义的。）试从拉格朗日表述着手，详细地说明如何构成 $G(q_i, p_i, t)$ ，并推导相应的‘哈密顿运动方程’。

22. 求有一点被固定的对称陀螺的哈密顿函数，再由它求出哈密顿运动方程。把这些运动方程与节 5-7 中所讨论的运动方程相联系，说明如何使解有可能化为求积分的问题。并用劳斯方法消去循环坐标。

23. 第一章习题 13 中给出了韦伯电动力学中认可的与速度相关的势。在这种势的作用下，运动的单个质点的哈密顿函数是什么？

24. 证明，如果 λ_i 是某个方阵的本征值，那么，只要有逆矩阵存在，它的本征值就应该是 λ_i^{-1} 。

25. 证明，矩阵 J 具有 (8-32) 和 (8-33) 两式中给出的性质，并证实它的行列式的值等于 +1。

26. 证明，哈密顿原理能够表达成

$$\delta \int_1^2 [2H(\eta, t) + \eta J \dot{\eta}] dt = 0.$$

27. 证明，从哈密顿函数式 (8-39) 和式 (8-41) 都能得出式 (8-38) 所描述的同样的运动。

28. 把“快”陀螺的章动作为稳定运动附近的微幅振荡，这里的稳定运动是在恒定 θ 角时的进动。试求章动频率。

29. 使一对称陀螺绕其质心迴转。轴尖与一水平盘的中心保持一固定距离 r ，该盘可绕一竖直轴自由转动。陀螺在最初是绕其图轴转动着的，该图轴最初则与竖直方向成一 θ_0 角度。作为稳定运动附近的微幅振荡的例子来分析陀螺的可能章动。

30. 质量为 m_1 和 m_2 的两个质点由一弦线连接在一起，该弦线相当于一个力常数为 k 的服从胡克定律的弹簧。其中一个质点在光滑水平面上无摩擦地自由运动，另一个质点则由一根穿过平面上小孔的弦线铅垂地悬挂着。求稳定运动的条件，这里的稳定运动是指平面上的这个

质点在与小孔保持恒定距离的情况下的匀速转动。分析一下用它与小孔的径向距离以及第二个质点的垂直高度表示的微幅振荡。

31. 证明, (8-71)形式的修正的哈密顿原理也能得出哈密顿运动方程。

32. 如果正则变量并不全部独立, 而是由

$$\psi_k(q_i, p_i, t) = 0$$

这种形式的辅助条件相关联的, 证明, 正则运动方程能表达成

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_k \lambda_k \frac{\partial \psi_k}{\partial p_i} = \dot{q}_i,$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_k \lambda_k \frac{\partial \psi_k}{\partial q_i} = -\dot{p}_i,$$

这里的 λ_k 是拉格朗日待定乘子。这种在哈密顿方程中把 t 作为正则变量的表述是一个恰当的例子, 因为在 p_{n+1} 和其他正则变量之间存在着关系式

$$H(q_1, \dots, q_{n+1}; p_1, \dots, p_n) + p_{n+1} = 0.$$

证明, 作为这些情况的结果, 这种表述的 $2n + 2$ 个哈密顿方程能够化为 $2n$ 个寻常哈密顿方程加上式 (8-35) 以及关系式

$$\lambda = \frac{dt}{d\theta}.$$

注意, 尽管这些结果使我们联想到了相对论协变哈密顿表述, 但它们已经完全纳入了非相对论力学的框架之中。

33. 与场相互作用的单质点系统的一个可能协变拉氏函数为

$$\Delta = \frac{1}{2} m u_\lambda u_\lambda + D_{\lambda\nu}(x_\mu) m_{\lambda\nu},$$

式中 $D_{\lambda\nu}(x_\mu)$ 是反对称场张量, $m_{\lambda\nu}$ 则是反对称角动量张量, 即

$$m_{\lambda\nu} = m(x_\lambda u_\nu - x_\nu u_\lambda).$$

正则动量是什么? 相应的协变哈密顿函数是什么?

第九章 正则变换

一般说来,当我们直截了当地应用哈密顿表述时,实质上并没有减少求解任何给定力学问题的困难。我们最后要解的微分方程,实际上是拉格朗日方法提供的方程。哈密顿表述的好处并不在于把它作为一种计算工具,而在于它能使我们更深刻地理解力学的形式结构。赋予坐标和动量以同等的地位,把它们看作都是独立变量,使我们在选择作为“坐标”和“动量”的物理量时具有更大的自由。从而,我们能以更新、更抽象的方式来表述力学的物理内容。它对力学问题的实际应用往往有很大帮助,但是我们今天所以对这些更为抽象的表述感兴趣,主要是因为它们在构筑更为近代的物质理论方面起着必不可少的作用。例如,经典力学中的这种或那种表述已经成为统计力学和量子论两者的起点。在本章和下一章中,我们将探讨由哈密顿方法衍生的一些表述。

9-1 正则变换方程

有一类问题的哈密顿方程的解是极易求得的。今考虑哈密顿函数是运动常数、所有坐标都是循环的情况。在这些条件下,共轭动量 p_i 都是常数:

$$p_i = \alpha_i,$$

而且由于哈密顿函数不可能是时间或者循环坐标的显函数,所以它可以写成

$$H = H(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

因而 q_i 的哈密顿方程简单地为

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial \alpha_i} = \omega_i, \quad (9-1)$$

这里的 ω_i 仅是 α_i 的函数, 因而始终是常数. 式 (9-1) 的直接解为

$$q_i = \omega_i t + \beta_i, \quad (9-2)$$

式中 β_i 是由初始条件决定的积分常数.

看来, 这样容易求得的、这类问题的解似乎只有学术上的兴趣, 因为所有广义坐标都是循环的情况实际上极少出现. 但是, 能够用来描述一给定系统的广义坐标组不止一组. 例如, 讨论质点的平面运动时, 既可以选用笛卡儿坐标作广义坐标:

$$q_1 = x, \quad q_2 = y,$$

也可选用平面极坐标:

$$q_1 = r, \quad q_2 = \theta.$$

两种选择同样有效, 但其中总有一组更适合于所考虑的问题. 要注意的是, 对于有心力来说, 不论 x 还是 y 都不是循环的, 而第二组却包含了角度 θ 这样一个循环坐标. 所以循环坐标的数目与广义坐标的选择有关, 而且每一个问题都可能有一种特殊的选择, 使所有坐标都是循环的. 如果找到了这组坐标, 那么, 余下的事情就容易办了. 但由于问题所提供的明显的广义坐标一般都不是循环的, 所以首先必须求得某种特定的步骤, 以便把一组变量变换为另一组可能更为适用的变量.

前几章所考虑的变换中就有从一组坐标 q_i 变换为另一组新坐标 Q_i 的讨论, 其变换方程的形式为

$$Q_i = Q_i(q, t). \quad (9-3)$$

例如, 从笛卡儿坐标变换到平面极坐标的正交变换方程就具有式 (9-3) 这种一般形式. 正如前面第一章习题 15 所指出

的,这种变换称为点变换。但在哈密顿表述中,动量也是与广义坐标具有同等地位的独立变量。所以坐标变换的概念必须扩大,把独立的坐标和动量 q_i, p_i 同时变换为另一组新坐标 Q_i, P_i 这种变换也包括进来,它们的(可逆的)变换方程为

$$Q_i = Q_i(q, p, t), \quad P_i = P_i(q, p, t). \quad (9-4)$$

这样,新坐标将不仅由原来的坐标而且也由原来的动量来定义。式(9-3)可以说是定义了位形空间的变换,与此相应,式(9-4)则定义了相空间的变换。

在哈密顿力学的发展中,我们只对新坐标 Q, P 是正则坐标的那些变换感兴趣。要满足这一要求,必须有某个函数 $K(Q, P, t)$ 来保证用这组新坐标表示的运动方程具有哈密顿形式

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}, \quad (9-5)$$

函数 K 起了用这组新坐标表示的哈密顿函数的作用¹⁾。所考虑的变换必须独立于特定的问题,这对于将来的考虑是重要的。也就是说, (Q, P) 不仅对于某些特定的力学系统,而且对于自由度数相同的所有系统都必须都是正则坐标。不论 H 的特定初始形式如何,以新坐标和新动量表示的运动方程都必须是式(9-5)的形式。事实上,可能需要发展一种从 (q, p) 到 (Q, P) 的特定变换,以便处理象平面谐振子这样的问题。但是,例如把它应用于二维开普勒问题时,从这同一个变换还必须能得出哈密顿运动方程。

在节 8-5 中已经看到,如果要 Q_i 和 P_i 是正则坐标,它们

1) 有人曾诙谐地说,如 H 代表 Hamiltonian (哈密顿函数),则 K 就应代表 Kamiltonian (卡密顿函数)! 当然, K 完全象 H 一样是一个哈密顿函数,但暂时用这个名称来替代“变换后的哈密顿函数”这一较长的名称是方便的。

必须满足某个修正的哈密顿原理,该原理能表达成

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t)) dt = 0 \quad (9-6)$$

(这里暗示应对重复下标 i 求和). 与此同时, 原来的正则坐标当然满足某个类似的原理:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)] dt = 0. \quad (9-7)$$

(9-6) 和 (9-7) 两式的同时成立, 并不意味着两式的被积函数相等. 由于一般形式的修正的哈密顿原理在端点处的变分为零, 因此, 如果两个被积函数由关系式

$$\lambda(p_i \dot{q}_i - H) = P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt} \quad (9-8)$$

相联系, 则两种说法都能得到满足. 这里的 F 是相空间坐标的某个函数, 它具有连续的二阶微商; λ 则是与正则坐标和时间无关的常数. 倍增常数 λ 与正则坐标的一种特别简单的变换型式有关, 这种变换称为标度变换. 假设我们改变坐标和动量的量度单位的大小, 以便从实际上把它们变换为由

$$Q'_i = \mu q_i, \quad P'_i = \nu p_i \quad (9-9)$$

定义的一组坐标 (Q', P') . 那么, (9-5) 形式的哈密顿方程显然将为变换后的哈密顿函数 $K'(Q', P') = \mu\nu H(q, p)$ 所满足. 同样明显的是, 相应的修正的哈密顿原理的两个被积函数由下式相联系:

$$\mu\nu(p_i \dot{q}_i - H) = P'_i \dot{Q}'_i - K', \quad (9-10)$$

此式具有式 (9-8) 的形式, 其中 $\lambda = \mu\nu$. 借助于适当的标度变换, 总有可能使我们只要考虑 $\lambda = 1$ 的正则坐标变换. 例如, 如果对于某个不等于 1 的 λ 有一个 $(q, p) \rightarrow (Q', P')$ 的正则坐标变换, 那么, 我们总能够找到一组中间的正则坐标 (Q, P) , 它通过一个 (9-9) 形式的简单标度变换与 (Q', P') 相关联, 从而使 $\mu\nu$ 也具有同 λ 相同的数值. 两组正则坐标

(q, p) 和 (Q, P) 之间的变换将满足式 (9-8), 不过现在的 $\lambda = 1$:

$$p_i \dot{q}_i - H = P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt}. \quad (9-11)$$

由于标度变换基本上是微不足道的, 正如朗道和列夫希茨所说¹⁾, 最后应予检验的变换将是使式 (9-11) 能够成立的那些变换.

$\lambda \neq 1$ 的那种正则坐标变换称为扩展正则变换. $\lambda = 1$ 而且式 (9-11) 能成立的变换将简单地称为正则变换. 因此, 可以认为前段的结论表明: 任何一个扩展正则变换都可由一个正则变换通过一个标度变换来构成. 今后, 除非另作说明, 所考虑的正则坐标之间的变换指的都是正则变换: 如果有一些正则变换, 其变换方程 (9-4) 并不显含时间, 则可方便地给它们起一个特有的名字, 譬如称为限制正则变换²⁾.

式 (9-11) 右边的最后一项只在端点处对作用量积分的变分有贡献, 因此, 如果 F 是 (q, p, t) 或 (Q, P, t) 或相空间坐标的任何混合的函数, 这一项都将等于零, 因这些坐标在端

1) 参阅 Landau 和 Lifshitz, *Mechanics*, 1960, p. 144. 这里所定义的标度变换与有时叫作**扩张对称**情况中涉及到的标度变换有关, 但不完全相同. 那里的时间标度也是变换的, 而且注意力集中于某类特别的哈密顿函数, 它们对新、老正则坐标有着相同的函数依存关系. 参阅习题 2.

2) 今天, 大多数(但不是所有的)作者在使用正则变换这一名称时, 与这里给出的定义是等价的. 但其他的术语却并不标准. 各文献中的用法也不统一, 而且这种混乱看来并无减少的趋势. 提出上述术语是为适合物理学的需要, 在许多物理文献中, 用到**相切变换**这一名称时, 总认为它与正则变换是同义词, 虽然它被引入数学时的意义是不同的. 有些作者仅当存在时间坐标的变换时才使用相切变换一词. 我们将看到, 这种相切变换与扩展相空间内的限制正则变换等价, 在这种空间内, 时间也是一个正则坐标. 因而这种表达特别适合于狭义相对论. 从数学家角度来描述相切变换则可参阅 C. Carathéodory, *Calculus of Variations Part I*, 1965, 第七章; 和 H. Rund, *Hamiltonian-Jacobi Theory in the Calculus of Variations*, 1966, pp. 84—85.

点处的变分都等于零。其次,通过变换方程(9-4)以及它们的逆方程,就能够一部分用老变量组、另一部分用新变量组来表达 F 。事实上,只当(除时间以外的)变量中有一半来自老变量组、另一半来自新变量组时, F 才可以用来确定正则变换的精确形式。在这种情况下, F 好象是两组正则变量之间的桥梁,并因此被称为变换的生成函数。为了说明生成函数怎样确定变换方程,我们假设 F 被定义为新、老广义坐标的函数,即

$$F = F_1(q, Q, t). \quad (9-12)$$

式(9-11)的形式因而成为

$$\begin{aligned} p_i \dot{q}_i - H &= P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF_1}{dt} \\ &= P_i \dot{Q}_i - K + \frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i. \end{aligned} \quad (9-13)$$

由于新、老坐标 Q_i, q_i 是各自独立的,所以只当 \dot{q}_i 和 \dot{Q}_i 的系数都等于零时,式(9-13)才能保持恒等,这时有

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad (9-14a)$$

$$P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \quad (9-14b)$$

最后剩下

$$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (9-14c)$$

式(9-14a)是把 p_i 定义为 q_i, Q_i 和 t 的函数的 n 个关系式。假定它们能够反演,那么,它们将能用 q_i, p_i 和 t 来解出 n 个 Q_i , 从而得出变换方程(9-4)的前一半。一旦建立起了 Q_i 和老的正则变量 (q, p) 之间的关系,它们就能代入式(9-14b),从而得出作为 q_i, p_i 和 t 的函数的 n 个 P_i , 亦即变换方程

(9-4)的另一半. 最后,式(9-14c)提供了新哈密顿函数 K 和老哈密顿函数 H 之间的联系. 在解释式(9-14c)时必须十分小心. 首先, H 中的 q 和 p 是通过式(9-4)的逆方程表达成 Q 和 P 的函数的. 然后再以相似的方式用 Q 和 P 来表达 $\partial F_1/\partial t$ 中的 q_i ,这两个函数加起来即得 $K(Q,P,t)$.

所述步骤指出,从一个给定的生成函数 F_1 着手,即能求得正则变换方程. 这种过程通常是可逆的,即给定了变换方程(9-4),就能推导得合适的生成函数 F_1 . 首先把式(9-4)倒过来,用 q, Q 和 t 表示 p_i 和 P_i . 然后式(9-14a,b)将构成一组成对的偏微分方程,只要变换确实是正则的,这组方程原则上就能够积分并给出 F_1 . 确定 F_1 时往往会有一个仅仅依赖于 t 的任意附加函数(它并不影响变换方程),而且有时还会有其他的不确定性.

有时用 $F_1(q,Q,t)$ 这种类型的生成函数来描述正则变换并不相宜. 例如,对于有些变换, p_i 也许不能表达成 q, Q 和 t 的函数,相反,可能是 q, P 和 t 的函数. 这时,就得设法找到一个函数,它是老坐标 q 和新动量 P 的函数. 显然,这时的式(9-13)必须代之以一个包含 \dot{P}_i 而不是 \dot{Q} 的等价关系式. 为此,可以把式(9-11)中的 F 表达成

$$F = F_2(q,P,t) - Q_i P_i. \quad (9-15)$$

把这个 F 代入式(9-11),即得

$$p_i \dot{q}_i - H = -\dot{Q}_i P_i - K + \frac{d}{dt} F_2(q,P,t). \quad (9-16)$$

然后把 F_2 的全微商展开,并归并 \dot{q}_i 和 P_i 的系数,即得方程

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial \dot{q}_i}, \quad (9-17a)$$

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \quad (9-17b)$$

这时的

$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \quad (9-17 c)$$

象前面一样,从式(9-17a)可以解出作为 q_i, p_i 和 t 的函数的 P_i , 它相当于变换方程(9-4)的后一半. 余下的一半变换方程则由式(9-17b)提供.

现在, 处理另外两个一般类型生成函数的相应步骤是显而易见的. 老动量 p_i 、新坐标 Q_i 和时间 t 的生成函数 F_3 可由

$$F = q_i p_i + F_3(p, Q, t) \quad (9-18)$$

定义. 采用此式后, 式(9-11)成为

$$-q_i \dot{p}_i - H = P_i \dot{Q}_i - K + \frac{d}{dt} F_3(p, Q, t). \quad (9-19)$$

经过使系数相等的相同过程, 即得

$$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i} \quad (9-20 a)$$

以及

$$K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}, \quad (9-20 b)$$

其变换方程则由 $2n$ 个方程(9-20 a)来推导. 如果生成函数具有 $F_4(p, P, t)$ 的形式, 则它与 F 的关系为

$$F = q_i p_i - Q_i P_i + F_4(p, P, t), \quad (9-21)$$

以致式(9-11)取形式

$$-q_i \dot{p}_i - H = -Q_i \dot{P}_i - K + \frac{d}{dt} F_4(p, P, t). \quad (9-22)$$

变换方程因而由下列关系式推导:

$$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i} \quad (9-23 a)$$

以及

$$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (9-23b)$$

令人感兴趣的想法是把这四个一般类型的生成函数看成是通过勒让德变换相互关联的。例如，从 F_1 变到 F_2 相当于从变量 q, Q 变到 q, P ，关系式为

$$-P_i = \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}.$$

这正好是节 8-1 中所描述的、基础变量勒让德变换所要求的形式。与式 (8-5) 相类似，我们将得到

$$F_2(q, P, t) = F_1(q, Q, t) + P_i Q_i, \quad (9-24)$$

这相当于联立式 (9-15) 与式 (9-12)。生成函数的所有其他定义方程跟 (9-12) 联立起来可以看作是从 F_1 作出的勒让德变换，这时式 (9-21) 所描述的是一个双重的勒让德变换。这样做的唯一缺陷是可能使人们认为，对于任何给定的正则变换，总有可能借助于这些勒让德变换求得所有四种类型的生成函数。但这并非总是可能的。有一些变换恰恰是不宜用一定形式的生成函数描述的，这在前面已经注意到，而且在下一节中还将用一些具体例子加以说明。如果我们试着应用勒让德变换过程，则会得到恒等于零或者是不确定的生成函数。为此，我们宁可相对于 F 来定义每一种生成函数，这是 $2n$ 个独立坐标和动量的某个未定函数。

最后应该强调的是，对于系统的所有自由度，合适的生成函数不一定符合四种一般类型之一。有可能要用到（而且对于某些正则变换一定要用到）四种类型的混合的生成函数。举一个简单的例子，对于具有两个自由度的特定正则变换，最好用形式为

$$F'(q_1, p_2, P_1, Q_2, t)$$

的生成函数。这种生成函数与式 (9-11) 中的 F 之间的关系决定于方程

$$F = F'(q_1, p_1, P_1, Q_2, t) - Q_1 P_1 + q_2 p_2,$$

而变换方程将从下列关系式得到:

$$p_1 = \frac{\partial F'}{\partial q_1}, \quad Q_1 = \frac{\partial F'}{\partial P_1},$$

$$q_2 = -\frac{\partial F'}{\partial p_1}, \quad P_2 = -\frac{\partial F'}{\partial Q_2},$$

这时有

$$K = H + \frac{\partial F'}{\partial t}.$$

具体的说明将在下一节以及习题中给出。

9-2 正则变换举例

正则变换的性质以及生成函数所起的作用能够通过某些简单而又重要的例子作出令人满意的说明。首先考虑一个第二种类型的生成函数, 它的特殊形式为

$$F_2 = q_i P_i. \quad (9-25)$$

根据式 (9-17), 变换方程为

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i,$$

$$K = H.$$

新、老坐标相同, 所以 F_2 仅仅生成恒等变换。

一种更为一般的变换型式是由生成函数

$$F_2 = f_i(q_1, \dots, q_n; t) \quad (9-26)$$

描述的, 这里的 f_i 可以是任何一组需要的独立函数。根据式 (9-17b), 新坐标 Q_i 为

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = f_i(q, t). \quad (9-27)$$

因此,采用这种生成函数时,新坐标只与老坐标和时间有关,并不包含老的动量.这种变换正是式(9-3)定义的点变换类的例子.为了确定一个点变换,函数 f_i 应该是独立的和可逆的,从而使 q_i 能够用 Q_i 表示.由于 f_i 还是完全任意的,因此可以断言,所有点变换都是正则的.式(9-17c)给出了用老的哈密顿函数和 f_i 函数的时间微商表达的新哈密顿函数.

应该注意的是,式(9-26)所给出的 F_2 并不是得出由 f_i 确定的点变换的唯一生成函数.显然,相同的点变换隐含于下列更为一般的形式中:

$$F_2 = f_i(q_1, \dots, q_n; t)P_i + g(q_1, \dots, q_n; t), \quad (9-28)$$

这里的 $g(q, t)$ 是老坐标和时间的任何(可微)函数.坐标的变换方程(9-27)对于这种生成函数保持不变.但动量的变换方程对于两种形式是不同的.根据式(9-17a)可得

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = \frac{\partial f_i}{\partial q_i} P_i + \frac{\partial g}{\partial q_i}, \quad (9-29)$$

这里采用了式(9-28)所给出的 F_2 的形式.这些方程可以反过来给出作为 (q, p) 的函数的 P ,最容易的是用矩阵符号表示它们:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}}. \quad (9-29')$$

这里的 \mathbf{P}, \mathbf{P} 和 $\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}}$ 是 n 个元素的列(或行)矩阵, $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}}$ 是一个方阵,它的第 ij 个元素为 $\partial f_i / \partial q_j$.由此可得, \mathbf{P} 是 \mathbf{P} 的一个线性函数:

$$\mathbf{P} = \left(\mathbf{P} - \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \right)^{-1}. \quad (9-30)$$

因此, Q 的变换方程独立于 g 而只与 $f_i(q, t)$ 有关,但 P 的变换方程则与 g 的形式有关,而且一般讲是老坐标和老动量两

者的函数。式(9-26)给出的生成函数仅仅是式(9-28)的特殊情况,这时的 $g = 0$, 并有着相应特殊的 P 的变换方程。

一个有启发意义的变换是由第一种生成函数 $F_1(q, Q, t)$ 提供的, F_1 的形式为

$$F_1 = q_k Q_k. \quad (9-31)$$

根据式(9-14a, b), 相应的变换方程为

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} = Q_i, \quad (9-32a)$$

$$P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -q_i. \quad (9-32b)$$

实际上,这个变换使动量和坐标交换了一下;新的坐标就是老的动量,而新的动量实质上是老的坐标。这一简单的例子强调了广义坐标和动量的独立地位。它们都是以哈密顿表述来描述系统运动时所必需的,它们之间的差别实际上只是名称不同。改变各处的名称也不过是符号的变化。这样,在理论中就不再有把 q_i 看作空间坐标、把 p_i 看作质量乘以速度这种概念的残迹。其次,从哈密顿方程

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

可以直接看出这种交替变换是正则变换。如果用 q_i 替代 p_i , 那么,只有用 $-p_i$ 替代 q_i 时,方程才会保持正则形式。

还可以容易地看到,交替变换不可能从 $F_2(q, P, t)$ 这类生成函数来推导。采用这种生成函数时,要求偏微分方程组(9-17a)式

$$p_i = \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial q_i},$$

所给出的 p_i 作为 q, P 和 t 的函数。但在交替变换中, p_i 根本不会是 P 的函数;它只依赖于新坐标 Q , 因此, F_2 不适宜作为

交替变换的生成函数。

同理, F_1 函数显然不能用来生成恒等变换。在这种情况下, 式 (9-14a)

$$p_i = \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial q_i}.$$

将用 q, Q, t 来确定 p_i ; 但在恒等变换中, p_i 只与 P 有关, 事实上就等于 P_i 。通过勒让德变换定义 F_1 [见式 (9-24)]:

$$F_1(q, Q, t) = F_2(q, P, t) - P_i Q_i$$

是不可能回避这一困难的。如果把式 (9-25) 的 F_2 代入, 把 q 表达成 Q , 那么, 这种做法将得出结果

$$F_1(q, Q, t) = Q_i P_i - P_i Q_i \equiv 0,$$

这是无法用作生成函数的。同样, 如果想构成一个 F_2 函数来生成交替变换同样也是要碰壁的¹⁾。

使某些 (q, p) 对不变、其余的 (q, p) 对互换(符号也随之变化)的这种变换显然是正则变换。但根据上述考虑, 这种变换不可能从前面所讨论的四种“纯”形式中的任何一种生成函数来推导; 它的生成函数应具有“混合的”形式。例如, 在两个自由度的系统中,

$$\begin{aligned} Q_1 &= q_1, & P_1 &= p_1, \\ Q_2 &= p_2, & P_2 &= -q_2, \end{aligned}$$

这样的变换是由函数

$$F = q_1 P_1 + q_2 Q_2$$

生成的, 这是 F_1 和 F_2 这两种类型的混合型。

作为最后一个例子, 考虑一个能够用来求解一维简谐振子问题的正则变换。如果力常数是 k , 则用通常坐标表示的这一问题的哈密顿函数为

1) 然而, 不难证明, F_3 函数能够生成恒等变换, 而交替变换则可以由 F_4 函数来推导。

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}. \quad (9-33)$$

用 ω^2 表示比值 k/m , H 还能表达成

$$H = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2q^2). \quad (9-34)$$

表达成两个平方项之和的这种形式的哈密顿函数, 使人想到一种变换, 其中 H 的新坐标是循环的. 如果我们能够找到一个正则变换, 其形式为

$$p = f(P)\cos Q, \quad (9-35a)$$

$$q = \frac{f(P)}{m\omega}\sin Q, \quad (9-35b)$$

那么, 作为 Q 和 P 的函数的哈密顿函数将是

$$K = H = \frac{f^2(P)}{2m}(\cos^2 Q + \sin^2 Q) = \frac{f^2(P)}{2m},$$

因而 Q 是循环的. 问题在于要找到一个尚未限定的函数 $f(P)$, 以保证变换是正则的. (9-35) 的两个方程之比给出关系式

$$p = m\omega q \cot Q, \quad (9-36)$$

这与 $f(P)$ 无关. 式 (9-36) 具有适合于 F_1 类型生成函数的式 (9-14a) 的形式:

$$p = \frac{\partial F_1(q, Q)}{\partial q},$$

与式 (9-36) 相对应的 F_1 的最简解显然是

$$F_1 = \frac{m\omega q^2}{2} \cot Q. \quad (9-37)$$

因而, 式 (9-14b) 提供了变换方程的另一半:

$$p = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2\sin^2 Q}. \quad (9-38)$$

解出 q , 即得

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q, \quad (9-39)$$

与式(9-35 a)比较证明:导致正则变换的 $f(P)$ 的唯一形式为

$$f(P) = \sqrt{2m\omega P}. \quad (9-40)$$

由此可知,用变换后的变量表示的哈密顿函数为

$$H = \omega P. \quad (9-41)$$

由于哈密顿函数中的 Q 是循环的,所以共轭动量 P 是一个常数.从式(9-41)可以看出, P 实际上等于常值能量 E 除以 ω :

$$P = \frac{E}{\omega}.$$

Q 的运动方程可简化为

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = \omega,$$

其直接解为

$$Q = \omega t + \alpha, \quad (9-42)$$

α 是由初始条件决定的积分常数.根据式(9-39), q 的解为

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \alpha), \quad (9-43)$$

这是谐振子的通常解¹⁾.

用相切变换求解谐振子的问题;似乎有点象“杀鸡用牛刀”.然而,我们在此有了一个简单的例子,说明怎样才能通过正则变换把哈密顿函数化为所有坐标都是循环的形式.应

1) 能够证明, F_1 不能毫不含糊地确定正则变换, 因为对 q 求解式(9-38)时, 我们本来是能够取负的平方根来替代(隐含于)式(9-39)中的正根的. 然而, 从 F_1 推导得的两个正则变换仅有些微差别; 把 α 变化为 π , 就相当于从一种变换变到了另一种变换. 但应记住的是, 从生成函数导得的变换往往可能是双值的, 甚至具有局部奇异性.

用这一技巧来求解力学问题的一般情况,将留待下一章讨论.目前,我们将继续研究正则变换的形式性质.

9-3 对正则变换的耦对逼近

处理正则变换的另一个方法似乎与生成元的形式无关;在推导时,可以用哈密顿方程的矩阵表述或耦对表述.为了介绍这种方法,让我们考虑一个限制正则变换,即在变换方程中不出现时间的变换

$$Q_i = Q_i(q, p), \quad P_i = P_i(q, p). \quad (9-44)$$

已知哈密顿函数在这种变换中是不变的.在式(9-44)基础上得到的 Q_i 的时间微商为

$$\begin{aligned} \dot{Q}_i &= \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \dot{p}_j \\ &= \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \end{aligned} \quad (9-45)$$

另一方面,式(9-44)的逆方程为

$$q_j = q_j(Q, P), \quad p_j = p_j(Q, P), \quad (9-46)$$

使我们有可能把 $H(q, p, t)$ 看作是 Q 和 P 的函数,并构成偏微商

$$\frac{\partial H}{\partial P_i} = \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial P_i} + \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial P_i} \quad (9-47)$$

把式(9-45)和式(9-47)比较,即能推断出

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i},$$

即只当

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \right)_{q,p} &= \left(\frac{\partial p_j}{\partial P_i} \right)_{Q,P}, \\ \left(\frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \right)_{q,p} &= - \left(\frac{\partial q_j}{\partial P_i} \right)_{Q,P} \end{aligned} \quad (9-48 a)$$

时,变换才是正则的。加于微商的下标是为了提醒我们,这些方程左边的 Q_i 被看作是 (q, p) 的函数[见式(9-44)],而右边则是作为 (Q, P) 的函数的 q_i 和 p_i 的微商[见式(9-46)]。把 P_i 与 H 对于 Q_i 的偏微商作类似的比较,即得条件

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial P_i}{\partial q_j}\right)_{q,p} &= -\left(\frac{\partial p_j}{\partial Q_i}\right)_{Q,P}, \\ \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_j}\right)_{q,p} &= \left(\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}\right)_{Q,P}. \end{aligned} \quad (9-48b)$$

整个方程组(9-48)有时称为(限制)正则变换的“直接条件”。

如果我们引用节 8-1 来引进的有关哈密顿表述的耦对符号,则推导出式(9-48)的代数运算即能以一种紧凑而又完美的形式来完成。应该记得,如果 η 是一个具有 $2n$ 个元素 q_i, p_i 的列矩阵,则哈密顿方程能够表达成

$$\dot{\eta} = \mathbf{J} \frac{\partial H}{\partial \eta}, \quad (8-31)$$

式中 \mathbf{J} 是式(8-30)定义的反对称矩阵。同样,新坐标组 Q_i, P_i 定义了一个 $2n$ 元列矩阵 ζ ,而对于限制正则变换,变换方程(9-44)的形式为

$$\zeta = \zeta(\eta). \quad (9-49)$$

与式(9-45)相类似,我们能够设法求得新变量的运动方程,为此,考虑一下 ζ 的一个典型元素的时间微商:

$$\dot{\zeta}_i = \frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_j} \dot{\eta}_j, \quad i, j = 1, \dots, 2n.$$

采用矩阵符号时,这一时间微商能表达成

$$\dot{\zeta} = \mathbf{M} \dot{\eta}, \quad (9-50)$$

式中 \mathbf{M} 是变换的雅可比矩阵,其矩阵元为

$$M_{ij} = \frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_j}. \quad (9-51)$$

利用 η 的运动方程,式(9-50)成为

$$\dot{\zeta} = M J \frac{\partial H}{\partial \eta}. \quad (9-52)$$

现在,借助于逆变换,即能把 H 看作是 ζ 的函数,而 H 对 η_i 的微商则象下式来计算:

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_i} = \frac{\partial H}{\partial \zeta_i} \frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_i},$$

或者采用矩阵符号¹⁾

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} = \tilde{M} \frac{\partial H}{\partial \zeta}. \quad (9-53)$$

联立式(9-52)和式(9-53),即得到从正则变量组 η (与时间无关地)变换到任何变量组 ζ 的运动方程的形式:

$$\dot{\zeta} = M J \tilde{M} \frac{\partial H}{\partial \zeta}. \quad (9-54)$$

这种做法的好处是使我们可以从生成元的形式看到,对于限制正则变换来讲,用新变量表示的老的哈密顿函数可以作为新的哈密顿函数:

$$\dot{\zeta} = J \frac{\partial H}{\partial \zeta}.$$

如果 M 满足条件

$$M J \tilde{M} = J, \quad (9-55)$$

那么,变换[即式(9-49)]将是正则的。只要把证明中各步的次序倒过来,就能直接证明式(9-55)也是限制正则变换的一个必要条件。注意,对于一个扩展了的、与时间无关的正则变换(这时的 $K = \lambda H$),式(9-55)的条件应代之以

$$M J \tilde{M} = \lambda J. \quad (9-56)$$

式(9-55)可以用各种形式来表示。用 \tilde{M} 的逆矩阵右乘其

1) 节 7-3 的读者应该已经看到,式(9-50)表明 η 在这种变换下是抗变地变换的,而式(9-53)则表明 H 对于 η 的元素的偏微商是协变地变换的[见式(7-48')和式(7-49')].

两边,即得

$$MJ = J\tilde{M}^{-1} \quad (9-57)$$

(因为逆的转置等于转置的逆).我们将发现,矩阵方程(9-57)的元素与式(9-48a)和式(9-48b)是一致的.如用 J 左乘、用 $-J$ 右乘式(9-57),则根据式(8-32)可得

$$JM = \tilde{M}^{-1}J$$

或

$$\tilde{M}JM = J. \quad (9-58)$$

式(9-55)或者它的等价变式(9-58)称作正则变换的耦对条件,而满足这一条件的矩阵 M 将称作耦对矩阵. [按照式(7-43)的解释,我们也可以认为式(9-58)表明了 M 是相空间内的一个正交矩阵,而 J 是这一相空间内的度规张量,但这种看法不是特别合适.]

对于一个把时间作为参量的正则变换来讲,就耦对条件所作出的简单推导不再成立.不过耦对条件依然是正则变换的必要而又充分的条件,即使该正则变换包含有时间也如此.有可能通过冗长但是直截了当的步骤来证明,耦对条件对于所有的正则变换是普遍有效的,证明的步骤类同于限制正则变换所采用的步骤¹⁾,但是,我们将取一种不同的步骤,即利用包含有时间的、参量形式的正则变换.形式为

$$\zeta = \zeta(\eta, t) \quad (9-59)$$

的正则变换,当时间从某一初始值 t_0 增加时,是连续演变的.它是首先由数学家李(Sophus Lie)加以系统研究的、连续变换族的单参量例子,并在经典力学变换理论中起着重要的作用.如果变换

1) 对于这种方法,可参阅 L.A. Pars, *A Treatise on Analytical Dynamics*, 1965, pp. 514-515, 以及 G. S. S. Ludford 和 D. W. Yannitell, *Am. J. Phys.*, **36**, 231 (1968).

$$\eta \rightarrow \zeta(t) \quad (9-60a)$$

是正则的, 则变换

$$\eta \rightarrow \zeta(t_0) \quad (9-60b)$$

显然也是正则的. 根据正则变换的定义可知, 由

$$\zeta(t_0) \rightarrow \zeta(t) \quad (9-60c)$$

表征的变换也是正则的. 由于式 (9-60b) 中的 t_0 是一固定常数, 所以这一正则变换满足耦对条件. 如果现在的变换式 (9-60c) 服从耦对条件, 则不难证明(见习题 13), 一般的变换 (9-60a) 也将服从耦对条件.

为了证明耦对条件对式 (9-60c) 那种类型的正则变换确实是成立的, 我们引进无限小正则变换(缩写为 I. C. T.) 的概念, 这一概念将证明有着广泛的用途. 就象无限小转动情况中一样, 在这种变换中, 新、老变量之差仅是一无限小量. 在所有的计算中只保留这些无限小量的一次项. 于是变换方程可以表达成

$$Q_i = q_i + \delta q_i, \quad (9-61a)$$

$$P_i = p_i + \delta p_i, \quad (9-61b)$$

或者采用矩阵形式

$$\zeta = \eta + \delta\eta. \quad (9-61c)$$

(这里的 δq_i 和 δp_i 并不代表虚位移, 而只是坐标和动量的无限小变化.) 因而无限小正则变换与前节中所讨论的恒等变换只有无限小的差别. 用生成元的形式, I. C. T. 的一个合适的生成函数将是

$$F_2 = q_i P_i + \epsilon G(q, P, t), \quad (9-62)$$

式中的 ϵ 是变换的某个无限小参量, G 是它的 $2n$ 个自变量的任何(可微)函数. 根据式 (9-14a), 动量的变换方程得自

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}$$

或

$$\delta p_i \equiv P_i - p_i = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}. \quad (9-63 a)$$

同样,根据式(9-14b), Q_i 的变换方程决定于关系式

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial p_i} = q_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_i}.$$

由于第二项已经是 ϵ 的线性项,而 P 与 p 仅差一无限小量,所以对一级无限小来讲,用 p_i 置换导函数中的 P_i , 同前面是完全一致的. 因此,可以把 G 看作仅是 q, p (以及可能还有 t) 的函数. 按照通常的做法,我们将把 $G(q, p)$ 称作无限小正则变换的生成函数,虽然严格说来,这种名称只应属于 F . 这样, Q_i 的变换方程能够表达成

$$\delta q_i = \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_i}. \quad (9-63 b)$$

两个变换方程可以组合成一个矩阵方程

$$\delta \eta = \epsilon J \frac{\partial G}{\partial \eta}. \quad (9-63 c)$$

无限小正则变换的一个明显的例子,将是 t 从 t_0 变化一无限小量 dt 时式(9-60c)的变换:

$$\zeta(t_0) \rightarrow \zeta(t_0 + dt), \quad (9-64)$$

这里的 dt 作为无限小参量 ϵ . 从 $\zeta(\eta, t_0)$ 到 $\zeta(\eta, t)$ 的这种变换的连续演变,意味着 $\zeta(t_0) \rightarrow \zeta(t)$ 这一变换可以看作是由步长为 dt 的这种 I. C. T. 的连续变换所构成. 这足以证明,无限小变换式(9-64)是满足耦对条件的. 不过,我们能够从变换方程(9-63)简单地证明:任何 I. C. T. 的雅可比矩阵是一耦对矩阵. 根据定义,无限小变换的雅可比矩阵是

$$M \equiv \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = 1 + \frac{\partial \delta \eta}{\partial \eta},$$

或者根据式(9-63c)

$$M = 1 + \epsilon J \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \eta}. \quad (9-65)$$

式(9-65)中的二阶微商是一个对称方阵,其矩阵元为

$$\left(\frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \eta} \right)_{ii} = \frac{\partial^2 G}{\partial \eta_i \partial \eta_i}.$$

由于J的反对称性质, M的转置矩阵为

$$\tilde{M} = 1 - \epsilon \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \eta} J. \quad (9-66)$$

耦对条件涉及到下列矩阵积的数值:

$$MJ\tilde{M} = \left(1 + \epsilon J \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \eta} \right) J \left(1 - \epsilon \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \eta} J \right).$$

保留这一乘积中的一次项,即得

$$MJ\tilde{M} = J + \epsilon J \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \eta} J - J \epsilon \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \eta} J = J,$$

这证明了耦对条件对于任何无限小正则变换都是成立的。根据所作的一连串论证可以断言,任何正则变换不论是否包含有作为参量的时间,都服从耦对条件式(9-55)或式(9-58)。

就绝大部分而言,耦对法是从生成函数法独立地发展起来的,只是无限小正则变换的处理除外。当然,它们是相互联系的。举例来说,我们将在以后概括性地证明,耦对条件隐含着生成函数的存在。但在很大程度上这种联系是没有意义的。两者都是处理正则变换的有效方法,也都包含有变换所必需具备的全部性质。例如,不论是耦对形式还是生成元的形式,都可以用来证明正则变换具有表征一个群的四个性质(见习题13):

1. 恒等变换是正则变换;
2. 如果某个变换是正则的,则它的逆变换也是正则的;
3. 两个相继的正则变换(“积”运算)确定了一个也是正则

的变换；

4. 积运算服从结合律。

所以，我们可以视需要随意选用生成元法或耦对法，这取决于用哪种方法在当时能得出最简单的论述。

9-4 泊松括号和其他正则不变量

两个函数 u, v 相对于正则变量 (q, p) 的泊松括号定义为

$$[u, v]_{q,p} = \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} \quad (9-67)$$

在这个双线性表达式中具有一种典型的耦对结构，如同哈密顿方程中一样： q 与 p 耦合，而 p 则与 $-q$ 耦合。因此，泊松括号适宜于直接写成矩阵形式，这时的形式为

$$[u, v]_{\eta} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} \mathbf{J} \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad (9-68)$$

右边第一个矩阵上面用一转置符号是为了表明这一矩阵在乘法运算中应该作为单行矩阵来处理。在大多数场合下，这种特别的提示并无必要，因而这一符号可以略去。

假设我们从正则变量组 (q, p) 本身来选择函数 u 和 v ，那么，根据定义方程(9-67)或(9-68)，将不难看出这些泊松括号之值为

$$[q_j, q_k]_{q,p} = 0 = [p_j, p_k]_{q,p} \quad (9-69)$$

和

$$[q_j, p_k]_{q,p} = \delta_{jk} = -[p_j, q_k]_{q,p}.$$

引进方阵泊松括号 $[\eta, \eta]$ ，其 lm 元为 $[\eta_l, \eta_m]$ ，我们就可以把关系式(9-69)归并为一个方程。这样，式(9-69)能表达成

$$[\eta, \eta]_{\eta} = \mathbf{J}. \quad (9-70)$$

现在让我们取变换后变量 (Q, P) 中的变量作为 u, v , 或者说通过变换方程 (9-59) 用 (q, p) 来定义 ζ , 则所有能够由 (Q, P) 构成的泊松括号组都能概括为矩阵泊松括号, 它定义为

$$[\zeta, \zeta]_{\eta} = \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial \eta} J \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$$

但是, 我们认为偏微商确定了变换的雅可比方阵, 因此, 泊松括号关系式等效于

$$[\zeta, \zeta]_{\eta} = \tilde{M} J M \quad (9-71)$$

如果 $\eta \rightarrow \zeta$ 这样的变换是正则的, 则耦对条件成立, 式 (9-71) 化为

$$[\zeta, \zeta]_{\eta} = J, \quad (9-72)$$

反之, 如果式 (9-72) 成立, 则变换就是正则的。

象式 (9-70) 或式 (9-72) 这样的正则变量本身的泊松括号称为基本泊松括号。根据式 (9-70) 可知,

$$[\zeta, \zeta]_{\zeta} = J, \quad (9-73)$$

因此式 (9-72) 表明, ζ 变量的基本泊松括号相对于任何正则坐标组来计值时都有相同的数值。换言之, 基本泊松括号在正则变换下是不变的。从式 (9-71) 已经看到, 这种不变性是保证变换矩阵为耦对的必要而又充分的条件。基本泊松括号的不变性因而完全等价于正则变换的耦对条件。

不难证明。所有泊松括号在正则变换下都不变。今考虑两个函数 u, v 相对于 η 坐标组的泊松括号式 (9-68)。类似于式 (9-53), v 对于 η 的偏微商能够用对于 ζ 的偏微商来表示:

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = \tilde{M} \frac{\partial v}{\partial \zeta}$$

(也就是说, 偏微商应协变地变换)。按相似方式可得

$$\frac{\tilde{\partial}u}{\partial\eta} = \tilde{M} \frac{\partial u}{\partial\zeta} = \frac{\partial u}{\partial\zeta} M.$$

因此,泊松括号式(9-68)能表达成

$$[u, v]_{\eta} = \frac{\tilde{\partial}u}{\partial\eta} J \frac{\partial v}{\partial\eta} = \frac{\partial u}{\partial\zeta} M, J \tilde{M} \frac{\partial v}{\partial\zeta}.$$

如果变换是正则的,式(9-55)形式的耦对条件成立,于是有

$$[u, v]_{\eta} = \frac{\tilde{\partial}u}{\partial\zeta} J \frac{\partial v}{\partial\zeta} \equiv [u, v]_{\zeta}. \quad (9-74)$$

因此,泊松括号相对于任何正则变量组来计算时都有相同的数值——所有泊松括号都是正则不变量.到目前为止,在书写泊松括号符号时,我们总是小心地用下标来指明定义括号时所用的变量组.假如我们只用正则变量,那么这样做是不必要的,一般我们将省略掉这种下标¹⁾.

正则变换的标志是哈密顿运动方程在变换后形式不变.同样,泊松括号的正则不变性意味着用泊松括号表示的方程在正则变换下形式不变.正如我们将要看到的那样,我们能够发展一种与哈密顿表述平行的、仅用泊松括号表示的经典力学结构.这种用所有正则坐标表示时都具有相同形式的泊松括号表述,对于实现从经典力学到量子力学的过渡特别有用.一种简单的“对应原理”认为:经典泊松括号将被一种适当定义的相应量子算符的对易子所替代.

泊松括号的代数性质颇为有趣.我们已经利用过一些明显的性质

$$[u, u] = 0 \quad (9-75 a)$$

1) 注意,标度变换或扩展的正则变换有关的耦对条件将取式(9-56)的形式,这样,泊松括号不会在所有坐标系内都有相同的数值.这是把标度变换从有用的那类正则变换中排除出去的理由之一.

(反对称性): $[u, v] = -[v, u].$ (9-75b)

几乎同样明显的特性为

(线性): $[au + bv, w] = a[u, w] + b[v, w],$ (9-75c)

式中的 a 和 b 是常数, 以及

$$[uv, w] = [u, w]v + u[v, w]. \quad (9-75d)$$

另一个性质决不是明显的, 但在确定泊松括号的性质时却极为重要. 它通常是以雅可比恒等式的形式给出的, 它表明, 如果 u, v 和 w 是三个具有连续二阶微商的函数, 则

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0, \quad (9-75e)$$

也就是说, 三个函数的双重泊松括号的循环排列之和等于零. 要证明泊松括号的雅可比恒等式, 除了进行冗长的代数运算外别无捷径可循. 然而, 如果引进一种特殊的命名法, 可以使处理的复杂情况大为缓和. 我们将在 u, v, w (或者它们的函数) 上置一下标, 以表示对相应的正则变量的偏微商. 例如

$$u_i \equiv \frac{\partial u}{\partial \eta_i}, \quad v_{ij} \equiv \frac{\partial v}{\partial \eta_i \partial \eta_j}.$$

采用这种记号后, u 和 v 的泊松括号能够表达成

$$[u, v] = u_i J_{ij} v_j.$$

这里的 J_{ij} 象往常一样是 J 的第 ij 个元素. 我们在证明中需要用到的 J 的唯一性质是它的反对称性. 现在来考虑式 (9-75e) 中的第一个双重泊松括号

$$[u, [v, w]] = u_i J_{ij} [v, w]_j = u_i J_{ij} (v_k J_{kl} w_l)_j.$$

由于元素 J_{kl} 是常数, 所以对 η 的微商对它们不起作用, 从而有

$$[u, [v, w]] = u_i J_{ij} (v_k J_{kl} w_{lj} + v_{ki} J_{kl} w_l). \quad (9-76)$$

把式 (9-76) 中的 u, v, w 作出循环排列能够得到另一个双重泊松括号. 因此, 总共有六项, 每项都是对哑标 i, j, k 和 l 的四重和. 考虑式 (9-76) 中包含有 w 的二阶微商的那一项:

$$J_{ij}J_{kl}u_i v_k w_{lj}.$$

w 的另一个仅有的二阶微商，将在计算式 (9-75e) 中的第二个双重泊松括号时出现：

$$[v, [w, u]] = v_k J_{kl} (w_i J_{ii} u_i)_l.$$

这里， w 的二阶微商项为

$$J_{ij}J_{kl}u_i v_k w_{jl}.$$

由于求导的次序是无关紧要的，即 $w_{lj} = w_{jl}$ ，所以两项之和为

$$(J_{ij} + J_{ji})J_{kl}u_i v_k w_{lj} = 0,$$

这里用到了 J 的反对称性。余下的四项是循环排列的，它们同样能分成两对，一对包含 u 的二阶微商，另一对则包含 v 的二阶微商。按照同样的理由，其中每一对之和为零，因而证实了雅可比恒等式。

如果认为 u, v 的泊松括号定义了两个函数的“积”运算，那么雅可比恒等式就替代了乘法的结合律。应该记得，寻常的算术相乘是可以结合的，即相乘的次序无关紧要：

$$a(bc) = (ab)c.$$

雅可比恒等式表明，括号“积”并不是可结合的，并给出了改变“相乘”次序所造成的影响。雅可比恒等式 (9-75e) 同性质式 (9-75b) 和 (9-75c) 一起，确定了一种不服从结合律的特殊类型代数学，它称为李代数，泊松括号是遵循这种代数学的。但泊松括号运算并不是物理学家所熟悉的、满足李代数条件的仅有的一种“积”。我们将通过习题来证明，两个矢量的矢积

$$v[A, B] \rightarrow A \times B$$

以及两个矩阵的对易子

$$v_I[A, B] \rightarrow AB - BA$$

都与泊松括号一样满足相同的李代数条件。正是这最后一个

性质使得有可能用量子力学算符的对易子来替代经典泊松括号。换句话说,所以能够应用“对应原理”,仅仅是因为泊松括号和对易子都是李代数“积”的一种表示¹⁾。

除泊松括号外,还有其他的正则不变量。其中之一现在主要只有历史上的兴趣,那就是拉格朗日括号。假设 u 和 v 是从正则变量的一组 $2n$ 个独立函数中选出的两个函数。通过反演,正则变量能看作是这一组 $2n$ 个函数的函数。在此基础上, u 和 v 相对于 (q, p) 变量的拉格朗日括号将定义为

$$\{u, v\}_{q,p} = \frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial u} \frac{\partial q_i}{\partial v}, \quad (9-77)$$

或者用矩阵符号表示,则为

$$\{u, v\}_\eta = \frac{\partial \eta}{\partial u} \tilde{J} \frac{\partial \eta}{\partial v}. \quad (9-78)$$

拉格朗日括号正则不变性的证明类同于泊松括号的有关证明,我们首先来构成相对于 ζ 变量的拉格朗日括号:

$$\{u, v\}_\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial u} \tilde{J} \frac{\partial \zeta}{\partial v}. \quad (9-79)$$

然而,有关的微商可以用 η 组表示成

$$\frac{\partial \zeta_i}{\partial v} = \frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_j} \frac{\partial \eta_j}{\partial v} \quad \text{或} \quad \frac{\partial \zeta}{\partial v} = M \frac{\partial \eta}{\partial v}.$$

因此,方程 (9-79) 能够写成

$$\{u, v\}_\zeta = \frac{\partial \eta}{\partial u} \tilde{M} \tilde{J} M \frac{\partial \eta}{\partial v},$$

- 1) 当然,在数学上可以接受这种型式的对应原理,同它在物理学上的需要并不是一回事。量子对应关系式的引进是量子力学先驱者们的一次重大的物理学发现。我们在这里所证明的一切,只是说明经典力学泊松括号表述和量子力学的对应关系的形式在数学结构上存在着相似性。形式上的对应性为

$$[u, v] \rightarrow \frac{1}{i\hbar} (uv - vu).$$

左边的 u, v 是经典函数,右边的 u, v 则是量子算符。

借助于正则变换的耦对条件式 (9-58), 此式将成为

$$\{u, v\}_{\zeta} = \frac{\partial \eta}{\partial u} J \frac{\partial \eta}{\partial v} = \{u, v\}_{\zeta}, \quad (9-80)$$

这就证实了拉格朗日括号的正则不变性.

如果我们取正则变量组的两个变量作为 u 和 v , 即得基本拉格朗日括号

$$\{q_i, q_j\} = 0 = \{p_i, p_j\}; \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad (9-81)$$

或者用矩阵符号表达成

$$\{\eta, \eta\} = J. \quad (9-82)$$

显然, 拉格朗日括号和泊松括号之间存在着某种互为倒数的关系, 但要表达出这种关系的精确形式有点复杂. 令 $u_i (i = 1, \dots, 2n)$ 是正则变量的一组 $2n$ 个独立函数, 并可用一个列(或行)矩阵 u 代表. 因此, $\{u, u\}$ 是一个 $2n \times 2n$ 矩阵, 它的第 ij 个元素为 $\{u_i, u_j\}$, 类似于对 $[u, u]$ 的描述. 两个括号的倒易特性由下列关系式所体现:

$$\{u, u\}[u, u] = -1. \quad (9-83)$$

如果我们选择正则坐标组 η 本身作为 u , 则式 (9-83) 显然是从基本括号公式 (9-70) 和 (9-82) 以及 J 的性质推导而得的. 如果我们用括号的矩阵定义表示, 那么, 要对任意的 u 作出证明也并不困难, 这将留作习题. 尽管拉格朗日括号和泊松括号在许多方面互相类似, 但仍应注意, 拉格朗日括号并不服从雅可比恒等式. 因此, 拉格朗日括号没有资格作为李代数中的“积”运算.

另一个重要的正则不变量是相空间体元的量值. 一个 $\eta \rightarrow \zeta$ 这样的正则变换, 使坐标为 η_i 的 $2n$ 维相空间变换到坐标为 ζ_i 的另一个相空间. 体元

$$(d\eta) = dq_1 dq_2 \cdots dq_n dp_1 \cdots dp_n$$

则变换到一个新的体元

$$(d\zeta) = dQ_1 dQ_2 \cdots dQ_n dP_1 \cdots dP_n.$$

众所周知¹⁾, 两个体元的大小由雅可比行列式的绝对值相互关联着, 即

$$(d\zeta) = \|M\|(d\eta). \quad (9-84)$$

但如果取耦对条件式 (9-55) 两边的行列式, 则有

$$|M|^2 |J| = |J|. \quad (9-85)$$

因此, 在实正则变换中, 雅可比行列式等于 ± 1 , 而绝对值始终等于 1, 这就证明了相空间体元的正则不变性. 另外可知, 相空间内任何一个任意区域的体积

$$J_n = \int \cdots \int (d\eta) \quad (9-86)$$

是一个正则不变量.

式 (9-86) 中的体积分是称为彭加勒积分不变量的一系列正则不变量中的最后一个成员, 它包括对不同维数相空间的子空间所求之积分. 系列中的其他一些成员不可能表述得象 J_n 那样简单, 由于它们对理论的进一步发展并非必要, 因此, 这里不准备讨论它们了²⁾.

最后, 基本泊松括号的不变性使我们能够概要地证明: 耦对条件意味着生成函数的存在, 就象前节的结论所指出的那样. 为使讨论更为简单, 我们将只研究具有一个自由度的系统; 一般的证明方法可以直接推广到许多自由度的系统³⁾. 假设, 变换方程

1) 例如, 可参阅 W. Kaplan, *Advanced Calculus*, 2d ed., 1913, p. 270.

2) 较低级数的积分不变量的通常表述是有困难的. 有关这一问题的阐述可参阅 H. D. Block, *Quarterly Applied Math.*, **12**, 201, (1954).

3) 对一般系统作出的详细证明, 可参阅 C. Carathéodory, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order*, 英译本, Holden-Day, 1965, Vol. 1, Sect. 97, p. 87—90. 文献中的耦对方法与生成元形式之间的关联有时称作卡雷西奥多(Carathéodory)定理.

$$Q = Q(q, p), \quad P = P(q, p)$$

中的第一个是可逆的,因此可以给出 q 和 Q 的某个函数 p , 比如说是

$$p = \phi(q, Q). \quad (9-87)$$

代入第二个变换方程以给出 q 和 Q 的某个函数 P , 比如说是

$$P = \psi(q, Q). \quad (9-88)$$

在这种情况下,我们期望变换将由第一类生成函数 F_1 产生¹⁾, 这时,式 (9-87) 和式 (9-88) 表现为

$$p = \frac{\partial F_1(q, Q)}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q}(q, Q). \quad (9-89)$$

如果式 (9-89) 成立,则必定有

$$\frac{\partial \phi}{\partial Q} = -\frac{\partial \psi}{\partial q}. \quad (9-90)$$

反之,如果我们能够证明式 (9-90) 成立,则必定存在一个函数 F_1 , 使得 p 和 P 由式 (9-89) 给出.

为了说明式 (9-90) 的有效性,可以试把所有的量都看作是 q 和 Q 的函数. 这样,我们自然有恒等式

$$\frac{\partial Q}{\partial Q} = 1,$$

但是如果把式 (9-87) 代入第一变换方程:

$$Q = Q[q, \phi(q, Q)], \quad (9-91)$$

那么,偏微商也能表达成

$$\frac{\partial Q}{\partial Q} = \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial \phi}{\partial Q},$$

从而得到关系式

1) 当然,象恒等变换中那样,如果 Q 变换不是可逆的,就得把 P 方程反过来,导出第二类生成函数.

$$\frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial \phi}{\partial Q} = 1. \quad (9-92)$$

本着相同的精神来计算泊松括号

$$[Q, P] \equiv \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial p} = 1.$$

P 的微商就是看作 q 和 $Q(q, p)$ 的函数的、 ϕ 的微商。因此，泊松括号可表达成

$$[Q, P] = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial \phi}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \left(\frac{\partial \phi}{\partial q} + \frac{\partial \phi}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial q} \right),$$

或者合并各项，得

$$[Q, P] = \frac{\partial \phi}{\partial Q} \left(\frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial Q}{\partial q} \right) - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial \phi}{\partial q},$$

因而

$$1 = - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial \phi}{\partial q}. \quad (9-93)$$

把式 (9-92) 和式 (9-93) 组合起来，即有

$$\frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial \phi}{\partial Q} = - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial \phi}{\partial q}.$$

由于方程两边的 Q 对 p 的偏微商相同，亦即另一个保持不变的变量在两种情况下都是 q ，还由于微商 $\frac{\partial Q}{\partial p}$ 不可能为零（否则， Q 方程就不是可逆的），所以式 (9-90) 必定成立。根据基本泊松括号 $[Q, P]$ （已经看到它等价于耦对条件）之值，即可知道确实存在着一个生成函数。导致正则变换的这两种方法虽然是独立得到的，却是完全等效的。

9-5 运动方程, 无限小正则变换以及泊松括号表述中的守恒定理

几乎整个哈密顿力学框架都可以用泊松括号来重新阐

述。由于泊松括号的正则不变性，所得关系式的形式在正则变换下也将不变。例如，假设我们利用哈密顿运动方程来求正则变量和时间的某个函数 $u(q, p, t)$ 的时间全微商，则有

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial u}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial u}{\partial t} \\ &= \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial u}{\partial t}\end{aligned}$$

或

$$\frac{du}{dt} = [u, H] + \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (9-94)$$

如果采用耦对符号，则式(9-94)的微商应为

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \dot{\eta} + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \eta} J \frac{\partial H}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial t},$$

根据式(9-68)，即可由此式得到式(9-94)。式(9-94)可以看作是泊松括号表述中某个任意函数 u 的广义运动方程。当我们用下面两个正则变量之一替代 u 时，即可作为特殊情况从它得到哈密顿方程：

$$\dot{q}_i = [q_i, H], \quad \dot{p}_i = [p_i, H], \quad (9-95a)$$

或者用耦对符号表示，则为

$$\dot{\eta} = [\eta, H]. \quad (9-95b)$$

我们可以直接看出式(9-95)与哈密顿运动方程是一致的，因为根据泊松括号的定义[式(9-68)]，有

$$[\eta, H] = J \frac{\partial H}{\partial \eta}, \quad (9-96)$$

因而式(9-95b)仅是式(8-31)的另一种表达方式。如果我们把 u 本身作为 H ，那么，从式(9-94)还可以得到另一个熟悉的性质。这时，式(9-94)表明，

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t},$$

这正是前面所得到的式 (8-35)。应该注意, 广义运动方程是正则不变式, 不论用来表示函数 u 或计算泊松括号的正则变量组 q, p 是什么, 它都成立。然而所用的哈密顿函数必须适合于特定的正则变量组。在通过与时间有关正则变换变换到另一组变量时, 我们必须改为使用变换后的哈密顿函数 K 。

如果 u 是一个运动常数, 则式 (9-94) 表明它必然具有性质

$$[H, u] = \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (9-97)$$

所有服从式 (9-97) 的函数都是运动常数, 反之, H 与任何运动常数的泊松括号必定等于常值函数的时间显微商。这样, 我们有了寻求和识别系统常数的一般检验方法。对于那些并不显含时间的运动常数, 式 (9-97) 的检验可简化为要求它们与哈密顿函数的泊松括号等于零¹⁾。

如果知道了两个运动常数, 就有可能通过雅可比恒等式求得其他常数。假定 u 和 v 是两个并非时间显函数的运动常数。那么, 如果把式 (9-75c) 中的 ω 作为 H , 雅可比恒等式则表明

$$[H, [u, v]] = 0,$$

也就是说, u 和 v 的泊松括号也始终是常数。甚至当守恒量显含时间时, 经过简单的代数运算, 同样能够证明 (习题 28): 任何两个运动常数的泊松括号也是一个运动常数 (泊松定理)。按照这种方式重复应用雅可比恒等式, 原则上将能够得到一个完整的运动常数序列。然而, 这个过程实际上往往是令人失望的。 u 和 v 的泊松括号往往证明是 u 和 v 本身的某个毫无价值的函数, 甚至恒等于零。但是, 借助于泊松定理来

1) 根据经典泊松括号和量子对易子之间的“对应原理”可以看出, 这种说法相当于守恒量与哈密顿函数相对易这一熟悉的量子定理。

产生新的独立运动常数的可能性还是应该记住的。

泊松括号的记号还能够用来重新表述无限小正则变换的基本方程。前面已经讨论过(第468页),这种变换是某个参量的连续函数变换的特殊情况,它是从该参量在某个初始值时的恒等变换开始的(为方便起见,可以令这个初始值为零)。如果该参量小到足以把它看作是一个一级无限小量,则变换后的正则变量与初始坐标只差一个无限小量:

$$\zeta = \eta + \delta\eta, \quad (9-98)$$

这里的改变量是通过式(9-63c)用生成元 G 给出的:

$$\delta\eta = \epsilon \int \frac{\partial G(\eta)}{\partial \eta}.$$

现在,根据泊松括号的定义方程(9-68)可得[见式(9-96)]

$$[\eta, u] = \int \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad (9-99)$$

当泊松括号用任何其他正则变量计算时,这一关系式依然有效。如果令 u 为 G ,则可以看出,无限小正则变换的变换方程可表达为

$$\delta\eta = \epsilon [\eta, G]. \quad (9-100)$$

现在考虑一个无限小正则变换,它的连续参量为 t (象证明耦对条件时的做法一样),因而 $\epsilon = dt$,再令生成函数 G 是哈密顿函数。根据式(9-100),这种I.C.T.的变换方程将成为

$$\delta\eta = dt [\eta, H] = \dot{\eta} dt = d\eta. \quad (9-101)$$

这些方程表明,该变换使 t 时刻的坐标和动量值变换到了 $t + dt$ 时刻的值。因此,系统在 dt 时间内的运动可以用哈密顿函数生成的无限小相切变换来描述。与之相应,在从 t_0 到 t 这一有限时间间隔内的系统运动则可以用相继进行的无限小相切变换表示,已知,这些相继变换与单一有限正则变换是

等效的。所以任何 t 时刻的 q, p 值可以从它们的初始值通过作为时间连续函数的某个正则变换求得。按此观点，一个力学系统的运动就相当于一个正则变换的连续演变或发展。完全可以说，哈密顿函数是系统随时间所作运动的生成元。

反之，必定有一个从任何 t 时刻的坐标和动量值到它们的不变的初始值的正则变换。显然，求取这种变换就相当于求解系统的运动。本章一开始即已指出，力学问题可简化为寻求一个正则变换，使所有动量都是运动常数。现在的考虑则指出了另一种可能性，就是通过动量和坐标都是运动常数的正则变换来解决问题。这两种设想将在下一章中详加探讨，以便说明怎样才能得到任何力学问题的形式解。

这种讨论暗示了研究正则变换以及它所产生的结果的又一途径。正则变换的概念是作为表征相空间坐标变换而引进的。实际上，我们是从坐标为 (q, p) 的相空间 η 转换到了坐标为 (Q, P) 的另一个相空间 ζ 。如果系统在某给定时刻的状态由系统内的 A 点描述，那么，它也同样可以由变换后的 A' 点描述（见图 9-1）。系统变量的任何一个函数不论是用 (q, p) 组还是用 (Q, P) 组描述，对于给定的系统位形都将具有相同的数值。换句话说函数在 A' 点和在 A 点应具有相同

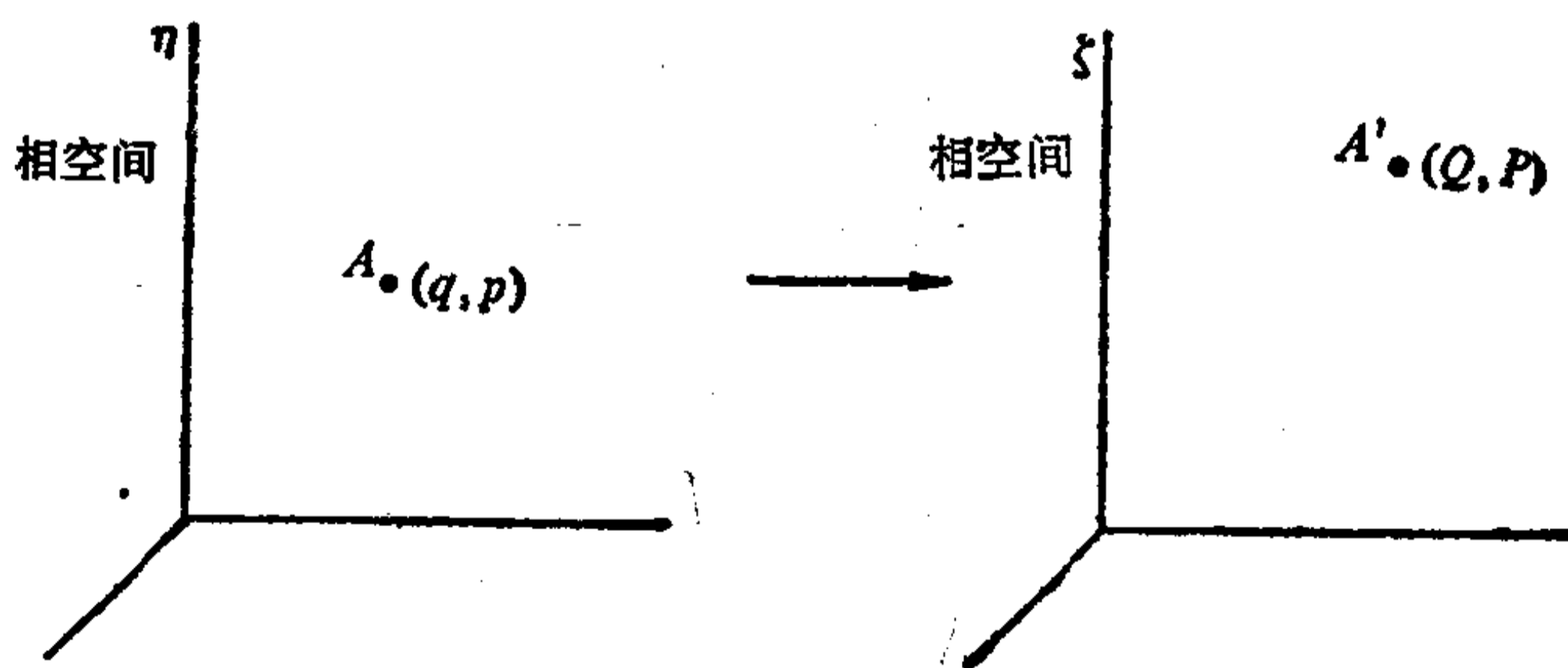


FIGURE 9-1

图 9-1 正则变换被动观点的说明

的数值。类似于正交变换的相应描述，我们可以把这种描述称为正则变换的被动观点。

相反，我们已经说过，由哈密顿函数生成的正则变换把相空间内一点的坐标与同一相空间内的另一点的坐标关联了起来。根据这种观点并用数学家的语言来说，正则变换把相空间各点映射在它们自身上。实际上，我们对正则变换还有一种主动的解释，即认为它是把系统点从相空间内坐标为 (q, p) 的某个位置“移动”到坐标为 (Q, P) 的另一点(见图 9-2)。当然，正则变换本身是不可能移动或改变系统的位形的。它所能做的是用另一个系统位形来表示原有的系统位形。对于某类正则变换，主动的观点是无益的。例如，从笛卡儿坐标到球极坐标的点变换是一个正则变换，但它的“主动”解释则近乎荒谬。

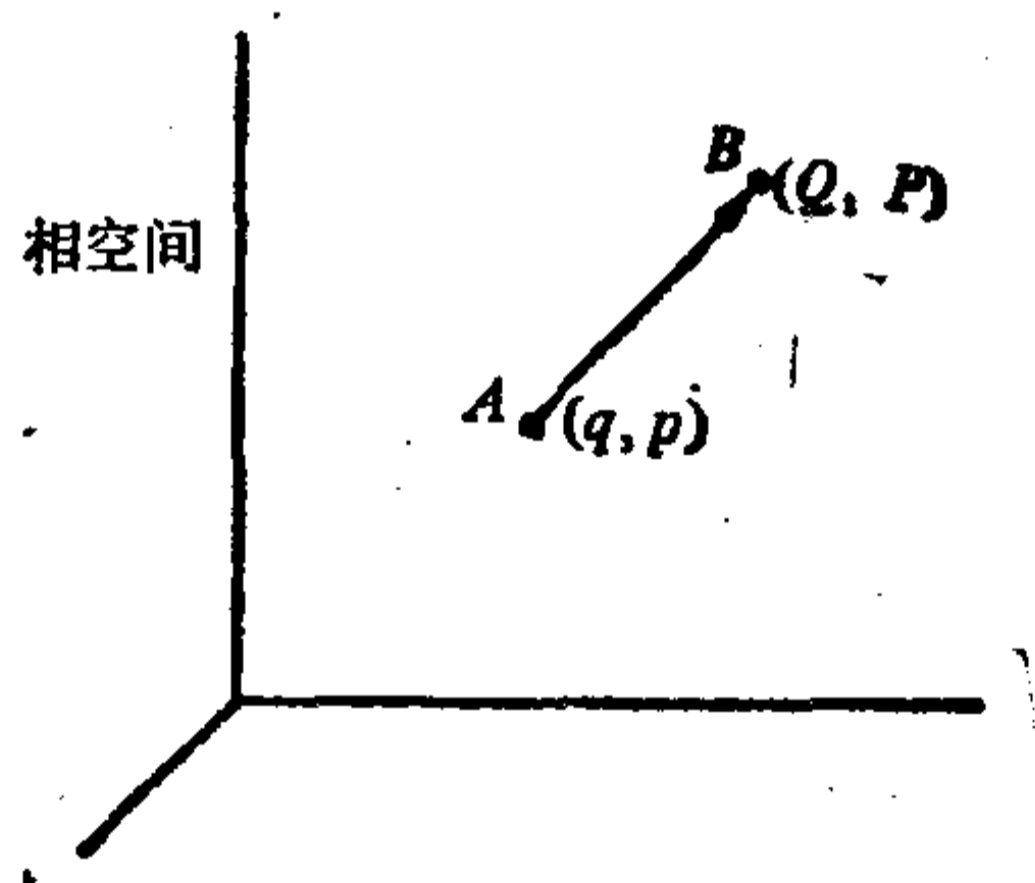


图 9-2 正则变换主动观点的说明

主动的观点对于连续地依存于某个单一参量的变换特别有用。按照主动的解释，变换的结果是参量连续变化时使系统点在相空间内某一曲线上连续地“移动”。当有关的 I.C.T. 的生成元是哈密顿函数时，系统点移动所沿曲线就是系统在相空间内的轨线。

如果我们从被动的观点考虑正则变换，那么“在正则变换下函数“的变化”这一短语是没有意义的。不论在 A 还是在

A 计算函数 u , 它的数值不变。确实, u 对于 (Q, P) 的函数依存关系与它对于 (q, p) 的依存关系一般将不同, 但它在相应的两点处的值是相同的, 亦即 $u(A') = u(A)$ 。然而, 如果从主动的观点来解释正则变换, 就能赋予上述短语以一定的意义。例如, 该短语可以解释成当系统点从 A 点移到 B 点时函数值的变化。 u 在同一相空间内的 B 点处对于 (Q, P) 的函数依存关系, 与它在 A 点处对于 (q, p) 的依存关系相同。但现在的函数值一般是不同的。我们将在这里用 δ 表示函数值在无限小正则变换下的这种变化:

$$\delta u = u(B) - u(A), \quad (9-102)$$

当然, 这里的 A 和 B 将是无限接近的。利用正则变量的矩阵符号, 则函数值在 I. C. T. 下的变化将定义为

$$\delta u = u(\eta + \delta\eta) - u(\eta).$$

展开成泰勒级数并保留一级无限小项, 则根据式 (9-63c),

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial \eta} \delta\eta = \epsilon \frac{\partial u}{\partial \eta} \mathbf{J} \frac{\partial G}{\partial \eta}.$$

回顾一下泊松括号的定义[式(9-68)], 可以看出, 这种变化可以表达成

$$\delta u = \epsilon[u, G]. \quad (9-103)$$

式(9-103)的一个直接的应用是把相空间坐标本身(或坐标的矩阵)之一作为 u 。这样, 根据式(9-100), 我们有

$$\delta\eta = \epsilon[\eta, G] = \delta\eta.$$

当然, 这一结果从 B 点关联于 A 点的定义来看是明显的; 从 A 到 B 时坐标的“变化”正好等于新、老坐标之间的无限小差值。

有时, 当我们论及“哈密顿函数的变化”时, 这些考虑必须稍加推广。应该记得, “哈密顿函数”这一名称并不是指在所有坐标系内都相同的某个特定函数。更确切地说, 它指的是

在给定相空间内定义正则运动方程的那个函数。在正则变换依存于时间的地方，“哈密顿函数”的意义也变掉了。例如， $H(A)$ 不会转换成 $H(A')$ ，而是转换为 $K(A')$ ，而且 $H(A)$ 也不一定要与 $K(A')$ 具有相同的数值。在这种情况下，我们实际上将用 δH 表示这两种解释下哈密顿函数值之差：

$$\delta H = H(B) - K(A'). \quad (9-104)$$

在函数本身在正则变换下并不变化的地方，由于 $u(A') = u(A)$ ，变化的两种形式[式(9-102)和式(9-104)]是全同的。一般， K 和 H 由关系式

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t}$$

相联系，这里的生成函数对于 I. C. T.，则由式(9-62)用 G 给出。由于该方程中只有 G 能够是时间的显函数，新哈密顿函数之值应为

$$K(A') = H(A') + \epsilon \frac{\partial G}{\partial t} = H(A) + \epsilon \frac{\partial G}{\partial t},$$

而哈密顿函数的变化为

$$\delta H = H(B) - H(A) - \epsilon \frac{\partial G}{\partial t}. \quad (9-105)$$

沿着式(9-103)所提供的线索可以看出， δH 为

$$\delta H = \epsilon [H, G] - \epsilon \frac{\partial G}{\partial t}. \quad (9-106)$$

把 G 作为广义运动方程中的 u ，最后从式(9-106)得到 H 的变化为

$$\delta H = -\epsilon \frac{dG}{dt}. \quad (9-107)$$

如果 G 是一个运动常数，式(9-107)将表明，它生成了一个无限小正则变换，该变换并不改变哈密顿函数的数值。这

等于是说，运动常数是使哈密顿函数保持不变的那些无限小正则变换的生成函数。这一结论隐含了系统的对称性和守恒量之间的联系，这种联系在运动常数并不显含时间时最容易看出。因此，变换下哈密顿函数的变化简单地等于系统从位形 A 移至位形 B 时哈密顿函数数值的变化。如果系统在产生这种位形变化的过程中是对称的，那么，哈密顿函数在相应的变换下将明显地保持不变。举一个简单的例子来说，如果系统关于某一给定方向是对称的，那么，当系统作为一个整体绕该方向转动时，哈密顿函数的数值不变。由此可知，(通过某个 I. C. T.) 产生这种系统转动的量必然守恒。系统的转动对称性隐含了某个特殊的运动常数。这并不是运动常数和对称特性之间联系的第一个实例。在前面(节 2-6、8-2)论述广义动量的守恒时已经遇到过。但在这里，这个定理显得更精巧、更完整，因为它包含了所有独立的运动常数，而不单是守恒的广义动量。

动量守恒定理在这里仅仅表现为一般性论述的一种特殊情况。如果坐标 q_i 是循环的，哈密顿函数则与 q_i 无关，它在只涉及到 q_i 的位移的无限小变换下显然是不变的。现在考虑共轭于 q_i 的广义动量所产生的变换：

$$G(q, p) = p_i. \quad (9-108)$$

根据式 (9-63 a 和 b)，所得无限小正则变换为

$$\delta q_i = \epsilon \delta_{ij}, \quad \delta p_i = 0, \quad (9-109)$$

这恰好是所求 q_i (也仅仅是 q_i) 的无限小位移。我们立即认识到，这是熟知的动量定理：如果一个坐标是循环的，则它的共轭动量就是一个运动常数。单独一个坐标的位移由共轭动量产生的这种说法，在形式上可以稍为扩展一下。如果某个 I. C. T. 的生成函数为

$$G = (J\eta)_i = J_{ir}\eta_r, \quad (9-110)$$

那么,从式(9-63c)得到的变换方程将为

$$\delta\eta_k = \epsilon J_{ks} \frac{\partial G}{\partial \eta_s} = \epsilon J_{ks} J_{lr} \delta r_s = \epsilon J_{ks} J_{ls}.$$

借助于 J 的正交性质,最后可以化为

$$\delta\eta_k = \epsilon \delta_{kl}, \quad (9-111)$$

也就是说,任何单独的正则变量 η_l 的位移是由式(9-110)所给出的那种形式的共轭变量生成的.当然,如果 η_l 是 q_i , 式(9-110)给出的 G 是 p_i ; 如果 η_l 是 p_i , 那么 G 就是 $-q_i$.

