

一九九八年國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊決選研習營

理論模擬試題（一）

1998年5月5日 08:00-13:00

一、本試題共三大題，每大題五十分，總分一百五十分。

二、答卷時間五小時。

三、在指定的答案紙上作答。

四、在每題開始時請換用新頁。

五、在每一頁答題紙的頂端寫明：

- 題號
- 該題所用答題紙之頁碼
- 該題所用答題紙的總頁數

例(以第一題用了三頁紙為例)：

1 1/3

2 2/3

3 3/3

1998 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
決選研習營理論模擬考試(一)試題

※本試題共三大題，每大題五十分，總分一百五十分。

1、兩個電子間的萬有引力與靜電庫倫力的比值為 $\frac{1}{4.7 \times 10^{42}} \cong 10^{-42}$ 。這個數值與光穿過

一個質子所需的時間(約需 10^{-24} 秒)除以宇宙年齡(約兩百億年, 2×10^{10} 年)所得的比值($\cong 10^{-42}$)約略相等。由於後一個比值會隨著宇宙年齡的增長而變小, 因此有人懷疑萬有引力常數 G 是否也應該隨著宇宙年齡的增長而變小, 否則這兩個比值就無法相等了。現在利用一些已知的理論及實驗觀察的結果, 來探究這種推論是否正確? 若他們的想法正確, 則二十億年前(約是目前生物的原始祖先出現地球的時候)的 G 值, 約比目前的數值大了 10% 左右。在這種情況下, 從嚴密的理論考慮, 可得到下列結果:

(1) 由於 G 值增大, 使萬有引力增強, 故當時的太陽與地球的距離 r_{se} 比目前約縮小 10%。

(2) 由於重力增大, 太陽變成比較緻密, 內部溫度增高, 核融合加劇, 故當時的太陽表面溫度比目前高了約 1.4 倍。

(3) 太陽及地球的半徑 r_s 及 r_e , 雖隨 G 值變大而變小, 但變化程度甚微可予忽略。

另根據一些實驗觀察的結果:

(4) 太陽輻射至地球的輻射能量, 大約有 70% 穿過大氣層到達地表, 其餘被大氣層散射至太空中。假設大氣層的厚度比起地球的半徑小得很多, 因此可以忽略。

(5) 大氣層向地球輻射的能量, 大約有 95% 被地球表面吸收, 其餘反射回大氣層。

(6) 地球表面向外輻射的能量, 大約有 78% 被大氣層吸收, 其餘穿過大氣層散失到太空中。

(7) 太陽及地球均約可視為完全黑體。

根據這些資料: 試估計地球在二十億年前的地表溫度, 並據以判斷 G 值是否是一個普適性常數? 已知目前的太陽半徑為 $6.96 \times 10^8 m$, 太陽與地球之間的距離為 $1.50 \times 10^{11} m$, 以及太陽表面溫度為 $6000K$ 。

2、在一流動緩慢的河流中, 河水只能沖走細小泥沙, 而在急流的河流裡, 河水可沖走較大的石頭。石頭在河水的衝擊下會不斷地翻滾。假如河床是水平平坦的話, 水流的流速為 v , 並假定石頭是正立方體(每邊長 a , 密度 ρ , ρ 大於河水的密度 ρ'), 又河水衝擊石頭的衝力近似為 $\frac{1}{2} \rho' a^2 v^2$ 。

(a) 試求河水能沖走多大的石頭？

(b) 假如河水的流速增大 N 倍，試求能被河水沖走的石頭質量，可增為原來的幾倍？

3、(a) 靜止的正電荷均勻分布在一半徑為 R 的球形區域內，電荷密度為 ρ ，求距球心為 r 處的電位 $\phi(r)$ 。

(b) 在一很大塊的石墨堆的內部，有一些小粒狀的鈾輻射源均勻分布在一半徑為 R 的球形區域內。鈾分裂時會產生中子，由於石墨不會吸收中子(其功能在使中子減速)，因此中子可以流向各處。假定在石墨內部甲區域的中子密度較鄰近的乙區域高，則每單位時間內，中子由甲區流向乙區的數目會比由乙區流向甲區的數目多。對甲區而言，會有中子的淨流量，稱為擴散。以 \vec{J} 代表每單位時間，每單位面積的中子淨流量，其在 x 、 y 和 z 三個方向上的分量可寫為：

$$J_x = -D \frac{\partial N}{\partial x}, \quad J_y = -D \frac{\partial N}{\partial y}, \quad J_z = -D \frac{\partial N}{\partial z}$$

式中 N 為在 (x, y, z) 處的中子數密度， D 為擴散係數(若溫度不變，可視為常數)。若鈾輻射源每單位時間每單位體積產生的中子數為 S ，則

$$\oint \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int (S - \frac{\partial N}{\partial t}) dV$$

當中子的擴散達到穩定狀態時，求

(1) 距鈾輻射源區域中心為 r 處的中子數密度 $N(r)$ 。

(2) 承上題，在中心處($r=0$)和在邊緣處($r=R$)的中子數密度之比。

1998 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
 決選研習營理論模擬試題(一)參考答案

1、解：

從太陽表面輻射出去的總能量為 $4\pi r_s^2(\sigma T_s^4)$ ， T_s 為太陽表面的溫度。因此輻射至地球大氣層表面的總能量為 $\frac{4\pi r_s^2(\sigma T_s^4)}{4\pi r_{se}^2} \times \pi r_e^2$ ，此能量有 70% 穿過大氣層，射抵地球表面。設地球表面的平衡溫度為 T_e ，地球大氣層表面的平衡溫度為 T_a ，則大氣層的平衡溫度是由吸收下列的輻射能量：即 78% 的地球表面輻射能量；和 5% 被地球表面反射回來的自身輻射能量，這二者與它本身輻射出去的能量平衡所造成，即

$$4\pi r_e^2 \sigma T_e^4 \times 0.78 + 4\pi r_e^2 \sigma T_a^4 \times 0.05 = 2 \times 4\pi r_e^2 \sigma T_a^4 \quad \dots\dots\dots (1)$$

而地球表面的平衡溫度則由於吸收下列輻射能量：即 70% 的太陽輻射能量；大氣層表面向地球輻射能量的 95%，這二者與地球本身輻射向外的輻射能量，形成平衡所造成，即

$$\frac{4\pi r_s^2 \sigma T_s^4}{4\pi r_{se}^2} \pi r_e^2 \times 0.7 + 4\pi r_e^2 \sigma T_a^4 \times 0.95 = 4\pi r_e^2 \sigma T_e^4 \quad \dots\dots\dots (2)$$

由(1)及(2)式可得

$$T_e^4 = 0.282 \times \frac{r_s^2 T_s^4}{r_{se}^2} \quad \dots\dots\dots (3)$$

以目前的太陽半徑(6.96×10^8 公尺)、太陽與地球距離(1.50×10^{11} 公尺)以及太陽表面溫度($6000K$)代入，得到地球表面溫度約為 $298K$ ，即約 $25^\circ C$ 。但在二十億年前，太陽與地球距離約為目前的 0.9 倍，太陽表面溫度約為目前的 1.4 倍。因此，當時的溫度大約是 $\frac{1.4}{\sqrt{0.9}} \times 298 = 440K$ ，即約 $167^\circ C$ 。在這種溫度下，

地球上不可能有液態的水，因此，目前生物的原始祖先(生物學家已證實由水中發生)不可能存在，故 G 值不應該隨時間而變。

2、解：

(1) 設水的衝力 \vec{F} 垂直於正方形其中一面之面心，並通過正方體中心，方向沿河水流動方向。又設石頭質量為 m 、浮力為 B ， $m = \rho a^3$ ， $B = \rho' a^3 g$ 。在河水衝擊下，石頭繞著石頭邊緣 \overline{AC} (在河床上如下圖所示)翻轉，則

$$F \cdot \frac{a}{2} - (mg - B) \frac{a}{2} \geq 0$$

$$\text{即 } F \geq (mg - B) = (\rho - \rho') a^3 g$$

1998 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
 決選研習營理論模擬試題(一)參考答案

1、解：

從太陽表面輻射出去的總能量為 $4\pi r_s^2(\sigma T_s^4)$ ， T_s 為太陽表面的溫度。因此輻射至地球大氣層表面的總能量為 $\frac{4\pi r_s^2(\sigma T_s^4)}{4\pi r_{se}^2} \times \pi r_e^2$ ，此能量有 70% 穿過大氣層，射抵地球表面。設地球表面的平衡溫度為 T_e ，地球大氣層表面的平衡溫度為 T_a ，則大氣層的平衡溫度是由吸收下列的輻射能量：即 78% 的地球表面輻射能量；和 5% 被地球表面反射回來的自身輻射能量，這二者與它本身輻射出去的能量平衡所造成，即

$$4\pi r_e^2 \sigma T_e^4 \times 0.78 + 4\pi r_e^2 \sigma T_a^4 \times 0.05 = 2 \times 4\pi r_e^2 \sigma T_a^4 \quad \dots\dots\dots (1)$$

而地球表面的平衡溫度則由於吸收下列輻射能量：即 70% 的太陽輻射能量；大氣層表面向地球輻射能量的 95%，這二者與地球本身輻射向外的輻射能量，形成平衡所造成，即

$$\frac{4\pi r_s^2 \sigma T_s^4}{4\pi r_{se}^2} \pi r_e^2 \times 0.7 + 4\pi r_e^2 \sigma T_a^4 \times 0.95 = 4\pi r_e^2 \sigma T_e^4 \quad \dots\dots\dots (2)$$

由(1)及(2)式可得

$$T_e^4 = 0.282 \times \frac{r_s^2 T_s^4}{r_{se}^2} \quad \dots\dots\dots (3)$$

以目前的太陽半徑(6.96×10^8 公尺)、太陽與地球距離(1.50×10^{11} 公尺)以及太陽表面溫度($6000K$)代入，得到地球表面溫度約為 $298K$ ，即約 $25^\circ C$ 。但在二十億年前，太陽與地球距離約為目前的 0.9 倍，太陽表面溫度約為目前的 1.4 倍。因此，當時的溫度大約是 $\frac{1.4}{\sqrt{0.9}} \times 298 = 440K$ ，即約 $167^\circ C$ 。在這種溫度下，

地球上不可能有液態的水，因此，目前生物的原始祖先(生物學家已證實由水中發生)不可能存在，故 G 值不應該隨時間而變。

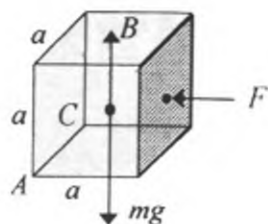
2、解：

(1) 設水的衝力 \vec{F} 垂直於正方形其中一面之面心，並通過正方體中心，方向沿河水流動方向。又設石頭質量為 m 、浮力為 B ， $m = \rho a^3$ ， $B = \rho' a^3 g$ 。在河水衝擊下，石頭繞著石頭邊緣 \overline{AC} (在河床上如下圖所示)翻轉，則

$$F \cdot \frac{a}{2} - (mg - B) \frac{a}{2} \geq 0$$

$$\text{即 } F \geq (mg - B) = (\rho - \rho') a^3 g$$

$$\begin{aligned} \therefore F &= \frac{1}{2} \rho' a^2 v^2 \\ \therefore \frac{1}{2} \rho' a^2 v^2 &\geq (\rho - \rho') a^3 g \\ a &\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho'}{\rho - \rho'} \cdot \frac{v^2}{g} \\ \Rightarrow a_{\max} &= \frac{1}{2} \frac{\rho'}{\rho - \rho'} \frac{v^2}{g} \end{aligned}$$



$$(2) \therefore a_{\max} \propto v^2$$

$$\therefore \text{相應的石頭質量 } M = \rho a_{\max}^3 = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\rho'}{\rho - \rho'} \right)^3 \cdot \frac{\rho}{g^3} \cdot v^6$$

$$M \propto v^6$$

$$\text{令 } v \rightarrow Nv$$

$$\text{則 } M \rightarrow N^6 M$$

故能被河水沖走的石頭重量增加為原來的 N^6 倍

3、解：

(a) 當 $r < R$ 時，

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left(\frac{4\pi}{3} r^3\right) \rho}{r^2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \\ \Rightarrow \phi(r) &= \phi(R) + \int_R^r -\vec{E} \cdot d\vec{r} = \phi(R) - \frac{\rho}{6\epsilon_0} (r^2 - R^2) \end{aligned}$$

當 $r \geq R$ 時，

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left(\frac{4\pi}{3} R^3\right) \rho}{r^2} = \left(\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0}\right) \frac{1}{r^2} \\ \Rightarrow \phi(r) &= \phi(\infty) + \int_{\infty}^r -\vec{E} \cdot d\vec{r} = \left(\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0}\right) \frac{1}{r} \end{aligned}$$

當 $r = R$ 時

$$\phi(R) - \frac{\rho}{6\epsilon_0} (r^2 - R^2) \Big|_{r=R} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r} \Big|_{r=R}$$

$$\Rightarrow \phi(R) = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0}$$

$$\therefore r \leq R \text{ 時 } \phi(r) = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2)$$

$$r \geq R \text{ 時 } \phi(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

(b)比較電場和熱擴散的方程式

$$E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z}, \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon} \int \rho dV$$
$$J_x = -D \frac{\partial N}{\partial x}, J_y = -D \frac{\partial N}{\partial y}, J_z = -D \frac{\partial N}{\partial z}, \oint \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int S dV$$

(穩定態時)

可看出： $\vec{E} \leftrightarrow \vec{J}$, $\phi \leftrightarrow DN$, $\frac{\rho}{\epsilon_0} \leftrightarrow S$

(1)由(a)可得：

當 $r \leq R$ 時 $N(r) = \frac{S}{6D}(3R^2 - r^2)$

當 $r \geq R$ 時 $N(r) = \left(\frac{SR^3}{3D}\right) \frac{1}{r}$

(2)在中心處， $r=0 \Rightarrow N(0) = \frac{SR^2}{2D}$

在邊緣處， $r=R \Rightarrow N(R) = \frac{SR^2}{3D}$

$$\Rightarrow \frac{N(0)}{N(R)} = \frac{3}{2}$$

一九九八年國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊決選研習營

理論模擬試題(二)

1998年5月7日 08:00-13:00

一、本試題共三大題，每大題五十分，總分一百五十分。

二、答卷時間五小時。

三、在指定的答案紙上作答。

四、在每題開始時請換用新頁。

五、在每一頁答題紙的頂端寫明：

- 題號
- 該題所用答題紙之頁碼
- 該題所用答題紙的總頁數

例(以第一題用了三頁紙為例)：1 1/3

2 2/3

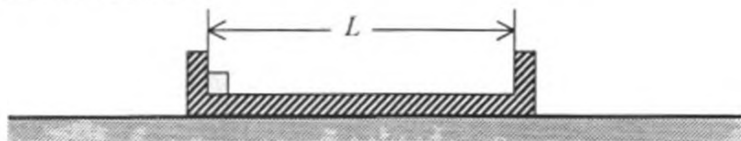
3 3/3

1998 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
 決選研習營理論模擬考試(二)試題

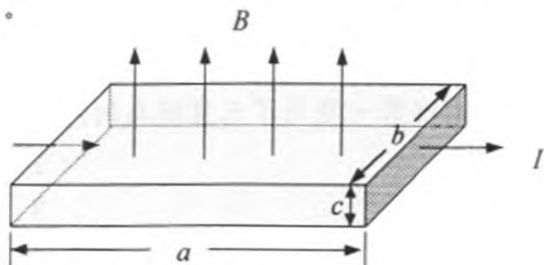
※本試題共三大題，每大題五十分，總分一百五十分。

1、如下圖所示，一具有 U 形凹槽之扁長木板被置放於水平光滑桌面上，凹槽內另放有一小木塊，倚靠左方槽邊。設小木塊之質量為 m ，木板之質量為 M ，凹槽寬度為 L ，小木塊與木板間之滑動摩擦係數為 \bar{C} ，小木塊之寬度遠小於 L 。現快速用力撥動小木塊一下，使其在凹槽中滑動，由於小木塊之初速夠大，故得以在木板凹槽中來回碰撞木板槽邊。設小木塊與木板槽邊之碰撞皆為正向彈性碰撞，碰撞 n_0 次後恰好停止在凹槽的中央位置，求：

- 自小木塊被撥動至停在木板中央時所經歷的時間。
- 在(a)中所求時間內，木板一共移動了多少距離？
- 在小木塊被撥動後，木板所能到達的最大速度。
- 在那兩次碰撞之間，木板所行距離為最大，並求出此距離。
- 在小木塊首次碰撞木板前，其後各相鄰兩次碰撞之間，以及最後一次碰撞後至小木塊停在木板中央，各區間木板所行距離的數學式，並證明這些距離的總和等於(b)中所求。



2、如下圖所示，一長方形的半導體(長為 a ，寬為 b ，厚為 c)，今將該棒二端(沿 a 邊方向)外加一電場 E ，有電流 I 沿 a 邊方向流動，忽略由 I 產生的磁場。在只有電場的情形下，半導體中自由電子的平均速度 v_e 正比於電場 E ，其比例係數 μ_e 稱為電子遷移率，即 $v_e = -\mu_e E$ 。在半導體中除了自由電子可傳遞電荷外，還有電洞(與電子所帶電量的量值相等，但電荷為正，其質量與電子可以不同)，其平均速度 $v_h = \mu_h E$ ， μ_h 是電洞遷移率。現在同時沿 c 邊方向，外加一均勻磁場 B ，結果在棒上沿 b 邊方向的兩端面之間會產生一新電場，此現象稱為霍爾效應(Hall Effect)。



假如長方形半導體只有電子載子，且已知下列數據：

$\mu_e = 7.8 \text{ m}^2/\text{V}\cdot\text{s}$ ，電子濃度 $n_e = 2.5 \times 10^{22} \text{ m}^{-3}$ ， $I = 1.0 \text{ A}$ ， $B = 0.10 \text{ T}$ ，

$b = 1.2 \text{ cm}$ ， $c = 1.0 \text{ mm}$ ，電子電量 $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ 。

(a) 試求棒中總電場的大小和方向。

(b) 計算沿 b 邊方向，在棒上相對二端面間的電位差。

(c) 若電流與磁場皆隨時間作週期性的變化，其關係式為 $I = I_0 \sin \omega t$ ， $B = B_0 \sin(\omega t + \delta)$ ，式中 δ 為相位常數，試求此時沿 b 邊方向，在棒上相對二端面間的電位差所含直流部分的表達式。

(d) 假如長方形棒有二種載流子，一為電子，另一為電洞，其遷移率分別為 $\mu_e = 3200 \text{ cm}^2/\text{V}\cdot\text{s}$ ， $\mu_h = 1400 \text{ cm}^2/\text{V}\cdot\text{s}$ ，今該樣品沒有顯現出霍爾效應，則電子所載的電流佔整個電流的百分比是多少？

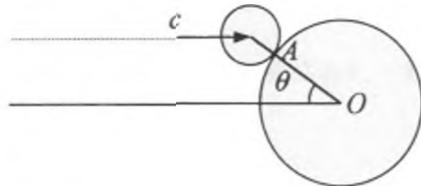
3、一均勻分布的定溫理想氣體，每單位體積內有 n 個呈電中性的分子，每一分子都是半徑為 R 、質量為 M 的硬球，分子間之碰撞均屬彈性。若以 L 表示一分子在相鄰兩次碰撞間所走的路徑長(即自由路程)，並假設每一分子的热擾動速率都為 C ，試回答以下問題：

(a) 每一分子之平均自由路程 $\lambda = \langle L \rangle$ 為何？

(b) 每一分子之自由路程平方的平均 $\langle L^2 \rangle$ 為何？

若此氣體中除上述電中性分子外，另含有微量的離子。假設每一離子可視為是半徑為 r 、質量為 m 、帶電量為 q 的硬球，且離子對分子或其他離子的電效應可忽略，所有碰撞均為彈性。考慮一靜止於座標原點的氣體分子，且暫只考慮碰撞前速度都同為 \vec{c} 的離子，試回答以下三問題：

(c) 設以 θ 表示離子速度 \vec{c} 與碰撞時兩球連心線(即由碰撞接觸點 A 指向原點 O) 間的夾角(如下圖)，則當離子撞擊分子時，夾角在 θ 到 $\theta + d\theta$ 之機率 dP 為何？



(d) 以 w 代表碰撞後離子速度沿原來運動方向的分量，試證其平均 $\langle w \rangle$ 為

$$\langle w \rangle = \frac{m}{m+M} c.$$

(注意：兩硬球碰撞時，只在沿連心線的方向上有作用力)

(e) 若氣體分子並非靜止，以 \vec{C} 表示此分子在碰撞前之速度，則前一小題之公式將有何改變？

將此氣體置於均勻電場 $\vec{E} = E\vec{e}_x$ 中，則離子在每段自由路程中，受電場作用而出現的漂移速度 $\vec{u} = u\vec{e}_x$ 。假設 u 遠小於 c ，為簡單計，以下假設所有離子或分子的热擾動速率，在達熱平衡時都為單一值。試就下述兩種不同情況，回答問題：

- (f) 設離子除帶有電荷外，與分子完全相同，即 $r = R, m = M$ ，且離子與分子之熱擾動速率相同，即 $c = C$ 。離子與分子因熱運動而分別有的速度 \vec{c} 與 \vec{C} ，其分布穩定不變，不因碰撞而改變，即氣體一直處於熱平衡狀態。試求此氣體在電場 \vec{E} 的作用下，每一個離子在平行於電場方向上的平均漂移速率 $\langle u \rangle$ 。
- (g) 若離子可視為點電荷(例如電子)，並設 $m \ll M, c \gg u \gg C$ ，則每次彈性碰撞時，離子轉移給分子的動能，與離子碰撞前動能的比值，為一固定的分數 α ， $\alpha = 2m/M \ll 1$ 。此離子在兩次碰撞間，在電場作用下增加的動能，因需經歷很多次碰撞才能全部轉移給分子，故其動能與速度最初會持續增加，直到每次碰撞損失的動能 $\alpha m(\vec{c} + \vec{u})^2/2$ ，其平均值等於在電場作用下前進 λ (即平均自由路程) 所增加的動能，才能達成熱平衡穩定態。將此氣體置於電場 \vec{E} 下，則達穩定態時，每一個離子在平行於電場方向上的平均漂移速率 $\langle u \rangle$ 大小為何？

1998 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
 決選研習營理論模擬試題(二)參考答案

1、解：

(a)在慣性座標中小木塊之加速度為 μg ，木板之加速度為 $a' = \frac{\mu g m}{M}$ ，此二加速度方向永遠相反，因為摩擦力對小木塊及木板作用力永遠相反，因此小木塊對木板之加速度量值為

$$a = \mu g + \mu g \frac{m}{M} = \frac{(M+m)}{M} \mu g \dots\dots\dots(1)$$

在木板上觀察小木塊其加速度的量值永遠為 $(\frac{M+m}{M})\mu g$ ，方向永遠與其運動方向相反，所以可以看成小木塊永遠做等減速運動。

設小木塊對木板之初速為 v ，則

$$\begin{aligned} v - 0 &= at \\ \therefore t &= \frac{v}{a} \dots\dots\dots(2) \end{aligned}$$

又由等加速運動公式

$$\begin{aligned} v_f^2 - v_i^2 &= -2as \\ v_i &= v \quad v_f = 0 \quad s = (n_0 + \frac{1}{2})L \\ \therefore v &= \left[2(\frac{M+m}{M})\mu g(n_0 + \frac{1}{2})L \right]^{1/2} \dots\dots\dots(3) \end{aligned}$$

將(3)式代入(2)式，得

$$\begin{aligned} t &= \left(\frac{M}{m+M} \right) \frac{1}{\mu g} \left[2(\frac{M+m}{M})\mu g(n_0 + \frac{1}{2})L \right]^{1/2} \\ &= \left[\frac{M}{(M+m)\mu g} (2n_0 + 1)L \right]^{1/2} \dots\dots\dots(4) \end{aligned}$$

(b)取木板中央為原點，設起始時質心座標為 x_c ，則由質心定義

$$\begin{aligned} -m \frac{L}{2} + 0 &= (m+M)x_c \\ \therefore x_c &= -\frac{mL}{2(m+M)} \dots\dots\dots(5) \end{aligned}$$

亦即起始時質心位置在木板中央左方 $\frac{mL}{2(m+M)}$ 處。由於系統不受外力，所

以質心做等速運動，設木板運動之距離為 d ，則

$$\frac{mL}{2(m+M)} + d = v_c t$$

其中 v_c 為質心之速度， t 為(a)中所求時間

$$\therefore d = v_c t - \frac{mL}{2(m+M)} \dots\dots\dots (6)$$

由動量守恆得

$$v_c = \frac{mv}{(m+M)} \dots\dots\dots (7)$$

將(4)及(7)式代入(6)式，得

$$\begin{aligned} d &= \frac{m}{(m+M)} \left[\frac{(M+m)}{M} \mu g (2n_0 + 1)L \right]^{1/2} \cdot \left[\frac{M}{(M+m)} \frac{l}{\mu g} (2n_0 + 1)L \right]^{1/2} \\ &\quad - \frac{mL}{2(m+M)} = \frac{mL}{m+M} \left[(2n_0 + 1) - \frac{1}{2} \right] \\ &= \frac{mL}{(m+M)} \left(2n_0 + \frac{1}{2} \right) \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

(c)先求發生第 n 次碰撞之時間，其中 $n \leq n_0$ ，由等加速運動公式

$$s = vt - \frac{1}{2} at^2 = nL \dots\dots\dots (9)$$

$$t^2 - \frac{2v}{a} t + \frac{2nL}{a} = 0$$

得 $t_n = \frac{l}{a} \left[v \pm \sqrt{v^2 - 2anL} \right]$

$$\because t_n < \frac{v}{a} \quad \therefore \text{必須取(-)號}$$

$$\therefore t_n = \frac{l}{a} \left[v - \sqrt{v^2 - 2anL} \right] \dots\dots\dots (10)$$

$$\text{或 } v - at_n = \sqrt{v^2 - 2anL} \dots\dots\dots (11)$$

又因 $v^2 = 2a(n_0 + \frac{1}{2})L$ ，所以在第 n 次碰撞前瞬間，小木塊對木板之速度 v_n

為

$$v_n = v - at_n = \left[2a(n_0 + \frac{1}{2} - n)L \right]^{1/2} \dots\dots\dots (12)$$

以下分成 n 為奇數、偶數兩種情況來考慮：

(i) n 為奇數，此種情形是小木塊追撞木板，設碰撞前瞬間木板之速度為 \overline{V}_n ，

則由動量守恆，

$$M\overline{V}_n + m(\overline{V}_n + v_n) = mv \dots\dots\dots (13)$$

由(13)式得

$$\overline{V}_n = \frac{m(v - v_n)}{(m+M)} = \frac{m}{(m+M)} \left[v - \sqrt{2a(n_0 + \frac{1}{2} - n)L} \right] \dots\dots (14)$$

設碰撞後木板之速度為 \overline{V}_n' ，則因是彈性碰撞， v_n 反向，故

$$M\bar{V}'_n + m(\bar{V}'_n - v_n) = mv \dots\dots\dots (15)$$

由(15)式得

$$\bar{V}'_n = \frac{m}{(M+m)} \left[v + \sqrt{2a(n_0 + \frac{1}{2} - n)L} \right] \dots\dots\dots (16)$$

(ii) n 為偶數，此種情形是小木塊回頭撞擊木板，利用(13)式至(16)式相似之推導得

$$\bar{V}'_n = \frac{m}{(M+m)} \left[v + \sqrt{2a(n_0 + \frac{1}{2} - n)L} \right] \dots\dots\dots (17)$$

$$\bar{V}'_n = \frac{m}{(M+m)} \left[v - \sqrt{2a(n_0 + \frac{1}{2} - n)L} \right] \dots\dots\dots (18)$$

綜合(14)、(16)、(17)、(18)四式可看出當 $n=1$ 時， \bar{V}'_n 為最大，亦即在第一次追撞後瞬間木板之速度 $V'_1 = \frac{m}{m+M} \left[v + \sqrt{2a(n_0 - \frac{1}{2})L} \right]$ 為最大。將(1)式之 a 及(3)式之 v 代入即為所求。

在第一次追撞後，小木塊回頭，摩擦力使木板減速，至第二次碰撞前瞬間減至 \bar{V}'_2 ，碰撞後減至 \bar{V}'_2 ，然後開始加速至速度為 \bar{V}'_3 發生第三次碰撞，速度又增加為 \bar{V}'_3 ，依此類推，木板依此加速、減速，至 $n=n_0$ 時，如 n_0 為奇數，則最後一次碰撞後，木板速度為 V'_{n_0} 。

$$V'_{n_0} = \left(\frac{m}{m+M} \right) \left[v + \sqrt{aL} \right] \dots\dots\dots (19)$$

當小木塊運動至木板中央時，木板之速度為

$$\bar{V}'_f = V'_{n_0} - a't \dots\dots\dots (20)$$

其中 a' 為木板之加速度， t 為小木塊對木板運動 $\frac{L}{2}$ 之時間。

$$a' = \frac{\mu mg}{M}$$

$$\frac{L}{2} = v_{n_0}t - \frac{1}{2}at^2 \dots\dots\dots (21)$$

由(12)式得 $v_{n_0} = \sqrt{aL}$ ，所以

$$t^2 - \frac{2\sqrt{aL}}{a}t + \frac{L}{a} = 0 \dots\dots\dots (22)$$

解(22)式得 $t = \sqrt{\frac{L}{a}}$ ，將所得 t 及 a' 代入(20)式，得

$$\bar{V}'_f = V'_{n_0} - a'\sqrt{\frac{L}{a}} = \frac{m}{m+M} \left[v + \sqrt{aL} \right] - \frac{\mu mg}{M} \sqrt{\frac{L}{a}} = \frac{mv}{m+M} = v_c$$

故木板之末速度為 v_c 。同理，如 n_0 為偶數，

$$\overline{V}_{n0}' = \frac{m}{m+M}(v - \sqrt{La})$$

但此後，木板被加速

$$\overline{V}_f = \overline{V}_{n0}' + a't = \frac{m}{m+M}v = v_c$$

故其末速亦為 v_c ，因此無論碰撞次數為奇數或偶數，木板之末速均可證明為 v_c ，符合動量守恆的結果。

(d) 因木板以 a' 的量值做等加速或等減速運動，依等加速運動公式，木板所行

距離為 $\frac{|V_f^2 - V_i^2|}{2a'}$ ，其中 V_f 及 V_i 分別代表其末速及起始速度。因此在第 n 次

及 $(n+1)$ 次碰撞之間木板所行距離為 $d_{n,n+1}$ ，

$$d_{n,n+1} = \frac{|V_n'^2 - V_{n+1}'^2|}{2a'} \dots\dots\dots (23)$$

由(14)，(16)，(17)，(18)式得

$$d_{n,n+1} = \frac{1}{2a'} \left(\frac{m}{m+M}\right)^2 \{2v\sqrt{2aL}[\sqrt{n_0 + \frac{1}{2} - n} - \sqrt{n_0 + \frac{1}{2} - n - 1}] \pm 2aL\} \dots (24)$$

其中(+)號為 n 為奇數的情形，(-)號為 n 為偶數的情形。

設 $n_0 + \frac{1}{2} \equiv n_0'$ ；今證明 $[\sqrt{n_0' - n} - \sqrt{n_0' - (n+1)}]$ 對 n 是遞增的。

$$\text{令 } r_n \equiv [\sqrt{n_0' - n} - \sqrt{n_0' - (n+1)}]$$

$$r_{n+1} \equiv [\sqrt{n_0' - (n+1)} - \sqrt{n_0' - (n+2)}]$$

$$r_{n+1} - r_n = 2\sqrt{n_0' - (n+1)} - [\sqrt{n_0' - n} + \sqrt{n_0' - (n+2)}]$$

$$\text{令 } A \equiv 2\sqrt{n_0' - (n+1)}, B \equiv [\sqrt{n_0' - n} + \sqrt{n_0' - (n+2)}]; A, B > 0$$

$$\begin{aligned} A^2 - B^2 &= 4[n_0' - (n+1)] - [(n_0' - n) + n_0' - (n+2) + 2\sqrt{n_0' - n} \sqrt{n_0' - (n+2)}] \\ &= 2[n_0' - (n+1)] - 2\sqrt{(n_0' - n)} \sqrt{n_0' - (n+2)} \\ &= (n_0' - n) + [n_0' - (n+2)] - 2\sqrt{(n_0' - n)} \sqrt{n_0' - (n+2)} \\ &= [\sqrt{n_0' - n} - \sqrt{n_0' - (n+2)}]^2 > 0 \end{aligned}$$

$$\therefore A > B; \text{ 亦即 } r_{n+1} > r_n$$

因此 $d_{n,n+1}$ 是 $n = n_0 - 1$ 時，也就是最後兩次碰撞之間木板運動距離最大。

$$d_{n_0-1, n_0} = \frac{1}{2a'} \left(\frac{m}{m+M}\right)^2 [2v\sqrt{2aL}(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}) \pm 2aL] \dots (25)$$