作为这些概念的一种特有例证,让我们再次考虑动力学变量的相切变换,该变换使系统作为一个整体转过角度 $d\theta$. 相应的生成函数的物理意义不可能与最初选定的正则坐标有关¹⁾, 为此,采用系统内所有质点的笛卡儿坐标是相宜的. 如果使无限小转动轴的取向坐标正好沿着 z 轴,也决不会失去其普遍性. 对于每一个质点的无限小逆时针转动,位置矢量的变化是根据式(4-105')的无限小转动矩阵求得的(第204页). 由于仅仅是绕 z 轴的转动,所以质点坐标的变化为

$$\delta x_i = -y_i d\theta, \quad \delta y_i = x_i d\theta, \quad \delta z_i = 0. \quad (9-112a)$$

由共轭于质点坐标的动量构成的笛卡儿矢量各分量因变换而受到的影响为

$$\delta p_{ix} = -p_{iy} d\theta, \quad \delta p_{iy} = p_{ix} d\theta, \quad \delta p_{iz} = 0. \quad (9-112b)$$

把这些变换方程与式(9-63a和b)比较可以看出,相应的生成函数为

$$G = x_i p_{iy} - y_i p_{ix}, \quad (9-113)$$

这里把 $d\theta$ 看作是无限小参量 ϵ . 直接检验即可看到:

$$\delta x_i = d\theta \frac{\partial G}{\partial p_{ix}} = -y_i d\theta,$$

1) 这一点最容易从正则不变式(9-100)看出. 不论用什么样的正则变量组表示 G , 正则变量 η_i 的变化保持不变.

$$\delta p_{ix} = -d\theta \frac{\partial G}{\partial x_i} = -p_{iy}d\theta,$$

$$\delta y_i = d\theta \frac{\partial G}{\partial p_{iy}} = x_i d\theta,$$

$$\delta p_{iy} = -d\theta \frac{\partial G}{\partial y_i} = p_{ix}d\theta,$$

这与式(9-112)相一致。此外,生成函数式(9-113)的物理意义是总正则角动量的 z 轴分量:

$$G = L_z \equiv (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i)_z. \quad (9-114)$$

由于 z 轴是任意选定的,因此可以说:与围绕用单位矢量 \mathbf{n} 表征的某轴的无限小转动相对应的生成函数为

$$G = \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}. \quad (9-115)$$

应该注意,这里所定义的正则角动量可以不同于机械角动量。如果作用于系统的力能与速度相关的势来推导,则正则动量矢量 \mathbf{p}_i 就没有必要与线动量矢量相同,而式(9-114)和式(9-115)中的 \mathbf{L} 也可以不同于机械角动量。因此,这里所得到的结果是节 2-6 中给出的结论的一种推广,该结论认为,共轭于转动坐标的动量是总角动量的相应分量。这里作出的证明只局限于那些势与速度无关的系统。根据式(9-108)和式(9-109)可以断言:如果广义坐标量度的是整个系统绕 \mathbf{n} 轴的转动,则其共轭动量就是总正则角动量沿同一轴的分量。正象哈密顿函数是系统随时间所作位移的生成元一样,角动量是系统的空间转动的生成元。

早已注意到,作“主动”解释时,依存于某个参量的正则变换使系统点沿着相空间内某一连续轨线“移动”。我们还说过,一个有限变换可以看作是无限次相继的无限小正则变换之和,每一次无限小正则变换相当于沿曲线的一次无限小位移。因此,从形式上看,应该有可能从求积无限小位移的表达

式得到有限的变换。这一点是能够实现的，因为相空间轨线上的每一个点各对应于一个特定的参量值，我们将称它为 α ，当系统处于初始位形时， $\alpha = 0$ 。如果 u 是系统位形的某个函数，则 u 将是 α 沿轨线的一个连续函数 $u(\alpha)$ ，其初始值 $u_0 = u(0)$ 。（为简单起见，我们认为 u 并不显含时间。） u 在轨线上的无限小变化式 (9-103) 能够表达成

$$\delta u = d\alpha[u, G],$$

或者表达成变量 α 的微分方程

$$\frac{du}{d\alpha} = [u, G]. \quad (9-116)$$

求积这一微分方程就能得到 $u(\alpha)$ ，从而得到有限正则变换的结果。为了求得一个形式解，可以把 $u(\alpha)$ 对初始条件展开成泰勒级数：

$$u(\alpha) = u + \alpha \left. \frac{du}{d\alpha} \right|_0 + \frac{\alpha^2}{2!} \left. \frac{d^2u}{d\alpha^2} \right|_0 + \frac{\alpha^3}{3!} \left. \frac{d^3u}{d\alpha^3} \right|_0 + \dots$$

根据式 (9-116)，

$$\left. \frac{du}{d\alpha} \right|_0 = [u, G]_0,$$

下标零表示泊松括号是在初始点 $\alpha = 0$ 处取值的。连续应用式 (9-116)，并把 $[u, G]$ 本身作为系统位形的一个函数，就给出

$$\frac{d^2u}{d\alpha^2} = [[u, G], G],$$

重复这一过程能得到 u 的三阶微商等等。于是，从 $u(\alpha)$ 的泰勒级数给出了形式级数解

$$\begin{aligned} u(\alpha) = & u_0 + \alpha [u, G]_0 + \frac{\alpha^2}{2!} [[u, G], G]_0 \\ & + \frac{\alpha^3}{3!} [[[u, G], G], G]_0 + \dots \end{aligned} \quad (9-117)$$

如果把任何一个正则变量 ζ 作为 u , 则 u_0 是开始时的变量组 η_i , 这时, 可根据式 (9-116) 找到由 G 生成的有限正则变换的变换方程。

不难找到一些特定的例子来证明这种步骤确实是有效的。假设用 L_z 代 G , 以致最后的正则变换应该对应于绕 z 轴的有限转动。作为 α 的参量自然是转动角度。让我们取系统内第 i 个质点的 x 坐标作为 u 。直接计算泊松括号或者根据式 (9-112 a) 作出推断, 不难看出,

$$[X_i, L_z] = -Y_i, \quad [Y_i, L_z] = X_i, \quad (9-118)$$

这里用大写字母表示转过角度 θ 以后的坐标, 即最终坐标。而最初坐标, 即转动前的坐标则按通常的做法用小写字母表示。由此可得

$$[X_i, L_z]_0 = -y_i,$$

$$[[X_i, L_z], L_z]_0 = -[Y_i, L_z]_0 = -x_i$$

$$[[[X_i, L_z], L_z], L_z]_0 = -[X_i, L_z]_0 = y_i,$$

等等。于是, X_i 的级数表示式变成

$$\begin{aligned} X_i &= x_i - y_i \theta - x_i \frac{\theta^2}{2!} + y_i \frac{\theta^3}{3!} + x_i \frac{\theta^4}{4!} - \dots \\ &= x_i \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots \right) - y_i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots \right). \end{aligned}$$

这两个级数分别认为是余弦和正弦的展开式。因此, X_i 的有限变换方程为

$$X_i = x_i \cos \theta - y_i \sin \theta,$$

这确实就是我们所期待的某个矢量绕 z 轴的逆时针有限转动。

再举一例, 考虑 $G = H$ 而参量为时间的情况。这时, 式 (9-116) 简化为 u 的运动方程:

$$\frac{du}{dt} = [u, H],$$

其形式解为

$$u(t) = u_0 + t[u, H]_0 + \frac{t^2}{2!} [[u, H], H]_0 + \frac{t^3}{3!} [[[u, H], H], H]_0 + \dots \quad (9-119)$$

这里的下标零表示 $t = 0$ 时的初始条件。让我们把这种规定应用于具有常值加速度 a 的一维运动的简单问题。这时的哈密顿函数为

$$H = \frac{p^2}{2m} - max,$$

这里的 u 成了位置坐标 x 。式 (9-119) 中的泊松括号是容易直接计算的, 或者根据基本括号

$$[x, H] = \frac{p}{m},$$

$$[[x, H], H] = \frac{1}{m} [p, H] = a$$

来计算。由于最后一个泊松括号是常数, 因此, 所有高阶括号都恒等于零, 级数也到此为止, 所以它的完全解为

$$x = x_0 + \frac{p_0 t}{m} + \frac{at^2}{2}.$$

记得 $p_0/m = v_0$, 可以看出, 这是问题的熟悉的基本解。

可能会觉得我们这样做实在是多此一举, 纯粹是艺术行家的表演。这种看法不无道理。人们不会把形式级数解式 (9-119) 推荐为求解实际力学问题的理想方法。它显然是在求解这个最为容易的大一物理学问题时, 人们能够设想出来的最为晦涩的步骤之一! 然而, 这一技巧使我们能够洞察基

于正则变换理论的经典力学结构。级数展开式直接表明，无限小正则变换能够生成依存于一个参量的有限正则变换，从而给出运动方程的解。对于经典力学和量子力学之间的关系，特别感兴趣的是式(9-117)和式(9-119)中的级数，它们看起来很象是指数级数。第 n 项中泊松括号的作用可看作是算符 $[, G]$ (从右边!) 的第 n 次重复应用，或者是算符的 n 次方幂。例如，式(9-119)可用符号表成

$$u(t) = u e^{\hat{H}t} \Big|_0. \quad (9-120)$$

这里的指数仅仅是指它的级数表示式，符号 \hat{H} 是用来代表算符 $[, H]$ 的。这里得到的结果，使我们联想到量子力学中的海森伯表述¹⁾。其中 $u(t)$ 成了随时间变化的算符，它的时间依存性则通过 $\exp[iHt/\hbar]$ 来表示，所取方式使求得的运动方程与式(9-94)相同。(附加因子 i/\hbar 是由经典泊松括号和量子对易子之间的对应性引起的。) 因此，力学的泊松括号表述也就是量子力学海森伯表述的经典类比。

9-6 角动量泊松括号关系式

把正则角动量看作是系统的刚性转动的生成元，导致大量有趣而又重要的泊松括号关系式。如果把 u 取作某个矢量沿寻常空间内某固定轴的分量，那么，(从“主动”的观点看来) 函数 u 在无限小正则变换下的变化方程(9-103)同样有效。例如，如果 \mathbf{F} 是系统位形的某个矢量函数，则有

$$\delta F_i = [F_i, G].$$

重要的是应该看到上述分量所沿方向必定是固定的，也就是说，它不会受到正则变换的影响。如果方向本身由系统变量

1) 例如，可参阅 Schiff, Quantum Mechanics, 3d ed., 1968, pp. 170—171, 或者 Merzbacher, Quantum Mechanics, 1961, pp. 343—349.

来决定,那么,变换不仅仅会改变函数的数值,而且还会改变函数的性质,正如哈密顿函数的情况一样.根据这一见解,在由 $\mathbf{L} \cdot \mathbf{n}$ 生成的、系统绕固定轴 \mathbf{n} 的转动下,矢量 \mathbf{F} 的变化能用矢量符号表达成

$$\delta \mathbf{F} = d\theta [\mathbf{F}, \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}]. \quad (9-121)$$

换句话说,式(9-121)意味着组成 \mathbf{F} 基组的单位矢量 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 本身不会因 $\mathbf{L} \cdot \mathbf{n}$ 而转动.

我们解释式(9-121)的意义时还有另一个必须谨慎从事的理由.这里所说的是系统在 I. C. T. 下的转动,但不一定要是矢量 \mathbf{F} 的转动.生成元 $\mathbf{L} \cdot \mathbf{n}$ 引起的是系统变量的空间转动,并不是某种外加矢量,譬如象磁场或重力加速度矢量的转动.那么,在怎样的条件下 $\mathbf{L} \cdot \mathbf{n}$ 才真的会引起 \mathbf{F} 的空间转动呢?回答是明确的——当 \mathbf{F} 仅是系统变量 (q, p) 的函数,并且不包含任何不受 I. C. T. 影响的量或矢量时,一个空间转动才意味着一次相应的 \mathbf{F} 的转动.我们将把这些矢量称作系统矢量.在绕 \mathbf{n} 轴的无限小转动下一个矢量的变化在前面已经多次给出过 [见式(2-50)和(4-111'),第203页]:

$$d\mathbf{F} = \mathbf{n} d\theta \times \mathbf{F}.$$

所以,在由 $\mathbf{L} \cdot \mathbf{n}$ 生成的 I. C. T. 下,一个系统矢量 \mathbf{F} 的变化能够表达成

$$\delta \mathbf{F} = d\theta [\mathbf{F}, \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}] = \mathbf{n} d\theta \times \mathbf{F}. \quad (9-122)$$

式(9-122)意味着所有系统矢量都服从一个重要的泊松括号恒等式

$$[\mathbf{F}, \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}] = \mathbf{n} \times \mathbf{F}. \quad (9-123)$$

注意,在式(9-123)中它不再涉及到某个正则变换或者甚至某个空间转动.这说明了某些泊松括号对于特定类型矢量的价值,而且象这样的事情在任何给定情况下都能通过直接计

算来证实。例如,假设有一个由一无约束质点组成的系统,并把笛卡儿坐标作为正则空间坐标。这样,笛卡儿矢量 \mathbf{p} 当然是一个合适的系统矢量。如果 \mathbf{n} 是 z 方向上的单位矢量,则通过直接计算即可得到

$$[p_x, xp_y - yp_x] = -p_y,$$

$$[p_y, xp_y - yp_x] = p_x,$$

$$[p_z, xp_y - yp_x] = 0.$$

这些恒等式的右边显然与式(9-123)所预期的 $\mathbf{k} \times \mathbf{p}$ 的分量相同。另一方面,假设在相同问题中试用矢量 $\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{r} \times$

$\mathbf{B})$ 代替 \mathbf{F} , 这里的 $\mathbf{B} = B\mathbf{i}$ 是一个沿 x 轴的固定矢量。则可看出, 矢量 \mathbf{A} 将是与 x 方向上某一均匀磁场 \mathbf{B} 相对应的矢势。当 \mathbf{A} 依存于系统外部的某个矢量时, 可以料想它并不具备一个系统矢量的特性, 式(9-123)对它就不适用。的确, 我们可以看到, 提到的这些泊松括号这时的形式为

$$[0, xp_y - yp_x] = 0,$$

$$\left[\frac{1}{2}zB, xp_y - yp_x \right] = 0,$$

$$\left[-\frac{1}{2}yB, xp_y - yp_x \right] = -\frac{1}{2}Bx,$$

而矢量 $\mathbf{k} \times \mathbf{A}$ 已经代替了分量 $\left(-\frac{1}{2}Bx, 0, 0\right)$ 。

关系式(9-123)可以用各种符号来表示。例如, 采用并矢式符号时, 它将成为

$$[\mathbf{F}, \mathbf{L}] = -\mathbf{l} \times \mathbf{F}, \quad (9-124)$$

这里的 \mathbf{l} 是单位并矢式 $\mathbf{i}\mathbf{i} + \mathbf{j}\mathbf{j} + \mathbf{k}\mathbf{k}$ 。如果用 \mathbf{n} 右乘两边, 式(9-124)就简化为式(9-123)。更有用的是用列维-西维塔密度表示矢积所得的形式[见式(4-113')]. 因此, 对于任意

的 \mathbf{n} , 式(9-123)的第 i 个分量能表达成

$$[F_i, L_j n_j] = \epsilon_{ijk} n_j F_k,$$

这意味着一个简单的结果

$$[F_i, L_j] = \epsilon_{ijk} F_k. \quad (9-125)$$

式(9-125)还有另一种说法, 如果 l, m, n 是三个按循环次序排列的下标, 那么

$$[F_l, L_m] = F_n, \quad l, m, n \text{ 按循环次序排列.} \quad (9-125')$$

式(9-123)的另一个结果与两个系统矢量的标积 $\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}$ 有关. 作为一个标量, 这种标积在转动下应该不变, 而且很容易证明这一标积与 $\mathbf{L} \cdot \mathbf{n}$ 的泊松括号为零:

$$\begin{aligned} [\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}, \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}] &= \mathbf{F} \cdot [\mathbf{G}, \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}] + \mathbf{G} \cdot [\mathbf{F}, \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}] \\ &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{G} + \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{F} \\ &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{G} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{G} \times \mathbf{n} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (9-126)$$

所以任何一个系统矢量的量值与 \mathbf{L} 的任何一个分量的泊松括号都等于零.

或许在这些结果的最为常见的应用中, 都把 \mathbf{F} 取作是 \mathbf{L} 矢量本身的. 因此有

$$[\mathbf{L}, \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}] = \mathbf{n} \times \mathbf{L}, \quad (9-127)$$

$$[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k \quad (9-128)$$

以及

$$[L^2, \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}] = 0. \quad (9-129)$$

许多有趣的结果得自式(9-127)到式(9-129). 如果 L_x 和 L_y 是运动常数, 则泊松定理表明, $[L_x, L_y] = L_z$ 也是一个运动常数. 例如, 如果角动量的任何两个分量是常数, 则总角动量矢量守恒. 再如, 让我们假定除了 L_x 和 L_y 守恒之外, 还有一个笛卡儿正则动量矢量 \mathbf{p} , 其分量 p_x 也是一个运动常数. 那么, 不仅 L_z 守恒, 而且还有其他两个运动常数

$$[p_x, L_x] = p_y \quad \text{和} \quad [p_x, L_y] = -p_z,$$

即 \mathbf{L} 和 \mathbf{p} 都是守恒的。我们在这里有了一个例子，它说明泊松定理会给出新的运动常数。然而，要注意的是，如果 p_x , p_y 和 L_x 是给定的运动常数，则它们的泊松括号将是

$$[p_x, p_y] = 0,$$

$$[p_x, L_x] = p_y,$$

$$[p_y, L_x] = p_x.$$

这里，不可能从泊松定理得到任何新的常数。

基本泊松括号式(9-69)使我们联想到任何两个正则动量的泊松括号必定始终为零。但根据式(9-128), L_i 与 \mathbf{L} 的其他分量中的任何一个分量的泊松括号并不为零。尽管由于 \mathbf{L} 被定义为 $\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ (对所有质点求和), 因而它被描述为正则总角动量, 但 \mathbf{L} 的任何两个分量都不可能同时作为正则变量。然而, 式(9-129)表明, \mathbf{L} 的任何一个分量及其量值 L 却可以同时选作正则变量¹⁾。

9-7 力学系统的对称群²⁾

早已指出, 正则变换构成一个群。那些作为连续参量解

- 1) 前面已经提到, 量子力学和经典力学之间的对应性使得 $\hbar \rightarrow 0$ 时量子力学的对易子必然转换为经典泊松括号。量子力学的许多形式结构看起来象是经典力学泊松括号表述的一份精确副本。因此, 本节的所有结果都有一个精确的量子类比。例如, \mathbf{L} 的两个分量不可能同时是正则动量一事, 似乎就是 L_i 和 L_j 不可能同时具有本征值这种熟知的说法。但 L^2 和任何 L_i 则可一起被量子化。事实上, 把这些关系式中的大多数写成量子形式, 比经典形式更为人们所熟悉。例如, 角动量经典泊松括号的最早一本参考书恰恰是玻尔和约旦于 1930 年发表的专著 *Elementare Quantenmechanik*。其次, 尽管矢量在转动下的一般变化[式(9-123)]在量子力学中早就熟悉了(参阅 Condon 和 Shortley, *The Theory of Atomic Spectra*, p. 59), 但直到最近, 其经典变型的唯一参考仍是 H. B. G. Casimir 所著的著名论文: *Rotation of a Rigid Body in Quantum Mechanics*, 1931, p.30.

- 2) 初学时, 此节可以不读。

析函数的正则变换构成了归类于所谓李群的一些分立群。例如，对应于系统空间转动的正则变换构成一个具有三个参量（比如转动的欧拉角）的群。绕一特定轴的转动构成只有一个参量的子群（实际上是二维转动群）。有限变换群与相关无限小正则变换群有着相同的性质，而习惯上主要是通过 I. C. T. 来实现的，因为它们比较容易处理。生成元都是系统运动常数的那些 I. C. T. 的李群称为系统的对称群，因为，就象我们看到的那样，这类变换使哈密顿函数保持不变。找到一个系统的对称群对求解系统的经典运动问题大有帮助，而对量子力学问题的解的帮助甚至更大。

一个球对称系统在绕任何轴的转动下都不变。因此，预料它的对称群之一应该是三维转动群 $R(3) \equiv SO(3)$ 。在这种系统内，矢量 \mathbf{L} 守恒，这与我们把 \mathbf{L} 的分量作为空间转动的生成元的看法相一致。李群的特性决定于构成该群的变换的各个生成元之间的括号关系（不论是泊松括号还是对易子，等等）。一般讲，如果 G_i 是个别单参量变换的生成元，则李群中的括号关系式是线性的，其形式为¹⁾

$$[G_i, G_j] = C_{ijk} G_k, \quad (9-130)$$

式中的量 C_{ijk} 称为李群的（或者是包含该括号“积”的相关李代数的）结构常数。对于由 L_i 生成的变换群，式（9-128）表明结构常数 $C_{ijk} = \epsilon_{ijk}$ ，正是这种关系使该群可以看作是三维转动群。例如，已经看到，无限小转动的矩阵生成元 M_i 式（4-117）是服从对易关系式（4-118）的：

$$[M_i, M_j] = \epsilon_{ijk} M_k, \quad (4-118)$$

亦即它与 L_i 有着同样的结构常数。 L_i 和 M_i 两量的物理含义不同，式（9-125）和式（4-118）中的括号指的也是不同的

1) 例如，可参阅 L.P. Eisenhart, *Continuous Groups of Transformations*, pp. 25—28.

运算(虽然它们有着相同的、值得注意的代数性质). 但 L_i 和 M_i 的结构常数却相等, 这表明它们有着相同的群结构, 即 $SO(3)$ 群结构.

对于有界的开普勒问题, 我们在节 3-9 中已看到, 除了 \mathbf{L} 外还有另一个守恒矢量 \mathbf{A} , 即拉普拉斯矢量, 它定义为

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \frac{mk\mathbf{r}}{r}. \quad (3-82)$$

\mathbf{A} 的各分量自身之间以及 \mathbf{A} 的分量与 \mathbf{L} 的分量之间的泊松括号关系式能够按一种直截了当的方式求得. 由于 \mathbf{A} 显然有资格作为一个系统矢量, 所以我们能够立即得到括号关系式

$$[A_i, L_j] = \epsilon_{ijk} A_k. \quad (9-131)$$

\mathbf{A} 自身的各分量之间的泊松括号不可能这样简单地求得, 但经过相当冗长的演算也可得到¹⁾

$$[A_1, A_2] = - \left(p^2 - \frac{2mk}{r} \right) L_3. \quad (9-132)$$

右边圆括号内的量可以看出作 $2mH$, 它有守恒值 $2mE$. 所以如果引进一个新的不变矢量 \mathbf{D} , 并定义为

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{-2mE}} \equiv \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2m|E|}} \quad (9-133)$$

(注意, 对于有界运动, E 为负值), 则 \mathbf{D} 的分量满足泊松关系式

$$[D_1, D_2] = L_3.$$

通过下标的循环排列, 立即能得到一组完整的泊松括号. 于是 \mathbf{L} 和 \mathbf{D} 的分量一起构成了有界开普勒问题的一个对称群,

1) 把 $\mathbf{p} \times \mathbf{L}$ 确认为系统矢量 \mathbf{C} , 并尽可能利用基本泊松括号和式 (9-125) 首先算出泊松括号 $[C_i, (\mathbf{p} \times \mathbf{L})_j]$ 和 $[C_i, \mathbf{r}/r]$, 在某种程度上可简化推导.

其结构常数可得自恒等式

$$[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k, \quad (9-128)$$

$$[D_i, L_j] = \epsilon_{ijk} D_k \quad (9-134)$$

和

$$[D_i, D_j] = \epsilon_{ijk} L_k. \quad (9-135)$$

检查一下基本的转动矩阵可以看出, 有界开普勒问题的对称群与四维实转动群是一致的. 通常记为 $SO(4)$ 或 $R(4)$, 这种变换不会改变二次式 $x_\mu x_\mu$ 之值, 这里所有的 x_μ 都是实数. 四维正交变换给这个矩阵的十六个元加上了十个条件, 因此只有六个元是独立的. 如果把无限小变换看作是由不同平面内的一系列转动所组成的, 就不难求得相应的六个生成元. 其中三个是在三个不同的 x_i-x_j 平面内的转动, 因此, 对应于式(4-117)的 M_i 生成元, 只是在第四行和第四列中附加了一些零. 其余三个则生成 x_i-x_4 平面内的无限小转动. 因此, x_1-x_4 平面内的无限小转动的生成元的矩阵将是

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (9-136)$$

N_2 和 N_3 亦以相应方式给出. 直接的矩阵运算表明, 这六个矩阵满足对易子(或李括号)关系式

$$[M_i, M_j] = \epsilon_{ijk} M_k,$$

$$[N_i, M_j] = \epsilon_{ijk} N_k,$$

$$[N_i, N_j] = \epsilon_{ijk} M_k.$$

由于这些关系式与泊松括号关系式(9-128)、(9-134)和(9-135)式相同, 因而证明了有界开普勒问题的对称群与 $R(4)$ 是一致的.

注意, 对于具有正值能量的开普勒问题(即散射), \mathbf{A} 依然

是一个运动常数¹⁾,但适当的约化实矢量不是 \mathbf{D} 而是 \mathbf{C} ,它定义为

$$\mathbf{C} = \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2mE}}, \quad (9-137)$$

因而 \mathbf{L} 和 \mathbf{C} 的泊松括号关系式为

$$\begin{aligned} [L_i, L_j] &= \epsilon_{ijk} L_k, \\ [C_i, L_j] &= \epsilon_{ijk} C_k, \\ [C_i, C_j] &= -\epsilon_{ijk} L_k. \end{aligned} \quad (9-138)$$

与式(7-70)相比可见,这些结构常数与限制洛仑兹群的结构常数相同,因而它们(在非相对论力学中)必然是正值能量开普勒问题的对称群。当然,应该小心的是,不要认为这个偶然事件中有着任何物理必然性。开普勒问题中并不包含基本牛顿力学的因子。对称群可能涉及到一种更高阶(高于寻常空间维数的)狭义相对论概念的空间;它纯粹是非相对论范畴的问题,因为我们在这里所寻求的对称性是六维相空间内的对称性。对称群由这种空间内的正则变换所组成,在这种正则变换下的哈密顿函数是不变的。所以这种群可用多于三维的空间变换来解释也就不足为奇了。

容易确认其对称群的另一个力学系统是二维各向同性谐振子。用笛卡儿坐标表示时,这种系统的哈密顿函数可以表达成

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + m^2 \omega^2 x^2) + \frac{1}{2m} (p_y^2 + m^2 \omega^2 y^2). \quad (9-139)$$

因为它并不显含时间,所以哈密顿函数是常数,并等于系统的总能量。 z 轴是系统的对称轴,因而沿该轴的角动量(事实上是总角动量)也是一个运动常数:

1) 节3-9的论证与 E 或者力常数 k 的符号都无关。

$$L = xp_y - yp_x. \quad (9-140)$$

这一问题还有其他运动常数，它们可以表达成对称二维张量 \mathbf{A} 的分量，并定义为

$$A_{ii} = \frac{1}{2m} (p_i p_i + m^2 \omega^2 x_i x_i). \quad (9-141)$$

在张量的三个不同元素中，那些对角项可以分别确认为沿 x 轴和 y 轴的各别一维运动的相关能量。实际上，当两个运动之间并无联系时，两个能量必须分别是常数，不大正式地说，根据把 H 表达成式(9-139)时所遵循的方法可以明显地看出， A_{11} 和 A_{22} 与 H 的泊松括号都等于零。要看出 \mathbf{A} 的非对角元

$$A_{12} = A_{21} = \frac{1}{2m} (p_x p_y + m^2 \omega^2 xy) \quad (9-142)$$

的性质比较困难。但当我们计算它与 H 的泊松括号时，就不难看出它是一个运动常数。与各别的 x, y 运动相关的 A_{11} 和 A_{22} 则与两个振荡的振幅有关，而 A_{12} 则决定于两个振动的相位差。因此，运动的解能表达成

$$x = \sqrt{\frac{2A_{11}}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \theta_1),$$

$$y = \sqrt{\frac{2A_{22}}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \theta_2),$$

而且从式(9-142)可得

$$A_{12} = \sqrt{A_{11}A_{22}} \cos(\theta_2 - \theta_1). \quad (9-143)$$

张量 \mathbf{A} 的迹等于谐振子的总能量。我们能够借助于矩阵的元素构成另外两个不同的运动常数，为方便起见，可把它们表达成

$$S_1 = \frac{A_{12} + A_{21}}{2\omega} = \frac{1}{2m\omega} (p_x p_y + m^2 \omega^2 xy), \quad (9-144)$$

$$S_2 = \frac{A_{22} - A_{11}}{2\omega} = \frac{1}{4m\omega} [p_y^2 - p_x^2 + m^2\omega^2(y^2 - x^2)]. \quad (9-145)$$

对此，我们还可以加上第三个运动常数

$$S_3 = \frac{L}{2} = \frac{1}{2} (xp_y - yp_x). \quad (9-146)$$

量 S_i 加上总能量 H 构成四个并不显含时间的代数运动常数。显然，这四个常数不可能都是独立的，因为在两个自由度的系统内，最多只可能只有三个这种常数。我们知道，各向同性谐振子的轨道是一个椭圆，需要三个运动常数来描述平面轨道的参量，比如说，长半轴、偏心率和椭圆取向。第四个运动常数应该与质点在给定时刻通过特定点的情况有关，因而应显含时间。因此， S_i 和 H 之间必然存在一个单一的关系式。直接计算即可证明：

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = \frac{H^2}{4\omega^2}. \quad (9-147)^{1)}$$

直截了当地演算泊松括号证实，量 S_i 满足关系式

$$[S_i, S_j] = \epsilon_{ijk} S_k. \quad (9-148)$$

这些关系式与三维角动量或者三维空间内的转动生成元的关系式相同。因此，由 S_i 生成的变换群可以用 $R(3)$ 或 $SO(3)$ 表示。实际上，在上述验证中是有某种不确定性的。前面已经看到（第 178 页），在 $R(3)$ 和么模群 $SU(2)$ 之间存在着一种异质同态性。结果证明²⁾ $SU(2)$ 更适合于这里的情况。

1) 式 (9-147) 的一个等效形式是 \mathbf{A} 的行列式等于 $L^2\omega^2/4$ 。应该想起，同样是在开普勒问题的情况中，新的矢量运动常数 \mathbf{A} 的分量并不与其它运动常数完全无关。在 \mathbf{A} , \mathbf{L} 和 H 之间确实存在着两个关系式 (3-83) 和 (3-87)。

2) 更充分的讨论可参阅 H. V. McIntosh, *Am. Jour. Phys.*, **27**, 620 (1959)。

为了说明这种选择是适当的,可以看一下式(9-147),它提醒我们,有一个三维空间,它的每一个点分别对应于一组特有的轨道参量.式(9-147)表明,这一空间内的“点”对于某个给定的系统能量都处于同一个圆球上.常数 S_i 生成了这一球面上的三维转动,即它们把一个轨道改变为具有相同能量的另一个轨道.可以证明, S_i 生成的变换改变了轨道的偏心率;还可证明,对于任何一个给定的最终偏心率都能找到两个变换,它们都能导致这一偏心率.正是由于变换的这种双值性质,指明了 $SU(2)$ 而并非 $R(3)$ 才是二维谐振子的正确的对称群.对于更高的维数,转动群和 $SU(n)$ 群的结构常数不再相同,因此我们可以在两者之间作出明确的区分.对于三维各向同性的谐振子,还有一个由式(9-141)所定义的张量运动常数,只是现在的下标应从 1 到 3. 这一张量的不同分量与 L 的各个分量之间的泊松括号关系式具有相当复杂的结构常数,它们都属于 $SU(3)$. 确实有可能证明¹⁾, n 维各向同性谐振子的对称群为 $SU(n)$.

前面已经指出(第 123 页),是否存在附加的代数运动常数——因而存在较高阶对称群——与系统运动的简并性之间有着一定的联系.在开普勒情况和各向同性谐振子中,附加的运动常数与轨道参量有关.如果轨道是闭合的,即运动被限制于某一单个弧线上,我们就能说出这种轨道参量.只有当运动的各个组成部分具有相互成比例的周期时,即这些部分是简并的时候,轨道才是闭合的.典型的例子是二维各向异性振子.当 x 和 y 方向上的频率互为整数倍数时,质点将描绘出闭合的李萨如图.但是,如果频率不成比例,质点的运动

1) 这是就量子力学情况所作的证明,参阅 G. A. Baker, Jr., *Phys. Rev.*, **103**, 1119 (1956), 所作论证也可用经典力学术语来描述.

将是满空间的或遍历的，最后将趋向于由两个方向的运动的能量所确定的矩形内的一个特定点，要它多近就有多近。对称性质和简并性之间的这种联系的确切本质依然是一个有待探究的课题。人们为寻找非简并系统的复杂(也许是复合)的对称群作了一些尝试，它们适用于自由度数相同的所有问题，但都还没有证明是有成果的。在下一章中，我们还有机会进一步研究对称性和简并性之间的关系。

9-8 刘维定理

作为泊松括号形式的最后一个应用，我们将简要地讨论一个称为刘维定理的统计力学基本定理。尽管在经典力学中任何系统的确切运动完全决定于初始条件，但对于复合的系统，实际上往往无法求得其确切解。例如，显然不可能完整地计算出大量气体中约为 10^{23} 个分子的运动。此外，初始条件也往往只是部分地已知。我们也许可能说，给定质量的气体在 t_0 时刻具有一定的能量，但无法确定每个分子的初始坐标和速度。所以统计力学并不企图求得包含有大量质点的系统的完全解，其目的仅在于通过对大量全同系统的运动的研究，对某些平均性质作出预测。亟待求取的量的数值，则根据对这系统内全部系统作出平均来计算。系统的所有成员都象我们无法完整认识的实际系统，但它们可以具备与这些不完整的信息相一致的初始条件。由于各个系统都由相空间内的某一点所代表，所以系统的全体就相当于相空间内的点群。刘维定理表明，在相空间的某给定系统的邻域内，系统密度始终保持不变。

前面所定义的密度 D 可以通过两个各别的机制随时间变化。由于它是一个给定系统点的邻域内的密度，所以当系统坐标 (q_i, p_i) 随时间变化时，或者说，系统点穿越相空间而移

动时,将有一种对时间的、隐含的依存性,也可能有一种对时间的、显含的依存性.即使在相空间内的某固定点处来计算,密度仍随时间而变化.由于这两种型式都随时间而变化,根据式(9-94), D 的时间全微商可表达为

$$\frac{dD}{dt} = [D, H] + \frac{\partial D}{\partial t}, \quad (9-149)$$

这里的泊松括号是由隐含的依存性引起的,而最后一项则由显含的依存性所引起.

穿越相空间而运动的系统点的系综,非常象多维空间内的流体,而我们对系综的讨论与熟知的流体动力学概念之间也有众多相似之处.当我们研究的是一小部分特定的系综“流体”随时间所作的运动时,式(9-149)中的全微商就是密度的微商,有时称它为物质微商或流体动力学微商.另一方面,偏微商是在固定点 (q, p) 处取的;仿佛我们自己站在相空间内的某一特定点处,当系统点的系综从我们旁边流过时来测定密度随时间的变化.这两个微商对应于考虑流体流动时经常采用的两种观点.相空间内某固定点处的偏微商与欧拉观点相一致,它把坐标仅仅看作是用来确定某一个空间点的.全微商则与拉格朗日描述相一致,在这一描述中所研究的始终是个别的质点;事实上,坐标所确定的是一个质点,而不是一个空间点.我们对相空间的考虑基本上一直更象是拉格朗日观点;量 (q, p) 的集合确定的是一个系统以及该系统的位形随时间的变化.

考虑相空间内包围某个给定系统点的一个无限小体积,该体积的边界由 $t = 0$ 时刻相邻各系统点的某个表面所组成.随着时间的推移,确定该体积的那些系统点将在相空间内运动,被它们包围的体积将随时间而取不同的形状.图9-3中的虚线形象地指出了该无限小体积随时间演变的情况.

显然,体积内的系统数保持不变,因为原来在里边的系统决不可能跑到外面来。如果某个系统点穿越了边界,它就必然在某个时刻占据确定边界表面的某个系统点在相空间内的同一位置。由于一个系统往后的运动是由它在特定时刻在相空间内所取位置唯一地决定的。结果两个系统从这里开始将一起运动。所以说系统决不可能离开该体积。同理,原来在外面的系统也决不可能进入该体积。

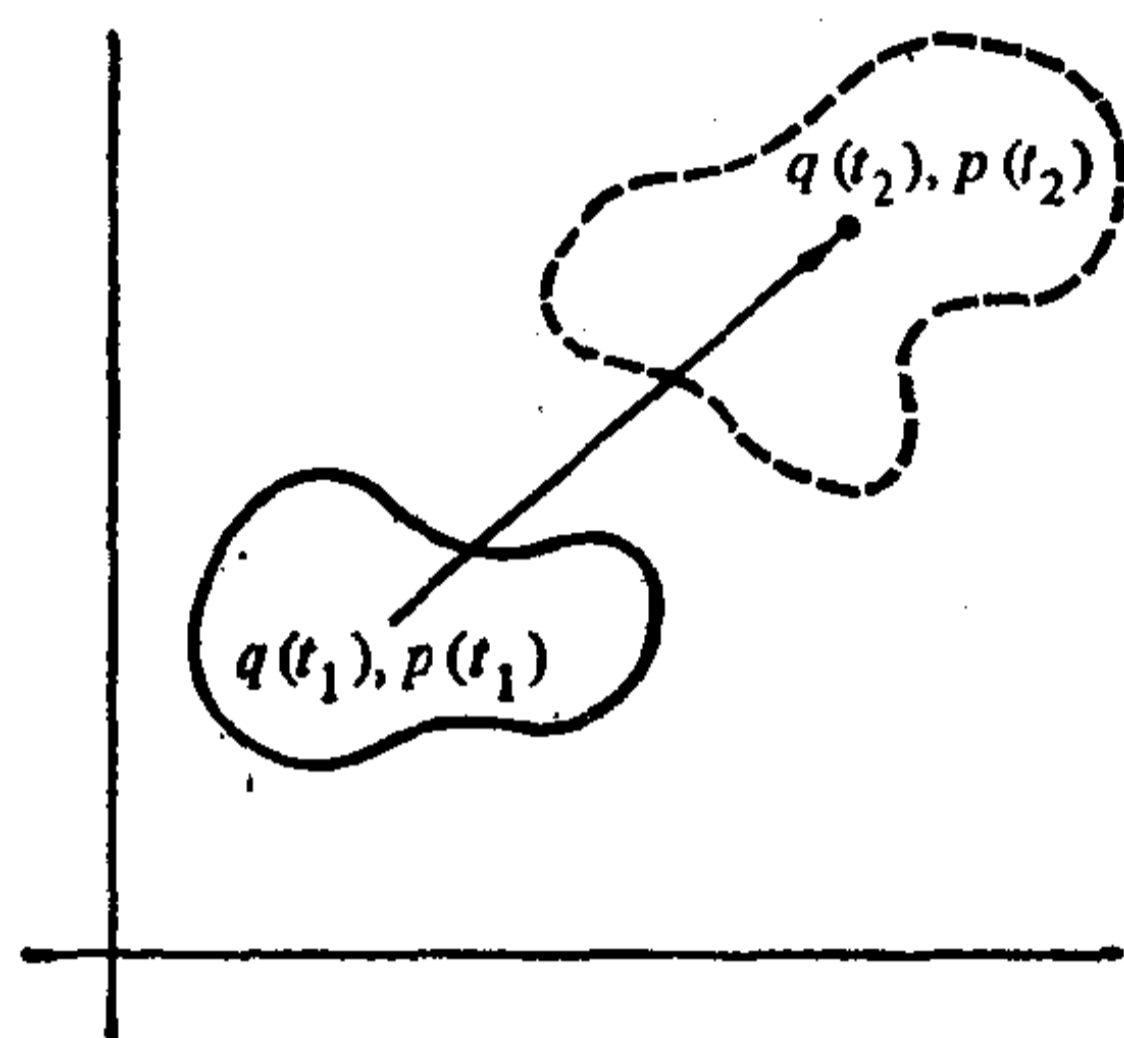


图 9-3 相空间内某个体积的运动

已经证明,从正则变换的主动观点看来,系统点随时间的运动也就是哈密顿函数所生成的某个正则变换的演变。正如图 9-3 所示, t_2 时刻的正则变量 (q, p) 与 t_1 时刻的那些变量由某个特定的正则变换相关联。该系统点附近的无限小体元在这一时间间隔内的变化则由相同的正则变换给出。已知,彭加勒积分不变式 (9-87) 表明,相空间内某个体元在正则变换下是不变的。所以该系统点附近的体元的大小不可能随时间变化。

由于无限小区域内的系统数 dN 和体积 dV 是常数,因而密度

$$D = \frac{dN}{dV}$$

也必定始终是常数：

$$\frac{dD}{dt} = 0,$$

这就证明了刘维定理。根据式(9-149),该定理的另一说法可表达为

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -[D, H]. \quad (9-150)$$

当系统的系综处于统计平衡时,处于给定状态的系统数必定始终是常数,即相空间内给定部位处系统点的密度是不随时间变化的。某固定点处的 D 随时间的变化对应于 D 对 t 的偏微商,因而它在统计平衡时必然为零。根据式(9-150)可知,平衡条件可以表达成

$$[D, H] = 0.$$

所以只要把 D 选作是并不显含时间的、系统各运动常数的函数,就能确保平衡,因为这种情况下的 D 与 H 的泊松括号必定为零。例如,保守系统的 D 能够是能量的某个函数,这就自动地满足了平衡条件。系综的特性决定于 D 函数的选择。例如,如果给定能量的系统的 D 是常数或者是零,就会出现一个熟知的系综,即微正则系综。

这里的论述是为了阐明泊松括号在经典统计力学中的有用程度。这些方面的进一步讨论就离题太远了。

推荐参考书目

C. Carathéodory, Calculus of Variation and Partial Differential Equations 正则变换或相切变换首先是由数学家在偏微分方程论中引进的。物理学家所利用的那些变换的许多性质首先也是为了这些目的而

发展起来的。这些数学起源(物理学的应用即源出于此)的最精辟的论述可参阅这本卓越的专著,幸而现在该书已有英译本。对我们有参考价值的是论述偏微分方程的第一卷第4-7章。除了许多其他课题外,还包含有前面(第478页)称为“卡雷西奥多定理”的较为完整的证明。人们不时地查阅 Carathéodory 的著作,目的是查看一下“适当的做法是怎样的”。

H. Rund, *Hamilton-Jacobi Theory in the Calculus of Variation*

这本参考书提供了稍为不同的数学描述(第二章,节12-14),物理学上的应用显然是始终被关心的。许多讨论都把时间看作是一个正则变量。

M. Born, *The Mechanics of the Atom* 经典力学的正则变换课题不论在玻尔的老量子论还是在较新量子力学的最初表述中都起着重要的作用。因此,许多显然是论述这种或那种形式的量子力学著作中,常常包含有所需的经典力学分支的详尽阐述。其中杰出的要算这一著作,它是 Born 在波动力学时期之前的1924年发表的。第一章简要地讨论了正则变换,并给出了许多有趣的物理例证。没有提及泊松括号,因为它是在海森伯和狄拉克的量子力学表述问世以后才引起近代物理学家的特有兴趣的。

R. C. Tolman, *The Principles of Statistical Mechanics* 这是一部名符其实的理论物理学百科全书。这部巨著的第二章简明而又清晰地讨论了正则变换以及经典力学中的其他一些类似的课题。论述中包含有泊松括号的性质。第三章节19论述了刘维定理。

C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics* 正则变换最早是通过经典力学中的微扰理论而进入力学的,事实上,在这之后很久它才被完全认识。(关于这些应用的参考资料在下面论述微扰理论的第十一章中)现在,任何一本中级以上水平的力学教科书对泊松括号表述和正则变换课题都有详尽的专门论述。但能够明显地引用的参考书只有极少数的几本。Lanczos 的观点与众不同;他叙述得极为详细,然而列出的方程相对较少。这个课题源出于数学,但却为物理学所用。

L. Pars, *A Treatise on Analytical Dynamics* 这本教科书多次用

到正则变换，但直到第 24 章才给与明确的命名和讨论（作为相切变换）。耦对方法和生成元方法都谈到了。特别值得注意的是对明显导致生成函数的卡雷西奥多定理的证明。

J. L. Synge, *Classical Dynamics* Synge 所用的相空间多半包括 q 及其共轭动量 H ，除此之外所用的方法与我们这里所用的方法极为相似。耦对法是以矩阵形式给出的，虽然所用的符号完全不同。书中给出了从耦对法到生成函数法的处理方法，但是演化不大清楚，或者说不是始终令人信服的。

C. W. Kilmister, *Hamilton Dynamics* 对于那些具有张量分析和微分几何这样的近代数学基础的读者，这本小册子给出了精细而又简洁的讨论，特别强调了耦对法。作者给出了用 η 和 ζ 表示的“普适生成元”，由此可推导得四种类型的生成元。

E. J. Saletan 和 A. H. Cromer, *Theoretical Mechanics* 用相当大的篇幅讨论了正则变换，大部分都是根据耦对观点讨论的，但也包括有到生成函数法的过渡。书中所用正则一词的意义就是这里所谓的扩展正则变换。此外，书中有关准则 (Canonord) 变换的概念，如果不说它是十分危险的，也绝非是正统的，因为这种变换仅对一定种类的哈密顿函数才是正则的。（正则变换的大多数应用都与它们对于所有哈密顿函数都是正则的这一性质有关。）本书还清晰地讨论了依存于连续参量的正则变换。

E. C. G. Sudarshan 和 N. Mukunda, *Classical Dynamics* 这是一部广泛采用群论方法的力学论著。从理论粒子物理学家的观点看来，可以称为经典力学。该书的很大部分实际上论述了正则变换以及系统对称性与变换的关系。

H. V. McIntosh, *Symmetry and Degeneracy* (刊于 E. M. Loebl 主编的 *Group Theory and Its Applications*, 第二卷) 这也是一本对系统对称性和运动常数之间的关联给与热情关注的参考书。尽管很少提及正则变换本身，但对称算符的生成元给出运动常数这样的概念是经常出现的，书中还提供了许多例子。

习 题

1. 把两组哈密顿方程合而为一的一种尝试, 是试着用 q 和 p 来构成一个复数量. 根据哈密顿运动方程直接证明, 对于一个自由度的系统, 如果哈密顿函数保持不变, 则下列变换

$$Q = q + ip, \quad P = Q^*.$$

不是正则的. 能否找到另一组坐标 Q', P' , 它们与 Q, P 的差别仅仅是尺度不同, 而且是正则的?

2. (a) 有一个一维系统, 其哈密顿函数为

$$H = \frac{p^2}{2} - \frac{1}{2q^2},$$

证明它有一个运动常数

$$D = \frac{pq}{2} - Ht.$$

(b) 作为 (a) 部分情况的推广, 设有一平面运动, 其哈密顿函数为

$$H = |\mathbf{p}|^2 - ar^{-n},$$

这里的 \mathbf{p} 是共轭于笛卡儿坐标的动量矢量, 证明它有一运动常数

$$D = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{n} - Ht.$$

(c) 变换 $Q = \lambda q, p = \lambda P$ 显然是正则的. 然而具有 t 时间膨胀的相同变换 $Q = \lambda q, p = \lambda P, t' = \lambda^2 t$ 就不是正则的. 证明, 对于 (a) 部分的哈密顿函数, q 和 p 的运动方程在变换下不变. 可以认为运动常数 D 与这一不变性是相关的.

3. 在节 8-4 中, 我们讨论了把时间看作是一个正则变量的某些问题. 假使能够避开这些困难, 证明, 如果变换事实上并不影响时间尺度的话, 那么, 把时间作为一个正则变量的变换方程可以化为式 (9-14).

4. 直接证明下列变换是正则的:

$$Q = \log \left(\frac{1}{q} \sin p \right), \quad P = q \cot p.$$

5. 直接证明, 只有一个自由度的系统的变换

$$Q = \arctan \frac{\alpha q}{p}, \quad p = \frac{\alpha q^2}{2} \left(1 + \frac{p^2}{\alpha q^2} \right)$$

是正则的, 这里的 α 是一个具有适当量纲的任意常数.

6. 两组坐标之间的变换方程为

$$Q = \log(1 + q^{1/2} \cos p),$$

$$P = 2(1 + q^{1/2} \cos p)q^{1/2} \sin p.$$

(a) 直接根据这些变换方程证明, 如果 q 和 p 是正则变量, 则 Q, P 也是正则变量.

(b) 证明, 生成这一变换的函数为

$$F_3 = -(e^Q - 1)^2 \tan p.$$

7. (a) 如果对某个给定的正则变换, 四种类型的生成函数都存在, 试用勒让德变换来推导它们之间的关系式.

(b) 找出恒等变换的 F_4 型式的生成函数, 以及交互变换的 F_3 型式的生成函数.

(c) 就 n 个自由度系统内 q 的正交点变换证明: 新动量同样由一个 n 维矢量的正交变换给出, 这个 n 维矢量的各个分量等于老动量加上位形空间内的某个梯度.

8. 直接证明, 变换

$$Q_1 = q_1, \quad P_1 = p_1 - 2p_2,$$

$$Q_2 = p_2, \quad P_2 = -2q_1 - q_2$$

是正则的, 并求取生成函数.

9. 对于某个具有两个自由度的系统内的点变换,

$$Q_1 = q_1^2, \quad Q_2 = q_1 + q_2,$$

试求 P_1 和 P_2 的最一般变换方程, 并要求总变换是正则的. 证明, 只要对 P_1 和 P_2 作出特定的选择, 哈密顿函数

$$H = \left(\frac{p_1 - p_2}{2q_1} \right)^2 + p_2 + (q_1 + q_2)^2$$

可以变换成 Q_1 和 Q_2 都是可略的形式, 采用这个方法来解决这个问题, 并得出 q_1, q_2, p_1 和 p_2 的表达式, 这些表达式应是时间以及各自初始值的函数.

10. 证明, 一个自由度的系统的变换

$$Q = q \cos \alpha - p \sin \alpha, \quad P = q \sin \alpha + p \cos \alpha$$

不论参量 α 的数值如何, 都满足耦对条件. 求取变换的生成函数. 在 $\alpha = 0$ 时, 变换的物理意义是什么? $\alpha = \pi/2$ 时又如何? 你所得到的生成函数对于两种情况是否都成立?

11. 决定下列变换是否是正则的:

$$Q_1 = q_1 q_2, \quad P_1 = \frac{p_1 - p_2}{q_2 - q_1} + 1,$$

$$Q_2 = q_1 + q_2, \quad P_2 = \frac{q_2 p_2 - q_1 p_1}{q_2 - q_1} - (q_2 + q_1).$$

12. 证明, 正则条件的直接条件是由形式为

$$\mathbf{JM} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}$$

的耦对条件直接给出的.

13. 由第七章习题 9 中所示条件来定义时的限制正则变换组具有群的性质. 首先利用正则变换下哈密顿原理的不变性[见式(9-11)], 再利用耦对条件证明这一说法.

14. 根据所选的任何方法证明下列变换是正则的:

$$x = \frac{1}{\alpha} (\sqrt{2P_1} \sin Q_1 + P_2),$$

$$p_x = \frac{\alpha}{2} (\sqrt{2P_1} \cos Q_1 - Q_2),$$

$$y = \frac{1}{\alpha} (\sqrt{2P_1} \cos Q_1 + Q_2),$$

$$p_y = \frac{\alpha}{2} (\sqrt{2P_1} \sin Q_1 - P_2),$$

式中的 α 是某个固定参量. 把这一变换应用于电荷为 q 、并在垂直于恒定磁场 \mathbf{B} 的平面内运动的质点的问题, 令参量 α 所取的形式为

$$\alpha^2 = qB/c.$$

用 (Q_i, P_i) 坐标表示这个问题的哈密顿函数. 根据这一哈密顿函数来求作为时间函数的质点运动.

15. 试问在什么条件下下列表达式代表一个自由度的系统的正则变换:

$$Q = \frac{\alpha p}{x}, \quad P = \beta x^2,$$

式中 α 和 β 是常数；并求出适当的生成函数。把这个变换应用于线性谐振子的解。

16. 根据所选的方法证明变换

$$Q_1 = q_1^2, \quad Q_2 = q_2 \sec p_2,$$

$$P_1 = \frac{p_1 \cos p_2 - 2q_2}{2q_1 \cos p_2}, \quad P_2 = \sin p_2 - 2q_1$$

是正则的。求出导致这一变换的适当的生成函数。

17. (a) 证明变换

$$Q = p + iaq, \quad P = \frac{p - iaq}{2ia}.$$

是正则的，并求出生成函数。

(b) 把这个变换用来求解线性谐振子问题。

18. (a) 某个系统的哈密顿函数的形式为

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{q^2} + p^2 q^4 \right).$$

求 q 的运动方程。

(b) 求出把 H 化为谐振子形式的正则变换。证明变换后的变量的解能够满足 (a) 部分所求得运动方程。

19. 一个 n 个质点的系统在相互作用力的影响下在一平面内运动，这些相互作用力是从只与质点间标量距离有关的势函数项来推导的。

(a) 利用各质点(相对于公共原点)的平面极坐标确定该系统的哈密顿函数的形式。

(b) 求出某个正则变换的生成函数，该变换相当于坐标以不变的(对所有质点都相同的)角速度 ω 在一平面内所作的逆时针转动。动量的变换方程如何？

(c) 什么是新的哈密顿函数？你能赋予新、老动量之间的差别以什么样的物理意义？

20. (a) 证明，在稳定运动附近的微幅振荡问题中，在稳定运动点处的所有哈密顿变量 η 都是常数。如果对稳定运动其数值为 η_0 ，从而

有 $\eta = \eta_0 + \xi$, 证明, 对于最低的非零近似, 微幅振荡的有效哈密顿函数可以表达成

$$H(\eta_0, \zeta) = \frac{1}{2} \xi \bullet \xi,$$

式中 \bullet 是一方阵, 其分量仅是 η_0 的函数.

(b) 假定微幅振荡的所有频率各不相同, 令 \mathbf{M} 是一个 $2n \times 2n$ 的方阵, 它由 (兼有正、负频率的) 一组可能的本征矢量的各个分量所组成. 只有本征矢的方向是固定的, 它们的量值则并不固定. 证明, 有可能把条件应用于那些本征矢量 (事实上确定了它们的量值), 使 \mathbf{M} 成为正则变换的雅可比矩阵.

(c) 证明, 这样求得的正则变换使有效哈密顿函数变换成形式

$$H = i\omega_j q_j p_j,$$

式中的 ω_j 是简正频率的量值. 用这组正则变量表示的运动方程是什么?

(d) 最后还要证明:

$$F_2 = q_j p_j + \frac{i}{2} \frac{p_j^2}{\omega_j} - \frac{i}{4} \omega_j q_j^2$$

导致某个正则变换, 它能把 H 分解成一组以简正模式振荡的非耦合线性谐振子的哈密顿函数.

21. (a) 利用基本泊松括号求出 α 和 β 的数值, 对于这些数值, 方程

$$Q = q^\alpha \cos \beta p, \quad P = q^\alpha \sin \beta p$$

代表一个正则变换.

(b) α 和 β 取何值时能使这些方程代表一个扩展的正则变换? 求出该变换的 F_2 形式的生成函数.

(c) 是否能在 (b) 部分的基础上对变换方程作出修改, 使它们对所有的 β 值都描述一个正则变换?

22. 就对称刚体的情况, 求出能用来计算泊松括号

$$[\phi, f(\theta, \phi, \psi)], \quad [\psi, f(\theta, \phi, \psi)]$$

的公式. 式中 θ, ϕ 和 ψ 是欧拉角, f 则是这些欧拉角的一个任意函数.

23. 一个带电质点在具有恒定磁场 \mathbf{B} 的空间内运动, 从而有

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} \times \mathbf{r}),$$

(a) 如果 v_i 是质点速度的笛卡儿分量, 计算泊松括号

$$[v_i, v_j] \quad i \neq j = 1, 2, 3.$$

(b) 如果 p_i 是共轭于 x_i 的正则动量, 计算泊松括号

$$[x_i, v_j], [p_i, v_j], \\ [x_i, \dot{p}_j], [p_i, \dot{p}_j].$$

24. 椭圆形开普勒轨道的长半轴 a 和偏心率 e 是运动的初次积分的函数, 因而也是正则变量的函数. 同样, 平均近点角

$$\phi \equiv \omega(t - T) = \psi - e \sin \psi$$

是 r, θ 和共轭动量的函数. 这里的 T 是近拱点通过时间, 也是一个运动常数. 计算能够由 a, e, ϕ, ω 和 T 组成的泊松括号. 这些量事实上只能组成九个不同的非零泊松括号.

25. 证明, 如果泊松括号符号代表两个方阵的对易子, 即

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA},$$

则雅可比恒等式是能够满足的. 还要就泊松括号的相同表示式证明

$$[\mathbf{A}, \mathbf{BC}] = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{C} + \mathbf{B}[\mathbf{A}, \mathbf{C}].$$

26. 利用拉格朗日和泊松括号的耦对矩阵符号证明式 (9-83).

27. 证明拉格朗日括号的类似的雅可比恒等式

$$\frac{\partial\{u, v\}}{\partial w} + \frac{\partial\{v, w\}}{\partial u} + \frac{\partial\{w, u\}}{\partial v} = 0,$$

式中 u, v 和 w 是三个函数, 利用这三个函数就能确定 (q, p) 变量组.

28. (a) 证明, 两个运动常数的泊松括号本身也是一个运动常数, 即使那些运动常数显含时间也一样.

(b) 证明, 如果哈密顿函数和某个 F 量是运动常数, 则 F 对 t 的 n 阶偏微商也必然是一个运动常数.

(c) 作为这一结果的说明, 考虑一个质量为 m 的自由质点的匀速运动. 哈密顿函数当然是守恒的, 而且存在一个运动常数

$$F = x - pt/m.$$

通过直接计算证明, F 对 t 的偏微商作为一个运动常数与 $[H, F]$ 是一致的.

29. 利用泊松括号证明, 一维谐振子有一个运动常数 u , 它定义为

$$u(q, p, t) = \ln(p + im\omega q) - i\omega t, \omega = \sqrt{k/m}$$

这一运动常数的物理意义是什么?

30. 一个有着两个自由度的系统是由哈密顿函数

$$H = q_1 p_1 - q_2 p_2 - a q_1^2 + b q_2^2$$

描述的. 证明,

$$F_1 = \frac{p_1 - a q_1}{q_2} \quad \text{和} \quad F_2 = q_1 q_2$$

是运动常数. 是否还有其他独立的代数运动常数? 是否可以根据雅可比恒等式来构成任何运动常数?

31. 以哈密顿表述来建立第三章习题 23 中所描述的磁单极 (你可能想采用球极坐标). 用泊松括号表述证明, 该习题中定义的量 D 是守恒的.

32. 曾经从式 (9-116) 推导得运动方程的泊松括号变式, 试借助其形式解求线性谐振子随时间的运动. 假设 $t = 0$ 时的初始值为 x_0 和 p_0 .

33. 一质点在势函数

$$V = \frac{mk}{x^2}$$

的制约下作一维运动. 利用 $y = x^2$ 这个量的泊松括号形式的运动方程的符号解来求作为时间函数的 x . 初始条件是 $t = 0$ 时 $x = x_0$ 和 $y = 0$.

34. (a) 证明, 式 (9-123) 能以并矢式形式表达成

$$[\mathbf{F}, \mathbf{L}] = -\mathbf{1} \times \mathbf{F} = -\mathbf{F} \times \mathbf{1}.$$

(b) 证明, 如果 \mathbf{n} 是垂直于有心力运动轨道平面的一个单位矢量, 那么, 如果 \mathbf{F} 仅仅是某个位置以及动量的矢量, 就可得到

$$[\mathbf{F}, \mathbf{n}] = -\frac{\mathbf{F} \times (\mathbf{1} - \mathbf{n}\mathbf{n})}{L},$$

式中 L 是轨道角动量的量值.

35. (a) 就单个质点直接证明 (即直接计算泊松括号来证明) 如果 u 仅仅是 r^2 , p^2 和 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}$ 的标量函数, 则

$$[u, \mathbf{L}] = 0.$$

(b) 同样直接地证明, 如果 \mathbf{F} 是一个矢量函数:

$$\mathbf{F} = u\mathbf{r} + v\mathbf{p} + w(\mathbf{r} \times \mathbf{p}),$$

式中 u, v 和 w 是 (a) 部分中相同类型的标量函数, 则

$$[F_i, L_j] = \varepsilon_{ijk} L_k.$$

36. 利用矢量函数和角动量分量的泊松括号有关的定理证明, 如果 \mathbf{F} 和 \mathbf{G} 是仅仅依存于坐标和动量的两个矢量函数, 则

$$[\mathbf{F} \cdot \mathbf{L}, \mathbf{G} \cdot \mathbf{L}] = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{G} \times \mathbf{F}) + L_i L_j [F_i, G_j].$$

(b) 令 \mathbf{L} 是有一点被固定的刚体的总角动量, 并令 L_μ 是它沿着固定于刚体的某笛卡儿坐标轴的分量. 借助于 (a) 部分求

$$[L_\mu, L_\nu], \quad \mu\nu = 1, 2, 3$$

的一般表达式. (提示: 沿 μ 和 ν 轴选择 \mathbf{F} 和 \mathbf{G} 的单位矢量.)

(c) 根据 L_μ 的泊松括号运动方程推导刚体的欧拉运动方程.

37. 利用 q_i 的球极坐标建立哈密顿表述中的球面摆问题. 用这些正则变量直接计算泊松括号:

$$[L_x, L_y], [L_y, L_z], [L_z, L_x],$$

由此看出, 它们具有式(9-128)所预示的数值. 为什么 p_θ 和 p_ψ 虽然是角动量的垂直分量, 但仍然能够用作正则动量?

38. 在前面第 419 页上已证明, 如果角动量的任何两个分量守恒, 则总角动量守恒. 如果有两个分量恒等于零, 则第三个分量必然守恒. 由此似乎可以断言, 如果运动被限制在某个平面内, 以致该平面内的角动量分量等于零, 那么, 总角动量是一个常数. 对于这种预言, 似乎有许多明显的矛盾, 例如, 表内振荡着的弹簧的角动量或者在铅垂平面内沿斜面下滚中的平面盘的角动量就是如此. 讨论这些事例中的力, 并指出这个定理的叙述是否需要有什么限制.

39. (a) 根据守恒量的泊松括号条件证明, 拉普拉斯-龙格-楞次矢量

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \frac{mk\mathbf{r}}{r}$$

是开普勒问题的一个运动常数.

(b) 证实式(9-131)所给出的 \mathbf{A} 的分量的泊松括号关系式.

40. (a) 证实由式 (9-141) 定义的两维矩阵 \mathbf{A} 的分量是两维各向同性谐振子问题的运动常数。

(b) 证实式(9-144)、(9-145)、(9-146)所定义的 S_i 量 ($i = 1, 2, 3$) 具有式 (9-147) 和 (9-148) 所表明的性质。

第十章 哈密顿-雅可比理论

早已说过,可用正则变换提供求解力学问题的一般步骤.已经提出了两种方法.如果哈密顿函数守恒,那么,只要变换到新的、全是循环的正则坐标,即得所求之解,因为新的运动方程的积分是轻而易举的.另一个可用的技巧是设法找到一个正则变换,将 t 时刻的坐标和动量 (q, p) 变换到一组新的常量,这些量可以是 $t = 0$ 时刻的 $2n$ 个初始值 (q_0, p_0) ,采用这种变换,则使新、老正则变量相关联的变换方程实际上就是所求力学问题的解:

$$\begin{aligned}q &= q(q_0, p_0, t), \\p &= p(q_0, p_0, t),\end{aligned}$$

这是因为它们给出的坐标和动量是它们的初始值和时间的函数.最后这一步是更为一般的,特别是因为即使当哈密顿函数包含时间时,它也同样适用(至少在原则上讲是如此).现在就从怎样求得这一变换开始我们的讨论.

10-1 哈密顿主函数的哈密顿-雅可比方程

只要变换后的哈密顿函数 K 恒等于零,就能自动保证新变量始终是常数,因为这时的运动方程为

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial p_i} &= \dot{q}_i = 0, \\-\frac{\partial K}{\partial q_i} &= \dot{p}_i = 0.\end{aligned}\tag{10-1}$$

已知, K 必定是通过方程

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t}$$

与老哈密顿函数和生成函数相关联的。因此，如果 F 满足方程

$$H(q, p, t) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0, \quad (10-2)$$

K 将等于零。为方便起见，可以把 F 取作老坐标 q_i 、新的常值动量 P_i 和时间 t 的函数；采用前一章的符号，生成函数应该记为 $F_2(q, P, t)$ 。再利用变换方程[见式(9-17a)]

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i},$$

把式(10-2)中的哈密顿函数表达成相同变量的函数，结果式(10-2)成为

$$\begin{aligned} \bar{H} \left(q_1, \cdots, q_n; \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \cdots, \right. \\ \left. \frac{\partial F_2}{\partial q_n}; t \right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (10-3)$$

式(10-3)称为哈密顿-雅可比方程，它构成了一个有 $(n+1)$ 个变量 $q_1, \cdots, q_n; t$ 的、所求生成函数的偏微分方程。习惯上，式(10-3)的解总是用 S 表示的，并把它称为哈密顿主函数。

当然，式(10-3)的积分仅仅给出了对老坐标和时间的依存关系，似乎看不出在 S 中是怎样包含着那些新动量的。我们除了知道它们必定是常数外，新动量的确还没有指明。然而，解的性质会告诉我们怎样来选择 P_i 。

式(10-3)的数学形式是一个含有 $n+1$ 个变量的一阶偏微分方程。假设式(10-3)有一个解的形式为

$$F_2 \equiv S = S(q_1, \cdots, q_n; \alpha_1, \cdots, \alpha_{n+1}; t), \quad (10-4)$$

式中的量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n+1}$ 是 $n+1$ 个独立的积分常数。这样的

解称为一阶偏微分方程的完全解¹⁾。然而,这些积分常数中有一个事实上与解是不相干的,因为我们将看到, S 本身在式(10-3)中并不出现,涉及到的仅仅是它对 q 或 t 的偏微商。因此,如果 S 是微分方程的某个解,那么, $S + \alpha$, (这里的 α 是任何一个常数)也必定是一个解。式(10-4)中 $n + 1$ 个积分常数之一将仅仅表现为加于 S 的一个附加常数。由于同样原因,一个附加常数对生成函数是没有什么意义的,因为在变换方程中仅仅出现生成函数的偏微商。因此,对于我们的目的来说,式(10-3)的完全解能够表达成

$$S = S(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n; t), \quad (10-5)$$

式中 n 个独立常数中没有一个是单独的附加常数。这种数学形式的 S 完全符合于 F_2 这种生成函数所要求的形式,因为式(10-5)把 S 表达成了 n 个坐标、时间 t 和 n 个独立量 α_i 的函数。所以我们完全有理由把 n 个积分常数取作新的(常值)动量:

$$P_i = \alpha_i. \quad (10-6)$$

这种选择与原来的说法,即“新动量与 q 和 p 在 t_0 时刻的初始值相关”一语并不矛盾。因此,现在能够把 n 个变换方程(9-17a)表达成

$$p_i = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial q_i}, \quad (10-7)$$

式中 q, α 代表整个一组量。在 t_0 时刻,这些方程构成了把 n

1) 式(10-4)并不是式(10-3)的解的唯一可能型式。解的最一般形式包含有一个或更多个任意函数,而不是任意常数。例如可参阅 R. Courant 和 D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. II, 1962, pp. 24—28, 以及 V. I. Smirnov, *A Course of Higher Mathematics*, Vol. IV, 1964, 节 I11. 并非一定要有一个(10-4)形式的唯一的解。对于一个给定的方程,可能有好几个完全解。但是对于往后的论证有意义的必须是一个完全解。

个 α 与 q 和 p 的初始值联系起来的 n 个方程, 这使我们能够根据问题的特定初始条件求解积分常数. 另一半变换方程将给出新的常值坐标, 这些方程为

$$Q_i = \beta_i = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_i}. \quad (10-8)$$

只要用 q_i 的初始值算出式(10-8)右边在 $t = t_0$ 时刻的数值, 同样可以根据初始条件求得常数 β . 式(10-8)也可以“反过来”用 α , β 和 t 表示 q_i :

$$q_i = q_i(\alpha, \beta, t), \quad (10-9)$$

也就是求解出作为时间和初始条件的函数的坐标¹⁾. 在完成(10-7)式中的求导以后, 可以用(10-9)式来代替 q , 从而给出作为 α , β 和 t 的函数的动量 p_i :

$$p_i = p_i(\alpha, \beta, t). \quad (10-10)$$

(10-9)和(10-10)式构成了所要求的哈密顿运动方程的完全解.

因此, 哈密顿函数是变换到常值坐标和动量的正则变换的生成函数; 我们在求解哈密顿-雅可比方程的同时, 得到了力学问题的解. 从数学上讲, 我们建立的是 $2n$ 个正则运动方程(它们都是一阶微分方程)与那些一阶偏微分哈密顿-雅可比方程之间的等价性. 这种对应性质并不限于那些由哈密顿

1) 作为一个数学问题, 可能会问上述这个“反过来”的过程对(10-7)和(10-8)两式是否可行, 亦即它们是否能够分别解出 α_i 和 q_i . 问题的关键在于各组中的方程是否独立, 因为如果不是独立的, 要用它们根据具体情况来确定 n 个独立的 α_i 和 q_i 显然是不够的. 为简化符号, 令 S_a 代表 S 对 α_i 的偏微商组中的成员, 使式(10-8)可由 $\beta = S_a$ 代表. 直接根据哈密顿-雅可比方程的完全解的性质可以知道, 式(10-8)中的微商 S_a 构成了 q 的独立函数; 事实上, 这意思就是我们所说的“ n 个积分常数都是独立的”. 因此, S_a 对于 q_i 的雅可比函数不可能为零. 由于微分的次序是无关系要的, 因而 S_a 对于 α_i 的雅可比函数也不可能为零, 这就证明了式(10-7)的独立性.

函数支配的方程；事实上，一般的一阶偏微分方程论主要关心的是等效的一阶常微分方程组的性质。从本质上讲，这种联系可以追溯到这样的事实，即偏微分方程及其正则方程都源出于一个共同的变分原理，在这种情况下就是哈密顿修正原理。

把 α_i 选作新动量在某种意义上是完全任意的。同样可以选择任何 n 个量 γ_i ，它们都是积分常数 α_i 的独立函数：

$$\gamma_i = \gamma_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n). \quad (10-11)$$

根据这些定义关系式，能够把哈密顿主函数表达成 q_i, γ_i 和 t 的函数，余下的推导完全一样。把某组特定的 γ_i 取作新动量，而不是取求积哈密顿-雅可比方程时自然出现的积分常数，往往可以证明是方便的。

通过对 S 的时间全微商的探究，可以进一步洞察 S 的物理意义。由于 P_i 始终是常数，所以能从公式

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$$

来计算。根据式 (10-7) 和 (10-3)，这一关系式也能表达成

$$\frac{dS}{dt} = p_i \dot{q}_i - H = L, \quad (10-12)$$

从而使哈密顿主函数与拉氏函数的不定时间积分至多相差一个常数：

$$S = \int L dt + \text{常数}. \quad (10-13)$$

已知哈密顿原理是关于 L 的定积分的阐述，并可根据它由拉格朗日方程求得问题的解。这里，以不定积分形式表示的同一个作用量积分提供了求解问题的另一条途径。在实际计算中，式 (10-13) 所表示的结果于事无补，因为在作为时间函数的 q_i 和 p_i 解出之前，亦即在问题解出之前是无法对时间求积

拉氏函数的¹⁾。

10-2 谐振子问题——哈密顿-雅可比方法的一个例子

为了说明求解力学系统运动的哈密顿-雅可比方法,我们将详细地探讨一个简单的一维谐振子问题。这时的哈密顿函数为

$$H = \frac{1}{2m} (p^2 + m^2\omega^2 q^2) \equiv E, \quad (10-14)$$

式中

$$\omega = \sqrt{k/m}, \quad (10-15)$$

这里的 k 是力常数。令 p 等于 $\partial S/\partial q$ 并代入哈密顿函数,即可得到 S 的哈密顿-雅可比方程;新哈密顿函数必须等于零这样的要求将成为

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + m^2\omega^2 q^2 \right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (10-16)$$

由于只有在最后一项中才涉及到 S 对 t 的明显依存性,所以可得式 (10-16) 的解的形式为

$$S(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) - \alpha t, \quad (10-17)$$

式中的 α 是积分常数(以后用来代表变换后的动量)。选用这种形式的解,即能从式 (10-16) 中消去 t , 即

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + m^2\omega^2 q^2 \right] = \alpha. \quad (10-18)$$

因此,积分常数 α 等于总能量 E 。直接从式 (10-17) 以及关系式[见式 (10-3)]

1) 历史上,在知道能够用哈密顿-雅可比方程求解力学问题之前,哈密顿认识到 L 的时间积分是偏微分方程的一个特解。雅可比则看出逆过程是正确的,他认为,借助于正则变换方法,可用哈密顿-雅可比方程的完全解描述系统的运动。

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0$$

也可看出这一点, 因为由它可得

$$H = \alpha.$$

直接求积式 (10-18), 即得

$$W = \sqrt{2m\alpha} \int dq \sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2\alpha}},$$

所以

$$S = \sqrt{2m\alpha} \int dq \sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2\alpha}} - \alpha t. \quad (10-19)$$

虽然式 (10-19) 中所涉及到的积分并不特别困难, 也没有必要现在就来计算, 因为所求的不是 S , 而是它的偏微商. q 的解则出自变换方程式 (10-8):

$$\beta - \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \sqrt{\frac{2m}{\alpha}} \int \frac{dq}{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2\alpha}}} - t,$$

此式不难求积, 结果得

$$t + \beta = \frac{1}{\omega} \arcsin q \sqrt{\frac{m\omega^2}{2\alpha}}. \quad (10-20)$$

式 (10-20) 可以直接“反过来”给出作为 t 和两个积分常数 α 和 β 的函数的 q :

$$q = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}} \sin \omega(t + \beta), \quad (10-21)$$

这是熟悉的谐振子解. 从形式上看, 动量的解来自变换方程 (10-7), 利用式 (10-18), 此解可表达为

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2m\alpha - m\omega^2 q^2}.$$

此式同 q 的解式 (10-21) 结合起来, 成为

$$p = \sqrt{2m\alpha[1 - \sin^2\omega(t + \beta)]}$$

或

$$p = \sqrt{2m\alpha} \cos\omega(t + \beta). \quad (10-22)$$

当然,这一结果符合于把 p 作为 $m\dot{q}$ 的简单看法.

其次,常数 α 和 β 必定与 $t = 0$ 时的初始条件 q_0 和 p_0 有关. 平方式 (10-21) 和 (10-22), 显而易见, α 是通过方程

$$2m\alpha = p_0^2 + m^2\omega^2q_0^2 \quad (10-23)$$

用 q_0 和 p_0 给出的. 当然,根据前面把 α 当作守恒总能量 E 的看法也能直接得到这一相同的结果. 最后,相常数 β 与 q_0 和 p_0 的关系为

$$\tan\omega\beta = m\omega \frac{q_0}{p_0}. \quad (10-24)$$

因此,哈密顿主函数是某个正则变换的生成元,由这种变换得到的新坐标是振荡相角的量度,而所得到的新的正则动量则是总能量.

如果把 q 的解代入式 (10-19), 哈密顿主函数能表达成

$$\begin{aligned} S &= 2\alpha \int \cos^2\omega(t + \beta) dt - \alpha t \\ &= 2\alpha \int \left(\cos^2\omega(t + \beta) - \frac{1}{2} \right) dt. \end{aligned}$$

这时,拉氏函数为

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2m} (p^2 - m^2\omega^2q^2) \\ &= \alpha [\cos^2\omega(t + \beta) - \sin^2\omega(t + \beta)] \\ &= 2\alpha \left[\cos^2\omega(t + \beta) - \frac{1}{2} \right], \end{aligned}$$

因而 S 是拉氏函数的时间积分,这与一般关系式 (10-13) 相一致. 注意,在问题的解答求得之后才可能证明这一等式.

10-3 哈密顿特征函数的哈密顿-雅可比方程

我们所以有可能求积简谐振子的哈密顿-雅可比方程, 主要由于 S 能分成两部分, 一部分只含有 q , 而另一部分只含有时间. 只要老的哈密顿函数并不显含时间, 变量的这种分离总是可能的.

如果 H 不是 t 的显函数, 则 S 的哈密顿-雅可比方程将成为

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}\right) = 0.$$

式中第一项只包含 S 对 t 的依存性, 而第二项只涉及 S 对 q_i 的依存性. 所以只要假设 S 的解的形式为

$$S(q_i, \alpha_i, t) = W(q_i, \alpha_i) - \alpha_1 t, \quad (10-25)$$

时间变量就能分离开来. 代入这一试解后, 微分方程将化为表达式

$$H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = \alpha_1, \quad (10-26)$$

因而不包含时间. 在 S 中出现的积分常数之一, 譬如说 α_1 则等于 H 的常数值. (通常情况下, H 是能量, 但应记住, 情况并不一定总是这样的, 见节 8-2).

当 H 是常数时, 与时间无关的函数 W 在此不过表现为生成函数 S 的一部分. 还能证明, W 单独生成了它自己的相切变换, 其性质与 S 生成的变换完全不同. 今考虑一正则变换, 其中的新动量全是运动常数 α_i , 其中特别是 α_1 是运动常数 H . 如果用 $W(q, P)$ 表示这一变换的生成函数, 那么, 变换方程为

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial W}{\partial P_i} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i}. \quad (10-27)$$

尽管这些方程类似于哈密顿主函数 S 有关的式(10-9)和

(10-8), 但现在确定 W 的条件是 H 应等于新动量 α_1 :

$$H(q_i, p_i) = \alpha_1.$$

利用式 (10-27), 这一要求成了 W 的偏微分方程:

$$H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = \alpha_1,$$

可以看出, 它与式 (10-26) 是一致的。由于 W 并不包含时间, 所以新、老哈密顿函数相等, 由此得 $K = \alpha_1$ 。

于是, 称为哈密顿特征函数的 W 生成了一种正则变换, 其中的所有新坐标都是循环的。在前一章中已经看到, 当 H 是一运动常数时, 这种性质的变换实际上解出了有关的力学问题, 因为新运动方程的积分是微不足道的。事实上, P_i 的正则方程同下面的说法是一个意思, 亦即共轭于循环坐标的动量都是常数:

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0, \quad P_i = \alpha_i. \quad (10-28a)$$

由于新哈密顿函数只与动量 α_i 中的一个动量有关, 所以 \dot{Q}_i 的运动方程为

$$\begin{aligned} \dot{Q}_i &= \frac{\partial K}{\partial \alpha_i} = 1 & i = 1, \\ &= 0 & i \neq 1, \end{aligned}$$

其直接解为

$$\begin{aligned} Q_1 &= t + \beta_1 \equiv \frac{\partial W}{\partial \alpha_1}, \\ Q_i &= \beta_i \equiv \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} \quad i \neq 1. \end{aligned} \quad (10-28b)$$

唯一的坐标(它并非简单地是一个运动常数)是 Q_1 , 它等于时间加上一个常数。在此, 我们用另一个事例来说明作为坐标的时间与作为其共轭动量的哈密顿函数之间的共轭关系。

W 对老坐标 q_i 的函数关系决定于偏微分方程(10-26), 此

式象式 (10-3) 一样也称为哈密顿-雅可比方程。可见, 一个完全解中将有 n 个积分常数, 不过中间也必然有一个仅仅是个附加常数。其余的 $n-1$ 个独立常数 $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与 α_1 一起才可取作新的常值动量。在 t_0 时计算时, 式 (10-27) 的前一半可用以联系 n 个常数 α_i 与 q_i, p_i 的初始值。最后, 式 (10-28b) 能用来解出作为 α_i, β_i 和 t 的函数的 q_i , 从而完成对问题的求解。应该注意, 方程 (10-28b) 中有 $(n-1)$ 个方程与时间根本无关。我们可以把某一个 q_i 取作独立变量, 然后求解这些与时间无关的方程, 以使用这一独立变量来表示其余的坐标。从而直接得到运动的轨道方程。例如, 在有心力运动中, 可以用这种技巧求得作为 θ 函数的 r , 而不必分别求出作为时间函数的 r 和 θ 。

并不总是一定要取 α_1 和 W 表达式中的积分常数作为新的常值动量。有时, 更可取的做法是把 α_i 的特定的一组 n 个独立函数作为变换后的动量。如用 γ_i 表示这些常数, 则特征函数 W 能用作独立变量的 q_i 和 γ_i 表示。一般, 哈密顿函数与一个以上的 γ_i 相联, 而 Q_i 的运动方程将成为

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial \gamma_i} = v_i,$$

这里的 v_i 是 γ_i 的函数。在这种情况下, 所有新坐标都是时间的线性函数:

$$Q_i = v_i t + \beta_i. \quad (10-29)$$

特征函数 W 具有与 S 类似的物理意义。当 W 不显含时间时, 它的时间全微商为

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial q_i} \dot{q}_i = p_i \dot{q}_i,$$

因此,

$$W = \int p_i \dot{q}_i dt = \int p_i dq_i. \quad (10-13')$$

上面的积分可认为是定义了节 8-6 中用过的简约作用量。再说，这种信息对我们也没有什么实际帮助，如果不求得哈密顿-雅可比方程的完全积分，就无法事先得到这种形式的 W 。现在，可以把利用哈密顿原理或特征函数求解力学问题时所包含的步骤用表格形式概述如下：

当哈密顿函数

是 q, p, t 的任何一般函数： $H = H(q, p, t)$	是守恒的，即 $H(q, p) = \text{常数}$
--	---------------------------------

时，可分别采用两种解法。变换到新变量所需正则变换应使：

所有坐标和动量 Q_i, P_i 都是运动常数。	所有动量都是常数。
----------------------------	-----------

为满足这些要求，新哈密顿函数只须

恒等于零： $K = 0$ 。	对所有坐标都是循环的： $K = H(P_i) = \alpha_i$ 。
--------------------	--

在这些条件下，新的运动方程将为

$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0,$	$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = v_i,$
$\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0,$	$\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0,$

其直接解为

$Q_i = \beta_i,$	$Q_i = v_i t + \beta_i$
$P_i = \gamma_i,$	$P_i = \gamma_i,$

它们都满足所规定的条件。

产生所需变换的生成函数为

哈密顿主函数 $S(q, P, t),$	哈密顿特征函数 $W(q, P),$
-------------------------	-----------------------

它们满足哈密顿-雅可比偏微分方程

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad \left| \quad H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) - \alpha_1 = 0.$$

方程的完全解包含有

$$\begin{array}{l|l} n \text{ 个有效积分常数} & n-1 \text{ 个有效积分常数,} \\ \alpha_1, \dots, \alpha_n. & \text{它们与 } \alpha_1 \text{ 一起组成一组} \\ & n \text{ 个独立常数 } \alpha_1, \dots, \alpha_n. \end{array}$$

新的常值动量 $P_i = r_i$ 可以选作 n 个积分常数的 n 个独立函数

$$P_i = r_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad \left| \quad P_i = r_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

所以哈密顿-雅可比方程的完全解可以看作是新动量的函数

$$S = S(q_i, r_i, t). \quad \left| \quad W = W(q_i, r_i).$$

特别是, 可把 r_i 本身选为 α_i . 变换方程的一半

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad \left| \quad p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}$$

是自动满足的, 因为它们已被用来构成哈密顿-雅可比方程.

另一半变换方程

$$Q_i = \frac{\partial S}{\partial r_i} = \beta_i \quad \left| \quad Q_i = \frac{\partial W}{\partial r_i} = v_i(r_i)t + \beta_i$$

使我们能用 t 和 $2n$ 个常数 β_i, r_i 来解出 q_i . 用坐标和动量的初始值 (q_{i0}, p_{i0}) 算出这 $2n$ 个常数, 也就完成了问题的解.

当哈密顿函数并不显含时间时, 两种方法都适用, 它们的生成函数则按照公式

$$S(q, P, t) = W(q, P) - \alpha_1 t$$

相互关联.

10-4 哈密顿-雅可比方程中变量的分离

在前一节中, 引进哈密顿-雅可比方法似乎没有得到多少实际好处. 为了避免求解构成正则运动方程的 $2n$ 个常微分方程, 就得求解哈密顿-雅可比偏微分方程, 而求解偏微分方

程相当复杂。但在一定条件下,有可能把哈密顿-雅可比方程中的变量分离开来,从而使求解化为求积分的问题。实际上,也只当变量可以分离时,哈密顿-雅可比方法才能成为一种有用的计算手段。

当(比如说)哈密顿主函数能被分解成两个相加部分,一部分仅与坐标 q_i 有关,另一部分则与 q_i 完全无关时,就说哈密顿-雅可比方程中的坐标 q_i 是可以分离的。因此,如果 q_i 取作可分离坐标,则哈密顿函数必须使我们能写下

$$\begin{aligned} & S(q_1, \cdots, q_n; \alpha_1, \cdots, \alpha_n; t) \\ &= S_1(q_1; \alpha_1, \cdots, \alpha_n; t) + S'(q_2, \cdots, q_n; \\ & \quad \alpha_1, \cdots, \alpha_n; t), \end{aligned} \quad (10-30)$$

并且哈密顿-雅可比方程还要求能分解成两个方程:一个是 S_1 的方程,而另一个则是 S' 的方程。同样,如果问题中的所有坐标都可分离,则哈密顿-雅可比方程就被说成是完全可分离的(或简单地说是可分离的)。于是,形式为

$$S = \sum_i S_i(q_i; \alpha_1, \cdots, \alpha_n; t) \quad (10-31)$$

的哈密顿主函数的解将使哈密顿-雅可比方程分解成 n 个方程,其型式为

$$H_i\left(q_i; \frac{\partial S_i}{\partial q_i}; \alpha_1, \cdots, \alpha_n\right) = \alpha_i \quad (10-32)$$

(不求和!)。常数 α_i 现在称为分离常数。式(10-32)中的每个方程仅包含 q_i 坐标中的一个坐标以及 S_i 对 q_i 的相应偏微商。所以它们是一组形式特别简单的常微分方程。由于方程都只是一阶的,所以总可以将它们化为求积分的问题;先是迳直解出 S_i 对 q_i 的偏微商,再对 q_i 求积分。

从哈密顿主函数 S 过渡到保守力学系统的特征函数可以看作是一个例子,在这类例子中, t 是哈密顿-雅可比方程中

的一个可分离变量。在这种情况下，我们来寻求式 (10-30) 规定的相应形式的 S 解：

$$S(q, \alpha, t) = S_0(\alpha, t) + W(q, \alpha). \quad (10-32')$$

由于所作假设， H 并不是时间的显函数，所以具有这一试解的哈密顿-雅可比方程为

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) + \frac{\partial S_0}{\partial t} = 0. \quad (10-33)$$

式 (10-33) 中的第一项与 t 无关，只与这些 q_i 有关，而第二项只可能是 t 的函数。所以只当这两项是大小相等、符号相反的常数：

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} = -\alpha_1, \quad (10-34a)$$

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = \alpha_1 \quad (10-34b)$$

时，方程才能成立。第一个方程象式 (10-17) 和式 (10-25) 一样解得 $S_0 = -\alpha_1 t$ ，而第二个方程是 W 的哈密顿-雅可比方程。所以哈密顿函数的常数值 α_1 在这种过程中看起来象是一个分离常数。

有可能找到一些例子，不需要把时间变量分离开来也能够解出哈密顿-雅可比方程（例如习题 8）。不过，哈密顿-雅可比方法的几乎所有有用的应用中包含的哈密顿函数都不显含时间，因而 t 是一个可分离变量。因此，往后关于可分离性的讨论将只限于 H 是一运动常数的这种系统，而且将一律用哈密顿特征函数 W 。

不难证明，任何循环的或可略的坐标都是可分离的。假设循环坐标是 q_1 ；共轭动量 p_1 是一常数，比如说是 γ 。那么， W 的哈密顿-雅可比方程将是

$$H\left(q_2, \dots, q_n; \gamma; \frac{\partial W}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) = \alpha_1. \quad (10-35)$$

如果我们试用一分离解,其形式为

$$W = W_1(q_1, \alpha) + W'(q_2, \dots, q_n; \alpha), \quad (10-36)$$

则式(10-35)显然将只包含分离函数 W' , 而 W_1 则是方程

$$P_1 = \gamma = \frac{\partial W_1}{\partial q_1} \quad (10-37)$$

的解. 常数 γ 就是分离常数, W_1 的显解(只差一无关紧要的附加常数)为

$$W_1 = \gamma q_1,$$

而 W 则为

$$W = W' + \gamma q_1. \quad (10-38)$$

当 H 不是时间的显函数时, S 取(10-25)的形式, 它与式(10-38)有着明显的相似性. 事实上, 可以认为两个方程是在相似条件下产生的. 已经看到, t 在某种意义上可以看作是一个广义坐标, 而 $-H$ 则是它的正则动量[见式(8-58)]. 如果 H 守恒, 则 t 可以看作是一个循环坐标, 而式(10-34a)也恰好相当于导致相似解的式(10-37).

如果除一个以外的所有坐标都是循环的, 那么, 重复应用前面所用的步骤, 哈密顿-雅可比方程将被完全分离. 为了特地说明这种分离, 我们最好把 q_1 作为非循环坐标, 以致所有的共轭动量 $p_i (i > 1)$ 都是常数 $\alpha_2, \dots, \alpha_n$. 按照适用于单个循环坐标的相同步骤, 分离形式的 W 将成为

$$\begin{aligned} W &= \sum_{i=1}^n W_i(q_i, \alpha) \\ &= W_1(q_1, \alpha) + \sum_{i=2}^n \alpha_i q_i \end{aligned} \quad (10-39)$$

[见式(10-38)]. 这里的 W_1 是约化的哈密顿-雅可比方程

$$H\left(q_1; \frac{\partial W_1}{\partial q_1}; \alpha_2, \dots, \alpha_n\right) = \alpha_1 \quad (10-40)$$

的解。由于这是一个以独立变量 q_i 表示的一阶常微分方程，所以能够直接化为求积分的问题，从而得到 W 的完全解¹⁾。

一般讲，如果 q_i 及其共轭动量 p_i 可以在哈密顿函数中被分隔成不包含任何其他变量的某个函数 $f(q_i, p_i)$ ，则坐标 q_i 是可分离的。如果我们寻找一个试解，其形式为

$$W = W_i(q_i, \alpha) + W'(q_i, \alpha),$$

式中 q_i 代表了除 q_i 外的所有 q ，则哈密顿-雅可比方程将成为

$$H\left[q_i, \frac{\partial W'}{\partial q_i}, f\left(q_i, \frac{\partial W_i}{\partial q_i}\right)\right] = \alpha_i. \quad (10-41)$$

式(10-41)至少在原则上能够反过来解出 f ：

$$f\left(q_i, \frac{\partial W_i}{\partial q_i}\right) = g\left(q_i, \frac{\partial W'}{\partial q_i}, \alpha_i\right). \quad (10-42)$$

前面论及式(10-33)时所采用的论证在这里依然适用，只是样子略有不同；即 f 不是一个除 q_i 外任何一个 q 的函数；另一方面， g 则与 q_i 无关。因此，只有当两边都等于一个与所有的 q 都无关的相同常数：

$$f\left(q_i, \frac{\partial W_i}{\partial q_i}\right) = \alpha_i, \quad g\left(q_i, \frac{\partial W'}{\partial q_i}\right) = \alpha_i \quad (10-43)$$

时，式(10-42)才能成立，并实现变量的分离。

应该强调的是，哈密顿-雅可比方程的可分离性不仅与所涉及的物理问题有关，而且还与所用广义坐标系的选择有关。

1) 根据下述考虑也可以得出(10-39)的形式。应该记住， W 是变换到全是循环新坐标的这种变换的生成函数。但如果 q_2, \dots, q_n 已经是循环的，它们就不再需要变换。对于这些坐标， W 能够是恒等变换。由于 α_i 是新动量，式(10-39)中的和式可以表达成

$$\sum_{i=2}^n q_i p_i,$$

此式可以看作是坐标 q_2, \dots, q_n 的恒等变换的生成元[见式(9-25)]。

例如,一体有心力问题用极坐标时是可分离的,而用笛卡儿坐标系时就不行. 对于某些问题来讲,哈密顿-雅可比方程根本不可能完全分离,有名的三体问题就是一个例证. 另一方面,在许多基本的力学和原子物理学问题中,可以有一组以上的坐标是可分离的. 一般讲,只当变量可以完全分离时,才能以紧凑的形式求解哈密顿-雅可比方程. 因此,已经作了巨大努力设法寻找适合于各个问题的可分离坐标系.

不可能给出一个适用于任何特定问题的简单标准,以指明什么样的坐标系可以使哈密顿-雅可比方程是可分离的. 在正交坐标系的情况中,已证明所谓斯特克尔条件是有用的. 它们在一定情况下提供了可分离性的充要条件. 该条件的充分性的证明将在附录 D 中找到(那里还列有该课题的其他参考文献). 这里将要说明斯特克尔条件本身以及它们的一个应用例证.

对要考虑的那种情况附加有下列限制:

1. 哈密顿函数是守恒的;
2. 拉氏函数仅是广义速度的二次函数,以致哈密顿函数的形式为[见式(8-19)]

$$H = \frac{1}{2} (\mathbf{P} - \mathbf{a}) \mathbf{T}^{-1} (\mathbf{P} - \mathbf{a}) + V(q); \quad (10-44)$$

3. 广义坐标组 q_i 构成了一个正交坐标系,以致矩阵 \mathbf{T} 是对角的. 由此可知,逆矩阵 \mathbf{T}^{-1} 也是一个有着非零元素的对角矩阵:

$$(\mathbf{T}^{-1})_{ii} = \frac{1}{T_{ii}} \quad (\text{不求和}). \quad (10-45)$$

对于满足这种描述的问题和坐标来讲,斯特克尔条件表明,哈密顿-雅可比方程可以完全分离的条件是

- a. 矢量 \mathbf{a} 的元素 a_i 仅是相应坐标的函数,即 $a_i = a_i(q_i)$;

b. 势函数 $V(q)$ 能表达成下列形式之和:

$$V(q) = \frac{V_i(q_i)}{T_{ii}}; \quad (10-46)$$

c. 有一个 $n \times n$ 矩阵 ϕ , 其元素为 $\phi_{ij} = \phi_{ij}(q_i)$, 使

$$(\phi^{-1})_{ii} = \frac{1}{T_{ii}} \quad (\text{不求和}). \quad (10-47)$$

如果斯特克尔条件得到满足, 则哈密顿特征函数是完全可分离的:

$$W(q) = \sum_i W_i(q_i),$$

其中 W_i 满足下列形式的方程:

$$\left[\frac{\partial W_i}{\partial q_i} - a_i \right]^2 = -2V_i(q_i) + 2\phi_{ij}\gamma_j, \quad (10-48)$$

式中 γ_j 是积分常数(而且这里只对下标 j 求和).

尽管这些条件似乎有点故弄玄虚而且比较复杂, 但它们的应用往往非常干脆. 作为这里提出的可分离性概念的例证, 我们将以极坐标来讨论有心力场中一个运动质点的哈密顿-雅可比方程. 然后把问题推广到任意的势定律, 以作为斯特克尔条件的一种应用.

首先, 让我们考虑以轨道平面内的极坐标 (r, ψ) 表示的有心力问题. 这时的运动只包含两个自由度, 哈密顿函数的形式则为

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\psi^2}{r^2} \right) + V(r), \quad (10-49)$$

而且 ψ 是循环的. 结果, 哈密顿特征函数表现为

$$W = W_1(r) + \alpha_\psi \psi, \quad (10-50)$$

这里的 α_ψ 共轭于 ψ 的常值角动量 P_ψ . 于是, 哈密顿-雅可比方程成为

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial r}\right)^2 + \frac{\alpha_\psi^2}{r^2} + 2mV(r) = 2m\alpha_1, \quad (10-51)$$

式中的 α_1 是常数,它在物理学上是系统的总能量.从式(10-51)解出 W_1 的偏微商,得

$$\frac{\partial W_1}{\partial r} = \sqrt{2m(\alpha_1 - V) - \frac{\alpha_\psi^2}{r^2}},$$

因而 W 为

$$W = \int dr \sqrt{2m(\alpha_1 - V) - \frac{\alpha_\psi^2}{r^2}} + \alpha_\psi \phi \quad (10-52)$$

采用这种形式的特征函数,变换方程(10-28b)表现为

$$t + \beta_1 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \int \frac{m dr}{\sqrt{2m(\alpha_1 - V) - \alpha_\psi^2/r^2}} \quad (10-53a)$$

以及

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \frac{\partial W}{\partial \alpha_\psi} \\ &= - \int \frac{\alpha_\psi dr}{r^2 \sqrt{2m(\alpha_1 - V) - \alpha_\psi^2/r^2}} + \phi. \end{aligned} \quad (10-53b)$$

式(10-53a)给出了作为 t 的函数的 r ,这与第三章中得到的相应解式(3-18)是一致的,那时,明晰地把 α_1 和 α_ψ 分别写成 E 和 l .前面已经提到,余下的 Q_i 的变换方程[这里仅是式(10-53b)]应该给出轨道方程.如果式(10-53b)中的积分变量变为 $u = 1/r$,方程将简化为

$$\phi = \beta_2 - \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2m}{\alpha_\psi^2} (\alpha_1 - V) - u^2}},$$

它与前面得到的轨道方程(3-37)相一致,这里的 ϕ 是 θ , β_2 则是 θ_0 .

作为变量分离的另一个例子,我们再用球极坐标检验这

同一个有心力问题,也就是说,尽管事先知道轨道是在一个平面内,也暂时不予理会. 已经指出,这时的适当的哈密顿函数为[见式(8-21)]

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + V(r). \quad (10-54)$$

如果相应的哈密顿-雅可比方程中的变量是可分离的,则哈密顿特征函数的形式应为

$$W = W_r(r) + W_\theta(\theta) + W_\phi(\phi). \quad (10-55)$$

在哈密顿函数中的坐标 ϕ 是循环的,因此,

$$W_\phi = \alpha_\phi \phi, \quad (10-56)$$

式中 α_ϕ 是积分常数. 利用这种形式的 W , 哈密顿-雅可比方程将化为

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial W_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left[\left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\alpha_\phi^2}{\sin^2 \theta} \right] \\ + 2mV(r) = 2mE, \end{aligned} \quad (10-57)$$

这里,我们已把不变的哈密顿函数明显地记作总能量 E . 注意,对 θ (也仅仅对 θ) 的全部依存关系均已隔离在方括号内的表达式中. 所以哈密顿-雅可比方程符合于式(10-41)的形式,根据那里的论证,可以看出方括号内的量应等于一个常数:

$$\left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\alpha_\phi^2}{\sin^2 \theta} = \alpha_\theta^2. \quad (10-58)$$

最后, W 对 r 的依存关系则由哈密顿-雅可比方程的其余部分给出:

$$\left(\frac{\partial W_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{\alpha_\theta^2}{r^2} = 2m[E - V(r)]. \quad (10-59)$$

因此,哈密顿-雅可比方程中的变量完全分离了. (10-58) 和 (10-59) 两式都不难简化为求积分的问题,至少可以分别为 $W_\theta(\theta)$ 和 $W_r(r)$ 提供形式解.

注意,积分常数 α_ϕ , α_θ , α_1 都具有可以直接认识的物理意义。 α_ϕ 这个量当然是相对于极轴的角动量的常数量值:

$$\alpha_\phi = p_\phi = \frac{\partial W_\phi}{\partial \phi}. \quad (10-60)$$

为了确定 α_θ , 式 (10-58) 可以改写成

$$p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta} = \alpha_\theta^2, \quad (10-58')$$

因而得哈密顿函数式 (10-54) 成为

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{\alpha_\theta^2}{r^2} \right) + V(r). \quad (10-54')$$

把此式与用轨道平面内的极坐标表示的哈密顿函数式 (10-49) 相比,即可看出 α_θ 与总角动量的量值 p_ϕ 相同:

$$\alpha_\theta = p_\phi \equiv l. \quad (10-61)$$

最后, α_1 当然等于总能量 E . 事实上, W 的分量部分的三个微分方程可以看作是三个守恒定理的表述. 式 (10-60) 说明了角动量矢量 \mathbf{L} 的 z 轴分量是守恒的, 而式 (10-58) 表明了角动量量值 l 的守恒, 式 (10-59) 则是能量守恒定理的一种形式.

在这个简单例子中, 开始显示出哈密顿-雅可比方法的某些效能和优点: 只要极少几步运算就能得到 r 对 t 的依存关系和轨道方程 (10-53a 和 b), 而早先要得到这些结果是相当费力的. 有心力问题的各个守恒量也自动地出现. 对于纯粹有心力的问题, 采用其他坐标系, 例如抛物线坐标时, 同样可以完成变量的分离, 而那些守恒量也具有适合于那些特定坐标的形式.

最后, 我们能够用斯特克尔条件求得单个质点标量势函数 V 的最一般形式, 对此, 用球极坐标表示的哈密顿-雅可比方程是可以分离的. 斯特克尔条件的矩阵 ϕ 只与坐标系有关,

与势函数无关. 由于以球极坐标表示的哈密顿-雅可比方程至少对于一种势函数, 即对有心力势函数是可分离的, 可见, 矩阵 ϕ 确实是存在的. 为了回答我们的问题并不需要特殊形式的 ϕ ¹⁾. 再说, 由于 a 根据假设应等于零, 所以我们只要用式 (10-46) 求取最一般的可分离形式的 V . 根据动能的性质 (见第 409 页), T 的对角元为

$$T_{rr} = m, \quad T_{\theta\theta} = mr^2, \quad T_{\phi\phi} = mr^2 \sin^2\theta.$$

根据式 (10-40) 可知, 所求势函数的形式应为

$$V(q) = V_r(r) + \frac{V_\theta(\theta)}{r^2} + \frac{V_\phi(\phi)}{r^2 \sin^2\theta}. \quad (10-62)$$

不难直接证明, 利用这种势函数时, 以球极坐标表示的哈密顿-雅可比方程依然是可以完全分离的.

10-5 一个自由度系统的作用角变量

在许多物理学分支中具有特殊重要性的, 是那些作周期运动的系统. 我们的兴趣通常并不在于轨道的细节, 而在于运动的频率. 处理这样一些系统的极为理想和有效的方法是哈密顿-雅可比步骤的一种变化. 在这种技巧中, 并不是把哈密顿-雅可比方程的解中直接出现的积分常数 α_i 本身选为新动量, 而是用适当定义的常数 J_i , 它们构成由 α_i 的 n 个独立函数组成的一个函数组, 并被称为作用变量.

为简单起见, 这一节中我们将首先考虑只有一个自由度的系统. 今假定系统是保守的, 以致哈密顿函数能写成

$$H(q, p) = \alpha_1.$$

解出动量, 得

$$p = p(q, \alpha_1), \quad (10-63)$$

1) 适用于球极坐标的 ϕ 的实际形式可参阅附录 D.

此式可以看作是哈密顿函数具有常数值 α_1 时系统点在二维空间内描绘出来的轨道方程。“周期运动”一词的含义取决于相空间轨道的特性。可以区分出两种类型的周期运动：

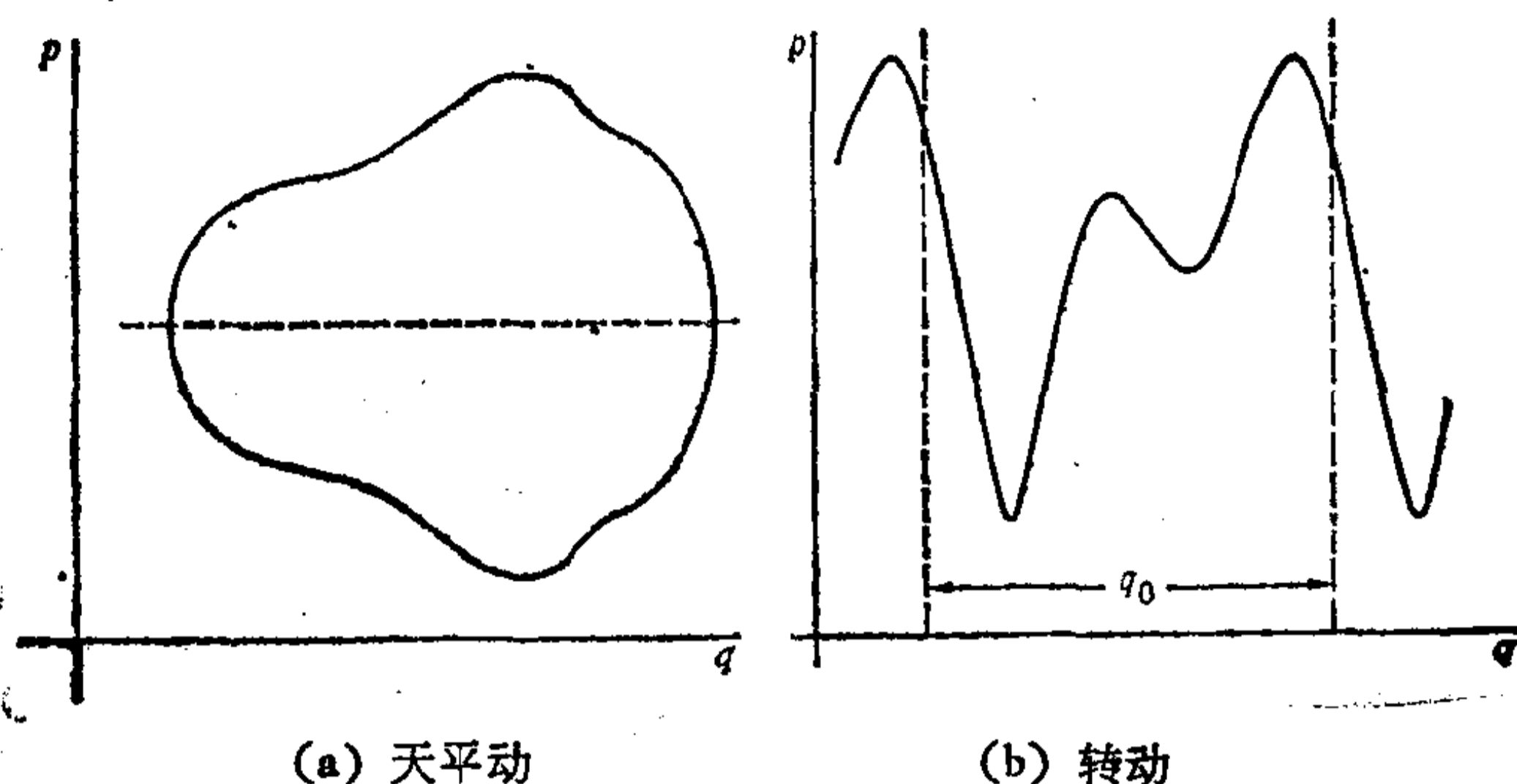


图 10-1 一维系统周期运动中系统点在相空间内的轨道

1. 第一种类型中的轨道是闭合的，如图 10-1(a) 所示，系统点周期地重复它原先经过的各点。因此， q 和 p 都是时间的周期函数，并具有相同的频率。当初始位置处于动能的两个零点之间时，就能得到这种性质的周期运动。虽然对于物理学家来说，更可能想起普通的振荡系统，比如说一维谐振子，但是，这种运动往往是用天文学的名词天平动来称呼的。

2. 在第二种类型的周期运动中，相空间轨道使得 p 是 q 的某个周期函数，其周期为 q_0 ，如图 10-1(b) 所示。或者说，这类运动意味着 q 增加 q_0 时系统点的位形基本上保持不变。最常见的例子是被束缚于绕一给定轴转动的刚体运动，这时的 q 是转动角度，当 q 增加 2π 时，系统状态并无本质上的变化。确实与天平动不一样，这类周期性中的位置坐标不过是一个转动角度，而运动将简单地称为转动¹⁾。 q 值不再有界，而

1) 有时也称为旋转或绕转。

是能够无定限地增加。

提一下在同一个物理系统中有可能出现两种周期性将有助于澄清这些概念。典型的例子是单摆，这里的 q 是偏转角 θ 。如果摆长为 l ，悬挂点处的势能为零，则系统的常值能量为

$$E = \frac{p_{\theta}^2}{2ml^2} - mgl \cos\theta. \quad (10-64)$$

从式 (10-64) 中解出 p_{θ} ，即得系统点在相空间内的路径方程

$$p_{\theta} = \pm \sqrt{2ml^2(E + mgl \cos\theta)}.$$

如果 E 小于 mgl ，那么，只在 $|\theta|$ 小于由方程

$$\cos\theta' = -\frac{E}{mgl}$$

确定的某个边界值 θ' 时才能发生系统的实际运动。在这些条件下，单摆在 $-\theta'$ 和 $+\theta'$ 之间振荡而呈天平动类型的周期运动。系统点将在相空间内沿着图 10-2 中曲线 1 那样的路径移动。然而，如果 $E > mgl$ ，则所有 θ 值都对应于实际运动， θ 能无限制地增加，从而成为转动类型的周期运动。在这种情况下所发生的实际上是单摆的能量足以使它能够摆过竖直位置 ($\theta = \pi$) 而继续运动。图 10-2 的曲线 3 就对应于摆的转动。 $E = mgl$ 的这种极限情况则由图 10-2 的曲线 2 和 2' 来说明。在这种能量情况下，单摆到达竖直位置 ($\theta = \pi$)，但这时的动能为零，即 $p_{\theta} = 0$ 。因此，它处于不稳定的平衡态，原则上讲，它能无限期地保持这种状态。然而只要受到极其轻微的扰动，它就可能沿着曲线 2 或者转向曲线 2' 而继续它的运动——可能沿着这条或那条路径跌落。 $\theta = \pi$ ， $p_{\theta} = 0$ 这一点是哈密顿函数 $H = E(p_{\theta}, \theta)$ 的鞍点，而在相空间内有两条 E 为常数的路径在鞍点处相交。这个实例(幸好这种现象是少见的)可以用来说明所谓歧点现象，数学上对它的兴趣正在不断地增长。

不论对于哪种类型的周期运动，我们都能引进一个新的变量 J 以替代 α_1 作为变换后的(常值)动量. 所谓作用变量 J ,

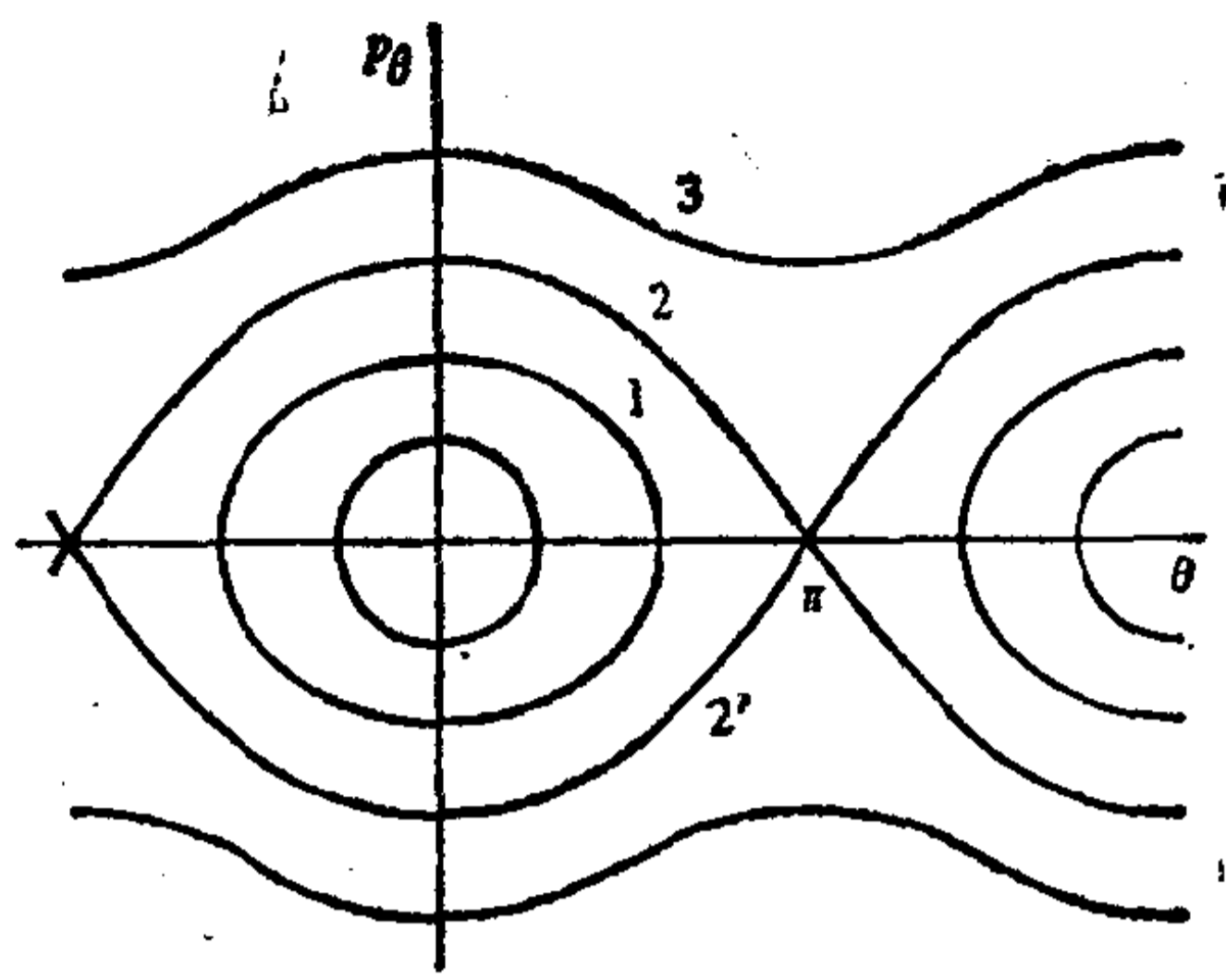


图 10-2 单摆的相空间轨道

它的定义为

$$J = \oint p dq, \quad (10-65)$$

这里的积分是对天平动或转动(视情况而定)的整个周期来计值的. [作用变量这一名称出于式 (10-65) 与节 8-6 的简约作用量的相似性. 注意, J 始终具有角动量的量纲.] 根据式 (10-63) 可知, J 始终只是 α_1 的某个函数:

$$\alpha_1 \equiv H = H(J). \quad (10-66)$$

因此, 哈密顿特征函数能够写成

$$W = W(q, J). \quad (10-67)$$

共轭于 J 的广义坐标称为角变量¹⁾ w , 它由变换方程定义:

$$w = \frac{\partial W}{\partial J}. \quad (10-68)$$

与此相应, w 的运动方程为

1) “作用角变量”的名称首先由 K. Schwarzschild 在一篇划时代的文献 (Sitzungber. der Kgl. Akad, d. Wiss., 1916, p. 548) 中所采用.

$$\omega = \frac{\partial H(J)}{\partial J} = \nu(J), \quad (10-69)$$

式中 ν 仅是 J 的常值函数. 式 (10-69) 的直接解为

$$\omega = \nu t + \beta, \quad (10-70)$$

因而 ω 是时间的线性函数, 与式 (10-29) 的形式完全一样.

至此, 作用角变量只不过表现为一组特定的坐标, 它们是由哈密顿-雅可比方程得出的一般类型的变换坐标. 从式 (10-68) 可以解出作为 ω 和 J 的函数的 q , 它与式 (10-70) 组合起来会给出所求的、作为时间函数的 q 解. 但在这种用法中, 这些变量与 W 产生的其他坐标组比起来并无显著优点. 它们的特殊价值在于能够赋予 ν 以某种物理意义. 今考虑 q 经历一整周天平动或转动时 ω 的变化, 这一变化为

$$\Delta\omega = \oint \frac{\partial\omega}{\partial q} dq. \quad (10-71)$$

根据式 (10-68), 它也能表达成

$$\Delta\omega = \oint \frac{\partial^2 W}{\partial q \partial J} dq. \quad (10-72)$$

由于 J 是常数, 所以对 J 的微商可从积分号内提出:

$$\Delta\omega = \frac{d}{dJ} \oint \frac{\partial W}{\partial q} dq = \frac{d}{dJ} \oint p dq = 1, \quad (10-73)$$

式中利用了 J 的定义方程 (10-65).

式 (10-73) 表明, q 经历整整一个周期时 ω 变化 1. 但从式 (10-70) 可知, 如果 τ 是 q 经历一整周的周期, 则

$$\Delta\omega = 1 = \nu\tau.$$

由此可知, 常数 ν 就是周期的倒数:

$$\nu = 1/\tau, \quad (10-74)$$

亦即它是与 q 的周期运动相关的频率. 因此, 作用角变量的应用提供了一种有效的技巧: 不必求出系统运动的完全解就

可以得出周期运动的频率。由此可知，如果预先知道了一个自由度的系统是周期的（按前面给出的定义），那么，一旦确定了作为 J 的函数的 H ，就能求得系统运动的频率。根据式 (10-69)， H 对 J 的微商能够给出运动的频率 ν 。如果确认式 (10-70) 中的 ν 是频率，则把 ω 称为角变量是显而易见的了。还应该注意，既然 J 具有角动量纲，则共轭于角动量的坐标当然是一个角度¹⁾。

为了说明如何应用作用角变量求得频率，让我们再次考虑一下熟知的线性谐振子问题。根据式 (10-18) 以及定义方程 (10-65)，常值作用变量 J 为

$$J = \oint p dq = \oint \sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2 q^2} dq,$$

式中 α 是常值总能量， ω 则满足关系式 $\omega^2 = k/m$ 。代入

$$q = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}} \sin \theta$$

后，积分简化为

$$J = \frac{2\alpha}{\omega} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta, \quad (10-75)$$

式中所取积分限应对应于 q 的一整周。由于 $\cos^2 \theta$ 在一整周内的平均值等于 $1/2$ ，所以式 (10-75) 将化为

$$J = \frac{2\pi\alpha}{\omega},$$

或者解出 α ，得

$$\alpha \equiv H = \frac{J\omega}{2\pi}. \quad (10-76)$$

1) 由于某些应用的需要，在天体力学文献中把作用变量定义为式 (10-65) 给出之值的 $(2\pi)^{-1}$ 倍。根据式 (10-73)，相应的角变量等于我们的定义的 2π 倍，因而角频率 ω 代替了 ν 。然而，我们将始终坚持前面给出的物理学中常用的定义。

所以振荡频率等于

$$\frac{\partial H}{\partial J} = \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (10-77)$$

这是线性谐振子频率的惯用公式。用 J 和 ω 写出式 (10-21) 和式 (10-22) 这两个解, 虽然对于求频率是完全不必要的, 但却有启发意义(也有助于将来的应用)。首先将看到的是, 如果重新适当地定义积分常数, 则根据式 (10-77) 和式 (10-70) 可知, 组合量 $\omega(t + \beta)$ 与 $2\pi\omega$ 相同。因此, q 的解式 (10-21) 和 p 的解式 (10-22) 的形式分别为

$$q = \sqrt{\frac{J}{\pi m \omega}} \sin 2\pi\omega, \quad (10-78)$$

$$p = \sqrt{\frac{mJ\omega}{\pi}} \cos 2\pi\omega. \quad (10-79)$$

注意, 式 (10-78) 和式 (10-79) 也可以看作是从正则变量组 (ω, J) 到正则变量组 (q, p) 的变换方程。

10-6 完全可分离系统的作用角变量¹⁾

对于多自由度系统的一定种类的运动, 只要哈密顿-雅可比方程中有一组或一组以上坐标是完全可分离的, 那么, 我们也能够引进作用角变量。象前面一样, 我们将只讨论保守系统, 所以将采用哈密顿特征函数。完全可分离性意味着正则变换方程的形式为

$$p_i = \frac{\partial W_i(q_i; \alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial q_i}, \quad (10-80)$$

此式所提供的 p_i 是 q_i 和 n 个积分常数 α_j 的函数:

$$p_i = p_i(q_i; \alpha_1, \dots, \alpha_n). \quad (10-81)$$

1) 除非另作说明, 否则本节将不采用求和约定。

式(10-81)是式(10-63)的对应表达式,后者适用于一个自由度的系统.可以认为,这里的式(10-81)代表了系统点在相空间内 (q_i, p_i) 平面上的投影的轨道方程.当所有 (q_i, p_i) 对的轨道方程所描述的是 q_i 的闭合轨道(如图10-1a所示的天平动)或周期函数(如图10-1b所示转动)时,我们就能够定义该系统的作用角变量.

应该强调的是,运动的这种特性并不意味着各个 q_i 和 p_i 都必然是时间的周期函数,即它们在固定的时间间隔内重复它们的数值.甚至当每一组分离后的 (q_i, p_i) 确实都是这种意义上的周期函数时,总的系统运动也不一定是周期的.例如,在三维谐振子中,沿着三个笛卡儿轴的运动频率可以完全不一样.在这样的例子中,质点的整个运动显然可能不是周期的.如果不同的频率不是互为有理分数,质点不会沿着空间内某一闭合曲线运动,而将描绘出开放的“李萨如图”.我们把这种运动说成是多重周期的.作用角变量的优越性在于它们不必知道运动的完全解,就能计算出多重周期运动中的所有频率.

与式(10-65)相类似,作用变量 J_i 是用对 (q_i, p_i) 平面内轨道的整个周期所求线积分来定义的:

$$J_i = \oint p_i dq_i. \quad (10-82)$$

如果有一个分离坐标是循环的,那么它的共轭动量是常数.相空间的 q_i, p_i 平面内的相应轨道将是一条水平直线,这看来并非周期运动的性质.实际上,这种运动可以看作是转动型周期性的一种极限情况,这时, q_i 可以取一任意周期.由于转动型周期运动中的坐标始终是一个角度,这种循环的 q_i 总是具有 2π 这一固有周期.与此相应,对应于循环角坐标的作用变量定义中的积分是从0到 π 计算的,因而对于所有循

环变量都有

$$J_i = 2\pi p_i. \quad (10-83)$$

根据式(10-80), J_i 也能表达成

$$J_i = \oint \frac{\partial W_i(q_i; \alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial q_i} dq_i. \quad (10-84)$$

由于这里的 q_i 只是一个积分变量, 所以每一个作用变量 J_i 只是哈密顿-雅可比方程解中 n 个积分常数的函数。其次, 根据各对变量 (q_i, p_i) 的独立性可知, J_i 的全体构成了 α_i 的 n 个独立函数, 因而适合于用作一组新的常值动量。把 α_i 表达成作用变量的函数, 即能把特征函数 W 表达成

$$\begin{aligned} W &= W(q_1, \dots, q_n; J_1, \dots, J_n) \\ &= \sum_j W_j(q_j; J_1, \dots, J_n), \end{aligned}$$

而哈密顿函数只是 J_i 的函数:

$$H = \alpha_1 = H(J_1, \dots, J_n). \quad (10-85)$$

就象一个自由度的系统那样, 我们能够用如下形式的变换方程定义共轭角变量 w_i :

$$w_i = \frac{\partial W}{\partial J_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial W_j(q_j; J_1, \dots, J_n)}{\partial J_i}. \quad (10-86)$$

w_i 满足运动方程

$$\dot{w}_i = \frac{\partial H(J_1, \dots, J_n)}{\partial J_i} = \nu_i(J_1, \dots, J_n). \quad (10-87)$$

由于 ν_i 是常数, 即仅是作用变量的函数, 所以角变量都是时间的线性函数

$$w_i = \nu_i t + \beta_i. \quad (10-88)$$

注意, 各别 w_i 随时间的增加率一般是不同的。

常数 ν_i 可以确认为多重周期运动的频率, 但要证明这种关系, 比一个自由度的周期系统更为复杂。变换到 (w, J) 变

量组的变换方程意味着每个 q_i (和 p_i) 是常数 J_i 和变量 w_i 的函数。我们想知道的是 q 究竟是 w 的哪种形式的数学函数。为此, 让我们来研究一下, 当每个 q_i 变量经历一个整数 (m_i) 周天平动或转动时的特定 w_i 的变化。在实施这一纯数学的步骤时, 我们显然没有依据系统的时间进程。时间的流逝仿佛中止了, 而每一个 q 则好象是由于人为的原因, 独立地经历了它们的若干周运动。事实上, 我们所说的就是第一章的虚位移, 因而将相应地用 δw_i 表示 w_i 的无限小变化, 当 q_i 发生无限小变化时, 这一变化为

$$\delta w_i = \sum_j \frac{\partial w_i}{\partial q_j} dq_j = \sum \frac{\partial^2 W}{\partial J_i \partial q_i} dq_i,$$

上式利用了式 (10-86)。除了 W 的 w_i 成分外, 对 q_i 的微商为零, 因此, 根据式 (10-80), δw_i 将化为

$$\delta w_i = \frac{\partial}{\partial J_i} \sum_j p_j(q_j, J) dq_j. \quad (10-89)$$

式 (10-89) 中的 δw_i 是一些独立贡献之和, 它们都只包含 q_i 的运动。所以运用特定技巧得到的 w_i 的总变化为

$$\Delta w_i = \sum_j \frac{\partial}{\partial J_i} \oint_{m_j} p_j(q_j, J) dq_j.$$

对 J_i 的微分算符可放在积分号外, 因为在 q_i 的整个循环运动中, 所有的 J 当然都是常数。各积分号下的符号 m_j 表明积分是对 q_j 的 m_j 周计值的。但根据作用变量的定义, 每个积分正好都等于 $m_j J_j$ 。由于所有的 J 都是独立的, 因此

$$\Delta w_i = m_i. \quad (10-90)$$

还将看到, 如果任何一个 q_i 并不经历整数周, 则在对 q_i 所作的积分中将会余下一个需对分数周作出的积分, 而 Δw_i 也不会有整数值。如果把 w 组和 m 组分别看作是矢量 \mathbf{w} 和 \mathbf{m} , 式 (10-90) 将可表达成

$$\Delta \mathbf{w} = \mathbf{m}. \quad (10-90')$$

首先假设可分离运动都是天平动类型的,以致各个 q_i 以及各个 p_i 在完成一整周时都将回到它们的初始值. 式 (10-90') 所描述的结果现在可表述为: η (q 和 p 的矢量) 是 \mathbf{w} 的一个函数, 它使变化量 $\Delta \eta = 0$ 对应于变化量 $\Delta \mathbf{w} = \mathbf{m}$, 即具有整数值的矢量. 由于 q_i 所选定的运动的周数是任意的, 所以除了 $m_i = 1$ 外, \mathbf{m} 可以取作零, 而 η 的全部分量则保持不变或者回复到它们原先的数值. 因此, 在最为一般的情况下, η 的分量必定是各个 w_i 的周期函数, 周期等于 1; 也就是说, q 和 p 是具有单位周期的、那些 w 的多重周期函数. 这种多重周期函数总可以用一个多重傅里叶展开式表示, 譬如对 q_k , 这种展开式为

$$q_k = \sum_{i_1=-\infty}^{\infty} \sum_{i_2=-\infty}^{\infty} \dots, \quad \dots, \\ \sum_{i_n=-\infty}^{\infty} a_{i_1, \dots, i_n}^{(k)} e^{2\pi i(i_1 w_1 + i_2 w_2 + \dots + i_n w_n)}, \quad (\text{天平动}), \quad (10-91)$$

式中的 j 是从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的 n 个整数下标. 我们也可以把那组 j 看作是与 \mathbf{w} 处于同一个 n 维空间内的一个矢量, 这样, 该展开式就能表达成更为紧凑的形式

$$q_k = \sum_j a_j^{(k)} e^{2\pi i j \cdot \mathbf{w}} \quad (\text{天平动}). \quad (10-91')$$

如果我们把式 (10-88) 同样写成一个矢量方程:

$$\mathbf{w} = \nu t + \beta, \quad (10-88')$$

那么, q_k 对时间的函数关系可表达成

$$q_k(t) = \sum_j a_j^{(k)} e^{2\pi i j \cdot (\nu t + \beta)} \quad (\text{天平动}). \quad (10-92)$$

注意, $q_k(t)$ 一般不是 t 的周期函数. 除非各种 ν_i 是可公度的, 即互为有理倍数的, 否则, q_k 不会按固定的时间间隔重复

它的数值¹⁾。最后应记住的是,根据傅里叶系数的标准步骤可以得到系数 $a_j^{(k)}$, 即它们是由对 \mathbf{w} 空间内的各个单元所求的多重积分给出的:

$$a_j^{(k)} = \int_0^1, \dots, \int_0^1 q_k(\mathbf{w}) e^{-2\pi i j \cdot \mathbf{w}} (d\mathbf{w}). \quad (10-93)$$

这里的 $(d\mathbf{w})$ 代表 w_i 的 n 维空间内的体元。

当运动具有转动性质时,分离后的成对变量 (q_k, p_k) 经一整周后, q_k 坐标并不回复到它原来的数值,而是增加它的一个周期值 q_{0k} 。所以这种转动坐标甚至连本身也不是多重周期的。但已知道, w_k 在一周时间内将增加 1。所以函数 $q_k - w_k q_{0k}$ 将回复到它的初始值,而且象天平动坐标一样,它是具有单位周期的、所有 w 的一个多重周期函数。所以我们将能够把该函数展开成一个象式 (10-91) 那样的多重傅里叶级数:

$$q_k - w_k q_{0k} = \sum_j a_j^{(k)} e^{2\pi i j \cdot \mathbf{w}} \quad (\text{转动}) \quad (10-93')$$

或

$$q_k = q_{0k}(\nu_k t + \beta_k) + \sum_j a_j^{(k)} e^{2\pi i j \cdot (\mathbf{w}t + \theta)} \quad (\text{转动}). \quad (10-94)$$

因此,总是有可能从一个转动坐标导出一个多重周期函数,然后可以完全象天平动坐标那样来处理。为简化进一步的讨论,我们基本上将只讨论天平动类型的运动。

根据所设运动的性质,可分离动量坐标 p_k 也是 w 的多重周期函数,因而也能展开成类似于式 (10-91) 的多重傅里叶级数。由此可见,几个不同的成对变量 (q_k, p_k) 的任何函数也将是 w 的多重周期函数,并能表达成

1) 作为 t 的一个函数, q_k 可以称为准周期函数。

$$\begin{aligned}
 f(q, p) &= \sum_j b_j e^{2\pi i j \cdot w} \\
 &= \sum_j b_j e^{2\pi i j \cdot (\nu t + \beta)}. \quad (10-95)
 \end{aligned}$$

例如,当系统内质点的笛卡儿坐标本身并不是分离坐标时,它们依然能以式(10-95)的形式表达成时间的函数。

虽然式(10-91)和式(10-92)代表了与问题所设的性质相一致的那种最一般的运动形式,但并非所有的系统都会表现出这种充分的普遍性。特别对于可用来说明作用角变量应用的大多数简单问题,每一个分离坐标 q_k 都只是它相应的 ω_k 的函数。在这种情况下, q_k 是 ω_k (因而是时间)的某个周期函数,而多重傅里叶级数则简化为单个傅里叶级数:

$$\begin{aligned}
 q_k &= \sum_i a_i^{(k)} e^{2\pi i j \omega_k} \\
 &= \sum_i a_i^{(k)} e^{2\pi i j (\nu_k t + \beta_k)}. \quad (10-96)
 \end{aligned}$$

照第六章的说法,这些问题中的 q_k 事实上都是系统的简正坐标。然而,即使 q 的运动能够如此地简化,也常会遇到这样的情况:所有的 q (譬如说笛卡儿坐标)的函数依然是 ω 的多重周期函数,而且必然表达成式(10-95)的形式。如果不同频率 ν_k 是不可公度的,则这些函数不会是时间的周期函数。二维各向异性谐振子的运动为这些论述提供了一个方便而又熟悉的例子。假设在一特定的笛卡儿坐标系内,哈密顿函数为

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{1}{2m} [(p_x^2 + 4\pi^2 m^2 \nu_x^2 x^2) \\
 &\quad + (p_y^2 + 4\pi^2 m^2 \nu_y^2 y^2)].
 \end{aligned}$$

那么,这些笛卡儿坐标就是合适的分离变量,每个坐标都表现为简谐运动,频率分别为 ν_x 和 ν_y 。因此, x 和 y 的解将是式(10-96)那样形式特别简单的单个傅里叶展开式。今假设这

些坐标绕 z 轴转过 45° , 则沿着新的 x' , y' 轴的分运动将是

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{2}} [x_0 \cos 2\pi(\nu_x t + \beta_x) \\ &\quad + y_0 \cos 2\pi(\nu_y t + \beta_y)], \\ y' &= \frac{1}{\sqrt{2}} [y_0 \cos 2\pi(\nu_y t + \beta_y) \\ &\quad - x_0 \cos 2\pi(\nu_x t + \beta_x)]. \end{aligned} \quad (10-97)$$

如果 ν_x/ν_y 是一有理数, 则这两个表达式是完全周期性的, 这对应于闭合的李萨如图。但若 ν_x 和 ν_y 是不可公度的, 则李萨如图形决不会重复描绘, 式(10-97)就是(10-95)形式的多重周期级数展开式的简单例子。

即使 q_k 是所有 ω 的某个多重周期函数, 我们也会直觉地感到在 q_k 及其相应的 ω_k (因而还有 ν_k) 之间必定有着某种特殊的关系。总之, 以式(10-90)为终结的论证表明, 当 q_k 单独经历一整周时, 只有 ω_k 增加了 1, 其他的 ω 则回复到它们的初始值。直到 1961 年, 文蒂 (J. Vinti) 的精确而严格的叙述成功地表达了这种直觉¹⁾。假设在时间间隔 T 内包含有 q_k 的 m 个整周加上一个分数周。那么, 由于 q_k 并不是 t 的周期函数。相继各周所需要的时间一般是不相同的。文蒂在数论中一个定理的基础上指出, 当 T 无限制增加时,

$$L \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{m}{T} = \nu_k. \quad (10-98)$$

所以, 即使整个运动比频率为 ν_k 的简单周期函数更为复杂, q_k 的平均运动频率也始终为 ν_k 。

除去所有频率都是可公度的情况, 总能够由生成函数 W 构成一个多重周期函数。 J_i 的定义方程 (10-84) 事实上表

1) 可参阅 J. Vinti, *J. Res. Nat. Bur. Standards*, **65B**, 131 (1961). 还可参阅 R. Garfinkel, *Space Mathematics*, Part 1, p. 57, 1966.

明,当 q_i 经历一整周时,即 w_i 变化 1 时,特征函数将增加 J_i . 可见,各 w_k 增加 1 而其余角变量都不变时,函数

$$W' = W - \sum_k w_k J_k \quad (10-99)$$

也保持不变. 所以式 (10-99) 代表了一个多重周期函数,它能借助 w_i (或频率 ν_i) 展开为 (10-95) 形式的级数. 由于角变量的变换方程为

$$w_k = \frac{\partial W}{\partial J_k},$$

所以可认为式 (10-99) 定义了从 q, J 基到 q, w 基的勒让德变换. 事实上,把它同式 (9-15) 相比,再注意到式 (9-12) 就可看出,如果 $W(q, J)$ 是 $F_2(q, p)$ 形式的生成函数,则 $W'(q, w)$ 将是 $F_1(q, Q)$ 类型的生成函数,在两种情况下,都能从 (q, p) 变量变换到 (w, J) 变量. 尽管 W' 生成的与 W 生成的是相同的变换,但它当然不是哈密顿-雅可比方程的解¹⁾.

已经强调指出,只有当频率 ν_i 不是互为有理分数时,系统位形才是多重周期的. 否则,在足够长的时间后,系统位形将会重复,因而仍是周期的. 从形式上看,所有频率是可公度的条件是要有 $n-1$ 个形式为

$$\sum_{i=1}^n j_i \nu_i = 0 \quad (10-100)$$

的关系式,式中的 j_i 都是整数. 解出这些方程,能把任何一个

1) 这里是用简单周期的可分离坐标定义作用角变量的. 因而表明,作为一个整体的系统运动一般是多重周期的. 应该指出这个过程有可能反过来,肯定了系统运动是多重周期的,就能引进作用角变量来保证系统位形和生成函数 $W'(q, w)$ 是具有单位周期的、 w 的多重周期函数,而且哈密顿函数中所有的 w 都是循环的. 这时根本不必涉及分离坐标. 进一步细节可参阅 Born, *The Mechanics of the Atom*, 第 15 节.

ν_i 表达成任何其他频率的有理分数。当各基本频率之间只有 m 个 (10-100) 形式的关系式时, 就说系统是 m -重简并的。如果 m 等于 $n - 1$, 以致运动是周期的, 那么系统是完全简并的。因此, 只要系统点的轨道是闭合的, 运动就是完全简并的。

简并性与哈密顿-雅可比方程有多少种坐标可以分离之间有着非常有趣的联系。能够证明, 非简并系统的系统点路径将完全填满位形空间和相空间内的有限区域 (参阅 Born, *The Mathematics of the Atom*, 附录 1)。假设在所讨论的问题中, 分离坐标中有一个坐标的运动是完全周期性的, 从而表明它与其他坐标的运动没有联系。那么, 系统点的路径就总体而言必定被限于常值 q_i 和 p_i 的曲面内, 它们标志着分离变量振荡运动的界限。(只要把所有的角度都限制在 $0 \sim 2\pi$ 区域内, 这样的论证就不难推广到转动的情况。) 所以, 这些表面限定了空间内为系统点轨道稠密填满的体积。显然, 非简并系统内变量的分离必定是唯一的, 哈密顿-雅可比方程不可能在两种不同的坐标系内都是可分离的 (象尺度变换这样的毫无意义的变化除外)。因此, 如果运动对一组以上坐标是可分离的, 一般即证明这个系统是简并的¹⁾。

两个或两个以上频率相等时, 会出现最简单的简并性。如果三维谐振子中有两个力常数相等, 则相应的频率相等, 系统即是单一简并的。在各向同性线性谐振子中, 各个方向上的力常数都相同, 所有频率都相等, 所以系统是完全简并的。

只要出现简并性, 基本频率将不再独立, 也毋需用全部 n

1) 在某些反常的情况中, 哈密顿函数可能在好几个坐标系内是可分离的, 然而, 只有当轨道被包含在一个特定的子域内时, 它们才是闭合的, 即简并的。如果轨道穿越某些界限, 将会出现突变。参阅 E. Onofri 和 M. Pauri, *Jour. Math. Phys.*, **14**, 1106 (1973)。对于“局部”简并性的这些限制, 在可微而又连续的通常的哈密顿函数中是不会出现的。

个频率来描述系统的周期运动。确实， m 个简并条件可使频率数减少为 $n - m$ 个，这时就说系统的运动是 $n - m$ 重周期运动。借助于作用角变量的点变换，能够最理想地实现频率的归并。 m 个简并性条件能以概括的形式表达成

$$\sum_{i=1}^n i_{ki} \nu_i = 0 \quad k = 1, \dots, m. \quad (10-101)$$

今考虑一个从 (ω, J) 到 (ω', J') 的点变换，其生成函数为[见式(9-26)式，那里采用了求和约定]

$$F_2 = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n J'_k j_{ki} \omega_i + \sum_{k=m+1}^n J'_k \omega_k. \quad (10-102)$$

变换后的坐标为

$$\begin{aligned} \omega'_k &= \sum_{i=1}^n i_{ki} \omega_i & k &= 1, \dots, m, \\ \omega'_k &= \omega_k & k &= m+1, \dots, n. \end{aligned} \quad (10-103)$$

与此相应，新的频率为

$$\begin{aligned} \nu'_k &= \dot{\omega}'_k = \sum_{i=1}^n i_{ki} \nu_i = 0 & k &= 1, \dots, m, \\ &= \nu_k & k &= m+1, \dots, n. \end{aligned} \quad (10-104)$$

因此在变换后的坐标中有 m 个频率等于零，剩下的只有一组 $n - m$ 个独立频率。显然，系统位形是基本周期为1的、 ω'_k 坐标的多重周期函数，在此意义上，新的 ω'_k 也能称为角变量。相应的常值作用变量则是作为 n 个变换方程的解给出的，即

$$J_i = \sum_{k=1}^m J'_k j_{ki} + \sum_{k=m+1}^n J'_k \delta_{ki}. \quad (10-105)$$

零值频率对应于傅里叶展开式中的常数因子。当然，只要指数 i_i 满足简并条件，这些频率也会以 ν 出现在原有的傅里叶级数式(10-91)中。由于

$$\nu'_i = \frac{\partial H}{\partial J'_i},$$

哈密顿函数必定与相应频率为零的作用变量 J'_i 无关。所以在完全简并系统内，哈密顿函数可以只与一个作用变量相关。

应该注意，哈密顿特征函数 W 也可以用作从 (q, p) 组到 (w', J') 组这种变换的生成函数。由于 J' 量是 n 个独立常数，所以原来的积分常数可以用 J' 组表示，而 W 也作为 $W(q, J')$ 来给出。在这种形式中，它是变换到一组新的正则变量的生成函数，对于这些变量， J' 量是正则动量。但是根据 (10-102) 形式的 F_2 生成的点变换可以知道， w' 共轭于 J' 。由此可知， $W(q, J')$ 生成的新坐标必定是 w' 组，其变换方程为

$$w'_i = \frac{\partial W}{\partial J'_i}. \quad (10-106)$$

[在式 (10-102) 的代数结构基础上作出的式 (10-106) 的更为正式证明可参阅习题 17.]

许多与简并性有关的现象可以用一个质点在平方反比律有心力场中的有界运动问题来说明。对这一问题的讨论还使我们有机会说明怎样把作用角技巧应用于一些特定的系统，以及它与玻尔量子力学和天体力学的关联。因此，下一节将专门讨论以作用角变量表述的开普勒问题。

10-7 用作用角变量描述的开普勒问题¹⁾

为了揭示解的所有性质，我们宁可研究空间运动，而不利用早已知道的平面内轨道的知识。采用球极坐标时，开普勒问题成了节 10-4 中对空间有心力运动的一般论述的特殊情

1) 从这里开始重新恢复求和约定。

况。在这里，可以直接用(10-54)到(10-61)各式，只要遇到 $V(r)$ 时，就以它的特殊形式代替：

$$V(r) = -k/r. \quad (10-107)$$

已经证明，具有这种势函数的哈密顿-雅可比方程用球极坐标时是完全可分离的。我们将只讨论有界的情况，亦即 $E < 0$ 的情况。这样，每个坐标的运动都是周期性的—— r 和 θ 的天平动以及 ϕ 的转动。因此，满足了应用作用角变量的条件，我们能够在定义方程(10-84)的基础上构想作用变量。根据式(10-56)可知，

$$J_\phi = \oint \frac{\partial W}{\partial \phi} d\phi = \oint \alpha_\phi d\phi. \quad (10-108a)$$

同样，根据式(10-58)可知，

$$J_\theta = \oint \frac{\partial W}{\partial \theta} d\theta = \oint \sqrt{\alpha_\theta^2 - \frac{\alpha_\phi^2}{\sin^2 \theta}} d\theta. \quad (10-108b)$$

最后，根据式(10-59)， J_r 的积分为

$$\begin{aligned} J_r &= \oint \frac{\partial W}{\partial r} dr \\ &= \oint \sqrt{2mE + \frac{2mk}{r} - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}} dr. \end{aligned} \quad (10-108c)$$

初次积分是微不足道的；在一整转中， ϕ 通过 2π 弧度，所以

$$J_\phi = 2\pi\alpha_\phi = 2\pi p_\phi. \quad (10-109)$$

这一结果早就预料到了，因为在 H 中， ϕ 是一个循环坐标，而式(10-109)只不过是(对应于循环坐标的)作用变量的方程(10-83)的特殊情况。式(10-108b)中的积分可通过多种途径来完成；这里将概述一下只涉及基本积分规则的一种方法。如果用 i 代表总角动量矢量的极角，因而

$$\cos i = \frac{\alpha_\phi}{\alpha_\theta}, \quad (10-110)$$

那么,式(10-108b)也能表达成

$$J_{\theta} = \alpha_{\theta} \oint \sqrt{1 - \cos^2 i \csc^2 \theta} d\theta.$$

积分的整个回路指的是 θ 从极限值 $-\theta_0$ 变到 $+\theta_0$ 然后再回到 $-\theta_0$, 这里, $\sin \theta_0 = \cos i$ 或 $\theta_0 = (\pi/2) - i$. 因此, 回路积分可以写成从 0 到 θ_0 所求积分的四倍, 或者经某种处理后得

$$J_{\theta} = 4\alpha_{\theta} \int_0^{\theta_0} \csc \theta \sqrt{\sin^2 i - \cos^2 \theta} d\theta.$$

采用

$$\cos \theta = \sin i \sin \phi$$

这种置换后, 这一积分变换到

$$J_{\theta} = 4\alpha_{\theta} \sin^2 i \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \phi d\phi}{1 - \sin^2 i \sin^2 \phi}.$$

最后, 采用

$$u = \tan \phi$$

这样的置换, 使积分成为

$$\begin{aligned} J_{\theta} &= 4\alpha_{\theta} \sin^2 i \int_0^{\infty} \frac{du}{(1+u^2)(1+u^2 \cos^2 i)} \\ &= 4\alpha_{\theta} \int_0^{\infty} du \left[\frac{1}{1+u^2} - \frac{\cos^2 i}{1+u^2 \cos^2 i} \right]. \quad (10-111) \end{aligned}$$

在这一最后形式中只包含一些熟知的积分, 最后结果为¹⁾

$$J_{\theta} = 2\pi\alpha_{\theta} [1 - \cos i] = 2\pi(\alpha_{\theta} - \alpha_{\phi}). \quad (10-112)$$

现在能够把 J_r 的最后积分表达成

$$J_r = \oint \sqrt{2mE + \frac{2mk}{r} - \frac{(J_{\theta} + J_{\phi})^2}{4\pi^2 r^2}} dr. \quad (10-113)$$

1) 在计算式(10-111)的最后一个被积函数中的第二项积分时, 事先认为 $\cos i$ 是正值. 这总是可能的, 因为问题中不存在特别适合作为 z 轴的优先方向, 因此可以任意选定. 如果 $\cos i$ 为负, 则式(10-112)中 α_{ϕ} 前面的符号应该为正. 在往后公式中引起的变化可参阅习题 23.

完成积分后,能用这一方程解出以三个作用量 J_ϕ, J_θ, J_r 表达的能量 $E \equiv H$. 将会看到, J_ϕ 和 J_θ 在 E 中只能以 $J_\theta + J_\phi$ 的组合形式出现,因此,相应的频率 ν_ϕ 和 ν_θ 必然相等,这意味着它具有简并性. 这一结果并未涉及到有心力的平方反比律性质;有心力产生的任何运动至少是单一简并的. 当然,这种简并性是运动被限制在一个垂直于恒定角动量矢量 \mathbf{L} 的平面内的结果. 在这一平面内的运动意味着 θ 和 ϕ 是相互关联的: 当 ϕ 通过整整 2π 弧度时, θ 将在两个极限值 $(\pi/2) \pm i$ 之间通过一整周. 因此, θ 和 ϕ 的频率有必要相等.

式 (10-113) 所涉及的积分可以用基本积分法计算,但以留数法最为理想也最快,这是索末菲最先采用的方法. 为了顾及已经熟知这种方法的读者,我们只概略地列出求积式 (10-113) 的步骤. 当然,只有当 E 为负值时才会出现有界运动(见节 3-3),而且由于被积函数等于 $p_r = m\dot{r}$,所以运动的范围将由根号内表达式的根 r_1 和 r_2 确定. 如果象图 3-6 所示, r_1 是内界,则 r 的一个整周将包括从 r_1 到 r_2 再回到 r_1 . 在从 r_1 到 r_2 的向外的一半路径中, p_r 为正,所以我们应取正的平方根. 在回到 r_1 的路径中, p_r 是负的,我们必须相应地取负的平方根. 所以,积分包含着双值函数的两个分支,并以 r_1 和 r_2 作为分支点. 结果,复平面能用黎曼曲面的一叶来表示,它沿着实轴从 r_1 到 r_2 是断开的(如图 10-3 所示).

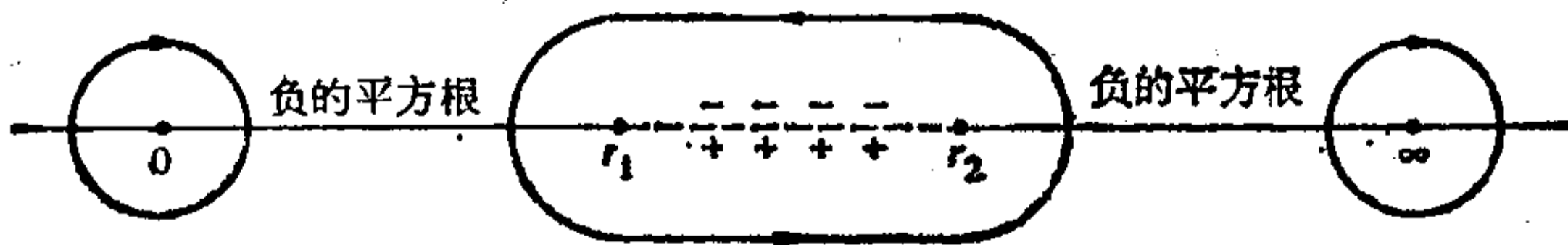


图 10-3 实轴邻域内的 r 复平面;指出了计算 J 时的积分路径

由于积分路径包围了两支点之间的那段线段,所以不能直接应用留数法. 然而,我们可以设想积分路径包围了复平

面的所有其余部分，这样，积分将取相反的（即顺时针的）方向¹⁾。在此区域内，被积函数是单值的，这样就不会妨碍留数法的应用。只会出现两个奇点：原点和无限远点，在这种地方的积分路径可以变形为包围这两点的顺时针描绘的圆周。我们在研究 r_1 邻域内的函数特性时已看到，在实轴上小于 r_1 的区域内，被积函数中平方根前的符号应为负。如果被积函数表达成

$$-\sqrt{A + \frac{2B}{r} - \frac{C}{r^2}},$$

则原点处的留数为

$$R_0 = -\sqrt{-C}.$$

在实轴上大于 r_2 的区域内，平方根的符号为正，这时可把积分变量变为 $z = r^{-1}$ 这一标准做法来求得留数，亦即把积分表达成

$$-\oint \frac{1}{z^2} \sqrt{A + 2Bz - Cz^2} dz. \quad (10-114)$$

再把它在 $z = 0$ 附近展开，即得留数

$$R_\infty = -B/\sqrt{A}.$$

总的积分是两个留数之和的 $-2\pi i$ 倍：

$$J_r = 2\pi i (\sqrt{-C} + B/\sqrt{A}), \quad (10-115)$$

或者代入系数 A , B 和 C ，即得

$$J_r = -(J_\theta + J_\phi) + \pi k \sqrt{\frac{2m}{-E}}. \quad (10-116)$$

式 (10-116) 给出了 H 对作用变量的函数依存关系，解出

1) 为使这一观点变得形象化，可以假想复平面被立体地投影在一个球面上，原点在南极、 ∞ 点在北极。实轴成了连接两极的子午圈。球面上任一闭合积分路径都将把球面分成两个区域。于是，可认为积分路径包围了其中的一个区域，这视积分方向而定。

E , 得

$$H \equiv E = - \frac{2\pi^2 m k^2}{(J_r + J_\theta + J_\phi)^2}. \quad (10-117)$$

由此可以看到, J_θ 和 J_ϕ 确实象预料的那样, 只能以 $J_\theta + J_\phi$ 这样的组合形式出现. 甚至所有三个作用变量也只能以 $J_r + J_\theta + J_\phi$ 的形式出现. 因此, 所有频率都相等, 运动是完全简并的. 这一结果也能预先料到, 因为在平方反比律支配下, 能量为负值时的轨道是闭合的. 而具有闭合轨道的运动总是周期运动, 因而是完全简并的. 如果象相对论性改正后的结果那样, 有心力包含有 r^{-3} 项, 轨道将不再闭合, 而是取进动椭圆的形式. 在这种情况下, 将消去一种简并性, 但运动仍是单一简并的, 因为对于一切有心力, $\nu_\theta = \nu_\phi$. 在这里, 运动的一个频率为

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{\partial H}{\partial J_r} = \frac{\partial H}{\partial J_\theta} = \frac{\partial H}{\partial J_\phi} \\ &= \frac{4\pi^2 m k^2}{(J_r + J_\theta + J_\phi)^2}. \end{aligned} \quad (10-118)$$

如果根据式 (10-117) 用能量计算各 J 之和, 则轨道的周期为

$$\tau = \pi k \sqrt{\frac{m}{-2E^3}}. \quad (10-119)$$

只要记住长半轴 $a = -k/2E$, 就可以知道这一周期公式与开普勒第三定律式 (3-71) 是一致的.

遵循前节中概述的步骤, 通过变换到一组新的作用角变量的正则变换, 可以消去简并频率. 把简并条件表达成

$$\nu_\phi - \nu_\theta = 0, \quad \nu_\theta - \nu_r = 0,$$

合适的生成函数为

$$F = (\omega_\phi - \omega_\theta)J_1 + (\omega_\theta - \omega_r)J_2 + \omega_r J_3. \quad (10-120)$$

新的角变量为

$$\omega_1 = \omega_\phi - \omega_\theta, \quad \omega_2 = \omega_\theta - \omega_r, \quad \omega_3 = \omega_r, \quad (10-121)$$

象设想的一样,有两个新频率 ν_1 和 ν_2 等于零. 由变换方程能求得新的作用变量

$$J_\phi = J_1, \quad J_\theta = J_2 - J_1, \quad J_r = J_3 - J_2,$$

由此得关系式

$$J_1 = J_\phi, \quad J_2 = J_\phi + J_\theta, \quad J_3 = J_\phi + J_\theta + J_r. \quad (10-122)$$

用这些变换后的变量能够把哈密顿函数表达成

$$H = -\frac{2\pi^2 mk^2}{J_3^2}, \quad (10-123)$$

这种形式中所包含的作用变量的相应频率都不等于零.

如果我们从一开始就利用我们原有的知识,认为有界开普勒问题的运动是平面内一个特定的闭合轨道,则能非常迅速而又简单地计算出 J_θ 和 J_r 的积分. 对于 J_θ 的积分,我们可以应用范扶累克提出的步骤. 应该记得,广义坐标的定义方程并不显含时间时,则

$$p_i \dot{q}_i = 2L_2 = 2T.$$

又知道运动只限于某个平面,所以我们能够用球极坐标或平面极坐标 (r, ϕ) 表示动能 T . 由此可得

$$2T = p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} + p_\phi \dot{\phi} = p_r \dot{r} + p\dot{\phi}, \quad (10-124)$$

式中 $p(\equiv l)$ 是总角动量的量值. 因此, J_θ 的定义也能表达成

$$J_\theta \equiv \oint p_\theta d\theta = \oint p d\phi - \oint p_\phi d\phi.$$

因为 θ 和 ϕ 的频率相等,所以当 θ 经历天平动的一整周时, ϕ 和 ϕ 都变化 2π , 而定义 J_θ 的积分将化为

$$J_\theta = 2\pi(p - p_\phi) = 2\pi(\alpha_\theta - \alpha_\phi),$$

这与式(10-112)相一致。

计算 J_r 的积分式(10-113)是为了求得用三个作用变量表示的 $H \equiv E$ 。如果我们利用有界开普勒问题中的闭合椭圆轨道使 r 的频率与 θ 和 ϕ 的频率相同这一事实,则从式(10-124)能得到 H 与 J 的函数关系。实际上,我们是在以不同的途径计算 J_r 。开普勒问题中有界轨道的维里定理表明 [见式(3-30)],

$$\bar{V} = -2\bar{T},$$

式中的横线标明是一整周运动中的平均值。因此可得

$$H \equiv E = \bar{T} + \bar{V} = -\bar{T}. \quad (10-125)$$

对运动的一个整周期求积式(10-124),即可得到

$$\frac{2\bar{T}}{\nu_3} = J_r + J_\theta + J_\phi = J_3, \quad (10-126)$$

这里的 ν_3 是运动频率,即周期的倒数。联立式(10-125)和式(10-126),得关系式

$$-\frac{2}{J_3} = \frac{\nu_3}{H} = \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial J_3}, \quad (10-127)$$

这里利用了式(10-87)。式(10-127)实际上是一个反映 H 对于 J_3 的函数关系的微分方程。方程的积分直接给出解

$$H = \frac{D}{J_3^2}, \quad (10-128)$$

式中的 D 是一个与任何 J 都无关的常数,因而必然只与 m 和 k 有关。因此,为了计算 D ,可以考虑一个半径为 r_0 的圆形轨道的基本情况,对此有 $J_r = 0$ 和 $J_3 = 2\pi p$ 。这里的总能量为

$$H = -\frac{k}{2r_0}. \quad (10-129)$$

(这从维里定理能立接看出。)其次,对于平方反比力定律,形成圆形轨道的条件式(3-41)可表达成

$$\frac{k}{r_0^2} = \frac{p^2}{mr_0^3} = \frac{J_3}{4\pi^2 m r_0^3}. \quad (10-130)$$

消去(10-129)和(10-130)两式间的 r_0 , 即得

$$H = -\frac{2\pi^2 m k^2}{J_3^2}.$$

这一结果仅就圆形轨道推导的. 但式(10-128)表明它对于开普勒问题的所有有界轨道同样正确, 因而确实与式(10-123)相一致. 于是, 如果我们事先知道所有坐标都有一个单一的周期, 那么, 不必直接计算回路积分同样能求得 $H(J)$.

在任何一个具有三个自由度的问题中, 当然应有六个运动常数. 前面已经指出, 在开普勒问题中, 这些常数中的五个都是坐标和动量的代数函数, 它们都被用来描述空间轨道的性质, 只有最后一个用来描述给定时刻质点在轨道上的位置(见节3-9). 不难看出, 为了完全确定, 譬如说, 有界开普勒问题中空间内的椭圆轨道, 这五个参量是必不可少的. 由于运动是在一个平面内, 因此, 必须有两个常数描述该平面在空间取向. 一个常数需要用来给出椭圆的尺度, 例如长半轴 a ; 另一常数则用来确定椭圆的形状, 譬如说, 通过偏心率 e 来做到这一点. 最后, 第五个参量应用来确定椭圆相对于轨道平面内某一任意方向的取向.

轨道的经典天文学要素几乎完全是以前面的描述形式提供轨道参量的. 这些要素中的两个角度有着不太熟悉, 但却由来已久的名称. 它们的定义以及作为轨道参量的功能, 从图10-4所示的图上看起来最为清晰. 这里的 xyz 确定了所选定的、固定于空间的坐标轴系, 单位矢量 \mathbf{n} 则表征了轨道平面的法向. xy 平面和轨道平面的交线称为节点线. 节点线上有两个点, 椭圆轨道和 xy 平面就在这两点处相交; 质点从下半球进入上半球(或者从“南”半球进入“北”半球)的那一点称作

升交点。为清楚起见,图 10-4 中位于南半球的那部分轨道已

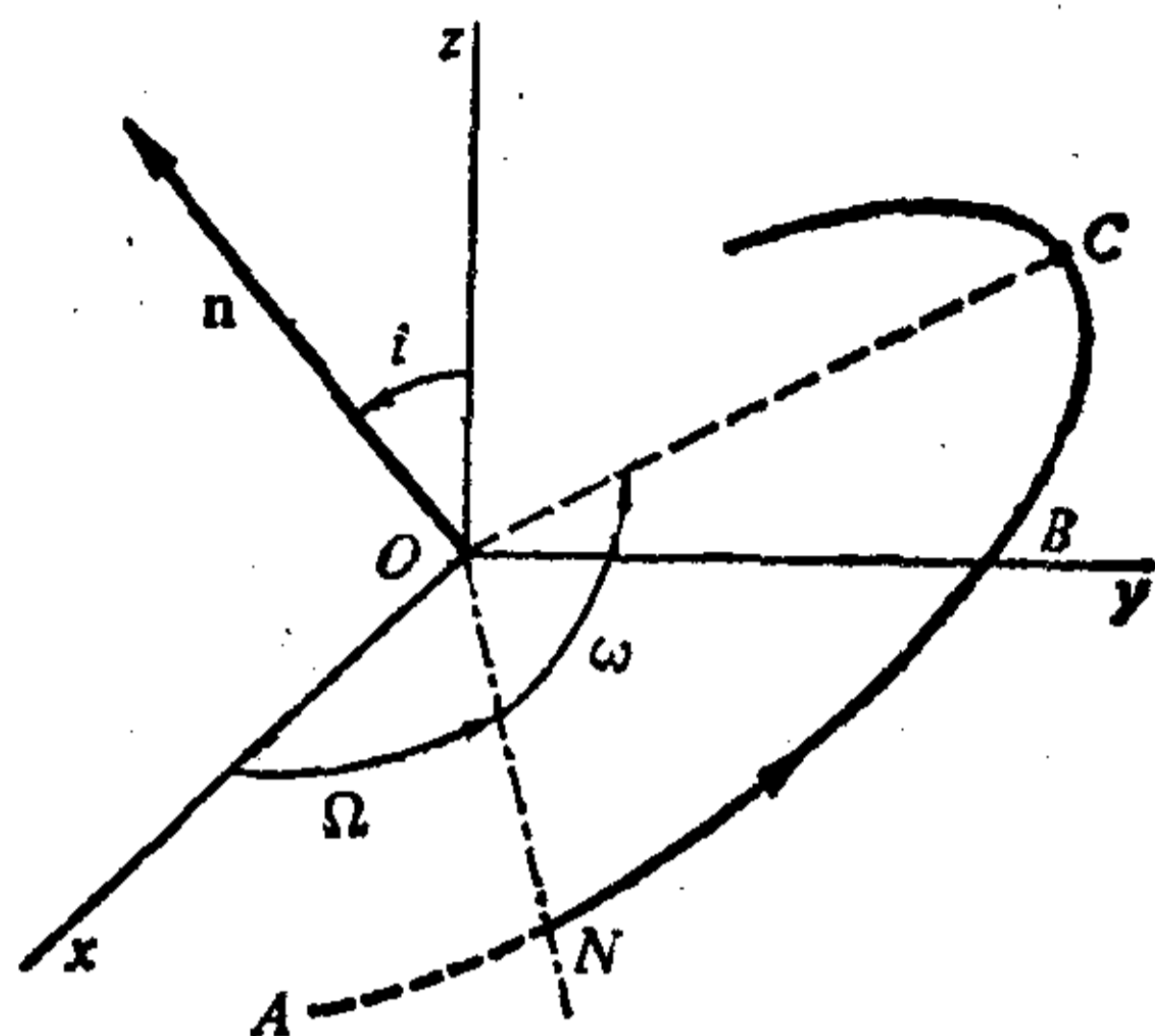


图 10-4 束缚开普勒问题中轨道的角度要素

画成了虚线.点划线 ON 是包含有升交点的那部分节点线.我们可用 $\angle xON$ 量度 ON 在 xy 平面内的方向, $\angle xON$ 习惯上记为 Ω , 称为升交点黄径. 最后, 如果用 C 表示轨道的近拱点, 则轨道平面内的 $\angle NOC$ 用 ω 表示, 称为近日点角¹⁾. 在式 (10-110) 中引进的、更为熟悉的角 i 当用于天文学时称为轨道倾角. 因此, 一组通常的天文学要素由六个常数所组成:

$$i, \Omega, a, e, \omega, T,$$

最后一个 T 是通过近拱点时所需的时间. 其余五个常数中, 前两个规定了轨道平面在空间内的取向, 而 a, e 和 ω 则分别直接限定椭圆轨道的尺度、形状和取向.

用作用角变量论述开普勒问题时, 还能得出运动的五个代数常数. 其中三个显然被作为三个常值作用变量 J_1, J_2 和 J_3 . 其余两个是角变量 w_1 和 w_2 , 由于它们的相应频率为零, 所以它们也是常数. 因此必然有可能用经典轨道要素 i, Ω, a, e 和 ω 表示五个常数 J_1, J_2, J_3, w_1 和 w_2 , 反之亦然. 在

1) 这一术语看来是普遍采用的, 甚至适用于非绕日轨道.