將 a' 、 v 、 a 代入即為所求。

(e) 各區間木板所行距離之總和為

$$d_T = \frac{1}{2a'} [V_1^2 + |V_1'^2 - V_2^2| + |V_2'^2 - V_3^2| + \dots + |V_{n_0}'^2 - v_c^2|] \dots\dots (26)$$

因 $V_1' > V_2$ 、 $V_3 > V_2'$... 依此類推

$$d_T = \frac{1}{2a'} [(V_1^2 + V_1'^2) - (V_2^2 + V_2'^2) + (V_3^2 + V_3'^2) + \dots \pm (V_{n_0}^2 + V_{n_0}'^2) \mp v_c^2] \dots (27)$$

在(27)式中符號的選擇如下：

當 n_0 為奇數時，最後兩項之符號為 $+(V_{n_0}^2 + V_{n_0}'^2) - v_c^2$

當 n_0 為偶數時，最後兩項之符號為 $-(V_{n_0}^2 + V_{n_0}'^2) + v_c^2$

由(14)、(16)、(17)、(18)四式可得

$$(\overline{V_n}^2 + \overline{V_n}'^2) = \left(\frac{m}{m+M}\right)^2 [v^2 + 2aL(n_0 + \frac{1}{2} - n)] \dots (28)$$

將(28)式代入(27)式，考慮 n_0 為奇數或偶數兩種情況：

(i) n_0 為奇數：

$$\begin{aligned} d_T &= \frac{1}{2a'} \left\{ \left(\frac{m}{m+M}\right)^2 [(2+4+6+\dots n_0 - 1) - (1+3+5+\dots n_0)] 4aL \right. \\ &\quad \left. + 2\left(\frac{m}{m+M}\right)^2 [v^2 + 2aL(n_0 + \frac{1}{2})] - v_c^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2a'} \left\{ \left(\frac{m}{m+M}\right)^2 \left[\frac{2(n_0 - 1)}{2} + 1\right] 2aL + v_c^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2a'} \left\{ \left(\frac{m}{m+M}\right)^2 (2n_0 aL) + v_c^2 \right\} \dots (29) \end{aligned}$$

(ii) n_0 為偶數：

$$\begin{aligned} d_T &= \frac{1}{2a'} \left\{ \left(\frac{m}{m+M}\right)^2 [(2+4+6+\dots n_0) - (1+3+5+\dots n_0 - 1)] 4aL + v_c^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2a'} \left\{ \left(\frac{m}{m+M}\right)^2 \left(\frac{n_0}{2} 4aL\right) + v_c^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2a'} \left\{ \left(\frac{m}{m+M}\right)^2 2n_0 aL + v_c^2 \right\} \dots (30) \end{aligned}$$

因此無論 n_0 為奇數或偶數，(29)式及(30)式之形式均相同。

將(29)式(30)式化簡，利用(3)式及(7)式，

$$\begin{aligned} \therefore d_T &= \frac{1}{2a'} \left(\frac{m}{m+M}\right)^2 (2aLn_0 + v^2) \\ &= \frac{1}{2a'} \left(\frac{m}{m+M}\right)^2 [(4n_0 + 1)aL] \end{aligned}$$

$$\text{又因 } \frac{a}{a'} = \frac{(m+M)}{m}$$

$$\therefore d_T = \left(\frac{m}{m+M}\right) (2n_0 + \frac{1}{2}) L \dots (31)$$

(31)式之結果與(8)式相同，故得證。

2、(a) 設 S 為棒之橫截面積，即 $S = bc$ 。

$$\therefore I = jS = n_e e v_e (bc), \text{ 式中 } j \text{ 是電流密度，}$$

$$\therefore v_e = \frac{I}{n_e e b c} = \frac{1.0}{2.5 \times 10^{22} \times 1.6 \times 10^{-19} \times 1.2 \times 10^{-2} \times 1.0 \times 10^{-3}} = 20.8 \text{ m/s}$$

電場在電流流動方向之分量

$$E_{\parallel} = \frac{v_e}{\mu_e} = \frac{20.8}{7.8} = 2.67 \text{ V/m}$$

電子在磁場中運動時，會受到勞侖茲力的作用，而累積在棒上沿 b 邊方向上的一個端面，因此形成新電場。在穩定狀態時，此電場對電子的作用力為勞侖茲力所平衡，所以沿 b 邊方向的電場分量為

$$E_{\perp} = v_e B = 20.83 \times 0.10 = 2.08 \text{ V/m}$$

總電場之大小 $E = \sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\perp}^2} = \sqrt{(2.67)^2 + (2.08)^2} = 3.38 \text{ V/m}$

$$\tan \theta = \frac{E_{\perp}}{E_{\parallel}} = \frac{2.08}{2.67} = 0.779 \Rightarrow \theta = 37.9^\circ$$

θ 為總電場與電流方向 (a 邊方向) 之夾角。

(b) 沿 b 邊方向，棒上兩端面之間的電位差為

$$V_H = E_{\perp} b = 2.08 \times (1.2 \times 10^{-2}) = 2.50 \times 10^{-2} \text{ V}$$

(c) 電位差 V_H 與時間的關係式如下：

$$\begin{aligned} V_H = E_{\perp} b &= (v_e B) b = \frac{I B b}{n_e e b c} = \frac{I_o B_o}{n_e e c} \sin \omega t \sin(\omega t + \delta) \\ &= \frac{I_o B_o}{2 n_e e c} [\cos \delta - \cos(2\omega t + \delta)] \end{aligned}$$

$$V_H \text{ 之直流部分為 } \frac{I_o B_o}{2 n_e e c} \cos \delta。$$

(d) 在磁場作用下，電子及電洞所受到的洛侖茲力分別為

$$F_e = -e v_e B, \quad F_h = e v_h B$$

即所承受的橫向電場強度分別為

$$\frac{F_e}{-e} = v_e B, \quad \frac{F_h}{e} = v_h B。$$

$\therefore v_e = -\mu_e E, v_h = \mu_h E, \therefore$ 沿著 b 邊方向，電子和電洞所獲得的橫向速度分別為

$$v_{e\perp} = -\mu_e \left(\frac{F_e}{-e} \right) = -\mu_e v_e B = -\mu_e (-\mu_e E) B = \mu_e^2 E B$$

同理可得 $v_{h\perp} = \mu_h^2 E B$

沿著 b 邊方向，相應的電流密度 $J' = e n_h v_{h\perp} - e n_e v_{e\perp} = e B E (n_h \mu_h^2 - n_e \mu_e^2)$

\therefore 沒有霍爾效應， $\therefore J' = 0 \Rightarrow n_h \mu_h^2 = n_e \mu_e^2$

n_e 及 n_h 分別為電子和電洞的濃度，沿 a 邊方向的總電流密度為

$$J = e(\mu_h n_h + n_e \mu_e) E$$

電子對 I 之貢獻的百分比為

$$\frac{\mu_e n_e}{(\mu_e n_e + n_h \mu_h)} \times 100\% = \left(1 + \frac{\mu_h n_h}{n_e \mu_e}\right)^{-1} \times 100\% = \left(1 + \frac{\mu_e}{\mu_h}\right)^{-1} \times 100\%$$

$$= \left(1 + \frac{3200}{1400}\right)^{-1} \times 100\% = \frac{7}{23} \times 100\% = 30.43\%$$

3、解：

考慮以半徑為 r 的硬球 a ，與半徑為 R 的分子硬球 b 做彈性碰撞，則其碰撞截面為

$$\sigma = \pi(R+r)^2 \dots\dots\dots (1)$$

(a) 當一 a 球穿行於由硬球 b 組成的氣體時，設氣體分子 b 球為靜止不動，則 a 球在 dt 的時間內，以相對速度 U 所走的路徑長為 $dx = Udt$ 。因 a 球與 b 球之速率均為 C ，當兩球速度之夾角為 θ 時， U 為

$$U = \sqrt{C^2 + C^2 - 2C^2 \cos\theta} = 2C \sin \frac{\theta}{2} \dots\dots\dots (2)$$

因 a 球與 b 球之速度間無關聯，速度夾角為 θ 之機率與立體角 $d\Omega$ 成比例。故在 dt 的時間內， a 球所走的路徑長 $dx = Udt$ 的平均為

$$\langle dx \rangle = \langle U \rangle dt,$$

$$\langle U \rangle = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega U = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \cdot 2C \sin \frac{\theta}{2} = \frac{4C}{3} \dots\dots\dots (3)$$

在 dt 的時間內碰撞的次數 dN ，等於所有球心位於橫截面為 σ 、軸長為 $\langle dx \rangle$ 的圓柱體內的 b 球總數。因每單位體積內有 n 個 b 球，故

$$dN = n\sigma \langle dx \rangle = \frac{4}{3} n\sigma C dt \dots\dots\dots (4)$$

每次碰撞平均歷時為 dt/dN ，此時間乘以速率 C 即為平均自由行程 λ ：

$$\lambda = C \frac{dt}{dN} = \frac{3}{4n\sigma} = \frac{3}{4\pi n(R+r)^2} \dots\dots\dots (5)$$

於上式中令 $r = R$ ，即為每一氣體分子之平均自由行程。

(b) 設 $P(t)$ 為 a 球於前次碰撞後，隔一段時間 t 仍未與 b 球發生碰撞的機率，則 $P(0) = 1$ ，而 a 球在 t 到 $t + dt$ 的時間內，與 b 球發生碰撞之機率為 $P(t) - P(t + dt) = -dP(t)$ ，此亦為 a 球之自由行程 L 落在 Ct 到 $C(t + dt)$ 之間的機率。又此機率應等於隔時間 t 仍無碰撞的機率 $P(t)$ ，乘以在 dt 時間內發生碰撞的機率 $C dt/\lambda$ ，故得

$$-dP(t) = P(t) \frac{C dt}{\lambda} \Rightarrow P(t) = e^{-\frac{C}{\lambda} t} \dots\dots\dots (6)$$

故自由路程 $L = Ct$ 的平方，平均為

$$\langle L^2 \rangle = \int_0^\infty -L^2 dP(t) = \int_0^\infty dt C^2 t^2 \frac{C}{\lambda} = \lambda^2 \int_0^\infty dx x^2 e^{-x} = 2\lambda^2 \dots\dots\dots (7)$$

(c) 碰撞前離子之速度均為 \bar{c} 。設由碰撞點 A 指向原點的單位向量為 \bar{n} ，則 \bar{c} 與

\bar{n} 間的夾角為 θ 。分子球表面 θ 到 $\theta+d\theta$ 間的環帶面積為 $2\pi R^2 \sin\theta d\theta$ 。離子與分子球之碰撞點 A 在此環帶的機率 dP ，正比於此環帶面積（其法線方向為 \bar{n} ）垂直於入射方向 \bar{c} 的截面積，即正比於 $2\pi R^2 \sin\theta d\theta \cdot \cos\theta$ 。因能發生碰撞的夾角最大為 $\pi/2$ ，故機率 dP 為

$$dP = \frac{\sin\theta \cos\theta d\theta}{\int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta d\theta} = 2 \sin\theta \cos\theta d\theta \dots\dots\dots (8)$$

(d)同(c)小題，定義 \bar{c} 、 \bar{n} 、 θ 與 dP 。設碰撞後離子之速度為 \bar{v} ， $v_n = \bar{v} \cdot \bar{n}$ ，分子之速度為 \bar{V} 。因碰撞時，沿球之切面無作用力，離子與分子沿切面之速度分量不變，即 $\bar{v} = v_n \bar{n} + (\bar{c} - c \cos\theta \bar{n})$ ， $\bar{V} = V \bar{n}$ 。由動量與動能守恆，得下列關係式：

$$m(c \cos\theta - v_n) = MV, \dots\dots\dots (9)$$

$$\frac{1}{2} m \{ (c \cos\theta)^2 - v_n^2 \} = \frac{1}{2} MV^2, \dots\dots\dots (10)$$

以式(9)除式(10)得

$$c \cos\theta + v_n = V \Rightarrow v_n = \frac{m-M}{m+M} c \cos\theta. \dots\dots\dots (11)$$

故碰撞後離子速度 $\bar{v} = v_n \bar{n} + (\bar{c} - c \cos\theta \bar{n})$ 沿原來運動方向 \bar{c} 的分量 w 為

$$w = \frac{\bar{v} \cdot \bar{c}}{c} = v_n \cos\theta + c \sin^2\theta = c \left(\frac{m-M}{m+M} \cos^2\theta + \sin^2\theta \right) \dots\dots (12)$$

利用式(8)之機率 dP 得 w 之平均為

$$\begin{aligned} \langle w \rangle &= c \int_0^{\pi/2} \left(\frac{m-M}{m+M} \cos^2\theta + \sin^2\theta \right) 2 \sin\theta \cos\theta d\theta \\ &= \frac{m}{m+M} c. \end{aligned} \dots\dots (13)$$

由式(13)得離子在每次碰撞後，沿原來之運動方向速度的損失平均為

$$\Delta c = c - \langle w \rangle = \frac{M}{m+M} c. \dots\dots\dots (14)$$

(e)因分子於碰撞前為等速度運動，故可設想前小題所使用的是以等速度 \bar{C} 移動的慣性座標，因此分子於碰撞前可視為靜止於座標原點，只要將前小題中之速度改為相對於 \bar{C} 的速度，則所有結果均成立。故式(13)、式(14)變為

$$\langle \bar{w} \rangle = \frac{m}{m+M} (\bar{c} - \bar{C}). \dots\dots\dots (15)$$

$$\Delta \bar{c} = (\bar{c} - \bar{C}) - \langle \bar{w} \rangle = \frac{M}{m+M} (\bar{c} - \bar{C}). \dots\dots\dots (16)$$

(f)於均勻電場 $\vec{E} = E \vec{e}_x$ 中，離子在自由路程中受電場作用，會在熱擾動速度 \bar{c} 外，另出現漂移速度 $\vec{u} = u \vec{e}_x$ ，其速度為 $\bar{c} + \vec{u}$ 。故由式(16)，離子在每次碰撞後，沿原來之運動方向的速度損失平均為

$$\Delta \vec{c} = \frac{M}{m+M}(\vec{c} + \vec{u} - \vec{C}). \quad (17)$$

欲求取上式在熱平衡下對各種碰撞速度的平均，只需考慮速度的角度分布（速率大小為單一值），因 $\langle \vec{c} \rangle = \langle \vec{C} \rangle = 0$ ，得

$$\langle \Delta \vec{c} \rangle = \frac{M}{m+M} \langle \vec{c} + \vec{u} - \vec{C} \rangle = \frac{M}{m+M} \langle u \rangle \vec{e}_x. \quad (18)$$

因離子與氣體分子間之碰撞頻率為 U/λ ， U 為相對速率 $|\vec{c} - \vec{C}|$ 的平均， λ 為離子之平均自由路程，故沿運動方向離子每單位時間損失之動量為

$$\left\langle \frac{d\vec{p}}{dt} \right\rangle = \frac{U}{\lambda} \cdot m \langle \Delta \vec{c} \rangle = \frac{U}{\lambda} \cdot \frac{mM}{m+M} \langle u \rangle \vec{e}_x. \quad (19)$$

在熱平衡下此須等於電場所施之力，即

$$\begin{aligned} \frac{mM}{m+M} \frac{U}{\lambda} \langle u \rangle &= qE, \\ \Rightarrow \langle u \rangle &= \frac{q\lambda E}{\mu U}, \quad (\mu = \frac{mM}{m+M}). \end{aligned} \quad (20)$$

由式(3)得 $U = 4c/3 = 4C/3$ ，而平均自由路程 λ 則如式(5)。

(g) 此離子之速度 c 遠大於分子 C ，離子對分子之相對速度 U 約為 c ，式(3)不適用，而 $r \ll R$ ，故其平均自由路程 λ 為

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma} \cong \frac{1}{\pi n R^2}. \quad (21)$$

每一次彈性碰撞的時候，離子轉移給分子的動能為 $\alpha m(\vec{c} + \vec{u})^2/2 \cong \alpha m c^2/2$ （由於 $u \ll c$ ）。因碰撞頻率為 c/λ ，故每單位時間損失之動能為

$$\left\langle \frac{dK}{dt} \right\rangle = \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{1}{2} \alpha m c^2. \quad (22)$$

在熱平衡下，此須等於電場給予離子的功率，即

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= qE \langle u \rangle = \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{1}{2} \alpha m c^2 \\ \Rightarrow \langle u \rangle &= \frac{c}{qE\lambda} \cdot \frac{1}{2} \alpha m c^2 \end{aligned} \quad (23)$$

又此離子在電場下之漂移速度如式(20)，取其立方後再乘以式(23)，即得

$$\begin{aligned} \langle u \rangle^4 &= \frac{\alpha m}{2\mu^3} (qE\lambda)^2 = \frac{\alpha m}{2\mu} \left(\frac{qE\lambda}{\mu} \right)^2 \\ \Rightarrow \langle u \rangle &= \sqrt[4]{\frac{\alpha m}{2\mu}} \sqrt{\frac{qE\lambda}{\mu}}. \end{aligned} \quad (24)$$

一九九八年國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊決選研習營

理論模擬試題(三)

1998年5月12日 08:00-13:00

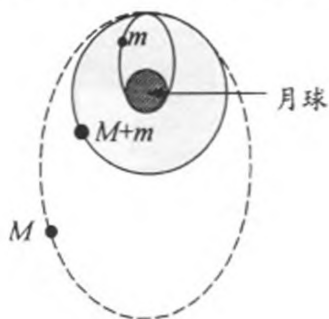
- 一、本試題共三大題，每大題五十分，總分一百五十分。
- 二、答卷時間五小時。
- 三、在指定的答案紙上作答。
- 四、在每題開始時請換用新頁。
- 五、在每一頁答題紙的頂端寫明：
 - 題號
 - 該題所用答題紙之頁碼
 - 該題所用答題紙的總頁數例(以第一題用了三頁紙為例)：

1	1/3
2	2/3
3	3/3

1998 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
 決選研習營理論模擬考試(三)試題

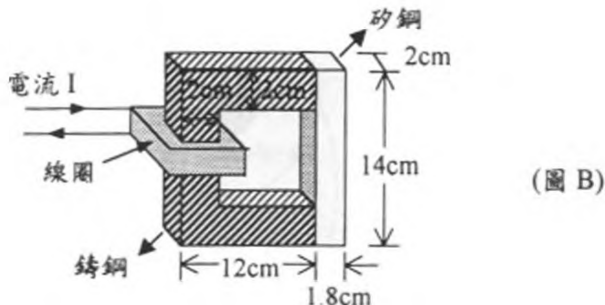
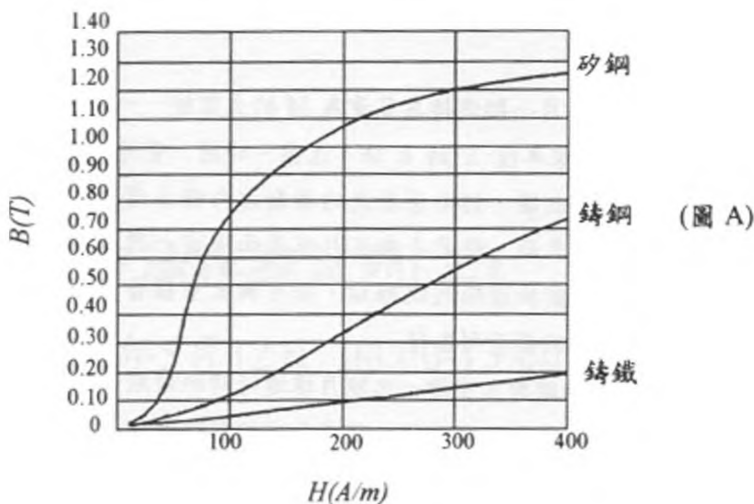
※本試題共三大題，每大題五十分，總分一百五十分。

- 1、質量為 m 的登月小艇連接在質量為 M 的太空艙，一起繞月球作圓周運動，其軌道半徑為月球半徑 R 的 k 倍。在某一時刻，登月小艇被發射脫離太空艙。登月小艇被射出後，仍沿著原先的轉動方向繞月運動，循下圖所示的橢圓軌道，登上月球表面。登月小艇在月球表面逗留一段時間後，快速發動小艇使其沿原來的橢圓軌道回到脫離點，恰可與太空艙會合。已知月球表面的重力加速度為 g_m ，回答下列各題：
- 試求登月小艇與太空艙一起繞月球運行時的週期？
 - 登月小艇與太空艙脫離後，試求太空艙離開月球最遠的距離及繞月球運行一周的時間？
 - 承(b)題，試求登月小艇繞月球一周的時間？
 - 綜合以上各小題的結果，試求登月小艇在月球表面可停留多長的時間？



- 2、一物質內的磁通量密度 B 與磁場強度 H 的關係為 $B = \mu H$ ， μ 稱為該物質的磁導率。就空氣而言， $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/A}\cdot\text{m}$ 。如同電路一樣，我們可連接不同磁導率的鐵磁材料，形成封閉的環路，稱為磁路。在磁路上，可利用載流線圈的方式以產生磁力線。磁路上對任一截面積 A 流入的磁通量 ϕ_{in} 等於流出的磁通量 ϕ_{out} ，磁通量 $= \vec{B} \cdot \vec{A}$ 。下圖(A)為三種常用鐵磁材料的 B 對 H 的關係曲線圖。
- (a)一 C 形的鑄鋼與一長條形的矽鋼構成一磁路如圖(B)所示，用於產生磁力線的線圈匝數為 50 匝，如欲在矽鋼中產生 $B = 0.5 \text{ T}$ 的磁通量密度，則
- 該線圈中須通多少安培的電流？
 - 鑄鋼與矽鋼的磁導率分別為 μ_0 的多少倍？
 - 磁路中所儲存的磁能有多少？

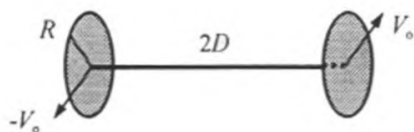
- (b) 今若在右側正中央的矽鋼上切開一寬為 1.0cm 的空隙以便塞入樣品，作磁性實驗之用(因空隙極小，磁力線在此空隙間不發散)。欲使空隙間產生 0.5T 的磁場，則在線圈內須通入多少安培的電流？



- 3、有兩個完全相同的圓輪直立在水平地面上，兩輪輪心以一根水平連桿連接在一起，即兩輪同軸。兩輪心之間的距離保持為 $2D$ (如下圖所示)。這根水平連桿為一細長的圓柱形剛體，其質量與半徑可以忽略。圓輪可繞水平桿軸(即輪軸)分別獨立做無摩擦的轉動。圓輪的半徑為 R ，質量為 M ，質量中心在輪心。圓輪繞輪軸(即水平連桿)與繞通過輪心之鉛直軸(在輪面上，相當於圓輪的自轉軸)的轉動慣量分別為 I_1 與 I_2 。圓輪與地面之間的靜摩擦係數為 μ_s ，動摩擦係數為 μ_k 。開始時(即 $t=0$)時，兩輪分別以水平速度 \vec{v}_0 和 $-\vec{v}_0$ 反向滑動，繞輪軸的轉動角速度均為零。回答下列各題：
- (a) 在任一時刻 t ，各輪以連桿中點為參考點之總角動量 \vec{L} 為何？
- (b) 若 $t=T$ 時，兩輪開始做純滾動，則 T 值為何？
- (c) 由 $t=0$ 到 $t=T$ ，兩輪因滑動摩擦而減少之動能 ΔK 為何？兩輪因滑動摩擦

而減少之角動量 $\Delta \bar{L}$ 為何？

(d) 當 $t \geq T$ 時，各輪與地面間之摩擦力 f 為何？兩輪之純滾動運動可維持多久？



1998 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
 決選研習營理論模擬試題(三)參考答案

1、解：

(a) 設登月小艇與太空艙一起繞月球運動的速度為 v_0 ，月球的質量為 M_m ，則

$$\frac{GM_m(M+m)}{(kR)^2} = \frac{(M+m)v_0^2}{kR}$$

$$\therefore v_0 = \sqrt{\frac{GM_m}{kR}} \dots\dots\dots (1)$$

它們繞月的週期為

$$T_0 = \frac{2\pi(kR)}{v_0} = 2\pi kR \sqrt{\frac{kR}{GM_m}}$$

$$\because g_m = \frac{GM_m}{R^2}, \therefore T_0 = 2\pi k \sqrt{\frac{kR}{g_m}} \dots\dots\dots (2)$$

(b) 設登月小艇與太空艙脫離後的速度分別為 v_1 及 v_2 ，則

$$(M+m)v_0 = mv_1 + Mv_2 \dots\dots\dots (3)$$

令太空艙在離開月球最遠時的距離為 R' ，速度為 v_2' ，由力學能和角動量守恆定律得

$$\frac{1}{2}Mv_2^2 - \frac{GM_m M}{kR} = \frac{1}{2}Mv_2'^2 - \frac{GM_m M}{R'} \dots\dots\dots (4)$$

$$(kR) \times Mv_2 = R' \times Mv_2' \dots\dots\dots (5)$$

由(5)式得 $v_2' = \left(\frac{R}{R'}\right)kv_2$ ，以之代入(4)，得

$$v_2 = \sqrt{\frac{2}{k\left(\frac{R}{R'}\right)+1}} v_0 \dots\dots\dots (6)$$

設登月小艇到達月球表面時的速度為 v_1' ，由力學能和角動量守恆定律得

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GM_m m}{kR} = \frac{1}{2}mv_1'^2 - \frac{GM_m m}{R} \dots\dots\dots (7)$$

$$(kR) \times mv_1 = R \times mv_1' \dots\dots\dots (8)$$

由(8)式得 $v_1' = kv_1$ ，以之代入(7)，得

$$v_1 = \sqrt{\frac{2}{k+1}} \cdot \sqrt{\frac{GM_m}{kR}} = \sqrt{\frac{2}{k+1}} \cdot v_0 \dots\dots\dots (9)$$

將(6)和(9)代入(3)，得

$$\frac{R'}{R} = \frac{k\left[1 + \frac{m}{M}\left(1 - \sqrt{\frac{2}{k+1}}\right)\right]^2}{2 - \left[1 + \frac{m}{M}\left(1 - \sqrt{\frac{2}{k+1}}\right)\right]^2} \dots\dots\dots (10)$$

上式中的 R' 即為太空艙離開月球最遠時的距離。

太空艙運動軌道的半長軸為 $a = \frac{1}{2}(R' + kR)$ ，設相應的繞月週期 T_M ，由刻卜勒第三行星運動定律知

$$T_M = T_0 \left(\frac{a}{kR} \right)^{3/2} = T_0 \left(\frac{1}{2k} \left(\frac{R'}{R} + 1 \right) \right)^{3/2}$$

$$\Rightarrow T_M = \frac{T_0}{\left\{ 2 - \left[1 + \frac{m}{M} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{k+1}} \right) \right]^2 \right\}^{3/2}}$$

(c) 登月小艇運動軌道的半長軸為 $a = \frac{1}{2}(kR + R)$ ，其繞月的週期 T_m 為

$$\frac{T_m}{T_0} = \left[\frac{(k+1)R/2}{kR} \right]^{3/2}$$

$$\Rightarrow T_m = T_0 \left(\frac{k+1}{2k} \right)^{3/2}$$

(d) 依照題設，登月小艇能沿原軌道回到脫離點，恰與太空艙會合，那麼它在月球表面上可停留的時間 Δt 為

$$\Delta t = (n+1)T_M - T_m$$

$$= \frac{(n+1)T_0}{\left\{ 2 - \left[1 + \frac{m}{M} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{k+1}} \right) \right]^2 \right\}^{3/2}} - \left(\frac{k+1}{2k} \right) T_0$$

上式中 $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

2、解：

(a)(1) 參看圖(B)，鑄鋼和矽鋼的截面積分別為 $A_1 = 4 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ ， $A_2 = 3.6 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ 。沿磁路中心線取一封閉迴路，此迴路在鑄鋼內的長度為 $\ell_1 = 0.34 \text{ m}$ ，在矽鋼內的長度為 $\ell_2 = 0.138 \text{ m}$ 。由安培定律 $\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = NI$ ，得

$$\therefore H_1 \ell_1 + H_2 \ell_2 = 50I \dots\dots\dots (1)$$

式中 H_1 和 H_2 分別為鑄鋼和矽鋼內的磁場強度。今 $B_2 = 0.5 \text{ T}$ ，從圖(A)的曲線查得矽鋼所對應的 $H_2 = 67.5 \text{ A/m}$ ，又磁路中 $\phi_1 = \phi_2 \Rightarrow B_1 A_1 = B_2 A_2$ ，故

$$B_1 = \frac{B_2 A_2}{A_1} = \frac{0.5 \times 3.6 \times 10^{-4}}{4 \times 10^{-4}} = 0.45 \text{ T}$$

再由圖(A)中查得鑄鋼所對應的 $H_1 = 250 \text{ A/m}$ ，代入(1)得

$$250 \times 0.34 + 67.5 \times 0.138 = 50I$$

$$\Rightarrow I = 1.89 \text{ A}$$

所以線圈中須通入的電流為 1.89 A 。

(2) 鑄鋼：

$$\mu_1 = \frac{B_1}{H_1} = \frac{0.45}{250} = 1.8 \times 10^{-3} \text{ Wb/A} \cdot \text{m}$$

$$\chi_1 = \frac{\mu_1}{\mu_0} = \frac{1.8 \times 10^{-3}}{4\pi \times 10^{-7}} = 1.43 \times 10^3$$

矽鋼：

$$\mu_1 = \frac{B_2}{H_2} = \frac{0.5}{67.5} = 7.4 \times 10^{-3} \text{ Wb/A}\cdot\text{m}$$

$$\chi_2 = \frac{\mu_2}{\mu_0} = \frac{7.4 \times 10^{-3}}{4\pi \times 10^{-7}} \approx 5.8 \times 10^3$$

(3)磁路中所儲存的磁能為

$$\begin{aligned} U &= \left(\frac{1}{2} B_1 H_1\right) V_1 + \left(\frac{1}{2} B_2 H_2\right) V_2 \\ &= \left(\frac{0.45 \times 250}{2}\right) \times 0.34 \times 4 \times 10^{-4} + \left(\frac{0.5 \times 67.5}{2}\right) \times 0.14 \times 3.6 \times 10^{-4} \\ &= 8.5 \times 10^{-3} \text{ J} \end{aligned}$$

(b)若在矽鋼的正中央切開一寬為 1.0cm 的空隙，則由安培定律得

$$H_1 \ell_1 + H_2 \ell_2 + H_3 \ell_3 = NI \dots\dots\dots (2)$$

式中 $\ell_1 = 0.34\text{m}$ 、 $A_1 = 4 \times 10^{-4}\text{m}^2$ ； $\ell_2 = 0.128\text{m}$ 、 $A_2 = 3.6 \times 10^{-4}\text{m}^2$ ；
 $\ell_3 = 0.010\text{m}$ 、 $A_3 = 3.6 \times 10^{-4}\text{m}^2$ 。

$$\text{今 } B_3 = 0.14\text{T} \Rightarrow H_3 = \frac{B_3}{\mu_0} = \frac{0.5}{4\pi \times 10^{-7}} = 3.98 \times 10^5 \text{ A/m}$$

又磁路中 $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 \Rightarrow B_1 A_1 = B_2 A_2 = B_3 A_3$

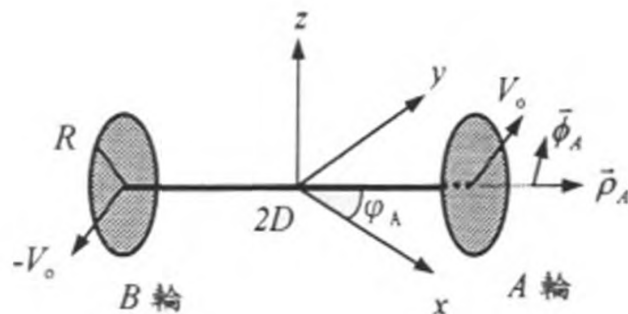
$$\therefore B_2 = B_3 = 0.5\text{T}, \therefore B_1 = \frac{0.5 \times 3.6 \times 10^{-4}}{4 \times 10^{-4}} = 0.45\text{T}。$$