这些相互关系中,有一些则非常明显. 根据式(10-122)和式(10-112)可得

$$J_2 = 2\pi\alpha_\theta \equiv 2\pi l, \quad (10-131)$$

从而根据式(10-110)可得

$$\frac{J_1}{J_2} = \cos i. \quad (10-132)$$

众所周知,长半轴 a 仅是总能量 E 的函数[见式(3-16)],因此,根据式(10-123)可知, a 是直接由 J_3 给出的:

$$a = -\frac{k}{2E} = \frac{J_3^2}{4\pi^2 m k}. \quad (10-133)$$

用 J_2 表示时,偏心率方程(3-62)能表达成

$$e = \sqrt{1 - \frac{J_2^2}{4\pi^2 m k a}}$$

或

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{J_2}{J_3}\right)^2}. \quad (10-134)$$

剩下的只是把角坐标 ω_1 和 ω_2 与经典轨道要素联系起来. 显然,它们必定包含有 Ω 和 ω . 事实上,可以证明,如果适当地选择附加积分常数,它们确实分别正比于 Ω 和 ω . 我们将就 ω_1 的情况证明这一点,至于 ω_2 的情况则将留作习题.

根据式(10-106),确定 ω_1 的变换方程为

$$\omega_1 = \frac{\partial W}{\partial J_1}.$$

根据式(10-13') (第531页),或者根据 W 的分离形式(10-55)能看出, W 可以表达成一些不定积分之和:

$$W = \int p_\phi d\phi + \int p_\theta d\theta + \int p_r dr. \quad (10-135)$$

根据有关 J_i 的讨论已经知道,径向动量 p_r 并不包含 J_1 ,而只包含 J_3 (通过 E) 以及组合 $J_\theta + J_\phi = J_2$. 所以只有前

两个积分涉及到对 J_1 的微商。根据式 (10-109),

$$p_\phi = \alpha_\phi = \frac{J_1}{2\pi}, \quad (10-136)$$

再根据式 (10-58), 并借助于式 (10-131) 和式 (10-136), 即得

$$\begin{aligned} p_\theta &= \pm \sqrt{\alpha_\theta^2 - \frac{\alpha_\phi^2}{\sin^2 \theta}} \\ &= \pm \frac{1}{2\pi} \sqrt{J_2^2 - \frac{J_1^2}{\sin^2 \theta}} \end{aligned}$$

由此可知, 为了联系 w_1 与升交点, 有必要选择负的平方根¹⁾。所以角变量 w_1 决定于

$$w_1 = \frac{\phi}{2\pi} + \frac{J_1}{2\pi} \int \frac{d\theta}{\sin^2 \theta \sqrt{J_2^2 - J_1^2 \csc^2 \theta}}$$

或

$$\begin{aligned} 2\pi w_1 &= \phi + \cos i \int \frac{d\theta}{\sin^2 \theta \sqrt{1 - \cos^2 i \csc^2 \theta}} \\ &= \phi + \int \frac{\cot i \csc^2 \theta d\theta}{\sqrt{1 - \cot^2 i \cot^2 \theta}} \end{aligned}$$

把变量变换到由关系式

$$\sin u = \cot i \cot \theta \quad (10-137)$$

定义的 u , 积分就能轻而易举地完成, 而 w_1 的表达式则化为

$$2\pi w_1 = \phi - u. \quad (10-138)$$

角坐标 ϕ 是投射到 xy 平面上的方位角, 它是相对于 x 轴量度的。根据式 (10-137), u 显然是质点极角 θ 的函数。但它的

1) 注意, 当质点通过升交点时(见图 10-4), θ 值递减而相应的动量取负值。在计算 J_θ 时, 符号的选择无关紧要, 因为在经历一整周的过程中, 正、负两种符号都会遇到。

几何意义是什么呢？当我们参照奈培 (Napier) 定则¹⁾，并把它应用于由节点线、矢径以及矢径在 xy 平面上的投影所规定的球面三角形时，就能搞清楚 u 所具有的意义。然而，如果我们作出一点三角处理并从头开始来推导这个关系式，可能更加令人满意。图10-5中， ON 线是节点线、 OR 是某时刻的矢径线，虚线 OP 是矢径在 xy 平面上的投影。 OP 与 x 轴的夹角等于方位角 ϕ 。可以断言， u 是 OP 与节点线之间的夹角。为了证明这一点，可以假想一个平面，它既垂直于 xy 平面又垂直于节点线，该平面在与原点相距单位距离的地方与矢径相交。与三根从原点出发的线的交点 A, B, C 和原点一起确定了四个直角三角形。由于 OB 具有单位长度，因而知道， $BC = \cos \theta$ ， $AC = \cos \theta \cot i$ 。此外，由于 $OC = \sin \theta$ ，所以 $AC = \sin \theta \sin u$ 同样成立。因此， $\sin u = \cot i$ ，这与式

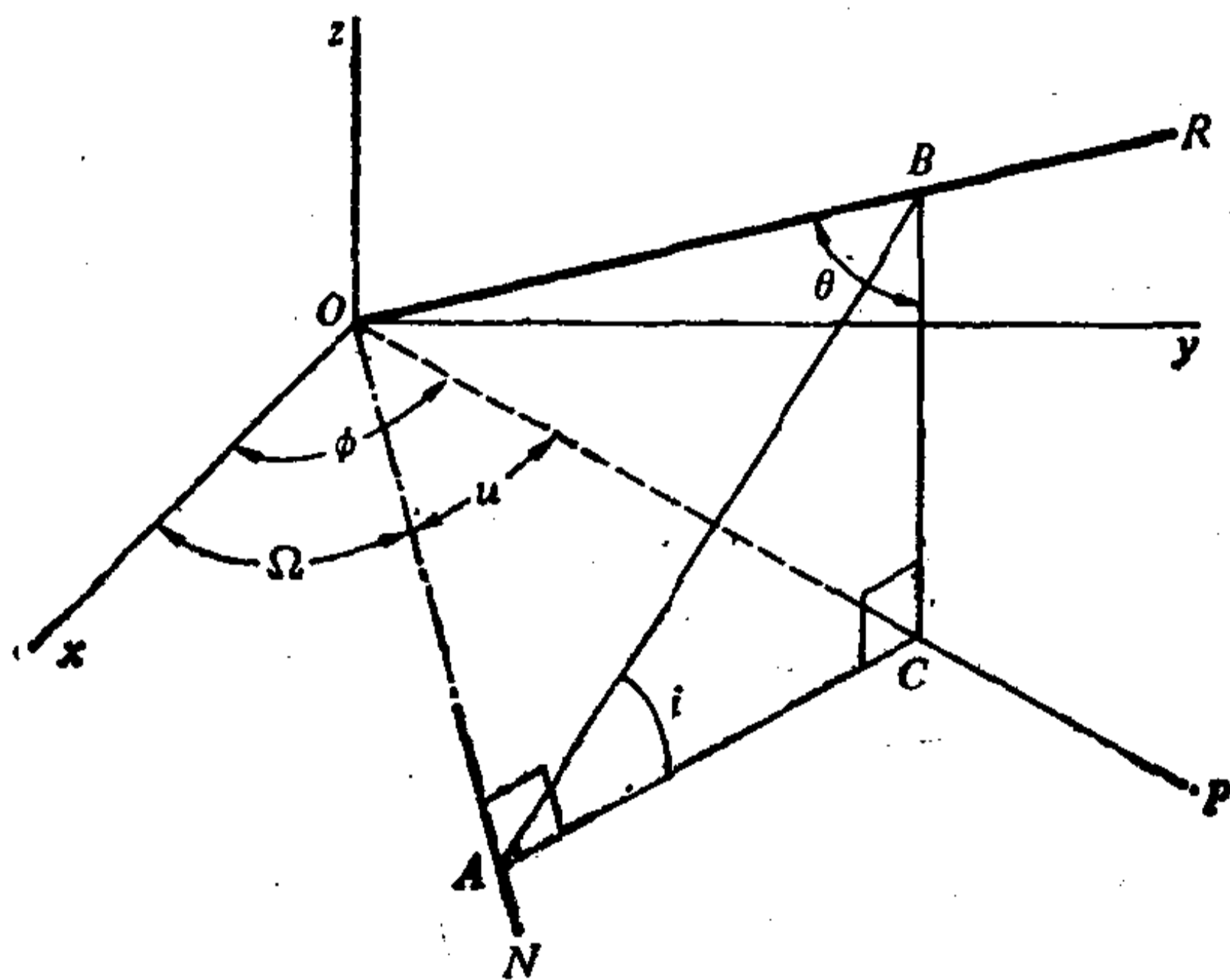


图 10-5 以作用角论述开普勒问题时出现的各种角度的图示

1) 可以参阅论述球面三角学的任何一本著作或者手册，象 Handbook of Mathematical Tables (Chemical Rubber Publishing Co.) 或者 Handbook of Applied Mathematics (Van Nostrand-Reinhold).

(10-137) 相一致,从而证明了原先对角度 u 的鉴定. 图 10-5 显然表明, ϕ 和 u 之差必定等于 Q , 所以

$$2\pi\omega_1 = Q. \quad (10-139)$$

我们能够以同样的方式鉴定常数 u_2 的物理本质. 在构成 W 的那些积分[式 (10-135)]中, 对 θ 和 r 的两个积分都包含有 J_2 , 因而与求解 ω_2 有关. 完成了对 J_2 的微商后, 再采用对 ω_1 用过的相同类型的三角置换, 即能完成对 θ 的积分. 可以用许多种方法完成对 r 的相应积分, 多数是利用以轨道平面极坐标角度表示的 r 的轨道方程. 适当选择积分的任意下限就能发现, $2\pi\omega_2$ 是轨道平面内两个角度之差, 一个是矢径相对于节点线的角度, 另一个则是矢径相对于近拱点线的角度. 换句话说, $2\pi\omega_2$ 等于近日点角:

$$2\pi\omega_2 = \omega. \quad (10-140)$$

详细推导将留作习题.

人们也许会认为作用角变量法并不是求解开普勒问题的最快途径, 所用变量组的实际好处并不明显.¹⁾ 然而, 它们的价值在天体力学中早就得到了证明, 它们在那里是以德朗奈变量¹⁾的形式出现的. 在下一章中将看到, 它们提供了摄动理论中所用的轨道固有要素. 例如, 当我们想知道由于力与平方反比律发生微小偏离而引起的标称开普勒轨道的修正时, 就到作用角变量. 对人造卫星轨道可能发生的摄动的许多基础性研究, 都是用作用角变量进行的.

在一段短时期内, 作用角变量在物理学研究的最前沿起着极为突出的作用, 特别是对于开普勒问题的研究. 在玻尔于 1913 年提出原子的量子论之后不久, 人们认识到, 用作用变量阐述量子条件最为简洁. 大约从 1915 年开始的十年内,

1) 德朗奈变量的惯用定义与 (J_i, ω_i) 组相差一些倍乘常数.

对作用角变量的性质有着浓厚的兴趣，大部分“老量子论”都是围绕它们而建立起来的。在经典力学中，作用变量具有连续的数值范围，但在量子力学中，情况则不同。索末菲-威尔逊量子条件要求运动限于“本征”作用变量具有分立数值的轨道，这些分立数值是作用量子 h 的整数倍。（所谓本征作用变量，指的是频率为非简并的、不等于零的那些 J 。例如， J_3 就是一个本征作用变量。）正如索末菲所说，作用角变量法开辟了“通向量子化的坦途”。过去，用作用角变量只能求解经典力学问题，而今天，只要用普朗克常数 h 的整数倍数代替 J ，就能使运动即刻量子化。

作为此法的一个例子，可能会注意到，如果使 k 等于 Ze^2 ，并用 nh 代替 J_3 ，由式 (10-123) 即能直接得到氢原子的量子化能级

$$E = -\frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{n^2 h^2}. \quad (10-141)$$

这里的整数 n 称为主量子数，而且是这个完全简并系统的仅有的量子数，如果引进相对论性改正，则会产生轨道平面内近日点的进动，简并性将部分地消除。量度近日点位置的角变量 w_2 因而将随时间而变化，共轭作用变量成为一个“本征”变量，而且也必然是量子化的：

$$J_2 = kh,$$

这里的 k 是角量子数。由于 ν_3 和 ν_2 都不等于零，所以能量必然与 J_3 和 J_2 ，即与 n 和 k 有关。于是我们得到了氢原子能级的熟悉的相对论性精细结构。引进一个沿任意极轴的恒定磁场，能够消除全部简并性。轨道平面因而将作相对于极轴的拉莫尔进动，使角变量 w_1 随时间均匀地增加。所以，如果存在磁场， J_1 将成为一个本征作用变量，并同样必须服从量子化条件：

$$J_z = mh,$$

m 是磁量子数。这样,能量与所有三个量子数都有关,以这种方式消除简并性能导致原子能级的塞曼分裂¹⁾。

在周期表中,除了简单的氢原子外,在应用老量子论时,越到后面越复杂。基本的经典问题不再能精确地求解,许多附加力必须作为小的微扰因素来处理。尽管经典的微扰理论与波动力学的微扰法之间有着许多相似点,但是我们将会看到,经典技巧比量子技巧要复杂得多,特别是出现简并性时更是如此。

然而,很快就会明白,这不仅是数学上的困难,玻尔量子论本来就不是自然界的准确模型。众所周知,只是由于几乎同时引进的波动力学和矩阵力学,那不可逾越的障碍才得以冲决。在这些新理论中,求解量子问题的技巧是完全不同的,对作用角变量的兴趣也随之突然减退。但近几年来,似乎又看到作用角变量在一些领域内有所恢复,不仅在天体力学中,而且在那些涉及带电粒子在磁场中的运动的问题中也有所恢复。在后面节 11-7 中将要讨论的所谓作用变量的绝热不变性性质,使作用角变量在等离子体物理学和在粒子加速器的设计方面得到了卓有成效的应用。

相当奇怪的是,较新的波动力学也源出于哈密顿-雅可比理论。如果说经典力学的泊松括号表述可以作为矩阵力学的出发点,那么,波动力学孕育于哈密顿-雅可比理论与几何光学的关联之中。我们现在将把注意力转向对这种关联的研究。

10-8 哈密顿-雅可比理论、几何光学以及波动力学

我们将只考虑哈密顿函数是一运动常数并恒等于总能量

1) 这样得到的分裂只代表正常的塞曼效应。当然,合适的反常塞曼效应只能通过包括“自旋”效应来计算。

的那些系统。这时,哈密顿主函数和哈密顿特征函数由方程

$$S(q, P, t) = W(q, P) - Et \quad (10-142)$$

相关联。由于特征函数与时间无关,所以各常值 W 曲面在位形空间内有着固定的位置。由 S 的某个常数值所表征的曲面在某一给定时刻必定与某一特定的常值 W 曲面重合。然而,对应于一定 S 值的 W 值是按式 (10-12) 随时间变化的。所以在 $t = 0$ 时,曲面 $S = a$ 和 $S = b$ 分别与 $W = a$ 和 $W = b$ 的那些曲面重合 (见图 10-6)。经 dt 时间后,曲面 $S = a$ 与 $W = a + Edt$ 的曲面重合,与此类似, $S = b$ 则位于曲面 $W = b + Edt$ 处。实际上,曲面 $S = a$ 在 dt 时间后已从 $W = a$ 移到了 $W = a + Edt$ 处。曲面随时间的运动类似于波前的传输,例如,就象横穿空间的冲击波的波前的传输。因而常值 S 曲面可以看作是在位形空间内传输的波前。

随着时间的推移,常值 S 曲面的形状一般是变化的,所以对于曲面上所有各点,波速(曲面的运动速度)是不均匀的。然而,给定点处的波速值仍可预先算出。为方便起见,我们将考虑只有一个质点的系统,并取笛卡儿坐标作为广义坐标。这样,位形空间将化为寻常三维空间,从而大大地简化了问题的

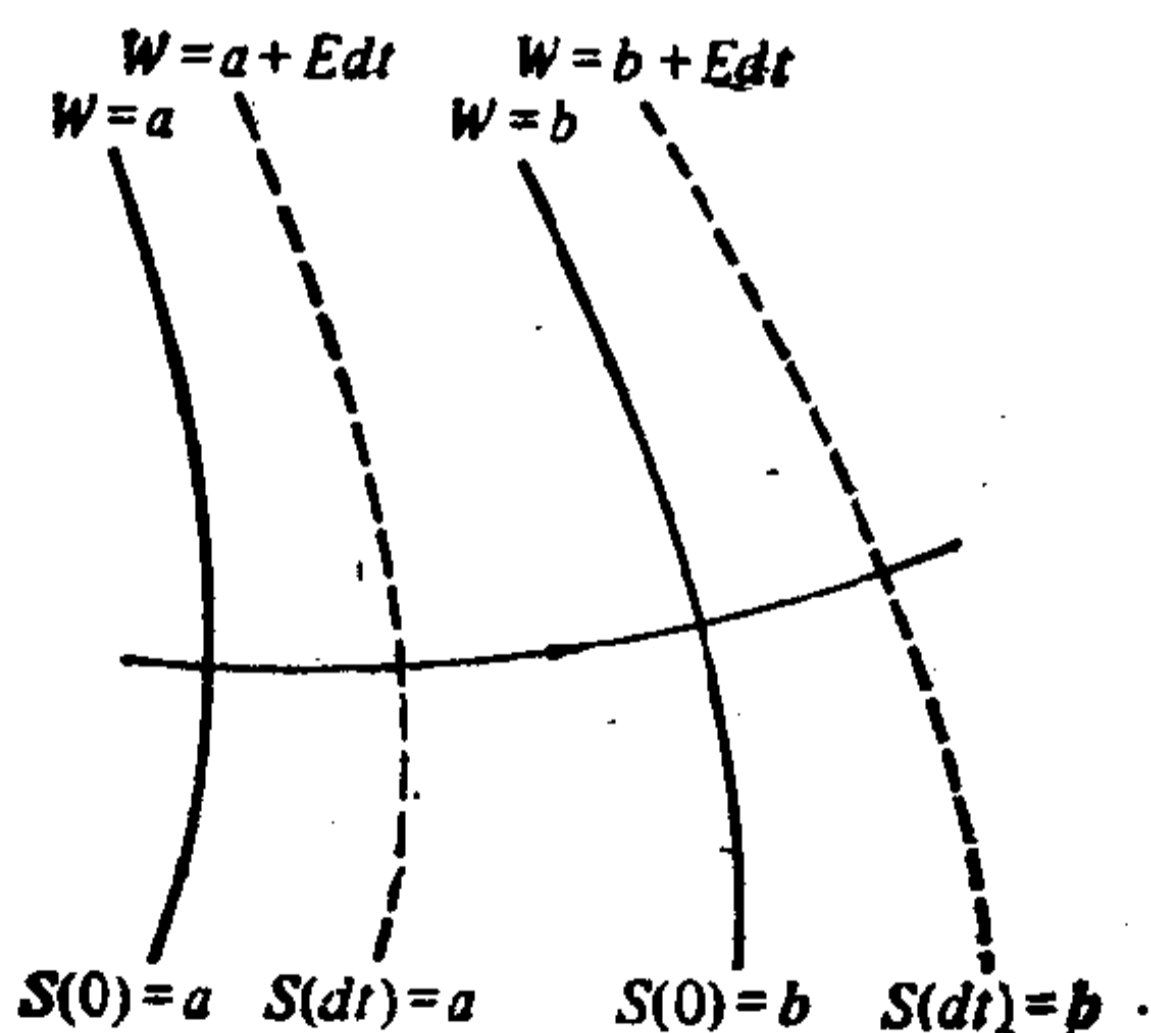


图 10-6 位形空间内常值 S 曲面的运动

几何性质。在常值 S 曲面上某特定点处的波速，等于波前在无限小 dt 时间内移动的垂直距离除以时间 dt 。如用 ds 表示垂直于曲面的这段无限小距离，则波速

$$u = \frac{ds}{dt}. \quad (10-143)$$

已知 S 曲面在 dt 时间内将由 W 曲面移到特征函数值为 $W + dW$ 的新的曲面处，这里的

$$dW = E dt.$$

dW 这一变化也与法向距离有关，它们之间的关系式为

$$dW = |\nabla W| ds, \quad (10-144)$$

因而

$$u = \frac{ds}{dt} = \frac{E}{|\nabla W|}. \quad (10-145)$$

W 的梯度的量值则由哈密顿-雅可比方程给出，用单个质点的笛卡儿坐标表示时，其形式为

$$(\nabla W)^2 = 2m(E - V). \quad (10-146)$$

因而波速

$$u = \frac{E}{\sqrt{2m(E - V)}}. \quad (10-147)$$

式 (10-147) 可用许多不同的形式表示。差值 $E - V$ 等于动能 T ，所以

$$u = \frac{E}{\sqrt{2mT}}. \quad (10-148)$$

对于所考虑的单质点系统， $2mT = m^2 v^2 = p^2$ ，所以式 (10-148) 也可写成

$$u = \frac{E}{p} = \frac{E}{mv}. \quad (10-149)$$

此式表明，常值 S 曲面上一点的速度与用 S 描述的质点在空

间内的运动速度成反比。容易看出，质点轨道必然始终垂直于常值 S 曲面。空间内任何给定点处的轨道方向决定于动量 \mathbf{p} 的方向，然而由式 (10-27) 可知，

$$\mathbf{p} = \nabla W, \quad (10-150)$$

W 的梯度决定了常值 S 或 W 曲面的法线方向。因而任何常值 W 曲面族将产生一组始终与之相垂直的可能运动轨道。当质点沿其中一个轨道运动时，生成运动的 S 曲面也将穿越空间，但这两个运动并不同步。事实上，当质点慢下来时，曲面运动得较快，反之亦然。

为了更便于讨论，在这些考虑中我们将只限于谈论一个质点的系统。但是，如果动能象式 (8-85) 中那样是广义速度的某个二次函数，那么，上面的大多数结果对于多质点系统同样适用。正象第八章末所看到的那样，我们能够构成一个曲线位形空间，在这一空间内，系统点的运动速度为 $\sqrt{2T}$ (见第 439 页)。注意，这与具有单位质量的单个质点的速度相同。因此，必然能够证明， S 曲面在特殊的曲线位形空间内的波速为¹⁾

$$u = \frac{E}{\sqrt{2(E-V)}} = \frac{E}{\sqrt{2T}}. \quad (10-147')$$

此外，波速 u 与系统点速度 $\sqrt{2T}$ 之间保持着互为倒数的关系。同样，又一次发现系统的可能轨道确实是垂直于常值 S 曲面的。所以，过渡到多质点系统时，并不会带进任何新的物理结果。为简化数学运算，我们将继续限于讨论单质点系统。

常值 S 曲面已经表征为一系列波前，因为它们在相空间

1) S 曲面在位形空间内的运动的讨论，可参阅 L. Brillouin, *Tensors in Mechanics and Elasticity*, trans. R. O. Brennan (New York: Academic, 1964), 第八章。

内的传输方式与定相波面相同。虽然我们对波速的计算已谈了很多，但尚未论及波前为常值 S 曲面的那些波的本质或波源。所有波运动的最引人注目的特征都起因于它们的周期性，但到目前为止，还未确定与 S 相关的波的频率和波长谱系。为了搞清楚这些问题，我们来研究一下一种熟知的波动——光波的某些性质。

光的标量波动方程为

$$\nabla^2 \phi - \frac{n^2}{c^2} \frac{d^2 \phi}{dt^2} = 0, \quad (10-151)$$

式中的 ϕ 是象标量电磁势那样的标量； c 是真空中光速； n 是折射率，并等于 c 与光速之比。一般讲， n 与介质有关而且是空间位置的函数。如果 n 是常数，则满足式 (10-151) 的平面波解的形式为

$$\phi = \phi_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (10-152)$$

式中的波数 k 和频率 ω 之间的关系决定于关系式

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\omega}{c}. \quad (10-153)$$

为简化起见， \mathbf{k} 取沿 z 轴的方向，这样，平面波解也能表达成

$$\phi = \phi_0 e^{ik_0(nz - ct)}, \quad (10-154)$$

式中 k_0 是真空中波数。然而，我们关心的是几何光学的情况，这时的 n 不完全是常数，而是在空间内缓慢地变化着的。因此，平面波不再是波动方程 (10-151) 的解；折射率随位置的变化将使波发生畸变和弯曲。由于 n 被认为在空间内仅是平缓地变化，所以我们可以寻求一个与平面波尽可能接近的类似解：

$$\phi = e^{A(\mathbf{r}) + ik_0[L(\mathbf{r}) - ct]}. \quad (10-155)$$

这里的两个量 A 和 L 是有待确定的位置函数，并认为它们都是实数。所以 A 是波幅的量度。如果 n 是常数， L 将化为 nz ，

并因而被称作光程长度或波相。\$L\$ 还经常被称为程函。对解 \$\phi\$ 连续使用梯度算符, 即得关系式

$$\begin{aligned}\nabla\phi &= \phi\nabla(A + ik_0L), \\ \nabla^2\phi &= \phi[\nabla^2(A + ik_0L) + (\nabla(A + ik_0L))^2]\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi &= \phi[\nabla^2A + ik_0\nabla^2L + (\nabla A)^2 \\ &\quad - k_0^2(\nabla L)^2 + 2ik_0\nabla A \cdot \nabla L].\end{aligned}$$

于是波动方程成为

$$\begin{aligned}ik_0[2\nabla A \cdot \nabla L + \nabla^2L]\phi + [\nabla^2A \\ + (\nabla A)^2 - k_0^2(\nabla L)^2 + n^2k_0^2]\phi = 0.\end{aligned}\quad (10-156)$$

由于 \$A\$ 和 \$L\$ 都是实数, 所以要方程成立, 必须要求方括号内的两个表达式分别为零:

$$\nabla^2A + (\nabla A)^2 + k_0^2[n^2 - (\nabla L)^2] = 0, \quad (10-157a)$$

$$\nabla^2L + 2\nabla A \cdot \nabla L = 0. \quad (10-157b)$$

至此, 尚未取过近似, 两个方程都是严格成立的。现在, 我们假设 \$n\$ 仅随距离缓慢地变化; 特别假设 \$n\$ 在波长量级的距离上不会有很大的变化。实际上, 这意味着波长与介质的任何变化的线度相比都是微小的, 这正是几何光学中的假设。这样, 在式 (10-157a) 中包含的 \$k_0^2 = 4\pi^2/\lambda_0^2\$ 这一项成了重要的一项, 而这个方程也将化为简单的形式

$$(\nabla L)^2 = n^2. \quad (10-158)$$

式 (10-158) 称为几何光学的程函方程¹⁾。由这一方程决定的常值 \$L\$ 曲面是光的一个定相曲面, 因而也就确定了波前。光线轨道处处垂直于波前, 因而也由式 (10-158) 决定。

我们没有必要再去讨论几何光学, 因为我们将看到, 程函

1) 虽然这里的程函方程是从标量波动方程推导的, 但也能根据电磁场的矢量场强波动方程推得。参阅 Born 和 Wolf, *Principles of Optics*.

方程(10-158)在形式上与力学中 W 的哈密顿-雅可比方程(10-146)是一致的。特征函数 W 起了与程函 L 相同的作用, 而 $[2m(E - V)]^{\frac{1}{2}}$ 则可看作是折射率。所以哈密顿-雅可比方程告诉我们, 经典力学相当于波动的几何光学极限, 在这种情况下, 与波前垂直的光线相当于与常值 S 曲面垂直的质点轨道。现在就明白了为什么惠更斯的波动论和牛顿的光的微粒说同样能够说明反射和折射现象, 因为两者的几何光学理论在形式上完全一致。同样, 也阐明了最小作用量原理与几何光学中的费马原理的相似性。我们看到, 雅可比形式的最小作用量原理式(8-89)中的被积函数 $\sqrt{H - V}$, 在几何光学中将代之以正比于折射率或反比于波速的某个量。因此, 最小作用量原理也可表达成

$$\Delta \int n ds = \Delta \int \frac{ds}{u} = 0, \quad (10-159)$$

这是光线轨迹费马原理的两个熟知的变分。

我们还未建立起与经典运动相关联的波的频率和波长。已经明确的是, 波长必须极小于力和势的空间扩展, 再前进一步将超越经典力学的范畴。如果把经典力学作为几何光学的一个特别的分支, 那么, 在这样的领域内根本不会发生与波长相关的现象(干涉、衍射等)。即使经典力学中也存在波-粒二象性, 粒子性也占有主导地位, 波动方面没有机会显示它的固有属性。

然而, 我们还是能够推测波动方程的形式, 哈密顿-雅可比方程代表了这个方程的短波波长极限。程函方程(10-158)与哈密顿-雅可比方程(10-146)的类似性并不意味着 L 与 W 等价; 不过, 这两个量必定是相互成正比的。我们将看到, 这一比例常数是波长量值的量度。如果 W 对应于 L , 则 $S =$

$W - Et$ 必然正比于式 (10-155) 所描述的光波总相位:

$$k_0(L - ct) = 2\pi \left(\frac{L}{\lambda_0} - \nu t \right). \quad (10-160)$$

因此, 质点能量 E 与波频 ν 必定成正比, 我们将用符号 h 表示这两个量的比例常数:

$$E = h\nu. \quad (10-161)$$

一般, 波长、频率与波速之间的关系为

$$\lambda\nu = u,$$

所以根据式 (10-149), λ 为

$$\lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{E/p}{E/h}$$

或

$$\lambda = \frac{h}{p}. \quad (10-162)$$

式 (10-160) 右边给出的波相表达式也能表达成

$$\frac{2\pi}{h} \left(\frac{Lh}{\lambda_0} - h\nu t \right).$$

显然, 括号中的量具有 $W - Et = S$ 的形式. 这表明, 与力学中质点运动相关的波幅应该具有形式

$$\psi = \psi_0 e^{iS/\hbar}, \quad (10-163)$$

按照惯例, 式中的 $\hbar \equiv h/2\pi$. 如果我们的描述是正确的, 那么支配这一波幅的方程在短波波长的极限下, 或等价地说, 在 \hbar 非常小的极限下应该化为哈密顿-雅可比方程. 当然, 我们以后将会知道, ψ 所满足的方程就是薛定谔 (与时间相关的) 波动方程

$$\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi - V\psi = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (10-164)$$

那么, 薛定谔方程的短波波长极限是否是哈密顿-雅可比方程呢?

为了研究这个问题,我们可以把式(10-163)代入薛定谔方程。这时有

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} \psi \frac{\partial S}{\partial t}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{i}{\hbar} \psi \frac{\partial S}{\partial x}.$$

因此,采用笛卡儿坐标的、 ψ 的拉普拉斯算符等同于

$$\nabla^2 \psi = \frac{i}{\hbar} \psi \nabla^2 S - \frac{\psi}{\hbar^2} (\nabla S)^2.$$

用 S 表达时,薛定谔方程能写成

$$\left[\frac{1}{2m} (\nabla S)^2 + V \right] + \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \nabla^2 S. \quad (10-165)$$

我们把括号中的量看作是用笛卡儿坐标表示的单质点哈密顿-雅可比方程中的哈密顿函数。的确,如果只是右边为零,式(10-165)将是哈密顿主函数的经典哈密顿-雅可比方程。式(10-165)可以称为量子-力学的哈密顿-雅可比方程;它在 \hbar (因而 λ) 趋于零的极限时化为经典方程¹⁾。 $\nabla^2 S$ 项可予略去的条件能以多种方式阐述。一种方式是注意到 $\nabla^2 S$ 项是在计算 $\nabla^2 \psi$ 的过程中与 $(\nabla S)^2$ 项一起产生的。因此,如果

$$\hbar \nabla^2 S \ll (\nabla S)^2,$$

或者说,如果

$$\hbar \nabla \cdot \mathbf{p} \ll p^2,$$

就可略去 $\nabla^2 S$ 项。在一维情况下,这等于要求

$$\frac{\hbar}{p} \frac{dp}{dx} \ll 1, \quad (10-166)$$

式中 $\hbar = \lambda/2\pi$, 称为约化波长。用文字叙述时,式(10-166)的意思是,当波长短到足以使动量在 λ 这一距离上的变化可以略而不计时,作为几何光学极限的经典力学成立。这还意

1) 如把式(10-165)中的 S 展开成 \hbar 的幂级数,并合并 \hbar 的同次幂的系数,则最低级的近似显然就是经典的哈密顿-雅可比方程。再高一级的近似(\hbar 的线性项)则导致 WKB 近似或半经典近似。

味着势函数在波长距离上并无显著的变化¹⁾。

可以看出,哈密顿-雅可比方程的量子变式和经典变式的差别与 h 的大小有关。 h 越小,波长越短,对几何光学的近似也越好。已知,哈密顿-雅可比方程和程函方程的等价性首先是由哈密顿于1834年认识到的;而相应的波动方程则首先由德布罗意和薛定谔于1926年推导得的。有人曾说,哈密顿只要再前进一小步就会发现薛定谔方程。但事情并非如此,因为他缺乏这一突破所需的实验依据。在哈密顿年代里,经典力学被认为是严格正确的,当时要把它看作是更广义理论的一种近似,并无正当的实验依据,换句话说,哈密顿没有理由相信 h 值根本不会等于零。要认识到经典力学不过是波动论的几何光学近似,只在发现了与粒子波长有关的效应(象戴维孙-革末干涉实验中的效应)之后才有可能。也只有在这之后,才能把物理实在性归于 h ,当然, h 就是有名的普朗克常数²⁾。

不过,现在可以看出,经典力学中孕育着量子论的种子,而哈密顿-雅可比表述则特别适合于阐明怎样从经典力学推广到波动力学。这些课题的进一步探索将超出本书的范围,这种探索也许可以命名为“波动力学的几何光学”!

推荐参考书目

R. Courant 和 D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics* 哈

-
- 1) 顺便说一下,现在可以知道为什么薛定谔方程和哈密顿-雅可比方程的可分离条件是相同的。但它们的分离解的形式不同:从式(10-163)可知,当 $W = S + Et$ 被分离成只与一个坐标有关的各函数之和时, ψ 将被分离成这些函数的积。
 - 2) 在光的波动论的发展中也出现过相同的情况。在实验中观察到光的干涉和衍射现象之前,没有理由说惠更斯的波动论一定比牛顿的微粒光线假设更好。

密顿-雅可比方程是多变量一阶偏微分方程的一个例子,这类方程的数学特性对于哈密顿-雅可比理论的发展是重要的(已经看到了)。这一参考书的第二卷(几乎)不费力地介绍了相关的数学,首先是在第一章第4节一般性介绍中,其次是在第二章对哈密顿-雅可比理论的冗长而又清晰的讨论中。

C. Carathéodory, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order* 多年来公认该书为论述一阶偏微分方程的权威性著作,该书第一卷中所作的说明比前一本书要深入得多,并且特别经心于发展所谓“特性”理论。并没有用哈密顿-雅可比方程这个名称,但该书的大部分主要讨论的就是这个方程以及它与力学的关系。

C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics* 这里(指第八章)对哈密顿-雅可比理论的论述强调了它的理论基础和几何解释。非常详细地讨论了作用角变量的必要条件(称作“德朗奈分析”)以及它们的性质。很少看到详细的应用。

D. Ter Haar, *Elements of Hamiltonian Mechanics* 该书对哈密顿-雅可比方程及其应用的论述,包括开普勒问题的作用角变量的论述,与本章给出的大致相似。当然,重点和观点是不一样的,读者将在两种讨论的比较中有所得益。

M. Born, *The Mechanics of the Atom* 在老量子论的全盛时期,当作用角变量提供了通向量子化的“坦途”时,物理学家对它曾有过短暂的关注。这本参考书正是那个时期的产物,而且仍是物理学家易于接受的、有关哈密顿-雅可比理论以及作用角变量的最好的讨论之一。书中列举的大量应用是杰出的。Born对作用角变量和有关的微扰理论的讨论是许多教科书中有关讨论的依据,这本著作也毫不例外。但读者在参阅原子结构方面的叙述时要注意,其中多数已经过时了。

A. Sommerfeld, *Atomic Structure and Spectral Lines* 贯穿于该书正文及附录的对哈密顿-雅可比理论和作用角变量的阐述明显地不及Born的论著详细。但也许正是由于这一缘故,更易于阅读。特别值得注意的是对分离坐标系的数目和运动简并性的联系的讨论。在附录中阐述了用留数理论来计算开普勒问题中的积分过程(也可参阅Born的著作)。

J. H. Van Vleck, *Quantum Principles and Line Spectra* 书中题为“数学技巧”的一章简要地概述了哈密顿-雅可比理论和作用角变量,也介绍了微扰理论。该著作的其余部分大多数只有历史上的兴趣。在阅读 Born 的著作时须加留心的事情,这里也同样如此,而且对于索末菲的著作也同样要注意。

B. Garfinkel, *The Lagrange-Hamilton-Jacobi Mechanics in Space Mathematics, Part I* 远在物理学家对作用角变量感兴趣之前,它已被用于天体力学中(虽然用的不是现在的名称),而且今天仍然是处理摄动理论的精巧方法。这本参考书试图以一种简洁、扼要而又特别易于阅读的方式阐明怎样从天体力学的观点来看待这个课题,这正是许多分析力学专著的不足之处。在不到 36 页的篇幅内,论述了从拉格朗日力学到摄动理论的整个领域,并且还塞进了多得不可思议的资料。如斯特克尔 (Staeckel) 可分离性条件[在式 (82) 中漏掉了一个明显的因子 2]、文蒂定理和德朗奈要素。有些符号和约定与物理学中惯用的不同。

L. A. Pars, *A Treatise on Analytical Dynamics* 从哈密顿-雅可比方程到作用角变量的论述有三章,因此可作出详细叙述和提供大量例子。非同寻常的是对可分离系统的讨论,只涉及到它本身的性质而与它对哈密顿-雅可比方程的应用无关。详尽地论述了斯特克尔条件。没有明显地提到作用角变量(虽然提到了角变量),但有广泛的章节讨论了多重周期运动。

H. V. McIntosh, *Symmetry and Degeneracy* (该文见 E. M. Loebl, *Group Theory and Its Applications*, 第二卷) 如所预料,书中详尽地讨论了可分离性和简并性(以及系统的对称性)之间的联系。书中还相当详细地论证了非简并系统内的轨道把空间填密的性质是不利于可分离性的,还探讨了它对各种各样系统(包括磁单极这种特殊系统在内)可能引起的结果。总之,这也许是廿世纪七十年代关于简并性-可分离性-对称性之间的联系的最佳参考书。

L. Brillouin, *Tensors in Mechanics and Elasticity* 这本文字极为风趣的著作包含有各种各样课题的丰富资料,从微分几何到(约为 1938 年的)固态量子学。第八章中详细地讨论了常值 s 曲面在位形空间内的运动,而在第九章中,则彻底地讨论了经典力学、几何光学和波动力

学之间的关系。

M. Born 和 E. Wolf, *Principles of Optics* 论述哈密顿-雅可比理论对几何光学的应用的标准参考书是 J. L. Synge, *Geometrical Optics*, 这是一本令人望而生畏的专著。玻恩和沃尔夫这本著作所作的介绍比较容易看懂, 他们特别关注进一步推广到薛定谔方程的问题。讨论几何光学基础的那一章, 除了其他问题的讨论外, 还推导了矢量场的程函方程。其后一章, 论述了光学成象的几何理论, 它至少在开始时用的是哈密顿方法。在这一方面, 两个附录特别有意思。第一个实际上是一篇变分计算的短文, 着重讨论了哈密顿-雅可比方程。第二个附录的内容可以从它的标题“光线光学、电子光学和波动力学”清楚地反映出来。

习 题

1. 就保守系统的情况证明, 解出适当的偏微分方程能构成一个正则变换, 使新哈密顿函数仅是新坐标的函数。(不要用交互变换) 指出怎样用新的坐标和动量给出系统运动的形式解。

2. 课文中, 通过寻求从正则坐标 (q, p) 到常数 (α, β) 的相切变换求得了 S 的哈密顿-雅可比方程。反之, 如果 $S(q_i, \alpha_i, t)$ 是哈密顿-雅可比方程 (10-3) 的一个完全解, 证明由式 (10-7) 和式 (10-8) 定义的变量组 (q_i, p_i) 是正则变量, 即它们是满足哈密顿方程的。

3. 用哈密顿-雅可比方法求解铅垂平面内一个抛射质点的运动问题。假定抛射质点在 $t = 0$ 时以速度 v_0 抛离原点, 抛射方向与水平面成 α 角度。试求轨道方程和坐标对于时间的函数关系。

4. 用哈密顿-雅可比方法建立一个固定点的对称重陀螺问题。并求式 (5-63) 给出的那种运动的形式解。

5. 证明, 函数

$$S = \frac{m\omega}{2} (q^2 + \alpha^2) \cot \omega t - m\omega q \alpha \csc \omega t$$

是线性谐振子哈密顿主函数的哈密顿-雅可比方程的解, 该线性谐振子的 H 为

$$H = \frac{1}{2m} (p^2 + m^2 \omega^2 q^2).$$

证明,这一函数产生了谐振子随时间所作运动的正确解。

6. 一带电质点约束在一平面上运动,所受作用势是(非电磁)有心力势 $V = \frac{1}{2} kr^2$ 以及由垂直于该平面的恒定磁场 \mathbf{B} 产生的矢量势

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r}.$$

以平面极坐标建立哈密顿特征函数的哈密顿-雅可比方程. 分离这个方程并把它化为求积分的问题. 如果正则动量 p_θ 在 $t = 0$ 时为零, 试讨论运动情况.

7. (a) 一单质点在一保守势作用下在空间内运动. 以椭球坐标 u, v, ϕ 建立哈密顿-雅可比方程, 这里的椭球坐标是根据方程

$$r = a \sin \nu \sin u, \quad z = a \cosh \nu \cos u$$

用通常的柱面坐标 r, z, ϕ 定义的. 哪种形式的 $V(u, v, \phi)$ 才使方程是可分离的?

(b) 利用 (a) 部分的结果把质量为 m 、并在某引力场中运动的质点的问题简化为求积分的问题, 该引力场由 z 轴上相距 $2a$ 的、两个不同质量的固定质点所构成.

8. 假设只有一个自由度的问题中的势是时间的线性函数, 以致哈密顿函数的形式为

$$H = \frac{p^2}{2m} - mAxt,$$

式中 A 是一常数. 在初始条件为 $t = 0, q = 0, p = mv_0$ 的情况下, 借助于哈密顿主函数求解这个动力学问题.

9. 用广义坐标

$$u = r + x, \quad v = r - x$$

建立平面开普勒问题. 用这些坐标求解哈密顿-雅可比方程并(至少)把它化为求积分的问题.

10. 有一长度为 $2l$ 、质量为 m 的均匀棒, 它的一端系在水平的光滑地板上, 另一端则靠在光滑的铅垂表面上. 假设该棒在重力作用下作约束运动, 它的两个端点始终与两个表面相接触, 试用任一哈密顿-雅可比方程把问题化为求积分的问题.

11. 一质点被约束在一滚道上运动, 滚道的曲线方程为

$$z = A \cos^2 \frac{2\pi x}{\lambda}.$$

这里有通常的向下的不变重力. 讨论在一切可能的初始条件下系统在相空间内的轨线, 尽可能详细地描述相空间轨道, 特别留心那些转折点以及不同类型运动之间的过渡.

12. 一质量为 m 的质点在方势阱

$$\begin{aligned} V(r) &= -V_0 & 0 < r < r_0, \\ &= 0 & r > r_0 \end{aligned}$$

内作平面运动.

(a) 在怎样的初始条件下可以应用作用角变量法?

(b) 假设这些条件成立, 试用作用角变量法求运动的频率.

13. 一质点在势 $V(x) = F|x|$ (F 是一常数) 的作用下作一维周期运动. 利用作用角变量把运动的周期表达成质点能量的函数.

14. 一质量为 m 的质点在势 $V = -k/|x|$ 作用下作一维运动. 能量为负值时, 运动是有界的和振荡的. 应用作用角变量把运动的周期表达成质点能量的函数.

15. 一质量为 m 的质点在势

$$V = \frac{a}{\sin^2(x/x_0)}$$

作用下作一维运动. 求哈密顿特征函数的积分表达式. 在怎样的条件下可以应用作用角变量? 假定符合这些条件, 试用作用角法求振荡频率. (计算 J 的积分时, 可以把被积函数处理得使平方根只出现在分母中) 在微幅振荡的极限情况下检查一下所得的结果.

16. 一质量为 m 的质点被约束在铅垂平面内某一曲线上运动, 曲线的参数方程为

$$y = l(1 - \cos 2\phi), \quad x = l(2\phi + \sin 2\phi).$$

在铅垂的 y 方向上有通常的恒定重力. 在 ϕ 的最大值小于或等于 $\pi/4$ 的所有初始条件下, 用作用角变量法求振荡频率.

17. 采用作用角的形式时, 哈密顿特征函数的宗量为原来的坐标 q_k 和作用变量 J_k . 在存在简并性的情况下, 为了用零值频率替代各简并频

率,需要建立一个从 (W_k, J_k) 到新变量 (W'_i, J'_i) 的正则变换. 把各个 J_k 看作是由式 (10-105) 定义的 J'_i 量的函数,证明下列方程依然成立:

$$\frac{\partial W}{\partial J'_i} = W'_i.$$

18. 就第六章习题 12 中所描述的系统求一个变量的线性点变换,使得哈密顿-雅可比方程是可分离的. 再用作用角变量求系统的本征频率.

19. 有一个三维谐振子,它在 x, y 方向上的力常数为 k_1 ,而在 z 方向上则为 k_2 . 应用柱面坐标(圆柱的轴位于 z 方向)并借助于相应的作用角变量描述运动,指出怎样才能求得各个频率(变换为“本征”作用角变量以消去各简并频率).

20. 用作用角变量法求力常数各不相同的三维谐振子的频率. 求各笛卡儿坐标和共轭动量的、作为作用角变量的函数的解.

21. (a) 在习题 20 的谐振子中,使所有频率都相等(各向同性振子),以致运动成为完全简并的. 只用一个作用变量表示能量,并变换为“本征”作用角变量.

(b) 利用球极坐标求解用作用角变量表示的各向同性振子问题. 再一次变换为本征作用角变量,并与 (a) 部分所得结果相比较. 这两组本征变量是否相同? 它们的物理意义是什么? 这一问题说明了简并运动对于一组以上的坐标是可分离的. 非简并振子只对于笛卡儿坐标是可分离的,对于极坐标则不然.

22. 简并的平面谐振子运动对于任何笛卡儿坐标系都是可分离的. 今有两个笛卡儿坐标系,它们的坐标轴互成 θ 角度. 求相应的两组作用角变量的关系. 注意,两组之间的变换不是转动的正交变换.

23. (a) 用复数围道积分法计算开普勒问题中 J_θ 的积分. 为使积分成为有用的形式,建议采用 $\cos \theta = x \sin i$ 这样的置换.

(b) 完成式 (10-111) 中最后几步积分以证实课文中所用 J_θ 的积分步骤.

(c) 当倾角大于 90° , 即 $\cos i$ 为负值时,结果又将如何? 特别在变换到零值频率的正则变换中,式 (10-112), 因而还有式 (10-122) 将会发生什么变化? 能否把这些方程表达成 $\cos i$ 为正、负值时都能成立的

形式?

24. 用基本方法计算开普勒问题中 J_r 的积分, 包括利用积分表在内, 但这样做时, 请明确而详细地列出所用的积分表.

25. 采用课文中概述的(或任何其他)方法证明, 三维开普勒问题中的 $2\pi\omega_r$ 就是近拱点幅角 ω .

26. 所谓开普勒轨道的彭加勒要素能够表达成

$$\begin{array}{ll} \omega_1 + \omega_2 + \omega_3, & J_\phi, \\ \frac{J_r}{\pi} \cos 2\pi(\omega_2 + \omega_1), & \frac{J_r}{\pi} \sin 2\pi(\omega_2 + \omega_1), \\ \frac{J_\theta}{\pi} \cos 2\pi\omega_1, & \frac{J_\theta}{\pi} \sin 2\pi\omega_1. \end{array}$$

证明, 它们构成了一组正则坐标, 左边一列为新坐标, 而右边则是它们的共轭动量.

27. 把有心力势场中稳定圆周运动附近的径向微幅振荡现象描述为作用角形式的一维问题. 根据势函数的泰勒级数展开式求微幅振荡的周期. 借助于 J 以及共轭角变量表示这个运动.

28. 利用式(8-54)给出的那种形式的哈密顿函数建立用作用角变量表示的相对论性开普勒运动问题. 特别是证明总能量(包括静止质量在内)为

$$\frac{E}{mc^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\pi^2 k^2}{[(J_3 - J_2)c + \sqrt{J_2^2 c^2 - 4\pi^2 k^2}]^2}}}.$$

注意, 由于轨道不再闭合, 但却依然被限制在一个平面内, 所以简并度只是部分被消除. 证明, 在 c 趋向无限大的极限情况下, 此式将化为式(10-123).

第十一章 正则微扰理论

11-1 引言

到目前为止,本书课文或习题中所讨论的几乎所有经典力学问题都可以有精确解。然而,不能因此认为力学中的所有问题,或者说多数问题都能求得完全解。确实,绝大部分力学问题可能无法精确求解。我们已经得到了两体开普勒问题的解,但是,只在相互引力作用下的经典三(质点)体运动已经证明是难以处理的。即使是两体运动的解也只是隐式,不可能得到作为时间函数的、坐标的严密显式(见节 3-8)。这就促使人们大力去发展解的近似方法。

幸好,经常出现的情况是,不能直接求解的物理问题的哈密顿函数与能够严格求解的问题的哈密顿函数只有微小的差别。因此,可以把较为复杂的问题说成是可解问题的一种微扰,而把两个哈密顿函数之差称为微扰哈密顿函数。根据微扰哈密顿函数的微小性求取近似解的各种技巧,构成了微扰理论。

应该注意,尽管哈密顿函数的变化必定是小的,但是微扰对运动的影响可能是大的。例如,考虑一个各向同性平面谐振子,亦即在 x 或 y 方向上的运动频率相等的谐振子。点振子的轨线是一简单的闭合曲线,一般是一个椭圆。假设 y 方向的力常数出现一无限小扰动,以致两个频率不再相等而且又不可公度。由于 H 的这种微小扰动,轨线不再闭合,将随着时间的推移而布满空间——不太严格的说法是,它将通过由

x 和 y 方向的振幅所限定的长方形内的每一个点。已知，地球引力场的扁圆形引起的非常微小的扰动同样会使点状（人造）卫星的运动性质发生巨大变化。在无扰动有心力场中，卫星运动被限制在一个平面内；任何引力四极微扰，不论多么小，都会使运动越出原来的平面（只要四极轴不垂直于该平面）。

微扰理论的发展要追溯到最早的天体力学时代。例如，牛顿已经认识到，月球运动的大多数振荡都是由于月球绕地球运转时，太阳对它的吸引发生微小变化而引起的。他原先想建立的、包括这些效应在内的月球理论大致相当于某种形式的微扰理论。后来在经典力学形式结构方面的许多发展，象哈密顿正则理论等，大部分也是为了要完成天体力学的微扰（天体力学中通常译为摄动——译者）技术。为了有必要高度精确地预言宇宙飞船的轨道以及由于数值计算能力的惊人提高，促使微扰理论近年来得到了进一步的发展。（然而，这些最新发展大多数都不属于我们的讨论范围。）

经典微扰理论可以分为两个方面：与时间有关的微扰和与时间无关的微扰。我们选择术语时，着眼于为量子力学而发展的微扰理论。当然，在经典的和量子的微扰技术之间有着许多相似之处。但一般说来，经典微扰理论比相应的量子力学微扰理论要复杂得多。我们将首先研究与时间有关的微扰，因为它的形式较易理解。虽然可以采用所有各种经典力学表述来探讨微扰理论，但最简单的是利用哈密顿-雅可比表述。

11-2 与时间有关的微扰(常数变值法)

令 $H_0(q, p, t)$ 代表可解的、未受扰动的问题的哈密顿函数。我们假想已通过哈密顿主函数 $S(q, \alpha, t)$ 求得了问题的

解,在 S 生成的正则变换中,新哈密顿函数 K_0 对于未受扰动的问题来讲恒等于零。因此,在未受扰动的情况中,变换后的正则变量 (α, β) 都不变。现在来考虑扰动问题,这时的哈密顿函数可以表达成

$$H(q, p, t) = H_0(q, p, t) + \Delta H(q, p, t). \quad (11-1)$$

前面已经强调指出:一个给定坐标变换的正则性质与哈密顿函数的特定形式无关。所以 $S(q, \alpha, t)$ 生成的变换

$$(p, q) \rightarrow (\alpha, \beta)$$

对于受扰动的问题依然是一个正则变换。只是现在的新哈密顿函数不会等于零,而变换后的变量也可以不是常数。对于受扰动的问题,变换后的哈密顿函数为

$$K(\alpha, \beta, t) = H_0 + \Delta H + \frac{\partial S}{\partial t} = \Delta H(\alpha, \beta, t). \quad (11-2)$$

因此,变换后变量所满足的运动方程为

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_i &= - \frac{\partial \Delta H(\alpha, \beta, t)}{\partial \beta_i}, \\ \dot{\beta}_i &= \frac{\partial \Delta H(\alpha, \beta, t)}{\partial \alpha_i}. \end{aligned} \quad (11-3)$$

式(11-3)是精确的,并未作过任何近似。如果能用这一组 $2n$ 个方程解出 α_i 和 β_i , 并把它们表达成时间的函数,那么, (p, q) 和 (α, β) 之间的变换方程就能给出作为时间函数的 q_i 和 p_i , 亦即解出了问题。然而,要求得式(11-3)的精确解,通常不会比求解原来的运动方程更容易。所以用式(11-3)求精确解并不是一条特别有效的途径。

然而, ΔH 为一微小量这一事实有益于微扰技术。这时,量 (α, β) 尽管不再是常数,但也不会迅速变化,至少与 ΔH 显含时间的情况相比是如此。只要把式(11-3)右边的 α 和 β

代之以它们的未受扰动的常数值,就能得到 (α, β) 随时间变化的一级近似:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_{1i} &= \left. \frac{\partial \Delta H(\alpha, \beta, t)}{\partial \beta_i} \right|_0; \\ \dot{\beta}_{1i} &= - \left. \frac{\partial \Delta H(\alpha, \beta, t)}{\partial \alpha_i} \right|_0.\end{aligned}\quad (11-4)$$

这里的 α_{1i} 和 β_{1i} 分别代表 α_i 和 β_i 的一级微扰解,附有下列 0 的竖直线表明求导以后的 α 和 β 应代之以它们的未受扰动的形式,即代之以常数 (α_0, β_0) . 式 (11-4) 可表达成矩阵形式,并用 γ 表示正则变量 β 和 α 的列矩阵,从而有

$$\dot{\gamma}_1 = \mathbf{J} \left. \frac{\partial \Delta H(\gamma, t)}{\partial \gamma} \right|_0, \quad (11-5)$$

式中 \mathbf{J} 是式 (8-30) 给出的矩阵. 现在能够直接求积式 (11-4) 以给出作为时间函数的 α_1 和 β_1 . 所以对于一级微扰,通过变换方程能得到作为时间函数的 (q, p) . 显然,利用式 (11-4) 右边 α 和 β 对于时间的一级依存关系,能够得到二级微扰,依次类推. 一般讲,要得到 n 级微扰解,只要求积 γ_n 的(矩阵形式的)方程

$$\dot{\gamma}_n = \mathbf{J} \left. \frac{\partial \Delta H(\gamma, t)}{\partial \gamma} \right|_{n-1}. \quad (11-6)$$

作为这些步骤的一个普通的例子,我们把不受外力作用的、质量为 m 的质点的一维运动看作是未受扰动的系统. 未受扰动的哈密顿函数为

$$H_0 = \frac{p^2}{2m}.$$

动量 p 显然是守恒的,我们把它的常数值称为 α . 这种系统的哈密顿-雅可比方程为

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (11-7)$$

由于系统是保守的,而且 x 又是循环的,因此,立即可知,哈密顿主函数的解为

$$S = \alpha x - \frac{\alpha^2 t}{2m}. \quad (11-8)$$

变换后的动量为 α , 变换后的常值坐标为

$$Q \equiv \beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = x - \frac{\alpha t}{m}$$

或

$$x = \frac{\alpha t}{m} + \beta, \quad (11-9)$$

这是对无外力作用的运动所预期的解。尽管式 (11-9) 显然可以事先料到,但是,用哈密顿-雅可比方程作出的这种正式推导,至少能说明如此定义的 α 和 β 构成了一个正则变量组。

今假设微扰哈密顿函数为

$$\Delta H = \frac{m\omega^2 x^2}{2}, \quad (11-10)$$

式中 ω 是某个常数。总哈密顿函数为

$$H = H_0 + \Delta H = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 x^2). \quad (11-11)$$

因此我们把谐振子势看作是加于无外力作用的运动的一种微扰! 根据式 (11-9), 采用 α, β 变量的微扰哈密顿函数为

$$\Delta H = \frac{m\omega^2}{2} \left(\frac{\alpha t}{m} + \beta \right)^2. \quad (11-12)$$

在受扰动系统中, α, β 的运动方程为[见式 (11-3)]

$$\dot{\alpha} = -m\omega^2 \left(\frac{\alpha t}{m} + \beta \right), \quad (11-13a)$$

$$\dot{\beta} = \omega^2 t \left(\frac{\alpha t}{m} + \beta \right). \quad (11-13b)$$

注意,

$$\dot{\beta} + \frac{t}{m} \dot{\alpha} = 0. \quad (11-14)$$

取式(11-13a)的时间微商即能求得式(11-13)的精确解:

$$\ddot{\alpha} = -\omega^2 \alpha - m\omega^2 \left(\dot{\beta} + \frac{\dot{\alpha}t}{m} \right) = -\omega^2 \alpha. \quad (11-15)$$

因此,受扰动系统内的 α 严格地随时间作简谐变化.根据式(11-13a)和式(11-9)可得 $x = -\dot{\alpha}/(m\omega^2)$,因而 x 的解也是简谐运动.于是,看作是精确运动方程的(11-13)给出了正确而熟悉的解.

但现在让我们把 $m\omega^2(\equiv k, \text{即力常数})$ 当作一个微小参量,并设法求得微扰解.右边的 α 和 β 如果代之以它们的未受扰动的值 α_0 和 β_0 即可得一级微扰.为简单起见,开始时我们将取 $x = 0$,从而 $\beta_0 = 0$,而 p 的初始值则等于 α_0 .所以一级运动方程为

$$\dot{\alpha}_1 = -\omega^2 \alpha_0 t, \quad \dot{\beta}_1 = \alpha_0 \frac{\omega^2 t^2}{m}, \quad (11-16)$$

其直接解为

$$\alpha_1 = \alpha_0 - \frac{\omega^2 \alpha_0 t^2}{2}, \quad \beta_1 = \frac{\alpha_0 \omega^2 t^3}{3m}. \quad (11-17)$$

因此, x 和 p 的一级近似解为

$$x = \frac{\alpha_1 t}{m} + \beta_1 = \frac{\alpha_0}{m\omega} \left[\omega t - \frac{\omega^3 t^3}{6} \right] \quad (11-18a)$$

和

$$p = \alpha_1 = \alpha_0 \left[1 - \frac{\omega^2 t^2}{2} \right]. \quad (11-18b)$$

用式(11-17)代式(11-13)右边的 α 和 β ,二级运动方程成为

$$\ddot{\alpha}_2 = -\alpha_0 \omega^2 \left(t - \frac{\omega^3 t^3}{6} \right),$$

$$\dot{\beta}_2 = \frac{\alpha_0 \omega^2}{m} \left(t^2 - \frac{\omega^2 t}{6} \right), \quad (11-19)$$

其解为

$$\alpha_2 = \alpha_0 - \frac{\omega^2 \alpha_0 t^2}{2} + \frac{\omega^4 \alpha_0 t^4}{24}, \quad (11-20)$$

$$\beta_2 = \frac{\alpha_0 \omega^2}{m} \left(\frac{t^3}{3} - \frac{\omega^2 t^5}{30} \right).$$

相应的 x 和 p 的二级近似解为

$$x = \frac{\alpha_0}{m\omega} \left[\omega t - \frac{\omega^3 t^3}{3!} + \frac{\omega^5 t^5}{5!} \right], \quad (11-21)$$

$$p = \alpha_0 \left[1 - \frac{\omega^2 t^2}{2!} + \frac{\omega^4 t^4}{4!} \right].$$

现在已足以看出 n 级近似解将是怎样的了。式 (11-21) 括号内的量分别为正弦和余弦展开式中的前三项。在无限级微扰的极限下, 显然

$$x \rightarrow \frac{\alpha_0}{m\omega} \sin \omega t, \quad p \rightarrow \alpha_0 \cos \omega t,$$

这是与初始条件相符的标准解。

在变换后的常值变量 (α, β) 中, 包含有未受扰动的轨道参量的信息。例如, 如果三维开普勒问题描述的是未受扰动的系统, 则一组合适的 (α, β) 就是德朗奈变量, 亦即常值作用变量 J_i 和相应角变量 w_i 中的常数项。在节 10-7 中已看到, 德朗奈变量直接与轨道参量长半轴、偏心率、倾角等相关。微扰效应促使这些参量随时间变化。如果扰动是微小的, 则在未受扰动的运动的一个周期内, 参量的变化也将是微小的。因此, 与时间有关的微扰理论——常数变值法——意味着: 受扰动系统在微小时间间隔内的运动轨道与未受扰动系统的函数形式相同, 但这种轨道参量将随时间变化。系统沿着它时刻移动的这条未受扰动的轨道, 有时称为“密切轨道”, 它的位

置和切线方向与真正轨线是瞬时匹配的。

采用微扰处理时，密切轨道的参量随时间变化的方式有两种。它可以是周期性的变化，这时，参量将在一段时间间隔内返回到它的初始值，这段时间在一级近似下通常是未受扰动的运动的周期。另一种方式是在各相继的轨道周期末，参量值可以保持一定的净增量——这时就说受扰动的参量显示出所谓久期变化。微扰的周期性效应不会改变轨道的平均参量，从整体来看，轨线看上去依然非常象是未受扰动的轨道。久期变化的意思是，不论每一个轨道周期内的变化多么微小，在经过许多周期以后，受到瞬时扰动的参量最终可以与它们的未受扰动的值差得很多。因此，在微扰计算中主要关心的往往就是这种久期项，至于周期性效应，只要把微扰对整个未受扰动的周期作平均，就可事先予以消去。实际上，我们在节 5-8 中就是这样做的，那时候，我们把扁球形地球的扰动引力势对整个卫星周期作了平均[见式 (5-90)]¹⁾。

人们往往希望直接地、而不是通过正则变量组 (α, β) 间接地确定轨道“常数”（如偏心率或倾角）对时间的依存关系。借助泊松括号形式是不难做到这一点的。令 c_i 是未受扰动系统的 (α, β) 常数的任何一组 $2n$ 个独立函数：

$$c_i = c_i(\alpha, \beta). \quad (11-22)$$

1) 情况往往比本节所描述的更为复杂。例如，轨道参量的周期性变化可能会呈现一个以上的周期。当扰动势具有它自己内在的周期性时，显然将会出现这种情况，例如，当地球绕太阳运转时，太阳引力对地-月轨道的变化微扰就是这样。通过各微扰之间的相互作用也可能表现出多重周期现象。比如说，人造卫星参量的周期性微扰可能兼有短、长两种周期，因而需要对两种周期作平均，以求得久期微扰效应。周期微扰和久期微扰的界线有时也分不大清。有些微扰在一级近似下看起来似乎是久期微扰，再检查一下，有时竟证明是一种极长周期的周期微扰。但根据不同的计算目的，把它作为久期微扰项来处理，仍旧可能是可取的。不过，把两种微扰区分开来还是有用的，通常也不难做到，特别是在一级微扰理论中。

可能有一个或更多个 c_i 是所要求的轨道参量。因此, 在受扰动系统中, 量 c_i 对于时间的依存关系决定于运动方程

$$\dot{c}_i = [c_i, K] = [c_i, \Delta H]. \quad (11-23)$$

但是, 把式 (11-22) 反过来, 同样可以把 $\Delta H(\alpha, \beta, t)$ 看作是 c 和 t 的函数, 所以有

$$\begin{aligned} [c_i, \Delta H] &= \frac{\partial c_i}{\partial \eta} \int \frac{\partial \Delta H}{\partial \eta} \\ &= \frac{\partial c_i}{\partial \eta} \int \frac{\partial \Delta H}{\partial c_j} \frac{\partial c_j}{\partial \eta} \\ &= [c_i, c_j] \frac{\partial \Delta H}{\partial c_j}. \end{aligned}$$

于是

$$\dot{c}_i = [c_i, c_j] \frac{\partial \Delta H}{\partial c_j}. \quad (11-24)$$

象式 (11-23) 一样, 式 (11-24) 也是 c_i 的精确的运动方程。当对未受扰动的运动计算方程的右边(包括泊松括号在内)时, 它们将成为一级微扰方程。一般讲, 当我们用 $(n-1)$ 级微扰计算右边时, 得到的将是 n 级微扰。因此, 一般形式的式 (11-24) 就对应于式 (11-6)。

在天体力学文献中, 往往可以找到用拉格朗日括号表示的式 (11-24) 的另一种形式[见式 (9-77)]。用拉格朗日括号 $\{c_k, c_i\}$ 乘 c_i 的方程并对 i 求和:

$$\{c_k, c_i\} \dot{c}_i = \{c_k, c_i\} \{c_i, c_j\} \frac{\partial \Delta H}{\partial c_j}.$$

根据式 (9-83) 所表示的定理, 此式可化为

$$-\frac{\partial \Delta H}{\partial c_j} = \{c_j, c_i\} \dot{c}_i. \quad (11-25)$$

在历史上, 天体力学的微扰方程是用定义为 $-\Delta H$ 的扰动函数 R 表示的, 以致式 (11-25) 成为

$$\frac{\partial R}{\partial c_i} = \{c_i, c_i\} c_i. \quad (11-25')$$

式(11-24)或式(11-25)常称为拉格朗日微扰方程。与时间有关的微扰理论的其他特性,则在下一节把该方法应用于某些典型例子时讨论最为相宜。

11-3 与时间有关的微扰理论的例证

A. 有限振幅平面摆的周期 在微幅振荡的极限下,平面摆象是一个谐振子,而且是等时的,即频率与振幅无关。然而,当振幅增大时,相应的势能就会偏离谐振子形式,频率将显示出对振幅有微小的依存关系。势能和谐振子极限之间的微小差异可以看作是微扰哈密顿函数,而频移则可由受扰相角的时间变化来推导。在下面节 11-4 中,我们将求得与时间无关型微扰理论中的相同频移。

在长为 l 的无重量棒的一端置一质点 m , 以构成一平面摆,其哈密顿函数为

$$H = \frac{p^2}{2ml^2} + mgl(1 - \cos\theta), \quad (11-26)$$

为简单起见,这里用 p 表示共轭于 θ 的动量。把 $\cos\theta$ 项展开成泰勒级数,能够把哈密顿函数表达成

$$H = \frac{p^2}{2ml^2} + \frac{mgl\theta^2}{2} \left(1 - \frac{\theta^2}{12} + \frac{\theta^4}{360} - \dots \right). \quad (11-27)$$

略去括号中除第一项外的其余各项即能达到微幅振荡的极限。要了解各改正项量值的概念,只要人为地引进一个参量

$$\theta_1^2 = \frac{2E}{mgl} \quad (11-28)$$

和相关参量

$$\lambda = \frac{\theta_1^2}{6} = \frac{E}{3mgl}.$$

这样,括号内的级数成为

$$1 - \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^2 + \frac{\lambda^2}{10} \left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^4 - \dots$$

已知,在最大振幅时,比值 θ/θ_1 增大到 1 的量级. 的确,当 E (因而还有振幅) 为小时, θ_1 为最大振幅. 因此,展开式的收敛率将由 λ 的量值决定. 如果只保留一个改正项,那么,一级微扰将为这个运动引进 λ 的一次项. 相同微扰哈密顿函数的二级微扰将引进 λ^2 项. 因此,为了求得运动的始终精确到 λ^2 的各项修正,必须计算哈密顿函数中 λ 项的二级微扰和哈密顿函数中 λ^2 项的一级微扰. 我们在此将始终满足于处理到 λ 的量级,亦即只保留哈密顿函数中的第一改正项,并完成一级微扰解.

由式 (11-27) 导得的、未受扰动的哈密顿函数能够表达成谐振子的形式,只要把它表达成[见式 (10-14)]

$$H = \frac{1}{2I} (p^2 + I^2 \omega^2 \theta^2), \quad (11-29)$$

式中 $I = ml^2$ 是摆的转动惯量,而

$$\omega^2 = \frac{mgl}{I} = \frac{g}{l}. \quad (11-30)$$

对于未受扰动的系统来说,与零值 K 相对应的一组适当的正则变量是作用变量 J 和角变量中的相角 β :

$$w = \nu t + \beta, \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (11-31)$$

微扰效应使 J 和 β 都随时间而变化. 把 p 和 θ 分别与 J 和 β 联系起来的变换方程在式 (10-78) 和式 (10-79) 中早已给出过,它们在这里所取的形式为

$$\begin{aligned}\theta &= \sqrt{\frac{J}{\pi I \omega}} \sin 2\pi(\nu t + \beta), \\ p &= \sqrt{\frac{I J \omega}{\pi}} \cos 2\pi(\nu t + \beta).\end{aligned}\quad (11-32)$$

在未受扰动的系统中, J 和 β 是常数, 式 (11-32) 则构成了运动的完全解. 但这些方程对于受扰动情况依然适合, 只是 J 和 β 具有待定的时间依存性.

未受扰动的哈密顿函数为 $H_0 = J\nu$, 但微扰哈密顿函数的形式为

$$\begin{aligned}\Delta H &= -\frac{mgl}{24} \theta^4 \\ &= -\frac{J^2}{24\pi^2 m p^2} \sin^4 2\pi(\nu t + \beta).\end{aligned}\quad (11-33)$$

β 和 J 对于时间的一级依存性得自

$$\dot{\beta} = \frac{\partial \Delta H}{\partial J}, \quad \dot{J} = -\frac{\partial \Delta H}{\partial \beta}, \quad (11-34)$$

每个方程的右边应采用未受扰动的解, 即 J 和 β 都被看作是常数. 因此

$$\dot{\beta} = -\frac{J}{12\pi^2 m l^2} \sin^4 2\pi(\nu t + \beta).\quad (11-35)$$

式 (11-35) 表明, 一级微扰的 $\dot{\beta}$ 在未受扰动的振荡周内是变化的. 但当我们把 $\dot{\beta}$ 对整周求平均时, 它有一净增值, 因为正弦函数的四次方的平均值为 $3/8$. 因此, β 显示出久期微扰的性质, 其恒定的变率为

$$\bar{\dot{\beta}} = -\frac{J}{32\pi^2 m l^2}.\quad (11-36)$$

从比未受扰动的周期长得多的时间来看, β 与时间的函数关系为

$$\beta = \bar{\dot{\beta}} t + \beta_0.\quad (11-37)$$

当我们把这一变化代入式 (11-32) 时表明, 就平均而言, 一级解依然是简谐的, 其频率为

$$\nu' = \nu + \bar{\beta}.$$

已知, 在未受扰动的运动中,

$$J = \frac{2\pi E}{\omega} = 2\pi\omega \frac{El}{g},$$

以致式 (11-36) 成为

$$\bar{\beta} = -\frac{\omega E}{16\pi mgl} = -\frac{\nu\theta_1^2}{16}. \quad (11-38)$$

所以在有限振幅 θ_1 处, 频率的一级相对变化为

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\bar{\beta}}{\nu} = -\frac{\theta_1^2}{16}, \quad (11-39)$$

这是一个熟知的结果, 当我们对运动的椭圆函数表示式取近似时也能得到同样的结果¹⁾.

从式 (11-33) 和式 (11-34) 可知, 一级微扰中 J 的时间变化为

$$j = -\frac{J^2}{3\pi m l^2} \sin^3 2\pi(\nu t + \beta) \cos 2\pi(\nu t + \beta).$$

即使在 ϕ 的半个周期内作平均, $\sin^3 \phi \cos \phi$ 的平均值也是零, 因此 J 并不显示出久期微扰的性质. 实际上, 这一结果是能够预期到的[见式 (11-32)], 因为 J 是振幅的量度, 而这样的扰动不会使振幅随时间增长或衰减.

B. 有界开普勒问题的有心力微扰 在第三章的习题 14 中已严格地证明, 如果在库仑势上附加一形式为 $1/r^2$ 的势, 那么在转动坐标系中有界问题的轨道是一个椭圆. 事实上, 椭圆是转动的, 而近拱点则表现出进动. 这里, 我们将根

1) 例如, 可参阅 K. R. Symon, *Mechanics*, 3d. ed., p. 215, 特别是式 (5.35).

据一级微扰理论来求这种进动的速率，并考虑一个形式更为一般的扰动势。

假设总的势为

$$V = -\frac{k}{r} - \frac{h}{r^n}, \quad (11-40)$$

式中 n 是一个大于或等于 $+2$ 的整数。再设 h 是一个常数，它使第二项对第一项来说是一个微扰。因此，微扰哈密顿函数为

$$\Delta H = -\frac{h}{r^n} \quad n \geq 2. \quad (11-41)$$

在未受扰动的问题中，近拱点在轨道平面内的角度位置由常值 $\omega = 2\pi\omega_2$ 给出[见式(10-140)]。由于微扰， ω 对时间的依存关系决定于

$$\dot{\omega} = 2\pi \frac{\partial \Delta H}{\partial J_2} = \frac{\partial \Delta H}{\partial l}, \quad (11-42)$$

式中利用了关系式 $J_2 = 2\pi l$ [见式(10-131)]。借助于未受扰动的运动来计算 ΔH 及其微商，能够得到一级微扰结果。此外，很少对 ω 的瞬时变化感兴趣。在微扰形式具有价值的多数场合， $\dot{\omega}$ 是如此之小，以致 ω 在一个轨道周期内的变化是很难、甚至是不可能觉察到的；只要把许多轨道周期后 ω 的久期变化量度出来就足够了。所以，我们所要求的是 $\dot{\omega}$ 在时间间隔 τ (即未受扰动的轨道周期)内的平均值

$$\bar{\dot{\omega}} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{\partial \Delta H}{\partial l} dt.$$

由于 τ 仅是 J_3 的函数[式(10-119)与式(10-123)联立]，而微商又是对 $l = J_2/2\pi$ 的，所以微商可以提到积分号外面。因此

$$\bar{\dot{\omega}} = \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \Delta H dt \right) = \frac{\partial \overline{\Delta H}}{\partial l}. \quad (11-43)$$

但这里的微扰哈密顿函数的时间平均值为

$$\overline{\Delta H} = -h \overline{\left(\frac{1}{r^n}\right)} = -\frac{h}{\tau} \int_0^\tau \frac{dt}{r^n}. \quad (11-44)$$

利用形式为 $l dt = m r^2 d\phi$ 的角动量守恒性质, 上述积分能转换为对 ϕ 的积分:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta H} &= -\frac{mh}{l\tau} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{r^{n-2}} & (11-45) \\ &= -\frac{mh}{l\tau} \left(\frac{mk}{l^2}\right)^{n-2} \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} [1 + e \cos(\phi - \phi')]^{n-2} d\phi, & (11-45') \end{aligned}$$

式中 r 是通过轨道方程 (3-51) 用 ϕ 表示的(这里用 ϕ 代替了 θ)。一般讲, 只有含有偏心率 e 的偶次幂的那些项才会对积分有所贡献。根据式 (10-134), e 仅仅是 J_2 和 J_3 的函数, 所以对 l 的微商也包含有 e 及其各次幂。

特别有意义的是两种特殊情况。其中之一是在 $n = 2$ 时出现的情况, 这在本例证开始时就曾提到过。这时的平均微扰哈密顿函数简单地为

$$\overline{\Delta H} = -\frac{2\pi mh}{l\tau},$$

而久期进动速率则为

$$\bar{\omega} = \frac{2\pi mh}{l^2\tau}, \quad (11-46)$$

这与第三章习题14相一致。

另一种情况是 $n = 3$ 时的情况(这是一种 $1/r^3$ 微扰势), 对此, 式 (11-45') 化为

$$\overline{\Delta H} = -\frac{2\pi m^2 h k}{l^3\tau}$$

和

$$\bar{\omega} = \frac{6\pi m^2 h k}{l^4 \tau} \quad (11-47)$$

为什么选择 $n = 3$ 有着特殊的重要性呢？这是因为广义相对论预示了牛顿运动的某种改正，而这种改正可以解释为 r^{-3} 势。爱因斯坦场方程的施瓦茨希尔德 (Schwarzschild) 球对称解相当于形式为式 (11-41) 的开普勒问题中的附加哈密顿函数¹⁾，这时有 $n = 3$ 和

$$h = \frac{k l^2}{m^2 c^2}, \quad (11-48)$$

因此，式 (11-47) 成为

$$\bar{\omega} = \frac{6\pi k^2}{\tau l^2 c^2}. \quad (11-49)$$

为把式 (11-49) 应用于绕日运转物体的久期进动速率，令 k 等于 GMm ，并采用适合于未受扰动椭圆的式 (3-63)，它的形式为

$$l^2 = mka(1 - e^2). \quad (11-50)$$

这样，式 (11-49) 能够表达成

$$\bar{\omega} = \frac{6\pi}{\tau(1 - e^2)} \left(\frac{R}{a} \right), \quad (11-51)$$

式中的 R 是所谓太阳的引力半径²⁾：

$$R = \frac{GM}{c^2} = 1.4766 \text{ 公里}. \quad (11-52)$$

-
- 1) 参阅 W. M. Smart, *Celestial Mechanics* (New York, Wiley, 1953) p. 243, 书中提到首先认识等效微扰势的是埃丁顿 (Eddington). 较近的参考可参阅巨著: Misner, Thorne 和 Wheeler, *Gravitation* (San Francisco, California: Freeman, 1973). r^{-3} 改正势可以从那里的式 (25.42) 给出的等效一维能量方程来推导, 不过, 先要仔细地辨认书中大量的精巧符号, 并记住在大多数表达式中几乎看不到 e .
 - 2) 这一数值是以 1968 年美国喷气推进实验室 (JPL) 的天文学常数组为基础的. 参阅 W. G. Melbourne 等的 JPL 技术报告 32-1306, 1968 年 7 月 15 日.

对于行星水星, $r = 0.2409$ 恒星年, $G = 0.2056$, $a = 5.790 \times 10^7$ 公里, 因此, 式 (11-51) 预言: 由广义相对论所引起的、水星近日点的平均进动速率为

$$\bar{\omega} = 42.98''/\text{世纪}.$$

观察到的水星近日点的久期进动, 比这数值大 100 倍以上, 即每世纪 $5599.74 \pm 0.41''$. 这大部分是由二分点的进动引起的, 亦即由黄经相对于银河系的参照点的运动引起的(见第五章节 5-8). 余下的大约 $531.54''/\text{世纪}$ 则由其他行星对水星轨道的微扰所引起. 只有从观测到的进动中减去这两种效应以后, 那微小的广义相对论效应才会变得明显起来. 1973 年的计算¹⁾估计这种剩余效应为 $41.4'' \pm 0.9''/\text{世纪}$, 这与理论预言的偏离就不很明显了.

还应说明的一点是, 适用于相对论效应的常数 h [即式 (11-48)] 是 l 值的函数. 因此可能会问, 在求 ω 时, 为什么不把对 l 的微商也作用于 h 呢? 这里的关键在于 h 并不是作为一个正则动量与 l 之间有什么函数关系, 式 (11-48) 仅仅说明如何用轨道参量 l 的数值决定常数 h 的数值. 换句话说, 微扰势只通过 r 才能成为动力学变量的函数, 不能把它理解为是与速度相关的势.

C. 人造卫星轨道和二分点的进动 这里要考虑的一系列问题在节 5-8 中都已讨论过, 而且标题也相同. 我们希望描述的是相互间有着引力作用的两个物体的相对运动, 一个物体是球对称的或者是点状的, 另一个则稍呈扁平形、并具有一个总的引力四极矩. 地球形状稍呈扁平的实际影响是: 太阳和地球作用于赤道鼓出部分的力矩将引起地球转轴极其缓慢地进动. 反之, 对于象月球或人造卫星这样的绕地球作轨

1) C. W. Misner, K. S. Thorne 和 J. A. Wheeler, Gravitation (1973), p. 1112.

道运动的客体的影响，是使轨道平面绕地球图轴进动。由极缓慢进动速率表现出来的小量值引力四极项表明，微扰处理应该是一种极好的近似。我们在这里实际上将只研究人造卫星轨道的微扰情况。至于相应的二分点进动现象，则可以非常相似地根据相同微扰哈密顿函数来讨论（虽然所用符号不同）。我们将把它留作习题。

由于这里强调的是点状人造卫星绕着比它重得多的地球的运转，所以节 5-8 中的符号在此将被倒过来： m 代表卫星质量、 M 代表地球质量。因此，根据式 (5-88)，作用于卫星的总的势函数为

$$V = -\frac{k}{r} + \frac{k}{M} \frac{(I_3 - I_1)}{r^3} P_2(\gamma), \quad (11-53)$$

式中 $k = GMm$ ； r 是指向卫星的矢径与地球图轴之间的夹角 θ 的余弦。所以微扰哈密顿函数为

$$\Delta H = k \frac{I_3 - I_1}{2Mr^3} (3 \cos^2 \theta - 1). \quad (11-54)$$

极角 θ 可以用轨道倾角 i 和矢径在轨道平面内相对于近拱点的角度 ψ (所谓真近点角) 表示，并服从关系式¹⁾

$$\cos \theta = \sin i \sin(\psi + \omega), \quad (11-55)$$

式中 ω 是近拱点的幅角。再作几步运算，能把 ΔH 对角度的依存关系改写成

$$3 \cos^2 \theta - 1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cos^2 i \right) - \frac{3}{2} \sin^2 i \cos 2(\psi + \omega). \quad (11-56)$$

1) 式 (11-55) 可用许多方法求得，例如，可把轨道平面矩阵转动成 xy 平面。但最简单的也许是以图 10-5 为基础，使用某种老式的三角法。当 $OB = 1$ 时， $BC = \cos \theta$ ，但 $AB = \sin(\psi + \omega)$ ，所以 BC 也等于 $\sin i \sin(\psi + \omega)$ 。

由于微扰量是小的，所以我们的主要兴趣在于久期微扰的累计效应。例如，轨道平面的进动表现为节线角 Q (或升交点黄经，见第 569 页) 的久期变化。根据前一例证中所作的相同论证，在取微商之前先求 ΔH 的平均值，即可得到这种久期效应：

$$\begin{aligned}\overline{\Delta H} &= \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \Delta H dt = \frac{m}{l\tau} \int_0^{2\pi} r^2 \Delta H d\phi \\ &= \frac{m^2 k^2 (I_3 - I_1)}{2Ml^3\tau} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos \phi) \\ &\quad \times (3\cos^2\theta - 1) d\phi. \quad (11-57)\end{aligned}$$

式(11-56)中 $\cos 2(\phi + \omega)$ 这一项对积分并无贡献，因为它在积分区间内对于 1 和 $\cos \phi$ 都是正交的。因此，平均微扰哈密顿函数为

$$\overline{\Delta H} = \frac{\pi m^2 k^2 (I_3 - I_1)}{2Ml^3\tau} (1 - 3 \cos^2 i). \quad (11-58)$$

注意到 Q 和 i 与作用角变量相关联的式 (10-132) 和 (10-139)，即可从下式求得 \bar{Q} 的一级微扰值：

$$\bar{Q} = 2\pi \bar{\omega}_1 = 2\pi \frac{\partial \overline{\Delta H}}{\partial J_1} = \frac{1}{l} \frac{\partial \overline{\Delta H}}{\partial \cos i}$$

或

$$\bar{Q} = - \frac{3\pi m^2 k^2 (I_3 - I_1) \cos i}{Ml^4\tau}.$$

最后，利用式 (11-50)，每次未受扰动转动中 Q 的平均相对变化为

$$\frac{\bar{Q}_\tau}{2\pi} = - \frac{3}{2} \frac{I_3 - I_1}{Ma^2} \frac{\cos i}{(1 - e^2)^2}, \quad (11-59)$$

这是把式 (5-96) 推广到椭圆卫星轨道时的适当表达式。

一旦知道了平均微扰哈密顿函数，就能得到其他平均轨道参量的微扰效应。例如，轨道平面内近拱点的久期进动是直接由

$$\bar{\omega} = 2\pi\bar{\omega}_2 = 2\pi \frac{\partial \overline{\Delta H}}{\partial J_2} = \frac{\partial \overline{\Delta H}}{\partial l}$$

给出的。由式(11-58)，在 ΔH 中正则变量 J_2 以两种形式出现，一种是分母中的 l^3 项，另一种则是包含有 $\cos i = J_1/J_2$ 的那一项。完成求导即得

$$\frac{\bar{\omega}\tau}{2\pi} = \frac{3}{4} \frac{l_3 - l_1}{M a^2 (1 - e^2)} (5 \cos^2 i - 1). \quad (11-60)$$

$\bar{\omega}$ 的最大值与 \bar{Q} 的最大值大致相同，但它们对 i 的函数依存关系差别很大。在 $63^\circ 26'$ 和 $116^\circ 34'$ 的临界倾角处，近拱点的进动(至少对于一级微扰)为零，并在这两个点的上、下变号。显然，对于一级微扰， a 或 e 都没有久期变化，因为 $\overline{\Delta H}$ 并不包含任何角变量的常值部分。因此，在对轨道周期求平均时，密切椭圆的形状和大小不会随时间变化。

从前两个例证中可以看出，广义相对论改正和引力四极场都能引起轨道运动物体的近拱点的进动。所以 R. 迪克提出了这样的问题：观测到的水星近日点的进动或许不能用太阳引力势的微小扁平性来解释。根据我们已经获得的微扰结果，能够得到这一问题的部分解答。应该记得，开普勒定律表明：行星运动的周期正比于长半轴的 $3/2$ 次方。因此，根据式(11-51)，广义相对论所预言的不同行星的进动速率应按 $a^{-5/2}$ 变化。如果进动由于太阳的扁平性引起的，则式(11-60)将得出按 $a^{-7/2}$ 的变化规律。除了水星以外，关于其他行星的资料颇为粗糙，但确实比较接近于广义相对论的预言。一个更强的因素也许是水星轨道的升交点的进动。如果太阳引力场扁平得足以说明观测到的近日点的进动，则从式(11-51)可知，升交点也应有一个显著的伴随进动。相反，广义相对论的微扰完全是有心的，因此，角动量矢量(因而还有轨道平面的法向)不会受到它的影响。已有的观测并没有提出：任何明

显的节点进动无法用其他已知微扰说明。尽管观测误差相当大,但与扁平性效应的预言相比要小好多倍。看来,太阳引力场的四极部分所能说明的不过是观测到的近日点进动的很少一部分变异。

11-4 与时间无关的、一个自由度的一级微扰理论

与时间无关的微扰并不论及未受扰动的系统原有的常数对时间的依存关系,而是设法找到在受扰动系统中不变的那些量。这只能适用于保守系统,它们在未受扰动的状态时是可分离的和周期性的,而且在受扰动情况下依然如此。这些限制仍允许有许多有趣的问题。在天体的尺度上,即使充分考虑到对开普勒运动的所有保守微扰,行星运动的所有三个坐标毕竟仍是周期的。其次,在原子的经典描述中,象塞曼效应中出现的那种扰动磁场也不会从性质上改变电子运动的周期本质。天体力学中与时无关的微扰理论通常被称为冯蔡佩尔法¹⁾,在这里,我们给出的是玻恩为了老量子论的需要而发展起来的另一种形式。

为了简单起见,首先要描述的形式只适用于一个自由度的系统,而且也只限于一级微扰。在下一节中,我们将去掉这些限制。现在考虑一个未受扰动的周期系统,它是用作用角变量 ω_0 , J_0 和哈密顿函数 $H_0(J_0)$ 描述的。未受扰动的频率为

$$\nu_0 = \frac{\partial H_0}{\partial J_0}, \quad \text{而 } \omega_0 = \nu_0 t + \beta_0. \quad (11-61)$$

由于系统的 ω_0 是周期的,而且周期又等于 1, 所以 q 能表达

1) 也称彭加勒法。采用冯蔡佩尔法这一别名,有时是为了用来表明一种传统的步骤,亦即把短周期微扰项与长周期微扰项分开来处理的做法(与后面第 625 页上关于简并性的讨论相比较)。但实际做法决不是始终如一的。参阅本章末的书目提要,也可参阅 R. A. Howland, Jr., *Celestial Mechanics* 15, 327 (1977), 特别是第 1 节。

成一个傅里叶级数,其形式为¹⁾

$$q = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k(J_0) e^{2\pi i k \omega_0} \quad (11-62)$$

[与式(10-91)相比], p 的表达式亦与此式相类似. 今假定加一个微扰,使哈密顿函数看起来象

$$H = H_0 + \epsilon H_1, \quad (11-63)$$

式中 ϵ 是某个微小参量,它从 0 开始连续地变化. 由于受扰动系统依然是周期的,所以必须有一组适合于该系统的新的作用角变量 (ω, J) , 哈密顿函数则为 $H = H(J)$. 新的 J 是常数, ω 则是时间的线性函数:

$$\omega = \nu t + \beta, \quad (11-64)$$

式中的新频率 ν 得自 $H(J)$. 不过 (ω_0, J_0) 依然是受扰动系统的正则变量,因为它们是通过一个正则变换与原来的变量组 (q, p) 联系的. 正如反复强调过的那样,变换的正则性质,因而还有变量组的正则性质与哈密顿函数的特定形式无关. 但现在的 J_0 不是一个常数, ω_0 也不是时间的线性函数. 然而 q 依然是 ω_0 的周期函数,因为式(11-62)只是用 ω_0 和 J_0 表示的、 q 的正则变换方程. 因此,现在的情况是,当 q 经历一整周运动, ω 和 ω_0 都增加 1.

故两组正则变量 (ω_0, J_0) 和 (ω, J) 必须用一个正则变换相关联,该变换的生成元 $Y(\omega_0, J)$ 可从哈密顿特性函数的哈密顿-雅可比方程求得. 由于微扰哈密顿函数是小的,所以生成函数与恒等函数必然只相差一个微小量. 在 ϵ 的一级近似下,生成函数可表达成

$$Y(\omega_0, J) = \omega_0 J + \epsilon Y_1(\omega_0, J). \quad (11-65)$$

我们所要做的是找到 H 对 J 的函数关系,从而求得受扰动频

1) 这里不采用求和约定比较方便.

率 ν . 当然, H 也是 ϵ 的函数. 如果用 $\alpha(J, \epsilon)$ 表示 J 和 ϵ 的函数 H , 则在一级近似下,

$$\alpha(J, \epsilon) = \alpha_0(J) + \epsilon \alpha_1(J). \quad (11-66)$$

因此, 对于

$$H(w_0, J_0) = H\left(w_0, \frac{\partial Y}{\partial w_0}\right) = \alpha,$$

哈密顿-雅可比方程在 ϵ 的一级近似下能表达成

$$\begin{aligned} H_0\left(\frac{\partial Y}{\partial w_0}\right) + \epsilon H_1\left(w_0, \frac{\partial Y}{\partial w_0}\right) \\ = \alpha_0(J) + \epsilon \alpha_1(J). \end{aligned} \quad (11-67)$$

这里的 H_0 和 H_1 通过 Y 依然是 ϵ 的函数. 为了求得式 (11-67) 的右边, 并始终只到 ϵ 的一次项为止, 这样, 我们显然必须把 H_1 中的 Y 代之以它的零级近似, 即 $w_0 J$. 其次, H_0 中的 J_0 可通过变换方程

$$J_0 = \frac{\partial Y}{\partial w_0} = J + \epsilon \frac{\partial Y_1}{\partial w_0}$$

用 J 表示. 为了在 ϵ 的一级近似下把 H_0 表达成 J 的函数, 可把 $H_0(J_0)$ 在 $J_0 = J$ 附近展开成泰勒级数, 并只保留 ϵ 的一次项. 严格地讲, 泰勒展开式中的微商都是在 $J_0 = J$ 处计值的、对 J_0 的微商, 但是, 只要用 J 置换 $H_0(J_0)$ 中的 J_0 , 就能把它们表达成对 J 的微商, 而不会失去其严密性. 所以式 (11-67) 中的 H_0 项可表达成

$$\begin{aligned} H_0\left(J + \epsilon \frac{\partial Y_1}{\partial w_0}\right) \\ = H_0(J) + \epsilon \frac{\partial Y_1}{\partial w_0} \frac{\partial H_0(J)}{\partial J}. \end{aligned} \quad (11-68)$$

根据式 (11-61), 现在的哈密顿-雅可比方程为

$$H_0(J) + \epsilon \left[H_1(w_0, J) + \nu_0 \frac{\partial Y_1}{\partial w_0} \right]$$

$$= \alpha_0(J) + \varepsilon \alpha_1(J). \quad (11-69)$$

使 ε 的次数相同的各项相等, 即得

$$\alpha_0(J) = H_0(J), \quad (11-70)$$

这正是 $\varepsilon \rightarrow 0$ 的极限情况下所能预期到的结果, 并有

$$\alpha_1(J) = H_1(\omega_0, J) + \nu_0 \frac{\partial Y_1}{\partial \omega_0}. \quad (11-71)$$

式 (11-71) 初看起来似乎有点奇怪, 因为左边只是 J 的函数, 而右边却是 J 和 ω_0 的函数. 因此, 只能断言: 式中的 Y_1 应保证右边与 ω_0 有关的各项相互抵销, 只剩下与 ω_0 无关的常数项. 但是, 不难看出, Y_1 的微商并没有常数项. 决定 ω 的变换方程为

$$\omega = \frac{\partial Y}{\partial J} = \omega_0 + \varepsilon \frac{\partial Y_1}{\partial J}. \quad (11-72)$$

因此, 为了使系统经历一个周期时 ω 和 ω_0 都增加 1, 就要求 Y_1 必须是 ω_0 的周期函数:

$$Y_1(\omega_0, J) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_k(J) e^{2\pi i k \omega_0}. \quad (11-73)$$

事实上, 正因为 Y_1 具有式 (11-73) 的形式, 使 (ω, J) 有条件成为作用角变量. 因此, 从式 (11-73) 可知, Y_1 对 ω_0 的微商中 $k=0$ 时的那一项, 即常数项恒等于零. 因而式 (11-71) 能写成

$$\alpha_1(J) = \overline{H_1(\omega_0, J)} - \left[(\overline{H_1} - H_1) - \nu_0 \frac{\partial Y_1}{\partial \omega_0} \right], \quad (11-74)$$

式中横线表示对 ω_0 的整个周期所作的平均. 如果 α_1 仅是 J 的函数, 则括号中的量必然被抵销, 所以我们就得到两个条件:

$$\alpha_1(J) = \overline{H_1(\omega_0, J)}, \quad (11-75)$$

和

$$\frac{\partial Y_1}{\partial \omega_0} = \frac{\bar{H}_1 - H_1}{\nu_0} \quad (11-76)$$

两个方程中的第一个告诉我们如何去完成 H 对于 J 的函数关系(在一级近似下)。我们通过 (ω_0, J_0) 用未受扰动的运动表示微扰哈密顿函数,并对整个运动周期求平均。余下的对于 J_0 的函数关系则与 α_1 对于 J 的函数关系相同(在同级近似下)。用 α 表示时,新的频率为

$$\nu = \frac{\partial \alpha(J)}{\partial J} = \nu_0 + \epsilon \frac{\partial \alpha_1}{\partial J} \quad (11-77)$$

第二个方程(11-76),现在是一个能够用 H_1 的特性来解出 $Y_1(\omega_0, J)$ 的微分方程。只要求出 Y_1 ,则 (ω_0, J_0) 和 (ω, J) 之间的关系也就决定了(在一级近似下),于是根据式(11-62)和式(11-64)即能求得作为时间函数的 (q, p) 解。但应注意,如果我们只要知道新频率,则根本不需求出 Y_1 ;在这一级近似下,式(11-75)已经足够了。

这种经典形式对于熟悉量子力学中与时间无关的微扰理论的读者并不陌生。在那里的一级近似下,能量本征值(哈密顿函数)的偏移由微扰哈密顿函数的矩阵元(对未受扰动的运动作平均)给出。为了求得能量偏移,并不需要知道受扰动的波函数,正象我们在这里不需要知道 Y_1 一样。

有一个简单的例子可以说明这种过程。考虑一下节 11-3 中所论述的有限振幅平面摆的问题。根据式(11-33),微扰哈密顿函数可以用 J_0 和 ω_0 表达成

$$\epsilon H_1 = - \frac{J_0^2}{24\pi^2 m l^2} \sin^4 2\pi\omega_0 \quad (11-78)$$

(应该记得,式中的 l 在这里只是摆的长度)。为方便起见,可把式(11-28)的微小量 θ_1^2 ,即未受扰动情况中的振幅的平方

作为参量 ϵ . 由于 \sin^4 在一个周期内的平均值为 $3/8$, 所以 α_1 的函数形式为

$$\alpha_1(J) = \bar{H}_1 = \frac{-J^2}{64\pi^2 m l^2 \theta_1^2}$$

和

$$\frac{\nu - \nu_0}{\epsilon} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial J} = -\frac{J}{32\pi^2 m l^2 \theta_1^2} \quad (11-79)$$

为了在 ϵ 的一级近似下计算 $\nu - \nu_0$, 允许用 J_0 替代 J . 此外, 根据式 (10-76) 和式 (11-28) 可得

$$J_0 = \frac{2\pi E}{\omega_0} = \frac{\pi m g l \theta_1^2}{\omega_0} = 2\pi^2 m l^2 \theta_1^2 \nu_0 \quad (11-80)$$

因此, 式 (11-79) 可简化为

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial J} = -\frac{\nu_0}{16},$$

而 ν 的相对变化为

$$\frac{\Delta \nu}{\nu_0} = \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} = -\frac{\theta_1^2}{16},$$

这与式 (11-39) 的结果相同.

在某些事例中, H_1 等于零, 一级微扰不会给出有用的结果. 例如, 在所谓非谐振子中, 微扰哈密顿函数中的一次项具有 $E q^3$ 的形式. 但由于 $\sin^3 2\pi\omega_0$ 的平均值为零, 因而在一级近似下不会有总的频移, 人们必须寻求更高级的近似. 二级以及更高级的微扰, 以及推广到多自由度系统的问题, 都将在下一节中讨论.

11-5 与时间无关的高级微扰理论

我们将就保守的、任意自由度周期性可分离系统以及采用更高级的微扰参量 ϵ 重复前节的论证. 对于未受扰动的问

题,我们将假设作用角变量组 (w_{0i}, J_{0i}) 使未受扰动的哈密顿函数 H_0 仅仅是作用变量的函数,因而 w_{0i} 将是时间的线性函数. 采用式 (10-91') 中的符号,象 q_k 和 w_{0i} 之间的关系就能简洁地表达成

$$q_k = \sum_j A_j^{(k)}(\mathbf{J}_0) e^{2\pi i \mathbf{j} \cdot \mathbf{w}_0}, \quad (11-81)$$

式中 \mathbf{j} , \mathbf{w}_0 和 \mathbf{j}_0 分别为整数下标、角变量和作用变量的 n 维矢量.

在受扰动系统中, $(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}_0)$ 依然是一组适用的正则变量. 当用 $(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}_0)$ 组表示时,受扰动哈密顿函数能够展开成微扰参量 ϵ 的幂函数:

$$H(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}_0, \epsilon) = H_0(\mathbf{J}_0) + \epsilon H_1(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}_0) + \epsilon^2 H_2(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}_0) + \dots \quad (11-82)$$

我们要寻求的是从 $(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}_0)$ 到新变量组 (\mathbf{w}, \mathbf{J}) 的正则变换,它使 \mathbf{J} 都是常数,因而 \mathbf{w} 都是时间的线性函数. 以这一变量组表示时, H 仅是 \mathbf{J} (和 ϵ) 的函数,把它表达成对于 \mathbf{J} 的函数形式,即得

$$\alpha(\mathbf{J}, \epsilon) = \alpha_0(\mathbf{J}) + \epsilon \alpha_1(\mathbf{J}) + \epsilon^2 \alpha_2(\mathbf{J}) + \dots \quad (11-83)$$

为了通过给定级小量 ϵ 来求得受扰动的频率,只要找到适当的函数 $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ 就可以了,因为到那时,代表频率的矢量

$$\nu = \nu_0 + \epsilon \frac{\partial \alpha_1}{\partial \mathbf{J}} + \epsilon^2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \mathbf{J}} + \dots \quad (11-84)$$

从 $(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}_0)$ 到 (\mathbf{w}, \mathbf{J}) 的正则变换的生成元为 $Y(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}, \epsilon)$, 它相应的 ϵ 展开式为

$$Y(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}, \epsilon) = \mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{J} + \epsilon Y_1(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}) + \epsilon^2 Y_2(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}) + \dots \quad (11-85)$$

我们要寻求的 Y 是适当的哈密顿-雅可比方程

$$H\left(\mathbf{w}_0, \frac{\partial Y}{\partial \mathbf{w}_0}, \varepsilon\right) = \alpha(\mathbf{J}, \varepsilon) \quad (11-86)$$

的解。象前面一样,要得到含有 ε 给定次幂的各 α 项,可以把两边展开成 ε 的幂函数,并合并两边同次项的系数。我们将以二级微扰的计算作为例子来说明这个过程。这时,哈密顿-雅可比方程化为

$$\begin{aligned} H_0\left(\frac{\partial Y}{\partial \mathbf{w}_0}\right) + \varepsilon H_1\left(\mathbf{w}_0, \frac{\partial Y}{\partial \mathbf{w}_0}\right) \\ + \varepsilon^2 H_2\left(\mathbf{w}_0, \frac{\partial Y}{\partial \mathbf{w}_0}\right) \\ = \alpha_0(\mathbf{J}) + \varepsilon \alpha_1(\mathbf{J}) + \varepsilon^2 \alpha_2(\mathbf{J}). \end{aligned} \quad (11-87)$$

左边各项通过 Y 的微商都是 ε 的函数:

$$\mathbf{J}_0 = \frac{\partial Y}{\partial \mathbf{w}_0} = \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial Y_1}{\partial \mathbf{w}_0} + \varepsilon^2 \frac{\partial Y_2}{\partial \mathbf{w}_0}. \quad (11-88)$$

我们再一次把 H_i 各项在 $\mathbf{J}_0 = \mathbf{J}$ 附近展开成泰勒级数,并在 H_0 中保留到 ε^2 项,在 H_1 中保留到 ε 的一次项,在 H_2 中则直接用 \mathbf{J} 代替 \mathbf{J}_0 。用矩阵符号表示时, H_0 和 H_1 的展开式将成为

$$\begin{aligned} H_0\left(\frac{\partial Y}{\partial \mathbf{w}_0}\right) &= H_0(\mathbf{J}) + \left(\varepsilon \frac{\partial Y_1}{\partial \mathbf{w}_0} + \varepsilon^2 \frac{\partial Y_2}{\partial \mathbf{w}_0}\right) \\ &\quad \times \frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{J}} + \frac{1}{2} \left(\varepsilon \frac{\partial Y_1}{\partial \mathbf{w}_0}\right) \\ &\quad \times \frac{\partial^2 H_0}{\partial \mathbf{J} \partial \mathbf{J}} \left(\varepsilon \frac{\partial Y_1}{\partial \mathbf{w}_0}\right), \end{aligned} \quad (11-89)$$

$$\begin{aligned} H_1\left(\mathbf{w}_0, \frac{\partial Y}{\partial \mathbf{w}_0}\right) \\ = H_1(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}) + \varepsilon \frac{\partial Y_1}{\partial \mathbf{w}_0} \frac{\partial H_1}{\partial \mathbf{J}}. \end{aligned} \quad (11-90)$$

合并式 (11-87) 中 ε 的各次幂,就得到前三个 α 项的下列表

达式:

$$\alpha_0 = H_0(\mathbf{J}), \quad (11-91a)$$

$$\alpha_1 = \nu_0 \frac{\partial Y_1}{\partial \mathbf{w}_0} + H_1(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}), \quad (11-91b)$$

$$\alpha_2 = \nu_0 \frac{\partial Y_2}{\partial \mathbf{w}_0} + \Phi_2(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}), \quad (11-91c)$$

这里,

$$\begin{aligned} \Phi_2(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}) = & H_2(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}) + \frac{\partial Y_1}{\partial \mathbf{w}_0} \frac{\partial H_1}{\partial \mathbf{J}} \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial Y_1}{\partial \mathbf{w}_0} \frac{\partial^2 H_0}{\partial \mathbf{J} \partial \mathbf{J}} \frac{\partial Y_1}{\partial \mathbf{w}_0}. \end{aligned} \quad (11-92)$$

同样, 连结 \mathbf{w} 和 \mathbf{w}_0 的变换方程为

$$\begin{aligned} \mathbf{w} = & \frac{\partial Y}{\partial \mathbf{J}} \\ = & \mathbf{w}_0 + \varepsilon \frac{\partial Y_1}{\partial \mathbf{J}} + \varepsilon^2 \frac{\partial Y_2}{\partial \mathbf{J}} + \dots \end{aligned} \quad (11-93)$$

为使 (q, p) 变量组对于 \mathbf{w}_0 和 \mathbf{w} 都是周期的, 而且周期为 1, 所有 Y_k 项都应是 \mathbf{w}_0 的周期函数, 亦即它的形式应为

$$Y_k(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}) = \sum_j B_j^{(k)}(\mathbf{J}) e^{2\pi i j \cdot \mathbf{w}_0}. \quad (11-94)$$

因此, Y_k 关于 \mathbf{w}_0 的所有微商都没有常数项, 而式 (11-91b, c) 右边第一项对 J 的函数依存性不会有什么贡献. 所以式 (11-91) 也能表达成

$$\alpha_0(\mathbf{J}) = H_0(\mathbf{J}), \quad (11-95a)$$

$$\alpha_1(\mathbf{J}) = \overline{H_1(\mathbf{w}_0, \mathbf{J})}, \quad (11-95b)$$

$$\alpha_2(\mathbf{J}) = \overline{\Phi_2(\mathbf{w}_0, \mathbf{J})}, \quad (11-95c)$$

式中横线段表示对所有 \mathbf{w}_0 的周期求平均. 我们能够方便地把所有的式 (11-95) 以共同的格式表示成

$$\alpha_i(\mathbf{J}) = \overline{\Phi_i(\mathbf{w}_0, \mathbf{J})}, \quad (11-95')$$

式中 $\Phi_0 = H_0$, $\Phi_1 = H_1$. 此外,式(11-91)具有相应的项,它们对于 \mathbf{w}_0 是周期的,而均值为零:

$$\nu_0 \frac{\partial Y_i}{\partial \mathbf{w}_0} = \Phi_i - \Phi_i. \quad (11-96)$$

当 $i = 0$ 和 1 时,式(11-91a)、式(11-95)和式(11-96)简化为与前节中相同的形式,只是现在它们包含有未受扰动运动的所有频率. 注意,在二级微扰中,均值中 Y_1 各项不一定等于零. 确实, Y_1 的微商本身是等于零的,但它们都已乘上了其他的函数,这些函数对 \mathbf{w}_0 将是周期的,没有理由保证乘积的平均值为零. 因此,为求得频率的二级改正,必须知道一级正则变换.(在量子力学中也有类似之处,二级本征值包含着波函数的一级改正.) 通过式(11-94)确定 Y_1 时所用的那些系数 $B_j^{(1)}$, 原则上可以从 $i = 1$ 时的式(11-96)求得. 减去平均值意味着 $H_1 - \bar{H}_1$ 能够展开成类似于式(11-81)或式(11-94)的傅里叶级数(但没有任何常数项):

$$H_1 - \bar{H}_1 = \sum_{\mathbf{j} \neq 0} C_{\mathbf{j}}(\mathbf{J}) e^{2\pi i \mathbf{j} \cdot \mathbf{w}_0}. \quad (11-97)$$

取式(11-96)中 Y_1 对 \mathbf{w}_0 之一(譬如说 w_{0k}) 的微商, 因子 $2\pi i j_k$ 将出现在前面的系数中. 因此式(11-96)左边的矩阵积能写成

$$\nu_0 \frac{\partial Y_1}{\partial \mathbf{w}_0} = \sum_{\mathbf{j} \neq 0} B_{\mathbf{j}}^{(1)}(\mathbf{J}) 2\pi i (\mathbf{j} \cdot \boldsymbol{\nu}_0) e^{2\pi i \mathbf{j} \cdot \mathbf{w}_0}. \quad (11-98)$$

从式(11-96)和式(11-97)能够求得 Y_1 级数中的系数:

$$B_{\mathbf{j}}^{(1)}(\mathbf{J}) = \frac{C_{\mathbf{j}}(\mathbf{J})}{2\pi i (\mathbf{j} \cdot \boldsymbol{\nu}_0)} \quad \mathbf{j} \neq 0. \quad (11-99)$$

其实, Y_1 中的常数项并不是以这种方式决定的, 进入 α_i 表达式的只是 Y_1 的微商, 它们并不包含常数项.

只要我们仅仅详细地作出二级微扰的步骤, 就不难看出

更高级计算的一般形式必定相似,只是代数细节将更加复杂. 对于 i 级的微扰,我们又一次能够把 α_i 表达成形式

$$\alpha_i(\mathbf{J}) = \nu_0 \frac{\partial Y_i}{\partial \mathbf{w}_0} + \Phi_i(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}). \quad (11-91d)$$

右边第一项来自 $H(\mathbf{J}_0)$ 在 $\mathbf{J}_0 = \mathbf{J}$ 附近的泰勒展开式中的第一微商项,其中差值 $\mathbf{J}_0 - \mathbf{J}$ 中的所有各项保留到 ϵ^i 这一次幂. Y_i 只能在这一项内出现,因此, Φ_i 只能包含次数小于 i 的生成元 Y_k . 依据对一、二级微扰已经作出过的论证,式 (11-91d) 中右边第一项对 \mathbf{w}_0 的整周作平均时,其均值为零,因而式 (11-95) 和式 (11-96) 对于所有各级都成立. 当然, $i > 2$ 时, Φ_i 同式 (11-92) 相比会变得越来越复杂,但它始终只包含较低一级计算中早已得到过的那些函数. 照这样一步一步地做下去,原则上就能够发展到任何一级微扰.

在这样一系列的计算中,当然会碰到一些实际问题,但是,如果未受扰动的系统是简并的,即频率组 ν_0 显示出可公度的性质,那么,概念性的困难最为严重和明显. 正象我们从式 (10-101) 所看到的,简并性的存在意味着至少有一个下标为 \mathbf{j} 的矢量使 $\mathbf{j} \cdot \nu_0 = 0$. 因此,根据式 (11-99), Y_1 的傅里叶级数中相应的系数 $B_{\mathbf{j}}^{(1)}$ 将无限地增大. 事实上,即使未受扰动的系统不是简并的,也会发生这类现象. 当整数下标 \mathbf{j} 的数值变得越来越高时,即使那些频率不是完全可公度的,也必然能找到一个矢量 \mathbf{j} 使 $\mathbf{j} \cdot \nu_0$ 非常微小(即使不等于零),而相应的系数 B 将变得非常大(即所谓“微因子”问题)¹⁾. 这种粗糙的定性观测是彭加勒在上世纪末所作的精巧证明的基础,

1) 记得在量子力学中也有过类似的现象,那里的简并性意味着有好几种状态具有相同的能量 E . 形式为 $E_i - E_j$ 的分母将因而等于零或者变得很小,甚至没有严格的简并性也会出现这种情况.

他的结论是： Y_1 的傅里叶级数、因而还有该运动的傅里叶级数仅仅是半收敛的。不过，在某些合适的下标值处，级数能够被截断而仍能给出非常精确的结果，至少对于不太长的时间是如此。

往后，将讨论出现简并性时我们能够做些什么，但在这种情况下，最好是用一个只有一个自由度的特定系统作为例子来说明二级计算。

考虑一个一维非谐振子，也就是在势能中含有 q^3 项的那种振子。这时的哈密顿函数可以表达成

$$H = \frac{1}{2m} \left[p^2 + m^2 \omega_0^2 q^2 \left(1 + \epsilon \frac{q}{q_0} \right) \right], \quad (11-100)$$

式中的 ω_0 是未受扰动的角频率：

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0 = 2\pi \sqrt{k/m},$$

q_0 是一个可以暂时不确定的参考振幅； ϵ 是一个微小的无量纲参量。把 H 看作是 ϵ 乘幂的展开式，它包含有以下各项：

$$H_0 = \frac{1}{2m} [p^2 + m^2 \omega_0^2 q^2], \quad (11-101a)$$

$$H_1 = \frac{m\omega_0^2 q^3}{2q_0} \quad (11-101b)$$

和

$$H_i = 0 \quad i \geq 2. \quad (11-101c)$$

利用未受扰动的作用角变量 (J_0, ω_0) 作为正则变量，再根据式 (10-78) 和式 (10-79)， H 的非零部分可表达成

$$H_0 = J_0 \nu_0 \quad (11-102a)$$

和

$$H_1 = \frac{m\omega_0^2}{2q_0} \left(\frac{J_0}{\pi m \omega_0} \right)^{3/2} \sin^3 2\pi \omega_0. \quad (11-102b)$$

于是，效法式 (11-95a, b)，就能得到作为 $\alpha(J)$ 的最低级的两

项:

$$\alpha_0(J) = J\nu_0, \quad \alpha_1(J) = 0.$$

为了得到二级项 $\alpha_2(J)$, 我们注意到, 由于 H_0 对于 J 是线性的, 而 H_2 则等于零, 所以 Φ_2 化为

$$\Phi_2 = \frac{\partial Y_1}{\partial \omega_0} \frac{\partial H_1}{\partial J}.$$

但是, \bar{H}_1 等于零意味着 $i = 1$ 时式 (11-96) 具有简单的形式

$$\frac{\partial Y_1}{\partial \omega_0} = -\frac{H_1}{\nu_0}.$$

把这两个结果组合起来, 即得

$$\Phi_2 = -\frac{1}{2\nu_0} \frac{\partial H_1^2}{\partial J}. \quad (11-103)$$

根据式 (11-102b)

$$H_1^2(\omega_0, J) = \frac{\nu_0 J^3}{2\pi^2 m q_0^2} \sin^6 2\pi\omega_0,$$

由此可得

$$\Phi_2(\omega_0, J) = -\frac{3J^2}{4\pi^2 m q_0^2} \sin^6 2\pi\omega_0. \quad (11-104)$$

由于 \sin^6 在一个周期内的平均值为 $15/48$, 所以 $\alpha_2(J)$ 为

$$\alpha_2(J) = -\frac{15J^2}{64\pi^2 m q_0^2}, \quad (11-105)$$

保留到 ϵ 的二次项, 受扰动的频率为

$$\nu = \frac{\partial \alpha}{\partial J} = \nu_0 - \epsilon^2 \frac{15J}{32\pi^2 m q_0^2}. \quad (11-106)$$

比较方便的是把未受扰动形式下给定能量的振子所具有的最大振幅用作 q_0 , 以致

$$\frac{m\omega_0^2 q_0^2}{2} = E,$$

或者对于最低一级来说,

$$mq_0^2 = \frac{J}{\pi\omega_0}. \quad (11-107)$$

采用这一参考振幅后,式(11-106)等于是说二级相对频移简单地为

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = -\frac{15}{16}\epsilon^2. \quad (11-108)$$

二级微扰理论的其他例子或者多自由度系统的例子将在习题中给出.

早已提到过简并性引起的微扰理论中的那些困难,例如,式(11-99)分母中的 $j \cdot \nu_0$ 等于(或接近于)零等. 经典微扰理论中关于简并性的处理比量子力学中要复杂得多. 在某些方面,特别是涉及到近简并性的处理时,它依然是一个不断探索的课题. 研究这个问题时用过的数学既精巧又复杂,要在这里对最新的进展作充分的说明是不适宜的. 目前,只能对此作一些简要的和介绍性陈述.

同前面节 10-6 中一样,当未受扰动的频率 ν_0 保证有一组或一组以上整数 j 能够使 $j \cdot \nu_0 = 0$ 时,我们所说的就是严格的(或“正常的”)简并性. 正如节 10-6 中指出过的那样,我们将能够变换到一组新的变量 (ω_0, J_0) , 对此,简并性表现为零值频率,而其余不等于零的未受扰动的频率则不是简并的. 微扰的效应在于解除简并性,使相应的频率不是严格地等于零,而是具有微小的数值,因而将会出现在解中含有微小频率(即长周期)的那些项内. 相应的角变量称为“慢”变量,这与具有非简并频率的角变量正好相反,后者将因之被称为“快”变量. 长周期项有可能表现为限定时间间隔内的久期项;例如,只要 $\nu t \ll 1$, $\sin 2\pi\nu t$ 就可以看作是 t 的线性函数.

当存在严格的简并性时,先要作出变换,变换到变量组

(ω_0, \mathbf{J}_0) . 未受扰动的哈密顿函数将只是非简并的变量 J_0 的函数; 在所有其他方面, 式(11-82)依然代表完整的哈密顿函数. 现在, 我们将设法完成微扰计算的正则变换, 但只是未受扰动的变量的变换, 那些简并变量则保持不变. 实际上, 所说的新哈密顿函数式(11-83)现在的形式为

$$\alpha(\mathbf{J}, \mathbf{J}'_0, \mathbf{w}'_0, \varepsilon) = \alpha_0(\mathbf{J}) + \varepsilon\alpha_1(\mathbf{J}, \mathbf{J}'_0, \mathbf{w}'_0) + \varepsilon^2\alpha_2(\mathbf{J}, \mathbf{J}'_0, \mathbf{w}'_0) + \dots$$

这里的 \mathbf{w}'_0 代表 m 个(简并)变量, 它们在未受扰动的问题中有零值数; \mathbf{J}'_0 则代表它们的共轭动量. 变换后的非简并动量由 \mathbf{J} 表示. 因此, 正则变换的结果是消去了“快”变量, 留下了那些“慢”变量项. 注意, 由于 ω 中的 α 是循环的, 所以变换后的动量 \mathbf{J} 是真正的运动常数, 而 $\alpha(\mathbf{J}, \mathbf{J}'_0, \mathbf{w}'_0, \varepsilon)$ 能够看作是 m 个自由度的系统的哈密顿函数. 此外, 由于 $\alpha_0(\mathbf{J})$ 是一个与其余变量无关的常数, 所以它对于 $(\mathbf{J}'_0, \mathbf{w}'_0)$ 的运动方程是无关紧要的, 并能从 α 中略去. 因此, 新的有效哈密顿函数现在将具有 ε 的量级; 实际上, “未受扰动的哈密顿函数”是 $\varepsilon\alpha_1(\mathbf{J}, \mathbf{J}'_0, \mathbf{w}'_0)$, 而在这未受扰动的问题中, \mathbf{w}'_0 不再由那些等于零的数值所组成. 如果只有一个简并性条件, 则等效问题只有一个自由度, 原则上可以直接积分. 在有更多个简并性条件时, 我们可以设法找到第二个正则变换来消去“慢”变量项, 就象对于“快”变量已经做过的那样. 但实际的运算步骤会变得非常复杂.

在论及式(11-99)时早已指出, 即使对于非简并频率, 当下标 j 变得越来越大时, 也必然会出现微小数值的除数 $j \cdot \nu_0$. 这种现象称为共振, 这意味着傅里叶展开式中某特定项的幅度会变得非常大. 所以, 不论未受扰动的频率可能是什么, 我们似乎始终无法避开简并性问题! 但情况不会都这样糟, 部分原因由于在实践中遇到的是微扰哈密顿函数的本质, 从式

(11-99) 可以看到, 值得重视的与其说是 $j \cdot \nu_0$ 的数值, 还不如说是比值

$$\frac{C_j}{j \cdot \nu_0},$$

式中 C_j 是微扰哈密顿函数 H_1 的傅里叶级数展开式 [见式 (11-97)]. 结果表明, (至少在天体力学中) 大多数微扰哈密顿函数具有所谓达朗伯特性. 尽管要牵涉到这一性质的正式数学定义¹⁾, 但粗略地说, 它的意思是, 当 j 下标的整数值大于哈密顿函数中 ϵ 的指数时, C_j 的量值一般将随下标值的增加按指数规律迅速下降. 所以式 (11-99) 中的比值不会太大, 当频率 ν_0 满足无理性条件时, 实际上可以证明展开式是收敛的.

当存在达朗伯特性时, 或者一般地讲, 当 $C_j/(j \cdot \nu_0) < O(\epsilon^{1/2})$ 时, 共振现象表现为浅共振. 至少从原则上讲, 浅共振不会扰乱微扰的展开过程, 因此是可以容许的, 而不必引进新的方法. 在有些情况中, 比值 $C_j/(j \cdot \nu_0)$ 将变得至少大于 $\epsilon^{1/2}$ 的量级, 则称为深共振. 已经设想了一些特殊方法来处理深共振问题, 特别是所谓波林 (Bohlin) 展开式, 它不是 ϵ 的而是 $\epsilon^{1/2}$ 的幂级数展开式. 进一步的探讨将步入非线性振荡共振现象的广阔而又迅速发展着的领域, 这个领域则需要一本单独的专著才能得到充分的论述.

11-6 天体力学和空间力学中特有的微扰技巧

已经看到, 自牛顿时代起, 微扰理论是与天体力学一起发展的. 由于天体力学的特殊需要, 已经发展了数量可观的特殊方法. 空间探测和近代数字计算机(几乎同时)的诞生和迅

1) 参阅 G. E. O. Giacaglia, *Perturbation Methods in Non-Linear Systems* (New York: Springer-Verlag, 1972), pp. 279—280.

速发展,使得一个近乎无人过问的领域又恢复了蓬勃的生机,还创造了一些研究微扰理论的崭新而又各具特色的方法和途径.我们并不想详细地讨论这段漫长的历史,无论是古老的还是近期的.我们只想描述发展的趋向、并向读者介绍文献中所用的通常是专门的术语.

一般的微扰理论之间往往是有区别的,它们导致不同的解析公式以及特殊的微扰法,包含有受扰动系统的方程的各种数值解.(也存在一些混合的方法,所以区分只能是粗略的.)前面所讨论的微扰格式都是一般微扰理论的例子.早期在天体力学中尝试的所有微扰法都可归入“一般”类.最初所用的是“常数变值法”,它是在十八世纪内时断时续地从不适当的起点发展起来的.最后是拉格朗日于1782年成功地把这一方法建立在坚实的基础上(当然,不是采用前面所描述的正则形式).

在天体力学中,微扰法的结构在很大程度上受到所论问题的特有性质的影响.直至最近,所考虑的力全都是引力,大部分是点质量之间的引力.月球问题,即月球绕地球的运动始终显得很突出,因为太阳的微扰同几乎所有其他天体情况相比都大得多.从牛顿开始的几个世纪内,月球理论的“主要问题”一再受到关注.这里的地球和月球被看作是两个质点,它们的质心沿一固定的开普勒椭圆绕日运行.甚至在这一简化的模型中,在考虑微扰哈密顿函数的形式时,也能窥到情况的复杂性.出现在 ΔH 中的都是三个物体之间的距离的分量.但这些距离是矢径以及它们之间的夹角的复杂函数,特别当运动不限于一个平面时,情况就更复杂. ΔH 中的各项通常表达为有关角度的傅里叶级数.而角度又依次用各种开普勒近点角、最后以时间来表示的复杂的级数表达式.因此,即使用未受扰动的运动来表达,微扰哈密顿函数也应表示为

嵌套的三角级数。一般微扰理论中所作大量数学努力，都是为了寻找 ΔH 的固有发展，注意力通常是在扰动函数 $R = -\Delta H$ 的形式上。

十九世纪初发展的另一种一般微扰理论有时称为“坐标变值法”。在它的最简形式中，受扰动两体问题的运动方程是以笛卡儿坐标表示的，微扰哈密顿函数为 $\Delta H = \epsilon V_1$ 。因此，运动方程看起来就象是

$$\mu \ddot{x}_i = -\frac{kx_i}{r^3} - \epsilon \frac{\partial V_1}{\partial x_i},$$

这里的 μ 是两体问题的约化质量。然后寻找 ϵ 的幂级数展开式形式的解：

$$x_i = x_i^{(0)} + \epsilon x_i^{(1)} + \epsilon^2 x_i^{(2)} + \dots,$$

办法是把这个展开式代入运动方程并合并 ϵ 的各次幂。这一方法的好处是能直接给出所要求的受扰动坐标，但它无法说明微扰使轨道以及描述轨道的参量发生畸变的情况。

德朗奈于十九世纪六十年代关于月球理论“主要问题”的解析解曾是一般微扰方法的一件杰作。他的方法可以认为是最早形式的冯蔡佩尔法。实际上，他的方法是用一个独立的正则变换消去扰动函数中依存于某个角变量的各个周期项。经过 20 年的努力，德朗奈在两厚卷著作中发表了他的结果，其中包含的不过是一些共有要素的受扰动运动的代数公式，譬如象地球和月球轨道的偏心率以及月球和地球的平均角速度等微小量的乘幂的展开式。这些量的组合的乘幂一直保留到七次方，在某些情况中，则保留到九次方。所需的代数处理的统计数字是惊人的——500 次以上独立的正则变换，涉及到所有 10,000 个以上的各别项——全部靠手工完成，没有借助任何其他方法。

较为高级的方法（有些是半数值的）是十九世纪末设想出

来的.它们包含有一些所谓中间轨道的更为复杂的参考轨道,受扰动的运动就根据它们来测定.但是,即使对基本模型作一番描述,这里的篇幅也是不允许的,因此,我们最多只能提一下其中某些方法的名称,例如,汉森法或希尔法.

人造卫星和数字计算机带来了重新认识微扰方法的需要和可能.雷达和激光观测使天体坐标的观测精度提高了好几个数量级,从而发现月球和内行星的现有表格是不适当的.霍里(Hori)和德普里特(Deprit)于廿世纪六十年代独立地改进和重新阐述了冯蔡佩尔法,使计算至少在概念上得到了极大的简化.采用冯蔡佩尔法时,为了得到作为时间函数的运动,人们必须把变换方程(11-93)反过来以求得作为 w 的函数的 w_0 .这种反演运算如果以一种系统化方式来解析地进行往往非常困难.德普里特提出的方法是:在 ϵ 非常小的极限情况下,根据无限小正则变换方程来建立有限 ϵ 值的变换方程.在基本原理中,对于函数在一次I. C. T.后的变化的微分方程,人们所用的是泊松括号解[见式(9-114)和(9-115)].构成这种解的迭代法,以及为了展开扰动函数的嵌套级数所需要的步骤,均适宜于用计算机来完成代数处理.德普里特和他的合作者于1970年用这种方法很快地重复了德朗奈的方案,至少做到了更高一级小量.把1970年计算机打印出来的结果同1869年德朗奈手算得到的表格比较可见,他所作出的大量代数运算中只有七个系数是错误的.

在十九世纪中叶前,没有引进太多的特殊微扰技巧,而且至少在手动台式计算器出现之前,它们几乎无法付诸实践.最简单的(虽然不是最早的)方法称为克罗韦尔(Crowell)法,它包含有(n 个相互作用物体的)牛顿运动方程的直接数值积分.方程所用的坐标多半是笛卡儿坐标,但也可以用极坐标来表示.注意,这个方法没有利用未受扰动运动的已有知识.

但在恩科 (Encke) 法中, 则用坐标与它们在未受扰动运动中的数值差来表示运动方程. 由于这些差值是小的, 至少在最初是小的, 所以在数值积分中可以使用较大的时间步长. 然而, 在某一时刻以后, 差值会变得大起来, 特别是存在久期微扰效应时更是如此. 在一段时间之后, 就得把参考轨道校正到比如说某一新的密切轨道, 并附有时间进程校正量. 克罗韦尔法更为直截了当, 它比恩科法更适宜于作计算机运算. 对于只涉及到少数几个轨道周期的问题, 比如说空间飞船在行星间的飞行过程, 就可考虑采用这种方法. 现在, 数值积分技巧已得到高度的发展, 因此, 往往可以对计算结果预先设定一误差界限, 这是一般微扰理论非常难以做到的事情.

另一方面, 运动方程的数值解不能解答运动的长期稳定性问题. 从十八世纪初叶以来, 天文学家们一直在争论太阳系的稳定性问题. 在引力作用下被束缚的行星运动是否会一直继续下去, 或者说各种微扰是否会最终导致行星的碰撞, 或者使得这个或那个行星脱离太阳系? 也许正是这些担心使得部分微扰法的早期创始人对久期项怀有极其浓厚的兴趣. 他们尽一切可能去鉴别这些久期项, 如有可能就把它们消除掉. 例如, 如果能够证明长半轴具有久期微扰项, 结论将是: 行星终将离开太阳系或者被拉向太阳. 早就证明, 在一级微扰中并不存在这种久期项, 因此可以不必担心. 然而, 较高级的微扰计算又重新提出了这一问题. 彭加勒证明, 展开式中所用的多重周期傅里叶级数仅仅是半收敛的, 这令人遗憾地宣告了上述结论“尚未证实”.

只是在近几十年内, 由于应用了新的(高度抽象的)数学技巧, 才使稳定性问题得到了完全崭新的阐述. 采用微分拓扑学方法对相空间内可能轨道的球形特性作出了检验. 与西格尔 (Siegel)、科尔莫戈罗夫 (Kolmogorow)、阿诺德 (Arnold)

和莫泽 (Moser) 等人的名字相联系的一系列研究证明, 稳定的有界运动对于一个相互间只有引力作用的 n 个物体的系统是可能的. 这就是说, 相当一部分轨道(即有限测度群)被限制在相空间的特定区域内, 并且无休止地保持准周期运动¹⁾. 这一成就的辉煌以及新方法的效能也许比特定的结果意义更大, 因为太阳系的最终命运很可能将取决于耗散力和其他非引力.

11-7 绝热不变量

1911年, 在设法解决把量子概念引进物理学的第一次索尔瓦会议上, 提出了经典力学中一个容易使人误解的简单问题. 考虑一个象平面摆一样振荡着的弦线上的摆锤, 弦线穿过天花板上的一个小孔. 今假想该弦线被缓慢地拉上或放下, 缓慢的程度使得摆长在一个振荡周期内只有极小的变化. 在这一过程中, 振荡频率会发生什么情况呢? 注意, 摆的能量是不守恒的, 因为当弦线的长度变化时要对系统做功(或者是系统对外界做功). 但用初等方法即可证明, 对于极其缓慢的长度变化, E/ν 将是常数²⁾. 一般认为, 这一比值正好是作用变量 J , 在参量缓慢变化下作用变量的绝热不变性对于研究量

-
- 1) 这是相当奇怪的, 因为人们按照统计力学所预期的结果几乎与此相反. 为了使表示单个系统统计特性的系综概念是正确的, 最好证明: 系统点最终将会通过相空间内与它的初始宏观性质(如能量)相一致的所有区域. 相空间轨道应遍历它能到达的全部空间. 值得注意的是, 可能运动的拓扑学分析使得每一个人都感到高兴. 正象已经说过的那样, 某些轨道(有限测度集)无休止地保持准周期性运动. 但绝大多数初始条件将使运动遍历所有适合的相空间, 最后将按要求尽可能地接近任何一个给定点.
 - 2) 按照 1911 年索尔瓦会议的至少一个报告 (Abhandlungen der Deutschen Bunsen-Gesellschaft, No.7, 1914, p. 364), 洛仑兹在讨论中提到, 他曾经在以前的某个时候向爱因斯坦提出过这个问题. 爱因斯坦回答说: 他已证明, 如果长度连续而又无限缓慢地变化, 那么, 摆的能量将始终正比于 ν .

子力学的物理学家是一种极为理想的性质。正象前面(第 574 页)已经看到的那样,为了描述原子系统的特定状态,早期采用的诀窍是使作用变量的数值量子化。众所周知,原子周围的环境(例如周围的电磁场)的缓慢变化不会导致状态之间的跃迁,所以 J 的绝热不变性是令人满意的。

研究绝热不变性的原始动机已不再有意义,但近年来对这一课题的兴趣又强烈地恢复了。在等离子体物理学、聚变技术、带电粒子加速器甚至在银河天文学中都找到了实际的应用。这一领域内的研究依然在继续,最后的结论如何还很难说。我们在这里只能提出某些基本考虑和简要地描述一下现行的探索趋势。为简单起见,只准备研究一个自由度的周期系统,虽然一般是不难把它推广到多自由度系统的(在没有简并性的情况下)。伯格(Burgers)于 1917 年给出了这种处理的大致轮廓。

我们来考虑一个包含有参量 a 的一个自由度的系统。所用方法不言而喻地假定:系统对于常数 a 最初是保守的。然后“接通” a 对时间的依存性,让 a 在一段长时间内缓慢地变化,最终再回复到常数值。当 a 不变时,运动是周期的,参量的缓慢变化不会改变运动的周期性质。虽然运动在任何一个周期内的变化极微,但在一段长时间内,运动的性质可能经历巨大的定量变化。因此,上述对时间的依存性的接通具有某种微扰的性质,而我们将探索运动的久期变化。

当参量 a 是常数时,系统将由作用角变量 (ω_0, J_0) 描述,并保证哈密顿函数为 $H = H(J_0, a)$ 。把这些变量看作是从原有的正则变量组 (q, p) 通过生成函数 $W^*(q, \omega_0, a)$ 推导而得的,将有助于下面的推导。当然,通常的哈密顿-雅可比方程导致形式为 $W(q, J_0, a)$ 这样的生成函数,但是,两个生成函数一般由某个勒让德变换相关联[见式(9-24)]:

$$W^*(q, w_0, a) = W(q, J_0, a) - J_0 w_0. \quad (11-109)$$

当允许 a 随时间变化时, (w_0, J_0) 当然仍是适用的正则变量, 但由于 a 与时间有关, 所以现在的生成函数将是时间的显函数. 因此, (w_0, J) 组的适当的哈密顿函数现在应是

$$\begin{aligned} K(w_0, J_0, a) &= H(J_0, a) + \frac{\partial W^*}{\partial t} \\ &= H(J_0, a) + a \frac{\partial W^*}{\partial a}. \end{aligned} \quad (11-110)$$

现在的 J_0 不再是一个常数, w_0 也不再随时间线性地变化. 事实上, 哈密顿函数中的第二项是一个微扰哈密顿函数, 而且象常数变值法中一样, J_0 对于时间的函数关系决定于运动方程

$$j_0 = - \frac{\partial K}{\partial w_0} = - a \frac{\partial}{\partial w_0} \left(\frac{\partial W^*}{\partial a} \right), \quad (11-111)$$

当然, 其中括号内的微商象 K 一样是由 J_0, w_0 和 a 表示的. 我们将在一级微扰理论的框架内寻求久期项, 即寻求 J_0 在未受扰动运动的一个周期内的平均值 (对于适当的 a). 由于 a 是缓慢地变化的, 在这段时间内可以把 a 看作是一个常数, 所以平均值能表达成

$$\begin{aligned} j_0 &= - \frac{1}{\tau} \int_{\tau} a \frac{\partial}{\partial w_0} \left(\frac{\partial W^*}{\partial a} \right) dt \\ &= - \frac{a}{\tau} \int_{\tau} \frac{\partial}{\partial w_0} \left(\frac{\partial W^*}{\partial a} \right) dt \\ &\quad + O(a^2, \dot{a}). \end{aligned} \quad (11-112)$$

根据式 (10-13') 可知, W 由一个不定积分给出:

$$W = \int p dq.$$

所以在 w_0 的一个周期内, 生成函数 W 将增加 J_0 . 同时, 由于 w_0 增加 1, 所以 $J_0 w_0$ 也增加 J_0 . 根据式 (11-109), W^* 应是 w_0 的周期函数, W^* 及其对 a 的微商能表达成一个傅里叶级数:

$$\frac{\partial W^*}{\partial a} = \sum_k A_k(J_0, a) e^{2\pi i k \omega_0}. \quad (11-113)$$

平均值 \bar{J}_0 的形式因而为

$$\begin{aligned} \bar{J}_0 = & -\frac{\dot{a}}{\tau} \int_{\tau} \sum_{k \neq 0} 2\pi i k A_k(J_0, a) \\ & \times e^{2\pi i k \omega_0} dt + O(\dot{a}^2, \ddot{a}). \end{aligned}$$

由于被积函数没有常数项, 所以积分为零, 即

$$\bar{J}_0 = 0 + O(\dot{a}^2, \ddot{a}), \quad (11-114)$$

\bar{J}_0 在 \dot{a} 的一级近似下没有久期变化, 这就证明了所要求的绝热不变性性质.

现在让我们来看一下如何把这种推导详细地用于谐振子问题:

$$H = \frac{1}{2m} (p^2 + m^2 \omega^2 q^2),$$

式中 ω 可以是时间的显函数. 从 (q, p) 组到 (ω_0, J_0) 组的正则变换方程由式(10-18)和式(10-79)给出, 它们可表达成有利于计算 W^* 的形式:

$$\begin{aligned} J_0 = \pi m \omega q^2 \csc^2 2\pi \omega_0 &= -\frac{\partial W^*}{\partial \omega_0}, \\ p = m \omega q \cot 2\pi \omega_0 &= \frac{\partial W^*}{\partial q}. \end{aligned} \quad (11-115)$$

在只差一些常数 (因而是无关紧要的) 项的情况下, 求积式(11-115)所得到的 W^* 为

$$W^*(q, \omega_0, \omega) = \frac{m \omega q^2}{2} \cot 2\pi \omega_0. \quad (11-116)$$

对 ω 的微商为

$$\frac{\partial W^*}{\partial \omega} = \frac{m q^2}{2} \cot 2\pi \omega_0,$$

或者根据式(10-78), 表达成 ω_0, J_0 和 ω 的函数:

$$\frac{\partial W^*}{\partial \omega} = \frac{J_0}{4\pi\omega} \sin 4\pi\omega_0. \quad (11-117)$$

因而 J_0 由单项傅里叶展开式给出:

$$J_0 = -\frac{\dot{\omega}}{\omega} J_0 \cos 4\pi\omega_0, \quad (11-118)$$

就象预期的那样,此式没有常数项. 至此,式(11-118)始终是严密的. 同样, ω_0 和时间之间的严格联系决定于 ω_0 的运动方程

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_0 &= \frac{\partial K}{\partial J_0} = \frac{\partial H}{\partial J_0} + \dot{\omega} \frac{\partial}{\partial J_0} \left(\frac{\partial W^*}{\partial \omega} \right) \\ &= \frac{\omega}{2\pi} + \frac{\dot{\omega}}{4\pi\omega} \sin 4\pi\omega_0. \end{aligned} \quad (11-119)$$

为了计算 J_0 在一个周期内的平均值(至少包含有第一改正项),我们开始作出近似. 首先假设在受扰动运动的某一特定周期内,比值

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega} \equiv \epsilon \quad (11-120)$$

是一个常数,并保证 $\epsilon\tau \ll 1$. 式(11-120)对应于变化

$$\omega = \omega_0 e^{\epsilon t} \approx \omega_0(1 + \epsilon t), \quad (11-121)$$

式中 t 是从这个周期间隔的开始时刻测定的,在此时刻, $\omega(0) = \omega_0$. 式(11-119)现在的形式为

$$\dot{\omega}_0 = \frac{\omega}{2\pi} + \frac{\epsilon}{4\pi} \sin 4\pi\omega_0. \quad (11-119')$$

它的零级解为

$$2\pi\omega_0^{(0)} = \omega_0 t,$$

适当地选择了初相已使式中的常数项为零. 保留到 ϵ 的一次项,式(11-119')成为

$$\dot{\omega}_0^{(1)} = \frac{\omega_0(1 + \epsilon t)}{2\pi} + \frac{\epsilon}{4\pi} \sin 2\omega_0 t, \quad (11-122)$$

其解为

$$2\pi\omega_c^{(1)} = \omega_0 t + \frac{\varepsilon}{2} \times \left[\omega_0 t^2 + \frac{1 - \cos 2\omega_0 t}{2\omega_0} \right]. \quad (11-123)$$

与此相应,改正到 ε 的二次项时, J_0 的方程能表达成

$$\frac{d \ln J_0}{dt} = -\varepsilon \cos \left(2\omega_0 t + \varepsilon \left\{ \omega_0 t^2 + \frac{1 - \cos 2\omega_0 t}{2\omega_0} \right\} \right).$$

把余弦函数加以展开,并把 ε 项作为一级小量处理,该微商可简化为

$$\frac{d \ln J_0}{dt} = -\varepsilon \cos 2\omega_0 t + \varepsilon^2 \times \left\{ \omega_0 t^2 + \frac{1 - \cos 2\omega_0 t}{2\omega_0} \right\} \sin 2\omega_0 t.$$

为得到久期特性,可以在 $t = 0$ 时求该方程在整个运动周期内的平均值,也就是在时间 $\tau = 2\pi/\omega_0$ 内的平均值. 取平均后,除了大括号内包含有 t^2 的第一项外,右边的其余各项都被消去. 因此,最后结果为

$$\overline{\frac{d \ln J}{dt}} = \frac{\pi \varepsilon^2}{\omega_0} = \frac{\omega_0 \delta^2}{4\pi}, \quad (11-124)$$

式中 $\delta = \varepsilon \tau$, 即 ω 在整个周期 τ 内的相对变化. 与此相应, J 在整个周期内的相对久期变化为

$$\frac{\Delta J}{J} = \frac{\delta^2}{2}. \quad (11-125)$$

正如根据更为一般的考虑所预料的那样,作用变量的久期变化中没有 ε 的一次项,只有保留 $\varepsilon^2 = (\dot{\omega}/\omega)^2$ 量级的量才能得到 J 的非零长期变化项.

已经证明,在述及带电粒子在电磁场中的运动这样的应用中,作用变量的绝热不变性特别有用.最简单的实例之一,也是具有重要实用结果的一个实例与电子在均匀(或近乎均匀)的恒定磁场中的运动有关.众所周知,这种情况中的带电粒子将绕磁力线作圆周运动.这能够在最基本的水平上从牛顿运动方程来证明.在恒定磁场 \mathbf{B} 中的洛仑兹力为 $(\mathbf{v} \times q\mathbf{B}/c)$, 因此运动方程(1-4)为

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v} \times \frac{q\mathbf{B}}{mc}. \quad (11-126)$$

式(11-126)表明,速度矢量 \mathbf{v} 在量值不变的情况下相对于磁场方向转动,其角频率为

$$\omega_c = -\frac{qB}{mc}. \quad (11-127)$$

借助于拉格朗日力学亦可作出等价的推导.在节 5-9 中已经证明,这种情况中的拉氏函数可以表达成

$$L = \frac{mv^2}{2} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}, \quad (11-128)$$

式中的 \mathbf{M} 是用它的角动量 \mathbf{L} 定义的粒子运动的磁矩:

$$\mathbf{M} = \frac{q\mathbf{L}}{2mc}. \quad (11-129)$$

[见式(5-108).]用 z 轴沿着 B 方向的圆柱坐标表示时,平行于 \mathbf{B} 的 \mathbf{M} 的分量为

$$M_z = \frac{qr^2\dot{\theta}}{2c}, \quad (11-130)$$

而拉氏函数为

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + \frac{q}{2c} Br^2\dot{\theta}. \quad (11-131)$$

由于拉氏函数中的 θ 是循环的,所以相应的正则动量

$$p_{\theta} = mr^2\dot{\theta} + \frac{qBr^2}{2c} \quad (11-132)$$

是一个运动常数。其次,径向运动方程为

$$m\ddot{r} - r\dot{\theta} \left(m\dot{\theta} + \frac{qB}{c} \right) = 0. \quad (11-133)$$

式(11-132)和(11-133)的稳态运动解相当于 r 和 $\dot{\theta}$ 是常数, $\dot{\theta}$ 的数值为

$$\dot{\theta} = \omega_c \equiv -\frac{qB}{mc}, \quad (11-134)$$

这与式(11-127)相一致¹⁾。在这种情况下, $p_{\theta} = -(qBr^2/2c)$,而对应于 θ 的作用变量为

$$J_{\theta} = \oint p_{\theta} d\theta = -\frac{\pi qBr^2}{c}. \quad (11-135)$$

根据式(11-130),有

$$\frac{qr^2}{c} = \frac{2M}{\omega_c}$$

(当这一运动中的 M_z 等于 M 时),因而 J_{θ} 也能表达成

$$J_{\theta} = -\frac{2\pi MB}{\omega_c} = \frac{2\pi mc}{q} M. \quad (11-136)$$

绝热不变性定理意味着当磁场的变化足够慢时, J_{θ} 保持不变。从式(11-136)可知,磁矩同样是绝热不变量。在式(11-135)基础上的另一种表述是, B 乘以轨道面积(即穿过轨道平面的力线数目)保持不变。

如果磁场位形保持静态但稍为有点不均匀,有可能引起 B 的绝热变化。因此,如果质点在 x 方向有一小的速度分量,合漂移将使粒子缓慢地移至具有不同 B 值的区域。由式(11-

1) 角频率 ω_c 可以称为回旋频率或迴转频率,并等于拉莫尔频率式(5-104)的两倍。当然,这里不能应用拉莫尔定理,这是因为绕力线的转动动能至少与动能余项的量值相同,因而不可能略去 B 的二次项。

134)、(11-135) 和 (11-136) 可得, 绕 B 线运动的动能为

$$T_{(\theta)} = \frac{mr^2\dot{\theta}^2}{2} = MB. \quad (11-137)$$

假设带电粒子在 B 增加的方向上漂移, 根据式 (11-137), 转动动能将增加. 由于总动能守恒, 沿力线纵向漂移的动能必定减少. 最终, 漂移速度变为零, 运动的方向倒转过来. 如果能作出安排使 B 最终沿另一方向增加, 带电粒子仍将受到约束, 并在两个端点之间往复漂移, 这就是所谓的镜约束原理. 当然, 整个过程更为复杂, 但却明显地说明了 M 的绝对不变性的意义.

应该记得, 几乎所有稳定态或稳定运动附近的微幅振荡现象都能通过谐振子来描述. 因此, 谐振子在参量缓慢(或不那么缓慢)变化下 J 的不变性具有广泛实际意义. 例如, 对带电粒子加速器中的振荡的研究, 已经得出了大量新的见解. 此外, 数学家们还用该问题增进了我们对那些系数与时间相关的微分方程的解的认识. 这些近期研究的结果数量太多, 在此无法详细介绍, 更不用说推导了. 但是, 特别感兴趣的谐振子问题的两个性质还是可以提一下的.

习惯上总是引进一个时间变量 $t' = \epsilon t$, 这里的 ϵ 是一个小参量. 因此, “微扰”哈密顿函数中出现的 ω 的时间微商为

$$\dot{\omega} = \epsilon \frac{d\omega}{dt'}$$

因而 ω 对 t' 的微商可认为是由 $\omega(t')$ 变化的某个固定“程序”给出的, 实施这一程序的时间尺度则根据 ϵ 值的变化而变化. 所以, 不论 ω 是缓慢变化还是快速变化, 都只要用单个参量来量度. 假设程序从 ($t' = -\infty$ 时) 某个初始常数值开始, 到 ($t' = +\infty$ 时) 某个其他常数值结束, 那么, 我们所要考虑的就不是 J 在整周运动内的变化, 而是 J 从它的初始数值到最

终数值的变化。出人意料的结果是，如果 $\omega(t')$ 的性能充分良好，则 J 的变化比人们预期式 (11-125) 可能导致的结果要小得多。已经证明¹⁾，如果 $\omega(t')$ 在实数轴上或实数轴附近是实的、有界的和解析的，则 J 的变化是按指数律变化的小量：

$$\frac{J(+\infty) - J(-\infty)}{J(+\infty)} \propto O(e^{-d/\epsilon}), \quad (11-138)$$

式中 d 是一个正的实数，它与复数 t' 平面内 ω 的解析性带宽有关。

一个更为有趣的结果是，具有与时间相关的频率的谐振子有一个严格的不变量，它在缓慢变化的极限情况下化为作用变量 J 。对于拉氏函数和哈密顿函数分别为

$$L = \frac{m}{2} [\dot{x}^2 - \omega^2(t)x^2];$$

$$H = \frac{1}{2m} [p^2 + m^2\omega^2(t)x^2] \quad (11-139)$$

的线性谐振子，这个不变量通常表达成

$$I = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{r^2} + (r\dot{x} - x\dot{r})^2 \right], \quad (11-140)$$

式中 $r(t)$ 是满足微分方程

$$\ddot{r} + \omega^2(t)r - r^{-3} = 0 \quad (11-141)$$

的某个函数。 I 的不变性的正式数学推导颇为冗长，但它的物理意义——以及它为什么不变的道理——则能根据某种简单的考虑予以说明。具有常值 ω 的线性谐振子运动可以看作是各向同性平面谐振子的(譬如说) x 分量。如果 ω 与时间有关，这种关系是决不会改变的。例如，考虑一个与时间相关的

1) 可以列出好几本参考书，但是，最容易阅读的也许是 R. E. Meyer, *J. Applied Math. and Phys. (ZAMP)*, **24**, 293 (1973).

有心力势

$$V = \frac{m}{2} \omega^2(t) r^2,$$

其拉氏函数为

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2} [\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 - \omega^2(t) r^2] \\ &= \frac{m}{2} [(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2) + (\dot{y}^2 - \omega^2 y^2)]. \end{aligned} \quad (11-142)$$

用笛卡儿坐标表示时,问题将分解成两个形式为式(11-139)的独立线性谐振子。采用平面极坐标时,则由于 L 中的 θ 是循环坐标,所以角动量依然守恒,从而有一个运动方程化为

$$r^2 \dot{\theta} = l/m \equiv h, \quad (11-143)$$

式中的 h 是引进的新常数。因此,这个线性谐振子依然能够看作是某个各向同性平面谐振子的 x 投影, h 则用来量度单位质量的常值角动量。根据式(11-142),径向运动方程为

$$m\ddot{r} + m\omega^2 r - mr\dot{\theta}^2 = 0,$$

或者借助于式(11-143),表达成

$$\ddot{r} + \omega^2 r - \frac{h^2}{r^3} = 0. \quad (11-144)$$

利用 h 的守恒性质,能够构成一个运动常数,它被定义为

$$I' = \frac{1}{2} \left[\frac{h^2 x^2}{r^2} + (r\dot{x} - x\dot{r})^2 \right]. \quad (11-145)$$

为了求出 I' 的常数值,可以注意到由于 $x = r \cos \theta$,我们有

$$r\dot{x} - x\dot{r} = -h \sin \theta,$$

因而

$$I' = h^2/2.$$

已知,总有可能选择任意的初始 y 振幅以及 x, y 运动之间的初始位相,使 h 值为1。例如,假设最初一段时间的 ω 等

于常数值 ω_0 , 以致 x 和 y 对时间的依存关系为 $x = x_0 \sin \omega_0 t$, $y = y_0 \cos(\omega_0 t + \alpha)$, 那么, 根据 h 的定义有

$$h = x\dot{y} - y\dot{x} = \omega_0 x_0 y_0 \cos \alpha.$$

如果 ω 往后随时间而变化, h 当然会保持它的初始值, 适当选择 y_0 或 α , 则不论 x_0 值等于多少, 都能使此值等于 1. 所以, 总是有可能使任何一个与时间相关的线性振子与一个 $h = 1$ 的相应各向同性平面振子关联在一起. 对于这一相关的问题, 径向运动方程 (11-144) 化为式 (11-141), $h = 1$ 时的 I' 正好就是不变量式 (11-140). 从物理上说, I 的严格不变性, 即式 (11-140) 只不过是相关的各向同性平面振子问题中角动量守恒的一种表述¹⁾. 其余的只要考虑 I 与 J 的关系. 如果 ω 是常数, 则径向方程的可能解是 r 为一常数, 其值为 $\omega^{-1/2}$. (相关的平面问题的运动是圆周运动.) 由于这时的 \dot{r} 等于零, 所以量 I , 即式 (11-140) 为

$$I = \frac{1}{2\omega} (\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) = \frac{E}{m\omega} = \frac{J}{2\pi m}.$$

正如所预期的那样, 在零级近似下, 严格的不变量正比于作用变量 J .

我们在这里只可能概述绝热不变量课题的最重要部分. 这个领域的各个分支, 涉及经典物理学、量子物理学和近代数学的许多领域, 详细情况可参阅本章所列的参考书. 可以预期, 绝热不变量的基础理论及其应用将来必定会得到进一步的发展.

1) 对于与时间有关的线性谐振子, I 的严格不变性首先是由小刘易斯 (H. R. Lewis, Jr.) 清楚地阐明的, 参阅 *Jour. Math. Phys.*, **9**, 1976 (1973), 虽然相关量的恒定性早已在加速器理论中观测到了. 与相关的平面振子的联系, 显然是由 Eliezer 和 Gray, *SIAM J. Appl. Math.*, **30**, 463 (1976) 首先注意到的.

推荐参考书目

M. Born, *Mechanics of the Atom* 经典力学微扰理论的外观略为不同,这与人们是对物理学、天体力学、宇宙飞船的飞行,还是对近代数学感兴趣有关。直到最近,物理学教科书仍倾向于采用玻恩的论述,它本身是“老”量子力学发展的产物。玻恩讨论的主要是与时间无关的微扰理论,大部分集中在他的第四章中,但也有一些零星片段散见于全书各个部分。

E. J. Saletan 和 A. H. Cromer, *Theoretical Mechanics* 引用这一参考书是因为它是遵循玻恩路线的较好的论述之一。该书只讨论与时间无关的微扰。详加考虑的主要是谐振子的一些例子。也有一短节论述了绝热不变量。

J. M. A. Danby, *Fundamentals of Celestial Mechanics* 一旦超越了开普勒力学和大部分牛顿力学的水平,天体力学几乎完全由微扰理论和三体问题所组成。因此,论述天体力学微扰理论的文献实际上与论述天体力学本身的文献一样广泛,引用时必须精心挑选。在可以称为微扰理论的经典版本中,这本教科书相对较新(1962),它包含有一些最近的应用。对于通常总是趋向于整页布满公式的领域来说,本书的叙述可以说是异常清晰的,并且还有一个详加注释的文献目录。但未提及冯蔡佩尔法,也没有应用象李级数这样的较新发展。

B. Garfinkel, *Lagrange-Hamilton-Jacobi Mechanics, in Space Mechanics, Part 1*, ed. by J. B. Rosser 这一论文中有十页简要而高度浓缩地按照天体力学行家的观点描述了微扰理论。认为读者已具有正则变换理论和哈密顿-雅可比方程的基础,它从常数变值法到冯蔡佩尔法一气呵成。这一切正是人们所需要的。

Y. Hagihara, *Celestial Mechanics Vol 2: Perturbation Theory* (分列于两个部分) 相反,这一参考书约用 900 页的篇幅,极详尽地论述了微扰理论在天体力学中的应用。近代的和历史的参考文献几乎都很完整。如果想知道用微扰技巧求解天体力学问题方面已经做过什么工作,则本书似乎正好合适,虽然该书的文字有时很艰涩。这里有用李级

数重新表述的冯蔡佩尔法，但稳定性理论的最新探索则保留于另一卷中。

R. Deutsch, *Orbital Dynamics of Space Vehicles* 可能会问，空间技术是否已开辟了一个不同于天体力学的经典力学领域。这种分离也许起因于一种说法：“空间力学”已随着计算机的出现而诞生。这一参考书的绝大部分读来象是一本天体力学教科书，而且是一本好的教科书。书中详尽地讨论了微扰理论的各种方法，包括象汉森法这样的特殊方法。但举出的应用则大部分来源于空间技术，例如人造卫星轨道的微扰等。

G. E. O. Giacaglia, *Perturbation Methods in Non-Linear Systems* 这本书也许是微扰理论最近发展概观的最佳参考书——从彭加勒和林斯特德 (Lindstedt) 直到阿诺德和莫泽——而且相当易于理解。书中的观点似乎基本上是应用数学家的观点。这是一本浅灰色打字体复印本，确实不便于阅读。

R. Abraham 和 E. Marsden, *Foundations of Mechanics* 这里用来研究和说明力学的是一种新的语言，即微分拓扑学语言。初次接触这一领域的物理学读者必须先熟悉这种语言，以便理解它的含义。在受扰动运动的整体稳定性领域内，这种新的语言似乎已经取得了其他手段所无法取得的显著成功。然而对于较为常见的那些力学领域，采用这种叙述方式究竟有何好处是值得怀疑的。对于那些向往于新语言的读者，这本新修订的教科书几乎无所不包。约用了 156 页介绍微分拓扑学的初步知识以及各种各样的计算，但都要求读者能够适应抽象的数学方法。天体力学方面的应用构成了第四部分 (pp. 619—740)。

J. Moser, *Stable and Random Motions in Dynamical Systems* 这一薄本由 1972 年所作的五篇讲稿组成。作者本人对稳定性问题最新论述的许多进展作出过贡献。他在这里给出了本世纪内的发展概况，特别强调了天体力学。在阐述定理时往往不加证明，大量繁复的数学演算都留待读者去完成。不过它在表达较新技巧的风韵和成就方面都比前面一本参考书好。

T. G. Northrop, *Adiabatic Motion of Charged Particles* 虽然二十世纪六十年代初期以来的一些发展在这里当然是找不到的，但是这一

简要的专著对于绝热不变量基础上的各种计算的复杂性作了很好的介绍。应用针对的是等离子体“装置”，比如磁镜装置等。

B. Lehnert, *Dynamics of Charged Particles* 这一参考书同前面一本书几乎是同时发表的，只是对同一个课题的讨论更为详尽。所讨论的与等离子体装置相关的问题，例如从带电粒子发出的辐射等都与绝热不变量无关。

习 题

1. 采用与时间相关的微扰理论方法把线性谐振子的解（认为它的势是对自由质点运动的一种微扰）一直进行到三次项，假设初始条件为 $\beta_0 = 0$ 。求 x 和 p 两者作为时间函数的表达式，并证明，它们与通常谐和解展开式中各相应项是一致的。

2. 质点 m 悬挂于一力常数为 k 、并垂直悬挂着的弹簧的一端，该弹簧服从胡克定律。弹簧的另一端按照 $z_1 = a \cos \omega_1 t$ 上、下振荡。把 a 看作是一个小量，并利用常数变值法求 m 随时间运动的一级微扰解。当 ω_1 接近于未受扰动的频率 ω_0 时将出现什么情况？

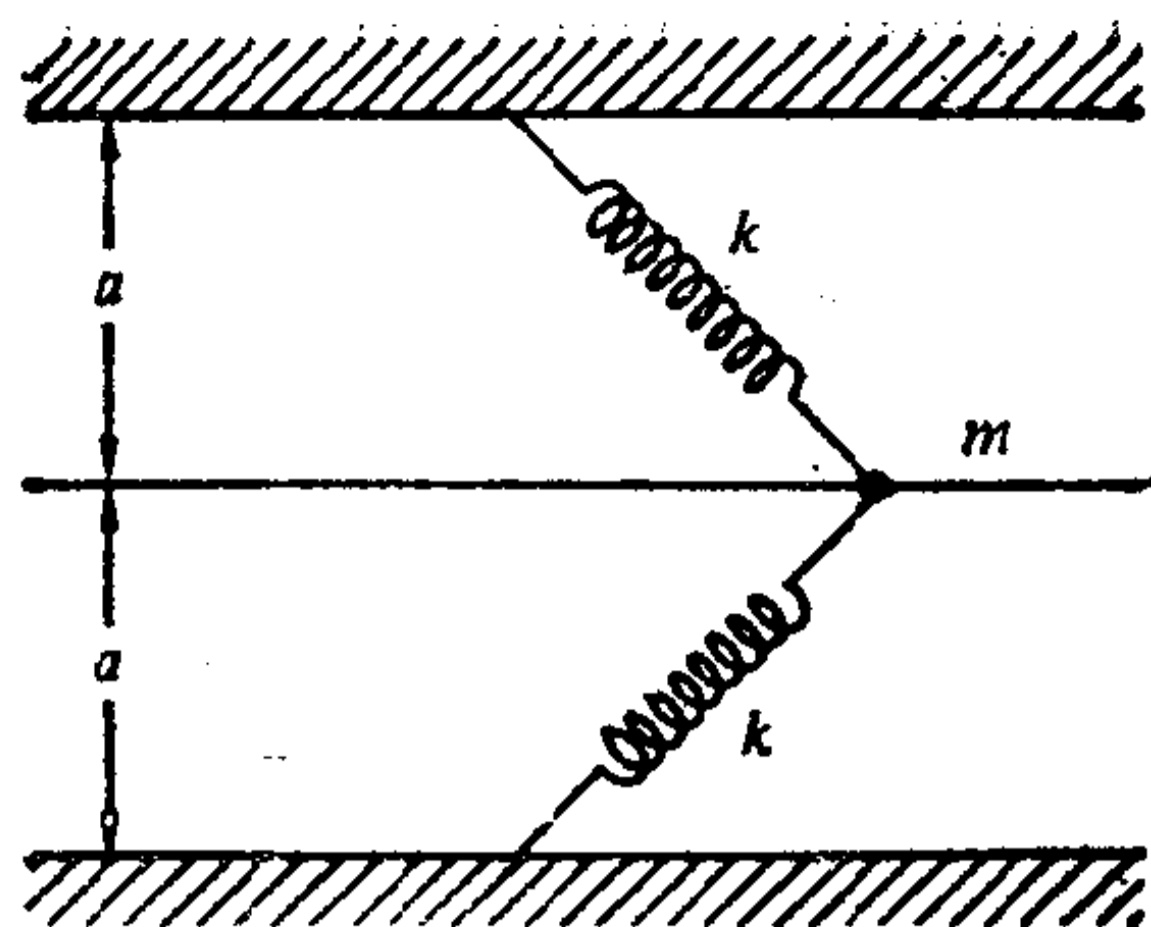
3. (a) 一个力常数为 k 的线性谐振子，它的质量突然增加一个小量 ϵ 。根据与时间无关的一级微扰理论，求振子的总频移，算到 ϵ 的一次方为止。证明，在 ϵ 的同级近似下，所得结果与偏移的严格预期值是一致的。

(b) 试就 k 增加一个小量 ϵ 的效应重复 (a) 部分的计算。

4. 在节 11-3 中，与时间无关的那种一级微扰是用来求解有限振幅对平面摆周期的影响的。采用相同的表述，利用式 (11-72) 求 θ 对时间的依存性的一级改正。（记住，现在的 J_0 是时间的函数。）

5. 完成与有限振幅引起的平面摆频率改正相一致的二级微扰计算（利用你所选择的任何一种方法）。在哈密顿函数和微扰处理中，凡含有 λ^2 的所有各项都应予以保留。

6. 如图所示，一质点被约束在一直线上运动，并被系于力常数相同的两个理想弹簧的端点。每一个弹簧的未伸展长度为 $b \leq a$ 。根据一级微扰理论求有限振幅的振荡频率的最低级改正。当 a 的量值接近于 b



时将发生什么情况?