由圖(A)查得 $H_2 = 67.5\text{A/m}$ ， $H_1 = 250\text{A/m}$ 。將相關的數值代入(2)，得

$$250 \times 0.34 + 67.5 \times 0.128 + 3.98 \times 10^5 \times 0.01 = 50I$$

$$\Rightarrow I = 81.5\text{A}$$

3、解：



設以連桿中點為直角座標系的原點，鉛直向上的方向為 z 軸， $x-y$ 平面上之極座標為 (ρ, ϕ) 。若由各輪輪心沿 (ρ, ϕ, z) 軸方向之單位向量分別為 $(\bar{\rho}_A, \bar{\phi}_A, \bar{z})$ 與 $(\bar{\rho}_B, \bar{\phi}_B, \bar{z})$ ，則 $\bar{\rho}_B = -\bar{\rho}_A$ ， $\bar{\phi}_B = -\bar{\phi}_A$ 。設 A 輪質心(即輪心)之切線加速度為 \bar{a} ，速度為 $\bar{V} = V\bar{\phi}_A$ 。兩輪質心繞 z 軸之角速度為 $\Omega\bar{z}$ ，則 $V = D\Omega$ 。

(a)在任一時刻 t ，若 A 輪繞輪軸(沿 $\bar{\rho}_A$)之角速度為 ω_1 ，繞通過輪心之鉛直軸(在輪面上，沿 \bar{z} 方向，相當於圓輪的自轉軸)的角速度為 ω_2 ，則 $\omega_2 = \Omega$ 。依轉動慣量的

平行軸定理，當以連桿中點為參考點時，兩輪之角動量 \vec{L}_A, \vec{L}_B 為

$$\vec{L}_A = MD^2 \Omega \vec{z} + I_1 \omega_1 \vec{\rho}_A + I_2 \omega_2 \vec{z} = (MD^2 + I_2) \frac{V}{D} \vec{z} + I_1 \omega_1 \vec{\rho}_A \dots (1)$$

$$\vec{L}_B = (MD^2 + I_2) \frac{V}{D} \vec{z} + I_1 \omega_1 \vec{\rho}_B \dots (2)$$

但 $\vec{\rho}_B = -\vec{\rho}_A$ ，故以連桿中點為參考點時，兩輪的角動量和為

$$\vec{L} = \vec{L}_A + \vec{L}_B = 2(MD^2 + I_2) \frac{V}{D} \vec{z} \dots (3)$$

(b) 在 $t = 0$ 到 $t = T$ 間，各輪所受之滑動摩擦力大小為

$$f_k = \mu_k Mg \dots (4)$$

以連桿中點為參考點，總外力矩 $\vec{\Gamma}$ 即為兩輪滑動摩擦力所施之力矩和為：

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma} &= (D\vec{\rho}_A - R\vec{z}) \times (-\mu_k Mg \vec{\phi}_A) + (D\vec{\rho}_B - R\vec{z}) \times (-\mu_k Mg \vec{\phi}_B) \dots (5) \\ &= -2\mu_k Mg D \vec{z} \end{aligned}$$

因總角動量的時變率等於總外力矩，利用(3)和(5)式，可得

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \vec{\Gamma}, \\ \frac{dV}{dt} &= -\frac{\mu_k Mg D^2}{MD^2 + I_2} = a. \end{aligned} \dots (6)$$

由等加速運動公式，可得 A 輪輪心之速度 $\vec{V} = V \vec{\phi}_A$ 為

$$\vec{V} = \left(V_0 - \frac{\mu_k g MD^2}{MD^2 + I_2} t \right) \vec{\phi}_A \dots (7)$$

設 A 輪繞輪軸轉動之角加速度為 α_1 ，角速度為 ω_1 。設想兩輪於連桿中點處分開，並以 A 輪輪心為參考點，考慮沿輪軸方向之角動量變化與力矩，則因 $I_1 \alpha_1 = \tau_1$ ，可得

$$I_1 \alpha_1 = -\mu_k Mg R \Rightarrow \alpha_1 = -\mu_k g \frac{MR}{I_1} \dots (8)$$

再由等角加速運動公式，得

$$\omega_1 = 0 - \alpha_1 t = \mu_k g \frac{MR}{I_1} t \dots (9)$$

因輪緣上各點相對於輪心之速率為 $\omega_1 R$ ，故輪與地面接觸點 G 相對於地面之速度 \vec{V}_G 為

$$\vec{V}_G = \vec{V} + \omega_1 R \vec{\phi}_A = \left\{ V_0 - \mu_k g \left(\frac{MD^2}{MD^2 + I_2} + \frac{MR^2}{I_1} \right) t \right\} \vec{\phi}_A \dots (10)$$

當 $t = T$ 時，兩輪開始做純滾動，此時 \vec{V}_G 為零，故

$$\vec{V}_G = 0 \Rightarrow t = T = \frac{V_0}{\mu_k g \left(\frac{MD^2}{MD^2 + I_2} + \frac{MR^2}{I_1} \right)} \dots (11)$$

(c) 在任一時刻，各輪之動能為

$$K = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2) = \frac{1}{2} MV^2 \left(1 + \frac{I_2}{MD^2} \right) + \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 \dots (12)$$

由(3)式，以速桿中點為參考點時，兩輪之角動量和 \bar{L} 為

$$\bar{L} = 2(MD^2 + I_2) \frac{V}{D} \bar{z} \dots\dots\dots (13)$$

故由 $t = 0$ 到 $t = T$ ，兩輪因滑動摩擦而減少之動能 ΔK 與角動量 $\Delta \bar{L}$ 為

$$\Delta K = K(T) - K(0) = (1 + \frac{I_2}{MD^2}) M \{ [V(T)]^2 - V_0^2 \} + I_1 [\omega_1(T)]^2 \dots\dots\dots (14)$$

$$\Delta \bar{L} = \bar{L}(T) - \bar{L}(0) = 2(MD^2 + I_2) \frac{V(T) - V_0}{D} \bar{z} \dots\dots\dots (15)$$

由(4)、(7)、(9)、(11)和(14)得

$$\begin{aligned} \Delta K &= \left\{ -2V_0 f_k T + f_k^2 T^2 \frac{D^2}{MD^2 + I_2} \right\} + f_k^2 T^2 \frac{R^2}{I_1} \\ &= \left\{ -2V_0 f_k T + f_k^2 T^2 \left(\frac{D^2}{MD^2 + I_2} + \frac{R^2}{I_1} \right) \right\} \\ &= \frac{-V_0^2}{\left(\frac{D^2}{MD^2 + I_2} + \frac{R^2}{I_1} \right)} \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

由(5)、(7)和(15)得

$$\Delta \bar{L} = 2(MD^2 + I_2) \frac{V(T) - V_0}{D} \bar{z} = -2\mu_k MgDT \bar{z} = T\bar{\Gamma} \dots\dots\dots (17)$$

由 $t = 0$ 到 $t = T$ ，兩輪滑動摩擦力所做之功為

$$W = -2 \int_0^T dt f_k V_G(t) \dots\dots\dots (18)$$

由(4)、(10)、(11)和(18)得

$$\begin{aligned} W &= -2f_k V_0 T + f_k^2 T^2 \frac{D^2}{MD^2 + I_2} + f_k^2 T^2 \frac{R^2}{I_1} \dots\dots\dots (19) \\ &= \Delta K. \end{aligned}$$

(d) 當 $t \geq T$ 時，各輪與地面間無滑動摩擦，作用於輪之外力為靜摩擦力 f ，但 f 須為零，否則靜摩擦力將與輪與地面接觸點 G 之速度 \vec{V}_G 同向。由於外力不對兩輪做功，兩輪之運動成穩定態，可以相同角速率繼續其純滾動運動。

一九九八年國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊決選研習營

實驗模擬試題(一)

1998年5月14日
考試時間：150分鐘

【注意事項】

1. 本試題總分七十五分。
2. 請在指定的答題卷上作答。
3. 如有任何問題，請舉手並告之監考人員。
4. 本測驗可使用無程式之掌上型計算器。

一九九八年國際物理奧林匹亞競賽國家代表隊決選研習營
實驗模擬試題(一)

題目：熱敏電阻溫度計的校準和銅線電阻溫度係數的測定。

說明：熱敏電阻，又稱測溫電阻(thermister)，是一種半導體材料。它的電阻對溫度的變化非常敏感，因此可選作為溫度計之用。本實驗包括兩個部分：(1)熱敏電阻溫度計的校準；(2)銅線電阻溫度係數的測定。

(1)熱敏電阻溫度計的校準：

若溫度變化的範圍不大，熱敏電阻 R 和其溫度 T 之間的關係，近似於下式：

$$\frac{1}{T} = A + B \ln R$$

式中 T 為絕對溫度， A 和 B 皆為常數。

- (a)利用兩個定點溫度(水的沸點和冰點)，以定出 A 和 B 的數值。
(b)利用一已校準的水銀溫度計及不同溫度的水，量出一系列電阻 R 和溫度 T 的數據，列表表示之，並將實驗數據轉換成函數曲線，檢驗是否如上式所示？求出最佳的 A 和 B 值。

(2)銅線電阻溫度係數的測定：

一般而言，在絕對溫度 $40K$ 以上的溫度，金屬的電阻和溫度呈線性關係。設以 R_t 和 R_0 分別代表金屬在 $t^\circ C$ 和 $0^\circ C$ 時的電阻， α 為該金屬的電阻溫度係數，則 $R_t = R_0(1 + \alpha t)$ 。試就所提供的銅線樣品和實驗器材，求解下列各題：

- (a)繪出實驗裝置圖；
(b)測量銅線在液氮溫度($77.4K$)和水的沸點($100.0^\circ C$)之間的電阻，至少測出 8 個電阻數據，其中 4 個必須在冰點和液氮溫度之間量取；
【註】液態氮的蒸氣可利用來冷卻實驗樣品。
(c)表列出所得的實驗數據；
(d)繪出 R_t 和溫度 $t(^\circ C)$ 之間的關係曲線，並計算出銅的電阻溫度係數。

器材：

- | | |
|--------------|-------------|
| (1)銅線樣品一個。 | (2)冰塊。 |
| (3)熱敏電阻一個。 | (4)鐵架(附夾子)。 |
| (5)三用數字電錶二具。 | (6)砂紙。 |

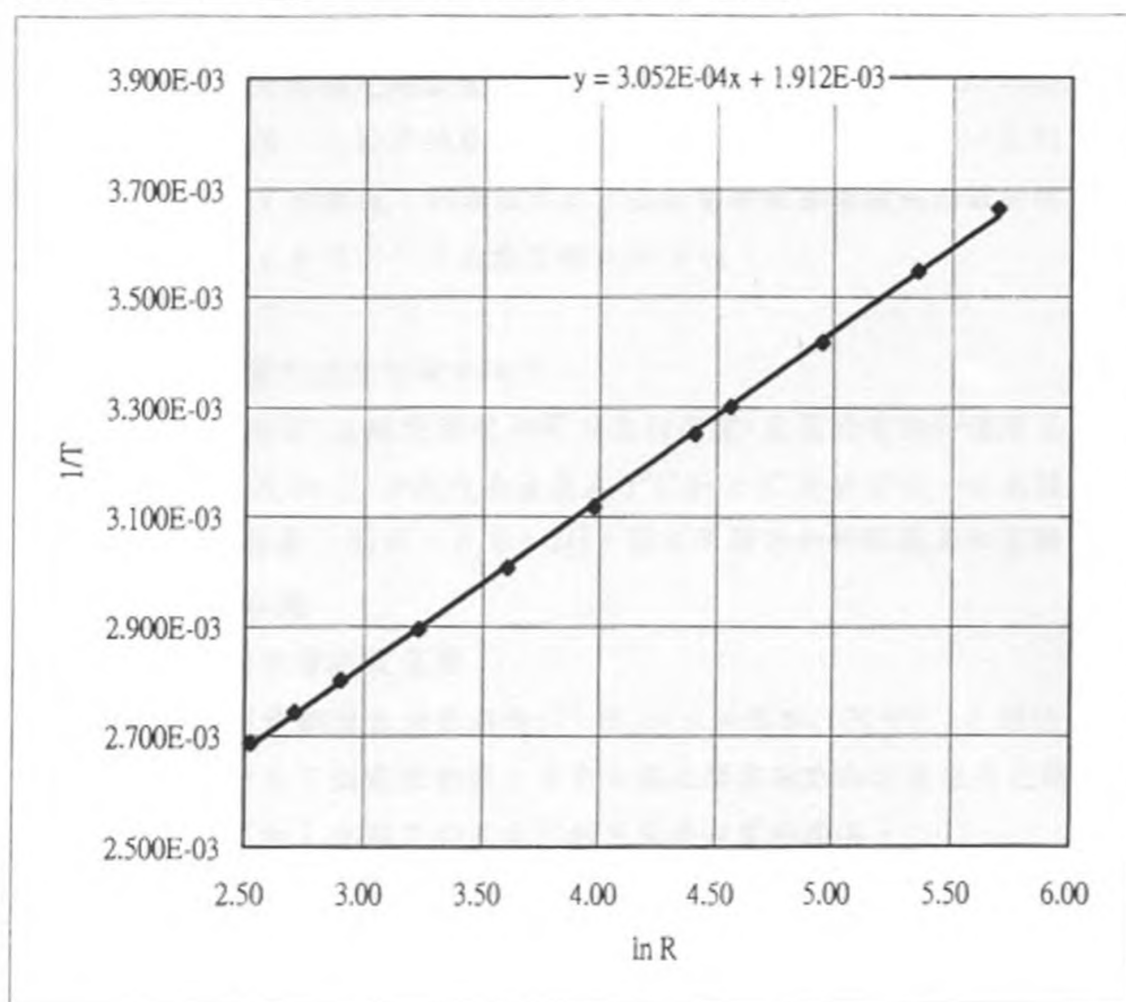
- (7)水銀溫度計一支。
- (9)連接導線(兩端附鱷魚夾)四條。
- (11)250ml燒杯二個。
- (13)250ml量筒一個。
- (15)三角架一具(附石棉心網)。
- (17)酒精燈一具。
- (19)保溫杯一個(可容納液氮)。
- (8)剪刀。
- (10)棉線。
- (12)膠帶。
- (14)熱水(公用)。
- (16)座標紙。
- (18)打火機一具。
- (20)液氮(公用)。

註：注意你所取實驗數據及計算值的有效數字位數和誤差值。

一九九八年國際物理奧林匹亞競賽國家代表隊決選研習營
實驗模擬試題(一)參考解答

(1)熱敏電阻溫度計的校準

$t(^{\circ}\text{C})$	$T(\text{K})$	$R(\Omega)$	$\ln R$	$1/T (\text{K}^{-1})$
0.0	273.0	297.0	5.69	3.663E-03
8.9	281.9	212.0	5.36	3.547E-03
19.6	292.6	141.7	4.95	3.418E-03
30.0	303.0	95.8	4.56	3.300E-03
34.7	307.7	82.0	4.41	3.250E-03
47.7	320.7	53.3	3.98	3.118E-03
59.5	332.5	36.8	3.61	3.008E-03
72.5	345.5	25.2	3.23	2.894E-03
84.0	357.0	18.2	2.90	2.801E-03
91.7	364.7	15.00	2.71	2.742E-03
99.0	372.0	12.50	2.53	2.688E-03

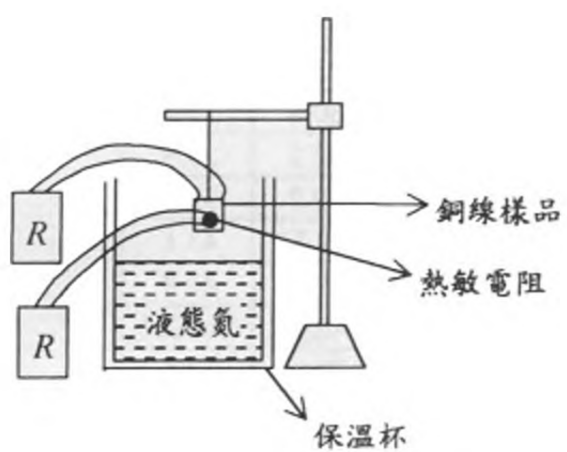


$$1/T = A + B \ln R$$

$$B = 3.052E-04 \text{ K}^{-1}$$

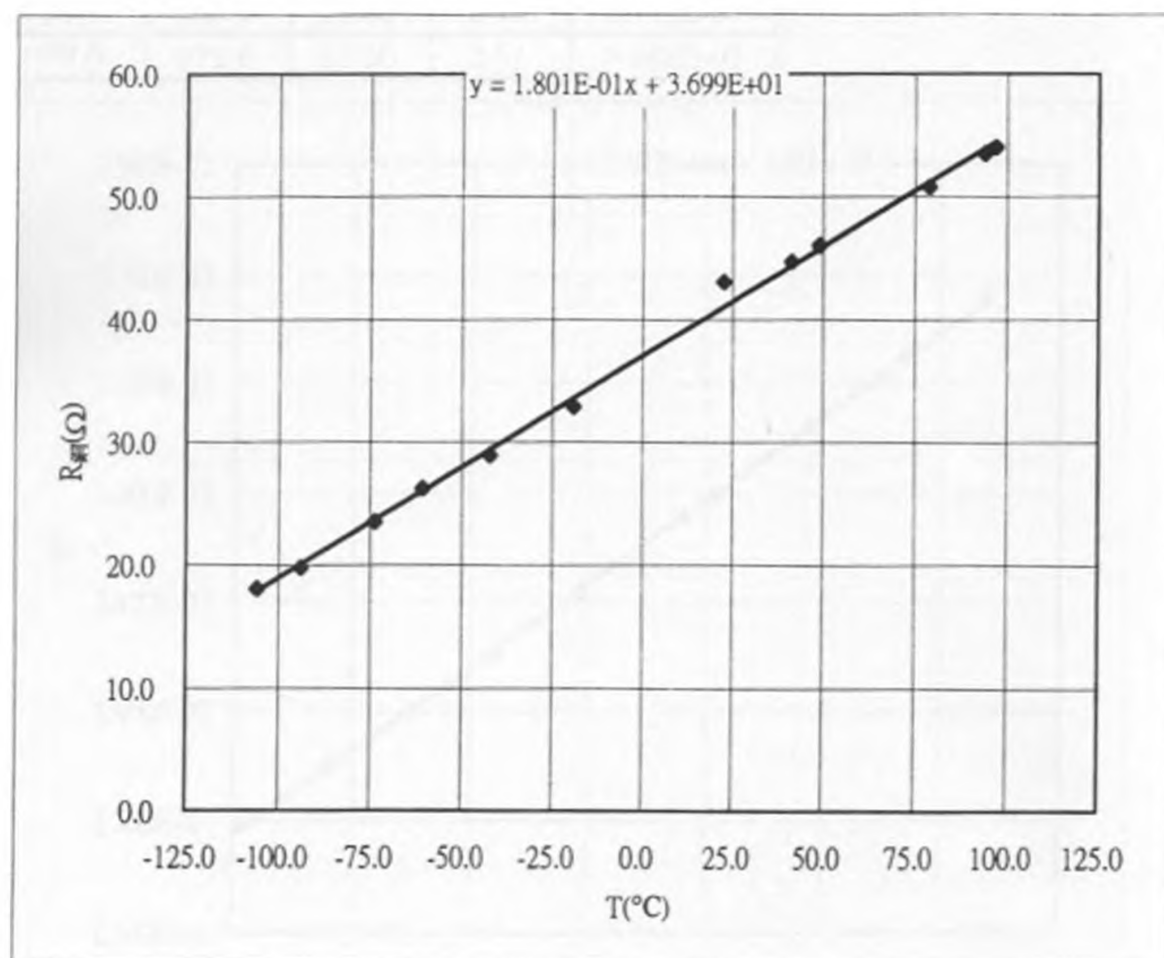
$$A = 1.912E-03 \text{ K}^{-1}$$

裝置圖如下：



(2) 鋼線電阻溫度係數的測定

$R_{\text{熱敏}}(\Omega)$	$1/T(K^{-1})$	$T(K)$	$T(^{\circ}C)$	$R_{\text{銅}}(\Omega)$
647K	5.979E-03	167.3	-105.9	18.1
172.6K	5.577E-03	179.3	-93.8	19.8
27.2K	5.016E-03	199.4	-73.8	23.5
9.9K	4.709E-03	212.4	-60.8	26.2
2.85K	4.331E-03	230.9	-42.3	28.9
0.78K	3.937E-03	254.0	-19.2	32.8
124.3	3.380E-03	295.9	22.7	43.1
64.2	3.179E-03	314.6	41.4	44.8
50.1	3.104E-03	322.2	49.0	46.1
21.0	2.840E-03	352.2	79.0	50.8
14.3	2.723E-03	367.3	94.1	53.5
13.3	2.701E-03	370.2	97.1	54.0



斜率 = $R_0 a = 1.801E-01$

參考電阻 $R_0(0^{\circ}C \text{ 時電阻}) = 3.699E+01$

電阻溫度係數 $a = 1.801E-01 / 3.699E+01 = 4.869E-03$

一九九八年國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊決選研習營

實驗模擬試題(二)

1998年5月14日
測驗時間:150分鐘

【注意事項】

1. 本試題總分七十五分。
2. 請在指定的答題卷上作答。
3. 如有任何問題，請舉手並告之監考人員。
4. 本測驗可使用無程式之掌上型計算器。

一九九八年國際物理奧林匹亞競賽國家代表隊決選研習營
實驗模擬試題(二)

一、利用下列器材：

- 1、等曲率的雙凸透鏡；
- 2、平面鏡；
- 3、水；
- 4、米尺；
- 5、鐵架及鐵夾；
- 6、鉛筆。

二、求：

- 1、凸透鏡的焦距及曲率半徑
- 2、透鏡玻璃的折射率
- 3、未知液體之折射率

三、已知：

- 1、水的折射率 $n_w = 1.33$
- 2、薄透鏡在空氣中的焦距公式(造透鏡者公式)

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

式中 n 為透鏡玻璃的折射率， r_1 及 r_2 為透鏡兩面的曲率半徑。

一九九八年國際物理奧林匹亞競賽國家代表隊決選研習營
實驗模擬試題(二)

[參考解答]：

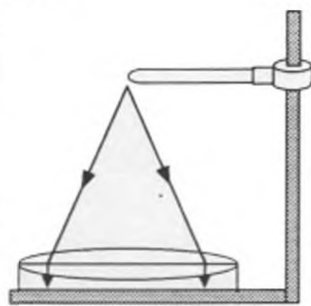
1、決定凸透鏡的焦距 f ，

(A)先以遠處的物體，如樹木等決定透鏡大約的焦距；

(B)將透鏡平置於平面鏡上，並置於鐵架的底座水平面上，將削尖之鉛筆固定在鐵架上，高度約等於步驟(A)所估計之焦距，如圖一所示。

(C)調整鉛筆高度，直到筆尖與其所成之像完全密接，而無視差。

(D)測量筆尖與透鏡鏡心的距離即為該透鏡之焦距 f 。



圖一

2、決定透鏡玻璃之折射率 n ，

$$\text{原理：} \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{2(n-1)}{r} \dots\dots\dots(1)$$

欲決定折射率 n ，須先決定曲率半徑 r ，若在平面鏡與凸透鏡中滴入純水，則將成雙凸玻璃透鏡與由純水構成之平凹透鏡組。平凹透鏡之焦距 f_w ，

$$\frac{1}{f_w} = (n_w - 1)\left(-\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty}\right) = -\frac{(n_w - 1)}{r} \dots\dots\dots(2)$$

且密接之透鏡組焦距為

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f_w} \dots\dots\dots(3)$$

由於 F 可由實驗求得， f 已測出，由(3)式可決定 f_w ，再代入(2)可求 r 。最後由(1)式可算出玻璃折射率 n 。

- 步驟：(A)使圖一的凸透鏡與平面鏡間充塞著純水，以構成平凹水透鏡；
(B)以前述方法決定雙凸玻璃透鏡與平凹水透鏡組的焦距 F ；
(C)經由(3)式、(2)式及(1)式，算出 f_w 、 r 及 n ，則凸透鏡折射率 n 即可求出。

3、未知液體之折射率，

原理與步驟同 2，將未知液體置於充塞於凸透鏡與平面鏡間構成平凹透鏡，再以(1)、(2)、(3)式解之。 $(f_w \rightarrow f_x)$ ，實驗找出 F 後，可解出 n

2000年國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊決選研習營

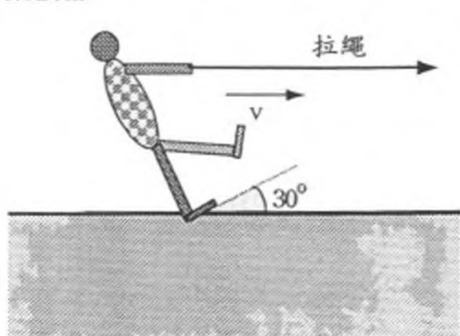
筆試(一)試題

89年4月3日 14:00-17:00

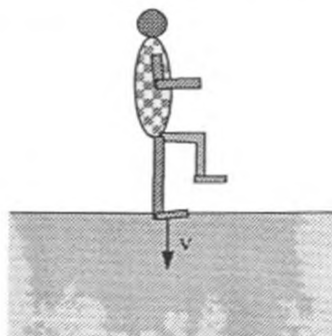
- 一、本試題共五大題，每大題二十分，總分一百分。
- 二、考試時間三小時。
- 三、在指定的答案紙上作答。
- 四、可使用無程式掌上型計算機。

2000 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
 決選研習營筆試(一)試題

- 一、(a)一滑水表演者拉著繩子，以單腳斜壓在水面上，沿水平方向滑行，如下圖(a)所示。假定滑水者的體重為 600N ，腳面和水的接觸面積為 0.010m^2 ，腳面和水面之間的夾角為 30° ，則滑水者應至少以多快的速度滑行，才能浮在水面上？
- (b)假若我們在水面上以雙腳面輪流，垂直踩水，如下圖(b)所示，則必須踩多快，才能站在水面上？人體所須消耗的功率為何？設在此情況下腳面和水的接觸面積為 0.020m^2 。

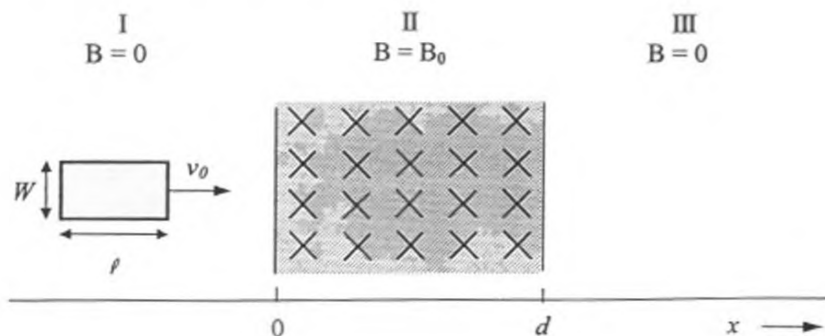


(a)



(b)

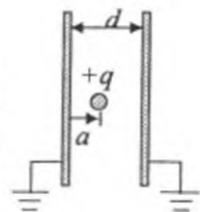
- 二、如下圖所示，在區域 I ($x < 0$) 和區域 III ($x > d$) 內的磁場為零；在區域 II ($0 \leq x \leq d$) 內有均勻磁場 $B = B_0$ ，其方向為垂直進入紙面。起始時，在區域 I 內有一長方形的導線框，其長度和寬度分別為 ℓ ($\ell < d$) 與 W ，質量為 M ，電阻為 R ，電感為 L ，以初速度 v_0 沿 $+x$ 方向運動。回答下列問題：



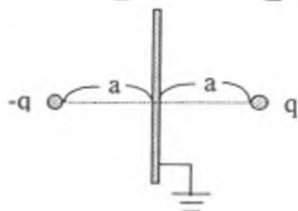
- (a)若導線框的電感很小可忽略不計，則欲使此導線框的前沿得以穿過磁場區域 II，抵達 $x > \ell + d$ 的區域，則初速度 v_0 的最小值為何？
- (b)若導線框的電感必須計入，但其電阻可忽略不計，則(a)題中初速度的最小值為何？

- (c)若導線框的電感和電阻都必須計入，寫出線框上的電流和時間之間的微分方程式，以及 $t=0$ 時的起始條件（即當 $t=0$ 時， $i=?$ ， $\frac{di}{dt}=?$ ）。

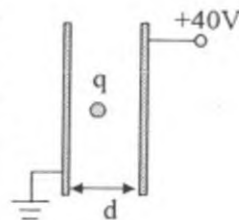
- 三、(a)有一對相互平行的大面積金屬平板，彼此相距 d ，且兩板皆接地。在兩板之間有一帶有電量為 $+q$ 的小油滴，它與其中一板的距離為 a 。利用像電荷(image)的方法，求該二金屬板對該點電荷 q 的作用力（即像力(image force)），答案以無窮級數表示之。



- 【註】：若一點電荷 q 和一無窮大接地導體平面的垂直距離為 a 時，由於靜電感應，此點電荷受到吸引力的作用。此力等效於好像有一個帶有 $-q$ 的像電荷(位在 q 對導體面的鏡象位置)與 q 之間的相互作用力，如右圖所示。



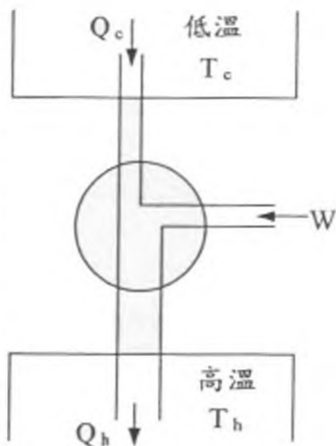
- (b)在密立坎(Millikan)的油滴實驗中，有一小油滴所帶的電量 $q = -1.6 \times 10^{-18}$ 庫侖，位於二個大面積且相互平行的金屬板之間，和其中一板的距離為 $a = 1.0\text{mm}$ （二板相距 $d = 10\text{mm}$ ），並外加 $V=40$ 伏特的電壓，如右圖所示。試求該小油滴所受的像力，並比較直接由 qV/d 計算所得的靜電力大小。（真空中的介電常數 $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{Fm}^{-1}$ ）



- 四、冷凍機是利用馬達提供功，自低溫處抽取熱能，傳送至高溫處。理想冷凍機的热力循環過程是卡諾循環過程的逆循環，其能量流的示意圖如右圖所示：

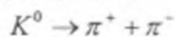
【註】冷凍機的性能係數 $= Q_c / W$ 。

- (a)製冰機為一種冷凍機。有一功率為 1000W 的製冰機，其性能係數為理想冷凍機的 $1/4$ ，試問在室溫為 25°C 時，每小時最多可製出多少克的冰？（已知冰的溶解熱為 80cal/g ，水的比熱為 $1.0 \text{cal/g}\cdot\text{K}$ ）
- (b)冷氣機也是一種冷凍機。在室內裝置一功率為 1500W 的家用冷氣機，室內溫度設定為 25°C ，假設自室外流入室內的熱正比於室內外的溫差，當室外溫度為 32°C 時，冷氣機馬達運轉的時間為 50% 。若此冷氣機可視為理想冷凍機，試求在室內溫度仍可維持 25°C 的情況下，室外的溫度最高可達多少？
- (c)承(b)題，若此冷氣機也可作為暖氣機使用。將室內溫度設定為 25°C ，當室外溫度為 10°C 時，冷氣機馬達恰需全時運轉，才能維持設定的溫度。若在此溫度條件下冷氣機的 EER 值為 2.0 ，則使用此冷氣機所消耗的電量為使用電阻電熱器的幾倍？



（註：能源效率比 $\text{EER} = \frac{\text{冷氣能力}}{\text{消耗電力}} = \frac{Q_c(\text{kcal})}{W(\text{W}\cdot\text{h})}$ ）

五、靜止的 K^0 介子衰變成 π^+ 與 π^- 介子，如下式所示：



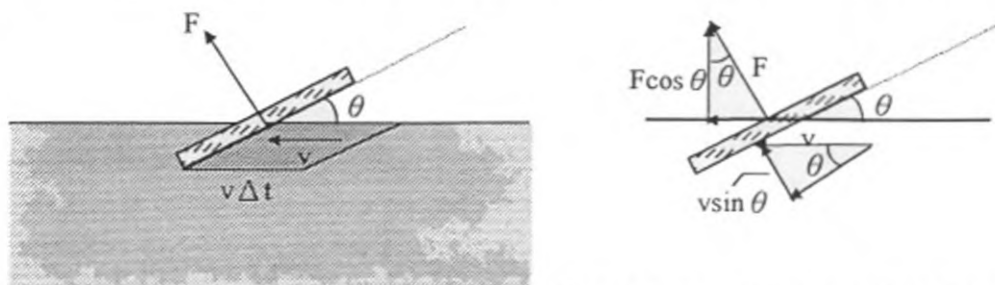
K^0 介子是中性的粒子，而 π^+ 與 π^- 則是質量相等的帶電粒子，其電性相反，各帶一基本電荷（即電子的電量）。此衰變在加有有均勻磁場 $2.0T$ 的泡沫室中進行，測得 π^+ 與 π^- 之圓軌道半徑均為 34.4cm 。已知 π 介子的靜止質量為 $140\text{MeV}/c^2$ 。求