7. (a) 证明, 对于最低级的改正项, 一维谐振子的相对论性 (但非协变的) 哈密顿函数的形式为

$$H = \frac{1}{2m} (p^2 + m^2 \omega^2 q^2) - \frac{1}{8} \frac{p^4}{m^3 c^2}.$$

(b) 根据一级微扰理论计算谐振子频率的最低级相对论性改正. 把你的结果表达成频率的相对变化.

8. 一个各向同性平面谐振子受到形式为

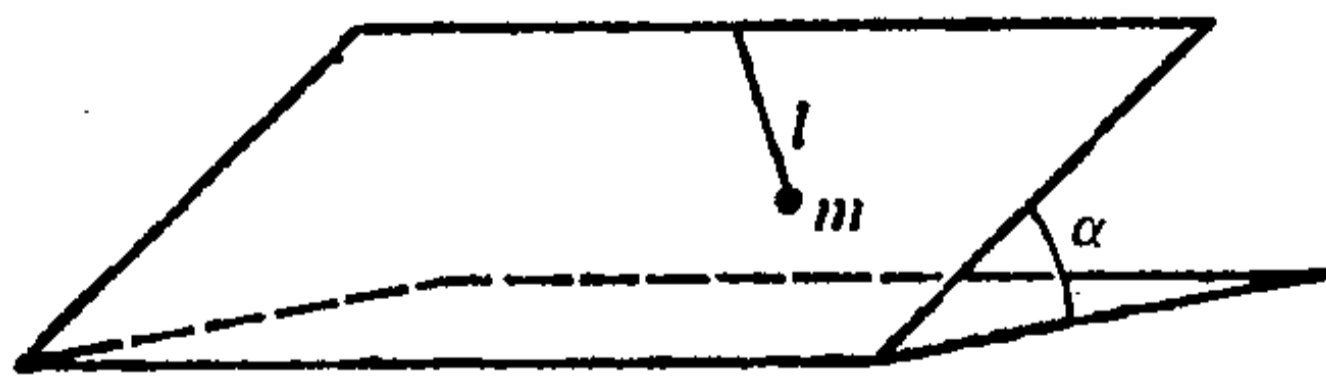
$$\delta H_1 = p_x^2 p_y^2$$

的哈密顿函数变化的扰动. 利用与时间无关的一级微扰理论求频移.

9. 取平面内的开普勒椭圆轨道, 并用势 $\Delta V = -Kx$ 扰动它, 即能建立起原子的斯塔克 (Stark) 效应的模型. 根据一级微扰理论, 运动频率会发生什么情况? 作为一级近似, 这一模型也可用于太阳辐射光压对地球卫星轨道的效应.

10. 考虑绝热地改变平面摆摆长 l 时所作的功, 在零值振幅的极限下, 采用基本方法证明平面摆的 J 的绝热不变性.

11. 如附图所示, 一微幅平面摆被约束在一斜面上运动. 当平面的



倾角 α 缓慢变化时, 它的振幅将如何变化?

12. 考虑第十章习题 13 中描述的系统. 假设参量 F 从初始值开始缓慢地变化, 质点的能量将发生什么情况? 振幅呢? 周期呢?

13. (a) 证明下列变换是正则的:

$$Q = -\arctan \left[\frac{r}{x} \phi(p, x) \right],$$

$$P = \frac{m}{2} \left[\frac{x^2}{r^2} + \phi^2(p, x) \right] = \frac{1}{2} ml,$$

式中 r (这时) 是 t 的任意函数, 而且

$$\phi(p, x) = \frac{rp}{m} - x\dot{r}.$$

(b) 求 $F_1(q, Q, t)$ 类型的生成函数.

(c) 证明, 如果把这一正则变换应用于式(11-139)的与时间相关的谐振子, 而且 $r(t)$ 又满足式(11-141), 那么, 变换后哈密顿函数中的 Q 是循环的, 以致 P 是一个运动常数. 这就独立地证实了式(11-140)所定义的 I 的严格不变性.

第十二章 连续系统和场的拉格朗日和哈密顿表述简介

到目前为止，已经讨论过的所有力学表述都是为了探讨有限个自由度或者至多是可数无限个自由度系统而设想的。但还有一些涉及到连续系统的力学问题，例如振动着的弹性固体问题等。在此，连续固体的各点都参与振荡，要描述系统的整个运动则必须确定所有各点的位置坐标。把前面的力学表述修正得适于处理这样的问题并不困难。最直接的方法是把包含有分立质点的系统作为连续系统的近似，然后再研究描述运动的方程在趋近连续极限时的变化。

12-1 从分立系统到连续系统的过渡

我们将把这种步骤应用于无限长的弹性棒，此棒能经受纵向微幅振荡，即棒的所有质点都能沿着平行于棒轴方向作振荡位移。与连续棒近似的、由分立质点组成的系统是一系列间距为 a 的等质量质点组成的无限链，连接各质点的是一系列力常数为 k 的均匀无质量弹簧（见图 12-1）¹⁾。今假定各质点只能沿着链长方向运动。这样的分立系统将被认为是第六章中所讨论的线性多原子分子的延伸。所以我们能够用微幅振荡的惯用方法求得描述运动的方程。用 η_i 表示第 i 个质

1) 我们用无限链而不用有限链，是为了暂且避免讨论（分立情况中的）特殊的端点质点或（连续情况中的）边界条件。

点对于它的平衡位置的位移,其动能为

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m \dot{\eta}_i^2, \quad (12-1)$$

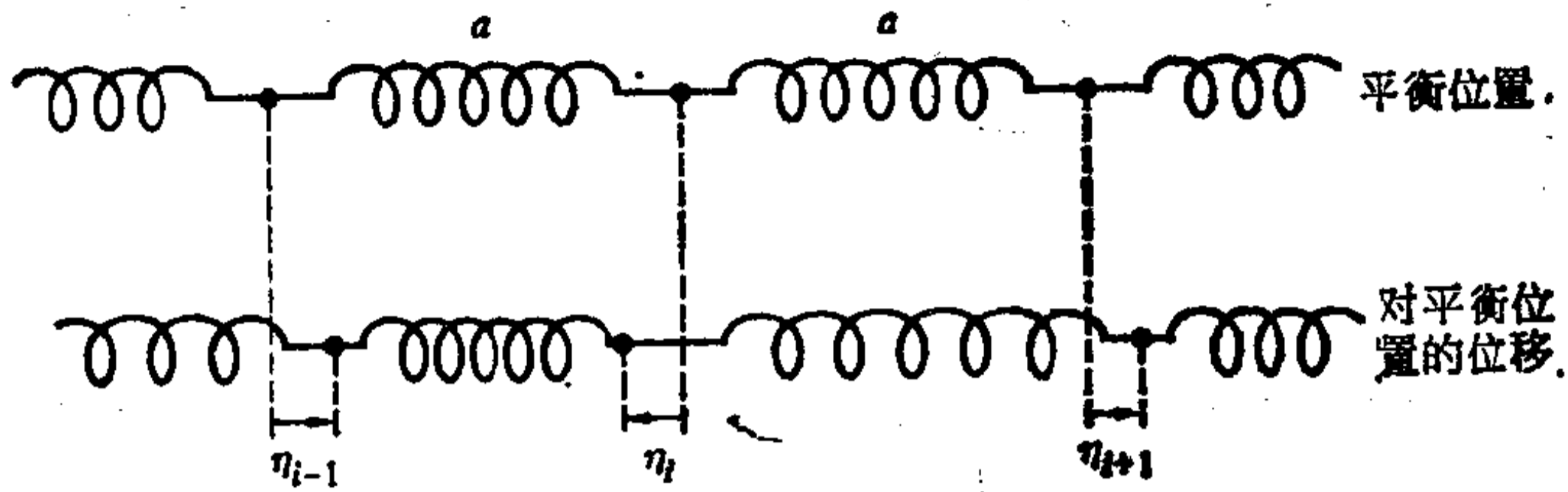


图 12-1 作为连续弹性棒的近似的、由弹簧相连接的一系列等质量质点组成的分立系统

这里的 m 是各个质点的质量。相应的势能则是各个弹簧由于从平衡长度被拉伸或压缩而产生的势能之和(见节 6-4), 即

$$V = \frac{1}{2} \sum_i k (\eta_{i+1} - \eta_i)^2. \quad (12-2)$$

联合式 (12-1) 和式 (12-2), 系统的拉氏函数为

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_i [m \dot{\eta}_i^2 - k (\eta_{i+1} - \eta_i)^2], \quad (12-3)$$

此式也能表达成

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \sum_i a \left[\frac{m}{a} \dot{\eta}_i^2 - k a \left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} \right)^2 \right] \\ &= \sum_i a L_i, \end{aligned} \quad (12-4)$$

式中 a 是质点间的平衡间距(见图 12-1)。坐标 η_i 的最终拉格朗日运动方程为

$$\frac{m}{a} \ddot{\eta}_i - k a \left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a^2} \right)$$

$$+ ka \left(\frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{a} \right) = 0. \quad (12-5)$$

我们选择式 (12-4) 这种特定形式的 L 以及相应的运动方程, 是为了在 a 趋向于零时能达到连续棒的极限. 这时, m/a 显然将简化为连续系统的单位长度质量 μ , 但是, ka 的极限值没有这样明显. 大家记得, 对于一根服从胡克定律的弹性棒, 单位长度的伸长正比于棒所受外力或张力, 这种关系能表达成

$$F = Y\xi,$$

式中的 ξ 是单位长度的伸长; Y 是杨氏模量. 因此, 长度为 a 的分立系统每单位长度的伸长为 $\xi = (\eta_{i+1} - \eta_i)/a$. 使弹簧拉长这一数量所需之力为

$$F = k(\eta_{i+1} - \eta_i) = ka \left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} \right),$$

所以 ka 必然相当于连续棒的杨氏模量. 从分立情况过渡到连续情况时, 用来标记特定质点的整数下标 i 成了连续的位置坐标 x ; 变量 η_i 也要用 $\eta(x)$ 代替. 其次, 在 L 中出现的量

$$\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} = \frac{\eta(x+a) - \eta(x)}{a}$$

当 a (起 dx 的作用) 趋于零时, 显然将趋向极限值

$$\frac{d\eta}{dx}.$$

最后, 对大量分立质点的求和变成了对棒长 x 的积分, 而拉氏函数式 (12-4) 成为

$$L = \frac{1}{2} \int \left[\mu \dot{\eta}^2 - Y \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right] dx. \quad (12-6)$$

在 a 趋近于零的极限情况下, 运动方程 (12-5) 中的最后两项成为

$$\lim_{a \rightarrow 0} -\frac{Y}{a} \left\{ \left(\frac{d\eta}{dx} \right)_x - \left(\frac{d\eta}{dx} \right)_{x-a} \right\},$$

它显然定义了 η 的一个二阶微商。因此，连续弹性棒的运动方程为

$$\mu \frac{d^2\eta}{dt^2} - Y \frac{d^2\eta}{dx^2} = 0. \quad (12-7)$$

这是熟知的一维波方程，波的传输速度为

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\mu}}. \quad (12-8)$$

式 (12-8) 就是众所周知的弹性纵波的速度公式。

这一简单的例子足以说明从分立系统向连续系统过渡时的显著特征。需要抓住的最重要的事实是位置坐标 x 所起的作用。它在这里不过是一个替代分立下标的连续下标，不是一个广义坐标。正如各个 i 值对应于系统的各个不同的广义坐标 η_i 一样，对应于每一个 x 值也各有一个广义坐标 $\eta(x)$ 。由于 η 还含有连续变量 t ，所以更确切地说，也许应该把 η 写成 $\eta(x, t)$ ，以指明 x 象 t 一样，可以看作是拉氏函数中的参量。如果连续系统是三维的，而不是这里所说的一维的，就得用三个连续下标 x, y, z 区分各个广义坐标， η 也应写成 $\eta(x, y, z, t)$ 。注意， x, y, z 和 t 四个量彼此完全独立，它们都只以显变量出现在 η 中。所以， η 相对于其中任何一个量的微商总是能够毫不含糊地表达成全微商。式 (12-6) 还表明，这个拉氏函数表现为对连续下标 x 所求的积分；在相应的三维情况下，拉氏函数的形式为

$$L = \iiint \mathcal{L} dx dy dz, \quad (12-9)$$

式中 \mathcal{L} 称为拉氏密度。对于连续棒的纵振动，拉氏密度为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left\{ \mu \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2 - Y \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right\}, \quad (12-10)$$

它相当于式(12-4)中 L_i 量的连续极限。注意，用以描述系统运动的是拉氏密度，而不是拉氏函数本身。

12-2 连续系统的拉格朗日表述

从式(12-10)可以看到，弹性棒的 \mathcal{L} 除了是 $\dot{\eta} \equiv d\eta/dt$ 的函数外，还包含有 η 的空间微商 $d\eta/dx$ ¹⁾。所以，作为拉氏密度的参量， x 和 t 所起的作用相同。如果除了最紧邻的相互作用外还有其他来源的力，那么， \mathcal{L} 不但是 η 的空间梯度的函数，而且还应是 η 本身的函数。当然，在一般情况下， \mathcal{L} 还可以是 x 和 t 的显函数。所以任何一维连续系统的拉氏密度的函数形式为

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} \left(\eta, \frac{d\eta}{dx}, \frac{d\eta}{dt}, x, t \right). \quad (12-11)$$

根据式(12-9)，总拉氏函数应为 \mathcal{L} 对限定系统的 x 的整个范围所求之积分，而连续系统极限情况下的哈密顿原理将为

$$\delta I = \delta \int_1^2 \int \mathcal{L} dx dt = 0. \quad (12-12)$$

如果连续系统的哈密顿原理还可以用，那就一定可以直接根据式(12-12)中 \mathcal{L} 的二重积分的变分来推导运动方程的连续极限，有如式(12-7)那样。如用与第二章中对分立系统所用的那些方法稍有差别的方法，就能得到这一变分。变分仅仅是对 η 及其微商所作的变分；不论是直接的还是在积分范围内， x 和 t 这两个参量都不会受到变分的影响。正如 η 的变分在端点 t_1 和 t_2 处都等于零一样， η 的变分在 x 的积分限 x_1 和 x_2 处同样为零。象节 2-2 中一样，要得到 η 空间内某个适当的积分变化路径，只要(譬如说)从可能的 η 函数的一个

1) 原文中(12-10)、 $\dot{\eta} = d\eta/dt$ 和 $d\eta/dx$ 分别误为(12-9)、 $\dot{\eta} = \partial\eta/\partial t$ 和 $\partial\eta/\partial x$ 。——译者

单参量族中选择 η :

$$\eta(x, t; \alpha) = \eta(x, t; 0) + \alpha\zeta(x, t). \quad (12-13)$$

这里的 $\eta(x, t, 0)$ 代表一个满足哈密顿原理的正确函数, ζ 则是在 t 和 x 端点处为零的某个性能良好的函数. 如果把 I 看作是 α 的函数, 那么, 作为 $\eta(x, t, 0)$ 的极值, I 对 α 的微商在 $\alpha = 0$ 处等于零. 采用直接求导的方法, 则有

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\alpha} = & \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} dx dt \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \right. \\ & + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dt}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{d\eta}{dt} \right) \\ & \left. + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dx}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{d\eta}{dx} \right) \right\}. \quad (12-14) \end{aligned}$$

由于 η 的变分(即 $\alpha\zeta$) 在端点处为零. x 和 t 的分部积分将给出关系式

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dt}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{d\eta}{dt} \right) dt \\ & = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dt}} \right) \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} dt \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dx}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{d\eta}{dx} \right) dx \\ & = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dx}} \right) \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} dx. \end{aligned}$$

所以哈密顿原理可以表达成

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} dx dt \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dt}} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dx}} \right) \right\} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \right)_0 = 0, \quad (12-15)$$

根据节 2-2 中相同的论证, 变化路径的任意性意味着花括号内的表达式为零:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{d\eta}{dt} \right)} \right) + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dx}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} = 0. \quad (12-16)$$

式 (12-16) 是从哈密顿原理式 (12-12) 推导出来的适当形式的运动方程。

具有 n 个分立自由度的系统将有 n 个拉格朗日运动方程; 但一个具有无限个自由度的连续系统似乎只有一个拉格朗日方程! 然而, 应该记得的是, η 的运动方程是一个只包含时间的微分方程, 在这种意义上, 式 (12-15) 对每一个 x 值给出了一个单独的运动方程。下标 x 的连续性质表现为式 (12-15) 是两个变量 x 和 t 的偏微分方程, 由此得出的 η 为 $\eta(x, t)$ 。

对于弹性棒中纵振动这一特殊事例, 从拉氏密度的形式 (12-10) 可知,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dt}} = \mu \frac{d\eta}{dt}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dx}} = -Y \frac{d\eta}{dx},$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} = 0.$$

因此,正如所期望的那样,欧拉-拉格朗日方程正好化为运动方程(12-7).

这里就一维连续系统发展起来的拉格朗日表述,显然有必要推广到象一般弹性固体那样的二、三维情况.这时,场量 η 不止一个,而可能有几个,例如,从平衡位置的位移将由一个具有三个分量的空间矢量 η 来描述.对于这种较一般的情况,完全仿效只有一个分量的一维情况来作出数学上的运算是没有什么困难的.但如果以相同的方式表达,公式将变得很冗长与繁复,特别是微商的双重层次看起来非常臃肿.如果注意到时间 t 和空间坐标 x, y, z 在哈密顿原理中起的是同类型的数学作用,就可以使符号大为简化.场量既是时间坐标又是空间坐标的函数,这些坐标都可看作是独立变量.而在哈密顿原理的积分限处出现的场量,它们的变分却不是同时对时间和空间来求的.

借助于坐标为 $x_0 = t, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ 的四维空间来考虑问题,在数学上是方便的.这种空间并不包含有什么物理意义.正象第七章中那样,罗马字母下标只是表示物理空间的三个坐标,希腊字母下标则代表所有四个坐标.本章的余下部分将恢复使用对重复下标的求和约定.场量的各种分量将用下标 ρ 表征.应该强调的是,这种下标可能有多种形式.有时,它代表具有二个、三个、四个或者更多个值的单个下标.有时又可能代表多重下标.例如,如果场量是一个二级空间张量,则 ρ 实际上代表两个下标.最后,场量对四个坐标 x_ν 中任何一个坐标的微商将用下标 ν 表示, ρ 与 ν 之间用逗号分开.在只有一个场量的地方,则在逗号前留一空白.例如

$$\eta_{\rho, \nu} \equiv \frac{d\eta_\rho}{dx_\nu}; \quad \eta_{, i} \equiv \frac{d\eta}{dx_i}$$

$$\eta_{i, \mu\nu} = \frac{d^2 \eta_i}{dx_\mu dx_\nu}. \quad (12-17)$$

只有场量的微商才用这种方式表征。

采用这种记号时，这里考虑的最一般形式的拉氏密度为

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\eta_\rho, \eta_{\rho, \nu}, x_\nu). \quad (12-18)$$

因而，总拉氏函数是对三维空间的积分

$$L = \int \mathcal{L}(dx_i), \quad (12-19)$$

但这是很少明显写出的。哈密顿原理表现为对四维空间区域的积分

$$\delta I = \delta \int \mathcal{L}(dx_\mu) = 0, \quad (12-20)$$

这里的 η_ρ 的变分在积分域的界面 S 处为零。相应的欧拉-拉格朗日运动方程的推导可采用前面的一套符号。今考虑一组单参量的变化函数，当参量 α 趋近于零时，它们成为 $\eta_\rho(x_\nu)$ 。正如前述，例如，对 η_ρ 加上乘积 $\alpha \zeta_\rho$ ，能够构成一相适应的可能函数组，这里的 $\zeta_\rho(x_\nu)$ 是在界面处为零的简便的任意函数。 I 的变分为零等于是令 I 对 α 的微商为零¹⁾：

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_\rho} \frac{\partial \eta_\rho}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho, \nu}} \frac{\partial \eta_{\rho, \nu}}{\partial \alpha} \right) (dx_\mu).$$

分部积分得

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\alpha} = & \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_\rho} - \frac{d}{dx_\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho, \nu}} \right) \right] \\ & \cdot \frac{\partial \eta_\rho}{\partial \alpha} (dx_\mu) \\ & + \int (dx_\mu) \frac{d}{dx_\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho, \nu}} \frac{\partial \eta_\rho}{\partial \alpha} \right). \end{aligned} \quad (12-21)$$

1) 除非另作说明，在本章的余下部分对所有各种下标都将采用求和约定。

在 α 趋于零的极限情况下,第二个积分为零,这是通过多种途径都能看出的.我们可以逐项地检验:完成各微商项对特定 r_ν 的积分,它们都将等于零,因为对 α 的微商在端点处都等于零.或者根据四维散度定理,积分也能变换为对包围着四维空间内积分域的这种曲面的积分.这一面积分同样为零,因为 η_ρ 在正确场函数邻域的变分在曲面上为零.因此,在 α 趋于零的极限情况下,式(12-21)化为

$$\left(\frac{dI}{d\alpha}\right)_0 = \int (dx_\mu) \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_\rho} - \frac{d}{dx_\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}} \right) \right] \left(\frac{\partial \eta_\rho}{\partial \alpha} \right)_0. \quad (12-22)$$

同样,各 η_ρ 的变分的任意性意味着式(12-22)仅当各方括号为零,即

$$\frac{d}{dx_\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_\rho} = 0 \quad (12-23)$$

时才能得到满足.式(12-23)代表场量的一组偏微分方程,有多少个不同的 ρ 值就有多少个方程.值得反复指出的是,由于空间坐标 x_i 实际上是场量的下标,因为式(12-23)中每个方程实际上相当于分立情况中的整组拉格朗日微分运动方程.

对于一维连续系统, ν 仅取 0 和 1 两个数值,式(12-23)将扩展为与式(12-16)相同的形式.符号的简便性就是在这种简单的例子中也是显而易见的.当然,为了符号上的简便而采用四维空间的做法,丝毫不要求该空间内任何一个量具有协变特性(按照物理学家的说法).理想气体中声场的情况提供了一个很好的例证.这里的场量是矢量 η 的分量, η 代表气体粒子对没有声振动时它们的位置的微小位移.我们所要求的是气体纵振动的运动方程,亦即声音传输的矢量波方

程。声场的合适的拉氏密度的推导列于附录 E 中，它能表达成

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [\mu_0 \dot{\eta}^2 + 2P_0 \nabla \cdot \eta - \gamma P_0 (\nabla \cdot \eta)^2]. \quad (12-24)$$

式中 μ_0 是气体的平衡质量密度， P_0 是气体的平衡压强。 \mathcal{L} 中的首项显然是动能密度，其余各项则代表单位体积气体的势能变化，这一变化是在气体收缩和膨胀过程中外界对气体或气体对外界所作之功引起的，这种收缩和膨胀正是声振动的标志。我们在势能中发现有常数 γ ，即定压与定容比热之比值，这是因为声波引起的气体的疏、密是绝热地而不是等温地形成的。采用四维记号时，拉氏密度成为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\mu_0 \eta_{i,0} \eta_{i,0} + 2P_0 \eta_{i,i} - \gamma P_0 \eta_{i,i} \eta_{i,i}). \quad (12-25)$$

\mathcal{L} 中的中间一项显然对运动方程并无贡献，因为该项对 $\eta_{i,i}$ 的偏微商为零或者是一个常数。因此，运动方程 (12-23) 采取形式

$$\mu_0 \eta_{i,00} - \gamma P_0 \eta_{i,ii} = 0 \quad i = 1, 2, 3. \quad (12-26)$$

转换为空间矢量记号，式 (12-26) 表现为一个单矢量方程

$$\mu_0 \frac{d^2 \eta}{dt^2} - \gamma P_0 \nabla \nabla \cdot \eta = 0. \quad (12-27)$$

对于运动方程 (12-26) 或式 (12-27) 以及推导运动方程时所依据的拉氏密度，有两点说明。其一，式 (12-27) 可以表达成更为熟识的形式，因为微幅振荡中气体密度的相对变化 σ 与 η 之间由方程

$$\sigma = -\nabla \cdot \eta$$

相联系(见附录 E)。把散度算符作用于式 (12-27)，得标量

方程

$$\nabla^2 \sigma - \frac{\mu_0}{\gamma P_0} \frac{d^2 \sigma}{dt^2} = 0, \quad (12-28)$$

使用气体中声速的常用表达式

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\mu_0}}, \quad (12-29)$$

立即可看出,它是三维波方程. 如果象质点力学中一样,拉格朗日表述的主要目标是从拉氏函数推导运动方程,那么,与式(12-28)相适应的拉氏密度为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\mu_0 \sigma^2_{,0} - \gamma P_0 \sigma_{,i} \sigma_{,i}). \quad (12-30)$$

式(12-30)当然不具有与拉氏密度式(12-25)相同的物理含义,因而不可能直接从另一个导出,但是,式(12-30)确实意味着标量波方程(12-28).

要说明另外一点是:式(12-24)中的 $\nabla \cdot \eta$ 项对运动方程并无贡献. 这相当于分立系统的性质:拉氏函数对广义坐标和时间的任意函数的时间全微商是不确定的. 对于连续系统,相应的说法是: \mathcal{L} 对于任何“四维散度”,即对于形式为

$$\frac{dF_v(\eta_\rho, x_\mu)}{dx_v}$$

的项是不确定的,这里的 F_v 是场量 η_ρ 和坐标 x_μ 的任何四维(可微)函数. 这种项对于作用量积分的变分显然不会有贡献. 应用四维空间内的散度定理,可以把体积分转换为对界面的积分,而 F_v 在这一界面上的变分为零. 用符号表示,相关的变分可以表达成

$$\begin{aligned} \delta \int (dx_\mu) \frac{dF_v(\eta_\rho, x_\mu)}{dx_v} \\ = \delta \int F_v(\eta_\rho, x_\mu) d\sigma_v = 0, \end{aligned} \quad (12-31)$$

这里的 $d\sigma_i$ 代表 (四维空间内) 面元沿外向法线方向的分量¹⁾。我们将看到, 式 (12-24) 的中间一项就属于这一范畴, 而函数 F_i 则为

$$F_0 = 0, \quad F_i = 2P_0\eta_i.$$

迄今所研究的有关连续广义坐标组的拉格朗日表述都是为了处理连续的力学系统, 比如作纵振荡的弹性固体或者以声波方式振动的气体等。已经指出, 即使在没有力学系统的情况下, 也可用该表述描述支配某种场的方程。在数学上, 场只不过是空间和时间的一组或几组独立函数, 而广义坐标完全符合这一定义。没有必要使场一定与某种潜在的力学系统相关联。为了看出场的拉格朗日描述和纯粹力学运动之间的联系是怎样被打破的, 只要概要地回顾一下物理学的历史。例如, 长期以来, 一直认为电磁场是某种神秘的以太的弹性振动。只是到近代才认识到以太所起的作用只不过是作为动词“波动”一词的主词²⁾。我们同样可以认为, 这里所发展的变分步骤与连续力学系统的概念是无关系的, 它们的作用在于给出一些描述任何时-空场的方程。这样, 哈密顿原则事实上成了场的方便而又简洁的描述, 把它扩展以后就能给出场方程。

在这一较大的范围内, 没有必要把拉氏密度定义为动能密度和势能密度之差。相反, 我们可以使用任何一个 \mathcal{L} 表达式, 只要它能导致所需的场方程。例如, 我们已经看到声场的拉氏密度式 (12-24) 本质上是由矢量位移 η 给出的。但我们也注意到, 还可用标量 σ , 即用气体密度的相对变化来描述

-
- 1) 例如, 如果四维空间内的曲面是常值时间曲面, 则 $d\sigma_i$ 的仅有的非零分量为 $d\sigma_0 = dV \equiv dx dy dz$ 。因而外向法线的方向沿着时间轴。
 - 2) 索尔兹伯里 (Salisbury) 伯爵在 1894 年就任英国科学促进会 (BAAS) 主席时的演说中说: “以太这个字的主要 (如果不是唯一的) 功用在于给出了动词‘波动’的主格。” (见 1894 年 BAAS 报告的第八页。)也有可能在这之前就已表达过这一相同的想法。

场。用 σ 描述的波方程可以从式 (12-30) 所给出的拉氏密度来推导, 式 (12-30) 不同于式 (12-24), 它不可能参照任何潜在的力学系统来推演。但它能给出正确的场方程, 这正是我们所要求的一切。

但是, 拉氏密度除了隐含场方程外, 还能告诉我们有关场的更多的物理性质。象具有分立自由度的系统一样, 拉氏函数的结构也包含有系统守恒性质的信息。一组这样的守恒定理将在下一节中讨论¹⁾。

12-3 应力-能量张量和守恒定理

在这里, 我们能够以几乎相同的方法推导与节 2-6 中质点力学雅可比积分的守恒相类似的结果。只是应该记住, 必须把时间推广到象 x_i 那样来对待, 因为它们都是 \mathcal{L} 中的独立参量。这样, 我们就不必计算 L 的时间微商, 只要设法计算 \mathcal{L} 对 x_μ 的全微商

$$\frac{d\mathcal{L}}{dx_\mu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_\rho} \eta_{\rho, \mu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_{\rho, \nu}} \eta_{\rho, \mu\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\mu}$$

根据运动方程 (12-23), 上式成为(加上符号的些微改动)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}}{dx_\mu} &= \frac{d}{dx_\nu} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_{\rho, \nu}} \right) \eta_{\rho, \mu} \\ &\quad + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_{\rho, \nu}} \frac{\partial\eta_{\rho, \mu}}{dx_\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\mu} \\ &= \frac{d}{dx_\nu} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_{\rho, \nu}} \eta_{\rho, \mu} \right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\mu} \end{aligned}$$

把全微商合并在一起, 此式能表达成

1) 拉氏函数所固有的守恒性质的更为一般的讨论, 将在论述诺埃瑟 (Noether) 定理的节 12-7 中找到。

$$\frac{d}{dx_\nu} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}} \eta_{\rho,\mu} - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu} \right\} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu}. \quad (12-32)$$

今假设 \mathcal{L} 并不显含 x_μ 。这通常意味着 \mathcal{L} 代表一个自由场,即它并无在明显空间点处与场有相互作用的、并有给定时间相关性的外来驱动源或渊。这实际上意味着在空间和时间上穿越该场而运动的质点与场没有相互作用。在这一条件下,式(12-32)所取的形式是一组散度条件

$$\frac{dT_{\mu\nu}}{dx_\nu} = 0, \quad (12-33)$$

被作用的量 $T_{\mu\nu}$ 的形式为二级四维张量:

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}} \eta_{\rho,\mu} - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu}. \quad (12-34)$$

要强调的是,这些方程只具有四维空间内张量方程的形式,因为到目前为止,四维空间尚无变换性质——空间和时间依然是性质各异的——对 $T_{\mu\nu}$ 也无变换要求。然而,这些量的空间部分在寻常空间内性质确实象是矢量和张量,即 T_{ij} 是二级三维张量的分量。

$T_{\mu\nu}$ 和雅可比积分式(2-53)之间的相似性是明显的。这对于 T_{00} 分量特别清楚:

$$T_{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_\rho} \dot{\eta}_\rho - \mathcal{L}. \quad (12-34')$$

在力学系统内,拉氏密度的形式往往为 $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$, 即动能密度和势能密度之差。例如,弹性棒的拉氏密度式(12-10)和声振动的拉氏密度式(12-24)就是这样,这时的动能密度的形式为质量密度乘以位移速度平方的一半:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \mu \dot{\eta}_\rho \dot{\eta}_\rho.$$

根据质点力学中所用的相同论证,可以把 T_{00} 确认为总的能

量密度。

为了对 $T_{\mu\nu}$ 的其他元素作出相应的鉴别,可以把方程组(12-33)表达成

$$\frac{dT_{\mu 0}}{dt} + \frac{dT_{\mu j}}{dx_j} = 0 \quad (12-35)$$

或

$$\frac{dT_{\mu 0}}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{T}_\mu = 0, \quad (12-35')$$

式中 \mathbf{T}_μ 是一组四维空间矢量。无论是式(12-35)还是式(12-35'),形式上都表现为连续性方程,这些方程表明,某种密度的时间变化率加上某种相应的通量或流密度的散度等于零[见式(7-76)]。再说,连续性方程也意味着某些积分量的守恒,只要场的体积是有限的,亦即场可以包含在某个体积内,超越这一体积后,场量等于零。在这种情况下,积分量 R_μ 可定义为

$$R_\mu = \int T_{\mu 0} dV, \quad (12-36)$$

这里的体积分扩展到包含该场的区域之外。于是,根据式(12-35'),

$$\frac{dR_\mu}{dt} = \int \nabla \cdot \mathbf{T}_\mu dV = \int \mathbf{T}_\mu \cdot d\mathbf{A} = 0. \quad (12-37)$$

正是由于式(12-33)导得的这些守恒定理,在近代物理学中才把这四个阵列 $T_{\mu\nu}$ ($\mu = 1, 2, 3, 4$) 称为守恒流。

所以我们应能期待 T_{0i} 的作用相当于能量流密度的分量。根据对弹性棒中纵振动场的考虑,也可看出这种说法是合理的。假设该棒在 x 点处被一假想割线所分开(见图 12-2)。根据导致拉氏函数式(12-6)的考虑,割线右边那部分棒拉伸左边部分的力为

$$Y \frac{d\eta}{dx}$$

因此,左边部分在 x 点处有一等值但反向的张力。其次,左边部分在 x 点被拉伸的距离为 η , 这一拉伸的时间变化率为 $\dot{\eta}$ 。因此,张力在割线处所作功的功率为

$$-\dot{\eta}Y \frac{d\eta}{dx}, \quad (12-38)$$

这是单位时间内向右传输的能量率。通过比较表明,对于式(12-10)那种合适的拉氏密度,这正好是 T_{01} 。如果 T_{00} 是能量密度,则式(12-36)中的量 R_0 能够确认为场内的总能量。所以守恒方程(12-37)的第四个分量表明,如果 T_{0i} 在界面上为零,即如果系统不向外界辐射能量,则总场能守恒。

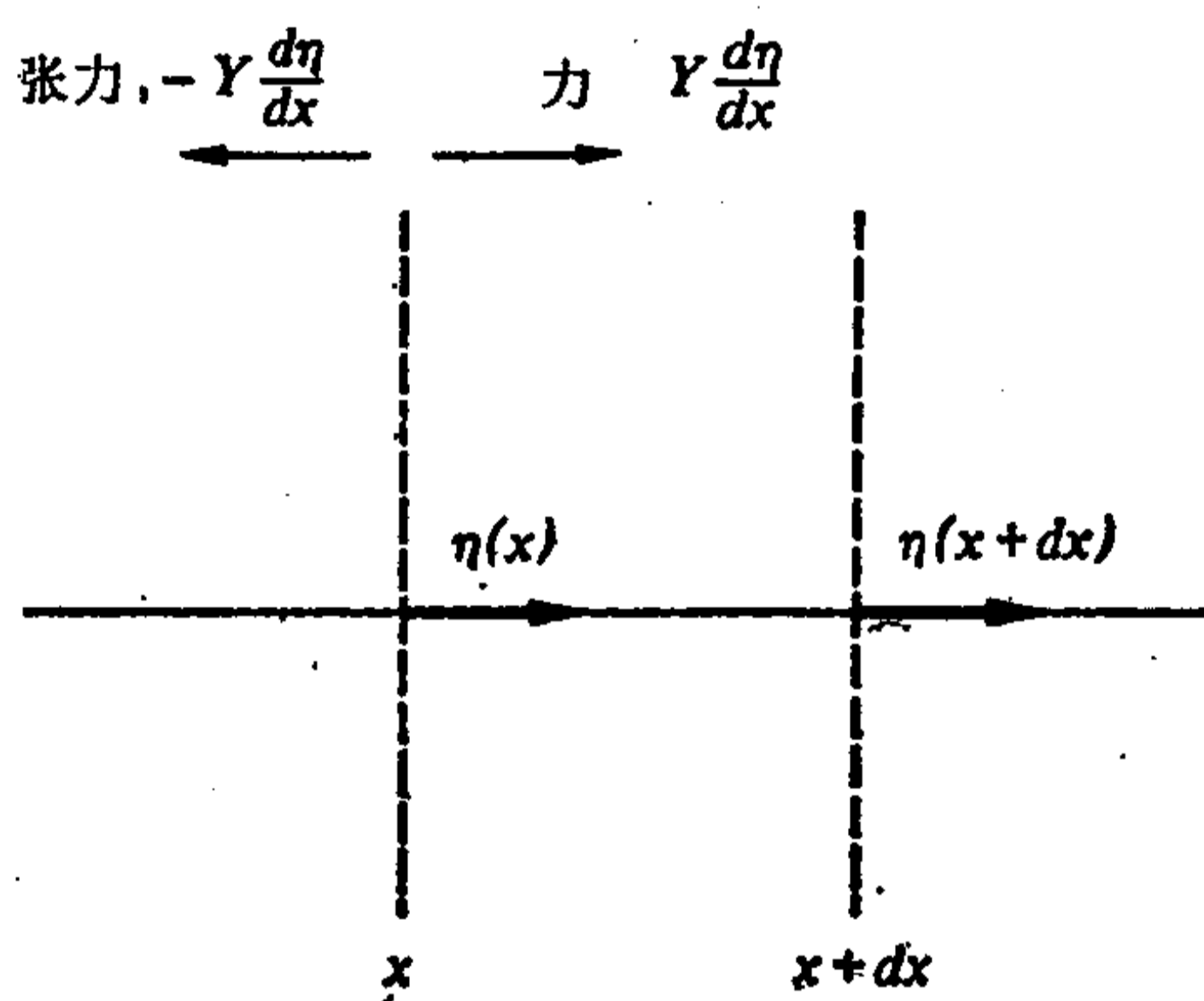


图 12-2 计算弹性棒中能流密度的图解

再次转向弹性棒的振动,就能类似地给出各分量 T_{i0} 的物理意义。如果棒内质点沿棒移动的量全都相同,运动将是刚体运动,即不存在振荡性质的扰动。长度为 dx 的棒的质量由运动引起的净变化显然为零,因为运动中通过 $x+dx$ 处的质量与通过 x 处的质量正好相同。对于这种刚体运动情况,仍

然应当有一净动量密度 $\mu\dot{\eta}$ 。当发生波动时, dx 长度的质量有一净变化, 这一变化在任何给定时刻都等于(见图 12-2)

$$\mu[\eta(x) - \eta(x + dx)] = -\mu \frac{d\eta}{dx} dx.$$

所以在这段间隔内由波动引起的附加动量为

$$-\mu\dot{\eta} \frac{d\eta}{dx} dx.$$

因而有一附加的、超越于稳态运动的动量密度, 并可把它确认为波或场的动量密度:

$$-\mu\dot{\eta} \frac{d\eta}{dx}. \quad (12-39)$$

对于式(12-10)给出的拉氏密度, 这个量刚好是 $-T_{10}$ 。因此, 我们可以把 $-T_{10}$ 看作是场的动量密度分量, 而把 $-R_i$ 看作是场的总(线)动量, 至少在这种四维约定中是如此。

这样, 连续性方程(12-35')告诉我们, $-\mathbf{T}_i$ 必定代表场动量密度第 i 个分量的矢量通量密度。我们所以赋予 \mathbf{T}_i 以矢量性质, 举例来说, 是因为用 $-T_{12}$ 量度时, 在 y 方向上是能够有一个动量密度的 x 分量流的。如果考虑弹性固体的位移场, 将会得到 T_{ij} 的另一种解释。众所周知, 在这种固体内, 除了垂直于表面的压缩力外, 尚有沿面元的切应力。这些力的集合可根据如下说法来描述: 作用在面元 $d\mathbf{A}$ 上的力 $d\mathbf{F}$ 用应力张量 \mathbf{T} 来表示, 以保证¹⁾

$$d\mathbf{F} = \mathbf{T} \cdot d\mathbf{A}.$$

因此, 譬如说在 x 方向上, 作用于长方体元 $dx dy dz$ 上的净力有作用于 yz 平面内表面上的那些力的贡献(见图 12-3):

$$[T_{11}(x + dx) - T_{11}(x)] dy dz$$

1) 例如, 可参阅 K. R. Symon, *Mechanics*, 3rd ed., pp. 431-439.

$$= \frac{dT_{11}}{dx} dx dy dz,$$

也有来自 xz 平面内表面上的那些力的贡献:

$$\begin{aligned} & [T_{12}(y+dy) - T_{12}(y)] dx dz \\ &= \frac{dT_{12}}{dy} dx dy dz, \end{aligned}$$

同样, 还有来自 xy 平面的贡献. 牛顿运动方程在这里等于是说: x 方向上动量密度的时间变化率 $-T_{10}$ 等于作用于单位体元的力的 x 分量:

$$-\frac{dT_{10}}{dt} = \frac{dT_{11}}{dx} + \frac{dT_{12}}{dy} + \frac{dT_{13}}{dz},$$

这正好是式 (12-35') 的 x 分量. 对于这一特定场, 可确认 T_{ij} 为三维应力张量的元素; 因此, 我们把 $T_{\mu\nu}$ 命名为“应力-能量张量”.

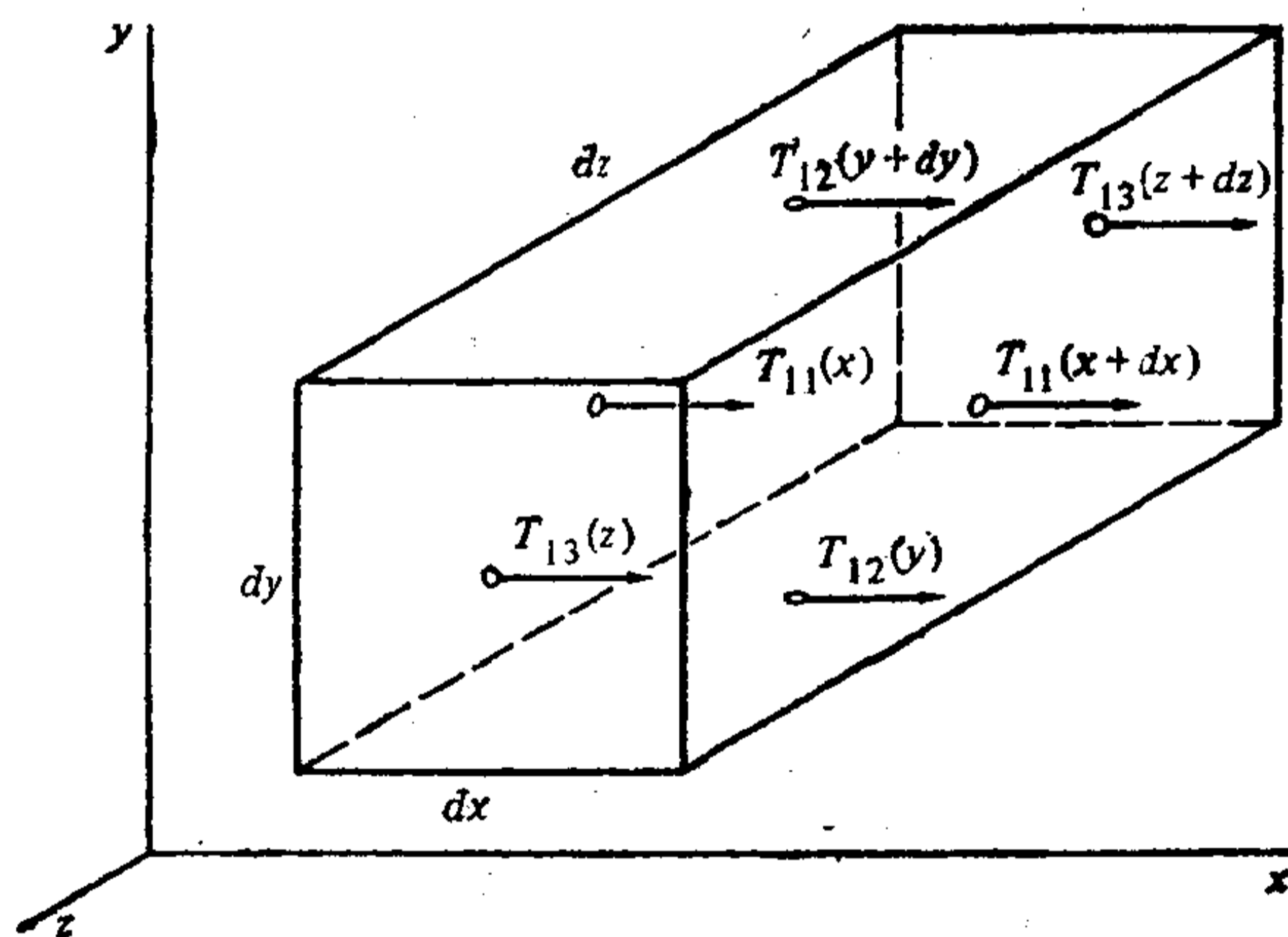


图 12-3 x 方向上作用于弹性固体体元 $dx dy dz$ 上的力

考虑连续力学系统时, 我们同样能够赋予应力-能量张量的每一个分量以一定的物理意义或者联想. 综合起来, 这些

标记的意义为

T_{00}	场的能量密度;
\mathbf{T}_0 , 分量为 T_{0j}	场的能流密度;
$-T_{i0}$	场的动量密度, 第 i 个分量;
$-\mathbf{T}_i$, 分量为 T_{ij}	场的动量密度的第 i 个分量的流密度,
T_{ij}	三维应力张量.

必须记住, 虽然我们是通过力学系统的例子来引出这些步骤和术语的, 但其形式可应用于任何场而与场源及场的性质无关. 我们不仅可以建立弹性固体振动的经典场论, 也可以建立电磁场、薛定谔波函数“场”、或者描述“标量”介子的相对论场等的经典场论. 稍后, 我们将更为详细地探讨其中的某些例子. 为了目前说明问题的需要, 可以考虑一个具有两个分量 η_1 和 η_2 的场, 它们的性质特地选得与任何现存理论都不相对应. 假设场方程为

$$\begin{aligned} a\nabla^2\eta_1 + b\frac{d\eta_1}{dt} - c\frac{d^2\eta_1}{dt^2} &= f\eta_2, \\ a\nabla^2\eta_2 - b\frac{d\eta_2}{dt} - c\frac{d^2\eta_2}{dt^2} &= g\eta_1. \end{aligned} \quad (12-40)$$

不难看出, 这些场方程可以导自拉氏密度

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= c\dot{\eta}_1\dot{\eta}_2 + \frac{b}{2}(\dot{\eta}_1\eta_2 - \eta_1\dot{\eta}_2) - a\nabla\eta_1 \cdot \nabla\eta_2 \\ &\quad - \frac{1}{2}(f\eta_2^2 + g\eta_1^2). \end{aligned} \quad (12-41)$$

这一拉氏密度的应力-能量张量的分量为

$$T_{00} = c\dot{\eta}_1\dot{\eta}_2 + a\nabla\eta_1 \cdot \nabla\eta_2 + \frac{1}{2}(f\eta_2^2 + g\eta_1^2), \quad (12-42)$$

(同分立系统能量的情况一样, 速度的线性项已经消去)

$$T_{0i} = -a \left(\dot{\eta}_1 \frac{d\eta_2}{dx_i} + \dot{\eta}_2 \frac{d\eta_1}{dx_i} \right), \quad (12-43)$$

$$T_{i0} = c \left(\dot{\eta}_1 \frac{d\eta_2}{dx_i} + \dot{\eta}_2 \frac{d\eta_1}{dx_i} \right) + \frac{b}{2} \left(\eta_2 \frac{d\eta_1}{dx_i} - \eta_1 \frac{d\eta_2}{dx_i} \right), \quad (12-44)$$

$$T_{ij} = -a \left(\frac{d\eta_1}{dx_i} \frac{d\eta_2}{dx_j} + \frac{d\eta_1}{dx_j} \frac{d\eta_2}{dx_i} \right) - \mathcal{L} \delta_{ij}. \quad (12-45)$$

应该注意到这一例子中的三维张量 \mathbf{T} 是对称的。对应力-能量张量的空间部分,这是一个实际需要的(几乎可说是必不可少的)特性。回顾一下鉴别 R_i 的情况,守恒方程 (12-37) 表明,对于闭合的非相互作用系统,场的总线动量是守恒的。我们同样可以有此期望。不过,现在应该有一个相应的、场的总角动量守恒定理。要构成一个相当于角动量密度的量颇为简单。由于角动量是一个轴矢量,因此,可以期望角动量密度的分量是一个二级反对称张量的元素。这种角动量(即“动量矩”)密度张量的适当形式为

$$M_{ij} = -(x_i T_{j0} - x_j T_{i0}), \quad (12-46)$$

这时,场的总角动量为

$$M_{ij} = \int M_{ij} dV.$$

由于 t 和 x_i 完全是独立的变量,所以 M_{ij} 的时间变化率为

$$\frac{dM_{ij}}{dt} = - \int \left(x_i \frac{dT_{j0}}{dt} - x_j \frac{dT_{i0}}{dt} \right) dV,$$

或者根据连续性条件式 (12-35),

$$\frac{dM_{ij}}{dt} = - \int \left(x_i \frac{dT_{jk}}{dx_k} - x_j \frac{dT_{ik}}{dx_k} \right) dV.$$

用分部积分法把这一表达式转换为

$$\frac{dM_{ij}}{dt} = - \int \frac{d}{dx_k} (x_i T_{jk} - x_j T_{ik}) dV + \int (T_{ji} - T_{ij}) dV. \quad (12-47)$$

右边第一个积分是散度体积积分的形式。所以它等于一个对界面所求的积分，对于闭合的非辐射系统这一积分等于零。最后，如果 $T_{ij} = T_{ji}$ ，则第二个积分也等于零。因此，如果 T 是对称的，则场的总角动量守恒。

对于所选的例子，应力张量确实是对称的。但不能保证情况会永远如此，有一些熟悉的场，直接求得的应力张量并不对称。然而，所期望的守恒性质往往是可以挽回的，只要注意到应力-能量张量 $T_{\mu\nu}$ 象 \mathcal{L} 一样并不是唯一地确定的¹⁾。 $T_{\mu\nu}$ 的形式(12-34)在一开始就已选定，因为它满足散度条件(12-33)。因此， $T_{\mu\nu}$ 对四维散度为零的任何函数都是未定的。一个采用得非常普遍的量的形式为

$$\frac{d\phi_{\mu\nu\lambda}}{dx_\lambda},$$

式中 $\phi_{\mu\nu\lambda}$ 是场变量的任意一组函数，但它具有反对称性质，即

$$\phi_{\mu\nu\lambda} = -\phi_{\mu\lambda\nu}.$$

在四维散度的计算中， ν 和 λ 都是哑标，而四维散度将由

$$\frac{d^2\phi_{\mu\nu\lambda}}{dx_\nu dx_\lambda} + \frac{d^2\phi_{\mu\lambda\nu}}{dx_\lambda dx_\nu}$$

这样的成对项所组成(不采用求和约定!)，此式由于反对称条

1) 这一点应该是可以预料到的。例如，在电磁理论中早已知道(并且是争论的起因)，能量密度或能流(坡印廷矢量)的表达式对于那些属于空间散度的量是不确定的。具有这种性质的附加量对于象总能量或总能流这样一些值得注意的积分并没有什么贡献。

件而恒等于零。\$T_{\mu\nu}\$的这种不确定性往往使它有可能使应力-能量张量“对称化”，这种过程在建立经典场时几乎是一条必由之路。这类例子将在后面给出。

12-4 哈密顿表述、泊松括号和动量表示

象第八章中对分立系统所做的那样，我们同样有可能得到具有连续坐标组的那些系统的哈密顿表述。为了说明处理的方法，我们暂且回到节 12-1 中所讨论的线性质点链。共轭于各个 \$\eta_i\$ 的正则动量为

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} = a \frac{\partial L_i}{\partial \dot{\eta}_i}. \quad (12-48)$$

所以系统的哈密顿函数为

$$H \equiv p_i \dot{\eta}_i - L = a \frac{\partial L_i}{\partial \dot{\eta}_i} \dot{\eta}_i - L$$

或

$$H = a \left(\frac{\partial L_i}{\partial \dot{\eta}_i} \dot{\eta}_i - L_i \right). \quad (12-49)$$

记得，在连续棒的极限下，当 \$a\$ 趋向于零时，\$L_i \to \mathcal{L}\$，而式 (12-49) 中的求和将成为积分

$$H = \int dx \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} \dot{\eta} - \mathcal{L} \right). \quad (12-50)$$

由式(12-48)给出的个别正则动量 \$p_i\$ 在连续极限下为零，但我们能够定义一个始终保持有限的动量密度 \$\pi\$：

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{p_i}{a} \equiv \pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}}. \quad (12-51)$$

式 (12-50) 具有空间积分的形式，被积函数为哈密顿密度 \$\mathcal{H}\$，它定义为

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\eta} - \mathcal{L}. \quad (12-52)$$

尽管我们能以直捷了当的方式引进经典场的哈密顿表

述,但仍应注意,这种步骤是把时间变量挑选出来作特殊处理的.因此,与我们对拉格朗日表述的做法形成了一种对照,在那里,独立的时间和空间变量是对称地处理的.正是由于这一理由,哈密顿方法(至少象这里引进的那样)较难适用于场的相对论协变描述.这证明,在考虑各种场时,哈密顿方法不如拉格朗日方法那样有用,因此,这里对它只作简要的描述就足够了.

为了推广到用场量 η_ρ 来描述的三维场,明显的做法是定义与式(12-51)相类似的正则动量密度

$$\pi_\rho(x_\mu) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_\rho}. \quad (12-53)$$

量 $\eta_\rho(x_i, t)$, $\pi_\rho(x_i, t)$ 一起定义了描述经典场及其时间进展的无限维相空间.我们可以得到一个与分立系统的正则动量守恒定理大致相似的 π_ρ 的守恒定理.如果因为 \mathcal{L} 并不显含 η_ρ [就象式(12-10)中那样],因而给定的场量 η_ρ 是循环的,则拉格朗日场方程看来象是某种守恒流的现存论述:

$$\frac{d}{dx_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho, \mu}} = 0$$

或

$$\frac{d\pi_\rho}{dt} + \frac{d}{dx_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho, i}} = 0. \quad (12-54)$$

由此可知,如果 η_ρ 是循环的,则有一个积分守恒量

$$\Pi_\rho = \int dV \pi_\rho(x_i, t).$$

哈密顿密度式(12-52)的明显推广是

$$\mathcal{H}(\eta_\rho, \eta_{\rho, i}, \pi_\rho, x_\mu) = \pi_\rho \dot{\eta}_\rho - \mathcal{L}, \quad (12-55)$$

这里认为,定义方程(12-53)的反演能够消去对 $\dot{\eta}_\rho$ 的函数依存性.根据这个定义得

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_\rho} &= \dot{\eta}_\rho + \pi_\lambda \frac{\partial \dot{\eta}_\lambda}{\partial \pi_\rho} \\ &\quad - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_\lambda} \frac{\partial \dot{\eta}_\lambda}{\partial \pi_\rho} = \dot{\eta}_\rho.\end{aligned}\quad (12-56)$$

另一半正则场方程更为繁复。当用正则变量表达时，通过 η_ρ 以及对 \mathcal{L} 的明显依存性， \mathcal{H} 应是 η_ρ 的函数。因此，

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_\rho} &= \pi_\lambda \frac{\partial \dot{\eta}_\lambda}{\partial \eta_\rho} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_\lambda} \frac{\partial \dot{\eta}_\lambda}{\partial \eta_\rho} \\ &\quad - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_\rho} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_\rho}.\end{aligned}\quad (12-57)$$

利用拉格朗日方程，此式能够表达成

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_\rho} &= - \frac{d}{dx_\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho, \mu}} \right) \\ &= - \dot{\pi}_\rho - \frac{d}{dx_i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho, i}} \right).\end{aligned}\quad (12-58)$$

由于式中出现 \mathcal{L} ，所以我们仍未得到一种有用的形式。然而，通过完全相似的推导，可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_{\rho, i}} &= \pi_\lambda \frac{\partial \dot{\eta}_\lambda}{\partial \eta_{\rho, i}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_\lambda} \frac{\partial \dot{\eta}_\lambda}{\partial \eta_{\rho, i}} \\ &\quad - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho, i}} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho, i}}.\end{aligned}\quad (12-59)$$

因此，我们能够把另一半正则方程表达成

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_\rho} - \frac{d}{dx_i} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_{\rho, i}} \right) = - \dot{\pi}_\rho.\quad (12-60)$$

引进如下定义的函数微商的概念：

$$\frac{\delta}{\delta \psi} = \frac{\partial}{\partial \psi} - \frac{d}{dx_i} \frac{\partial}{\partial \psi_{, i}},\quad (12-61)$$

能够把式 (12-56) 和式 (12-60) 表达成更接近于分立系统的哈密顿方程的形式。由于 \mathcal{H} 不是 $\pi_{\rho, i}$ 的函数，所以式

(12-56) 和式 (12-60) 可写成

$$\dot{\eta}_\rho = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi_\rho}, \quad \dot{\pi}_\rho = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \eta_\rho}. \quad (12-62)$$

注意, 采用相同的符号形式时, 拉格朗日方程 (12-23) 的形式将是

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_\rho} \right) - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \eta_\rho} = 0. \quad (12-63)$$

然而, 采用函数微商的好处只是可以得到与分立系统的相似性. 另一方面, 它也不允许把时间和空间变量置于同等地位来处理.

记得, η_ρ 看作是 $\eta_\rho, \eta_{\rho,i}, \pi_\rho$ 和 x_μ 的函数, 故如使式 (12-55) 的时间全微商展开, 就能得到 \mathcal{H} 的另外一些性质. 这时可得

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{H}}{dt} &= \dot{\pi}_\rho \dot{\eta}_\rho + \pi_\rho \frac{d\dot{\eta}_\rho}{dt} \\ &\quad - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_\rho} \dot{\eta}_\rho - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_\rho} \frac{d\dot{\eta}_\rho}{dt} \\ &\quad - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,i}} \frac{d\eta_{\rho,i}}{dt} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \end{aligned}$$

根据定义方程 (12-53), 右边第二、第四项相互抵销, 以致微商简化为

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{H}}{dt} &= \dot{\pi}_\rho \dot{\eta}_\rho - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_\rho} \dot{\eta}_\rho \\ &\quad - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,i}} \frac{d\eta_{\rho,i}}{dt} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (12-64)$$

另一方面, 把 \mathcal{H} 看作是 $\eta_\rho, \eta_{\rho,i}, \pi_\rho$ 和 x_μ 的函数, 则时间全微商为

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \dot{\pi}_\rho \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_\rho} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_\rho} \dot{\eta}_\rho$$

$$+ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_{\rho, i}} \frac{d\eta_{\rho, i}}{dt} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}. \quad (12-65)$$

右边的表达式已经表达成便于与式 (12-64) 右边相比的形式。例如, 根据式 (12-56), 两个表达式的第一项是相同的。根据式 (12-57), 第二对也存在类似的匹配, 而式 (12-59) 则指出了第三对的等价性。因此, 最后一对的两项必定相等:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}, \quad (12-66)$$

此式相当于分立系统情况中的式 (8-13)。

相反, 不存在式 (8-35) 的类比, 即 \mathcal{H} 的时间全微商和偏微商一般是不相同的。利用哈密顿运动方程 (12-56) 和式 (12-60), 并交换求导的次序, 能够把式 (12-65) 表达成

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{H}}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_{\rho}} \frac{d}{dx_i} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_{\rho, i}} \right) \\ &+ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_{\rho, i}} \frac{d\eta_{\rho}}{dx_i} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}. \end{aligned}$$

利用式 (12-56) 并合并各项, 最后得

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{d}{dx_i} \left(\eta_{\rho} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_{\rho, i}} \right) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}, \quad (12-67)$$

这是我们能够得到的与式 (8-35) 最为接近的形式。

但实际上, 只要稍为修改一下, 式 (12-67) 式 (12-55) 就是熟悉的形式。如果说 \mathcal{H} 与早就确认为能量密度的 T_{00} [式 (12-35)] 相一致, 也就不足为奇了。其次, 根据式 (12-59) 可得

$$\eta_{\rho} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_{\rho, i}} = - \eta_{\rho} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho, i}} = -T_{0i}.$$

当 \mathcal{L} 并不显含 t 时, 根据式 (12-66), \mathcal{H} 也不会显含时间, 因而该情况下的式 (12-67) 将化为

$$\frac{dT_{00}}{dt} + \frac{dT_{0i}}{dx_i} = 0,$$

这是第一个散度守恒方程 (12-35)。我们已经看到, 守恒流的存在意味着某个积分量的守恒, 在这里就是

$$P_0 \equiv H = \int \mathcal{H} dV. \quad (12-68)$$

因此, 如果 \mathcal{H} 不是时间的显函数, 那么守恒量将不是 \mathcal{H} 而是积分量 H 。

总的哈密顿函数 H 不过是密度体积分这种函数的一个例子。这种积分量的时间微商的一般形式是可以直接表述的。考虑某个密度 \mathcal{U} , 它是相空间坐标 (η_ρ, π_ρ) 和 它们的空间梯度的函数, 甚至可能还是 x_μ 的函数:

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\eta_\rho, \pi_\rho, \eta_{\rho,i}, \pi_{\rho,i}, x_\mu). \quad (12-69)$$

相应的积分量为

$$U(t) = \int \mathcal{U} dV, \quad (12-70)$$

这里的体积分扩展到被界面包围的所有空间, 在这样的界面上, η_ρ 和 π_ρ 为零。求出 U 对时间的微商, 一般将有

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} = \int dV \left\{ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta_\rho} \dot{\eta}_\rho \right. \\ + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta_{\rho,i}} \dot{\eta}_{\rho,i} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \pi_\rho} \dot{\pi}_\rho \\ \left. + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \pi_{\rho,i}} \dot{\pi}_{\rho,i} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} \right\}. \quad (12-71) \end{aligned}$$

今考虑象下面这样的项:

$$\int dV \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta_{\rho,i}} \dot{\eta}_{\rho,i} = \int dV \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta_{\rho,i}} \frac{d\dot{\eta}_\rho}{dx_i}.$$

记得 η_ρ 及各微商在界面上为零, 因而通过分部积分可得

$$\int dV \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta_{\rho,i}} \dot{\eta}_{\rho,i} = - \int dV \dot{\eta}_\rho \frac{d}{dx_i} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta_{\rho,i}} \right).$$

含有 $\dot{\pi}_{\rho,i}$ 的项也可作出类似的简化. 分别合并 $\dot{\eta}_\rho$ 和 $\dot{\pi}_\rho$ 的系数, 则可看到, 采用 δ 记号式 (12-61) 时, 式 (12-71) 可化为

$$\frac{dU}{dt} = \int dV \left\{ \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \eta_\rho} \dot{\eta}_\rho + \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \pi_\rho} \dot{\pi}_\rho + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} \right\}. \quad (12-72)$$

最后, 引用 $\dot{\eta}_\rho$ 和 $\dot{\pi}_\rho$ 的正则运动方程 (12-62), 即得

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} = \int dV \left\{ \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \eta_\rho} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi_\rho} - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \eta_\rho} \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \pi_\rho} \right\} \\ + \int dV \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (12-73)$$

右边第一个积分显然相当于泊松括号形式. 如果 \mathcal{U} 和 \mathcal{W} 是两个密度函数, 那么, 这些考虑告诉我们, 积分量的泊松括号定义为

$$[U, W] = \int dV \left\{ \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \eta_\rho} \frac{\delta \mathcal{W}}{\delta \pi_\rho} - \frac{\delta \mathcal{W}}{\delta \eta_\rho} \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \pi_\rho} \right\}. \quad (12-74)$$

让我们再以显式定义一个所谓 U 对 t 的偏微商:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \int dV \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t}. \quad (12-75)$$

这样, 式 (12-73) 能表达成

$$\frac{dU}{dt} = [U, H] + \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (12-76)$$

采用这种记号时, 此式正好相当于分立系统的式 (9-94). 根据定义, H 与自身的泊松括号为零, 所以式 (12-76) 在这种特殊情况下可化为

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (12-77)$$

这是式(12-67)的积分形式和式(8-35)在场论中的变式。

因此,经典场的泊松括号形式表现为哈密顿表述的一种自然结果。但我们在作出场论的泊松括号描述时,不可能与分立系统的描述一一对应。例如,我们会看到,这里只是通过一对密度来定义泊松括号的。所以不可能轻而易举地建立起一系列泊松括号与分立力学中的那些基本泊松括号相对应。事实上, π_p 是密度而 η_p 则不然。其次,如果 x_i 起的是加于力学变量上的连续下标的作用,则基本泊松括号包含的函数应有不同的 x_i 值,这对于现有表述是难予接受的。正因为如此,所以几乎无人去探索经典场的正则变换,而这一课题已证明对分立系统是有意义的和重要的。在实施量子化步骤时,通常要求用量子的对易子替代基本泊松括号,这时,上述做法也难以实现。

然而,有一个办法可用来处理经典场,它为我们提供了分立力学的几乎所有哈密顿和泊松括号表述。事实上,这种处理所依据的主要想法是用某种可数的分立下标来替代连续的空间变量或下标。我们能够再一次参照弹性棒的纵振荡来阐明这种做法。设棒的有限长度为 $L = x_2 - x_1$ 。 η 在端点处为零的要求是一种边界条件,实际上,只要把棒置于两个理想刚性壁之间,即能提供这一条件。这样,我们就能用一个傅里叶级数来表示振幅:

$$\eta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \sin \frac{2\pi n(x - x_1)}{2L}. \quad (12-78)$$

我们在这里用的是分立下标 n 而不是连续下标 x 。仅当 $\eta(x)$ 是一个性能良好的函数时,才允许我们对所有 x 采用这种表示式,而大多数物理场量是满足这一要求的。

为了简单地说明如何实现这种构想,我们假设只有一个实数场量 η ,它能展开为一个三维傅里叶级数,它的形式为

$$\eta(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{V^{1/2}} \sum_{\mathbf{k}} q_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (12-79)$$

式中 \mathbf{k} 是只能取分立量值和方向的波矢量, 因此, 只有整数 (有时是半整数) 波长才符合给定的线性尺度. 我们说 \mathbf{k} 有一分立谱. 标量下标 k 代表某种顺序的一组整数下标, 它们被用于 \mathbf{k} 的分立值的计数, 而 V 则是以归一化因子出现的系统的体积. 由于 η 是实数, 所以必定有 $q_{\mathbf{k}}^* = q_{-\mathbf{k}}$.

指数在整个体积内的正交性可以表达成关系式

$$\frac{1}{V} \int e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} dV = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}. \quad (12-80)$$

事实上, \mathbf{k} 的允许值是一些保证条件 (12-80) 得到满足的值 (正如在一维傅里叶级数中能够看到的那样). 由此可知, 展开式系数 $q_{\mathbf{k}}(t)$ 为

$$q_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{V^{1/2}} \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \eta(\mathbf{r}, t) dV. \quad (12-81)$$

正则动量密度能以同样的方式展开成

$$\pi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{V^{1/2}} \sum_{\mathbf{k}} p_{\mathbf{k}}(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (12-82)$$

同样有 $p_{\mathbf{k}}^* = p_{-\mathbf{k}}$. 相应地, 展开式系数 $p_{\mathbf{k}}(t)$ 则得自

$$p_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{V^{1/2}} \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \pi(\mathbf{r}, t) dV. \quad (12-83)$$

$q_{\mathbf{k}}$ 和 $p_{\mathbf{k}}$ 两者都是式 (12-70) 那种样子的积分量. 所以我们能够要求得到这些量的泊松括号. 由于指数并不涉及场量, 因此, 根据式 (12-74), 有

$$[q_{\mathbf{k}}, p_{\mathbf{k}'}] = \frac{1}{V} \int dV e^{i(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}} \cdot \left\{ \frac{\delta\eta'}{\delta\eta} \frac{\delta\pi}{\delta\pi} - \frac{\delta\pi}{\delta\eta} \frac{\delta\eta}{\delta\pi} \right\}$$

$$= \frac{1}{V} \int dV e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}},$$

或者根据式(12-80), 有

$$[q_k, p_{k'}] = \delta_{k, k'}. \quad (12-84)$$

其次, 根据泊松括号的定义式(12-74), 显然有

$$[q_k, q_{k'}] = 0 = [p_k, p_{k'}]. \quad (12-85)$$

因而 q_k, p_k 的泊松括号构成一组基本泊松括号, 并且要求我们把它们看作是正则坐标. 因此, 它们所服从的运动方程的形式引起了人们的极大兴趣.

根据式(12-76), q_k 对时间的依存性可得自

$$\begin{aligned} \dot{q}_k(t) = [q_k, H] &= \frac{1}{V^{1/2}} \int dV e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\ &\cdot \left\{ \frac{\delta \eta}{\delta \eta} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi} - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \eta} \frac{\delta \eta}{\delta \pi} \right\} \end{aligned}$$

或

$$\dot{q}_k(t) = \frac{1}{V^{1/2}} \int dV e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi}. \quad (12-86)$$

另一方面, 我们有

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \int dV \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} \frac{\partial \pi}{\partial p_k}. \quad (12-87)$$

由于 \mathcal{H} 不是 π 的梯度的函数, 所以偏微商与函数微商相同.

其次, 根据式(12-82), 有

$$\frac{\partial \pi}{\partial p_k} = \frac{1}{V^{1/2}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \quad (12-88)$$

因此, 式(12-87)与式(12-86)全同, 由此得

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}. \quad (12-89)$$

只要添上一步, 我们同样可以得到 p_k 的运动方程. 我们再次有

$$\dot{p}_k = [p_k, H] = -\frac{1}{V^{1/2}} \int dV e^{ik \cdot r} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \eta},$$

但现在

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = \int dV \left\{ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial q_k} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_{,i}} \frac{\partial \eta_{,i}}{\partial q_k} \right\}.$$

然而,对含有 η 的梯度分量的那一项作出分部积分,这个积分能化为含有函数微商的积分:

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = \int dV \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \eta} \frac{\partial \eta}{\partial q_k},$$

再根据式(12-77),就可得到

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}. \quad (12-90)$$

因而 q_k 和 p_k 均服从哈密顿运动方程.

在某种意义上讲,我们已经绕行了一整周. 我们从一个采用可数广义坐标的分立系统开始了这一章的讨论,然后再趋向于连续变量组的极限,目的是为了搞清楚如何处理连续系统. 最后,我们介绍了一种连续系统的描述法,采用的是可数的、分立的坐标组,这些坐标服从我们一开始时讨论的分立系统的同一种力学. 由于在形式上对应于分立系统的变量,因而当我们从经典场论过渡到量子场论时,显然可以选择 q_k 和 p_k 这些量来量子化. 事实上, q_k 就相当于场的所谓“占有数”.

我们能用分立坐标描述场是由于系统的有限大小和边界条件允许有一个分立的傅里叶展开式. 同样可以说,展开式是对平面波的整个分立谱作的. 由于波矢量 \mathbf{k} 在量子力学中成正比于平面波相关粒子的动量,故这里所用的展开式常称为

动量表示式。这种描述不一定只限于平面波展开式。只要场函数能够用一组分立的正交归一本征函数展开，就能找到一组可数坐标。这种一般展开式的推导可以仿效这里就平面波函数所遵循的步骤来做，它们在章末所引的某些文献中将有详细的讨论。

12-5 相对论场论

在第七章中我们已经看到，在建立质点力学的相对论性协变拉格朗日和哈密顿描述时困难很大。部分原因是由于到空间和时间坐标所起的作用不同。对于质点来说，空间坐标是力学变量，而时间则是一个单调参量。但在经典场论中，对空间和时间坐标的处理有一种固有的相似性。它们都是参量，它们共同确定着时-空连续区内的某一点，而要测定的也正是这一点处的场变量。尽管到目前为止，采用四维时-空系统只是为了简化符号，但它非常符合于表述的那种方便而又自然的方式，这使人们相信，相对论性协变描述是适用于经典场的。确实，只要对已有的表述作出相对说来较为次要的修正，就可以用一种显然是洛仑兹不变的方式来处理相对论场。

特别要注意三点：(1) 所用四维空间的性质（和度规）；(2) 场量、拉氏密度和相关函数的洛仑兹变换性质；以及(3) 积分限的协变描述。到目前为止，曾经不言而喻地采用了坐标为 t, x, y, z 的简单笛卡儿四维空间，如用它显示洛仑兹不变性则是不方便的。在狭义相对论理论中出现的各种度规和空间中(见节 7-2, 7-3)，我们宁可采用明可夫斯基空间，无可否认，它有可能导致出现一些包含 i 的因子，否则则是一些实数物理量。但它也具备形式熟悉和符号明显简单的优点。(从这种表述到其他度规的转换，将在某些习题中考虑。)与此相应，现在把希腊字母下标认为是从 1 变到 4 的，其中 $x_4 =$

ict. 注意, 拉格朗日方程 (12-23) 不会受到这种变化的影响. 事实上,

$$\frac{d}{dx_\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho, \nu}} \right)$$

这一项在任何 x_ν 的尺度变化时都保持不变, 而拉格朗日方程中的另一项则根本不会涉及到那些坐标. 再说, 空间的变化也不会影响式 (12-20) 那样的哈密顿原理的表述, 因为它仅仅引进了一个倍乘常数.

所有与场相关的量和相应的方程现在都应该具有某些确定的洛伦兹协变性质. 所以场量必须由某一给定级世界张量 (世界标量、世界矢量等) 所组成. 原则上, 没有必要把 η_ρ 局限于这类量中的任何一个, 但可代表一组例如两个世界标量这样的量. 拉氏密度和哈密顿密度也应该是协变的. 在哈密顿原理中, 四维空间的体元 (dx_ν) 在洛伦兹变换下不变. 由于我们通常总是把 I 假想为一个标量, 这意味着拉氏密度 (因而还有 \mathcal{H}) 应该是世界标量. 也就是说, 它们必定是场量 (还可能连同外部协变量) 的函数, 构成这些函数所采用的方式保证构成的量是世界标量. 由此可知, 式 (12-34) 所定义的应力-能量张量 $T_{\mu\nu}$ 自动地是一个二级世界张量. 但四维空间的变化意味着 $T_{\mu\nu}$ 的分量的数值有可能改变. 当然, 从 (t, x, y, z) 变到 (x, y, z, ict) 时, T_{ij} 不会受到影响——只要拉氏密度相同. 对于其他分量, 则从式 (12-34) 和式 (12-34') 可知, 在相同条件下的对应性为

$$\begin{aligned} T_{44} &\rightarrow T_{00}, \\ T_{j4} &\rightarrow ic T_{j0}, \\ T_{4j} &\rightarrow -\frac{i}{c} T_{0j}. \end{aligned} \tag{12-91}$$

拉氏密度对于某个倍乘常数因子当然是不确定的. 选择

这种因子时，习惯上总是使得 T_{44} (或其对称化形式) 直接代表场的能量密度。现在，在选定的四维空间内，量 R_μ ，即式 (12-36) 将定义为

$$R_\mu = \int T_{\mu\alpha} dV. \quad (12-92)$$

考虑一组相关的 P_μ ，它定义为

$$P_\mu = \frac{i}{c} R_\mu. \quad (12-93)$$

于是，根据式 (12-91) 以及前面对 T_{i0} 所作的解释(见第 668 页)可知， P_i 代表场的总线动量分量，而 P_4 则等于 $(iE)/c$ ，这里的 E 是场的总能量。这表明， P_μ 构成了场的能量-动量的相对论世界矢量(见第 363 页)。但还必须证明，在洛伦兹变换下， R_μ 和 P_μ 将象世界矢量一样来变换。为要证明这一性质，必须检查一下对三维空间的积分在协变表述中的意义，当然还有积分限一般应如何处理的问题。

对积分限的协变性可能提出疑问的第一个事例是哈密顿原理。在式 (12-20) 中，积分明显地显示出是协变的，但从式 (12-12) 导出的积分限则并不协变。空间积分是对三维空间内某一固定体积求的，接下来是对 t_1 和 t_2 之间的时间的积分。但对于固定的时间 t ，对 V 所求之积分并不是一个协变的概念，因为同时性(“常值时间”)在洛伦兹变换下不一定保持不变。按照合适的协变描述，积分是对类空三维超曲面作出的。所谓类空曲面，指的是面内的所有世界矢量都是类空的那种曲面(见第 355 页)。垂直于这种曲面的矢量则是类时的。可见，连接常值时间曲面上两个世界点的任何矢量必定是类空的，因为它的 x_4 分量为零。因此，常值时间曲面就是类空曲面的某种特例。但这种曲面的特性在所有的洛伦兹系统内都保持不变，因为矢量的类空或类时属性都不受洛伦兹变

换的影响。在一坐标系内的固定点处对 t 所求之积分能够以相似的方式协变地描述成对某一类时曲面的积分。对于（物理空间内的）一维系统，式（12-12）给出的哈密顿原理中的积分是对图12-4所示矩形作出的。洛仑兹变换是明可夫斯基空间内的转动，矩形的各条边不会平行于变换后空间内的各个轴。但我们能够把所有洛仑兹系统内的积分描述成为对四维空间内某一区域的积分，该区域位于两个类空超曲面之间，并以与之相交的类时曲面为界。

因此，象 P_μ 这样的积分量的合适的协变描述将由

$$P_\mu = \frac{i}{c} \int_S T_{\mu\nu} dS_\nu \quad (12-94)$$

给出，这里的积分是对类空超曲面上某一区域的积分，对这一区域来说，曲面法向上的矢量曲面元为 dS_ν 。由于 $T_{\mu\nu}$ 是一个二级世界张量，如此定义的 P_μ 显然是一个世界矢量。但我们现在能够证明，只要式（12-94）给出的 P_μ 无散度，亦即它满足式（12-33），则 P_μ 的分量能化为寻常三维空间内的体元。假想四维空间内有一区域，它由类空的 S_1, S_2 曲面和类

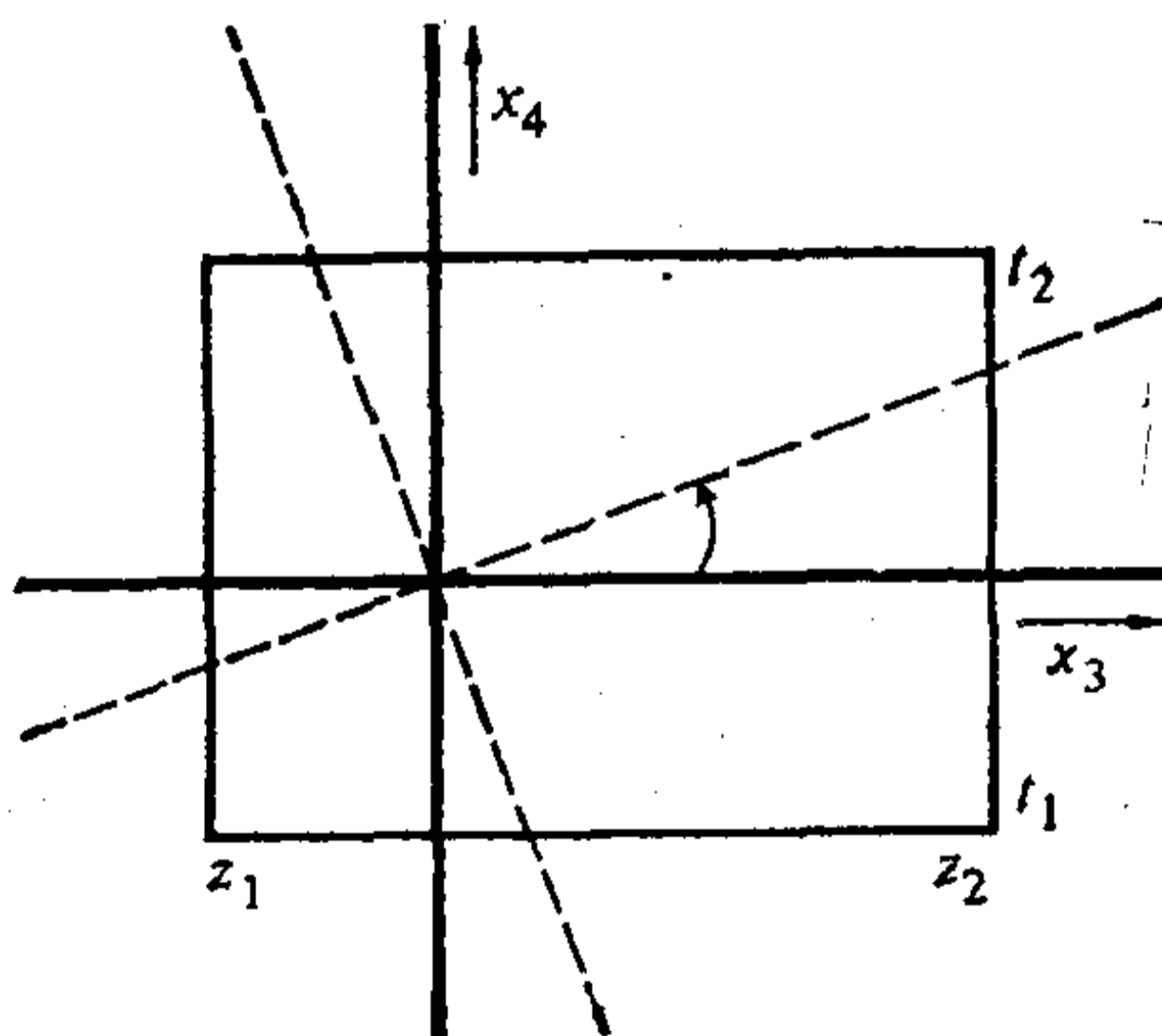


图 12-4 仅在一个方向上展延的某个系统的哈密顿原理积分域

时的 S_3 曲面这样三个曲面所限定 (见图 12-5)。根据四维散

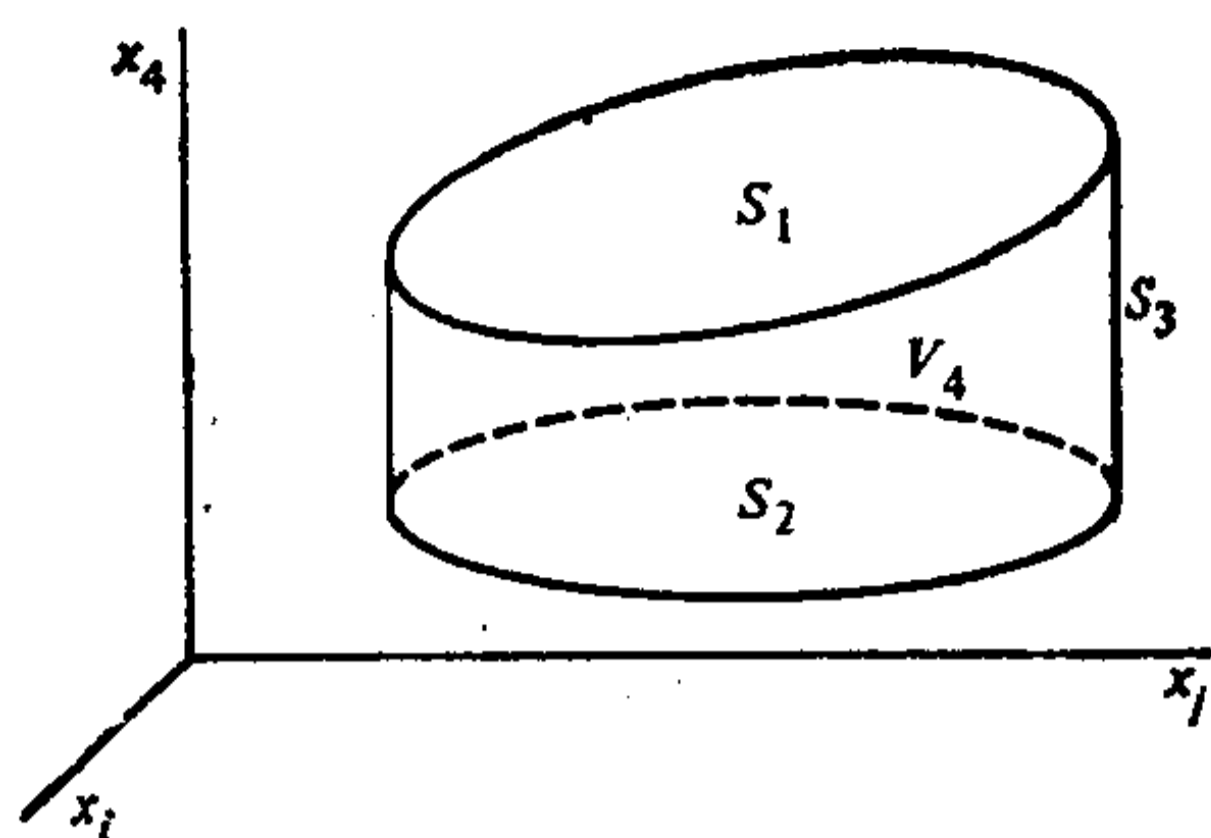


图 12-5 四维空间内积分体积示意图

度定理,散度的体积分可由面积分

$$\int_{V_4} \frac{dT_{\mu\nu}}{dx_\nu} (dx_\nu) = \int_{S_1+S_2+S_3} T_{\mu\nu} dS_\nu \quad (12-95)$$

代替。对 S_3 的积分相当于常值 r 处对 t 的积分。如果允许体积充分扩展,对这一曲面的积分将包含系统之外的 r ,在这样的地方,所有的场量都等于零。由于假设 $T_{\mu\nu}$ 具有无散度的性质,左边的积分也应等于零。所以,如果以相同的方向取作类空曲面的法向,则

$$\int_{S_1} T_{\mu\nu} dS_\nu = \int_{S_2} T_{\mu\nu} dS_\nu. \quad (12-96)$$

如果 S_1 是某个任意类空曲面, S_2 是一个 x_4 或 t 等于常值的特殊曲面,则由式 (12-96) 可知,

$$\int_{S_1} T_{\mu\nu} dS_\nu = \int T_{\mu 4} dV. \quad (12-97)$$

左边的四维矢量的变换性质是明显的;因而右边的 R_μ [按照式 (12-92)] 也将作为一个四维矢量来变换。其次,如果 S_1 和 S_2 都是常值 t (譬如说,分别为 t_1 和 t_2) 处的曲面,则式 (12-96) 将等同于

$$R_\mu(t_1) = R_\mu(t_2),$$

这就是证明 R_μ 在各时刻都守恒的协变途径。

因此,只要小心谨慎,在相对论经典场论的框架内依然可以采用守恒积分量。我们不准备每次都写出这种详细的对应性,只要在大多数事例中的体积分涉及的是一个特定的洛仑兹系统,在这系统内,类空超曲面是常值 t 的三维空间内的某个区域。对于角动量密度,应该注意到 M_{ij} [式 (12-46)] 的协变类比是一个三级四维张量:

$$M_{\mu\nu\lambda} = \frac{i}{c} (x_\mu T_{\nu\lambda} - x_\nu T_{\mu\lambda}), \quad (12-98)$$

式中 μ 和 ν 是反对称的。相应的整体量或积分量为

$$M_{\mu\nu} = \int M_{\mu\nu\lambda} dS_\lambda, \quad (12-99)$$

这是对类空超曲面所求的积分。如果洛仑兹系统的选择使得曲面对应于常值 t , 则

$$M_{\mu\nu} \rightarrow \int M_{\mu\nu} dV,$$

这相当于前面的定义。因此,对称应力-能量张量的 M_{ij} 守恒的其余论证,能象前面一样只要考虑这种特定的洛仑兹系统。

如前节所示,哈密顿表述是把时间坐标和空间坐标截然分开的。这并不说明它必定是非相对论的,而只不过表明该表述不是明显协变的。我们必须假想,从每一个特定观测者看来,哈密顿框架是借助于时间构成的。只要场量和导得的函数具有合适的变换性质,各洛仑兹系统的这种结构就不会违反狭义相对论。

这里还需说明一点。如果让 η_p 代表一组协变场量,我们就得承认系统有可能由两个或两个以上相互作用的场所组成。完整的拉氏密度可能由一些代表自由场的拉氏密度加上场与场之间相互作用的描述项所组成。记得,相对论质点力学的困难之一是考虑质点间相互作用的问题,这种相互作用

必然意味着超距作用。然而，场与场之间的相互作用可以发生在一个点上，因而符合于狭义相对论。我们往往能够再前进一步，并论述场和质点之间在给定时间-空点处发生的相互作用。这使我们有可能用相对论观点来考虑由一个连续场、一个分立质点以及它们之间的相互作用所组成的系统。怎样才能特殊情况下做到这一点，将在下一节中指出，它们是一些相对论场论的例证。

12-6 相对论场论举例

将讨论四个例子，复杂程度依次递增。

A. 复标量场 任何复场都将用两个独立部分来描述，它能够表达成场的实部和虚部，也能够表达成复场本身和它的复共轭。我们将选用后一种方式。与此相应，拉氏密度和相关函数也将用两个独立的场变量 ϕ 和 ϕ^* 给出，它们都是世界标量¹⁾。对于这一特定的例子，我们选择拉氏密度

$$\mathcal{L} = -c^2 \phi_{, \lambda} \phi^*_{, \lambda} - \mu_0^2 c^2 \phi \phi^*, \quad (12-100)$$

式中 μ_0 是一常数。注意，正如所要求的那样， \mathcal{L} 是一世界标量。用空间和时间变量表达时， \mathcal{L} 可写成

$$\mathcal{L} = \dot{\phi} \dot{\phi}^* - c^2 \nabla \phi \cdot \nabla \phi^* - \mu_0^2 c^2 \phi \phi^*. \quad (12-100')$$

为了求得 $\eta_\rho = \phi^*$ 的场方程，应注意到

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*_{, \nu}} = -c^2 \phi_{, \nu}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} = -\mu_0^2 c^2 \phi.$$

因此，拉格朗日-欧拉场方程为

$$\phi_{, \nu\nu} - \mu_0^2 \phi = 0, \quad (12-101)$$

或者以等效形式表达成

1) 在下一节中将看到，复场自然地导致相关荷和相关流密度，这正是把它们引入物理理论的主要原因。

$$\sum_{\nu} \frac{d^2 \phi}{dx_{\nu}^2} - \mu_0^2 \phi = 0 \quad (12-102)$$

和

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \phi}{dt^2} - \mu_0^2 \phi = 0. \quad (12-102')$$

采用(前面第 358 页定义的)达朗伯算符时,场方程也能协变地表达成

$$(\square^2 - \mu_0^2)\phi = 0. \quad (12-103)$$

同样,根据 \mathcal{L} 的对称性,在 $\eta_{\rho} = \phi^*$ 时得到的场方程为

$$(\square^2 - \mu_0^2)\phi^* = 0. \quad (12-103')$$

ϕ 和 ϕ^* 两者都能满足的基本场方程称为克莱茵-戈登 (Klein-Gordon) 方程¹⁾, 并象这里所给出的那样,它代表的是静止质能为 μ_0 、自旋为零的带电粒子薛定谔方程的相对论对应式。

由式 (12-34) 所定义的应力-能量张量具有分量

$$T_{\mu\nu} = -c^2 \phi_{,\mu} \phi^*_{,\nu} - c^2 \phi^*_{,\mu} \phi_{,\nu} + c^2 (\phi_{,\lambda} \phi^*_{,\lambda} + \mu_0^2 \phi \phi^*) \delta_{\mu\nu}, \quad (12-104)$$

并且显然是对称的。由于拉氏密度描述的是与外部世界没有相互作用的自由场,所以 \mathcal{L} 不会显含 x_{ν} , 而且对于 $T_{\mu\nu}$ 来讲,守恒定理式 (12-33) 成立,这是能够直接加以证实的。为了引进哈密顿表述,必须把特定洛伦兹系统内的时间和空间坐标区分开。因而根据式 (12-53), 共轲动量为

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}^*, \quad \pi^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^*} = \dot{\phi}. \quad (12-105)$$

由此可得,哈密顿密度(具有与 T_{44} 相同的量值)所取形式为

$$\mathcal{H} \equiv \pi \dot{\phi} + \pi^* \dot{\phi}^* - \mathcal{L}$$

1) 在近代文献中,(12-103) 形式的克莱茵-戈登方程中 $\mu_0^2 \phi$ 项取的是正号。因为使用了式 (7-53) 给出的度规,使得达朗伯算符的定义中有一相应的符号变化。见习题 7。

$$= \pi\pi^* + c^2 \nabla\phi \cdot \nabla\phi^* + \mu_0^2 c^2 \phi\phi^*. \quad (12-106)$$

哈密顿运动方程可以简化为式(12-105)和克莱茵-戈登方程,我们将把这一证明留作习题.目前,我们在这里要做的是说明如何变换到动量表示式.我们可把展开式(12-79)和(12-82)引进哈密顿密度.由于场不是实场,所以不会有 $q_k^* = q_{-k}$.实际上, q_k 和 q_k^* 现在代表的是两组独立的分立坐标,一组表示 ϕ ,另一组表示 ϕ^* .总哈密顿函数是对式(12-106)中三项所求体积分之和.作为一个典型的例子,考虑

$$\mu_0^2 \int \phi\phi^* dV = \frac{\mu_0^2}{V} \sum_{k, k'} \int q_k q_{k'}^* e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} dV,$$

此式可借助式(12-80)简化为

$$\mu_0^2 q_k q_k^*.$$

其他需要特别注意的只剩下包含散度的这一项,它在被积函数中引进了因子 $(i\mathbf{k}) \cdot (-i\mathbf{k}') \cdot H$ 的最后形式可写成

$$H = p_k p_k^* + \omega_k^2 q_k q_k^*, \quad (12-107)$$

式中

$$\omega_k^2 = c^2 k^2 + \mu_0^2. \quad (12-108)$$

式(12-107)的每一个求和项都具有频率为 ω_k 的单位质量谐振子的形式.只要计算哈密顿运动方程(12-89)和式(12-90)就能明显地看出这一点.在动量或平面波表示式中,场 ϕ 和 ϕ^* 应代之以分立的谐振子系统,这与把有限固体内的声场看作是“声子”的集合几乎一样.我们的标量电荷场的分立“振动”谱由式(12-108)给出.场的量子化(即所谓二次量子化)借助动量表示式来做最为简单.实际上,各个谐振子运动的量子化与实际谐振子情况下的做法是一样的.但这一课题当然超出了我们的讨论范畴.

B. 正弦-戈登方程和相关场 如果把前例中的标量场取作实场(即 $\phi^* = \phi$),并只存在于一个空间方向上,则

按照式(12-100')的模式,明显的相应拉氏密度为

$$\mathcal{L} = \frac{c^2}{2} \left[\dot{\phi}^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - \mu_0^2 \phi^2 \right]. \quad (12-109)$$

(因子 1/2 是为方便而引进的;它显然不会影响运动方程的形式。)相关的场方程为

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \mu_0^2 \phi, \quad (12-110)$$

这是一维克莱因-戈登方程. 注意,它对于场 $\phi(x, t)$ 是线性的.

我们可把式(12-109)的拉氏密度看作形式为

$$\mathcal{L} = \frac{c^2}{2} \left[\dot{\phi}^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - \mu_0^2 c^2 (1 - \cos \phi) \right] \quad (12-111)$$

的拉氏密度在微小场情况下的近似. 上式具有相应的场方程

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \mu_0^2 \sin \phi. \quad (12-112)$$

虽然也许是没有意义的,但式(12-112)还是照样称作正弦-戈登方程. 如果克莱因-戈登方程(12-110)使人们联想起谐振子,则拉氏函数式(12-111)中的“势”项将使人们记起线性摆的势项. 的确,式(12-112)曾经(也许更为合适地)被称作摆方程.

在这种一维领域内,应力-能量张量只有四个分量. 由于 \mathcal{L} 同样不显含 x 和 t , 张量元将满足守恒方程,在这里有两个这样的方程. 细节将留作习题,但特别感兴趣的是能量密度 T_{44} :

$$T_{44} = \frac{1}{2} \left[\dot{\phi}^2 + c^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \mu_0^2 c^2 (1 - \cos \phi) \right],$$

其数值当然与哈密顿密度

$$\mathcal{H}_1 = \frac{1}{2} \left[\pi^2 + c^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right] + \mu_0^2 c^2 (1 - \cos \phi) \quad (12-113)$$

的大小相同,式中的共轭动量为

$$\pi(x, t) = \dot{\phi}.$$

作为对各谐振子所求之和,克莱因-戈登场的动量表示式意味着该场在一维情况下能由下列形式平面波叠加而成:

$$q_k(t) e^{ikr} = A_0(k) e^{i(kr - \omega_k t)},$$

这里的 k 和 ω_k 由色散关系式 (12-108) 相联系. 对于服从正弦-戈登方程的场,由于在 \mathcal{H} 中存在着 $\cos \phi$ 项,相当难于应用动量表示式. 但我们依然能够象对待波那样来求解正弦-戈登方程. 式 (12-112) 中的 ϕ 有一个具有扰动的形式解,该扰动的移动速率为 v ,而在其他方面则保持其原有样子,这样的解必定仅是 $\tau = t - x/v$ 的某个函数. 这种情况下的式 (12-112) 将化为

$$\frac{d^2 \phi}{d\tau^2} - A \sin \phi = 0,$$

式中

$$A = \frac{\mu_0^2 c^2 v^2}{c^2 - v^2}. \quad (12-114)$$

采用变量 τ 时,这个方程确实是有限振幅的单摆方程. 如果振幅非常小,则已知 ϕ 将依 τ 作简谐运动, ω 则由式 (12-108) 给出并与振幅无关(注意,波数 $k = \omega/v$). 对于有限振幅,我们也可通过对摆的研究知道,尽管 ϕ 依然是周期的,但频率 ω 将与振幅有关. 也就是说,色散关系将与振幅有关. 当然,这是非线性方程的特征,而正弦-戈登方程就是这种方程的一个例子. 克莱因-戈登方程是线性的,但色散方程 (12-108) 则被说成是非线性的,即 ω_k 不是 k 的线性函数,只有当 $\mu_0 \rightarrow 0$, 克莱因-戈登方程化为通常的线性波方程时,它才会成为线性

的。

所以我们可以把正弦-戈登方程描述为非线性的,并具有与振幅有关的非线性色散关系。进一步的研究表明,它能够有一些解,这些解的性质仅为少数其他非线性方程所具备。这些解是行进中的波扰动,它们可以相互作用——相互穿越——并且除了有一可能的相移外,穿出时的形状不变。例如,非线性的科特韦格-德夫里斯 (Korteweg-deVries) 方程

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \alpha \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} + \nu \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} = 0 \quad (12-115)$$

就有这样的解,式中 α 和 ν 是常数。这些孤波甚至通过相互作用也能保持其形状不变,它们已被称为“孤立子”,在物理学领域内,它们有着日益广泛的应用,从基本粒子物理学直到固体物理学。例如,摆的正弦-戈登方程已被用来描述基本粒子族,并且还出现在约瑟夫森 (Josephson) 结的理论中。

C. 狄拉克粒子的经典场 这里的场由四个复数标量组成,它们是以两个阵列 ψ 和 ψ^\dagger 的形式出现的。现在的意图是把 ψ 看作是一个四元素列矩阵,而 ψ^\dagger 则可看作是伴矩阵。合适的拉氏密度为

$$\mathcal{L} = i\psi^\dagger \gamma_\mu \psi_{,\mu} + m\psi^\dagger \psi. \quad (12-116)$$

式中的 m 是一常数,它等于所代表的粒子的质量(以某种单位表示), γ_μ 是一组四个 4×4 狄拉克矩阵,它们是第四章中所用泡利 2×2 矩阵 σ_i 的推广[见式(4-74)]¹⁾。因此,该场具有八个分量,四个是 ψ 的,四个是 ψ^\dagger 的。如果 ψ_i 代表 ψ 的元

1) 表达成 2×2 矩阵的矩阵时,狄拉克矩阵可定义为

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (12-116')$$

但如果把 ψ, ψ^\dagger 作为阐述经典场的一个例子,就没有必要利用它们的明显表示式。

素, ψ^\dagger 则是 ψ^\dagger 的元素之一, 而式 (12-116) 中的 \mathcal{L} 则能以展开的形式表达成

$$\mathcal{L} = i\psi^\dagger_\nu (\gamma_\mu)_{\nu\lambda} \psi_{\lambda,\mu} + m\psi^\dagger_\nu \psi_\nu.$$

式中的 $(\gamma_\mu)_{\nu\lambda}$ 是 γ_μ 的 $\nu\lambda$ 元素. 然而, 始终保留 ψ 和 ψ^\dagger 的矩阵记号要方便得多, 而且同样明确.

由于 \mathcal{L} 并不包含 $\psi^\dagger_{,\mu}$, 因而得到的 ψ^\dagger 变量的欧拉-拉格朗日方程特别简单:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\dagger} = i\gamma_\mu \psi_{,\mu} + m\psi = 0. \quad (12-117)$$

因为 ψ 变量的相应欧拉-拉格朗日方程几乎具有同样简单的形式:

$$\frac{d}{dx_\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,\mu}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = i\psi^\dagger_{,\mu} \gamma_\mu - m\psi^\dagger = 0. \quad (12-118)$$

式 (12-117) 构成了著名的狄拉克波方程, 而式 (12-118) 则相当于伴随形式.

要得到正式的应力-能量张量并不困难, 它们是

$$T_{\mu\nu} = i\psi^\dagger \gamma_\nu \psi_{,\mu} - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu},$$

这能利用 ψ 和 ψ^\dagger 的明显的矩阵表示式直接证实. 但按实际情况看, $T_{\mu\nu}$ 并不对称. 而且由于 \mathcal{L} 至多对于场量的时间微商才是线性的, 因而不可能作出节 12-4 中的哈密顿表述. 由于 π 既不包含 $\dot{\psi}$ 又不包含 $\dot{\psi}^\dagger$, 因而人们能象质点力学中一样, 把定义方程反过来以消去时间微商. 狄拉克场确实还有另外一些有趣的方面, 它们将在本节结束前以及下一节中讨论.

D. 电磁场 不以力学系统为基础的最有名的经典场例子也许是电磁场. 然而, 它的表述比早先考虑过的那些例证要复杂得多, 而且有时会有二义性. 这里不可能深入地讨

论所有的细节, 但将提及某些要点.

微观形式(即不是处在宏观介质中)的麦克斯韦方程(1-60)由两个齐次方程

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (12-119)$$

和两个非齐次方程

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi\mathbf{j}}{c} \quad (12-120)$$

所组成. 齐次方程意味着 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 可以用标势 ϕ 和矢势 \mathbf{A} 表达, 而 ϕ 和 \mathbf{A} 一起构成一四维矢量 A_μ . 然而, 确定 A_μ 和 (\mathbf{E}, \mathbf{B}) 之间关系的方程(1-62)和(1-65)并不完全地确定那些势值. 的确, 在任何标函数的四维梯度范围内, A_μ 是不确定的. 必须加上一附加关系式, 即规范条件. 在我们的大多数讨论中, 没有必要明显地确定这一规范. 一旦要求某种特殊的规范条件时, 我们将采用洛仑兹规范(见第 358 页), 它导致形式特别简单的波方程, 并能以明显的协变形式表述:

$$\frac{dA_\mu}{dx_\mu} = 0. \quad (12-121)$$

式(1-62)和式(1-63)也能通过一个反对称二级世界张量, 即场张量 $F_{\mu\nu}$ 协变地表达, 这种张量定义为

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \equiv A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}. \quad (12-122)$$

A_μ 的规范不定性表现为以下事实: 如果 Λ 是一个标函数, 则可将

$$\frac{d\Lambda}{dx_\mu} \equiv \Lambda_{,\mu} \quad (12-123)$$

加于 A_μ 而不致影响 $F_{\mu\nu}$ 的量值. 显然, $F_{\mu\nu}$ 是矢量 A_μ 的一种四维旋度. 纯粹的空间元素 F_{ij} 当然是 \mathbf{A} 的旋度的分量,

因而用 \mathbf{B} 给出。对于元素 F_{ij} , 根据式(1-63), 有

$$\begin{aligned} F_{ij} &= \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \\ &= -\frac{i}{c} \frac{\partial A_j}{\partial t} - i \frac{\partial \phi}{\partial x_j} = iE_j. \end{aligned}$$

因此场张量的完整形式为

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -iE_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -iE_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (12-124)$$

可以预料, 用 $F_{\mu\nu}$ 时, 齐次方程(12-119)将同样满足, 因为正是这些方程导致了那些势。的确, 不难看出式(12-119)能够表达成四个方程

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} = 0 \quad (\text{不求和!}) \quad (12-125)$$

这里的 μ, ν, λ 是四个下标中任何三个下标的循环组¹⁾。(当 μ, ν, λ 选作 1, 2, 3 时, 显然会得到 $\nabla \cdot \mathbf{B}$ 方程。)但用 A_μ 时, 式(12-125)同样成立, 因为它们现在能表达成

$$\begin{aligned} A_{\nu,\mu\lambda} - A_{\mu,\nu\lambda} + A_{\mu,\lambda\nu} - A_{\lambda,\mu\nu} \\ + A_{\lambda,\nu\mu} - A_{\nu,\lambda\mu} = 0, \end{aligned}$$

此式由于成对相消而等于零。因而只有非齐次方程才借助它的那些场源来确定场, 并被看作是场方程。采用场张量时, 式(12-120)能表达成

$$\frac{dF_{\mu\nu}}{dx_\nu} = \frac{4\pi j_\mu}{c}, \quad (12-126)$$

1) 式(12-125)能更为省力地(采用求和约定)表达成

$$\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \frac{\partial F_{\lambda\rho}}{\partial x_\nu} = 0, \quad (12-125')$$

这里的 $\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ 是四维排列符号(见第202页)。

这里的 j_μ 同以前一样是四维矢量 ($\mathbf{j}, i\rho c$)。例如, 当 $\mu = 4$ 时, 式 (12-123) 显然就是 $\nabla \cdot \mathbf{E}$ 方程。式 (12-125) 和式 (12-126) 一起是协变形式的麦克斯韦方程。当我们寻求电磁场的拉格朗日表述时, 我们只须考虑式 (12-126), 因为根据定义, 其他各式是能够满足的。

如果把势的分量 A_μ 作为场量来处理¹⁾, 则电磁场的合适的拉氏密度为

$$\mathcal{L} = -\frac{F_{\lambda\rho}F_{\lambda\rho}}{16\pi} + \frac{j_\lambda A_\lambda}{c}. \quad (12-127)$$

为了得到欧拉-拉格朗日方程, 应注意到

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = \frac{j_\mu}{c};$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,\nu}} = -\frac{F_{\lambda\rho}}{8\pi} \frac{\partial F_{\lambda\rho}}{\partial A_{\mu,\nu}}.$$

再说, 根据定义方程 (12-122), 除非 $\lambda = \mu, \rho = \nu$ 和 $\lambda = \nu, \rho = \mu$, 否则 $F_{\lambda\rho}$ 的微商为零。因此,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,\nu}} = \frac{F_{\mu\nu}}{8\pi} - \frac{F_{\nu\mu}}{8\pi} = \frac{F_{\mu\nu}}{4\pi}, \quad (12-128)$$

而欧拉-拉格朗日方程为

$$\frac{1}{4\pi} \frac{dF_{\mu\nu}}{dx_\nu} - \frac{j_\mu}{c} = 0,$$

这与式 (12-126) 完全一样²⁾。

式 (12-127) 中的拉氏密度显然具有两项之和的形式, 其

1) 处理电磁场的部分困难来自下列事实: 分量 A_μ 不是完全独立的——为了确定起见, 必须通过某种规范条件[例如式 (12-121)] 把它们联系起来。然而, 只要把规范条件看作是第 389 页那种意义的“弱”约束, 就足以满足我们现在的目的的需要。

2) 式 (12-127) \mathcal{L} 中的第二项在文献中往往带一负号, 这是由于四维空间采用了不同的度规所致。见后面习题 14。

一是自由场项, 另一项则是用四维流密度矢量来描述与外部世界的相互作用的项. 故一般说来, 通过电荷和电流的空间和时间依赖性, \mathcal{L} 将是 x_a 的一个显函数. 只有在自由场的情况下, 才有用应力-能量张量表达的守恒流. 所以我们将只限于讨论自由场的应力-能量张量. 由式(12-128)可知, $T_{\mu\nu}$ 将成为

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &\equiv A_{\lambda,\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\lambda,\nu}} - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu} \\ &= \frac{A_{\lambda,\mu} F_{\lambda\nu}}{4\pi} - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

在这种形式中, $T_{\mu\nu}$ 并不对称. 但如果从它减去含有累和 $A_{\mu,\lambda} \cdot F_{\lambda\nu}$ 的那一项, 即能得到对称化的形式:

$$\begin{aligned} \hat{T}_{\mu\nu} &= T_{\mu\nu} - \frac{A_{\mu,\lambda} F_{\lambda\nu}}{4\pi} \\ &= -\frac{F_{\lambda\mu} F_{\lambda\nu}}{4\pi} - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (12-129)$$

前面已经注意到, 只有当附加项具有特定形式时, 这才是一种合理的步骤, 对守恒定律或积分量才不会有什么影响(参见第 670 页的描述). 为了看出这一项的确符合这种规定, 应注意到

$$A_{\mu,\lambda} F_{\lambda\nu} = \frac{d}{dx_\lambda} (A_\mu F_{\lambda\nu}) - A_\mu \frac{dF_{\lambda\nu}}{dx_\lambda}.$$

但是根据式(12-126), 没有外电流时,

$$\frac{dF_{\lambda\nu}}{dx_\lambda} = -\frac{dF_{\nu\lambda}}{dx_\lambda} = 0.$$

其次, $A_\mu F_{\lambda\nu} = -A_\mu F_{\nu\lambda}$, 因而对称项确实具有所需反对称性质的某量的四维散度.

今考虑 \hat{T}_{44} , 它应是一个能量密度. 根据式(12-129),

$$\hat{T}_{44} = -\frac{F_{\lambda\lambda}F_{\lambda\lambda}}{4\pi} + \frac{F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}}{16\pi}.$$

从场张量的显式可以看到, $F_{\lambda\lambda}F_{\lambda\lambda} = -E^2$, 而 $F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 正好是张量中所有各项平方之和, 并等于 $2(B^2 - E^2)$. 因此,

$$\hat{T}_{44} = \frac{E^2}{4\pi} + \frac{B^2 - E^2}{8\pi} = \frac{E^2 + B^2}{8\pi}, \quad (12-130)$$

这是电磁场中能量密度的通常表达式. 根据式(12-91)也应预期到 $ic\hat{T}_{4i}$ 应是能量通量密度矢量的分量. 例如, 考虑

$$\begin{aligned} ic\hat{T}_{41} &= -\frac{icF_{\lambda\lambda}F_{\lambda\lambda}}{4\pi} \\ &= -\frac{ic}{4\pi} (iE_2B_2 - iE_3B_2) \end{aligned}$$

或

$$ic\hat{T}_{41} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_1,$$

这是惯常的电磁场能流坡印廷矢量的第一分量. $\hat{T}_{\mu\nu}$ 的其余分量也符合电磁场性质的熟悉的解释, 这是本章末的习题中将要证明的. 注意, 讨论时如用 $T_{\mu\nu}$ 而不用对称形式, 则不论是能量密度还是能量通量密度都不会具有通常的形式. 但是对体积或密闭曲面的积分量仍将保持相同, 因为这些量毕竟都是可观测量.

还可以作一些说明. 展开 $F_{\lambda\rho}$, 可直接用 A_μ 表示拉氏密度. 根据式(12-122), 有

$$F_{\lambda\rho}F_{\lambda\rho} = 2(A_{\rho,\lambda}A_{\rho,\lambda} - A_{\lambda,\rho}A_{\rho,\lambda}).$$

但括号内的第二项可以进一步化为

$$\begin{aligned} A_{\lambda,\rho}A_{\rho,\lambda} &\equiv \frac{dA_\lambda}{dx_\rho} \frac{dA_\rho}{dx_\lambda} = \frac{d}{dx_\rho} \left(A_\lambda \frac{dA_\rho}{dx_\lambda} \right) \\ &\quad - A_\lambda \frac{d}{dx_\lambda} \left(\frac{dA_\rho}{dx_\rho} \right). \end{aligned}$$

最右边那两项中的第一项对于作用量积分并无贡献，因为它是一个四维散度，并导致一个对曲面的积分，在这一曲面上， $A_{,1}$ 为零。假设规范是洛仑兹规范式 (12-121)：则余下的一项同样为零。因而，对于洛仑兹规范，拉氏密度相当于

$$\mathcal{L}' = -\frac{A_{\mu,\nu}A_{\mu,\nu}}{8\pi} + \frac{j_{\mu}A_{\mu}}{c}. \quad (12-131)$$

对于这种拉氏密度，进入欧拉-拉格朗日方程的各项为

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial A_{\mu,\nu}} = -\frac{A_{\mu,\nu}}{4\pi}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial A_{\mu}} = \frac{j_{\mu}}{c}.$$

因而式 (12-131) 意味着场方程为

$$\square^2 A_{\mu} + \frac{4\pi j_{\mu}}{c} = 0,$$

这正是采用洛仑兹规范时得到的、熟知的四维矢势波方程 (7-81)。

最后，早已看到电磁场的 \mathcal{L} 式 (12-131) 是由自由场的拉氏密度加上一个描述连续电荷和电流密度与场的相互作用项所组成。现在，我们把电荷定位于一点，试一下，为了引进场粒子相互作用究竟能走多远。为此，最容易的办法是考虑某个特定洛仑兹系统内的（即特定观察者所看到的）物理状况。明显的协变性将随之被抛弃，但结果依然符合于狭义相对论，因为它是从一个显然是相对论性的理论推导而得的。电流密度是电荷运动的量度，在任何给定系统内， \mathbf{j} 应根据关系式

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$$

借助电荷密度 ρ 来定义。这里的 \mathbf{v} 是连续电荷分布的速度“场”。利用熟知的狄拉克 δ -函数，可以实现这种局部化。三维形式的 δ -函数具有下列性质：如果 $f(\mathbf{r})$ 是空间的任意函数，则

$$\int dV f(\mathbf{r}) \delta[\mathbf{r} - \mathbf{s}(t)] = f(\mathbf{s}),$$

这里的 $\mathbf{s}(t)$ 是空间位置, 譬如说是某质点在 t 时刻的空间位置(只要 \mathbf{s} 位于积分体积内). 因此, 与 \mathbf{s} 点处的、电荷为 q 的某个质点对应的空间电荷和电流密度为

$$\rho = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{s})$$

和

$$\mathbf{j} = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{s})\mathbf{v}(\mathbf{r}).$$

如果把式 (12-127) 的 \mathcal{L} 写成自由场项 \mathcal{L}_0 和某个相互作用项之和, 则在给定的洛仑兹系统内看来, 拉氏函数为

$$\begin{aligned} L &= \int dV \mathcal{L}_0 - \int dV \rho \phi + \frac{1}{c} \int dV \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} \\ &= \int dV \mathcal{L}_0 - q\phi + \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (12-132)$$

式 (12-132) 中的相互作用项与电磁场中单个质点的拉氏函数[式 (7-141)]中的那些项完全相同. 这说明能够对质点和场的完整系统组成一个单个拉氏函数, 它与式 (7-141) 相类似, 可以写成

$$\begin{aligned} L &= -mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} - q\phi \\ &\quad + \frac{q}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} + \int dV \mathcal{L}_0. \end{aligned} \quad (12-133)$$

把这一拉氏函数看作是场张量或势的函数, 它即意味着场方程; 把它看作是质点坐标的函数, 则由它可推导得质点的运动方程. 用一共同的形式表达后, 连续场和分立质点的力学描述实际上已经纳入同一个框架!

要协变地描述场-质点相互作用, 将会碰到同节 7-9 中寻求自由质点协变拉格朗日表述时几乎一样的困难. 若质点本身由场来描述(就象在相对论量子力学中那样), 则问题要简

单得多，因为场-场相互作用自然符合于协变的模式。例如，前例中说明的复狄拉克场就是自旋为 1/2 的电子的相对论量子表象。在狄拉克理论中，有一个电荷电流密度的四维矢量：

$$j_{\mu} = -q\psi^{\dagger}\gamma_{\mu}\psi, \quad (12-134)$$

所以相互作用拉氏密度为

$$\frac{j_{\mu}A_{\mu}}{c} = -\frac{q}{c}\psi^{\dagger}\gamma_{\mu}A_{\mu}\psi. \quad (12-135)$$

对于洛仑兹规范，两个场以及它们之间的相互作用的完整的拉氏密度将具有形式

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{A_{\mu\nu}A_{\mu\nu}}{8\pi} - \frac{q}{c}\psi^{\dagger}\gamma_{\mu}A_{\mu}\psi \\ & + i\psi^{\dagger}\gamma_{\mu}\psi_{,\mu} + m\psi^{\dagger}\psi. \end{aligned} \quad (12-136)$$

把 ψ^{\dagger} 作为场变量，总的场方程能够表达成

$$i\gamma_{\mu}\psi_{,\mu} - \frac{q}{c}\gamma_{\mu}A_{\mu}\psi + m\psi = 0 \quad (12-137)$$

或

$$\gamma_{\mu}\left[i\frac{d}{dx_{\mu}} - \frac{q}{c}A_{\mu}\right]\psi + m\psi = 0, \quad (12-137')$$

这是具有电磁相互作用的狄拉克方程。式 (12-137') 括号内的表达式有着熟悉的形式，因为 i 乘以微商算符就是动量算符的波动力学表象（按照这里所用的记号，已令 $\hbar = 1$ ）。因此，这个括号是表达式 $p_{\mu} - q/cA_{\mu}$ 的狄拉克量子类比，我们在前面已多次遇到过这种情况。把 A_{μ} 作为场变量，则场方程为

$$\square^2 A_{\mu} = \frac{4\pi q}{c}\psi^{\dagger}\gamma_{\mu}\psi, \quad (12-138)$$

这是与狄拉克场相互作用的电磁矢势波方程。

近代物理的一个值得重视的分支涉及代表各种基本粒子的场的结构。当然，所有这些理论都是量子力学的，但量子场

论的许多特征都有伴生的或近乎对应的经典类比。建立各种粒子的可能拉氏密度和相互作用项时，没有先验的物理学指引。对这种函数形式的某种约束，来自协变性极限。例如， \mathcal{L} 中各项必须是场和其他一些量的组合，组合方式犹如产生世界标量一样。虽然我们也曾探讨过那些具有高阶微商的拉氏密度（见习题9），但 \mathcal{L} 一般也只限于场量或它们的一阶微商。隐含于拉氏函数中的那些守恒和不变性性质，也会对各项的形式提供或提出一些附加要求。这些性质超出了应力-能量张量中包含的那些守恒条件，通常要采用所谓诺埃瑟(Noether)¹⁾定理这一有效方法来求得，该定理是下一节的主题。

12-7 诺埃瑟定理¹⁾

拉氏函数(或哈密顿函数)的对称性质意味着守恒量的存在，这是一个不断提及的论题。例如，如果拉氏函数不显含特定的位移坐标，则相应的正则动量守恒。不显含坐标意味着拉氏函数不会受到改变坐标值的变换的影响；亦即在给定变换下，它是不变的或对称的。同样，拉氏函数在时间位移下的不变性意味着能量的守恒。不变性或对称性与守恒量的关系的正式描述包含在诺埃瑟定理中。正是在经典场论的四维空间内，该定理达到了它的完善而又富有成效的形式。因此，该定理的明晰讨论常用于场的论述，尽管我们同样能推导得分立系统的相应形式。

坐标变换下的对称性涉及某种无限小变换的效应，这种无限小变换的形式为

1) E. 诺埃瑟(1882—1935)是本世纪的主要数学家之一，人们恰当地称她为“最伟大的女数学家”。这一定理最早发表于 *Nachrichten Gesell. Wissenschaft. Gottingen*, 2, 235 (1918)。参阅 C. H. Kimberling 的关于诺埃瑟的文章 *Am. Math Monthly*, 79, 136 (1972)。

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu, \quad (12-139)$$

式中无限小变化 δx_μ 可以是所有其他 x_ν 的函数。诺埃瑟定理还考虑到场量本身的变换效应,它可以描述成

$$\eta_\rho(x_\mu) \rightarrow \eta'_\rho(x'_\mu) = \eta_\rho(x_\mu) + \delta\eta_\rho(x_\mu). \quad (12-140)$$

这里的 $\delta\eta_\rho(x_\mu)$ 量度了 x_μ 和 η_ρ 两者的变化效应,并且可以是所有其他场量 η_λ 的函数。注意,某个场变量在 x_ν 空间内某个特定点处的变化是一个不同的量 $\bar{\delta}\eta_\rho$:

$$\eta'_\rho(x_\mu) = \eta_\rho(x_\mu) + \bar{\delta}\eta_\rho(x_\mu). \quad (12-141)$$

借助于从未变换量发生的无限小变化来描述变换,表明我们只论及连续的变换。例如,三维反演下的对称性(宇称对称性)不是一种可以应用诺埃瑟定理的对称性。由于坐标和场量两者的变换,拉氏函数一般表现为场变量和时-空坐标两者的某个不同的函数:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\eta_\rho(x_\mu), \eta_{\rho,\nu}(x_\mu), x_\mu] \\ \rightarrow \mathcal{L}'[\eta'_\rho(x'_\mu), \eta'_{\rho,\nu}(x'_\mu), x'_\mu]. \end{aligned} \quad (12-142)$$

现在将要给出的诺埃瑟定理的形式并非最一般的可能形式,但它会简化推导,而且不会对定理的适用范围或结论的有效性有显著的限制。这里假设三个条件是成立的:

(1) 四维空间是欧氏空间。这一要求本可以免除,但为了简单起见,这里仍作此假定。它把相对论性时-空限定为明可夫斯基空间,这是复空间,但仍是欧氏空间。

(2) 不论用变换后的量还是用原来的量表达,拉氏密度的函数形式相同,即

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'[\eta'_\rho(x'_\mu), \eta'_{\rho,\nu}(x'_\mu), x'_\mu] \\ = \mathcal{L}[\eta'_\rho(x'_\mu), \eta'_{\rho,\nu}(x'_\mu), x'_\mu]. \end{aligned} \quad (12-143)$$

在前面讨论守恒量时,我们并未提及这种条件,主要是因为它在所考虑的变换下已经自动地得到了满足。当循环坐标由于位移而变换时,拉氏函数对变量的函数关系不会由于原点

的不言而喻的移动而改变。但在我们目前提出的那几种变换中,它成为一种需要研究的对称性质。例如,电磁场拉氏密度的自由场形式的式(12-127),在 A_μ 受制于规范变换时,其函数形式保持不变,而相应的另一种形式式(12-131)显然不具备这种性质,尽管两者的 A_μ 都是循环的。由式(12-143)表达的这一要求称为形式不变性。还要注意,式(12-143)保证运动方程不论用老变量还是用新变量表示都具有相同的形式。形式不变性条件并不是保证这种性质的最一般情况;原来的和变换后的拉氏密度也可能相差一个四维散度而不致改动运动方程。的确,有可能采用这种扩展形式的形式不变性来完成诺埃瑟定理的推导,因为四维散度项的体积分为零。但为简单起见,我们将只限于讨论式(12-143)。

(3) 作用量积分的量值在变换下是不变的,也就是说,

$$\begin{aligned} I' &\equiv \int_{Q'} (dx'_\mu) \mathcal{L}'[\eta'_\rho(x'_\mu), \eta'_{\rho,\nu}(x'_\mu), x'_\mu] \\ &= \int_Q (dx_\mu) \mathcal{L}[\eta_\rho(x_\mu), \eta_{\rho,\nu}(x_\mu), x_\mu]. \end{aligned} \quad (12-144)$$

同样,这代表了循环坐标先前的对称性质的一种扩展,并且也包括了这种性质。在循环坐标的转换下,拉氏函数的数值没有变化,作用量积分的值也不会改变。式(12-144)将称为标度不变性条件。因此,我们的第二、第三个条件代表了对称性或不变性条件的推广,它们将会导致分立系统守恒量的存在。

式(12-143)和式(12-144)组合起来给出了必要条件

$$\begin{aligned} &\int_{Q'} \mathcal{L}'[\eta'_\rho(x'_\mu), \eta'_{\rho,\nu}(x'_\mu), x'_\mu] (dx'_\mu) \\ &- \int_Q \mathcal{L}[\eta_\rho(x_\mu), \eta_{\rho,\nu}(x_\mu), x_\mu] (dx_\mu) = 0. \end{aligned}$$

在第一个积分中,现在的 x'_μ 不过代表积分的某个哑变量,因而可以改用 x_μ 表示。不过,积分域当然是有变化的,因此上

述条件成为

$$\begin{aligned} & \int_{Q'} \mathcal{L}[\eta'_\rho(x_\mu), \eta'_{\rho,\nu}(x_\mu), x_\mu](dx_\mu) \\ & - \int_Q \mathcal{L}[\eta_\rho(x_\mu), \eta_{\rho,\nu}(x_\mu), x_\mu](dx_\mu) \\ & = 0. \end{aligned} \quad (12-145)$$

在二维空间情况下，空间和积分域的变换顺序由图 12-6 说明。式 (12-145) 表明，如果我们在对整个 (x_μ) 空间所求的作用量积分中用变换后的量替代原来的场变量，同时变换积分域，则作用量积分保持不变。

在式 (12-139) 和式 (12-140) 的无限小变换下，式 (12-145) 中的积分之间的一级差量将由两部分组成，一部分是对 Q 的积分，另一部分则是对差体积 $Q' - Q$ 的积分。有一个一维的例子可用来说明这些项是如何组成的。例如，考虑两个积分之差：

$$\begin{aligned} & \int_{a+\delta a}^{b+\delta b} [f(x) + \delta f(x)] dx - \int_a^b f(x) dx \\ & = \int_a^b \delta f(x) dx + \int_b^{b+\delta b} [f(x) + \delta f(x)] dx \\ & \quad - \int_a^{a+\delta a} [f(x) + \delta f(x)] dx. \end{aligned} \quad (12-146)$$

精确到一级小量，右边的最后两项可以写成

$$\begin{aligned} & \int_b^{b+\delta b} f(x) dx - \int_a^{a+\delta a} f(x) dx \\ & = \delta b f(b) - \delta a f(a). \end{aligned}$$

在这种近似下，式 (12-146) 成为

$$\begin{aligned} & \int_{a+\delta a}^{b+\delta b} [f(x) + \delta f(x)] dx - \int_a^b f(x) dx \\ & = \int_a^b \delta f(x) dx + f(x) dx \Big|_a^b, \end{aligned} \quad (12-147)$$

$$= \int_a^b \left[\delta f(x) + \frac{d}{dx} (\delta x f(x)) \right] dx. \quad (12-148)$$

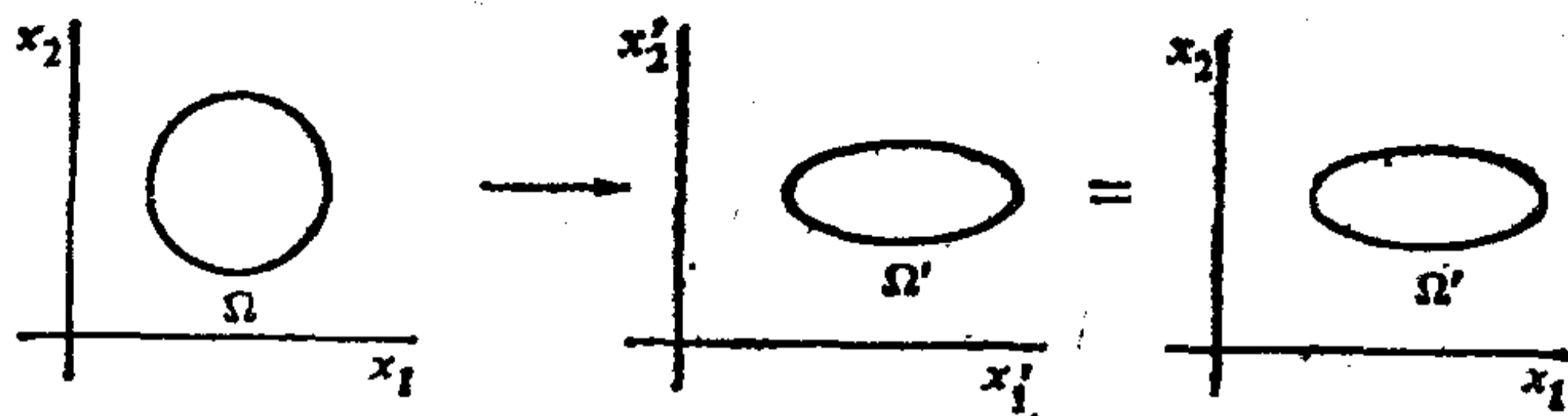


图 12-6 不变的作用量积分变换的图解说明

于是,式(12-147)的多维类比表明,不变性条件式(12-145)的形式应为

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega'} \mathcal{L}(\eta', x_\mu) d(x_\mu) - \int_{\Omega} \mathcal{L}(\eta, x_\mu) dx_\mu \\ &= \int_{\Omega} [\mathcal{L}(\eta', x_\mu) - \mathcal{L}(\eta, x_\mu)] (dx_\mu) \\ & \quad + \int_S \mathcal{L}(\eta) \delta x_\mu dS_\mu = 0. \end{aligned} \quad (12-149)$$

这里的 $\mathcal{L}(\eta, x_\mu)$ 是全部函数依存性的缩写, S 则是积分域 Ω 的三维曲面(相当于一维情况中的端点 a 和 b),而 δx_μ 实际上是 S 面上的点和变换后曲面 S' 上的相应点之间的差矢量(见图12-7)。与式(12-148)相对应,最后的积分也可以根据四维散度定理来变换,因而不变性条件成为

$$\begin{aligned} 0 = & \int_{\Omega} (dx_\mu) \left\{ [\mathcal{L}(\eta', x_\mu) - \mathcal{L}(\eta, x_\mu)] \right. \\ & \left. + \frac{d}{dx_\nu} [\mathcal{L}(\eta, x_\mu) \delta x_\nu] \right\}. \end{aligned} \quad (12-150)$$

根据式(12-141),对于一级近似,方括号内的差项可以表达成

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}[\eta'_\rho(x_\mu), \eta'_{\rho,\nu}(x_\mu), x_\mu] \\ & - \mathcal{L}[\eta(x_\mu), \eta_{\rho,\nu}(x_\mu), x_\mu] \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_\rho} \delta \eta_\rho + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho, \nu}} \delta \eta_{\rho, \nu}$$

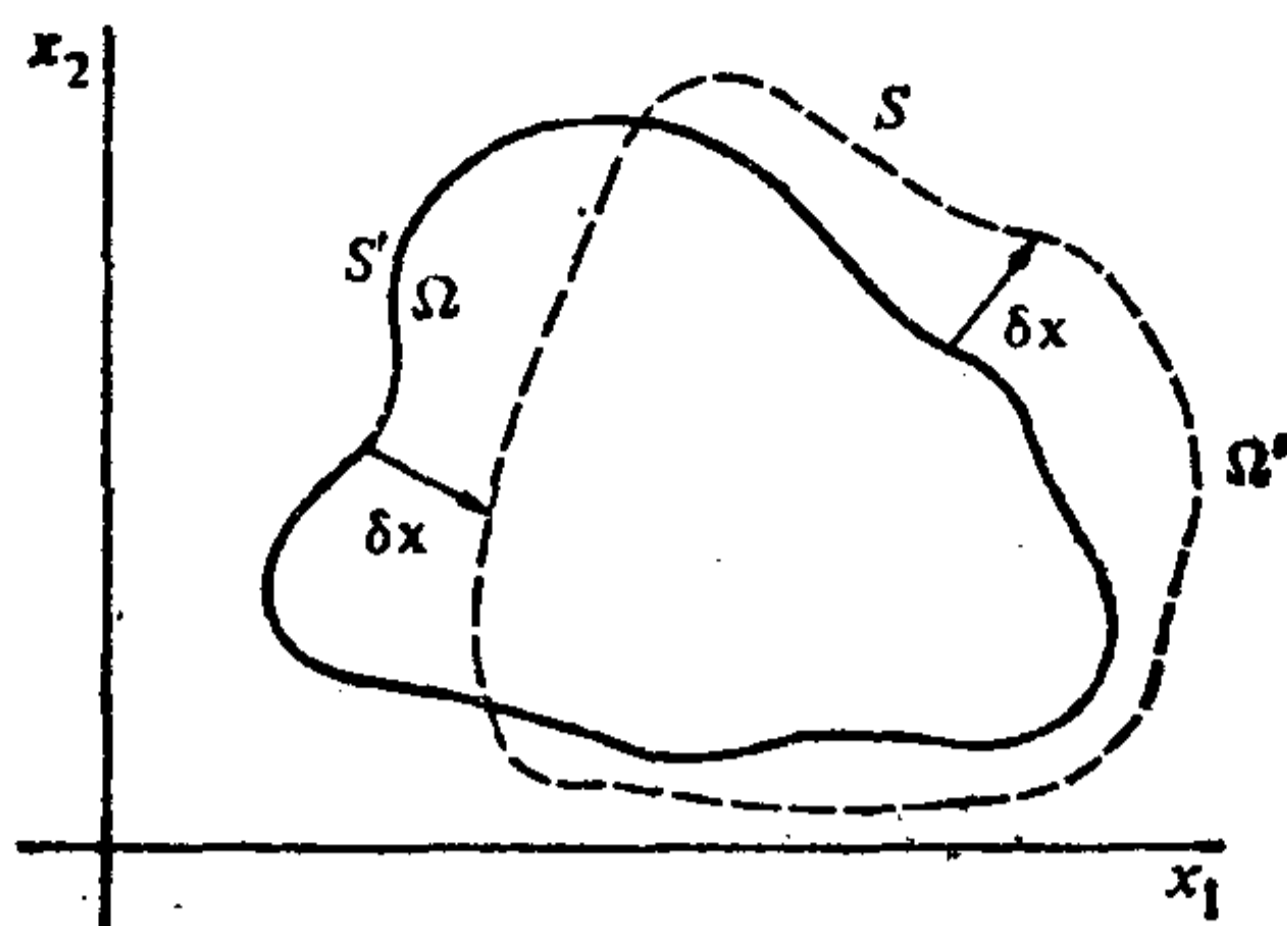


图 12-7 (二维)作用量积分变换中有关积分域的说明

δ 变化的重要性质就在于它是 η 在 x_μ 空间内某固定点处的变化 [与 δ 变分式 (12-140) 是不相同的]。因此,它与空间微商算符是对易的,即

$$\delta \quad \text{和} \quad \frac{d}{dx_\nu}$$

的次序可以互相变换。用符号表示之,即为

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}(\eta', x_\mu) - \mathcal{L}(\eta, x) \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_\rho} \delta \eta_\rho + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho, \nu}} \frac{d \delta \eta_\rho}{dx_\nu}, \end{aligned}$$

或利用拉格朗日场方程,则

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}(\eta', x_\mu) - \mathcal{L}(\eta, x) \\ &= \frac{d}{dx_\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho, \nu}} \delta \eta_\rho \right). \end{aligned}$$

因此,不变性条件式 (12-150) 成为

$$\int (dx_\mu) \frac{d}{dx_\nu} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho, \nu}} \delta \eta_\rho + \mathcal{L} \delta x_\nu \right\} = 0, \quad (12-151)$$

这已经是守恒流方程的形式了。

然而，用 R 个无限小参量 ϵ_r 限定无限小变换的形式，有助于进一步改进这个条件，这里的 $r = 1, 2, \dots, R$ ，以致 x_ν 和 η_ρ 的变化对于 ϵ_r 是线性的：

$$\delta x_\nu = \epsilon_r X_{r\nu}, \quad \delta \eta_\rho = \epsilon_r \Psi_{r\rho}. \quad (12-152)$$

函数 $X_{r\nu}$ 和 $\Psi_{r\rho}$ 可能分别取决于其他坐标和场变量。如果变换的对称性只与坐标有关，并对应于某个单个坐标 x_λ 的位移，则这些函数简单地是

$$X_{r\nu} = \delta_{\nu\lambda}, \quad \Psi_{r\rho} = 0. \quad (12-153)$$

因此，包含在式 (12-152) 形式中的变换构成了对迄今所用对称性的广泛得多的检验。根据式 (12-140) 和式 (12-141) 可知，在一级近似下， $\delta\eta$ 和 $\bar{\delta}\eta$ 之间的关系为

$$\delta\eta_\rho = \bar{\delta}\eta_\rho + \frac{\partial\eta_\rho}{\partial x_\sigma} \delta x_\sigma. \quad (12-154)$$

因此

$$\bar{\delta}\eta_\rho = \epsilon_r (\Psi_{r\rho} - \eta_{\rho,\sigma} X_{r\sigma}). \quad (12-155)$$

把式 (12-152) 和式 (12-155) 代入不变性条件式 (12-151)，即有

$$\int \epsilon_r \frac{d}{dx_\nu} \left\{ \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_{\rho,\nu}} \eta_{\rho,\sigma} - \mathcal{L} \delta_{\nu\sigma} \right) X_{r\sigma} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_{\rho,\nu}} \Psi_{r\rho} \right\} (dx_\mu) = 0.$$

由于 ϵ_r 参量是任意的，因而有 r 个守恒流和微分守恒定理：

$$\frac{d}{dx_\nu} \left\{ \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_{\rho,\nu}} \eta_{\rho,\sigma} - \mathcal{L} \delta_{\nu\sigma} \right) X_{r\sigma} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_{\rho,\nu}} \Psi_{r\rho} \right\} = 0. \quad (12-156)$$

式 (12-156) 构成了诺埃瑟定理的主要结论，它表明，如果系统(或拉氏密度)具有的对称性质保证前面的条件 (2) 和条件

(3) 对于式(12-152)那种类型的变换能成立,那么,就会有 r 个守恒量。

应力-能量张量的守恒作为式(12-151)的特殊情况重新推导也并不困难。如果 \mathcal{L} 不包含任何一个 x_μ , 则 \mathcal{L} , 因而还有作用量积分在式(12-153)那样的变换下都不会变, 这里的 λ 取所有的 μ 值。式(12-156)因而化为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_\nu} \left\{ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\sigma}} \eta_{\rho,\sigma} - \mathcal{L} \delta_{\nu\sigma} \right) \delta_{\sigma\mu} \right\} \\ = \frac{d}{dx_\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}} \eta_{\rho,\mu} - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu} \right), \end{aligned}$$

这与式(12-33)是一致的, 其中的 $T_{\nu\mu}$ 由式(12-34)给出。

式(12-152)这种形式的变换包含大量其他对称性。其中最有趣的是一族只是场变量的变换, 称为第一类规范变换¹⁾, 并保证

$$\delta x_\nu = 0, \quad \delta \eta_\rho = \epsilon c_\rho \eta_\rho \quad (\text{不对 } \rho \text{ 求和}), \quad (12-157)$$

这里的 c_ρ 是常数。如果拉氏密度, 因而还有作用量积分在这种变换下保持不变, 则有一个下列形式的守恒方程:

$$\frac{d\Theta_\nu}{dx_\nu} = 0, \quad (12-158)$$

这里,

$$\Theta_\nu = c_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}} \eta_\rho. \quad (12-159)$$

式(12-158)是连续性方程的形式, Θ_ν 则具有流密度 j_ν 的作用。因此, 可以用第一类规范变换下的不变性来鉴别某种守恒流, 这种守恒流适合于与场相关的电荷和电流密度。

作为一个例证, 我们将考虑节 12-6 的第一个例子, 即复

1) 在 A_μ 上加一个四维梯度 $A_{,\mu}$ 的那种熟知的电磁场规范变换是第二类规范变换的一部分, 这里未予考虑。

标量场。在无限小形式下，

$$\phi' = \phi e^{i\epsilon}, \quad \phi^{*'} = \phi^* e^{-i\epsilon} \quad (12-160)$$

类型的变换与第一类规范变换式(12-157)相当,这时,

$$c = i, \quad c^* = -i.$$

显然,式(12-100)的拉氏密度在式(12-160)的变换下是不变的。因而有一个与克莱因-戈登场相关的流密度,它能表达成

$$j_\mu = iq \left(\frac{d\phi}{dx_\mu} \phi^* - \phi \frac{d\phi^*}{dx_\mu} \right), \quad (12-161)$$

这与通常的量子力学流密度相一致。注意,守恒的电荷流密度的整个推导与场是复数的这一事实有关。因此,正象前面所提到的那样,实数场不会导致与场相关的电荷或电流密度。为了描述与带电粒子相关的场,必须采用一对复数场,即(无自旋)克莱因-戈登粒子的 ϕ 和 ϕ^* 以及自旋为1/2的狄拉克电子的 ψ 和 ψ^\dagger 。

如果我们用四元场变量 ψ 和 ψ^\dagger 代替式(12-160)中的 ϕ 和 ϕ^* ,则狄拉克场的拉氏密度式(12-116)在同一个变换下是不变的。因此,有一个与规范不变性相关的守恒流,由于 \mathcal{L} 不包含 ψ^\dagger , $_{,\mu}$,所以该流密度可表达成

$$\theta_\mu = i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,\mu}} \psi.$$

按照克莱因-戈登场的模式,我们能够期待狄拉克场有一个电流密度

$$j_\mu = iq(i\psi^\dagger \gamma_\mu) \psi = -q\psi^\dagger \gamma_\mu \psi.$$

的确,这个形式正好是写在式(12-134)中、并被用来表示狄拉克场和电磁场相互作用的 j_μ 。选择式(12-134),在当时看来似乎毫无根据,但现在通过诺埃瑟定理看到,此乃拉氏密度的规范不变性的结果。

应该注意,尽管诺埃瑟定理证明,拉氏密度的连续对称性导致了守恒条件,但反过来却不成立.看来,守恒条件不可能对应于任何对称性.目前最引人注目的例子是那些具有孤子解的场,例如,由正弦-戈登方程或者科特韦格-德夫里斯方程所描述的场(见第 690 页).

例如,考虑正弦-戈登方程的拉氏密度式 (12-109). 由于并不显含 x 和 t , 所以当空间和时间以一种满足诺埃瑟定理的条件的方式转换时,拉氏密度不变.另外,还有一种 (x, t 空间内的)洛仑兹变换下的对称性.其他的对称性是不明显的.所以应用诺埃瑟定理所能得到的守恒量不会超过三个.但根据不同于场的拉格朗日描述的方法,已经证明有无限多个守恒量.也就是说,可以得到无限多个不同的函数 F_i 和 G_i , 它们是 ϕ 及其微商的多项式,并满足关系式

$$\frac{dF_i}{dt} + \frac{dG_i}{dx} = 0,$$

以致 F_i 的体积分随时间而变化.为了用场描述孤子,守恒量的这种无限集的存在似乎是一个必要条件.目前对孤子的探究正方兴未艾,所以要对守恒量和场的本质之间的关系下最后的断语也许还为时过早.

最后,我们能够容易地推导得适用于分立系统的诺埃瑟定理.四个空、时坐标在这里不再是平等的参变量——空间坐标回复到它们作为力学变量(或它们的函数)的地位,只有时间依然起着参量的作用.作用量积分不再是四维体积分

$$I = \int \mathcal{L}(dx_\mu),$$

而是 t 的一维积分

$$I = \int L dt.$$

再用分立广义坐标 $q_k(t)$ 代替带连续下标的场变量 $\eta_\rho(x_\mu)$.

经过这种转换后，足以直捷了当地一步一步重演导致诺埃瑟定理的步骤。当应用于分立系统时，我们能以这种方式重复包含在式(12-139)直到式(12-156)中的那些论述。但换算效应是足够明显和清楚的，以致我们能立即看出在最后结果式(12-156)中需要直接作出怎样的转换。

转换规则能够概括为

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\rightarrow L, \quad x_\mu \text{ 或 } x_\nu \rightarrow t, \\ \eta_\rho &\rightarrow q_k, \quad \eta_{\rho,\nu} \rightarrow \dot{q}_k. \end{aligned} \quad (12-162)$$

其次，对具有四个数值的希腊字母下标所求的全部累和都简化为用 t 表示的一项。结果，变换方程(12-152)（在这种变换下，拉氏函数将显示出形式和标度的不变性）成为

$$\delta t = \epsilon_r X_r, \quad \delta q_k = \epsilon_r \Psi_{rk}. \quad (12-163)$$

而式(12-156)，即由不变性引起的守恒定理，现在成为

$$\frac{d}{dt} \left\{ \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L \right) X_r - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \Psi_{rk} \right\} = 0. \quad (12-164)$$

式(12-164)就是适用于分立力学系统的诺埃瑟定理的最后结果。

式(12-164)中圆括号内的表达式是我们早就熟悉的，它是式(2-53)的雅可比积分 h ，或者也可以说是用 (q, p) 表达的哈密顿函数。的确，我们只要考虑一个只涉及时间位移的变换，即能重新发现 h 是守恒的，这时有

$$X_r = \delta_{r1}, \quad \Psi_{rk} = 0. \quad (12-165)$$

如果拉氏函数不是时间的显函数，则拉氏函数的形式和作用量积分的数值显然不会受到这种变换的影响。但是，诺埃瑟定理式(12-64)表明，结果将会有一个守恒定理

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L \right) = 0,$$

这与节 2-6 中那个熟知的结论相一致。

再假定特定的坐标 q_l 是循环的。则在

$$X_r = 0, \quad \Psi_{rk} = \delta_{kl} \delta_{rl} \quad (12-166)$$

的变换下,拉氏函数及作用量不变。于是式(12-164)直接表明了单一的守恒

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) = 0$$

或

$$p_l = 0.$$

因此,雅可比积分和共轭于一个循环坐标的广义动量的守恒定理,在式(12-164)所阐明的诺埃瑟定理下归于一类。力学系统的对称性质和守恒量之间的联系,象一根线一样贯穿于这里所提出的所有力学表述中。我们好象已经走完了一整周,采用高级技巧重新推导得了第一章中求得的那些对称性定理,在这里结束我们的讨论似乎是合适的。

推荐参考书目

J.C.Slater 和 N. H. Frank, *Mechanics* 对于从分立系统过渡到连续系统的讨论,这本多少有点陈旧的教科书依然是一本值得一读的主要参考书,虽然讨论有时是初级的。特别要注意第七章,那里参照横振动检验了从分立链到连续弦的过渡途径。

Lord Rayleigh, *The Theory of Sound* 这本专著自然包含有许多论述连续体振动的资料。在第二卷第十一章中,将找到气体中声波传输的波方程的讨论,这里极为详尽地研讨了气体的绝热-等温运动问题。

G. Wentzel, *Introduction to the Quantum Theory of Fields* 量子场论的大多数专著都是从经典场的讨论开始的,因此,常常是经典理论

的最佳参考书。本书是早期的著作之一。但由于它论述经典概貌的广度和明晰程度，至今依然有它的参考价值。只是该书对量子表述的描述早已过时，现在看来只具有历史意义。书中通篇都采用了明可夫斯基空间。

A. O. Barut, *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles* Barut 的书也许是场的经典表述的最佳单一参考书，该书在相对较小的篇幅内聚集了多得惊人的资料——各种场的拉氏函数、场方程、应力-能量张量和守恒量等等。本书试图给出哈密顿表述的协变论述，而以繁复著称。这里收集了从文献上摘录的大量新奇资料，例如旋量形式的麦克斯韦方程等，在这种引论性的水平上是完全可以略去不读的。也讨论了诺埃瑟定理，但未用其名。（顺便提一下，可能会注意到前面节 12-7 中对诺埃瑟定理的论述大部分都取材于论文：T. H. Boyer, *American Journal of Physics*, **34**, 475, June 1966.）应该记住，这本参考书采用的是迹等于 -2 的四维空间。

E. J. Saletan 和 A. H. Cromer, *Theoretical Mechanics* 为物理学读者写的论述经典力学的大多数教科书都包括有经典场论的论述，而本书是最好的一本（第八章）。自始至终采用了迹为 -2 的四维空间，所以公式中充满了度规张量和上、下附标（虽然他们采用这种特别形式的理由并不总是清楚的）。特别值得注意的是，用正交归一函数对场作出的一般展开使动量表示式得到了推广。

J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics* 正如前述，第二版已经从明可夫斯基空间转换到迹为 -2 的空间。但在这种空间内处理各量的步骤在论述狭义相对论的第十一章中有着详细的描述。第十二章中论述了经典场的形式，当然，特别强调的是电磁场，讨论也很全面。特别值得注意的是对普洛卡拉氏函数的描述，它是电磁场的拉氏密度在光子具有质量的情况下的一种可能形式。整个讨论是不嫌其烦的，并以透彻而著称。

习 题

1. (a) 一张紧弦线的横振动可以近似地看作是一个分立系统，该系统由位于无重量弦线上的一系列等间距质点所组成。证明，如果允

许间距趋向于零,则拉氏函数趋向于连续弦线的极限

$$L = \frac{1}{2} \int \left[\mu \dot{\eta}^2 - T \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right] dx.$$

这里的 T 是固定的张力. 如果密度 μ 是位置的函数, 则运动方程如何?

(b) 求出对应于横向运动的动能和势能, 从而得出连续弦线的拉氏函数. 势能可根据横振动期间使弦线张紧时张力所完成的功来求得.

2. (a) 以哈密顿形式描述空气内的声振动场, 并求出相应的哈密顿运动方程.

(b) 把动量展开式推广到矢量场, 用动量表示式表示气体声模的哈密顿函数.

3. 按照节 8-5 的步骤, 根据修正的哈密顿原理求连续系统的哈密顿运动方程.

4. 证明, 如果把 ψ 和 ψ^* 取作两个独立的场变量, 则拉氏密度

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \nabla \psi \cdot \nabla \psi^* + \nabla \psi^* \psi \\ & + \frac{\hbar}{4\pi i} (\psi^* \psi - \psi \psi^*) \end{aligned}$$

将导致薛定谔方程

$$-\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \nabla^2 \psi + \nabla \psi = \frac{i\hbar}{2\pi} \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

及其复共轭. 正则动量是什么? 求出与 \mathcal{L} 相对应的哈密顿密度.

5. 证明, 如果哈密顿密度不是位置的显函数, 则

$$G_i = - \int \pi_k \frac{\partial \eta_k}{\partial x_i} dV$$

是一个运动常数. G_i 量可看作是场在 x_i 方向上的总线动量. 这一定理与分立系统线动量通常的守恒定理是明显相似的.

6. (a) 在一个并非欧氏空间的四维空间内, 达朗伯算符定义为

$$\square^2 = g^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu}.$$

这里的 $g^{\mu\nu}$ 是抗变度规张量, 它在狭义相对论的平坦空间内与 $g_{\mu\nu}$ 实际上是相同的(见节 7-3). 就迹为 -2 的度规张量式 (7-53) 求如此定义的达朗伯算符的显式.

(b) 以这种度规表示的、带电标量介子场的适当拉氏函数为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(g^{\mu\nu} \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} \frac{\partial\phi^*}{\partial x^\nu} - \mu_0^2 \phi\phi^* \right).$$

证明,相应场方程之一为

$$(\square^2 + \mu_0^2)\phi = 0.$$

再证明,根据 (a) 部分的结论,这一方程实际上与式 (12-103) 是一致的.

7. 在标量带电介子的拉氏密度式 (12-100) 中,加上代表与电磁场相互作用的项

$$i_1 A_1/c,$$

这里,

$$i_1 = i(\phi\phi^*_{,1} - \phi_{,1}\phi^*),$$

则 ϕ 和 ϕ^* 的场方程如何? 守恒流和相关的守恒定理又会发生什么情况?

8. 假设哈密顿原理中的拉氏密度是场量 η_ρ 的高阶微商的函数:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\eta_\rho, \eta_{\rho,\mu}, \eta_{\rho,\mu\nu}, x_\lambda).$$

又假设端点处的变分为零,试求对应于这一拉氏密度的场方程的形式?

9. 考虑一标量场量 η , 为简单起见,设它仅是 x 和 t 的函数. 今假设哈密顿密度是 η 和 π 的高阶空间微商的函数,即

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\eta, \eta_{,x}, \pi, \pi_{,x}, \pi_{,xx}).$$

求取相应的哈密顿运动方程.

10. 证明,科特韦格-德夫里斯方程相当于标量场 ϕ 的场方程,其拉氏密度为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \phi_x \phi_t + \frac{\alpha}{6} \phi_x^3 - \frac{\nu}{2} \phi_{xx},$$

这里的下标表示对所示变量的微商,假设 ϕ 是式 (12-115) 的 ϕ 量的势函数:

$$\phi = \frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

11. 考虑 (x, t) 空间内的哈密顿密度

$$\mathcal{H} = \eta^3 + \frac{1}{2} \eta^2_{,x} + \pi^3_{,x} + \frac{1}{2} \pi^2_{,xx}.$$

证明,如果

$$\eta = \phi(x, t)$$

$$\pi = \int_{-\infty}^x \phi(x', t) dx',$$

则哈密顿运动方程相当于某种形式的科特韦格-德夫里斯方程 (12-115).

12. 就式 (12-129) 所给出的那种自由电磁场的对称化应力-能量张量明显地计算 iT_{j4}/c 和 T_{ij} 之值. 对这些分量的物理意义能够说些什么呢?

13. (a) 在节 7-3 中由式 (7-53) 所定义的、迹为 -2 的度规 $g_{\mu\nu}$ 的四维空间内, 明显地计算电磁场协变(从数学上讲)张量 $F_{\mu\nu}$ 的元素. 还要给出具有一个上升指标和两个上升指标的矩阵元:

$$F_{\rho}^{\lambda} = g^{\lambda\mu} F_{\mu\nu}; \quad F^{\lambda\rho} = g^{\lambda\mu} F_{\mu\nu} g^{\rho\nu}.$$

(b) 证明, 采用这种度规时, 具有外电流的麦克斯韦方程的拉氏密度将成为

$$\mathcal{L} = -\frac{F^{\lambda\rho} F_{\lambda\rho}}{16\pi} - \frac{j^{\lambda} A_{\lambda}}{c}.$$

(c) 求采用相同度规的对称应力-能量张量的各个元素.

14. 式 (12-131) 代表电磁场的一种可取的拉氏密度. 求相应的应力-能量张量. 你能否给出这些分量的物理意义? 什么是自由场的守恒方程?

附 录

A 伯特兰定理¹⁾ 的证明

保守有心力作用下的轨道方程(3-34)可表达成

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = J(u), \quad (\text{A-1})$$

这里的

$$\begin{aligned} J(u) &= -\frac{m}{l^2} \frac{d}{du} V\left(\frac{1}{u}\right) \\ &= -\frac{m}{l^2 u^2} f\left(\frac{1}{u}\right). \end{aligned} \quad (\text{A-2})$$

半径为 $r_0 = u_0^{-1}$ 的圆轨道条件式(3-41)现在取形式

$$u_0 = J(u_0). \quad (\text{A-3})$$

此外,能量当然必须满足式(3-42)的条件. 如果能量略高于圆形轨道所需之值,而势又保证运动是稳定的,则 u 将保持有界而且与 u_0 仅略有差别, $J(u)$ 则可用 $J(u_0)$ 附近的泰勒级数展开式的首项表示:

$$\begin{aligned} J(u) &= u_0 + (u - u_0) \frac{dJ}{du_0} \\ &\quad + O[(u - u_0)^2]. \end{aligned} \quad (\text{A-4})$$

按照惯例,式(A-4)中的微商是在 $u = u_0$ 处计值的、 J 对 u 的微商的缩写符号. 如用 x 表示差值 $u - u_0$, 则在圆形轨道条件邻近运动的轨道方程为

1) 见节 3-6

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + x = x \frac{dJ}{du_0}$$

或

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + \beta^2 x = 0, \quad (\text{A-5})$$

式中

$$\beta^2 = 1 - \frac{dJ}{du_0}. \quad (\text{A-6})$$

为使 x 能描述有界稳定振荡, β^2 必须是正定的。根据定义式 (A-2), 即有

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{du} &= \frac{2m}{l^2 u^3} f\left(\frac{1}{u}\right) - \frac{m}{l^2 u^2} \frac{d}{du} f\left(\frac{1}{u}\right) \\ &= -\frac{2J}{u} - \frac{m}{l^2 u^2} \frac{d}{du} f\left(\frac{1}{u}\right). \end{aligned}$$

根据圆形轨道条件式 (3-41) 或式 (A-3), 可得

$$\frac{dJ}{du_0} = -2 + \frac{u_0}{f_0} \frac{df}{du_0},$$

式中除了微商所用约定外, f_0 代表 $f(1/u_0)$ 。因而这时的 β^2 为

$$\beta^2 = 3 - \frac{u_0}{f_0} \frac{df}{du_0} = 3 + \frac{r}{f} \frac{df}{dr} \Big|_{r=r_0}, \quad (\text{A-7})$$

这与式 (3-46) 相同, 而稳定条件 $\beta^2 > 0$ 也可归结为式 (3-43)。

适当选择 θ 的原点, 则 β^2 为正定的式 (A-5) 的解能够表达成

$$x = a \cos \beta \theta \quad (\text{A-8})$$

[见式 (3-45)]。为了在能量和角动量受到使之偏离圆形轨道的轻微扰动时仍能使轨道保持闭合, 量 β 必须是一有理数。我们关心的是找到一些力定律, 它们在各种初始条件下, 即在 u_0 取各种数值时, 能够使稍为偏离圆形的轨道仍能保持闭合。

正如正文中所论证的那样,在这些情况下, β 在 u_0 的整个取值范围内必须具有相同的数值,而式(A-7)则能看作是 $f(1/u)$ 或 $f(r)$ 的微分方程.因而要求的力定律必须符合式(3-48)所给出的对 r 的依存关系:

$$f(r) = -\frac{k}{r^{3-\beta^2}}, \quad (\text{A-8}')$$

这里的 k 是某个常数,而 β 是一个有理数.

式(A-8')的力定律仍允许力有各种各样的特性.然而,我们要寻求的是,要求轨道即使明显偏离圆形时仍能保持闭合而必须加于力定律的更为严格的条件.这样,我们要论及的 u 与 u_0 的偏差至少应该大到使我们在 $J(u)$ 的泰勒级数展开式中必须保留比首项更多的项.所以式(A-4)可以用

$$\begin{aligned} J(u) = u_0 + xJ' + \frac{x^2}{2}J'' \\ + \frac{x^3}{6}J''' + O(x^4) \end{aligned} \quad (\text{A-9})$$

代替,不言而喻,这里的微商是在 $u = u_0$ 处计值的.采用 $J(u)$ 的这一展开式,轨道方程成为

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + \beta^2x = \frac{x^2J''}{2} + \frac{x^3J'''}{6}. \quad (\text{A-10})$$

我们想寻求的源定律的性质,应使与圆轨道的偏差 x 即使大到足以使右边各项不可忽略时式(A-10)的解依然能代表一个闭合轨道.我们知道,对于圆形轨道所受的微小扰动, x 具有式(A-8)所描述的特性,它所代表的是用 $\beta\theta$ 表示的傅里叶展开式的基项.现在我们把傅里叶展开式中的还有几项也包括进来,以便找到一个闭合轨道解:

$$x = a_0 + a_1 \cos \beta\theta + a_2 \cos 2\beta\theta + a_3 \cos 3\beta\theta. \quad (\text{A-11})$$

幅度 a_0 和 a_2 的量值必然小于 a_1 , 因为当趋近圆形轨道时, 它们比 a_1 更快地变为零. 正象将看到的那样, a_3 的数量级必然比 a_0 或 a_2 还要低, 这正是 $\cos 4\beta\theta$ 项以及往后各项可略去的原因. 因此, 在式 (A-10) 右边的 x^2 项中, 含有 $\cos 3\beta\theta$ 的各因子都被略去, 而在 x^3 项中, 只要保留含有 $\cos \beta\theta$ 的那些因子. 在右边的计算中, 那些余弦函数的乘幂和乘积利用

$$\cos \beta\theta \cos 2\beta\theta = \frac{1}{2} (\cos \beta\theta + \cos 3\beta\theta)$$

和

$$\cos^3 \beta\theta = \frac{1}{4} (3 \cos \beta\theta + \cos 3\beta\theta)$$

这样的恒等式得到了简化.