- (a) π^+ 和 π^- 介子的速率（以 c 表示之）和動量（以 MeV/c 表示之）。
- (b) K^0 的質量（以 MeV/c^2 表示之）。

2000 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
 決選研習營筆試(一)試題參考解答

一、解：

(a) 滑水者以速度 \bar{v} 沿水平方向向右滑行。就滑水者本身的坐標系而言，滑水者靜止在水面上，但水以速度 $-\bar{v}$ 向左流動。當水分子撞擊腳底面時，在垂直於腳面的方向，其



動量的變化量等於 $(mv\sin\theta - 0)$ ；但在平行於腳底面的方向，因為水的黏滯性很小，所以幾乎沒有動量的變化，故不受力。設 F 為水作用於人的力，其方向垂直於腳面， ρ 為水的密度， A 為腳面接觸水的面積， m 為每一個水分子的質量， N 為 Δt 時間內撞擊腳底面的水分子總數，則人所受到的衝量為

$$F\Delta t = \Delta P = (mv\sin\theta - 0) \times (N) = (mv\sin\theta) \times \left(\frac{\rho}{m} \times Av\Delta t \sin\theta \right)$$

$$\Rightarrow F = \rho Av^2 \sin^2\theta$$

水的作用力用於支持人的重量，即

$$W = F \cos\theta$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{W}{\rho A \sin^2\theta \cos\theta}} = \sqrt{\frac{2W}{\rho A \sin 2\theta \sin\theta}}$$

設人的重量 $W = 600N$ (約等於 60 公斤重)

水的密度 $\rho = 1000kg/m^3$

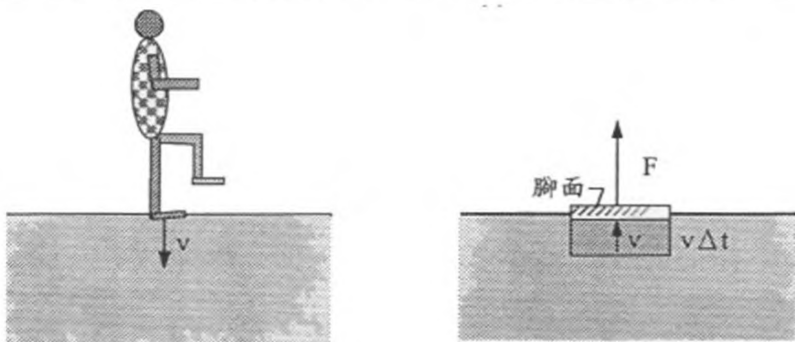
腳面接觸水的面積 $A = 0.010m^2$ (相當於半個腳面的面積 $= 10cm \times 10cm = 0.01m^2$)

腳面和水面之間的夾角 $\theta = 30^\circ$

將以上的數值代入，可計算得

$$v = \sqrt{\frac{2 \times 600}{1000 \times 0.01 \times \sin 60^\circ \times \sin 30^\circ}} = 17m/s$$

(b) 人在水面上以雙腳輪流在水面上沿鉛直方向踩水。就人本身的坐標系而言，人每次以速度 \bar{v} 單腳向下踩水時，相當於水以速度 $-\bar{v}$ 向上流動。仿造(a)題的解法，可得



$$F\Delta t = \Delta P = (mv - 0) \times N = (mv) \times \left(\frac{\rho}{m} \times Av\Delta t \right) = \rho Av^2 \Delta t$$

$$\Rightarrow F = \rho Av^2$$

水對腳底面的作用力用於支持人的重量，即 $F = W$ 。

$$W = \rho Av^2$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{W}{\rho A}}$$

代入 $W = 600N$ ，腳面和水接觸面積 $A = 0.02m^2$ (這是全腳面的面積，有別於上題的半腳面面積)，可計算得

$$v = \sqrt{\frac{600}{1000 \times 0.02}} = 5.5m/s$$

人體所須消耗的功率為

$$Fv = 600 \times 5.5 = 3300J/s = 790卡/秒$$

正常人每天所需攝取的熱量約為 2000 卡。按上述的計算，人若欲緊靠踩水而站在水面上，則一天內攝取的熱量將在在三秒內消耗掉，這是不可能的！

二、解：

(a) 忽略導線框的電感：

此線框在未進入區域 II 之前，維持等速度運動。設線框前沿的坐標為 x ，當此前沿一進入有磁場的區域 II 時，線框內感應有電動勢，即

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\int_0^x B dA \right) = -\frac{d}{dt} \left(\int_0^x B_0 W dx \right) = -\frac{d}{dt} (B_0 W x) = -B_0 W v \dots\dots\dots (1)$$

式中 v 為線框在區域 II 時的瞬時速度。線框上對應產生的感應電流為

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = -\left(\frac{B_0 W}{R}\right)v \dots\dots\dots(2)$$

導線框前沿相當於一載流導線，此導線在磁場中所受的力為

$$F = M \frac{dv}{dt} = -iWB_0 = -\left(\frac{B_0^2 W^2}{R}\right)v \dots\dots\dots(3)$$

設當線框前沿剛經過 $x=0$ 的時刻為 $t=0$ ，則其時的速度為 v_0 ，由(3)式可得

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -\int_0^t \left(\frac{B_0^2 W^2}{MR}\right) dt$$

$$\Rightarrow v = v_0 e^{-t/\tau}, \tau = \frac{MR}{B_0^2 W^2} \dots\dots\dots(4)$$

由上式可知，線框進入區域 II 時受到磁力的作用而減速，在時刻 t 時，其前沿的坐標為

$$\Rightarrow x = \int_0^t v dt = \int_0^t v_0 e^{-t/\tau} dt = v_0 \tau (1 - e^{-t/\tau}) \dots\dots\dots(5)$$

當線框完全進入磁場後，即 $x > \ell$ ，線框維持等速度運動。設當 $x = \ell$ 時， $t = t_1$ ，由(5)式可得

$$\ell = v_0 \tau (1 - e^{-t_1/\tau})$$

$$\Rightarrow e^{-t_1/\tau} = 1 - \frac{\ell}{v_0 \tau} \dots\dots\dots(6)$$

將(6)式代入(4)式，可得在 t_1 時刻的速度

$$v_1 = v_0 \left(1 - \frac{\ell}{v_0 \tau}\right) \dots\dots\dots(7)$$

由上式可看出，若欲使線框繼續在區域 II 內繼續運動，則須 $v_0 > \frac{\ell}{\tau}$ ；否則線框將停止在 $x < \ell$ 的範圍內。

當線框由區域 II 進入區域 III 時，即 $x > d$ 時，又遇到類似的狀況。線框內的磁通量產生變化，這時換由線框的後沿受到磁力的作用而減緩。設當 $x = d$ 時， $t = t_2$ ，則仿照前段的推論，可得線框這段時間內的速度為

$$v(t > t_2) = v_1 e^{-(t-t_2)/\tau} \dots\dots\dots(8)$$

仿照(5)式，將(8)式積分可得

$$x - d = \int_{t_2}^t v dt = \int_{t_2}^t v_1 e^{-(t-t_2)/\tau} dt = v_1 \tau (1 - e^{-(t-t_2)/\tau}) \dots\dots\dots(9)$$

當線框剛完全脫離區域 II 時，即 $x = \ell + d$ ， $t = t_3$ ，由(9)式可得

$$(\ell + d) - d = v_1 \tau (1 - e^{-(t_3-t_2)/\tau})$$

$$\Rightarrow e^{-(t_3-t_2)/\tau} = 1 - \frac{\ell}{v_1 \tau} \dots\dots\dots(10)$$

將(10)式代入(8)式，可得可得在 t_3 時刻的速度

$$v_3 = v_1 \left(1 - \frac{\ell}{v_1 \tau} \right) \dots \dots \dots (11)$$

上式成立的條件為 $v_3 > 0$ ，即 $v_1 > \frac{\ell}{\tau}$ 。由(7)式可得

$$v_0 \left(1 - \frac{\ell}{v_0 \tau} \right) > \frac{\ell}{\tau} \Rightarrow v_0 > \frac{2\ell}{\tau} = \frac{2\ell B_0^2 W^2}{MR}$$

因此欲使此導線框的前沿得以穿過磁場區域 II，抵達 $x > \ell + d$ 的區域，則初速度 v_0 的最小值為 $\frac{2\ell B_0^2 W^2}{MR}$ 。

(b) 考慮導線框的電感 L ，但忽略其電阻：

導線框由無磁場的區域 I 進入有磁場的區域 II 時，由於框內磁通量的變化而產生感應電動勢 $-BWv$ 。但是線框的速度 v 隨時間而變，使線框上流動的電流亦隨之變化，由導線框的自感而產生電動勢 $L \frac{di}{dt}$ 。故線框上的總電動勢為

$$\varepsilon = -BWv + L \frac{di}{dt} = iR \dots \dots \dots (12)$$

若線框上的電阻可忽略不計，即 $R \approx 0$ ，則

$$-BWv + L \frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow -BWdx + Ldi = 0 \dots \dots \dots (13)$$

將(13)式積分，並代入起始條件：當 $x = 0$ 時， $i = 0$ ，可得

$$i = \frac{BW}{L} x \dots \dots \dots (14)$$

仿照(3)式，可得線框的運動方程式為

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = -iWB_0 = -\left(\frac{B_0^2 W^2}{L} \right) x$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \dots \dots \dots (15)$$

式中 $\omega_0 = \frac{B_0 W}{\sqrt{ML}}$ 。

(15)式為標準的簡諧運動方程式，其解為

$$x = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t, \quad v = v_0 \cos \omega_0 t \dots \dots \dots (16)$$

比較簡諧運動的振幅和線框的長度，可分成下列三種情況：

(1) 若 $\frac{v_0}{\omega_0} < \ell$ ，則線框在 $x = 0$ 的邊界上作簡諧運動。

(2) 若 $\frac{v_0}{\omega_0} = \ell$ ，則線框將停在 $x = \ell$ 處。

(3) 若 $\frac{v_0}{\omega_0} > \ell$ ，設當 $x = \ell$ 時， $t = t_1$ ， $v = v_1$ ，則由(16)式可得

$$\ell = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t_1$$

$$\Rightarrow v_1 = v_0 \sqrt{1 - \sin^2 \omega_0 t_1} = v_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_0 \ell}{v_0}\right)^2} = \sqrt{v_0^2 - \frac{B_0^2 W^2 \ell^2}{ML}}$$

若線框的初速 $v_0 > \omega_0 \ell$ ，則線框完全進入區域 II 後，將繼續以 $v_1 = \sqrt{v_0^2 - \omega_0^2 \ell^2}$ 接近 $x = d$ 。當線框從區域 II 進入區域 III 時，線框又遭遇類似由區域 I 進入區域 II 的情況。同樣可分成三種情形：

(1) 若 $\frac{v_1}{\omega_0} < \ell$ ，則線框在 $x = d$ 的邊界上作簡諧運動。

(2) 若 $\frac{v_1}{\omega_0} = \ell$ ，則線框停在 $x = d + \ell$ 處。

(3) 若 $\frac{v_1}{\omega_0} > \ell$ ，則線框在 $x > d + \ell$ 後，作等速度運動，其速度為

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 - \omega_0^2 \ell^2} = \sqrt{v_0^2 - 2\omega_0^2 \ell^2}。$$

上式成立的條件為 $v_0 \geq \sqrt{2}\omega_0 \ell = \sqrt{\frac{2}{ML}} B_0 W \ell$ 。

因此欲使此導線框的前沿得以穿過磁場區域 II，抵達 $x > \ell + d$ 的區域，則初速度 v_0

的最小值為 $\sqrt{\frac{2}{ML}} B_0 W \ell$ 。

【註】本題簡單估算如下：

取 $B = 0.1T (= 1kGauss)$ ， $W = 0.1m$ ， $M = 0.1kg$ ， $L = 10^{-7}H$

則 $\omega_0 = 10^2 s^{-1}$ ， $v_0 = 1m/s$ ， $\frac{v_0}{\omega_0} = 10^{-2}m$ ， $\omega_0 L = 10^2 \cdot 10^{-7} = 10^{-5}\Omega$

若 $R \sim 10^{-3}\Omega$ ，則 $R > \omega_0 L$ ，適用於(a)題的假設，可得 $\tau = \frac{MR}{B^2 W^2} = \frac{0.1 \cdot 10^{-3}}{10^{-2} \cdot 10^{-2}} = 1s$ 。

若導線框用超導體製成，則適用於(b)題的假設。

(c)若同時考慮電阻 R 與電感 L ：

由(12)式可得

$$L \frac{di}{dt} - BWv + iR = 0$$

$$\Rightarrow v = \frac{1}{BW} \left(iR + L \frac{di}{dt} \right) \dots \dots \dots (17)$$

由(3)式可得

$$M \frac{dv}{dt} = -iWB_0$$

將(17)式代入，得

$$\left(\frac{M}{B_0 W} \right) \left(R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2 i}{dt^2} \right) = -iB_0 W$$

$$\left(\frac{ML}{B^2 W^2} \right) \frac{d^2 i}{dt^2} + \left(\frac{MR}{B^2 W^2} \right) \frac{di}{dt} + i = 0$$

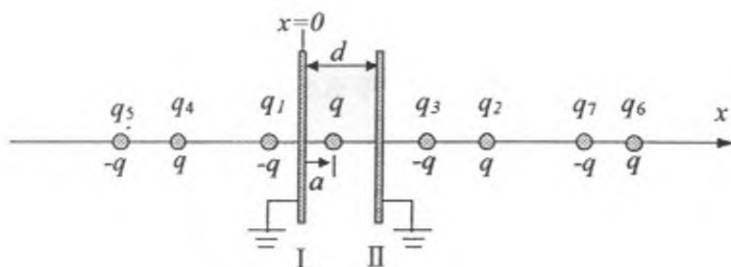
$$\Rightarrow \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 i}{dt^2} + \tau \frac{di}{dt} + i = 0$$

起始時，即當 $t=0$ 時，導線框位在區域 I，線框上的電流 $i=0$ ，移動的速度 $v=v_0$ ，

利用(17)式，可得 $\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = \frac{BWv_0}{L}$ 。

三、解：

(a)



q 對板 I 之像電荷為 $q_1 = -q$ ，落在 $x = -a$ 。此成對的電荷 q 和 q_1 對板 II 的像電荷為

$q_2 = q$ ，落在 $x = 2d + a$

$q_3 = -q$ ，落在 $x = 2d - a$

此成對的 q_2 和 q_3 對板 I 的像電荷為

$q_4 = q$ ，落在 $x = -2d + a$

$q_5 = -q$ ，落在 $x = -2d - a$

又成對的 q_4 和 q_5 對板 II 的像電荷為

$q_6 = q$ ，落在 $x = 4d + a$

$q_7 = -q$ ，落在 $x = 4d - a$

由上圖可知，

(i) 在 q 的左右兩側與 q 同號的像電荷，和 q 之間的距離按序為 $2nd$ 。 ($n = 1, 2, 3, \dots$)

(ii) 在 q 右側之第一個 $-q$ 像電荷和 q 之間的距離為 $2(d-a)$ ，其他的 $-q$ 像電荷和 q 之間的距離按序為 $2(d-a) + 2nd$ ， ($n = 1, 2, 3, \dots$)。

在 q 左側之第一個 $-q$ 影像和 q 之間的距離為 $2a$ ，其他的 $-q$ 像電荷和 q 之間的距離按序為 $2a + 2nd$ ， ($n = 1, 2, 3, \dots$)。

(iii) 每一對相鄰 $+q$ 和 $-q$ 的像電荷，彼此都相距 $2a$ 。

由(i)知，與 q 同號的像電荷，在 q 處產生的合電場為零。在 q 左側的像電荷 $-q$ 在 q 處產生的合電場為

$$\begin{aligned}\bar{E}_1 &= \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(2a)^2} + \frac{1}{(2d+2a)^2} + \frac{1}{(4d+2a)^2} + \dots \right] \hat{x} \\ &= \frac{-q}{16\pi\epsilon_0} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(nd+a)^2} \right] \hat{x} \dots\dots\dots(1)\end{aligned}$$

在 q 右側之影像電荷 $-q$ 在 q 處產生的合電場為

$$\begin{aligned}\bar{E}_2 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(2d-2a)^2} + \frac{1}{(4d-2a)^2} + \frac{1}{(6d-2a)^2} + \dots \right] \hat{x} \\ &= \frac{-q}{16\pi\epsilon_0} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(nd-a)^2} \right] \hat{x} \dots\dots\dots(2)\end{aligned}$$

總電場

$$\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 = \frac{q}{16\pi\epsilon_0} \left\{ -\frac{1}{a^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(nd-a)^2} - \frac{1}{(nd+a)^2} \right] \right\} \hat{x} \dots\dots\dots(3)$$

q 所受之力 $\bar{F} = q\bar{E}$ 。

(b) 在密立坎油滴實驗中，

$d = 1.0\text{mm}$ ，電壓為 40 伏特，

$q = -1.6 \times 10^{-18}\text{C}$ ， $a = 1.0\text{mm}$ 。

在利用(3)式，計算像力時，可取前三項絕對值較大的項，即 $-\frac{1}{a^2}$ 、 $\frac{1}{(d-a)^2}$ 和 $\frac{1}{(d+a)^2}$ 三項，得

$$\begin{aligned}E &\approx \frac{q}{16\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{a^2} + \frac{1}{(d-a)^2} - \frac{1}{(d+a)^2} \right] \\ &= \frac{-1.6 \times 10^{-18}}{16 \times \pi \times 8.85 \times 10^{-12}} \left[-\frac{1}{1.0} \times 10^6 + \frac{1}{81} \times 10^6 - \frac{1}{121} \times 10^6 \right] \\ &= 3.6 \times 10^{-3} \text{Vm}^{-1}\end{aligned}$$

故像力的大小約為 $F = qE \approx -1.6 \times 10^{-18} \times 3.6 \times 10^{-3} = -5.8 \times 10^{-21}\text{N}$

平行板電場對 q 的靜電力為

$$F_0 = qE_0 = \frac{qV_0}{d} = \frac{-1.6 \times 10^{-18} \times 40}{10 \times 10^{-3}} = -6.4 \times 10^{-15}\text{N}$$

因為 $F_0 \gg F$ ，所以像力對電荷的影響可忽略。

四、解：

(a) 由熱力學第一定律得 $Q_c + W = Q_h$ 。

$$\text{卡諾機：} \frac{Q_c}{Q_h} = \frac{T_c}{T_h}$$

$$\text{卡諾冷凍機：} \text{COP} = \frac{Q_c}{W} = \frac{Q_c}{Q_h - Q_c} = \frac{T_c}{T_h - T_c}$$

【註】性能係數(coefficient of performance, 簡稱為 COP)。

$$\text{製冰機: } COP = \frac{Q_c}{W} = \frac{1}{4} \left(\frac{T_c}{T_h - T_c} \right)$$

設製冰機每小時製冰 m 克, 則將 m 克的水自 25°C 降溫至 0°C 時, 馬達所須作的功為

$$\begin{aligned} W_1 &= \int dW_1 = 4 \int \left(\frac{T_h - T_c}{T_c} \right) dQ_c = 4 \int_{298}^{273} \left(\frac{T_h}{T_c} - 1 \right) m c dT_c \\ &= 4m \int_{298}^{273} \left(\frac{298}{T_c} - 1 \right) (-1) dT_c = 4.44m \text{ cal} = 18.6m \text{ J} \\ &= 18.58m \text{ J} \end{aligned}$$

水自 0°C 凝固為 0°C 的冰, 馬達所須作的功為

$$\begin{aligned} W_2 &= \int dW = 4 \int \left(\frac{T_h}{T_c} - 1 \right) dQ_c = 4 \left(\frac{T_h}{T_c} - 1 \right) \int dQ_c \\ &= 4 \int \left(\frac{T_h}{T_c} - 1 \right) Q_c = 4 \left(\frac{T_h}{T_c} - 1 \right) mL \\ &= 4 \left(\frac{298}{278} - 1 \right) m \times 80 = 29.3m \text{ cal} = 122.6m \text{ J}. \end{aligned}$$

馬達所作的總功為

$$W = W_1 + W_2 = (18.6 + 122.6)m \text{ J} = 141.2m \text{ J}.$$

此製冰機的馬達在 1 小時內所作的功 $= 1000 \times 60 \times 60 = 3.6 \times 10^6 \text{ J}$

故製冰機每小時所製出的冰的質量為

$$m = \frac{3.6 \times 10^6}{141.2} = 2.55 \times 10^4 \text{ g} = 25.5 \text{ kg}$$

$$(b) \text{理想冷凍機: } COP = \frac{Q_c}{W} = \frac{Q_c}{Q_h - Q_c} = \frac{T_c}{T_h - T_c}$$

$$\Rightarrow Q_c = \left(\frac{T_c}{T_h - T_c} \right) W$$

在室內溫度維持定溫的情況下:

$$\left(\frac{T_c}{T_h - T_c} \right) W = A(T_h - T_c)$$

$$\Rightarrow W = \frac{A}{T_c} (T_h - T_c)^2$$

$$\begin{cases} 0.5W = \frac{A}{T_c}(32-25)^2 \\ W = \frac{A}{T_c}(T_{\max}-25)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0.5 = \frac{(32-25)^2}{(T_{\max}-25)^2} \Rightarrow T_{\max} = 25 + \sqrt{2} \times 7 = 34.8^\circ\text{C}$$

(c) 按能源效率比的定義， $\frac{Q_c}{W} = 2.0$ (kcal/W | h)。

$$Q_c = 2.0 \times 1500 = 3000 \text{ kcal/h}$$

$$W = 1500 \text{ J/s} = \frac{1500 \times 60 \times 60}{4.185 \times 1000} \text{ kcal/h} = 1290 \text{ kcal/h}$$

$$Q_H = Q_c + W = 3000 \text{ kcal/h} + 1290 \text{ kcal/h} = 4290 \text{ kcal/h}$$

$$\frac{\text{暖氣機使用電量}}{\text{電阻電熱器使用電量}} = \frac{1290}{4290} = 0.30$$

五、解：

(a) 由動量守恆定律知 π^+ 與 π^- 具有同大但反向的動量，故兩者的速率和動量的量值相等。設 π 介子的速率為 u ，其靜止質量為 m_π ，則其動量 P 及能量 E 分別為

$$P = \frac{m_\pi u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad E = \frac{m_\pi c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{E} = \frac{u}{c^2} \quad \text{或} \quad \frac{u}{c} = \frac{Pc}{E}$$

帶電之 π 介子所受之磁力

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m \vec{u})$$

因為 \vec{u} 垂直於 \vec{B} ，所以 $|\vec{u}|$ 為常數， γ 亦為常數，故

$$|\vec{F}| = \gamma m \left| \frac{d\vec{u}}{dt} \right| = \gamma m |\vec{a}_\perp| = \gamma m \left(\frac{u^2}{R} \right) = quB$$

$$\Rightarrow P = \gamma mu = qBR$$

若 P 以 MeV/c 表示之，則

$$P = qBR = \frac{1.6 \times 10^{-19} \times 2.0 \times 0.344 \times 3 \times 10^8}{1.6 \times 10^{-19} \times 10^6} = 206.4 \text{ MeV}/c$$

$$E = \sqrt{(Pc)^2 + (m_\pi c^2)^2} = \sqrt{206.4^2 + 140^2} = 249.4 \text{ MeV}$$

$$\Rightarrow \frac{u}{c} = \frac{Pc}{E} = \frac{206.4}{249.4} = 0.83 \Rightarrow u = 0.83c$$

即 π 介子之速率 $u = 0.83c$

(b)由能量守恆定律可知 K^0 之能量為 π^+ 與 π^- 能量之和。

$$E_{K^0} = 2E = 2\sqrt{(Pc)^2 + (m_{\pi}c^2)^2} = 2 \times 249.4 = 498.8 \text{ MeV}$$

K^0 粒子的靜止能量為 $E_{K^0} = m_{K^0}c^2$ ，故

$$m_{K^0} = 498.8 \text{ MeV} / c^2$$

2000年國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊決選研習營

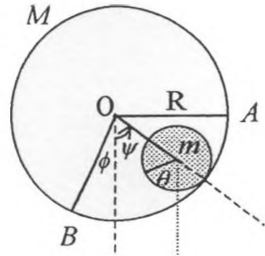
筆試(二)試題

89年4月5日 14:00-17:00

- 一、本試題共五大題，每大題二十分，總分一百分。
- 二、考試時間三小時。
- 三、在指定的答案紙上作答。
- 四、可使用無程式掌上型計算機。

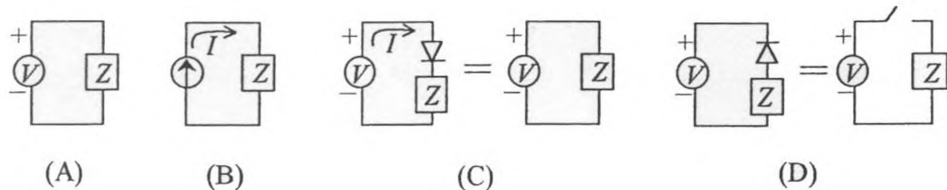
2000 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
 決選研習營筆試(二)試題

- 一、如右圖所示，有一內徑為 R 、質量為 M 的中空圓筒，懸掛在空中，只能繞其水平且固定的中心軸 O ，以 MK^2 的轉動慣量轉動。在此圓筒內，另有一半徑為 r 、質量為 m 、繞其中心軸的轉動慣量為 mk^2 的實心圓柱體，在平衡位置附近，來回做微幅的純滾動運動。設 ψ 為在同一鉛直面上，大圓筒和小圓柱的中心連線和鉛直線之間的夾角， ϕ 和 θ 分別為大圓筒和小圓柱偏離其平衡位置所轉過的角度，試求



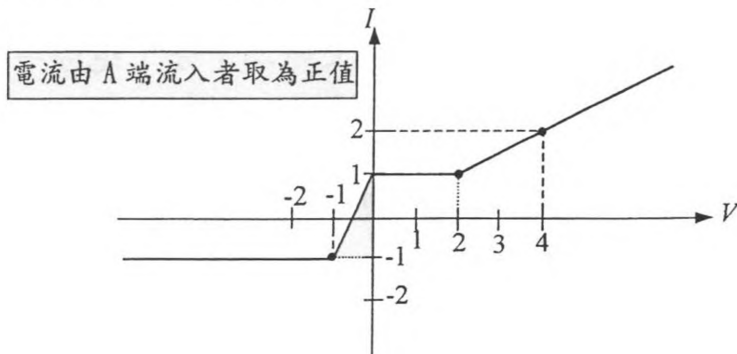
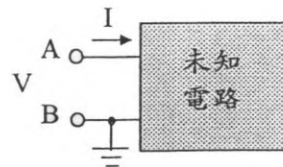
- (a) 此運動的週期 T 。
 (b) 圓柱體與圓筒間之靜摩擦力 f 隨 ψ 之變化。
 (c) 實心圓柱體所受的正向作用力 N 隨 ψ 之變化。
 (d) 中心軸 O 所受的作用力 \vec{F} 隨 ψ 之變化。

- 二、在下列的電路中，圖(A)理想的電壓源，維持固定的輸出電壓 V ，不因負載而改變，圖(B)則是理想的電流源，維持固定的輸出電流 I ，不因負載而改變，圖(C)和(D)則表示

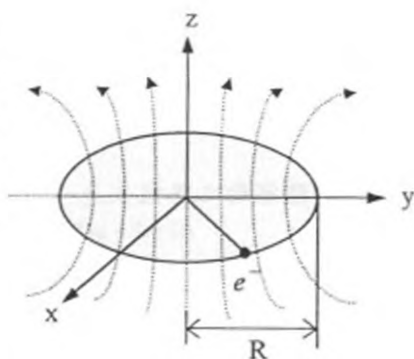


理想二極體只讓電流從單方向通過(箭頭方向)，順向時理想二極體本身的電阻值零，逆向時其電阻為無窮大。

今有一電路黑盒子如右圖所示，內部由數個理想電壓源，理想電流源，理想二極體、和線性電阻所組成。已知電路兩端點 A 和 B 之間的電壓為 V ，由 A 端流入的電流為 I ，B 為共同接地端，其 $I-V$ 關係曲線如下圖所示，試繪出黑盒子內部的電路接線圖，並簡要說明之。



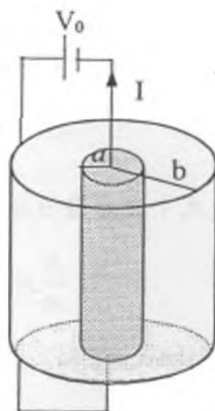
- 三、考慮一個電子在沿 z 方向具軸對稱的磁場中作高速運動(如右圖所示)。在 $z=0$ 的平面上，磁場 $\vec{B}(z=0) = B(r)\hat{z}$ ，即在此平面上的磁場只有沿 z 方向的分量，但其量值和距原點的徑向距離 r 有關。因此電子在 $z=0$ 的平面上作一半徑為 R 的圓周運動。(注意：由於電子作高速運動，因此當其速度為 v 時，其動量為 $\frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ ， m_0 為電子的靜止質量。)



- (a) 求電子動量與半徑 R 的關係為何?
 (b) 假設磁場的大小會隨時間而變化，設 $\langle B \rangle$ 為電子軌道面的平均磁通量密度，即 $\langle B \rangle = \frac{\phi}{\pi R^2}$ ， ϕ 是通過軌道面的磁通量，且在 $r=R, z=0$ 之磁場為 B_0 。假設 $\langle B \rangle$ 的改變量為 $\langle \Delta B \rangle$ ，而 B_0 的改變量為 ΔB_0 ，那麼 $\langle \Delta B \rangle$ 與 ΔB_0 必須滿足那種關係式，才能使得當電子的動量增加時，其軌道半徑仍然保持為 R 。

- (c) 假設磁場在 z 方向的分量，在靠近 $r=R, z=0$ 處，隨 r 的變化為 $B_z(r) = B_0(R) \left(\frac{R}{r}\right)^n$ ， n 為一常數，並且 $B_z(R) = z \left(\frac{dB_z}{dr}\right)_{r=R}$ 。今若電子在 z 方向會有一微小的偏離運動，試求出該偏離運動的軌跡為何？

- 四、一半徑為 a 的長直圓柱形陰極上載有穩定電流 I ，其表面上可釋出初速可以不計的電子。此陰極被一同軸、半徑為 b 的長直圓柱形陽極所包圍。陽極和陰極間維持著固定的電位差 V_0 ，如右圖所示。回答下列各問題：



- (a) 求陰極與陽極之間的電場分布。
 (b) 求電子在陰極與陽極之間，且距陰極中心軸的徑向距離為 ρ 時的靜電位能。
 (c) 證明電子的軌跡在一平面上。
 (d) 若欲使電子到達陽極，則電位差 V_0 的最小值為何？

- 五、有一類氫的原子是由一個電子(質量 m ，電量 $-e$)和一個離子核(質量 M ，電量 $+Ze$)所組成。該原子在穩定狀態下，電子不可能無限地接近原子核，而存在有一穩定的距離 r ，此為電子位置坐標的測不準量。

- (a) 試以測不準原理，求該原子在基態時的能量。
 (b) 若想用光子檢視該原子的大小，試求光子的能量至少需要多大？是否可能？
 (註：試以 $Z=1$ 作估計。)

2000 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
 決選研習營筆試(二)試題參考解答

一、解：

圓柱體滾動之路徑長為

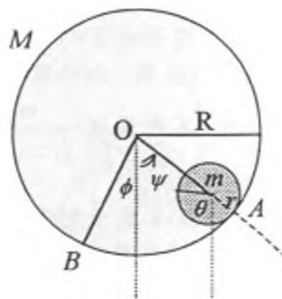
$$R(-\phi + \psi) = r(-\theta + \psi) \quad \dots\dots\dots(1a)$$

上式移項後，再對時間微分得

$$(R-r)\dot{\psi} = R\dot{\phi} - r\dot{\theta} \quad \dots\dots\dots(2a)$$

因圓筒與圓柱間之靜摩擦力為 f ，故圓柱以其中心軸為轉軸之運動方程式為

$$mk^2\ddot{\theta} = -fr \quad \dots\dots\dots(2b)$$



圓柱以圓筒中心軸 O 為轉軸之運動方程式為

$$mk^2\ddot{\theta} + m(R-r)^2\ddot{\psi} = -fR - mg(R-r)\sin\psi \quad \dots\dots\dots(2c)$$

圓筒以其中心軸 O 為轉軸之運動方程式為

$$MK^2\ddot{\phi} = fR \quad \dots\dots\dots(2d)$$

圓柱體以通過 A 點的接觸線為轉軸之運動方程式為(此式亦可由(2a)-(2c)三式導出)

$$m(k^2 + r^2)\ddot{\theta} - mrR\dot{\phi} = mgr\sin\psi \quad \dots\dots\dots(2e)$$