就这样始终保留到 a_1^3 级的项, 则以式 (A-11) 作为解的式 (A-10) 能简化为

$$\begin{aligned} & \beta^2 a_0 - 3\beta^2 a_2 \cos 2\beta\theta - 8\beta^3 a_3 \cos 3\beta\theta \\ &= \frac{a_1^2}{4} J'' + \left[\frac{2a_1 a_0 + a_1 a_2}{2} J'' \right. \\ & \quad \left. + \frac{J''' a_1^3}{8} \right] \cos \beta\theta + \frac{a_1^2}{4} J'' \cos 2\beta\theta \\ & \quad + \left[\frac{a_1 a_2}{2} J'' + \frac{J''' a_1^3}{24} \right] \cos 3\beta\theta. \end{aligned} \quad (\text{A-12})$$

为了使这个解有效, 各余弦项的系数必须分别为零, 从而得到加于幅度和 J 的微商的四个条件:

$$a_0 = \frac{a_1^2 J''}{4\beta^2}, \quad (\text{A-13a})$$

$$a_2 = -\frac{a_1^2 J''}{12\beta^2}, \quad (\text{A-13b})$$

$$0 = \frac{2a_1 a_0 + a_1 a_2}{2} J'' + \frac{J''' a_1^3}{8}, \quad (\text{A-13c})$$

$$a_3 = -\frac{1}{8\beta^3} \left[\frac{a_1 a_2}{2} J'' + \frac{J''' a_1^3}{24} \right]. \quad (\text{A-13d})$$

应该记得，我们已经在稍为偏离圆形轨道的基础上证明了保证轨道闭合的力定律必须具有式 (A-8') 的形式，或者说， $J(u)$ 的形式应为

$$J = + \frac{mk}{l^2} u^{1-\beta^2}. \quad (\text{A-14})$$

记住圆形轨道条件式 (A-3)， u_0 处的各阶微商可演化为

$$J'' = \frac{\beta^2(1-\beta^2)}{u_0} \quad (\text{A-15a})$$

和

$$J''' = \frac{-\beta^2(1-\beta^2)(1+\beta^2)}{u_0^2}. \quad (\text{A-15b})$$

于是式 (A-13a, b) 表明， a_0/a_1 和 a_2/a_1 都具有 a_1/u_0 的数量级，根据假设， a_1/u_0 是一个小的数。此外，式 (A-13d) 表明， a_3/a_1 具有 $(a_1/u_0)^2$ 的数量级，这符合于早先提出的论点： a_3 具有比 a_0 或 a_2 更低的数量级。

式 (A-13c) 仅是加于 β 的条件，该条件事实上正是伯特兰定理的主要结论。把式 (A-13a, b) 和 (A-15) 两式代入式 (A-13c)，即得条件

$$\beta^2(1-\beta^2)(4-\beta^2) = 0. \quad (\text{A-16})$$

由于与圆形轨道有偏离，即 $\beta \neq 0$ ，所以唯一的解为

$$\beta^2 = 1, \quad f(r) = -k/r^2 \quad (\text{A-17a})$$

和

$$\beta^2 = 4, \quad f(r) = -kr. \quad (\text{A-17b})$$

因此，与该解相符的仅有的两种可能力定律不是平方-反比引力定律就是胡克定律！

我们的讨论是从圆形轨道开始的。在 l 值和 E 值很宽的范围內，所有的引力定律都可能满足，轨道的半径则由 l 和 E

的数值来确定. 如果要求所有各种半径的圆轨道都是稳定的, 则力定律的形式还将受到 $\beta^2 > 0$ 这一不等式条件的限制 [式 (3-48)]. 如果我们还要求所求的力定律能保证不论参照轨道的半径如何, 稍为偏离圆轨道的轨道依然都是闭合的, 那么, 力定律应该受到式 (A-8') 所给出的条件的限制, β 值必须是一组分立的有理数. 如果要保证不论参照轨道的初始条件如何, 较大地偏离圆形轨道的轨道依然是闭合的, 则只允许取两个这样的有理数: $|\beta| = 1$ 和 $|\beta| = 2$. 由于我们已经知道这些引力定律对于导致有界运动的所有 E 和 l 确实都能给出闭合轨道, 所以它们是导致所有有界运动闭合轨道的仅有的力定律.

B 另外两种约定的欧拉角¹⁾

课文中定义的欧拉角是由三次转动确定的, 最初的转动是绕原先的 z 轴转过 ϕ 角, 第二次转动是绕中间的 x 轴转过 θ 角, 第三次转动则是绕最后的 z 轴转过 ψ 角. 由于这种顺序的第二次转动围绕的是 x 轴, 因而称为“ x 约定”. 还可能其他的约定, 特别是已经发现有两种约定常常被应用于一些特定的领域. 这里将用这另外两种约定的欧拉角给出一般转动的性质的公式.

y 约定

正如课文中所提到的, 这种约定几乎成了量子力学和有关领域内的标准做法. 它与 x 约定的差别只在于第二次转动是绕中间的 y 轴的转动. 从 x 约定到 y 约定的过渡特别简单,

1) 见节 4-4.

因为 θ 在两种约定中有着相同的意义, 而其他两个角度的变化也不难求得。在 x 约定中, ϕ 是节点线和 x 轴的夹角; 在 y 约定中, 它是相对于 y 轴量度的同一个角度。同样, 在 x 约定中, ψ 是节点线和 x' 轴的夹角; 而在 y 约定中, 它是相对于 y' 轴的相同角度。暂且用下标来标明所用的约定, 则这些关系意味着(见图 4-7)

$$\phi_x = \phi_y + \frac{\pi}{2}, \quad \psi_x = \psi_y - \frac{\pi}{2} \quad (\text{B-1y})$$

或

$$\begin{aligned} \sin \phi_x &= \cos \phi_y, & \sin \psi_x &= -\cos \psi_y, \\ \cos \phi_x &= -\sin \phi_y, & \cos \psi_x &= \sin \psi_y. \end{aligned} \quad (\text{B-2y})$$

按照这种方法, 我们将得到用 y 约定中的欧拉角表示的下列公式:

转动矩阵:

$\mathbf{A} =$

$$\begin{pmatrix} -\sin \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi & \sin \psi \cos \phi + \cos \theta \sin \phi \cos \psi & -\cos \psi \sin \theta \\ -\cos \psi \sin \phi - \cos \theta \cos \phi \sin \psi & \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & \sin \psi \sin \theta \\ \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (\text{B-3y})$$

如果注意到 y 和 x 的交换相当于参照系统绕 z 轴转过 $-\pi/2$ 或 $3\pi/2$ 角度的一次转动, 也能够得到相同的结果。因此, 根据正交矩阵

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

的相似变换, 能把 \mathbf{A} 矩阵从 x 约定转化为 y 约定, 从而再次导致式(B-3y)。

凯瑞-克莱因参量 如前所述, \mathbf{Q} 矩阵能够作为各次转动的 \mathbf{Q} 矩阵的乘积来求得, 唯一的差别在 \mathbf{Q}_θ 矩阵, 这一矩阵现

在是

$$\begin{aligned} Q_\theta &= e^{i\sigma_2 \frac{\theta}{2}} = 1 \cos \frac{\theta}{2} + i\sigma_2 \sin \frac{\theta}{2} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B-4y})$$

根据矩阵积 $Q = Q_\psi Q_\theta Q_\phi$ [或者根据转换方程 (B-3y)], 即能得到凯瑞-克莱因参量

$$\begin{aligned} \alpha &= e^{i\left(\frac{\psi+\phi}{2}\right)} \cos \frac{\theta}{2}, & \beta &= e^{i\left(\frac{\psi-\phi}{2}\right)} \sin \frac{\theta}{2}, \\ \gamma &= -e^{-i\left(\frac{\psi-\phi}{2}\right)} \sin \frac{\theta}{2}, & \delta &= e^{-i\left(\frac{\psi+\phi}{2}\right)} \cos \frac{\theta}{2}. \end{aligned} \quad (\text{B-5y})$$

欧拉参量 根据式 (4-65) 和式 (B-5y) 立即可以知道, ν 约定中的欧拉参量为

$$\begin{aligned} e_0 &= \cos \frac{\psi + \phi}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \\ e_1 &= \sin \frac{\psi - \phi}{2} \sin \frac{\theta}{2}, \\ e_2 &= \cos \frac{\psi - \phi}{2} \sin \frac{\theta}{2}, \\ e_3 &= \sin \frac{\psi + \phi}{2} \cos \frac{\theta}{2}. \end{aligned} \quad (\text{B-6y})$$

角速度分量 直接应用转换方程 (B-2y), 或者根据 ω 的各个组成部分的物理意义, 都能得到 ν 约定中 ω 沿各体轴的分量:

$$\begin{aligned} \omega_{x'} &= -\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi, \\ \omega_{y'} &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \omega_{z'} &= \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}. \end{aligned} \quad (\text{B-7y})$$

同样, ω 沿各空间轴的分量为

$$\begin{aligned}\omega_x &= -\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \sin \theta \cos \phi, \\ \omega_y &= \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi, \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}\end{aligned}\quad (\text{B-8y})$$

最后应注意的是

$$\cos\left(\frac{\Phi}{2}\right) = e_0 = \cos \frac{\phi + \psi}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \quad (\text{B-9y})$$

这跟 x 约定中的 (4-97) 式相同。

xyz 约定

在这种约定中, 各次转动都是绕着不同标记的轴进行的。显然, 各种各样的转动顺序都有可能。但是, 大多数英、美空气动力学家似乎更乐于采用下述这种约定¹⁾, 在这种约定中, 第一次转动是绕 z 轴的偏航角 ϕ , 第二次是绕中间的 y 轴的俯仰角 θ , 第三次则是绕最后的 x 轴 (或飞行器图轴) 的横倾角或侧滚角 ψ ²⁾。在这三个基本转动矩阵中, D 依然与式 (4-43) 相同, C 成为

$$C = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (\text{B-10xyz})$$

B 则与式 (4-44) 相同 (当然, ψ 代替了 θ)。乘积 BCD 给出了转动矩阵

$A =$

-
- 1) 参阅 R. L. Pio 的论文“欧拉角变换”, IEEE Transactions on Automatic Control AC 11, 707 (1966).
 - 2) 在工程学文献中, 这种顺序有时称为 321 顺序, 即第一次转动是绕第 3 轴的, 等等。

$$\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ \sin\psi\sin\theta\cos\phi - \cos\psi\sin\phi & \sin\psi\sin\theta\sin\phi + \cos\psi\cos\phi & \cos\theta\sin\psi \\ \cos\psi\sin\theta\cos\phi + \sin\psi\sin\phi & \cos\psi\sin\theta\sin\phi - \sin\psi\cos\phi & \cos\theta\cos\psi \end{pmatrix}. \quad (\text{B-11xyz})$$

凯瑞-克莱因参量 Q 矩阵为

$$\begin{aligned} Q &= Q_\psi Q_\theta Q_\phi \\ &= \begin{pmatrix} \cos\frac{\psi}{2} & i\sin\frac{\psi}{2} \\ i\sin\frac{\psi}{2} & \cos\frac{\psi}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

完成上面的相乘,发现凯瑞-克莱因参量具有形式

$$\begin{aligned} \alpha = \delta^* &= \left(\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2} \right. \\ &\quad \left. - i\sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2} \right) e^{i\phi/2}, \\ \beta = -\gamma^* &= \left(\cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2} \right. \\ &\quad \left. + i\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2} \right) e^{-i\phi/2}. \quad (\text{B-12xyz}) \end{aligned}$$

欧拉参量 根据式 (B-11xyz) 可知欧拉参量为

$$\begin{aligned} \cos\frac{\Phi}{2} = e_0 &= \cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2} \\ &\quad + \sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2}, \\ e_1 &= \sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2}, \\
\epsilon_2 = & \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} \\
& + \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2}, \\
\epsilon_3 = & - \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} \\
& + \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2}. \quad (\text{B-13xyz})
\end{aligned}$$

注意，总转动角度的余弦与 x 约定或 y 约定中的形式都不相同。

角速度分量 显然， ω_ϕ 沿着物体的 x 轴， ω_θ 沿着空间 z 轴，而 ω_ψ 则沿着中间的 y 轴，因而处在最后的 yz 平面内。沿体轴的合成分量为

$$\begin{aligned}
\omega_{x'} &= \dot{\phi} - \dot{\phi} \sin \theta, \\
\omega_{y'} &= \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\phi} \cos \theta \sin \phi, \quad (\text{B-14xyz}) \\
\omega_{z'} &= -\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\phi} \cos \theta \cos \phi.
\end{aligned}$$

同样， ω 沿各空间轴的分量为

$$\begin{aligned}
\omega_x &= \dot{\phi} \cos \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi, \\
\omega_y &= \dot{\phi} \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi, \quad (\text{B-15xyz}) \\
\omega_z &= \dot{\phi} - \dot{\phi} \sin \theta.
\end{aligned}$$

C dQ 的变换性质¹⁾

分量 dQ_j 是 3×3 反对称矩阵 ϵ 式 (4-105) 的元素，并且在形式上是根据关系式

1) 见节 4-8.

$$\epsilon_{mn} = \epsilon_{mni} dQ_i \quad (\text{C-1})$$

用排列符号给出的。在矩阵为 \mathbf{B} 的正交变换下, 矩阵 ϵ 根据相似变换

$$\epsilon' = \mathbf{B}\epsilon\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}\epsilon\tilde{\mathbf{B}} \quad (\text{C-2})$$

变换, ϵ' 的典型分量为

$$\epsilon'_{kl} = b_{km} b_{ln} \epsilon_{mn}. \quad (\text{C-3})$$

相似变换不会改变这种反对称性质; 因此, ϵ' 的元素也可表达成

$$\epsilon'_{kl} = \epsilon_{kli} dQ'_i. \quad (\text{C-4})$$

采用反对称矩阵的这些表示式, dQ_i 的变换性质将由

$$\epsilon_{kli} dQ'_i = b_{km} b_{ln} \epsilon_{mni} dQ_i \quad (\text{C-5})$$

给出。

如果 \mathbf{A} 是一个 3×3 矩阵, 则 \mathbf{A} 的行列式由

$$|\mathbf{A}| = \epsilon_{pqj} a_{pm} a_{qn} a_{ij} \quad (\text{C-6})$$

给出, 式中 mnj 应是 1, 2, 3 的一种循环排列¹⁾。如把 m 和 n 交换一下, 从而排列不再循环, 将会明显地改变表达式的符号, 因为这种运算相当于把行列式中的两列对换一下。其次, 如果 mnj 下标中有两个相等, 则表达式等于零, 因为两列相等的行列式是等于零的。下标的这些性质实际上是排列符号的性质。所以式 (C-6) 可以更为一般地表达成

1) 大多数论述线性代数或“大学代数”的著作都包含有这种行列式展开式的等效形式; 如 R. R. Stoll, *Linear Algebra and Matrix Theory*, p. 92; S. Lipschutz, *Theory and Problems of Linear Algebra*, p. 172; 和 G. Strang, *Linear Algebra and its Applications*, p. 157. 的确, 许多较老的著作则把式 (C-6) 用作行列式的定义, 如 H. W. Turnbull 所写的内容广泛的专论, *The Theory of Determinants, Matrices and Invariants*, p. 12. (更近代的作法则用它的变换性质来定义行列式.) 也可参阅 G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*. 第四章; T. C. Bradbury, *Theoretical Mechanics*, pp. 26—28; G. Goertzel 和 N. Tralli, *Some Mathematical Methods of Physics*, 附录 1A.

$$\varepsilon_{mni} |\mathbf{A}| = \varepsilon_{pqi} a_{pm} a_{qn} a_{ij}, \quad (\text{C-7})$$

这时 mni 这些下标并无任何限制。我们可以把式 (C-7) 应用于正交矩阵 \mathbf{B} , 并记住, 一个正交矩阵的行列式的平方始终等于 1, 于是得

$$\varepsilon_{mni} = \varepsilon_{pqi} b_{pm} b_{qn} b_{ij} |\mathbf{B}|. \quad (\text{C-8})$$

式 (C-5) 现在能够表达成

$$\varepsilon_{kli} dQ'_i = \varepsilon_{pqi} b_{km} b_{pm} b_{ln} b_{qn} b_{ij} |\mathbf{B}|. \quad (\text{C-9})$$

根据 \mathbf{B} 的正交性性质, 我们有

$$b_{km} b_{pm} = \delta_{kp}, \quad b_{ln} b_{qn} = \delta_{lq},$$

从而式 (C-9) 简化为

$$\varepsilon_{kli} dQ'_i = \varepsilon_{kli} |\mathbf{B}| b_{ij} dQ_j. \quad (\text{C-10})$$

由此可得

$$dQ'_i = |\mathbf{B}| b_{ij} dQ_j, \quad (\text{C-11})$$

这就是我们要证明的结果式 (4-110).

D 哈密顿-雅可比方程可分离性的 斯特克尔条件

现在来证明, 斯特克尔条件(见前面第 538 页)提供了哈密顿-雅可比方程可分离性的充分条件, 也就是说, 如果它们得到满足, 则哈密顿-雅可比方程中的那些变量就是可以分离的。关于斯特克尔条件(在一定范围内)的必要性的证明可以在帕斯 (Pars) 的著作中找到¹⁾。这里给出的证明大致是按照加芬克尔 (Garfinkel) 所概述的步骤进行的²⁾。

1) L. A. Pars, *A Treatise on Analytical Dynamics*, 1965, pp. 321—323.

2) 参阅 B. Garfinkel, *Space Mathematics, Part I*, (J. B. Rosser, ed.) 1966, pp. 52—45. (有一些明显的印刷错误: 式 (82) 中因子 2 和式 (87) 中的负号).

根据式(10-44)和式(10-45)可知,系统的哈密顿函数可表达成

$$H = \frac{1}{2} \sum_i \frac{(p_i - a_i)^2}{T_{ii}} + V(q). \quad (\text{D-1})$$

如果系统是保守的,则哈密顿-雅可比方程的两种形式都可以借助式(10-46)简化为

$$\frac{1}{2} \sum_i \frac{1}{T_{ii}} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial q_i} - a_i \right)^2 + 2V_i(q_i) \right] = \alpha_1, \quad (\text{D-2})$$

这里的 α_1 是 n 个积分常数中的第一个.我们能够更为紧凑地表达式(D-2),为此定义一系列 n 维矢量:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} & \quad \text{元素为 } \frac{1}{T_{ii}}, \\ \mathbf{c} & \quad \text{元素为 } \left(\frac{\partial W}{\partial q_i} - a_i \right)^2, \\ \mathbf{V} & \quad \text{元素为 } V_i(q_i). \end{aligned}$$

现在,方程(D-2)表现为(以矩阵记号表示的)久期方程

$$\mathbf{b}(\mathbf{c} + 2\mathbf{V}) = 2\alpha_1. \quad (\text{D-3})$$

最后一个斯特克尔条件式(10-47)也可以用矩阵形式表达,只要定义一个矢量 δ_1 ,其元素为

$$(\delta_1)_i = \delta_{1i}, \quad (\text{D-4})$$

也就是说,第一个元素为1,其余的则全部为零.采用现在这种记号后,式(10-47)将成为

$$\mathbf{b} = \delta_1 \phi^{-1}. \quad (\text{D-5})$$

因而可以断言,式(D-3)的一个解包含于下列形式中:

$$\mathbf{c} + 2\mathbf{V} = 2\phi\boldsymbol{\gamma}, \quad (\text{D-6})$$

式中 $\boldsymbol{\gamma}$ 是一矢量,它具有常值元素,但其他方面均未予规定.为使式(D-3)得以成立,必须要求

$$\mathbf{b}\phi\boldsymbol{\gamma} = \alpha_1,$$

或者根据式 (D-5),

$$\delta_1 \boldsymbol{\gamma} = \alpha_1. \quad (\text{D-7})$$

式 (D-4) 所定义的矢量 δ_1 的性质使式 (D-7) 可简化为

$$\gamma_1 = \alpha_1, \quad (\text{D-7}')$$

即 $\boldsymbol{\gamma}$ 的第一个元素必须等于积分常数 α_1 .

式 (D-6) 相当于方程组

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial W}{\partial q_i} - a_i(q_i) \right]^2 \\ & = -2V_i(q_i) + 2 \sum_j \phi_{ij}(q_i) \gamma_j. \end{aligned} \quad (\text{D-8})$$

因为第 i 个方程中的所有其他各项都只与 q_i 有关, 所以能够以分离的形式得出 W 的完全解:

$$W(q_1, \dots, q_n) = \sum_i W_i(q_i), \quad (\text{D-9})$$

最后得

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial W_i(q_i)}{\partial q_i} - a_i(q_i) \right)^2 \\ & = -2V_i(q_i) + 2 \sum_j \phi_{ij}(q_i) \gamma_j, \end{aligned} \quad (\text{D-10})$$

这等同于式 (10-48).

注意, 矩阵 ϕ 只与矩阵 \mathbf{T} 的对角元和坐标系的性质有关, 与“矢势” \mathbf{V} 则毫无关系. 作为一个例子, 我们来考虑 ϕ 的某种适当形式, 以便用于以球极坐标表示的单个质点问题. 为了推算 ϕ 的元素, 我们考虑一个具有这种性质的、哈密顿-雅可比方程又可直接分离的简单问题. 有心力作用下的空间运动正好提供了这样的问题. 如果分别用下标 1, 2 和 3 表示坐标 r , θ 和 ϕ , 则分离后的方程 (10-59)、(10-58) 和 (10-56) 可以表达成

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial r} \right)^2 = -2mV(r) + 2m\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{r^2}, \quad (\text{D-11a})$$

$$\left(\frac{\partial W_2}{\partial \theta}\right)^2 = \alpha_2^2 - \frac{\alpha_1}{\sin^2 \theta}, \quad (\text{D-11b})$$

$$\left(\frac{\partial W_3}{\partial \phi}\right)^2 = \alpha_3^2. \quad (\text{D-11c})$$

由于我们知道 ϕ^{-1} 的第一行中各元素都有一个因子 $1/m$, 因而可以料定 ϕ 的各个元素必定有一因子 m . 把式 (D-11) 与式 (D-10) 相比, 可以得到 γ 和 ϕ 的元素

$$\gamma_1 = \alpha_1, \quad \gamma_2 = \frac{\alpha_2}{2m}, \quad \gamma_3 = \frac{\alpha_3}{2m} \quad (\text{D-12})$$

和

$$\phi = m \begin{pmatrix} 1 & -1/r^2 & 0 \\ 0 & 1 & -\csc^2 \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{D-13})$$

直接演算即能证明, 逆矩阵 ϕ^{-1} 为

$$\phi^{-1} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{r^2} & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \\ 0 & 1 & \csc^2 \theta \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{D-14})$$

显然, ϕ 和 ϕ^{-1} 都具备所要求的性质.

E 气体中声场的拉格朗日表述

为了研究描述气体中声振动的场方程, 我们将用矢量 η 表示各气体粒子与它的正常位置的位移, η 的分量为 $\eta_i (i = 1, 2, 3)$. 因而空间内每一个 xyz 点都有与它相关联的三个广义坐标. 我们将认为扰动始终是微小的, 以致压强 P 和密度 μ 分别与它们的平衡值只有些微的差别.

在分立系统中以拉格朗日表述建立问题时, 必须求出动能和势能, 并把拉氏函数表达成这些量之差. 我们在这里所

寻求的拉氏函数是密度 \mathcal{L} 的体积分. 动能和势能也同样能够分别作为密度 \mathcal{T} 和 \mathcal{V} 的体积分求得, 它们之间的关系为

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}. \quad (\text{E-1})$$

要求出动能密度是没有什么问题的; 记住, 与平衡位置的位移是微小的, 因此有

$$\mathcal{T} = \frac{\mu_0}{2} \dot{\eta}^2 = \frac{\mu_0}{2} (\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2 + \dot{\eta}_3^2). \quad (\text{E-2})$$

要得到势能密度则是比较困难的. 气体的势能是气体在反抗压力而膨胀的过程中所能做的功的量度. 实际上是根据所谓气体“弹簧”计算的 (十七世纪科学家喜欢这样做). 考虑一定质量的气体 M , 它的平衡体积

$$V_0 = \frac{M}{\mu_0} \quad (\text{E-3})$$

小到足以使 \mathcal{V} 在整个体积内都不变. 因此 $\mathcal{V} V_0$ 等于整个气体的势能. 由于声扰动, 体积从 V_0 变到 $V_0 + \Delta V$. 已知, 在体积变化 dV 的过程中外界对系统所作之功, 即势能的增量等于 $-PdV$ ¹⁾. 因此, 对应于体积从 V_0 变到 $V_0 + \Delta V$ 的势能为

$$\mathcal{V} V_0 = - \int_{V_0}^{V_0 + \Delta V} P dV.$$

可以设想, 由于 ΔV 是微小的, 该积分可以近似地看作是 $P_0 \Delta V$. 正如我们将要看到的, 这一项对于运动方程并无贡献. 因此, 必须采用更高一级的近似, 在这种近似中, $P-V$ 曲线被 V_0 到 $V_0 + \Delta V$ 这一区域内的直线所替代 (见图 E-1):

$$\int_{V_0}^{V_0 + \Delta V} P dV = P_0 \Delta V + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_0 (\Delta V)^2. \quad (\text{E-4})$$

1) 惯用的基本推导如下: 外系统作用于面元 dA 上的力等于 PdA , 其指向向内. 在膨胀过程中, 表面沿法向向外移动一段距离 dx , 因此外力所作之功为 $-PdA dx = -PdV$.

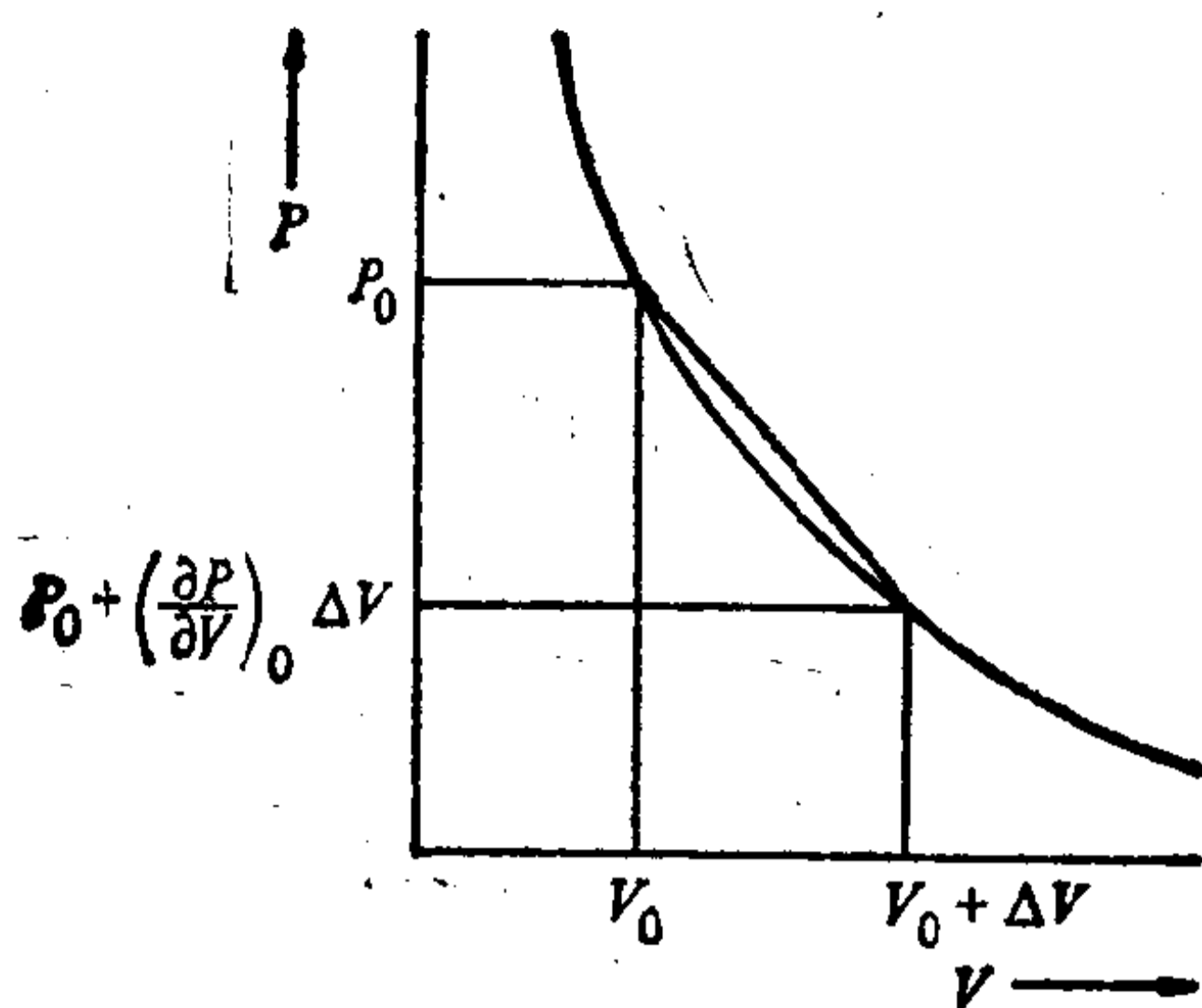


图 E-1 气体的压强-体积曲线图

为了计算 P 对 V 的微商，有必要暂时离开正题来讨论一下热力学。首先感兴趣的可能是关于压强和体积之间关系的玻意耳定律

$$PV = C, \quad (\text{E-5})$$

这是牛顿曾经遵循的步骤。然而它得出了错误的结果，因为式 (E-5) 认为压强和体积的变化是等温地发生的。实际上，声振动几乎总是如此之快，以至根本没有时间把发出的热量传输出去以保持温度不变。压缩和膨胀都应该绝热地发生，即热量并无损耗。在这些条件下， P 和 V 的关系为

$$PV^\gamma = C, \quad (\text{E-6})$$

这里的 γ 是定压和定容比热的常值比¹⁾。因此所求的微商为

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_0 = -\frac{\gamma P_0}{V_0}. \quad (\text{E-7})$$

用相关的密度变化表示体积变化是相宜的。由于 $V = M/\mu$ ，所以 V 的变化为

1) 有关推导可参阅 M. W. Zemansky, *Heat and Thermodynamics*, 第五版(纽约: McGraw-Hill, 1968), 节 5-5.

$$\Delta V = - \frac{M}{\mu_0} \Delta \mu = -V_0 \sigma. \quad (\text{E-8})$$

式中 σ 代表密度的相对变化:

$$\mu = \mu_0(1 + \sigma). \quad (\text{E-9})$$

把式 (E-3, 4, 7 和 9) 这些方程组合起来, 势能密度成为

$$\mathcal{V} = P_0 \sigma + \frac{\gamma P_0}{2} \sigma^2. \quad (\text{E-10})$$

这还不是能够用于拉氏函数的形式; 我们还得用 η 来表示 σ . 考虑一个有限的空间体积 V . 因受到使之偏离平衡态的微小扰动而流出这一体积的质量为

$$\mu_0 \int \eta \cdot d\mathbf{A},$$

这一积分应对该体积的整个表面来计值. 密度变化的体积分必须正好等于这一质量迁移:

$$- \mu_0 \int \sigma dV = \mu_0 \int \eta \cdot d\mathbf{A}. \quad (\text{E-11})$$

根据散度定理, 关系式 (E-11) 可表达成

$$- \int \sigma dV = \int \nabla \cdot \eta dV,$$

由于该等式对于任何任意体积都成立, 我们必然有¹⁾

$$\sigma = -\nabla \cdot \eta. \quad (\text{E-12})$$

由于这一关系, 势能密度的最后形式为

$$\mathcal{V} = -P_0 \nabla \cdot \eta + \frac{\gamma P_0}{2} (\nabla \cdot \eta)^2. \quad (\text{E-13})$$

现在能够看出, \mathcal{V} 中 σ 的线性项对于总势能不可能有贡献. 根据式 (E-11), σ 的体积分是 η 的面积分的负值, 如果

1) 式 (E-12) 可以根据它的更为常见的形式

$$\dot{\mu} = -\nabla \cdot \mu \eta$$

看作是气体流的连续性方程.

曲面把系统完全包围起来，则这种积分必定为零，亦即没有质量输出该系统。这一项对 L 没有贡献这一点，还不是把它从 \mathcal{V} 中略去的充分理由。可以相信，该项的函数特性对运动方程还是有影响的。（记得，一个系统的协变哈密顿函数可以等于零，但运动方程当然不会等于零。）所以我们将把该项暂时保留下来。于是，完整的拉氏密度可以表达成

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\mu_0 \dot{\eta}^2 + 2P_0 \nabla \cdot \eta - \gamma P_0 (\nabla \cdot \eta)^2),$$

(E-14)

这就是式 (12-24)。

文献目录

所列举的版本(绝大多数)都是编写本书时所参阅的那些版本。凡知道较新版本或重印本的出处的,均在条目后面作了说明。不能指望给出一个完整的文献目录。如果该著作在本书某章“推荐参考书目”中已列出,则将在该书后面的圆括弧内注明。

一般的经典力学专著

- Aharoni, J., Lectures on Mechanics. Oxford: Oxford University Press, 1972. (第五章)
- Ames, Joseph Sweetman and Francis D. Murnaghan, Theoretical Mechanics. Boston: Ginn and Company, 1929. New York: Dover, 1978.
- Appel, Paul, Traité de Mécanique rationnelle, Tome 2: Dynamique des Systèmes. Mécanique Analytique, 6th ed. Paris: Gauthier-Villars, 1953.
- Barger, Vernon D. and Martin G. Olsson, Classical Mechanics, a Modern Perspective, New York: McGraw-Hill, 1973. (第五章)
- Bartlett, James H., Classical and Modern Mechanics. University, Alabama: University of Alabama Press, 1975.
- Bradbury, T. C., Theoretical Mechanics. New York: Wiley, 1968. (第四章)
- Corben, H. C. and Philip Stehle, Classical Mechanics, 2nd ed. New York: Wiley, 1960. New York: R. E. Krieger, 1974. (第六章)
- Finkelstein, Robert J., Nonrelativistic Mechanics. Reading, Mass.: W. A. Benjamin, 1973.
- Fowles, Grant R., Analytical Mechanics. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1962.
- Gantmacher, F., Lectures in Analytical Mechanics. Translated from Russian. Moscow: Mir Publishers, 1970. 1975 重印.
- Greenwood, Donald T., Principles of Dynamics. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1965.
- , Classical Dynamics. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1977.
- Groesberg, Sanford Walton, Advanced Mechanics. New York: Wiley, 1968. (第五章)

- Hamel, Georg, *Theoretische Mechanik, eine einheitliche einföhrung in die gesamte Mechanik*. Berlin: Springer-Verlag, 1949. 1967 年修订重印. (第四章)
- Hauser, Walter, *Introduction to the Principles of Mechanics*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1965. (第一章)
- Kane, Thomas R., *Dynamics*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1968.
- Kilmister, C. W., *Hamiltonian Dynamics*. New York: Wiley, 1964. (第九章)
- , *Lagrangian Dynamics*. New York: Plenum Press, 1967.
- Kilmister, C. W. and J. E. Reeve, *Rational Mechanics*, New York: American Elsevier, 1966. (第一章)
- Konopinski, Emil Jan, *Classical Description of Motion*. San Francisco: Freeman, 1969.
- Lanczos, Cornelius, *The Variational Principles of Mechanics*, 4th ed. Toronto: University of Toronto Press, 1970. (第一、二、八、九、十章)
- Landau, L. D. and E. M. Lifshitz, *Mechanics*, 3rd ed. *Course of Theoretical Physics*, vol. 1. Translated from Russian. Oxford: Pergamon Press, 1976. (第一、三、六章)
- Macmillan, William Duncan, *Theoretical Mechanics*. vol. 1: *Statics and the Dynamics of a Particle*. New York: McGraw-Hill, 1927. (第三章)
- vol. 3: *Dynamics of Rigid Bodies*. New York: McGraw-Hill, 1936. New York: Dover, 1960. (第五章)
- Marion, Jerry B., *Classical Dynamics of Particles and Systems*, 2nd ed. New York: Academic Press, 1970. (第三章)
- Meirovitch, Leonard, *Methods of Analytical Dynamics*. New York: McGraw-Hill, 1970. (第五、六章)
- Milne, E. A., *Vectorial Mechanics*. New York: Interscience Publishers, 1948.
- Morgenstern, D. and I. Szabo, *Vorlesungen über Theoretische Mechanik*. Berlin: Springer-Verlag, 1961.
- Osgood, William F., *Mechanics*. New York: Macmillan, 1937. (第一章)
- Pars, L. A., *A Treatise on Analytical Dynamics*. London: Heinemann, 1965.
- Saletan, Eugene J. and Alan H. Cromer, *Theoretical Mechanics*. New York: Wiley, 1971. (第四、九、十一、十二章)
- Slater, John C. and Nathaniel H. Frank, *Mechanics*. New York: McGraw-Hill, 1947. (第十二章)
- Sommerfeld, Arnold, *Mechanics. Lectures on Theoretical Physics*. vol. 1.

- New York: Academic Press, 1952. (第五章)
- Sposito, Garrison, *An Introduction to Classical Dynamics*. New York: Wiley, 1976.
- Sudarshan, E. C. G. and N. Mukunda, *Classical Dynamics: A Modern Perspective*. New York: Wiley, 1974. (第九章)
- Symon, Keith R., *Mechanics*. 3rd ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1971. (第一、五、七、八章)
- Synge, John L., *Classical Dynamics*. in vol. 3, part 1 of *Encyclopedia of Physics*. Berlin: Springer-Verlag, 1960. (第八、九章)
- Synge, John L. and Byron A. Griffith, *Principles of Mechanics*, 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1959.
- Ter Harr, D., *Elements of Hamiltonian Mechanics*. Amsterdam: North-Holland, 1961. Second ed., Oxford; Pergamon Press, 1971. (第七、八、十章)
- Thirring, Walter, *A Course in Mathematical Physics I: Classical Dynamical Systems*. Translated from German. New York: Springer-Verlag, 1978.
- Thomson, William (Lord Kelvin) and Peter Guthrie Tait, *Treatise on Natural Philosophy*. Cambridge: University Press, 1879. 1896年稍有改动, Reprinted as *Principles of Mechanics and Dynamics*, New York: Dover, 1962.
- Webster, Arthur Gordon, *The Dynamics of Particles and of Rigid, Elastic and Fluid Bodies*. Leipzig: B. G. Teubner, 1904. New York: Stechert-Hafner, 1920.
- Wells, Dale A., *Theory and Problems of Lagrangian Dynamics*. New York: McGraw-Hill (Schaum), 1967. (第二、八章)
- Whittaker, E. T., *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, 4th ed. Cambridge University Press, 1937. (第一、二、三、四、七、八章)
- Zajac, Alfred, *Basic Principles and Laws of Mechanics*. Boston: D. C. Heath, 1966.
- , *Principles of Classical Mechanics and Field Theory*, in vol. 3, part 1 of *Encyclopedia of Physics*. Berlin: Springer-Verlag, 1960. (第一、八、章)(也可参阅 J. L. Synge; C. Truesdell and R. A. Toupin.)

特殊形式经典力学的著作

- Abraham, Ralph and Jerrold E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, 2nd ed. Reading, Mass.: Benjamin/Cummings, 1978. (第十一章)
- Anderson, James L., *Principles of Relativity Physics*. New York: Academic Press, 1967.

- Arnold, V. I., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Translated from the Russian edition of 1974. New York: Springer-Verlag, 1978.
- Arnold, V. I. and A. Avez, *Ergodic Problems of Classical Mechanics*. New York: W. A. Benjamin, 1968.
- Bergmann, Peter Gabriel, *Introduction to the Theory of Relativity*. New York: Prentice-Hall, 1942.
- Born, Max, *The Mechanics of the Atom*. Translated by J. W. Fisher. London: G. Bell Sons, 1927. Reprint, New York: Ungar, 1967. (第九、十、十一章)
- Brown, Ernest W., *An Introductory Treatise on the Lunar Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 1896. Reprint, New York: Dover, 1960.
- Brouwer, Dirk and Gerald M. Clemence, *Methods of Celestial Mechanics*. New York: Academic Press, 1961.
- Brunet, Pierre, *Etude Historique sur le Principe de la Moindre Action*. Paris: Herrmann et Cie, 1938. (第八章)
- Bylerly, William Elwood, *An Introduction to the Use of Generalized Coordinates in Mechanics and Physics*. Boston: Ginn, 1913. New York: Dover, 1965.
- Chen, Yu, *Vibrations: Theoretical Methods*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1966. (第六章)
- Crandall, Stephen H., et al., *Dynamics of Mechanical and Electromechanical Systems*. New York: McGraw-Hill, 1968.
- Danby, J. M. A., *Fundamentals of Celestial Mechanics*. New York: Macmillan, 1962. (第三、十一章)
- Deutsch, Ralph, *Orbital Dynamics of Space Vehicles*. Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, 1963. (第十一章)
- Dziobek, Otto, *Mathematical Theories of Planetary Motions*. Register Publishing Co., 1892. Reprint, New York: Dover, 1962.
- Einstein, Albert, *The Meaning of Relativity*. 5th ed. Princeton: Princeton University Press, 1956. (第七章)
- Finlay-Freundlich, E., *Celestial Mechanics*. New York: Pergamon Press, 1958.
- Fock, V., *The Theory of Space, Time and Gravitation*, 2nd English ed. New York: Pergamon (Macmillan), 1964. (第七章)
- French, A. P., *Special Relativity*. (The M. I. T. Introductory Physics Series.) New York: W. W. Norton, 1968. (第七章)
- Garfinkel, Boris, *Largange-Hamilton-Jacobi mechanics*, in *Space Mathematics*, Part 1, J. Barkley Rosser, ed., *Lectures in Applied Mathematics*, vol. 5. Providence, R. I.: American Mathematical Society, 1966. (第十、十一章)

- Geyling, Franz T. and H. Robert Westerman, Introduction to Orbital Mechanics. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1971.
- Giacaglia, G. E. O., Perturbation Methods in Non-linear Systems. New York: Springer-Verlag, 1972. (第十一章)
- Gossick, B. R., Hamilton's Principle and Physical Systems. New York: Academic Press, 1967. (第二章)
- Gray, Andrew, A treatise on Gyrostatics and Rotational Motion. London: Macmillan, 1918. New York: Dover, 1959. (第五章)
- Grammel, R., Der Kreisel. Berlin: Springer-Verlag, 1950.
- Hagedorn, R., Relativistic Kinematics. New York: W. A. Benjamin, 1963. Reprint, 1973. (第七章)
- Hagihara, Yusuke, Celestial Mechanics, vol. 2, parts 1 and 2, Perturbation Theory. Cambridge, Mass.: M. I. T. Press, 1972. (第十一章)
- Kerner, Edward H., ed., The Theory of Action-at-a-distance in Relativistic Particle Dynamics. 重订本. New York: Gordon and Breach, 1972.
- Klein, Felix, The Mathematical Theory of the Top. New York: Scribners, 1897.
- Reprinted in Congruence of Sets and Other Monographs, Bronx, N. Y.: Chelsea, 1967.
- Klein, Felix and Arnold Sommerfeld, Über die Theorie des Kreisels (4 vols). Leipzig: B. G. Teubner, 1897—1910. Reprint, New York: Johnson, 1965. (第五章)
- Kotkin, G. L. and V. G. Serbo, Collection of Problems in Classical Mechanics. Translated from Russian. Oxford: Pergamon Press, 1971.
- Kurth, Rudolf, Introduction to the Mechanics of the Solar System. New York: Pergamon Press, 1969.
- Lehnert, Bo, Dynamics of Charged Particles. Amsterdam: North-Holland, 1964. (第十一章)
- Leimanis, Eugene, The General Problem of Motion of Coupled Rigid Bodies about a Fixed Point. New York: Springer-Verlag, 1965. (第五章)
- Mach, Ernst, The Science of Mechanics, 5th English ed. LaSalle, Ill.: Open Court, 1942. (第一章)
- Magnus, Kurt, Kreisel Theorie und Anwendungen. Berlin: Springer-Verlag, 1971.
- Mann, Ronald A., The Classical Dynamics of Particles: Galilean and Lorentz Relativity. New York: Academic Press, 1974. (第七章)
- McCuskey, S. W., Introduction to Celestial Mechanics. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963. (第三章)
- Mercier, Andre, Analytical and Canonical Formalism in Physics. Amsterdam: North-Holland, 1959

- Misner, Charles W., Kip S. Thorne; John Archibald Wheeler, *Gravitation*. San Francisco: Freeman, 1973. (第七章)
- Moller, C., *The Theory of Relativity*, 2nd ed. Oxford: Oxford University Press, 1972.
- Moser, Jurgen, *Stable and Random Motions in Dynamical Systems, with Special Emphasis on Celestial Mechanics*. Princeton: Princeton University Press, 1973. (第十一章)
- Moulton, Forest Ray, *An Introduction to Celestial Mechanics*, 2nd ed. New York: Macmillan, 1914.
- Northrop, Theodore G., *The Adiabatic Motion of Charged Particles*. New York: Interscience, 1963. (第十一章)
- Olson, Harry F., *Solution of Engineering Problems by Dynamical Analogies*, 2nd ed. Princeton, N. J.: D. Van Nostrand, 1966 (corrected reprint of *Dynamical Analogies*, 2nd ed., 1958). (第二章)
- Plummer, H. C., *An Introductory Treatise on Dynamical Astronomy*. Cambridge: Cambridge University Press, 1918. Reprint, New York: Dover, 1960. (第三章)
- Poincare, Henri, *Les Methodes Nouvelles de la Mécanique Céleste* (3vols.). Paris: Gauthier-Villars, 1982—99. Reprint, New York: Dover, 1957.
- Routh, Edward John, *Dynamics of a System of Rigid Bodies. Part I, Elementary Part*, 5th ed. London: Macmillan, 1891. *Part II, Advanced Part*, 5th ed. London, Macmillan, 1892. (第五章)
- Santilli, Ruggero Mario, *Foundations of Theoretical Mechanics I*. New York: Springer-Verlag, 1978.
- Sard, R. D., *Relativistic Mechanics: Special Relativity and Classical Particle Dynamics*. New York: W. A. Benjamin, 1970. (第七章)
- Schwartz, Herman M., *Introduction to Special Relativity*. New York: McGraw-Hill, 1968. (第七章)
- Seigel, Carl Ludvig and J. K. Moser, *Lectures on Celestial Mechanics*. Translated from German. New York: Springer-Verlag, 1971.
- Smart, W. M., *Celestial Mechanics*. New York: Wiley, 1953. Reprint, 1961.
- Soper, Davison Eugene, *Classical Field Theory*, New York: Wiley, 1976.
- Sternberg, Shlomo, *Celestial Mechanics*. New York: W. A. Benjamin, 1969.
- Sterne, Theodore E., *An Introduction to Celestial Mechanics*. New York: Interscience, 1960.
- Tisserand, F., *Traité de Mécanique céleste, Tome I, Perturbation des Planètes* ——— Paris: Gauthier-Villars, 1889. New printing, 1960.
- Truesdell, C., *Essays in the History of Mechanics*. New York: Springer-Verlag, 1968. (第一章)

- Truesdell, C. and R. A. Toupin, *The Classical Field Theories*, in vol. 3, part 1 of *Encyclopedia of Physics*. Berlin: Springer-Verlag. 1960. (第一章)
- Wintner, Aurel, *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*. Princeton: Princeton University Press, 1941.
- Wrigley, Walter; Walter M. Hollister and William G. Denhard, *Gyroscopic Theory, Design and Instrumentation*. Cambridge, Mass.: M. I. T. Press, 1969. (第五章)
- Yourgrau, Wolfgang and Stanley Mandelstam, *Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory*, 3rd ed. Philadelphia: Saunders, 1968.

物理学和数学的其他方面的著作, 包
含有对经典力学有益的资料

- Arfken, George, *Mathematical Methods for Physicists*. New York: Academic Press. 1966. Second ed., 1970. (第四章)
- Badger, Parker H., *Equilibrium Thermodynamics*. Boston: Allyn and Bacon, 1967. (第八章)
- Barut, A. O., *Electrodynamics and Classical Theory of Field and Particles*. New York: Macmillan, 1964. (第七、十二章)
- Bliss, Gilbert Ames, *Calculus of Variations*. Carus Mathematical Monographs, 1. LaSalle, Ill.: Open Court, 1925. (第二章)
- Bocher, Maxime, *Introduction to Higher Algebra*. New York: Macmillan, 1907.
- Born, Max and Pascual Jordan, *Elementare Quantenmechanik*. Berlin: Julius Springer 1930. Ann Arbor: J. W. Edwards, 1946.
- Born, Max and Emil Wolf, *Principles of Optics*. London: Pergamon Press, 1959. Fifth ed., Oxford: Pergamon Press, 1975. (第十章)
- Brand, Louis, *Vector and Tensor Analysis*. New York: Wiley, 1947. (第五章)
- Brillouin, Leon, *Tensors in Mechanics and Elasticity*. Translated from the 1938 French edition. New York: Academic Press, 1964. (第十章)
- Borisenko, A. I. and I. E. Tarapov, *Vector and Tensor Analysis with Applications*. Translated and revised by R. A. Silverman. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1968. (第四章)
- Carathéodory, C., *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*. San Francisco: Holden-Day, vol. 1, 1965; vol. 2, 1967. Translated from German edition, 1935; revised, 1956. (第九、十章)

- Casimir, H. B. G., *Rotation of a Rigid Body in Quantum Mechanics*. Groningen: J. B. Wolter, 1931.
- Condon, E. U. and G. H. Shortley, *The Theory of Atomic Spectra*. Cambridge: Cambridge University Press, 1935.
- Courant, R. and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, 2 vols. New York: Interscience, vol. 1, 1953; vol. 2, 1962. (第二、八、十章)
- Cronin, Jeremiah A.; David F. Greenberg and Valentine L. Telegdi, *University of Chicago Graduate Problems in Physics, with Solutions*. Chicago: University of Chicago Press, 1977.
- Davydov, A. S., *Quantum Mechanics*. Oxford: Pergamon Press, 1965. Second ed., 1976.
- Dirac, Paul A. M., *Lectures on Quantum Mechanics*. New York: Yeshiva University, 1964.
- Eisele, John A. and Robert M. Mason, *Applied Matrix and Tensor Analysis*. New York: Wiley-Interscience, 1970.
- Eisenhart, Luther Pfahler, *Continuous Groups of Transformation*. Princeton: Princeton University Press, 1933. Reprint, New York: Dover, 1961.
- Elsoglc, L. E., *Calculus of Variations*. Translated from Russian. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1962.
- Gardner, Martin, *New Mathematical Diversions from Scientific American*. New York: Simon and Schuster, 1971.
- Gelfand, I. M. and S. V. Fomin, *Calculus of Variations*. Translated and edited by Richard A. Silverman. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1963.
- Gibbs, J. Willard, *Vector Analysis*. Edited by E. B. Wilson. New York: Scribner, 1901. New Haven: Yale University Press, 1931.
- Goertzel, Gerald and Nunzio Tralli, *Some Mathematical Methods of Physics*. New York: McGraw-Hill, 1960.
- Guillemin, Ernst A., *The Mathematics of Circuit Analysis*. New York: Wiley, 1949. (第六章)
- Hetzberg, Gerhard, *Infrared and Raman Spectra of Polyatomic Molecules*. New York: D. Van Nostrand, 1945. (第四、六章)
- Hess, Seymour L., *Introduction to Theoretical Meteorology*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1959. (第四章)
- Hildebrand, Francis, B., *Methods of Applied Mathematics*, 2nd ed. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1965.
- Hirschfelder, Joseph O., Charles F. Curtiss and R. Byron Bird, *Molecular Theory of Gases and Liquids*. New York: Wiley, 1954. Slightly revised edition, 1964. (第三章)
- Jackson, John David, *Classical Electrodynamics*. New York: Wiley, 1962,

- 2nd ed., 1975.
- Jeffreys, H. and Bertha S. Jeffreys, *Methods of Mathematical Physics*, 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1950. Third ed., 1972. (第四、六章)
- Kaplan, Wilfred, *Advanced Calculus*, 2nd ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1973.
- Landau, L. D. and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics, Non-relativistic Theory*, 2nd ed., in vol. 3 of *Course of Theoretical Physics*. Oxford: Pergamon Press, 1965. Third ed., 1977.
- Lang, Serge, *A Second Course in Calculus*, 3rd ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1973.
- Lindsay, Robert Bruce and Henry Margenau, *Foundation of Physics*. New York: Wiley, 1936. (第一、八章)
- Lipschutz, Seymour, *Theory and Problems of Linear Algebra*. Schaum's Outline Series. New York: McGraw-Hill, 1968.
- Loebl, Ernest M., ed., *Group Theory and Its Applications*, vol. II. New York: Academic Press, 1971. (第三、九、十章)
- Loomis, Lynn H. and Shlomo Sternberg, *Advanced Calculus*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1968.
- Margenau, Henry and George Moseley Murphy, *The Mathematics of Physics and Chemistry*. New York: D. Van Nostrand, 1943. New York: Krieger, 1976.
- Marion, Jerry B., *Principles of Vector Analysis*. New York: Academic Press, 1965, 2nd ed., 1970. (第四章)
- Mathews, Jon and R. L. Walker, *Mathematical Methods of Physics*. New York: W. A. Benjamin, 1965, 2nd ed., 1970.
- McIntosh, Harold. See Loebl, Ernest M.
- Merzbacher, Eugen, *Quantum Mechanics*. New York: Wiley, 1961, 2nd ed., 1970.
- Munk, Walter H. and Gordon J. F. Macdonald, *The Rotation of the Earth, a Geophysical Discussion*. Cambridge: Cambridge University Press, 1960. (第五章)
- Nering, Evar D., *Linear Algebra and Matrix Theory*. New York: Wiley, 1963.
- Newton, Roger G., *Scattering Theory of Waves and Particles*. New York: McGraw-Hill, 1966. (第三章)
- Panofsky, Wolfgang K. H. and Melba Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, 2nd ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1962.
- Pars, L. A., *An Introduction to the Calculus of Variations*. New York: Wiley, 1962. (第二章)
- Pearson, Carl E., ed., *Handbook of Applied Mathematics*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1974.

- Pease, Marshal C., III, *Methods of Matrix Algebra*. New York: Academic Press, 1965.
- Lord Rayleigh, *The Theory of Sound* (2nd ed. London: Macmillan, 1894—1896. New York: Dover, 1945. (第一、十二章)
- Rose, M. E., *Elementary Theory of Angular Momentum*. New York: Wiley, 1957.
- Rozenal, S., *Niels Bohr: His Life and Work*. Amsterdam: North-Holland, 1967. New York: Wiley, 1967.
- Rund, Hanno, *The Hamilton-Jacobi Theory in the Calculus of Variations*. London: D. Van Nostrand, Ltd., 1966. (第二、七、八、九章)
- Schiff, Leonard I., *Quantum Mechanics*, 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1968.
- Smirnov, V. I., *A Course of Higher Mathematics* (5 vols.). Translated from Russian. Oxford: Pergamon Press, 1964.
- Sommerfeld, Arnold, *Atomic Structure and Spectral Lines*. Translated by H. L. Brose from the 5th German edition of 1931. New York: Dutton, 1934. (第十章)
- Stacey, Frank D., *Physics of the Earth*. New York: Wiley, 1969; 2nd ed., 1977. (第四、五章)
- Stoll, Robert R., *Linear Algebra and Matrix Theory*. New York: McGraw-Hill, 1952. Reprint, New York: Dover, 1969. (第四章)
- Strang, Gilbert, *Linear algebra and Its Applications*. New York: Academic Press, 1976.
- Synge, J. L., *Geometrical Optics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1937.
- Synge, J. L. and A. Schild, *Tensor Calculus*, Toronto: University of Toronto Press, 1949. (第四、六、七章)
- Tolman, Richard C., *The Principles of Statistical Mechanics*. Oxford: Oxford University Press, 1938. (第九章)
- Turnbull, H. W., *The Theory of Determinants, Matrices and Invariants*, 2nd ed. London: Blackie, 1945.
- Van Vleck, J. H., *Quantum Principles and Line Spectra*. Bulletin No. 54 of the National Research Council, Washington D. C.: National Research Council, 1926. (第十章)
- Weinstock, Robert, *Calculus of Variations*. New York: McGraw-Hill, 1952. (第二章)
- Wentzel, Gregor, *Quantum Theory of field*. Translated by C. Houtermans and J. W. Jauch. New York: Interscience, 1949. (第十二章)
- Weyl, Herman, *The Classical Groups*. Princeton: Princeton University Press, 1939. Second ed., reprint of first, with additions, 1946.
- Whitham, G. B., *Linear and Nonlinear Waves*. New York: Wiley, 1974.
- Wigner, Eugene P., *Group Theory, and Its Application to the Quantum*

- Mechanics of Atomic Spectra. Translated from German by J. J. Griffin. New York: Academic Press, 1959.
- Wills, A. P., Vector Analysis, with an Introduction to Tensor Analysis. New York: Prentice-Hall, 1931. New York: Dover, 1931. (第五章)
- Wilson, E. Bright, Jr.; J. C. Decius and Paul C. Cross, Molecular Vibrations, the Theory of Infrared and Raman Vibrational Spectra. New York: McGraw-Hill, 1955. (第六章)
- Zemansky, Mark W., Heat and Thermodynamics, 5th ed. New York: McGraw-Hill, 1968.

积分表和数学函数表以及其他参考著作

- Abramowitz, Milton and Irene A. Stegun, eds., Handbook of Mathematical Functions, with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. NBS Applied Math. Series 55. Washington, D. C.: Government Printing Office, 1964. New York: Dover, 1965.
- Gradshteyn, I. S. and I. M. Ryzhik, Table of Integrals, Series and Products, 4th ed. Prepared by Yu V. Geronimus and M. Yu Tseytlin. Translated from Russian. New York: Academic Press, 1965.
- Peirce, B. O., A Short Table of Integrals, 3rd ed. Boston: Ginn, 1929. Fourth ed. (B. O. Peirce and R. M. Foster), Boston: Ginn, 1956.
- Selby, Samuel M., ed., Handbook of Mathematical Tables. Cleveland, Ohio: Chemical Rubber Publishing Co. (CRC), 1962.
- Spiegel, Murray R., Mathematical Handbook of Formulas and Tables. New York McGraw-Hill, 1968.

符 号 索 引

选择各种符号时,尽可能地遵循一定的普遍原则。矢量用粗体罗马字表示;而两级或两级以上的张量以及矩阵则用不带短横线的无端体字母表示。当某个矢量被特别地看作是某个一级张量,或用一个列(或行)矩阵代表时,有时也会用粗体罗马字表示,但大多都用无端体字母表示。如果用希腊字母作符号,也同样用它们的粗体字表示矢量、矩阵和张量。

字母上加点,始终指的是对时间的微商;加撇号,则往往用以表明是经历了某种变换的那些量。第四章中坐标上的撇号,则是指体轴系坐标,以区别于不带撇号的空间坐标系,但往后就不再有此规定。一般说来,撇号还被用来标记相对于质心的某种量的符号。此外,撇号也还有许多特殊的用法,其意义在所给论证的范围内是明显的。但有两个事例要特别说明。用实验室系内的角度(不是质心系内的角度)表示的散射截面,也是用撇号标志的(见第139页)。而节7-9中字符上的撇号则用以标记对参量 θ 的微商,以区别于对时间的微商。

为了使许多公式看起来比较简单,常用各种下标符号标记对该下标所指变量(或其指数)的微商。例如,可查阅第473页、第524页的附注和第十二章中第657页后的所有各页。

在正则变换的讨论中,常用小写字母表示原先的变量,而用大写字母表示变换后的变量。下标“0”通常用以表示初始值或平衡值。按照惯例,“*”系表示复共轭量。如果“*”号另作他用,则均予特别说明。

这一符号索引当然不是完备的。那些常见符号,如笛卡

儿坐标 (x, y, z) , 平面极坐标 (r, θ) [或 (r, ϕ) , (r, ψ) 等]、球极坐标 (r, θ, ϕ) 或矢量分析的符号, 根本毋须列出。有些符号只是在其定义的一、两页内用到, 在其他地方不再按相同意义来使用。对于这种“偶尔出现”的符号, 除了可能出现混淆者外, 本索引中均已略去。

习题中定义的那些符号, 除了具有广泛用途或可能引起混淆的那些符号外, 通常也未列入。列出的这类符号的查找页次均用斜体数字标明。当列有两个以上页次时, 第一个页次所指的出处是最初的, 往往也是非主要的, 而后面的页次则指出了更为正式的定义或说明的查找页次。

- A 面积, 87
- $A(\mathbf{r})$ 波幅的量度, 579
- A_μ 四维电磁矢势, 358
- \mathbf{A} 电磁矢势, 26
- \mathbf{A}, A 拉普拉斯-龙格-楞次矢量及其量值, 122
- \mathbf{A} 变换矩阵, 一般的, 159
- $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$, 等 正交矩阵, 162
- \mathbf{A} 完全 3×3 转动矩阵, 172
- \mathbf{A} 由微幅振荡本征矢 \mathbf{a}_k 组成的方阵, 295
- \mathbf{A} 二维二级张量, 二维谐振子不变量, 503
- \mathbf{A}^{-1} 矩阵 \mathbf{A} 的逆矩阵, 164
- \mathbf{A} 矩阵 \mathbf{A} 的转置矩阵, 165
- \mathbf{A}^\dagger 矩阵 \mathbf{A} 的伴矩阵, 168
- $|\mathbf{A}|$ 矩阵 \mathbf{A} 的行列式, 169
- a 长半轴, 115
- a, b 对称重陀螺的运动常数, 252
- a 绝热不变量理论中跟时间相关的参量, 633
- a 平衡间距, 线性链分子, 649
- a_{ij} 正交变换矩阵的矩阵元, 158
- a_i, a_{jk} 简正模式微幅振荡的振幅, 290, 293
- a_k^\dagger q_k 的傅里叶展开式的系数, 553
- a_0, a_1, a_2, \dots 相对于圆形轨道的各个振荡的傅里叶展开式中的振幅, 721
- \mathbf{a} 加速度, 2
- \mathbf{a} 微幅振荡振幅的本征矢, 291
- \mathbf{a}_k 与微幅振荡第 k 个本征值的本征矢相对应的列(或行)矩阵, 292
- \mathbf{a} 与微幅振荡本征矢 \mathbf{a} 相对应的列(或行)矩阵, 316
- \mathbf{a} 彭加勒变换中原点的位移矢量, 335
- \mathbf{a} 拉氏函数中速度系数的列(或行)矩阵, 408
- $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 线性化形式劳斯函数的 $2S \times 2S$ 矩阵, 421
- \mathbf{B} 磁感应(通量密度、强度), 25
- \mathbf{B} 对应于欧拉角 ψ 的转动矩阵, 172

C , 电容量, 61
 C, c_k 微幅振荡中的比例因子, 290, 300
 C_{ijk} 结构常数, 499
 C_j H 的傅里叶级数展开式中的系数, 621
C 非有界运动的简正化拉普拉斯-龙格-楞次矢量, 502
C c_k 的列(或行)矩阵, 301
C 对应于欧拉角 θ 的转动矩阵, 172
C 光速, 25
 c_{ij} 刚体约束常数, 14
 c_j α_i, β_i 正则变量的 $2n$ 个独立函数, 600
 c_p 第一类规范变换的常数, 710
D 相空间内的密度, 507
D 电位移, 25
D 守恒矢量, 磁单极, 149
D 简正化拉普拉斯-龙格-楞次矢量, 有界运动, 500
D 对应于欧拉角 ϕ 的转动矩阵, 172
E 系统总能量, 73, 87
 E_j 电动势, 61
 E' 常值总能量, 对称重陀螺的等效一维问题, 253
E 电场强度, 25
 \mathcal{E} 以 mc^2 单位表示的相对论动能, 373
 e 偏心率, 112, 114
 e 电子电荷, 128
 e_0, e_1, e_2, e_3 欧拉参量, 180
 \bullet 分量为 e_1, e_2, e_3 的矢量, 194
 $F(q, t)$ 任意可微函数, 24
 F 偏近点角, 双曲线运动, 148
 F, F_1, F_2, F_3, F_4 生成函数, 452, 454

F_j 微幅振荡中的策动力, 312, 316
 F_μ, F^μ 分别为协变矢量和逆变矢量的分量, 343
 $F_{\mu\nu}, F$ 电磁场张量, 695
F 力, 2
F 耗散系数 \mathcal{F}_{ij} 的方阵, 316
 \mathcal{F} 耗散函数, 28
 \mathcal{F} 对角形式耗散函数的系数, 314
 \mathcal{F}_{ij} 耗散函数的系数, 314
 $f(r), \mathbf{f}(r)$ 有心力场中的力, 量值的和矢量的, 87
 $f'(r)$ 等效一维势中力的量值, 91
 $f(u)$ 对称重陀螺问题中的函数, 257
 $f_i(q, t), f$ 点变换和相关列(或行)矩阵的函数, 458
 f_i 约束力, 19
G 万有引力常数, 119
 $G(q, p)$ 无限小正则变换的生成函数, 469
 G_i 场的总线动量的分量, 716
G 度规张量, 296
 g, \mathbf{g} 重力加速度, 210
 g_{ik} 度规张量的元素, 296
H 哈密顿函数, 72, 405
 H_0 未受扰动的哈密顿函数, 594
 ΔH 微扰哈密顿函数, 594
 H_1, H_2, H_3, \dots 附加于哈密顿函数的微扰, 613, 618
H 磁场强度, 25
1H 协变哈密顿函数, 428
 \mathcal{H} 哈密顿密度, 671
 h 能量函数, 雅可比积分, 72
 h 普朗克常数, 399, 574

\hbar 普朗克常数除以 2π , 476
 h 微扰参量, 有界运动的开普勒问题, 605
 h 单位质量的角动量, 642
 I 作用量, 作用量积分, 42
 I 强度, 通量密度, 125
 I 转动惯量, 230
 I_1, I_2, I_3 主转动惯量, 惯性张量的本征值, 233, 236
 I, I' 跟时间相关的线性谐振子的恰当不变量, 641, 642
 I_{jk} 转动惯量矩阵的元素, 或惯性张量的元素, 225
 \mathbf{I} 惯性张量, 225
 i 倾角, 561, 569
 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 笛卡儿坐标轴的单位矢量, 154
 $J(u)$ 伯特兰定理中的中间函数, 719
 J_n 彭加勒积分不变量, 478
 J_i 作用变量, 546, 550
 J_1, J_2, J_3 开普勒问题的非简并变换后的“作用”变量, 565
 J_ϕ, J_θ, J_r 开普勒问题的作用变量, 561
 \mathbf{J} 作用变量的矢量 (行或列矩阵), 618
 \mathbf{J}_0 未受扰动作用变量的矢量 (行或列矩阵), 618
 \mathbf{J} 耦对表述的反对称 $2n \times 2n$ 矩阵, 411
 j_μ 四维电流密度矢量, 357
 \mathbf{j}, j 电流密度, 25
 \mathbf{j} 整数下标矢量 (列或行矩阵), 553
 K 变换后的哈密顿函数, 卡密顿函数, 451
 K 相对论动能, 363

K , 四维明可夫斯基力矢量, 360
 \mathbf{K} 无限小纯洛伦兹变换的矩阵生成元, 351
 k 力常数, 平方反比力定律, 91
 k 力常数, 胡克定律, 96
 k 玻耳兹曼常数, 99
 k 角量子数, 574
 k 波数, 579
 \mathbf{k} 波数矢量, 579
 L 拉氏函数, 24, 25
 L 程函, 579
 L_0, L_1, L_2 拉氏函数的齐次函数分量, 72
 L_j 自感系数, 61
 $L_{\mu\nu}$ 明可夫斯基空间内洛伦兹变换的元素, 332
 \mathbf{L}, L 角动量, 3
 \mathbf{L} 洛伦兹变换的矩阵, 主要在明可夫斯基空间内, 332
 \mathcal{L} 拉氏密度, 652
 \mathcal{L}_0 自由场拉氏密度, 701
 l (轨道)角动量量值, 86
 l 对称陀螺重心到固定点的距离, 251
 l 单摆长度, 545, 601
 M 系统总质量, 7
 M 太阳或月球的质量, 266
 M 人造卫星的质量, 272
 M 地球质量, 609
 M_0, M_j, M_{jk} 动能系数, 29
 M_{jk} 互感系数, 61
 M_{ij} 场的总角动量的张量元, 669
 $M_{\mu\nu}$ 系统的四维总角动量张量, 371
 \mathbf{M} 磁偶极矩, 222, 274
 \mathbf{M}_i 无限小转动的基本矩阵生成元, 204

M 正则变换的雅可比矩阵, 相对于老变量的新变量, 465

M_{ij} 场的角动量的密度张量元, 669

$M_{\mu\nu\lambda}$ 四维三级张量, 角动量密度, 687

m 质量, 1

m 地球质量, 268

m 人造卫星质量, 609

m 磁量子数, 575

m_{ij} 动能的速度二次式中的系数, 289

$m_{\mu\nu}$ 单个质点的四维角动量张量, 376

N 系统内质点数, 15

$N_{\mu\nu}$ 相对论四维转矩张量, 376

N 转矩, 力矩, 3

N 单位矢量分量的反对称矩阵, 204

N_i x_1-x_4 平面内无限小转动的生成元矩阵, 501

n 独立坐标(自由度)数, 21

n 有心力幂定律的指数, 100, 104

n 有心力势定律的指数, 108

n 折射率, 149

n 主量子数, 574

n 单位矢量, 67

P 压强, 99

P_n n 阶勒让德多项式, 266

P_μ 系统的四维总动量, 364

P_μ 相对论场论中的积分量, 684

P 总线动量, 7

P 坐标的复 2×2 矩阵, 177

P 纯洛伦兹变换矩阵, 337

P 变换后动量的列(或行)矩阵, 459

p_j 正则或共轭动量, 65

p_ν 四维动量矢量, 362

p_k 动量空间内动量密度的展开式系数, 679

P, p 线动量, 1

P 共轭于单质点笛卡儿坐标的动量矢量, 410

P 正则动量的列(或行)矩阵, 408

P_j, P_μ 正则动量(仅在节 7-8 和节 7-9 内), 381

P 共轭于单质点笛卡儿坐标的动量矢量(仅在节 7-9 中), 392

Q 广义力, 21

Q 反应能量, 139, 369

Q_i, P_i 变换后的正则变量, 450

Q 与转动矩阵相关的么正 2×2 矩阵, 175

Q 与洛伦兹变换相关的么模 2×2 矩阵, 347

Q_θ, Q_ϕ, Q_ψ 与欧拉角转动相关的么正 2×2 矩阵, 182

q 电荷, 25

q_i 广义坐标, 15

q_0 参考振幅, 受扰动谐振子, 623

q_k 动量空间内场量展开式的系数, 679

q, p 对称重陀螺问题中的常数, 257

$\delta q, \delta p, \delta \eta_i$ 正则变量的无限小变化, 468

\dot{q} 广义坐标的列(或行)矩阵, 408

R 地球半径, 273

R 劳斯函数, 417

R 扰动函数, 600

R 太阳的引力半径, 607

R_0 迴转半径, 238

R , 电阻, 61
 R , 相对论能心的空间坐标, 378
 R_{μ} 守恒积分量, 664
 \mathbf{R} 位置矢量, 质心, 6
 \mathbf{R}, \mathbf{R} 本征矢量 (及其列或行矩阵), 187
 R 洛伦兹变换矩阵的空间转动部分, 334
 r 劳斯方法中的循环坐标数, 418
 r_0 圆形轨道的半径, 107
 r, s, t 与质点有关的下标, 367
 \mathbf{r} 位置矢量, 1
 S 广义力的冲量, 78
 S 哈密顿主函数, 522
 S_1, S_2, S_3 运动常数, 二维谐振子, 503
 dS 四维空间内的面元, 685
 S 反演矩阵, 170
 S 四维实空间内坐标的复 2×2 矩阵, 346
 s 劳斯方法中的循环坐标数, 417
 s 碰撞参量, 126
 s, ds 路径或弧长, 和它们的微分, 3
 s_j 广义坐标, 39
 T 动能, 4
 T 温度, 99
 T 近日点通过的时间, 117
 T (自由质点的) 相对论总能量, 363
 T_0, T_1, T_2 动能的齐次函数分量, 30
 T_{ij} 平衡态附近能量展开式中的常值系数, 290
 $T_{\mu\nu}$ 应力-能量张量元, 663
 $\hat{T}_{\mu\nu}$ 对称化应力-能量张量, 698

$T_{ijk\dots}$ 张量 T 的分量, 226
 \mathbf{T}_{μ} 流密度, 664
 T T_{ij} 动能系数的方阵, 292
 T L 中速度二次项系数的方阵, 408
 T 一般的 N 级张量, 226
 T 应力张量, 666
 \mathcal{T} 动能密度, 663
 t 时间, 1
 U 广义势, 24
 U, W \mathcal{U}, \mathcal{W} 的体积分, 676, 677
 \mathcal{U}, \mathcal{W} 场正则量的函数, 676
 u r 的倒数, 径向坐标, 102
 u 等于 $\cos \theta$, 对称重陀螺问题中的变量, 253
 u 波速, 577
 u, v, w 广义变量的独立函数, 473, 474
 u 四维速度, 世界速度, 357
 V 势, 势能, 4
 V 体积, 100
 V' 等效一维问题中的势, 91
 V_{ij} 关于平衡位置的势能系数, 289
 \mathbf{V}, V 质心的速度和速率, 137
 V V_{ij} 系数的方阵, 291
 \mathcal{V} 势能密度, 663
 \mathbf{v} 速度矢量, 1
 v 速率, 3
 W 功, 3
 W 哈密顿特性函数, f 526, 529
 W^* 用 (q, w) 表示的哈密顿特性函数, 633
 W_i 分离后的哈密顿特性函数, 536, 539
 \mathbf{W} 相对于坐标的正则动量的雅可比矩阵, 426

ω_i 角变量, 546, 551
 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 开普勒问题的变换后角变量, 566
 ω_0, J_0 未受扰动的作用角变量, 612
 \mathbf{w} 角变量矢量 (列或行矩阵), 552
 \mathbf{w}_0 未受扰动的角变量矢量 (列或行矩阵), 618
 X, Y, Z 或 X_1, X_2, X_3 本征矢的分量, 188
 X_{ν} 描述诺埃瑟定理中 x_{ν} 的变换所用的函数, 709
 \mathbf{X} 本征矢分量的方阵, 189
 x, y 对称重陀螺问题中的变量,

258
 x 轨道与圆轨道的偏差, $u - u_0$, 719
 $x_i = x_1, x_2, x_3$ 寻常空间内的笛卡儿坐标, 157
 $x_{\mu} = x_1, x_2, x_3, x_4$ 明可夫斯基空间内的笛卡儿坐标, 331
 $x_{\mu} = x_1, x_2, x_3, x_0$ 四维实空间内的坐标, 341
 \mathbf{x} 矢量的列或行矩阵, 163
 Y 微扰理论中的生成函数, 613
 Y 杨氏模量, 651
 Y_i 微扰生成函数的展开式函数, 613, 618
 Z, Z' 原子数, 128

希腊符号

α 变化路径的参量, 44, 45
 α 连续正则变换的参量, 491
 α 保守系中的常值能量 (主要在微扰理论中), 526, 614
 α, β 对称重陀螺问题中的常数, 254
 α, β, γ 方向余弦, 154
 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 凯瑞-克莱因参量, 175
 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ 微扰理论中能量的展开项, 614, 618
 α_i 共轭于循环坐标的常值动量, 449, 530
 α_i, β_i 哈密顿主函数生成的正则变量, 523
 α_i 哈密顿函数或能量的常数值, 529
 $\alpha_{\theta}, \alpha_{\phi}$ 分离常数, 都等于有心力问题中的总角动量, 539, 541

α_{ϕ} 共轭于 ϕ 的角动量, 541
 α_k, β_k 构成 \mathbf{a}_k 的实的和虚的列或行矩阵 ($q \cdot V.$), 293
 β 相对于圆轨道的简谐振荡中的参量, 109
 β v/c 之比值, 329
 β_i 哈密顿特性函数法中的积分常数, 530
 β 矢量比 v/c , 330
 β 积分常数的矢量 (列或行矩阵), 553
 Γ 迴磁比, 274
 γ 微幅振荡的频率 ω 乘以 i , 315
 γ 洛仑兹变换中的常数, 等于 $(1 - \beta^2)^{-1/2}$, 331
 γ 光子, 式 (7-109), 仅见于第 370 页
 γ 定压和定容比热之比, 659

γ_i 变换后的常值正则动量, 525
 γ α_i, β_i 正则变量的列(或行)矩阵, 595
 γ_μ 狄拉克矩阵, 693
 Δ 变分算符, 最小作用量原理, 434
 δ 无限小虚位移算符, 19
 δ 变分算符, 哈密顿原理, 46
 δ 一般无限小差分算符, 468, 704
 δ 某点处场量的无限小差分算符, 704
 δ 无限小正则变换下函数变化的无限小差分算符, 486
 $\delta()$ 狄拉克 δ -函数, 700
 δ_k 相因子, 300
 δ_{im} 克朗内克符号, 156
 δ 无限小纯洛伦兹变换的矩阵, 350
 e 偏心率(在第129页上)
 e 变换的无限小参量, 468
 e 微扰理论中的展开式参量, 613
 ϵ 无限小变化的参量, 谱埃瑟定理, 709
 ϵ_{ijk} 排列符号(列维-西维塔密度), 202
 ϵ 反对称无限小转动矩阵, 198
 $\xi()$ 变化路径函数, 654
 ξ_j 微幅振荡的简正坐标, 301
 ξ 简正坐标的列(或行)矩阵, 301
 ξ 变换后正则变量的列(或行)矩阵, 465
 $\eta()$ 变化路径函数, 44
 η_i 对于平衡位置的位移的广义坐标, 289
 $\eta(x, t), \eta(x_\mu), \eta(x_\nu)$ 场量, 652, 655

η 相对于平衡位置的 η_i 坐标的列或行矩阵, 293
 η 正则变量的列(或行)矩阵, 411
 Θ 质心系中的散射角, 126, 135
 Θ 规范变换的守恒流密度, 710
 θ, ϕ, ψ 欧拉角, 172
 θ 对称重陀螺的章动角, 251, 255
 θ 世界点进程的洛伦兹不变参量, 387
 θ' θ 坐标的积分常数, 椭圆轨道, 112
 θ_1 有限振幅的摆的参量, 601
 ϑ 实验室系内的散射角, 135
 π 耗散微幅振荡中的阻尼因子, 315
 k 简正化相对论力常数, 383
 κ 相对运动方向上的单位矢量, 349
 Λ 洛伦兹不变的拉氏函数, 387
 $\Lambda_{\mu\nu}$ 四维实空间内的洛伦兹变换的元素, 342
 $\Lambda_{\mu\nu}$ 四维实空间内的洛伦兹变换矩阵, 342
 λ 本征值, 187
 λ 展开式参量, 有限振幅的摆, 602
 λ 扩展后正则变换的标度参量, 452
 λ 波长, 579
 λ 约化波长, 583
 λ_i 拉格朗日待定乘子, 55
 λ 本征值的对角矩阵, 189
 μ 约化质量, 84
 μ 单位长度的质量, 651
 μ, μ_0 体质量密度, 659
 μ_0 克莱因-戈登方程中的常数

(质量), 688
 ν 频率, 315
 ν_i 哈密顿特性函数生成的 Q_i 的时间微商, 531
 ν_i, ν 作用角变量形式中的“频率”, 547, 551
 ν_0, ν_0 未受扰动的频率, 612
 π 动量密度, 671
 ρ, ρ_e 电荷密度, 25, 274
 ρ 散射中的约化质量比, 138, 139
 ρ, ρ_m 质量密度, 145, 225, 274
 ρ 场量的下标指数, 656
 ρ_i 稳定运动附近的微幅振荡中对于平衡位置的位移坐标, 420
 $d\rho$ 曲线位形空间内的路径长度元, 439
 ρ 分量为 ρ_1, ρ_2, ρ_3 , 确定惯性椭球的矢量, 237
 σ 密度的相对变化, 659
 $\sigma(\theta)$ 微分散射截面, 127
 σ_T 总散射截面, 130
 σ 泡利自旋矩阵“矢量”, 184
 σ_0 2×2 单位矩阵, 347
 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 泡利自旋矩阵, 183
 $\sigma_\mu = \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_0$ 泡利自旋矩阵的“四维矢量”, 347
 τ, τ_i 周期, 118
 τ 原时, 354
 Φ 偏转角, 134
 Φ 反冲角, 151
 Φ 正常正交变换的转动角度, 191
 Φ_i 与时间无关的微扰理论中的函数, 620
 ϕ 电磁标势, 26
 ϕ 进动角, 对称重陀螺, 251

ϕ 明可夫斯基空间内的虚转动角度, 333
 ϕ 光波的标量场, 579
 $\phi(q, Q)$ 作为 q 和 Q 的函数的正则动量 p , 479
 ϕ, ϕ^* 复标量场, 688
 ϕ 斯特克尔条件中的矩阵, 539
 Ψ 入射渐近线和近拱点方向之间的夹角, 128
 Ψ_{η_0} 诺埃瑟定理中描述 η_0 的变换时所用的函数, 709
 ψ 偏近点角, 118
 ψ 明可夫斯基空间内转动角度的实数部分, 333
 ψ 轨道矢径相对于近拱点的角度, 真近点角, 609
 ψ 波函数, 582
 $\phi(q, Q)$ 作为 q 和 Q 的函数的, 变换后的正则动量, 479
 ϕ, ϕ^\dagger 复狄拉克场量, 693
 Ω 进动角频率, 247
 Ω 升交点黄径, 569
 Ω 四维积分域, 705
 $d\Omega$ 立体角元, 126
 Ω 方向单位矢量, 126
 Ω 进动矢量, 248 附注
 $d\Omega$ 无限小转动的微分矢量, 199
 ω, ω_i 转动角速度, 角频率, 33
 ω, ω_k 微幅振荡的简正频率, 290
 ω 线性谐振子的角频率, 462
 ω 近日点角的宗量, 569
 ω 角速度矢量, 205
 ω 托马斯进动频率, 340
 ω_c 回旋或回转频率, 638
 ω_i, ω_l 拉摩频率, 275

其他特点的符号

0	具有零值元素的矩阵, 411	[,] 对易子, 李括号, 204
1	单位矩阵, 164	[,] 泊松括号, 471
1	单位并矢, 229	{,} 拉格朗日括号, 476
	标记对 θ (q. v.) 的微商, 387	$\frac{\delta}{\delta\psi}$ (对 ψ 的) 函数微商, 673
∇	梯度算符, 4	
\square	四维梯度算符, 358	
\square^2	达朗伯算符, 358	

[G e n e r a l I n f o r m a t i o n]

书名 = 经典力学 (第二版)

作者 = [美] H. 戈德斯坦

页数 = 759

SS号 = 10256831

出版日期 =