將(2b)代入(2c)，並消去公因式 $(R-r)$ 得

$$m(R-r)\ddot{\psi} = -f - mg\sin\psi \quad \dots\dots\dots(3a)$$

將(2a)微分，代入(3a)，並利用(2b)與(2d)得

$$(R-r)\ddot{\psi} = R\ddot{\phi} - r\ddot{\theta} = f\left(\frac{r^2}{mk^2} + \frac{R^2}{MK^2}\right) = f\frac{n}{m} \quad \dots\dots\dots(3b)$$

上式中最右邊出現之比值其定義為

$$\frac{n}{m} \equiv \frac{r^2}{mk^2} + \frac{R^2}{MK^2} \quad \dots\dots\dots(3c)$$

將(3b)代入(3a)，分別消去 f 與 $\ddot{\psi}$ ，可得以下二式：

$$(R-r)\left(1 + \frac{1}{n}\right)\ddot{\psi} = -g\sin\psi \quad \dots\dots\dots(4a)$$

$$f = \frac{-mg\sin\psi}{1+n} \quad \dots\dots\dots(4b)$$

(a) 由(4a)，圓柱體在平衡位置附近之微幅運動週期 T 為

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(R-r)(1+\frac{1}{n})}{g}} \dots\dots\dots (5)$$

(b) 由(4b)，圓柱體與圓筒間之靜摩擦力 f 為

$$f = \frac{-mg \sin \psi}{1+n} \dots\dots\dots (6)$$

(c) 由(4a)得

$$\frac{1}{2}(R-r)(1+\frac{1}{n})\dot{\psi}^2 = g(\cos \psi - \cos \psi_0) \dots\dots\dots (7a)$$

上式中 ψ_0 為最大角位移。利用上式，圓柱體質心繞圓筒中心軸 O 之運動方程式可表示為

$$N - mg \cos \psi = m(R-r)\dot{\psi}^2 = \frac{2n}{n+1} mg(\cos \psi - \cos \psi_0) \dots\dots\dots (7b)$$

故實心圓柱體所受的正向作用力 N 為

$$N = mg \cos \psi + m(R-r)\dot{\psi}^2 = mg \left(\frac{3n+1}{n+1} \cos \psi - \frac{2n}{n+1} \cos \psi_0 \right) \dots\dots\dots (7c)$$

(d) 設系統質心與 O 之距離為 L ，則

$$L = \frac{m}{m+M}(R-r) \dots\dots\dots (8a)$$

質心之運動方程式為

$$(m+M)\vec{a} = (m+M)\vec{g} + \vec{F} \dots\dots\dots (8b)$$

因質心做角速度為 $\dot{\psi}$ 之圓弧運動，故由式(7c)與式(8a)得

$$\vec{a} = L\dot{\psi}^2 = \frac{mg}{m+M} \left(\frac{2n}{n+1} \right) (\cos \psi - \cos \psi_0) \dots\dots\dots (8c)$$

故中心軸 O 所受的作用力 \vec{F} 為

$$\vec{F} = -(m+M)\vec{g} - mg \left(\frac{2n}{n+1} \right) (\cos \psi - \cos \psi_0) \hat{L} \dots\dots\dots (8d)$$

上式中 \vec{g} 為重力加速度，而 \hat{L} 為由 O 指向 A 之單位向量。

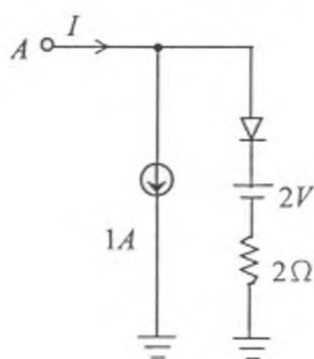
二、解：

$$\text{先考慮 } V \geq 0 \text{ 部分：} \begin{cases} 2V > V_A > 0 & I_A = 1A \\ V_A > 2V & I_A = 0.5V_A \end{cases} \Rightarrow R = 2\Omega$$

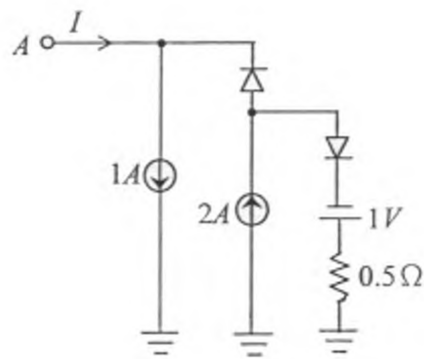
這一部份的電路如下圖(a)所示。當 $2V > V_A > 0$ 時，二極體斷路，因此電流源提供 $1A$ ，由 A 端流入。當 $V_A > 2V$ 時，二極體導通。根據 I-V 關係曲線，A 端的電流 I_A 和電壓 V_A 的關係式可寫為

$$V_A - 2 = 2(I_A - 1) \text{ 或 } I_A - 1 = \frac{V_A - 2}{2}$$

上式相對應的電路為圖(a)的分路部分。



圖(a)

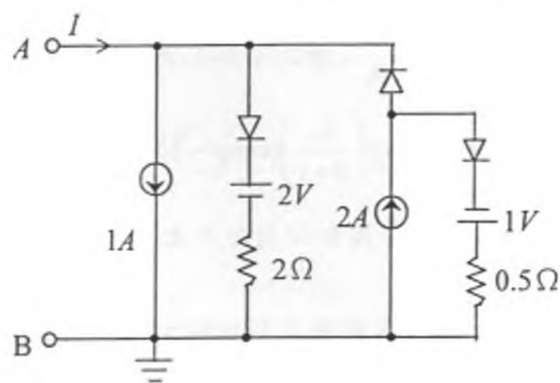


圖(b)

$$\text{再考慮 } V \leq 0 \text{ 部分：} \begin{cases} 0 > V_A \geq -0.5V & I_A = 1 + 2V_A \text{ 但 } I_A > 0 \\ -0.5V > V_A \geq -1V & I_A = 1 + 2V_A \text{ 但 } I_A < 0 \\ V_A \leq -1V & I_A = -1A \end{cases} \Rightarrow R = 0.5\Omega$$

同理可推知這一部份的電路如圖(b)所示。

合併圖(a)和圖(b)，可得知電路黑盒子的內部電路圖如圖(c)所示。



圖(c)

三、解：

(a) 電子在磁場中所受的力為

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e\vec{v} \times \vec{B} \dots\dots\dots (1)$$

電子的動量為

$$\vec{p} = m\vec{v} = \left(\frac{\varepsilon}{c^2}\right)\vec{v}, \text{ 式中 } \varepsilon \text{ 為電子的總能量} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \dots\dots\dots (2)$$

因為磁力對電子不做功，所以電子的總能量 E 保持不變。將(2)式代入(1)式可得

$$\frac{\varepsilon}{c^2} \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{ec^2}{\varepsilon} \vec{v} \times \vec{B} \dots\dots\dots (3)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} dv_x/dt \\ dv_y/dt \\ dv_z/dt \end{pmatrix} = -\frac{ec^2}{\varepsilon} \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B(R) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{dv_x}{dt} = -\Omega v_y, \frac{dv_y}{dt} = \Omega v_x, \frac{dv_z}{dt} = 0, \text{ 式中 } \Omega = \frac{ec^2 B(R)}{\varepsilon} \dots\dots\dots (4)$$

由(4)式可得

$$v_x \frac{dv_x}{dt} + v_y \frac{dv_y}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow v^2 = v_x^2 + v_y^2 = \text{常數} \dots\dots\dots (5)$$

即電子的速率保持不變。設電子在 $t=0$ 時的位置和速度為

$$x_0 = R, y_0 = 0; (v_0)_x = 0, (v_0)_y = v_0$$

則滿足(4)和(5)兩式的解為

$$v_x = v_0 \sin(\Omega t), v_y = v_0 \cos(\Omega t), v = v_0 \dots\dots\dots (6)$$

$$x = R \cos(\Omega t), y = R \sin(\Omega t), R = \frac{v_0}{\Omega} \dots\dots\dots (7)$$

由(6)和(7)兩式可知電子在 x-y 平面上作等速率圓周運動。由(7)式及(4)式中之 Ω 關係式可得

$$R = \left(\frac{\varepsilon}{ec^2 B(R)} \right) v_0 = \left(\frac{mc^2}{ec^2 B(R)} \right) v = \frac{mv}{eB(R)} = \frac{p}{eB(R)}$$

$$\Rightarrow p = eRB(R) \dots\dots\dots (8)$$

(b) 因為電子的運動軌道半徑 R 為定值，所以由(8)式得

$$\Delta p = eR\Delta B_0 \dots\dots\dots (9)$$

若磁場隨時間而變動，則會在 x-y 平面上感應產稱環形的電場，因此環繞電子的圓軌道一周所獲得的電動勢為

$$E_\phi \times 2\pi R = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt}(\pi R^2 \langle B \rangle)$$

$$\Rightarrow E_\phi = \frac{R}{2} \frac{d\langle B \rangle}{dt} \dots\dots\dots (10)$$

$$\frac{dp}{dt} = eE_\phi = \frac{eR}{2} \langle \frac{dB}{dt} \rangle$$

$$\Rightarrow \Delta p = \frac{eR}{2} \langle \Delta B \rangle \dots\dots\dots (11)$$

比較(9)和(11)兩式，可得

$$\langle \Delta B \rangle = 2\Delta B_0$$

若磁場隨時間變化時，欲使電子軌道的半徑維持不變，則必須使 $\langle \Delta B \rangle = 2\Delta B_0$ 。

(c) 考慮電子在 z 方向上的偏離運動

$$\frac{dp_z}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) \approx \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{dv_z}{dt} = ev B_r(R)$$

式中 $B_r(R)$ 為磁場 B 在 R 處的徑向分量。由題設 $B_z(r) = B_0(R) \left(\frac{R}{r} \right)^n$ ，可得

$$B_r(R) = z \left(\frac{dB_z}{dr} \right)_{r=R} = -\frac{nB_0}{R} z$$

$$\Rightarrow \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{evnB_0}{R} z$$

利用(4)式中之 Ω 關係式，可得

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = - \left(\frac{evn\epsilon\Omega}{ec^2} \right) z = 0 \dots\dots\dots (12)$$

因為 $\epsilon = mc^2$ ， $v \approx \Omega R$ ，所以上式可寫為

$$\Rightarrow \frac{d^2 z}{dt^2} + (n\Omega^2) z = 0$$

此為一簡諧振盪，其頻率為 $\omega_z = \Omega\sqrt{n}$

四、解：

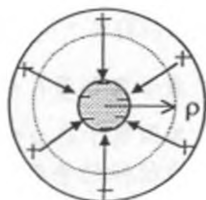
(a) 設陰極與陽極上的電荷線密度分別為 $-\lambda$ 及 $+\lambda$ 。陰極與陽極間的電場分布成圓柱形對稱，右圖所示為其截面圖。某點電場的大小只和該點至陰極圓柱中心軸的徑向距離有關，即

$$\vec{E} = \hat{\rho} E_{\rho}(\rho) \dots\dots\dots (1)$$

由高斯定律得

$$E_{\rho} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \dots\dots\dots (2)$$

故
$$\vec{E} = -\hat{\rho} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \dots\dots\dots (3)$$



陰極與陽極間的電位差為 V_0 ，

$$V_0 = -\int_a^b E(\rho) d\rho = \int_a^b \frac{\lambda d\rho}{2\pi\epsilon_0\rho} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(b/a) \dots\dots\dots (4)$$

$$\lambda = \frac{2\pi\epsilon_0 V_0}{\ln(b/a)}$$

$$\vec{E} = -\hat{\rho} \frac{V_0}{\rho \ln(b/a)} \dots\dots\dots (5)$$

(b) 陰極與陽極間的電位分布為

$$\Phi(\rho) = -\int_a^{\rho} E(\rho) d\rho = \int_a^{\rho} \frac{V_0 d\rho}{\rho \ln(b/a)} = V_0 \frac{\ln(\rho/a)}{\ln(b/a)} \dots\dots\dots (6)$$

故電子的靜電位能為

$$-e\Phi(\rho) = -\frac{eV_0}{\ln(b/a)} \ln(\rho/a) \dots\dots\dots (7)$$

(c) 電子同時受到電場和磁場的作用。電子所受的電力為

$$\vec{F}_e = (-e)\vec{E} = \hat{\rho} \frac{eV_0}{\rho \ln(b/a)} \dots\dots\dots (8)$$

電子所受的磁力為

$$\vec{F}_m = (-e)\vec{v} \times \vec{B} \dots\dots\dots (9)$$

式中的磁場 B 為陰極上的電流所產生，由安培定律可得

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{\phi} = B_{\phi} \hat{\phi}, \quad B_{\phi} \equiv \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{v} \times \vec{B} &= (\hat{\rho}v_{\rho} + \hat{\phi}v_{\phi} + \hat{z}v_z) \times (\hat{\phi}B_{\phi}) \\ &= -\hat{\rho}v_z B_{\phi} + \hat{z}v_{\rho} B_{\phi} \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

電子的運動方程式為

$$m\vec{a} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \dots\dots\dots (11)$$

式中 m 為電子的質量， \vec{a} 為其加速度。設 $\vec{a} = \hat{\rho}a_{\rho} + \hat{\phi}a_{\phi} + \hat{z}a_z$ ，將(8)、(9)及(10)式代入(11)式，可得

$$a_\rho = \frac{eV_0}{m\rho \ln(b/a)} + \frac{\mu_0 I e}{2\pi m \rho} v_z \dots\dots\dots (12)$$

$$a_\phi = 0 \dots\dots\dots (13)$$

$$a_z = -\frac{\mu_0 I e}{2\pi m \rho} v_\rho \dots\dots\dots (14)$$

由(13)式， $a_\phi = \rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi}) = 0 \dots\dots\dots (15)$

表示角動量 $l_z = \rho m v_\phi = m\rho^2\dot{\phi} = \text{定值} \dots\dots\dots (16)$

又因電子在 $\rho=a$ 之初速為零，即 $\rho=a$ 時， $\dot{\phi}=0$ ，故 $l_z=0$ ，所以電子的軌跡在一含圓柱軸的平面上。

[另證]：

電子所受的磁力矩 $\vec{N} = \vec{r} \times [-e\vec{v} \times \vec{B}]$ 因無 z 分量，故

$$\frac{dl_z}{dt} = 0, \therefore l_z = \text{定值}。$$

(d) (14) 式可改寫為

$$\frac{dv_z}{dt} = -\frac{\mu_0 I e}{2\pi m \rho} \dot{\rho} = -\frac{\mu_0 I e}{2\pi m} \frac{d}{dt}(\ln \rho) \dots\dots\dots (17)$$

積分之，得

$$v_z = \frac{\mu_0 I e}{2\pi m} \ln(\rho/A), \quad A \text{ 為一常數}$$

但 $\rho=a$ 時， $v_z=0$ ， $\therefore A=a$

$$\therefore v_z = -\frac{\mu_0 I e}{2\pi m} \ln(\rho/a) \dots\dots\dots (18)$$

電子的總力學能守恆。當 $\rho=a$ 時，電子的動能為零，靜電位能為零，而當 $\rho=b$ 時，電子的動能為 $\frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2)$ (因 $\dot{\phi}=0$)，靜電位能為 $-eV_0$ ，故

$$\frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2) - eV_0 = 0 \dots\dots\dots (19)$$

由(18)式，知 $\rho=b$ 時， $v_z = -\frac{\mu_0 I e}{2\pi m} \ln(b/a) \dots\dots\dots (20)$

代入(19)式，得

$$\dot{\rho}^2 = \frac{2eV_0}{m} - \dot{z}^2 = \frac{2eV_0}{m} - \left(\frac{\mu_0 I e}{2\pi m}\right)^2 \ln^2(b/a) \dots\dots\dots (21)$$

當 $\dot{\rho}^2 \geq 0$ 時，電子可到達陽極，故其條件為

$$V_0 \geq \frac{\mu_0^2 I^2 e}{8\pi^2 m} \ln^2(b/a) \dots\dots\dots (22)$$

五、解：

(a) 該原子的能量為

$$E = \frac{p^2}{2\mu} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \dots\dots\dots (1)$$

式中 μ 是原子的約合質量 $\mu = \frac{mM}{m+M}$ 。電子位置坐標的測不準量為 $\Delta x \approx r$ ，其相對應之

動量測不準量 $\Delta p \approx \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{\hbar}{r} = p$ 。以之代入(1)式，得

$$E = \frac{\hbar^2}{2\mu r^2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$
$$\frac{dE}{dr} = -\frac{\hbar^2}{\mu r^3} + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 0$$
$$\Rightarrow r = \frac{1}{Z} \left(\frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{\mu e^2} \right) = \frac{a_0}{Z} \dots\dots\dots (2)$$

式中 $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{\mu e^2}$ 。將(2)式代入(1)式可得

$$E = \frac{\hbar^2}{2\mu} \cdot \left(\frac{\mu Ze^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2} \right)^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mu Ze^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2} \right) = -Z^2 \left(\frac{\mu e^4}{2\hbar^2 (4\pi\epsilon_0)^2} \right) = Z^2 E_0$$

式中 $E_0 = -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2 (4\pi\epsilon_0)^2}$ 。

(b) 若取 $Z=1$ ，即對氫原子來言， $r = a_0 = 0.529 \text{ \AA}$ ， $E_0 = -13.6 \text{ eV}$ ，要檢視該原子，則所用光子的之波長 λ 必須小於 1 \AA ，因此對應的光子能量為

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \left(\frac{12400}{\lambda(\text{Å})} \right) \text{ eV} > 12.4 \text{ keV}$$

對比氫原子的游離能 $E_0 = -13.6 \text{ eV}$ ，這是相當大的能量。即使對 $Z > 1$ 的原子，此一能量連內層電子也會被游離出來。因此不可能看到該原子。

2000年國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊決選研習營

理論模擬試題

2000年4月4日 08:00-13:00

- 一、本試題共三大題，每大題五十分，總分一百五十分。
- 二、答卷時間五小時。
- 三、在指定的答案紙上作答。
- 四、在每題開始時請換用新頁。
- 五、在每一頁答題紙的頂端寫明：
 - 題號
 - 該題所用答題紙之頁碼
 - 該題所用答題紙的總頁數

例(以第一題用了三頁紙為例)：

1	1/3
2	2/3
3	3/3

2000 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
決選研習營理論模擬試題

本試題共三大題，每大題五十分，總分一百五十分。

一、有一體積為 V 的密閉絕熱剛體容器，其內壁能完全反射電磁輻射。設在此容器內置一微小的黑體，當整個系統達成熱平衡時，黑體的絕對溫度為 T ，容器內每單位體積的電磁輻射能(即能量密度)為 u 。

(a) 試求容器內壁所受之壓力 P 。

【提示】：視光子為質點，光子撞擊器壁產生壓力。

(b) 試求黑體表面在每單位時間內，每單位面積所吸收的電磁輻射能。

(c) 考慮一卡諾循環(包括等溫膨脹、絕熱膨脹、等溫壓縮、絕熱壓縮)，並利用熱力學第一及第二定律，試求 u 與 T 之關係。

【提示】：(1) 設想一個溫差很小的卡諾循環，該溫差可寫為 dT 。

$$(2) \text{卡諾循環的熱機效率為 } \frac{W}{Q} = 1 - \frac{T_1}{T_2}。$$

(d) 若容器壁上出現一截面積為 A 的小洞，試求黑體溫度降至 $T/2$ 所需之時間。

二、一平行板電容器的兩個電極係由兩片圓盤形的理想導體(電阻可以忽略不計)所組成，圓盤的半徑為 a ，兩盤之間的距離 d 遠小於 a ，電容器內填滿介電常數為 K 、磁導率為 μ 、導電係數為 σ 的弱導電介質。電容器充電後，和電源形成斷路，且設 $t=0$ 時，兩極分別帶有電量 $+Q_0$ 和 $-Q_0$ ，回答下列各問題：

(a) 電容器因內部的介質會導電而有漏電的現象，證明在 $t > 0$ 時，電極上的帶電量 $Q(t) = Q_0 e^{-(\sigma t / K \epsilon_0)}$ ， ϵ_0 為真空的電容率。(提示：電流密度 $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ ， \vec{E} 為電場強度。)

(b) 計算此電容器的電容 C 及等效電阻 R ，並證明利用此一由電容 C 及電阻 R 並聯的等效電路也可導出 $Q(t) = Q_0 e^{-(\sigma t / K \epsilon_0)}$ 。

(c) 電容器內的電場 \vec{E} 可設為均勻，求在 t 時刻的電場強度。

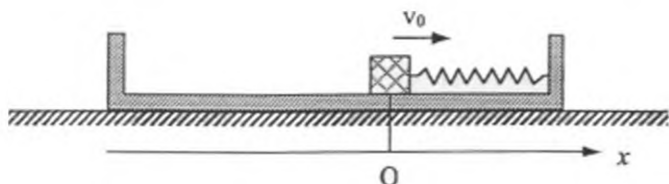
(d) 電容器內因漏電而有導電電流，求此電流產生的磁場 \vec{B}_1 (\vec{B} 又稱為磁通密度)，並以圖標示 \vec{B}_1 的方向。

(e) 由於電容器內的電場隨時間改變，因而感應產生磁場，求此感應磁場 \vec{B}_2 ，並以圖標示其方向。

(f) 求在 t 時刻時，電容器內的總磁場 $\vec{B}(t)$ 。

(g) 證明在 t 時刻時，電容器所儲存的靜電能的減少速率等於介質的焦耳熱功率。

- 三、在水平的光滑桌面上，置有一質量為 M 的 U 形板。在 U 形板上放置一質量為 m 的小木塊，並以一力常數為 k 的輕彈簧連結，彈簧的另一端繫在 U 形板的右端面，如下圖所示。小木塊與 U 形板面之間的動摩擦係數為 μ_0 。起始時，在彈簧長度為其自然長度 ℓ_0 的情況下，迅速敲擊小木塊，使其產生向右方的初速度 v_0 。回答下列各題：



- (a) 若取小木塊之起始位置 O 點為慣性坐標系的原點，設 x 為此小木塊離開 O 點的位移，寫出小木塊的運動方程式。
- (b) 在小木塊被敲擊後，木塊和 U 形板之間會產生相對運動。在整個運動過程中，彈簧所能產生的最大壓縮量為何？
- (c) 承(b)題，從小木塊開始運動時算起，至彈簧到達最大壓縮狀態時為止，共經歷多少時間？
- (d) 自小木塊開始運動後至小木塊停止在 U 形板上，小木塊總共經過 O 點多少次？
- (e) 小木塊最後停在 U 形板上何處？

2000 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
 決選研習營理論模擬試題參考解答

一、解：

(a) 電磁輻射之能量 E 與動量 p 之關係為 $E = pc$ ， c 為光速。仿氣體分子動力論可得容器內壁所受之壓力 P 為

$$P = \frac{N}{3V} pc = \frac{NE}{3V} = \frac{u}{3} \dots\dots\dots (1)$$

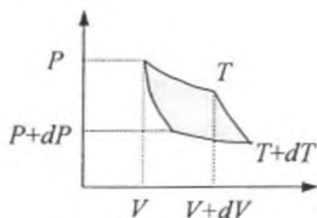
(b) 仿氣體分子動力論，考慮黑體上面積為 dS 之小表面，以其法線為 z 軸，則自位於球極座標為 (ct, θ, ϕ) 、體積為 $cdt dS \cos\theta$ 的空間單元，在 t 到 $t+dt$ 的時間內，入射到 dS 的電磁輻射能將為

$$dE = u(cdt dS \cos\theta) \frac{2\pi \sin\theta d\theta}{4\pi} \dots\dots\dots (2a)$$

故黑體在每單位時間內每單位面積所吸收之電磁輻射能為

$$\frac{d^2 E}{dt dS} = \frac{uc}{2} \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta = \frac{uc}{4} \dots\dots\dots (2b)$$

(c) 考慮如下圖所示的之卡諾循環：



設在溫度為 T 的等溫過程吸收之熱量為 Q ，則由熱力學第一定律得

$$u dV = Q - PdV \dots\dots\dots (3a)$$

由上式與 (1) 式得

$$\frac{4u}{3} dV = Q \dots\dots\dots (3b)$$

整個卡諾循環所作的功為

$$W = (-dP)dV = \frac{-du}{3} dV = \frac{-du}{4u} Q \dots\dots\dots (3c)$$

由熱力學第二定律得

$$\frac{W}{Q} = \frac{-dT}{T} \dots\dots\dots (3d)$$

故由以上二式得

$$\frac{du}{u} = \frac{4dT}{T} \dots\dots\dots (3e)$$

積分後可得

$$u = \alpha T^4 \dots\dots\dots (4a)$$

由上式、(2b)式、和史特凡-波茲曼定律得

$$\frac{cu}{4} = \frac{c\alpha}{4} T^4 = \sigma T^4 \dots\dots\dots (4b)$$

故知 $\alpha = \frac{4\sigma}{c}$, $u = \frac{4\sigma}{c} T^4 \dots\dots\dots (4c)$

(d)若容器壁上出現一截面積為 A 之小洞，則由 (2b)式，電磁輻射能經由小洞逸失之速率為

$$\frac{d(uV)}{dt} = -A \frac{uc}{4} \dots\dots\dots (5a)$$

故得 $\frac{du}{u} = -\frac{cA}{4V} dt \dots\dots\dots (5b)$

$$\left(\frac{u}{u_0}\right)^{\frac{1}{4}} = \exp\left(-\frac{cA}{16V} t\right) \dots\dots\dots (5c)$$

即黑體溫度降至 $T/2$ 所需之時間為

$$\Delta t = \frac{16V \ln 2}{cA} \dots\dots\dots (5d)$$

二、解：

(a)電容器內的總導電電流為

$$I = -\frac{dQ}{dt} = J\pi a^2 \dots\dots\dots (1)$$

Q 為電極上的帶電量， J 為電容器內的導電電流密度。由歐姆定律得 $J = \sigma E$ ，代入(1)式，得

$$I = J\pi a^2 = \sigma E\pi a^2 \dots\dots\dots (2)$$

由高斯定律知電通量

$$E\pi a^2 = \frac{Q}{K\epsilon_0} \dots\dots\dots (3)$$

將(2)、(3)兩式代入(1)式，得

$$-\frac{dQ}{dt} = \frac{\sigma Q}{K\epsilon_0} \dots\dots\dots (4)$$

上式可寫成

$$\frac{dQ}{dt} = -\left(\frac{\sigma}{K\epsilon_0}\right)Q \dots\dots\dots (5)$$

上式積分後可得

$$Q(t) = Q_0 \exp\left(-\frac{\sigma t}{K\epsilon_0}\right) \dots\dots\dots (6)$$

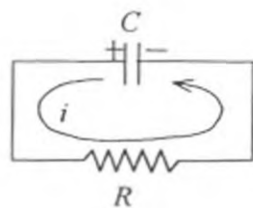
(b)此平行板的電容和電阻分別為

$$C = \frac{\epsilon A}{d} = \frac{K\epsilon_0 \pi a^2}{d}, R = \frac{d}{\alpha A} = \frac{d}{\sigma \pi a^2} \dots\dots\dots (7)$$

$$\Rightarrow RC = \frac{K\epsilon_0}{\sigma}$$

若此電容器的兩電極板之間，經由內部的介質導電，則等效於電容 C 和電阻 R 的並聯電路，如右圖所示。電容器的電位差為

$V = \frac{Q}{C}$ ，所生的電流為 $i = -\frac{dQ}{dt}$ 。由歐姆定律可得



$$\begin{aligned} V &= iR \\ \Rightarrow \frac{Q}{C} + R \frac{dQ}{dt} &= 0 \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

由(8)式積分可得

$$Q(t) = Q_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) = Q_0 \exp\left(-\frac{\sigma t}{K\epsilon_0}\right) \dots\dots\dots (9)$$

(c)由高斯定律可得兩帶電平行板之間的電場強度為

$$E(t) = \frac{\sigma(t)}{K\epsilon_0} = \frac{Q(t)}{K\epsilon_0 \pi a^2} = \left(\frac{Q_0}{K\epsilon_0 \pi a^2}\right) \exp\left(-\frac{\sigma t}{K\epsilon_0}\right) = E_0 \exp\left(-\frac{\sigma t}{K\epsilon_0}\right) \dots\dots\dots (10)$$

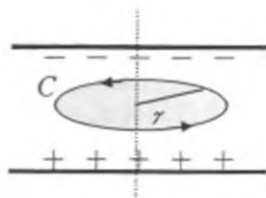
$$\text{式中 } E_0 = \frac{Q_0}{K\epsilon_0 \pi a^2} \dots\dots\dots (11)$$

E_0 為當 $t=0$ 時的電場強度。

(d)導電電流所產生的磁場可用安培定律計算之，得

$$\oint_C \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = \mu \oint_S \vec{J} \cdot \hat{n} da \dots\dots\dots (12)$$

兩電極板之間有電流通時，產生環繞兩極板中心軸的環形磁場。選取一半徑為 r 的環形磁力線為(12)式中磁場積分的路徑 C ，如右圖所示，可得



$$B_1 \cdot 2\pi r = \mu J \pi r^2 \dots\dots\dots (13)$$

$$\Rightarrow B_1 = \frac{1}{2} \mu J r \dots\dots\dots (14)$$

因為 $J = \sigma E = \sigma E_0 \exp\left(-\frac{\sigma t}{K\epsilon_0}\right)$ (15)

所以 $B_1 = \frac{1}{2} \mu \sigma E_0 r \exp\left(-\frac{\sigma t}{K\epsilon_0}\right)$ (16)

(e) 感應磁場與電通量的時變率之關係式為

$$\oint_C \vec{B}_2 \cdot d\vec{l} = \mu K \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} da \quad \dots\dots\dots (17)$$

取環場積分的路徑 C 為一圓心在中心軸上，半徑為 r 的圓，可得

$$B_2 2\pi r = \mu K \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[\pi r^2 E_0 \exp\left(-\frac{\sigma t}{K\epsilon_0}\right) \right] \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$\Rightarrow B_2 = -\frac{1}{2} \mu \sigma E_0 r \exp\left(-\frac{\sigma t}{K\epsilon_0}\right) \quad \dots\dots\dots (19)$$

負號表示 \vec{B}_2 的方向和路徑 C 得環繞方向相反。

(f) 由(d)及(e)題之結果，得總磁場為

$$B = B_1 + B_2 = 0 \quad \dots\dots\dots (20)$$

即導電電流和時變電場所產生的磁場互相抵消

(g) 電容器在 t 時刻所儲存的靜電能為

$$W = \frac{Q^2}{2C} \quad \dots\dots\dots (21)$$

代入(6)及(7)式，得

$$W = \frac{Q_0^2 d}{2K\epsilon_0 \pi a^2} \exp\left(-\frac{2\sigma t}{K\epsilon_0}\right) \quad \dots\dots\dots (22)$$

其減少速率為

$$-\frac{dW}{dt} = \frac{Q_0^2 \sigma d}{K^2 \epsilon_0^2 \pi a^2} \exp\left(-\frac{2\sigma t}{K\epsilon_0}\right) \quad \dots\dots\dots (23)$$

焦耳熱功率為

$$P = i^2 R \quad \dots\dots\dots (24)$$

代入(4)、(6)及(7)式，得

$$P = \left(\frac{\sigma Q}{K\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{d}{\sigma \pi a^2}\right) = \frac{Q_0^2 \sigma d}{K^2 \epsilon_0^2 \pi a^2} \exp\left(-\frac{2\sigma t}{K\epsilon_0}\right) \quad \dots\dots\dots (25)$$

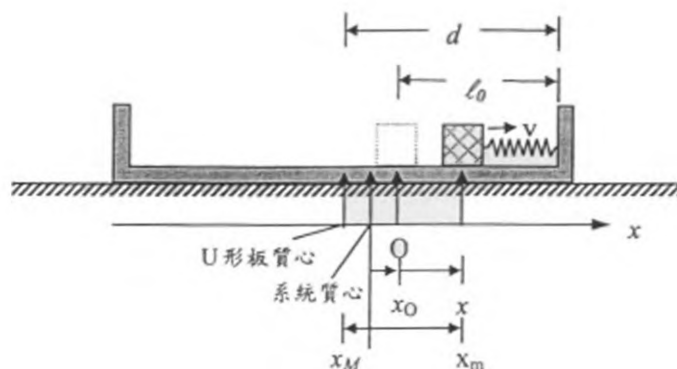
比較(23)及(25)兩式，得

$$-\frac{dW}{dt} = P \quad \dots\dots\dots (26)$$

即儲存的電能轉換成焦耳熱。

三、解：

(a)先求木塊對整個系統質量中心的運動方程式：



設彈簧原長為 l_0 ，U形板右端面至其質心的距離為 d ，木塊質心及U形板質心相對於整個系統質心的位移分別為 x_m 及 x_M ，則小木塊的運動方程式為

$$m\ddot{x}_m = -k(\ell_0 - \ell) - f \dots\dots\dots(1)$$

式中 ℓ 代表彈簧被壓縮或拉長後之瞬間長度， f 則為摩擦力的量值。

因為 $\ell = d - (x_m - x_M)$

所以 $\ell_0 - \ell = \ell_0 - d + (x_m - x_M)$

因此(1)式可寫為

$$m\ddot{x}_m + k(\ell_0 - d + (x_m - x_M)) = -f \dots\dots\dots(2)$$

又因

$$mx_m + Mx_M = 0 \dots\dots\dots(3)$$

將(3)式代入(2)式，得

$$m\ddot{x}_m + k\left(\ell_0 - d + \frac{M+m}{M}x_m\right) = -f \dots\dots\dots(4)$$

現再將(4)式換成對O點之運動方程式。設木塊對O點之位移為 x ，O點對系統質心之位移為 x_0 ，則

$$x_0 + x = x_m \dots\dots\dots(5a)$$

$$x_M = x_0 - (d - \ell_0) \dots\dots\dots(5b)$$

將(5)式代入(3)式，可得

$$\Rightarrow x_m = \frac{M}{M+m}(x + d - \ell_0) \dots\dots\dots(6)$$

將(6)式代入(4)式，得

$$\left(\frac{M}{m+M}\right)m\ddot{x} + k[l_0 - d + (x + (d - l_0))] = -f$$

$$\Rightarrow \mu\ddot{x} + kx = -f \dots\dots\dots (7)$$

式中 $\mu = \frac{mM}{M+m}$ ，為系統的約化質量。

(7)式可看成木塊相對於O點的運動方程式，相當於一質量為 μ 的質點在彈簧恢復力 $-kx$ 及摩擦力 f 作用下的運動方程式。

(b)將(7)式中之 \ddot{x} 寫為

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dx} \frac{dx}{dt} = \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d(\dot{x}^2)}{dx}$$

$$\text{故} \quad \frac{1}{2}\mu d(\dot{x}^2) + kxdx = -fdx \dots\dots\dots (8)$$

將(8)式積分得

$$\frac{1}{2}\mu\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = -fx + C \dots\dots\dots (9)$$

其中 C 為積分常數。木塊運動的起始條件為：

$$\text{當 } t=0 \text{ 時, } x(0)=0, \dot{x}(0)=v_0$$

將之代入(9)式，得 $C = \frac{1}{2}\mu v_0^2$ 。再將 C 值代回(9)式，得 μ 質點在到達第一次轉折點前的能量方程式

$$\frac{1}{2}\mu\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = -fx + \frac{1}{2}\mu v_0^2 \dots\dots\dots (10)$$

當質點到達此一轉折點時， $\dot{x}=0$ 。此時彈簧的壓縮量最大，此一最大值也是質點所有來回振盪中彈簧被壓縮的最大值。設此最大值為 d_1 ，則由(10)式可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}kd_1^2 &= -fd_1 + \frac{1}{2}\mu v_0^2 \\ \Rightarrow d_1^2 + \frac{2f}{k}d_1 - \frac{\mu v_0^2}{k} &= 0 \\ \Rightarrow d_1 &= -\frac{f}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{f}{k}\right)^2 + \frac{\mu v_0^2}{k}} \end{aligned}$$

因為 d_1 必須為正值，故在上式中取+號，即

$$d_1 = -\frac{f}{k} + \sqrt{\left(\frac{f}{k}\right)^2 + \frac{\mu v_0^2}{k}} \dots\dots\dots (11)$$

(c)由(7)式之運動方程式， x 對時間 t 之解為

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t - \frac{f}{k}$$

上式中 $\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$ 。將起始條件：當 $t=0$ 時， $x(0)=0$ ， $\dot{x}(0)=v_0$ ，代入上式

得 $A = \frac{f}{k}$ ， $B = \frac{v_0}{\omega}$

所以 $x(t) = \frac{f}{k}(\cos \omega t - 1) + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \dots\dots\dots(12)$

(12)式為質點到達第一次轉折點前，位移 x 對 t 之關係。

將 $x(t) = d_1$ ，代入(12)式解出 t ，即

$$d_1 = \frac{f}{k}(\cos \omega t - 1) + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

設 $\tan \phi = \frac{(f/k)}{(v_0/\omega)} = \frac{f\omega}{v_0 k}$

$$\Rightarrow \sin(\omega t + \phi) = \frac{\left(d_1 + \frac{f}{k}\right)}{\sqrt{\left(\frac{f}{k}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}}$$

得 $t = \frac{1}{\omega} \left[\sin^{-1} \frac{\left(d_1 + \frac{f}{k}\right)}{\sqrt{\left(\frac{f}{k}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}} - \phi \right] \dots\dots\dots(13)$

(d) 設質點在第 n 次到達轉折點時，離 O 點之距離為 d_n ，則

$$\frac{1}{2} k d_{n-1}^2 - \frac{1}{2} k d_n^2 = f(d_n + d_{n-1})$$

$$\Rightarrow d_{n-1} - d_n = \frac{2f}{k}$$

亦即質點進行振幅遞減之振盪運動，每次遞減之幅度為 $\Delta = \frac{2f}{k}$ 。若質點在 U 形板上

靜止前可以通過 O 點 n 次，則

$$\frac{1}{2} \mu v_0^2 - 2(d_1 + d_2 + d_3 + \dots d_n) f > 0$$

$$\frac{1}{2} \mu v_0^2 - 2(d_1 + d_2 + d_3 + \dots d_{n+1}) f < 0$$

若令 s 滿足

$$\frac{1}{2} \mu v_0^2 - 2[d_1 + (d_1 - \Delta) + (d_1 - 2\Delta) + \dots (d_1 - (s-1)\Delta)] f = 0 \dots\dots\dots(14)$$

則 s 之值在 n 與 $(n+1)$ 之間，由(14)式得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\mu v_0^2 - 2[sd_1 - \Delta(1+2+\dots+(s-1))]f = 0 \\ \Rightarrow & s^2 - \left(\frac{2d_1}{\Delta} + 1\right)s + \frac{\mu v_0^2}{2\Delta f} = 0 \\ \Rightarrow & s = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{2d_1}{\Delta} + 1\right) \pm \sqrt{\left(\frac{2d_1}{\Delta} + 1\right)^2 - \frac{2\mu v_0^2}{\Delta f}} \right] \dots\dots\dots(15) \end{aligned}$$

因 s 由小增大至某一值時(14)式必須滿足，故在(15)式中取 s 較小值之解，即

$$s = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{2d_1}{\Delta} + 1\right) - \sqrt{\left(\frac{2d_1}{\Delta} + 1\right)^2 - \frac{2\mu v_0^2}{\Delta f}} \right] \dots\dots\dots(16)$$

質點通過 O 點之次數 n 為小於 s ，而最接近 s 之正整數。

(c) 設質點在第 n 次通過 O 點時其動能為 E' ，則

$$\begin{aligned} E' &= \frac{\mu}{2} v_0^2 - 2[nd_1 - \Delta(1+2+\dots+(n-1))]f \\ &= \frac{\mu}{2} v_0^2 - 2\left[nd_1 - \frac{n}{2}(n-1)\Delta\right]f \end{aligned}$$

分成下列兩種情況考慮：

(i) $E' < f(d_1 - n\Delta)$

此種情形表示質點在第 n 次通過 O 點後無法運動至下一個轉折點，假定質點運動至離 O 點距離 y 時對 U 形板相對靜止，則

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}ky^2 &= E' - fy \\ y &= \frac{-f}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{f}{k}\right)^2 + \frac{2E'}{k}} \end{aligned}$$

因 $y > 0$ ，上式中必須取+號，故

$$y = \frac{-f}{k} + \sqrt{\left(\frac{f}{k}\right)^2 + \frac{2E'}{k}} \dots\dots\dots(17)$$

(ii) $E' > f(d_1 - n\Delta)$

此種情形表示質點在第 n 次通過 O 點後經過轉折點又朝向 O 點運動，則

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}ky^2 &= E' - f[2(d_1 - n\Delta) - y] \\ &= E'' + fy \end{aligned}$$

上式中 $E'' = E' - 2f(d_1 - n\Delta)$ 。解上式得

$$y = \frac{f}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{f}{k}\right)^2 + \frac{2E''}{k}}$$

因 $E^* \leq 0$ ，當 $E^* \rightarrow 0$ 時，木塊恰好可以回到 O 點故上式中須取(-)號

$$y = \frac{f}{k} - \sqrt{\left(\frac{f}{k}\right)^2 + \frac{2E^*}{k}} \dots\dots\dots(18)$$

至於質點之最後位置則要由 n 是奇數或偶數來決定，由題意知 n 為奇數時，質點在 O 點之左邊運動， n 為偶數時質點在 O 點之右邊運動；故 n 為奇數時，質點最後停在 O 點左方距離 y 處， n 如為偶數，則質點停在 O 點右方距離 y 處。

2000年國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊決選研習營

實驗模擬試題(一)

2000年4月6日

考試時間：150分鐘

- 一、本試題滿分為七十五分。
- 二、在指定的答案紙上作答。
- 三、在每一頁答題紙的頂端寫明：

- 題號
- 該題所用答題紙之頁碼
- 該題所用答題紙的總頁數

例(以第一題用了三頁紙為例)： 1 1/3

2000 年國際物理奧林匹亞競賽國家代表隊決選研習營
實驗模擬試題(一)

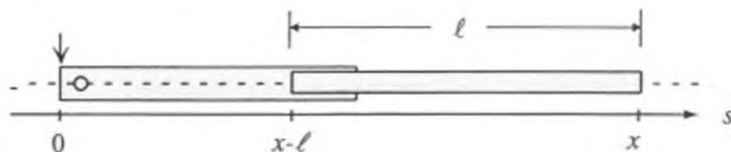
題目：由質心位置的測定，推算圓筒-螺桿組合體的個別組件的質量。

提供的實驗器材：

1. 一具圓筒-螺桿組合體(由一中空的圓筒(在軸向上並不均勻)和一可旋入圓筒內部的長螺桿所組成)。
2. 一具直角三角板。
3. 毫米間隔的方格紙若干張。
4. 一個截面呈 T 型的金屬桿。

說明：

1. 圓筒-螺桿組合體如下圖所示，組合體的總質量， M_1+M_2 ，已標示在圓筒上。 M_1 為圓筒的質量， M_2 為螺桿的質量。本題的目的在設法探知 M_1 和 M_2 的質量各為何？



2. 圓筒和螺桿的質心到圓筒底端的距離分別為 R_1 和 R_2 。在此情況中依據長螺桿的質量、長度 ℓ 、及距離 x ，來計算 R_2 時，組合體內可移動的部分(即長螺桿)可視為充分均勻。因此 R_2 是上述參數的簡單函數。
3. 你可藉由測量圓筒底端和組合體質心之間的距離 $R(x)$ ，而得知 M_1 與 M_2 。要完成此事，首先寫出質心位置隨 x 、 M_1 、 M_2 、 R_1 、 ℓ 變化的函數關係式。
4. 現在測量數個不同 x 值所對應的 $R(x)$ (至少用 8 個不同的 x)(註)。利用這些測量數據及前面的結果，計算出 M_1 與 M_2 。

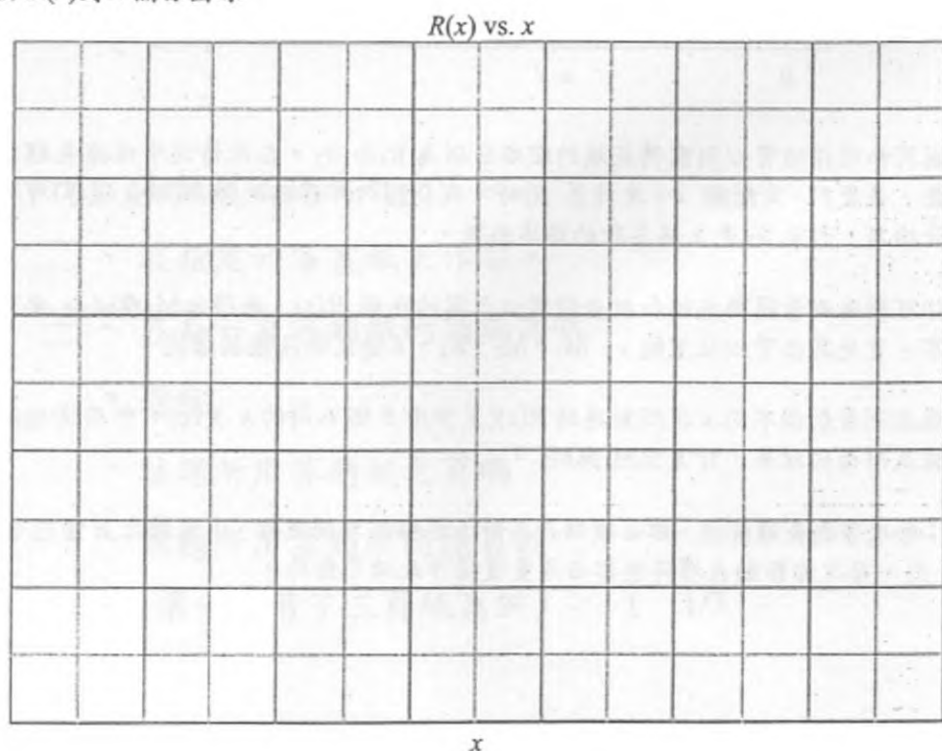
【註】：每次移動長螺桿後，都必須用六角形小螺帽將之固定住，小螺帽之質量包含在 M_1 內。每次你移動長螺桿後都必須重複操作此鎖定動作。

答案卷

1. 質心位置 $R(x)$ 的數學關係式.....°
2. 將你的 $R(x)$ 測量結果填入下表：

x	$R(x)$

繪出 $R(x)$ 對 x 關係圖線



設 $R(x) = ax + b$ ，由你的測量數據中，計算 a 與 b ，寫出它們的數值(含單位及實驗誤差)：

$a = \dots\dots\dots$ 和 $b = \dots\dots\dots$ 。由你的 a 和 b 值，寫出 M_1 和 M_2 的數值
(含單位及實驗誤差)： $M_1 = \dots\dots\dots$ 和 $M_2 = \dots\dots\dots$ 。

2000年國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊決選研習營

實驗模擬試題(二)

2000年4月6日

考試時間：150分鐘

- 一、本試題滿分為七十五分。
 - 二、在指定的答案紙上作答。
 - 三、在每一頁答題紙的頂端寫明：
 - 題號
 - 該題所用答題紙之頁碼
 - 該題所用答題紙的總頁數
- 例（以第一題用了三頁紙為例）： 1 1/3

2000年國際物理奧林匹亞競賽國家代表隊決選研習營

實驗模擬試題(二)

題目：銅線電阻溫度係數的測定

提供的實驗器材：

1. 銅線圈一個
2. T-型熱電偶一根(附標準較準表)
3. 三用數字電表二具
4. 鱷魚夾導線四條，棉繩一條
5. 保溫杯一個
6. 250 ml 燒杯二個，攪拌棒一根
7. 酒精燈一具
8. 打火機一個
9. 三腳架一具(附石棉心網)
10. 膠帶
11. 小刀，剪刀(公用)
12. 小冰塊(公用)
13. 食鹽(公用)
14. 液態氮(公用)

說明：

1. 一般而言，在絕對溫度 40K 以上的溫度，金屬的電阻和溫度呈線性關係。
2. 若以 R_t 和 R_0 分別代表 $t^{\circ}\text{C}$ 和 0°C 時的電阻， α 代表該金屬的電阻溫度係數，則電阻和溫度之間的關係可寫成： $R_t = R_0(1 + \alpha t)$ 。通常，電阻溫度係數的單位訂為 $1/^{\circ}\text{C}$ 。
3. 現以一銅線圈為測試樣品，利用所提供的器材，測量銅線的電阻溫度係數。
4. 你在答案卷上必須寫明下列各項：
 - (a) 繪出實驗裝置圖；
 - (b) 測量銅線在液態氮溫度(77K)和水的沸點(100°C)之間的電阻，至少測出 8 個電阻數據，其中 4 個必須在冰點和液氮溫度之間量取；
【註】(i) 液態氮的蒸氣可利用來冷卻實驗樣品
(ii) 銅為熱的良導體，易於與周圍溫度達到熱平衡
 - (c) 表列出所得的實驗數據；
 - (d) 繪出電阻 R_t 和溫度 $t(^{\circ}\text{C})$ 之間的關係曲線，並計算出銅的電阻溫度係數(須含誤差值)。

2001年國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊決選研習營

筆試(一)試題

90年4月2日 14:00-17:00

- 一、本試題共五大題，每大題二十分，總分一百分。
- 二、考試時間三小時。
- 三、在指定的答案紙上作答。
- 四、可使用無程式掌上型計算機。

2001 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試

決選研習營筆試(一)試題

- 一、圖 1 所示為由四個質量可忽略的剛體細桿所組成的系統，A、B、C、和 D 四個頂點各有一質量為 m 的質點相連。A 點固定在天花板上，整個系統懸掛在鉛直面上。B 和 D 兩點間連接有一質量可忽略，原長度為 $2l$ 的彈簧。當此彈簧平衡靜止時，恰使得整個系統形成一正方形。若此系統的形狀改變時，沒有伴隨任何摩擦的能量損失，試回答下列問題：

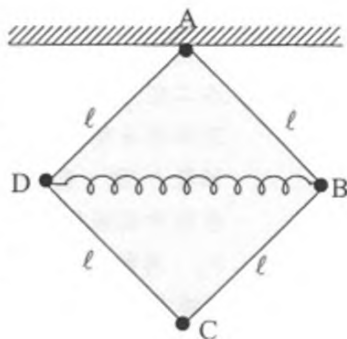


圖 1

- (a) 求彈簧的彈力係數 k 值 (以已知量表示之)。
 (b) 若在 C 點處向下拉一微小的位移後自由釋放，則此系統的振動週期為何？(以已知量表示之)。

- 二、如圖 2 所示，有一質量為 m ，長度為 L 的繩子，其一端固定於 $y=0$ 的位置，另一端繫有質量為 M 的物體。起始時 M 被置於 $y=0$ 的位置，然後自由地釋放下落。若不考慮空氣阻力的影響和繩子轉折處的長度，回答下列問題：

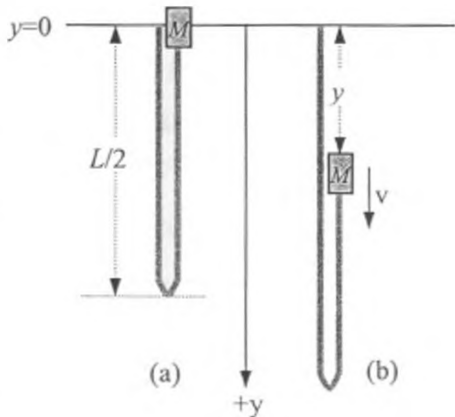


圖 2

- (a) 當 M 落下至 y 的位置時 (圖(b))，其速率 v 為何？
 (b) 在 M 下落的過程中，在哪一個位置時加速度最大？其加速度的量值為何？

- 三、如圖 3 所示，一質量為 m 的質點繫於細線的一端，此細線穿過光滑水平桌面上的一個小孔鉛直垂下。今在細線下端施一力 T ，使質點在桌面上做半徑為 r_0 的等速圓周運動。設細線與小孔邊緣的摩擦可以忽略，回答下列各問題：

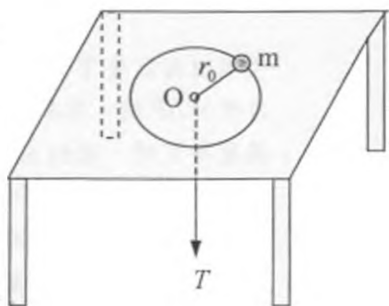


圖 3

- (a) 若在細線下端非常緩慢地增加拉力，使繩上的張力由 T 增為 $T + \Delta T$ ($\Delta T \ll T$)，則質點在最後穩定時的圓運動半徑 R 及角速度 ω 與初始之運動半徑 r_0 及角速度 ω_0 的關係式為何？

- (b) 若在細線下端瞬間增加拉力使拉力由 T 變為 $T + \Delta T$ ，致使質點在徑向上產生一向心的初速 v_0 ，則質點的徑向運動會是一種簡諧運動，此簡諧運動的角頻率為何？
- (c) 質點的徑向運動將介於離中心 O 點距離 r_1 及 r_2 之間，求 r_1 和 r_2 之值。
- (d) 承(b)題，若設在 $t = 0$ 時，質點的角位移 θ 為零，求 $\theta(t)$ 。

- 四、如圖 4 所示，一密閉絕熱容器，中間以一隔板隔成左、右二室，隔板上附有一絕熱隔片。在左、右二室中分別封存有相同的單原子分子理想氣體，具有相同的起始壓力 P_0 、體積 V_0 、和絕對溫度 T_0 。今以外力緩緩移動中間隔板使左室之體積變為 V_L ，右室之體積變為 V_R ，再將中間隔板之絕熱片抽去。設絕熱片抽去時，沒有氣體漏出，隔板與容器器壁間之摩擦可以略去。試回答下列問題：

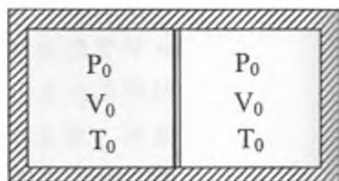


圖 4

- (a) 容器內氣體最後達成平衡時的溫度 T_f 為何？
- (b) 承(a)題，證明無論中間隔板被移動多少， T_f 一定大於 T_0 。
- (c) 承(b)，試以物理原因解釋為何 T_f 一定大於 T_0 。
- (d) 在莫耳數固定的條件下，將單原子分子理想氣體的熵以其體積 V 及絕對溫度 T 表示之。
- (e) 求容器中氣體的起始總熵 S_i 及最後之總熵 S_f ，並證明 $S_f > S_i$ 。
- (f) 容器中氣體自始至終對外界都是絕熱的，但是最後其總熵增加了，試以物理原因解釋之。
- 五、在熱力學中，我們知道絕對溫度 T 的高低決定兩系統之間的熱流方向，而化學位 (chemical potential) μ 則決定兩系統之間的粒子流方向。當某一純物質的液態和汽態處於平衡態時，則 $T_\ell = T_g$ ， $\mu_\ell = \mu_g$ ，式中 ℓ 和 g 分別代表液態和汽態。視化學位為溫度 T 和壓力 P 的函數，已知在溫度維持不變的情況下，當一系統的壓力增加 ΔP 時，其單位莫耳化學位的增加為 $\Delta\mu = v\Delta P$ ， v 為單位莫耳體積，又絕對溫度為 T 時，水的表面張力為 S ，回答下列各問題：
- (a) 在一密閉容器內，水與水蒸氣處於平衡態，溫度為 T ，水蒸氣的壓力為 p_0 ，如圖 5(a) 所示。現通入氮氣後再將容器封閉，系統的溫度保持為 T ，當系統再度達到平衡時，水蒸氣的壓力變為 p ，水蒸氣和氮氣的總壓力為 P (圖 5(b))。試

證 $\ln \frac{P}{p_0} = \frac{v_l}{RT} (P - p_0)$ ，式中 v_l 為水的單位莫耳體積。

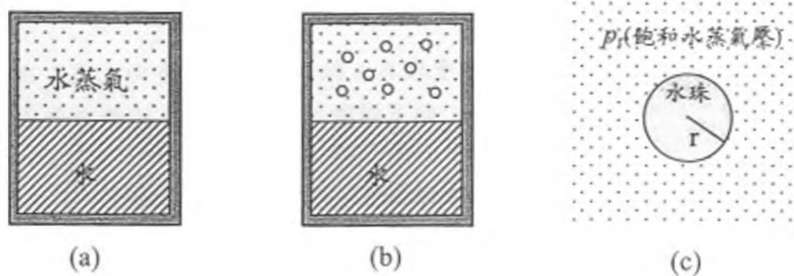


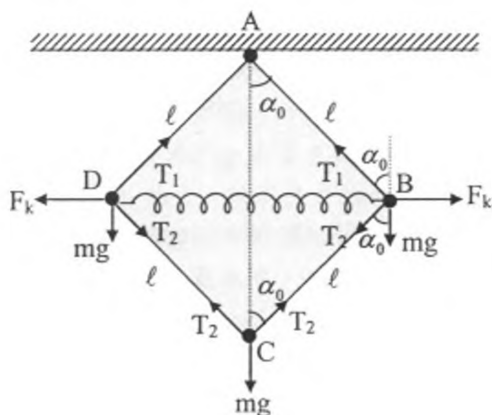
圖 5

- (b) 承(a)題，已知在 300K 時，飽和水蒸氣壓為 $3.6 \times 10^3 \text{ N/m}^2$ 。若通入 N_2 後，水面上的總壓力變為 100atm，則水蒸氣的壓力改變多少？
- (c) 求一半徑為 r ，溫度為 T 的球形水珠內部和外部壓力的差值。
- (d) 由於表面張力的關係，一半徑為 r 的球形水珠的飽和水蒸氣壓 p_r (圖 5(c))，大於水的汽、液界面為平面時的飽和水蒸氣壓 p_0 (即一般所稱的飽和水蒸氣壓)。水珠的表面張力可視為相當於(a)小題中的 N_2 氣體對水面所施的壓力，求絕對溫度為 T 時， p_r 和 r 之間的關係式。(以 p_0 、 T 、 S 、 v_l 和氣體常數 R 表示之。)
- (e) 在溫度為 T 蒸氣壓為 p_c 的過飽和水蒸氣中 ($p_c > p_0$)，一水珠的半徑至少要多大才可以繼續凝結變大不至於蒸發消失？

2001 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
 決選研習營筆試(一)參考解答

一、解：

(a)取 A 為原點，通過 A 點的水平線為 x 軸，取向右的方向為正；通過 A 點的鉛直線為 y 軸，取向下的方向為正，如下圖所示。由質點 B 的靜力平衡的條件可得



$$0 = mg - 2T_2 \cos \alpha_0 \dots\dots\dots(1)$$

$$0 = mg - T_1 \cos \alpha_0 + T_2 \cos \alpha_0 \dots\dots\dots(2)$$

$$0 = 2k\ell(1 - \sin \alpha_0) - T_1 \sin \alpha_0 - T_2 \sin \alpha_0 \dots\dots\dots(3)$$

式中 $\alpha_0 = 45^\circ$ 角。由上三式可解得

$$T_2 = \frac{mg}{2 \cos \alpha_0} = \frac{\sqrt{2}mg}{2}, \quad T_1 = \frac{3mg}{2 \cos \alpha_0} = \frac{3\sqrt{2}mg}{2},$$

$$k = \frac{mg}{\ell(1 - \sin \alpha_0)} = \frac{2mg}{\ell(2 - \sqrt{2})}$$

(b)當此系統振動時，設 C 點的加速度為 a_C ，B 點加速度的 x 分量為 a_{Bx} ，y 分量為 a_{By} 。上圖中的 α_0 變為 α ，則可得 C 點和 B 點的運動方程式如下：

$$ma_C = mg - 2T'_2 \cos \alpha \dots\dots\dots(4)$$

$$ma_{By} = mg - T'_1 \cos \alpha + T'_2 \cos \alpha \dots\dots\dots(5)$$

$$ma_{Bx} = 2k\ell(1 - \sin \alpha) - T'_1 \sin \alpha - T'_2 \sin \alpha \dots\dots\dots(6)$$

因為 $y_B = \ell \cos \alpha$ ， $y_C = 2\ell \cos \alpha$ ，式中 $\alpha = \alpha_0 + \varepsilon = 45^\circ + \varepsilon$ ， ε 為一微小的角度，

故 $y_B = \frac{1}{2}y_C$ ，即

$$a_{By} = \frac{1}{2}a_C \dots\dots\dots(7)$$

又 $x_B = \ell \sin \alpha$ ，其變化量為

$$\begin{aligned}\Delta x_B &= \ell \sin \alpha - \ell \sin \alpha_0 = \ell [\sin(\alpha_0 + \varepsilon) - \sin \alpha_0] \\ &= \ell [(\sin \alpha_0 \cos \varepsilon + \cos \alpha_0 \sin \varepsilon) - \sin \alpha_0] \\ &\approx \ell \varepsilon \cos \alpha_0\end{aligned}$$

上式中 $\cos \varepsilon \approx 1$ ， $\sin \varepsilon \approx \varepsilon$ 。同理可得

$$\begin{aligned}\Delta y_C &= 2\ell \cos \alpha - 2\ell \cos \alpha_0 = 2\ell [\cos(\alpha_0 + \varepsilon) - \cos \alpha_0] \\ &= 2\ell [(\cos \alpha_0 \cos \varepsilon - \sin \alpha_0 \sin \varepsilon) - \cos \alpha_0] \\ &\approx -2\ell \varepsilon \sin \alpha_0\end{aligned}$$

因為 $\cos \alpha_0 = \sin \alpha_0 = \sqrt{2}/2$ ，所以 $\Delta x_B \approx -\frac{1}{2}\Delta y_C$ ，故

$$a_{Bx} \approx -\frac{1}{2}a_C \dots\dots\dots(8)$$

【註】(8)式也可利用幾何關係得之。由於菱形的兩對角線長度相等，當此菱形往下拉時，則 $\overline{AC} - \Delta y_C = \overline{BD} + 2\Delta x_B$ ，但由於下拉的位移很小，所以 $\overline{AC} \approx \overline{BD}$ ，故

$$\Delta x_B \approx -\frac{1}{2}\Delta y_C。$$

將(7)和(8)兩式代入(5)和(6)式，並與(4)式聯立，消去 T_1' 和 T_2' ，得

$$\frac{3}{2}ma_C + \frac{1}{2}ma_C \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) = 2mg - 2k\ell(1 - \sin \alpha) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \dots\dots\dots(9)$$

利用(a)的結果， $mg = k\ell(1 - \sin \alpha_0)$ ，以之代入(9)式，得

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}ma_C + \frac{1}{2}ma_C \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) &= 2k\ell(1 - \sin \alpha_0) - 2k\ell(1 - \sin \alpha) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \\ ma_C &= 4k\ell \left(\frac{1 - \sin \alpha_0 - \cot \alpha + \cos \alpha}{3 + \cot \alpha} \right) \dots\dots\dots(10)\end{aligned}$$

令 $f(\alpha) = \frac{1 - \sin \alpha_0 - \cot \alpha + \cos \alpha}{3 + \cot \alpha}$ ，利用下列的泰勒級數公式，對 $\alpha_0 = 45^\circ$ 展開，可得

$$f(\alpha) = f(\alpha_0) + f'(\alpha_0)(\alpha - \alpha_0) + \dots \approx \left(\frac{1 - \sin^3 \alpha_0}{4 \sin^2 \alpha_0} \right) (\alpha - \alpha_0) \dots \dots \dots (11)$$

因為 C 點的平衡位置 $y_{C0} = 2\ell \cos \alpha_0$ ，所以期偏離平衡位置的位移為

$$y_C - y_{C0} = 2\ell \cos \alpha - 2\ell \cos \alpha_0 \approx -(2\ell \sin \alpha_0)(\alpha - \alpha_0) \dots \dots \dots (12)$$

由(10)、(11)、和(12)三式可得

$$ma_C \approx -\frac{k}{2} \left(\frac{1}{\sin^3 \alpha_0} - 1 \right) (y_C - y_{C0}) \dots \dots \dots (13)$$

或寫成下式

$$\frac{d^2 y_C}{dt^2} + \frac{k}{2m} \left(\frac{1}{\sin^3 \alpha_0} - 1 \right) (y_C - y_{C0}) \approx 0 \dots \dots \dots (14)$$

上式為簡諧運動的標準式，其角頻率 $\omega = \sqrt{\frac{k}{2m} \left(\frac{1}{\sin^3 \alpha_0} - 1 \right)}$ ，故其週期為

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\frac{k}{2} \left(\frac{1}{\sin^3 \alpha_0} - 1 \right)}} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell(2 - \sqrt{2})}{g(2\sqrt{2} - 1)}}$$

二、解：

(a)當繩下落至 y 位置時，與 M 同一邊的繩具有相同的速率 v ，而另一邊繩子是靜止的，故動能為

$$K = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{L} \cdot \frac{L-y}{2} \cdot v^2 = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{4} m \left(\frac{L-y}{L} \right) v^2$$

式中 $\frac{m}{L}$ 為繩子每單位長度的質量。

在 y 位置時，左段的繩長為 $\frac{1}{2}(L+y)$ ，右段的繩長為 $\frac{1}{2}(L-y)$ 。 M 的重力位能為

$-Mgy$ ，右段繩子的質心在 $y + \frac{L-y}{4}$ ，故其重力位能為

$$-\left(\frac{m}{L} \cdot \frac{L-y}{2} \right) \cdot g \cdot \left(y + \frac{L-y}{4} \right) = -\frac{1}{2} mgy \left(\frac{L-y}{L} \right) - \frac{1}{8} mg \left[\frac{(L-y)^2}{L} \right]$$

左段繩子的質心在 $\frac{L+y}{4}$ ，故其重力位能為

$$-\left(\frac{m}{L} \cdot \frac{L+y}{2}\right) \cdot g \cdot \left(\frac{L+y}{4}\right) = -\frac{1}{8} mg \left[\frac{(L+y)^2}{L}\right]$$

所以系統的總位能為：

$$V = -Mgy - \frac{1}{2} mgy \left(\frac{L-y}{L}\right) - \frac{1}{8} mg \left[\frac{(L-y)^2}{L}\right] - \frac{1}{8} mg \left[\frac{(L+y)^2}{L}\right]$$

因此當 M 在 y 位置時，系統的總力學能為

$$E = K + V$$

$$= \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{4} mv^2 \frac{L-y}{L} - Mgy - \frac{1}{2} mgy \left(\frac{L-y}{L}\right) - \frac{1}{8} mg \left[\frac{(L-y)^2}{L}\right] - \frac{1}{8} mg \left[\frac{(L+y)^2}{L}\right]$$

系統的起始力學能等於 $-mg \frac{L}{4}$ ，由力學能守恆定律得

$$\frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{4} mv^2 \left(\frac{L-y}{L}\right) - Mgy - \frac{1}{2} mgy \left(\frac{L-y}{L}\right) - \frac{1}{4} mg \left(\frac{L^2 + y^2}{L}\right) = -mg \frac{L}{4}$$

$$\frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{4} mv^2 \left(\frac{L-y}{L}\right) = Mgy + \frac{1}{4} mgy \left(\frac{2L-y}{L}\right)$$

$$v^2 = gy \frac{4ML + 2mL - my}{2ML + mL - my}$$

$$v = \sqrt{gy \left(\frac{4ML + 2mL - my}{2ML + mL - my}\right)}$$

(b) 加速度 $a = \frac{dv}{dt}$ 。由 $\frac{d}{dt}(v^2) = \frac{d}{dt} \left(gy \frac{4ML + 2mL - my}{2ML + mL - my} \right)$ ，得

$$2v \frac{dv}{dt} = g \frac{dy}{dt} \left[\frac{(2ML + mL - my)(4ML + 2mL - 2my) + my(4ML + 2mL - my)}{(2ML + mL - my)^2} \right]$$

$$a = \frac{dv}{dt} = g \left[1 + \frac{my(4ML + 2mL - my)}{2(2ML + mL - my)^2} \right]$$

將上式對 y 微分，可以算出加速度 a 對 y 的變化關係，即

$$\frac{da}{dy} = mg \frac{(2M + m)^2 L^2}{(2ML + mL - my)^3}$$

由上式知當 $y < L$ 時， $\frac{da}{dy} > 0$ ，故 a 隨著 y 的增加而增大，所以最大加速度發生在 $y=L$ 處，即

$$a_{(y=L)} = g \left[1 + \frac{m(4M+m)}{8M^2} \right]$$

注意此最大加速度顯然大於重力加速度 g 。如果 M 為人體，且繩重等於人體的重量，則此人進行高空彈跳時，在下降過程中所受的最大加速度約為 $1.6g$ 。

三、解：

(a) 起始時，繩上的張力 T 與質點角速度的關係式為 $T = mr_0\omega_0^2$ ，質點對 O 點的角動

量為 $L = mr_0^2\omega_0$ 。當 T 緩慢地增至 $T + \Delta T$ 時，設質點的圓運動半徑變為 R ，角速度變為 ω ，則

$$T + \Delta T = mR\omega^2 \dots\dots\dots (1)$$

質點對 O 點的角動量守恆，故

$$L = mR^2\omega = mr_0^2\omega_0$$

故 $\omega = \frac{r_0^2\omega_0}{R^2} \dots\dots\dots (2)$

將上式代入(1)式，得

$$T + \Delta T = mR \left(\frac{r_0^2\omega_0}{R^2} \right)^2 = m \frac{r_0^4\omega_0^2}{R^3}$$

由上式，得 $R = \left(\frac{mr_0^4\omega_0^2}{T + \Delta T} \right)^{1/3} = r_0 \left(\frac{T}{T + \Delta T} \right)^{1/3} \dots\dots\dots (3)$

$$\omega = \omega_0 \left(\frac{r_0}{R} \right)^2 = \omega_0 \left(\frac{T + \Delta T}{T} \right)^{2/3}$$

(b) 若質點在瞬間被拉動時，在徑向方向上有一初速為 v_0 ，則質點會以 R 為平衡的徑向距離，做來回振動。設其在徑向上偏離 R 的位移為 Δ ，即其徑向坐標為 $r = R + \Delta$ ，則在徑向的運動方程式為

$$m(\ddot{R} + \ddot{\Delta} - (R + \Delta)\dot{\theta}^2) = -(T + \Delta T) \dots\dots\dots (4)$$

又因質點角動量守恆，故

$$m(R + \Delta)^2\dot{\theta} = L \quad \text{或} \quad \dot{\theta} = \frac{L}{m(R + \Delta)^2}$$

將上式代入(4)式，得

$$m\left(\ddot{R} + \ddot{\Delta} - \frac{L^2}{m^2(R+\Delta)^3}\right) = -(T + \Delta T) \dots\dots\dots(5)$$

在小幅振盪的條件下， $R \gg \Delta$ ，故

$$\frac{1}{(R+\Delta)^3} = \frac{1}{R^3} \left(1 + \frac{\Delta}{R}\right)^{-3} \approx \frac{1}{R^3} \left(1 - \frac{3\Delta}{R}\right)$$

將上式代入(5)式，並利用 $\ddot{R} = 0$ ，得

$$m\ddot{\Delta} - \frac{L^2}{mR^3} \left(1 - \frac{3\Delta}{R}\right) = -(T + \Delta T)$$

又因

$$\frac{L^2}{mR^3} = \frac{(mR^2\omega)^2}{mR^3} = mR\omega^2 = T + \Delta T$$

所以 $m\ddot{\Delta} + \frac{L^2}{mR^3} \left(\frac{3\Delta}{R}\right) = 0 \dots\dots\dots(6)$

(6)式為一簡諧運動方程式，其振盪角頻率 Ω 為

$$\Omega = \sqrt{\frac{3L^2}{m^2R^4}} = \frac{\sqrt{3}L}{mR^2}$$

(c)(6)式之通解為

$$\Delta = A \cos \Omega t + B \sin \Omega t \dots\dots\dots(7)$$

將起始條件代入； $t=0$ 時， $\Delta = r_0 - R$ ， $\dot{\Delta} = v_0$ ，得 $A = r_0 - R$ ，又由

$$\dot{\Delta} = -A\Omega \sin \Omega t + B\Omega \cos \Omega t$$

得 $\dot{\Delta}(t=0) = B\Omega = v_0$ ，故 $B = \frac{v_0}{\Omega}$ 。

將A、B之值代回(7)式，得

$$\Delta = (r_0 - R) \cos \Omega t + \frac{v_0}{\Omega} \sin \Omega t$$

質點徑向位移之振幅為 $\sqrt{(r_0 - R)^2 + \left(\frac{v_0}{\Omega}\right)^2}$ ，

故質點離O點最遠的距離 $r_2 = R + \sqrt{(r_0 - R)^2 + \left(\frac{v_0}{\Omega}\right)^2}$ ，

質點離O點最近的距離 $r_1 = R - \sqrt{(r_0 - R)^2 + \left(\frac{v_0}{\Omega}\right)^2}$ 。

$$(d) L = m(R + \Delta)^2 \dot{\theta}$$

$$\text{所以 } \dot{\theta} = \frac{L}{m(R + \Delta)^2} \approx \frac{L}{mR^2} \left(1 + \frac{\Delta}{R}\right)^{-2} \approx \frac{L}{mR^2} \left(1 - \frac{2\Delta}{R}\right)$$

將上式對 t 積分，得

$$\theta(t) = \frac{L}{mR^2} t - \frac{2L}{mR^3} \left[\frac{(r_0 - R)}{\Omega} \sin \Omega t - \frac{v_0}{\Omega^2} \cos \Omega t \right] + C$$

因 $\theta(t=0) = 0$ ，故

$$0 = \frac{2L}{mR^3} \frac{v_0}{\Omega^2} + C, \text{ 得 } C = -\frac{2L}{mR^3} \frac{v_0}{\Omega^2}。$$

$$\theta(t) = \frac{L}{mR^2} t - \frac{2L}{mR^3} \left[\frac{(r_0 - R)}{\Omega} \sin \Omega t - \frac{v_0}{\Omega^2} \cos \Omega t \right] - \frac{2L}{mR^3} \frac{v_0}{\Omega^2}$$

四、解：

(a) 當中間隔板被緩緩移動時，左、右二室中之氣體均進行可逆的絕熱過程，在此過程中 $TV^{r-1} = \text{常數}$ ，其中 $r = \frac{5}{3}$ 。所以

$$T_L V_L^{r-1} = T_R V_R^{r-1} = T_0 V_0^{r-1} \dots\dots\dots (1)$$

式中 T_L 及 T_R 分別表示左室及右室氣體在體積為 V_L 及 V_R 時的絕對溫度。

由(1)式得

$$T_L = T_0 \left(\frac{V_0}{V_L} \right)^{r-1} \dots\dots\dots (2)$$

$$T_R = T_0 \left(\frac{V_0}{V_R} \right)^{r-1}$$

當中間隔板之絕熱片被抽去後，左、右二室氣體之溫度會趨向一致。在此過程中容器中氣體與外界無熱能之交換，亦未做功，故按熱力學第一定律，其總內能不變。設左、右二室氣體之莫耳數為 n ，最後的平衡溫度為 T_f ，則

$$\frac{3}{2} nR(T_L + T_R) = 3nRT_f$$

故得

$$T_f = \frac{1}{2}(T_L + T_R)$$

由(2)式得

$$T_f = \frac{T_0}{2} V_0^{r-1} \left(\frac{1}{V_L^{r-1}} + \frac{1}{V_R^{r-1}} \right) \dots\dots\dots (3)$$

(b) 將 T_f 表以 V_L 之函數，得

$$T_f = \frac{T_0}{2} V_0^{r-1} [V_L^{1-r} + (2V_0 - V_L)^{1-r}]$$

先求 T_f 之極值，

$$\frac{dT_f}{dV_L} = \frac{T_0}{2} V_0^{r-1} [(1-r)V_L^{-r} - (1-r)(2V_0 - V_L)^{-r}] = 0$$

由上式得 $V_L = V_0$ ，亦即當 $V_L = V_0$ 時， T_f 有極值，其值為

$$(T_f)_{\text{極值}} = \frac{T_0}{2} V_0^{r-1} [V_0^{1-r} + (2V_0 - V_0)^{1-r}] = T_0$$

再判斷此一極值為極大或極小，

$$\frac{d^2 T_f}{d^2 V_L} = \frac{T_0}{2} V_0^{r-1} [(1-r)(-r)V_L^{-r-1} + (1-r)(-r)(2V_0 - V_L)^{-r-1}]$$

當 $V_L = V_0$ 時，上式為

$$\left(\frac{d^2 T_f}{d^2 V_L} \right)_{V_L=V_0} = \frac{T_0}{2} V_0^{r-1} [(1-r)(-r)2V_0^{-r-1}] = -T_0(1-r)rV_0^{-2}$$

因 $r = \frac{5}{3}$ ，所以 $-(1-r)r = \frac{10}{9} > 0$

故 $\left(\frac{d^2 T_f}{d^2 V_L} \right)_{V_L=V_0} > 0$ ，即 T_f 在 $V_L = V_0$ 時為極小值。因此只要中間隔板被移動，

$V_L \neq V_0$ ， T_f 都大於 T_f 的極值 T_0 。

(c) 在中間隔板被移動的過程中，壓力較大的一方氣體所做之功為負，壓力較小之一方氣體所做之功為正，隔板移動位移之量值對左、右室的氣體是一樣的，故左、右二室氣體所做之總功為負，

$$\Delta W < 0$$

由熱力學第一定律，容器內氣體內能之變化量 ΔU 為

$$\Delta U = \Delta Q - \Delta W = -\Delta W$$

所以在隔板移動過程中， $\Delta U > 0$ 。又因氣體在絕熱片被抽去後內能不變，故

$$U_f - U_i = 3nR(T_f - T_0) > 0$$

故 $T_f > T_0$ 。

(d) 熱力學第一定律 $du = Tds - Pd v$ ，式中 s 、 u 及 v 分別代表理想氣體的莫耳熵、莫耳內能、和莫耳體積，可改寫為

$$ds = \frac{du}{T} + \frac{P}{T} dv = \frac{3}{2} R \frac{dT}{T} + \frac{R dv}{v}$$

上式兩邊積分後，可得

$$s = \frac{3}{2} R \ln T + R \ln v + s_0$$
$$S = ns = \frac{3}{2} nR \ln T + nR \ln \frac{V}{n} + ns_0 \dots\dots\dots (4)$$

上式中 n 代表理想氣體的莫耳數， s_0 為一參考態之莫耳熵，當莫耳數不變時， ns_0 項可視為常數。

(c) 容器中氣體先經可逆絕熱過程，此一過程中的熵值不變，故由(4)式得

$$S_i = \frac{3}{2} nR \ln T_L + nR \ln \frac{V_L}{n} + ns_0 + \frac{3}{2} nR \ln T_R + nR \ln \frac{V_R}{n} + ns_0$$
$$= \frac{3}{2} nR \ln (T_L T_R) + nR \ln \left(\frac{V_L V_R}{n^2} \right) + 2ns_0$$

平衡後容器氣體之熵值為

$$S_f = \frac{3}{2} nR \ln T_f + nR \ln \frac{V_L}{n} + ns_0 + \frac{3}{2} nR \ln T_f + nR \ln \frac{V_R}{n} + ns_0$$
$$= \frac{3}{2} nR \ln (T_f^2) + nR \ln \left(\frac{V_L V_R}{n^2} \right) + 2ns_0$$

$$\text{故熵之變化 } \Delta S = S_f - S_i = \frac{3}{2} nR \ln \left(\frac{T_f^2}{T_L T_R} \right)$$

由(a)題的結果知 $T_f^2 = \frac{1}{4} (T_L + T_R)^2$ ，將此式代入 ΔS 之關係式中，得

$$\Delta S = \frac{3}{2} nR \ln \frac{(T_L + T_R)^2}{4 T_L T_R}$$

又因 $(T_L + T_R)^2 - 4 T_L T_R = (T_L - T_R)^2 > 0$ ，所以 $\frac{(T_L + T_R)^2}{4 T_L T_R} > 1$ ，故

$$\Delta S > \frac{3}{2} nR \ln 1 = 0$$

(f) 當中間隔板之絕熱片被抽去後，左、右二室氣體之溫度趨於一致，這是一個不可逆過程，在孤立熱力系統中如發生一不可逆過程，熵是要增加的。

五、解：

(a) 設通入微量的氮氣後，容器內氣體總壓力的改變量為 dP ，由於引入微量氮氣之前和之後，水與水蒸氣皆處於平衡態，因此

$$d\mu_l = d\mu_g \quad \Rightarrow \quad v_l dP = v_g dp = \frac{RT}{p} dp$$

$$\int_{p_0}^P v_l dP = \int_{p_0}^P \frac{RT}{p} dp \quad \Rightarrow \quad v_l (P - p_0) = RT \ln \frac{P}{p_0}$$

$$\therefore \ln \frac{P}{p_0} = \frac{v_l}{RT} (P - p_0)$$

當總壓力增加時水的蒸氣壓也隨之增加，因此通入愈多的氮氣，會有愈多的水蒸發。

(b) 水的單位莫耳體積 $v_l = (10^{-6} \text{ m}^3 / \text{g}) \times (18 \text{ g} / \text{mol}) = 18 \times 10^{-6} \text{ m}^3 / \text{mol}$

$$\ln \frac{P}{p_0} = \frac{v_l}{RT} (P - p_0) = \frac{18 \times 10^{-6}}{8.31 \times 300} (1.01 \times 10^7 - 3.6 \times 10^3) \approx 7.30 \times 10^{-2}$$

$$\therefore \ln \frac{p_0 + \Delta p}{p_0} = \ln \left(1 + \frac{\Delta p}{p_0} \right) \approx \frac{\Delta p}{p_0} \quad \therefore \Delta p = 7.30 \times 10^{-2} p_0$$

蒸氣壓的改變量非常小。

(c) 設球形水珠內部的壓力為 P_i ，水珠外部的壓力為 P_e ，則

$$(P_i - P_e) \pi r^2 = 2\pi r S \quad \Rightarrow \quad P_i - P_e = \frac{2S}{r}$$

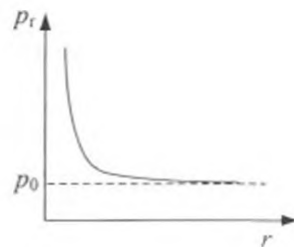
水珠內的半徑愈小，內外的壓力差愈大。

(d) 將(a)小題中的水蒸氣壓力 p 和氣體總壓力 P 分別以 p_r 和 $(p_r + \frac{2S}{r})$ 取代，可得

$$\ln \frac{p_r}{p_0} = \frac{v_l}{RT} \left(p_r + \frac{2S}{r} - p_0 \right) \approx \frac{v_l}{RT} \frac{2S}{r}$$

$$\therefore p_r = p_0 \exp(2v_l S / rRT)$$

水珠於熱力平衡態時，其蒸氣壓和其半徑 r 的關係曲線如右圖所示。



(c) 設此半徑為 r_c ，則 $p_c = p_0 \exp(2v_l S / r_c RT)$ ，得平衡時的水珠半徑為

$$r_c = \frac{2v_l S}{RT \ln\left(\frac{p_c}{p_0}\right)}$$

如果有一水珠，其半徑 $r < r_c$ ，則其飽和蒸氣壓 $p_r > p_c$ ，水珠將會蒸發，因此 r_c 為能存活的水珠的最小半徑。在蒸氣中如果沒有幫助凝結的核時，液滴便不容易產生。

2001年國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊決選研習營

筆試(二)試題

90年4月4日 14:00-17:00

- 一、本試題共五大題，每大題二十分，總分一百分。
- 二、考試時間三小時。
- 三、在指定的答案紙上作答。
- 四、可使用無程式掌上型計算機。

2001 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
 決選研習營筆試(二)試題

一、早期的科學家並不清楚原子的真正結構，十九世紀末英國科學家湯木生提出所謂的「湯木生原子模型」，即 Z 個電子散佈於背景由 $+Ze$ 電荷均勻分佈的原子球體。今以 α 粒子對湯木生原子做散射實驗：如圖 1 所示，一初速度為 v ，質量為 m 的 α 粒子以撞擊參數 b 入射一原子序為 Z ($Z \gg 2$)、半徑為 R 的湯木生原子。因 α 粒子的質量遠大於電子，故在散射過程中，電子均將被撞離原子，因此所有電子對 α 粒子的作用均可忽略。求

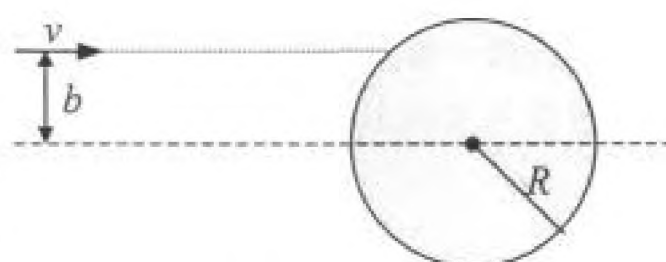


圖 1 湯木生原子

- 若 α 粒子和湯木生原子球體中心的徑向距離為 r ，則此 α 粒子在射入原子前後所受的靜電力各為何？
- 由實驗結果得知， α 粒子射擊原子後所得的散射角很小。試從理論估計 α 粒子的散射角。
- 若以 5 MeV 的 α 粒子入射原子序為 79 的金箔，假設金原子的半徑為 0.10 nm ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$)，求 α 粒子的平均散射角。

二、本題為有關電容的問題：

- 如圖 2-1 所示，有一內徑為 b ，厚度為 d 之薄金屬球殼，求此球殼之電容。
- 如圖 2-2 所示，在題(a)的球殼內置一同心、半徑為 a ($a < b$) 的金屬圓球，求此同心球體系統的電容。
- 如圖 2-3 所示，在題(b)中，我們假設同心球體系統為孤立系統，即遠離其他導體。實際上，一般物體均靠近地球，而地球為一良導體。考慮地球的影響，今將金屬球殼以長線接地，則此系統的電容為多少？

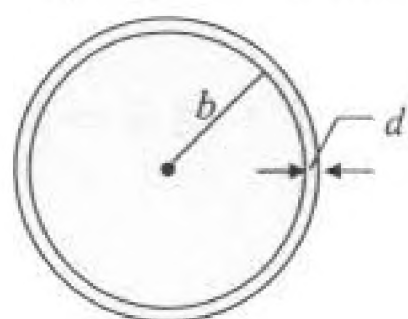


圖 2-1

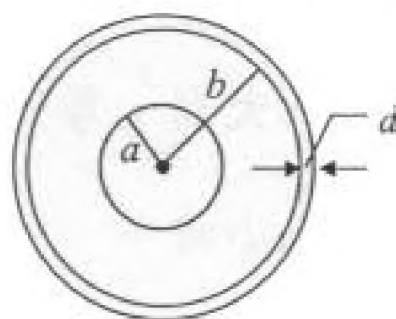


圖 2-2

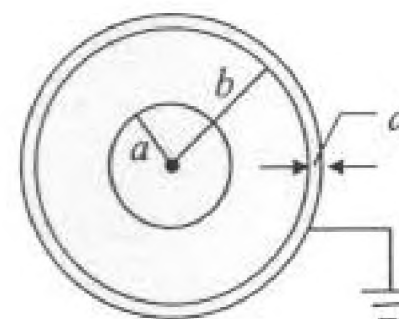


圖 2-3

- 如圖 2-4 所示，若金屬球殼上挖一小孔，利用導線，將題(c)中的內球接地，而外殼不接地，求(i)此系統的電容。(ii) 若外球殼帶有電荷時，球殼外表面與內表面所帶之電量比為多少？

(提示：一般導體與地球間之電容，可近似視為孤立導體之電容。)

- (e)取兩個題(b)中的同心球導體系統，令二系統相距甚遠。今將一同心球體系統之外球以導線接地，內球以導線與另一同心球體之外球連接如圖 2-5 所示，若在左內球加一電壓求此系統之電容。

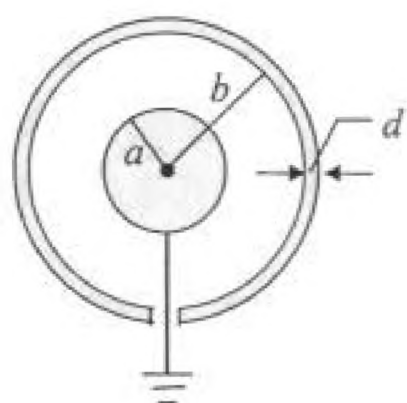


圖 2-4

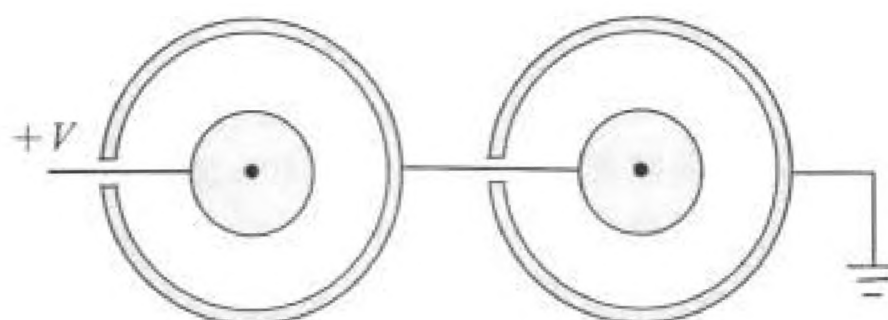


圖 2-5

- 三、鈎子(muon)和電子同屬於輕子(lepton)，鈎子所帶的電量和電子相同，但其質量則為電子的 207 倍。靜止鈎子的半衰期為 1.5×10^{-6} 秒，質量是 $106 \text{ MeV}/c^2$ ，
- (a)若在離地表 $H = 1.0 \times 10^4$ 公尺處的鈎子，有半數要到達地球表面，則鈎子需要有多大的能量(鈎子的速度接近光速)? (以 MeV 表示之。)
- (b)若假設地球磁場在離地表 $H = 1.0 \times 10^4$ 公尺範圍內皆為均勻，鈎子從赤道面上方處以垂直地表的方向入射，試問鈎子(帶有電量 $-e$)作何種運動，又偏向角如何?
- (c)假設宇宙射線的高能質子，可與宇宙背景輻射的光子(其溫度約為絕對溫度 3 度)碰撞產生 π 介子：



試問一個質子需要有多大的能量才能產生此反應? 以目前人類所能加速的質子，是否有可能產生此反應? 已知質子的靜止質量為 $938 \text{ MeV}/c^2$ ， π 介子的靜止質量為 $135 \text{ MeV}/c^2$ ，波茲曼常數 $k_B = 8.62 \times 10^{-11} \text{ MeV} \cdot \text{K}^{-1}$ 。

- 四、一原子的能階可寫為 $E_n = -\frac{A}{n^2}$ ，式中 n 是整數(即量子數)， A 是常數。在室溫時，某原子的吸收光譜中有二條相鄰的吸收線 975 \AA 和 1028 \AA 。
- (a)該兩條吸收線是由哪兩個能階間的變遷所造成?
- (b)求常數 A 的數值以 eV 表示之。
- (c)該原子可能是週期中的哪一個原子?

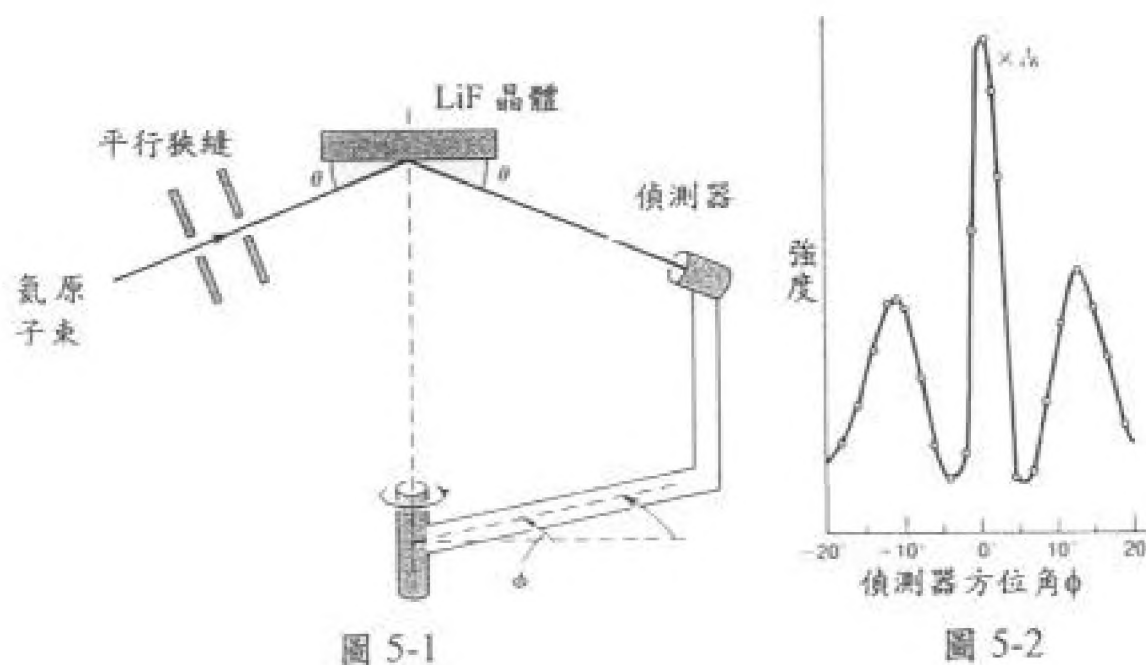
【註】 $1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$ ， $c = 2.998 \times 10^8 \text{ m/s}$ ， $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ Js}$ 。

- 五、1924 年德布羅意(de Broglie)提出物質波的假設後不久，隨即在第二年獲得德維生(Davisson)和革末(Germer)兩人的實驗證實，電子束在鎳晶體表面的反射確有出現

干涉的現象。1930年意斯特曼(Estermann)和史特恩(Stern)利用圖 5-1 的實驗裝置，證實中性的氦原子也具有物質波的特性。在圖中氦原子束通過一對平行狹縫後，入射在 LiF 晶體的表面上。偵測器是一種非常靈敏的壓力計，當氦原子進入後會顯示壓力的增加。該偵測器可繞一垂直於晶體表面的轉軸轉動，當 $\phi = 0$ 時，偵測器恰位在反射線上（即在入射面（紙面）上）。當 $\phi \neq 0$ 時，偵測器偏離紙面，這時可偵測到產生繞射的氦原子束。圖 5-2 為實驗結果，中間高峰為氦原子束經反射後的強度，兩旁的相對峰值為氦原子束的繞射強度，顯示氦原子確有波動的特性。由於實驗所用的氦原子僅具有熱能，能量甚低，穿透力很小，因此氦原子束僅在晶體表面層反射，其情形如圖 5-3 和 5-4 所示。圖中 D 代表 LiF 晶體內同類原子間的間隔， ϕ 為氦原子束繞射時，偏離入射面的角度，回答下列各題：

- (a) 氦原子束繞射時，產生完全相長性干涉的條件為何？（設 λ 為氦原子的物質波波長。）
- (b) 史特恩改用圖 5-5 的實驗裝置。他用一對有槽孔的精密轉輪取代原來的平行狹縫，作為速度選擇器，藉此可以選擇不同波長的氦原子束。兩轉輪之間的距離為 $s = 3.10\text{cm}$ ，每一輪上的槽孔數 $N = 408$ 。兩轉輪同步轉動，其槽孔在實驗前皆經過調整使精確對齊。設轉輪的頻率為 f ，則在通過速度選擇器的氦原子中，其最快者的物質波波長（以 \AA 為單位）為何？（以 f 表示之。）
- (c) 上題(b)的實驗結果如圖 5-6 所示。利用該實驗數據，計算 D 值。

【註】卜朗克常數 $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ，氦原子質量 $m = 4\text{amu}$ ， $1\text{amu} = 1.661 \times 10^{-27} \text{ kg}$ 。



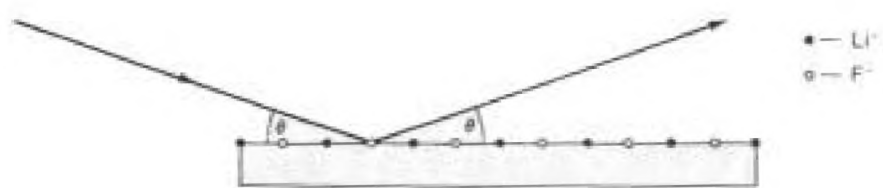


圖 5-3

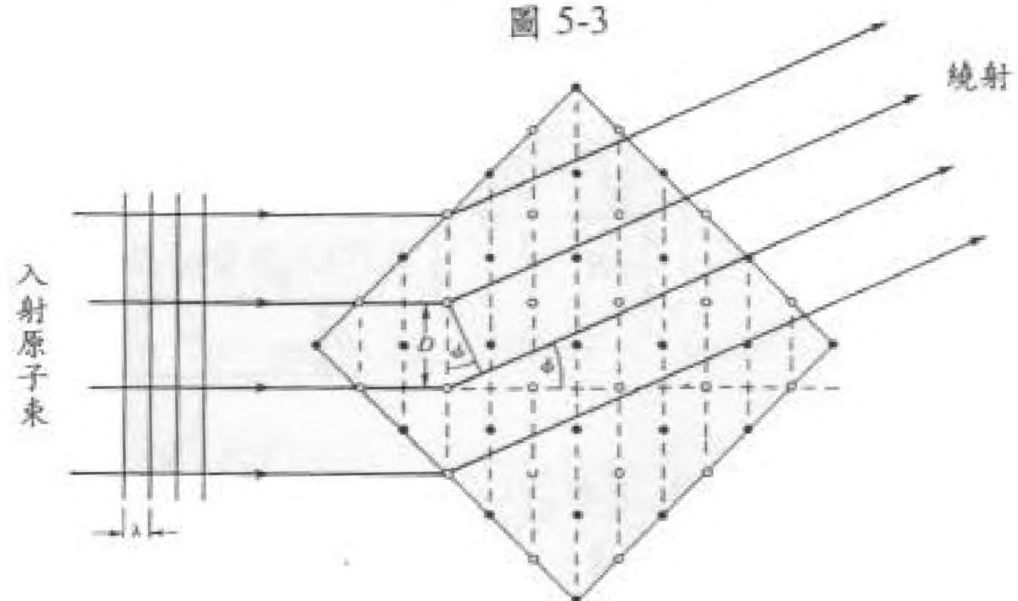


圖 5-4

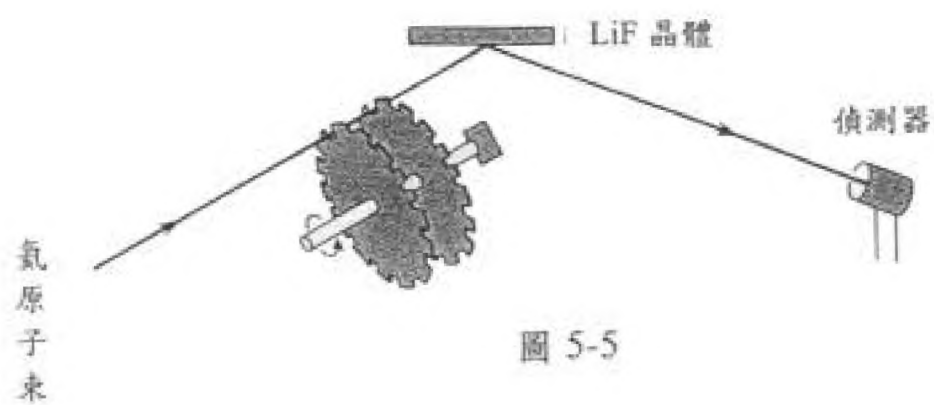


圖 5-5

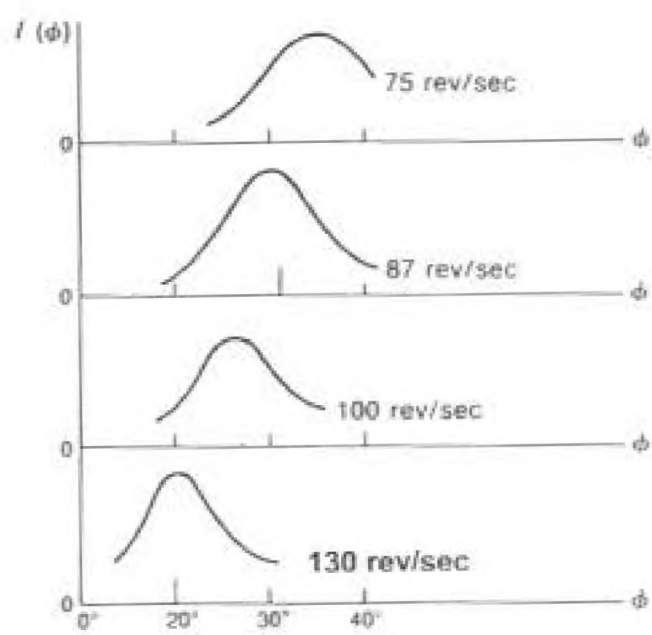


圖 5-6

2001 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試

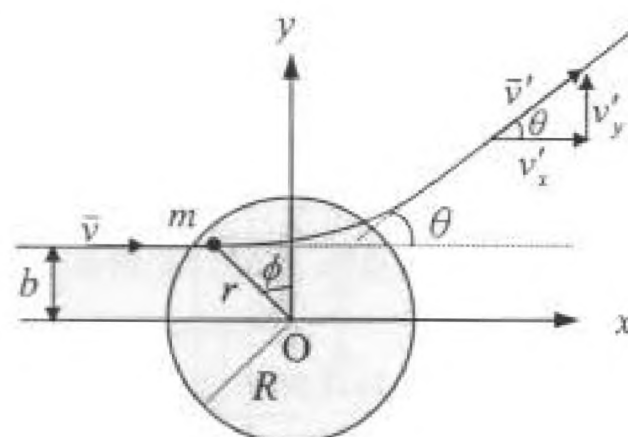
決選研習營筆試(二)試題參考解答

一、解：

- (a) 由於湯木生原子為電中性，在 α 粒子尚未進入原子內部之前，沒有受到靜電力的作用，即當 $r > R$ 時， $F = 0$ 。當 α 粒子射入原子內時，若其離原子中心 O 點的徑向距離為 r ($r < R$)，則所受的靜電力為

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ'}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \left(\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \right)$$

$$= \left(\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right) r$$



式中 $q = ze$ ，為 α 粒子所帶的電量； $Q = Ze$ ，為湯木生原子所帶正電荷的總量。

- (b) 在 α 粒子穿過原子的過程中，該粒子在 y 方向所受的動量變化為

$$\Delta p_y = \int F_y dt = \int (F \cos \phi) dt = \int \left(\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right) r \cos \phi dt \quad (1)$$

由於 α 粒子的散射角甚小，故 $\cos \phi \approx \frac{b}{r}$ ，以之代入上式，得

$$mv'_y = \int \left(\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right) r \cos \phi dt \approx \left(\frac{qQb}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right) t \quad (2)$$

式中 t 為 α 粒子穿越原子的時間。由於 α 粒子的速度相當大，且散射角甚小，其軌跡接近一直線，故 $t \approx \frac{2\sqrt{R^2 - b^2}}{v}$ ，代入(2)式，可得

$$mv'_y \approx \left(\frac{qQb}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right) \frac{2\sqrt{R^2 - b^2}}{v} \quad (3)$$

基於上述同樣的理由， α 粒子在穿越原子的前後，其沿 x 軸的速度分量幾乎不變，即

$$v'_x \approx v \quad (4)$$

由(3)和(4)兩式可得 α 粒子的散射角為

$$\theta \approx \tan \theta = \frac{v'_y}{v'_x} \approx \left(\frac{qQb}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right) \frac{2\sqrt{R^2 - b^2}}{mv^2} = \left(\frac{2zZe^2b}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right) \frac{\sqrt{R^2 - b^2}}{mv^2} \quad (5)$$

(c) 當一束 α 粒子對金屬薄片散射時，其平均散射角為

$$\bar{\theta} \approx \left(\frac{2zZe^2}{4\pi\epsilon_0 R^3 mv^2} \right) b \sqrt{R^2 - b^2} \quad (6)$$

因為 $0 < b < R$ ，故 $\bar{b} = \frac{R}{2}$ ，上式可近似為

$$\bar{\theta} = \left(\frac{2zZe^2}{4\pi\epsilon_0 R^3 mv^2} \right) \frac{R}{2} \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} \left(\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 R mv^2} \right) \quad (7)$$

將下列的已知量代入(7)式：

$$R = 1.0 \times 10^{-10} \text{ m}, \quad mv^2 = 2E_k = 10 \text{ MeV} = 1.6 \times 10^{-12} \text{ J}, \quad z = 2, \quad Z = 79, \quad e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$\therefore \bar{\theta} = \sqrt{\frac{3}{4}} \left(9 \times 10^9 \times \frac{2 \times 79 \times (1.6 \times 10^{-19})^2}{1 \times 10^{-10} \times 1.6 \times 10^{-12}} \right) = 1.97 \times 10^{-4} \text{ rad} = 0.011^\circ$$

與 Geiger 和 Marsden 所得的實驗結果， $\bar{\theta} \approx 2 \times 10^{-2} \text{ rad} \approx 1^\circ$ ，相差甚大。

二、解：

(a) 球殼上的電位 $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(b+d)}$ ，根據電容的定義， $C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0(b+d)$ 。

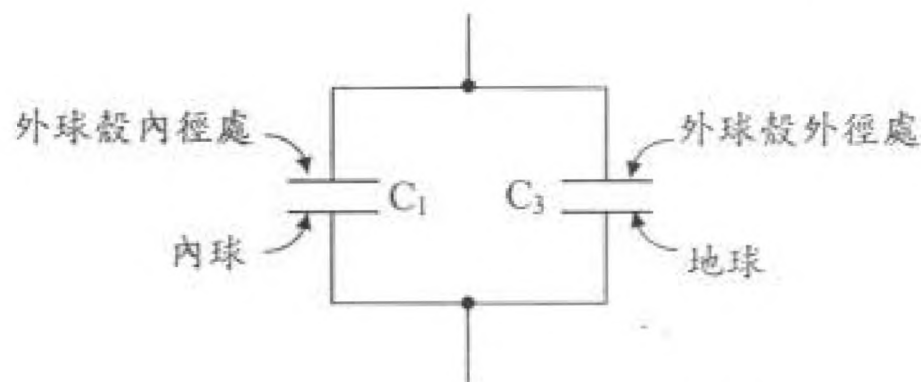
(b) 由球殼內的電場強度 $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$ ，可求得外球殼和內球之間的電位差為

$$\Delta V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_a^b = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{b-a}{ab} \right)$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{ab}{b-a} \right)$$

(c) 題(b)的答案忽略外殼與地球之間的電容。接地後，無此電容，故答案同題(b)。

(d) (i) 此系統相當於 C_1 和 C_2 兩電容並聯， $C_1 = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{a-b}$ 為外球殼和內球之間的電



容； $C_3 = 4\pi\epsilon_0(b+d)$ 為外球殼和地球之間的電容，可近似視為孤立球體之電

容。故此系統的電容 $C = C_1 + C_3 = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{ab}{b-a} + b+d \right)$ 。

(ii) 因外球殼的內外表面的電位相等， $\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_3}{C_3}$ ，得

$$\frac{Q_3}{Q_1} = \frac{C_3}{C_1} = \frac{(b+d)(a-b)}{ab}$$

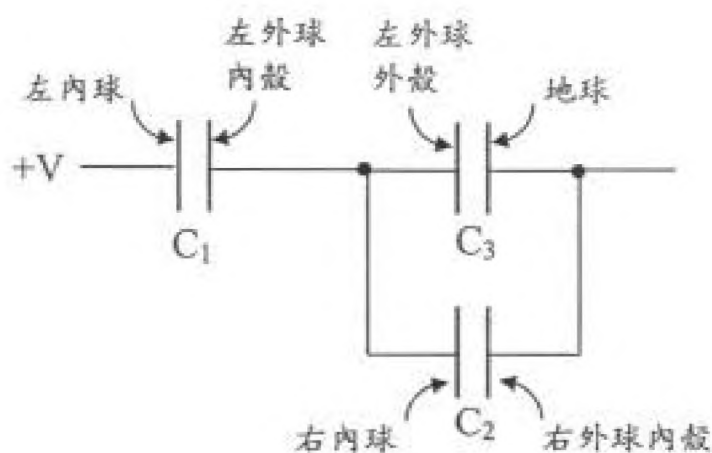
(c) 此系統相當於 C_2 與 C_3 並聯後，再與 C_1 串聯。

$$C_1 = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$

$$C_2 = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$

$$C_3 = 4\pi\epsilon_0 (b+d)$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2 + C_3}$$



得此系統的總電容為

$$C = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{ab}{b-a} \right) \left[\frac{ab + (b+d)(b-a)}{2ab + (b+d)(b-a)} \right]$$

三、解：

(a) 由相對論公式 $\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ ，式中 Δt_0 為中子靜止時的半衰期，因

$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ ，故可得 $\Delta t = \Delta t_0 \left(\frac{E}{m_0 c^2} \right)$ 。若假設中子的速度約為光速 c ，

H 為中子離地表的起始高度，則 $\Delta t \approx \frac{H}{c}$ ，即

$$\Delta t_0 \left(\frac{E}{m_0 c^2} \right) \approx \frac{H}{c}$$

故中子要有半數到達地球表面，則所需要的能量為

$$E \approx \frac{H m_0 c^2}{c \Delta t_0} = \frac{1.0 \times 10^4 \times 106}{3.0 \times 10^8 \times 1.5 \times 10^{-6}} = 2.4 \times 10^3 \text{ MeV}$$

(b) 中子在磁場中的運動方程式為

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (1)$$

式中鈔子的動量 $\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ 。上式兩邊內乘以 \vec{p} ，可得

$$\begin{aligned}\vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} &= \vec{p} \cdot (q\vec{v} \times \vec{B}) = 0 \\ \frac{d}{dt}|\vec{p}|^2 &= 0\end{aligned}\quad (2)$$

因此 $|\vec{p}| = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \text{常數}$ ，即速率 v 為一常數，但速度方向則隨時間變動。

(1)式可改寫為

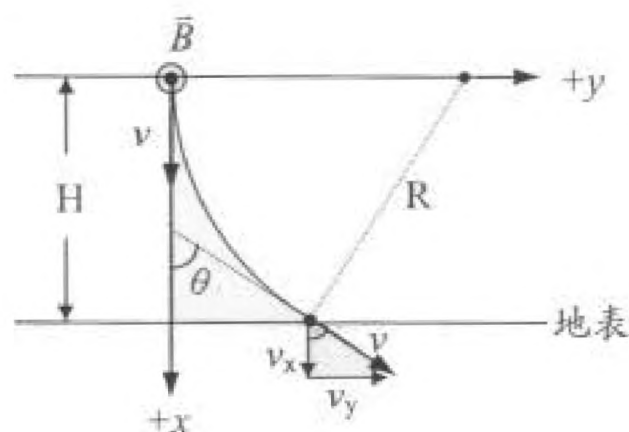
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) &= q\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow \left(\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B} \\ \frac{d\vec{v}}{dt} &= \vec{v} \times \vec{\omega}\end{aligned}\quad (3)$$

式中 $\vec{\omega} = \frac{q\vec{B}}{m_0} \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ ， $q = -e$ 。由於鈔子的速度和磁場方向垂直，若磁場均勻，

則(3)式顯示鈔子的運動軌跡為一半徑為 R 、轉動角速度為 ω 的圓周運動。證明如下：

如右圖所示，取紙面為赤道面，向地心方向為 $+x$ ，向上垂直於紙面的方向為磁場方向（即正北方），由(3)式可得

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = -\omega v_y \\ \frac{dv_y}{dt} = \omega v_x \\ \frac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases}$$



利用起始條件，即 $t=0$ 時， $\vec{v} = v\hat{i}$ ，上式之解為

$$\begin{cases} v_x(t) = v \cos(\omega t) \\ v_y(t) = v \sin(\omega t) \\ v_z = 0 \end{cases}\quad (4)$$

鈔子的軌跡方程式為

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v}{\omega} \sin(\omega t) = R \sin(\omega t) \\ y(t) = R - R \cos(\omega t) \end{cases}\quad (5)$$

或

$$x^2 + (y - R)^2 = R^2 \quad (6)$$

由於 $v = R\omega$ ，故

$$R = \frac{v}{\omega} = \frac{m_0 v}{qB\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{mv}{qB} \quad (7)$$

當綳子到達地表時， $x(t') = H$ ，利用(5)式，可得

$$\sin(\omega t') = \frac{H}{R} \quad (8)$$

由(4)式可得

$$v_x(t') = v\sqrt{1 - \frac{H^2}{R^2}}, \quad v_y(t') = \frac{vH}{R} \quad (9)$$

設綳子的偏向角為 θ ，則

$$\tan \theta = \frac{v_y(t')}{v_x(t')} = \frac{H}{R} \sqrt{1 - \frac{H^2}{R^2}} \approx \frac{H}{R} = \frac{eHB}{m_0 v / \sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{eHB}{p} \quad (10)$$

由相對論能量-動量公式， $E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$ ，(10)式可寫為

$$\tan \theta \approx \frac{eHB}{\sqrt{E^2 - m_0^2 c^4}} \quad (11)$$

- (3) 利用洛仁茲不變量 $(E^2 - p^2 c^2)$ ，且當反應為最小能量時，生成物的動量為零，可得(ν 代表背景輻射光子的頻率)

$$(E_p + E_\nu)^2 - (\vec{p}_p + \vec{p}_\nu)^2 c^2 = (m_x c^2 + m_\pi c^2)^2 - 0 \quad (12)$$

利用 $E_p^2 = p_p^2 c^2 + m_p^2 c^4$ 和 $E_\nu = p_\nu c$ ，代入上式可得

$$2E_p E_\nu \left(1 - \frac{p_p c}{E_p}\right) = m_\pi (m_\pi + 2m_p) c^4 \quad (13)$$

因為 $\frac{p_p c}{E_p} = \frac{m_p v_p c}{m_p c^2} = \frac{v_p}{c} \ll 1$ ，故

$$E_p \approx \frac{m_\pi (m_\pi + 2m_p) c^4}{2E_\nu} \approx 5.3 \times 10^{14} \text{ MeV} \quad (14)$$

以目前人類所能加速的質子，其能量不超過 $1000 \text{ GeV} (10^6 \text{ MeV})$ ，因此不可能產生此種反應。

四、解：

(a) 吸收線對應著原子從較低的能階激發到較高能階，即從量子數 n_1 激發到量子數 n_2 ， $n_1 < n_2$ ，對這種變遷 $n_1 \rightarrow n_2$ 所需的能量為

$$E(n_1 \rightarrow n_2) = \frac{A}{n_1^2} - \frac{A}{n_2^2}$$

吸收線的波長 $\lambda(n_1 \rightarrow n_2) = \frac{ch}{A} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)^{-1}$ ，式中 c 是光速， h 是卜朗克常數。

相鄰的吸收線必對應於 $n_1 \rightarrow n_2$ 及 $n_1 \rightarrow n_2 + 1$ 的能階變遷，中 $n_1 \rightarrow n_2 + 1$ 所需的能量較大，所以對應的波長較短。

$$\frac{\lambda(n_1 \rightarrow n_2)}{\lambda(n_1 \rightarrow n_2 + 1)} = \frac{\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{(n_2 + 1)^2}}{\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}} = \frac{1028}{975} = 1.054$$

$$\frac{0.054}{n_1^2} = \frac{1.054}{n_2^2} - \frac{1}{(n_2 + 1)^2}$$

$$n_2 = 2 \quad \Rightarrow n_1 = 0.595$$

$$n_2 = 7 \quad \Rightarrow n_1 = 3.028$$

$$n_2 = 3 \quad \Rightarrow n_1 = 0.994$$

$$n_2 = 8 \quad \Rightarrow n_1 = 3.620$$

$$n_2 = 4 \quad \Rightarrow n_1 = 1.445$$

$$n_2 = 9 \quad \Rightarrow n_1 = 4.235$$

$$n_2 = 5 \quad \Rightarrow n_1 = 1.938$$

$$n_2 = 10 \quad \Rightarrow n_1 = 4.867$$

$$n_2 = 6 \quad \Rightarrow n_1 = 2.467$$

n_1 較接近整數的值是 $n_1 = 1$ ，得 $n_2 = 3$ ，即相鄰兩吸收線所對應的能階變遷如下：

$$\lambda = 975 \text{ \AA} \quad n = 1 \rightarrow n = 4$$

$$\lambda = 1028 \text{ \AA} \quad n = 1 \rightarrow n = 3$$

(b) 由 $\lambda = 1028 \text{ \AA} = \frac{ch}{A} \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} \right)^{-1}$ ，得

$$A = \frac{2.998 \times 10^8 \times 6.626 \times 10^{-34}}{1028 \times 10^{-10}} \cdot \frac{9}{8} J = 2.174 \times 10^{-18} J = 13.57 eV \approx 13.6 eV$$

由 $\lambda = 975 \text{ \AA} = \frac{ch}{A} \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{4^2} \right)^{-1}$ ，得

$$A = \frac{2.998 \times 10^8 \times 6.626 \times 10^{-34}}{975 \times 10^{-10}} \cdot \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{4^2} \right)^{-1} J = 2.173 \times 10^{-18} J = 13.56 eV \approx 13.6 eV$$

(c) $A = 13.6\text{eV}$ 是氫原子的游離能量，故此原子是氫。

五、解：

(1) 氫原子束產生完全相長性干涉的條件為 $D \sin \phi = n\lambda$ ，式中 n 為任一正整數。

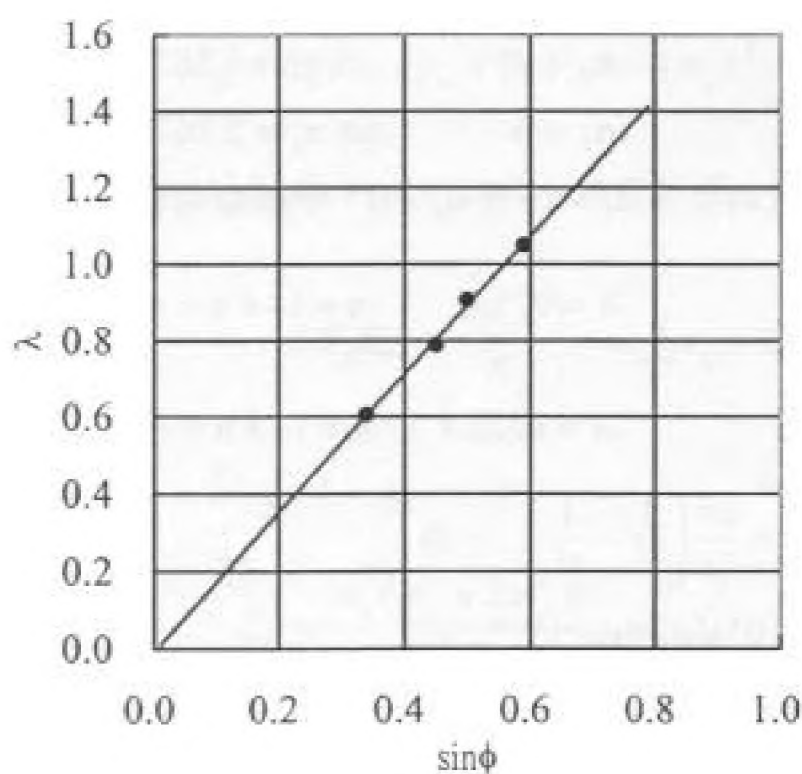
(2) 設 t 為最快的氫原子通過速度選擇器所需的時間，則 $t = \frac{s}{v} = \frac{T}{N}$ ，式中 T 為轉輪週期。由物質波公式可得

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{hT}{mNs} = \left(\frac{h}{mNs} \right) \frac{1}{f}$$

$$\lambda = \left(\frac{6.626 \times 10^{-34}}{4 \times 1.661 \times 10^{-27} \times 408 \times 3.10 \times 10^{-2}} \right) \frac{1}{f} = \frac{7.88 \times 10^{-9}}{f} \text{ m}$$

(3) 實驗數據整理如下表：

$f(\text{rev/s})$	$\lambda(\text{\AA})$	$\phi(^{\circ})$	$\sin\phi$
75	1.05	36	0.59
87	0.906	30	0.50
100	0.788	27	0.45
130	0.606	20	0.34



由圖上的直線斜率可得 $D = 1.8 \text{\AA}$ 。

2001年國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊決選研習營

理論模擬試題

2001年4月3日 08:00-13:00

- 一、本試題共三大題，每大題五十分，總分一百五十分。
 - 二、答卷時間五小時。
 - 三、在指定的答案紙上作答。
 - 四、在每題開始時請換用新頁。
 - 五、在每一頁答題紙的頂端寫明：
 - 題號
 - 該題所用答題紙之頁碼
 - 該題所用答題紙的總頁數
- 例(以第一題用了三頁紙為例)：
- | | |
|---|-----|
| 1 | 1/3 |
| 2 | 2/3 |
| 3 | 3/3 |

2001 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試

決選研習營理論模擬試題

本試題共三大題，每大題五十分，總分一百五十分。

- 一、本問題中，扭轉力矩指的是力偶的力矩。如圖 1 所示，一半徑為 r 、長度為 L 的圓柱，其對稱軸與 z 軸重合。若其兩端截面只受到沿 z 軸的扭轉力矩 τ 與 $-\tau$ 的作用，則兩端截面之相對角位移 ϕ ，與力矩 τ 成正比，此關係可用此圓柱體的切變模量 n 表示如下：

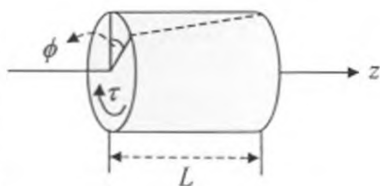


圖 1-1

$$\tau = n \frac{\pi r^4}{2} \left(\frac{\phi}{L} \right)$$

- 若如圖 1-2 所示，圓柱體兩端截面分別受到沿 xy 平面的切力（亦稱剪力） \vec{F} 與 $-\vec{F}$ 的作用，則兩端截面之相對位移 s ，與力之大小 F ，可表示成如下的正比關係：

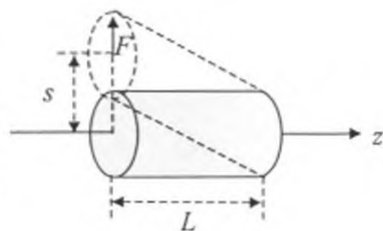


圖 1-2

$$F = n\pi r^2 \left(\frac{s}{L} \right)$$

設以質量為 m 、總長為 L 、切變模量為 n 的均勻長圓柱體，繞成一具有多圈之螺旋線彈簧。此彈簧線圈之半徑 R ，遠大於圓柱體之半徑 r 與螺旋線的螺距（在此問題中恆可視為零）。如圖 1-3 所示，將此彈簧一端固定，另端連接一長度為 R 、質量可以忽略、指向彈簧中心軸線之水平剛體短棒，其自由端懸掛一重量為 Mg 之物體。

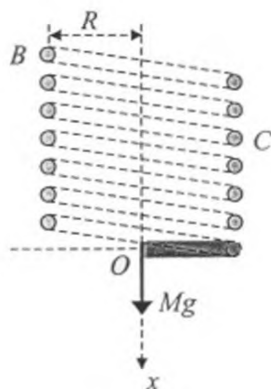


圖 1-3

設取沿彈簧軸線鉛直向下為 x 軸，並設最初處於靜力平衡時，物體位於座標原點 O 。回答下列各問題：

- (a) 若彈簧線圈上的 C 點，與其頂端 B 點之間的弧長為 s ，則達靜力平衡時，作用於 C 處鉛直截面的切力大小 $F(s)$ 與扭轉力矩大小 $\tau(s)$ 各為何？
- (b) 設以未懸掛物體時，彈簧底端所在之水平面為高度起算點。當其底端懸掛物體後，彈簧上各點之鉛直截面出現扭轉力矩，致各截面產生角位移，物體高度因而將下降 H ；各鉛直截面同時也出現切力，物體高度因而將下降 h 。試求 h 與 H 之比值。
- (c) 欲使彈簧各鉛直截面產生角位移，須施加扭轉力矩對彈簧作功。當彈簧底端鉛直截面之角位移（相對於頂端 B ）為 ϕ 時，彈簧之形變位能 $U_r(\phi)$ 為何？

- (d) 當物體相對於其平衡位置 O 的位移為 x 時，物體與彈簧的重力位能總和 U_g 及彈簧的形變位能 U_r 各變化多少？
- (e) 當物體沿 x 軸運動之速度為 v 時，物體與彈簧之動能各為何？
- (f) 物體沿 x 軸運動時，其運動方程式與上下振盪之週期 T 各為何？

二、如圖 2 所示，一長圓柱電容器，其內、外圓柱的半徑分別為 r_1 及 r_2 ，內外圓柱間的電位差維持為 V_0 。在電容器的中央部份，恰好位於內、外圓柱中央有一點電子源 S ，射出速率為 v_0 ，方向垂直於柱軸的電子。另有一電子偵檢器 A 和電子射源 S 位於同一高度、同一圓周上。設圓心為 O ，且 OS 連線與 OA 連線的夾角為 θ_0 ，回答下列問題：

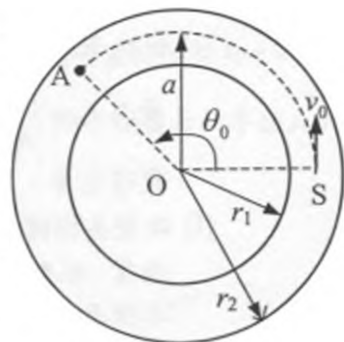


圖 2

- (a) 若電子射出的初速垂直於徑向，試問 v_0 需為何值，電子才會擊中偵檢器 A ？
- (b) 若電子射出的方向偏離(a)小題所述的速度方向，所偏的角度為 α 角 ($\alpha < 5^\circ$)，但初速方向和 OS 與 OA 位在同一平面上。若 v_0 維持(a)小題的數值，證明電子的軌跡可視為一種受擾動的圓周運動，即在徑向上電子做簡諧運動，並求其角頻率。
- (c) 欲使(b)小題中的電子要擊中偵檢器，則 θ_0 應取何值？

三、本題為有關聲光效應 (acousto-optic effect) 的問題。振動模式為縱波的聲波，在一均勻的透明固體中沿著 $+x$ 方向以速率 v_s 傳播。若固體的組成分子在某一瞬時的縱向振動位移函數為 $s(x) = a \sin(kx)$ ，式中 a 為振幅， k 為一常數，回答下列問題：

- (a) 此聲波的波長 λ_s 為何？
- (b) 在固體中此聲波的疏部中心與密部中心各在哪裡？
- (c) 設固體的原密度為 ρ_0 ，當聲波在在固體中沿 $+x$ 方向傳播時，會造成密度的微小變化。試求密度變化函數 $\Delta\rho(x) = \rho(x) - \rho_0$ ，以已知量表示之。

【註】參考圖 3-1，圖中的陰影部分代表一截面積為 A 的體積元， x 軸垂直於該截面。 Δx 為其寬度，當聲波傳到時，變為 $\Delta x'$ 。

- (d) 固體的折射率為 n ，因聲波在固體中傳播會造成的折射率的微小變化。若在空氣中波長為 λ_L 的光波，沿著與聲波波前夾成 θ 角的方向入射固體，則除了循原入射方向射出固體的光線之外，還有哪些方向可能有射出光？

【註】參考圖 3-2

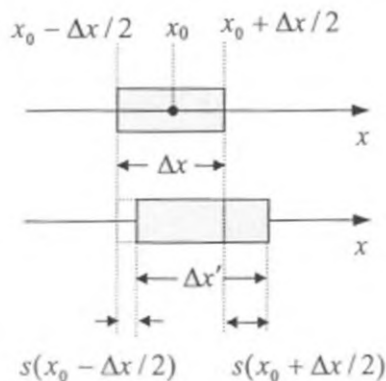


圖 3-1

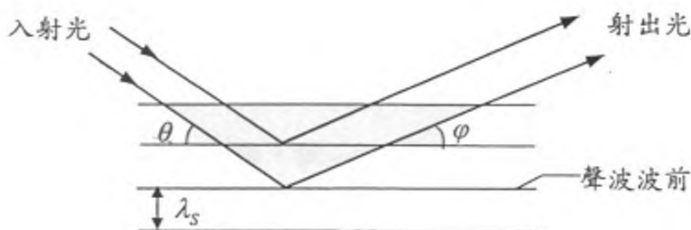


圖 3-2

- (e) 從粒子觀點來看，波可視為具有動量 \vec{p} 的粒子。對應於聲波的稱為聲子，其動量為 $p_s = \frac{h}{\lambda_s}$ ；對應於光波的稱為光子，其動量為 $p_L = \frac{h}{\lambda_L}$ 。光子會吸收聲子，獲得動量，使其傳播方向發生改變。試以粒子觀分析射出光可能的方向。
- (f) 改變在固體中傳播聲波頻率 f_s ，可以調整射出光的方向，掃瞄遠處屏幕，呈現圖案。若要掃瞄長寬皆為 D ，與固體距離為 L 的屏幕，則在固體中傳播的聲波，其頻率 f_s 的變化範圍 Δf_s 至少應為何？

2001 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
 決選研習營理論模擬試題參考解答

一、解：

(a) 達靜力平衡時，C 點鉛直面所受的(鉛直)切力與(水平)扭轉力矩分別為

$$F(s) = \left(M + \frac{L-s}{L} m \right) g, \quad \tau(s) = F(s)R = \left(M + \frac{L-s}{L} m \right) gR \quad (1)$$

(b) 如下圖，考慮彈簧線圈上弧長為 Δs 之一小段，其兩側鉛直面在扭轉力矩 τ 的作用

下，產生之角位移 $\Delta\phi$ ，則由題設公式得 $\tau = n \frac{\pi r^4}{2} \left(\frac{\Delta\phi}{\Delta s} \right)$ 。因彈簧圈面的半徑為 R ，

故物體因之下降的高度 Δx 為

$$\Delta x = R\Delta\phi = R \frac{2\tau\Delta s}{n\pi r^4} = F(s)R^2 \frac{2\Delta s}{n\pi r^4} \quad (2)$$

而此小段因受切力作用，而使物體下降之高度則為

$$\Delta x' = \frac{F(s)\Delta s}{n\pi r^2}$$

故物體下降高度 h 與 H 之比為

$$\frac{h}{H} = \frac{\Delta x'}{\Delta x} = \frac{r^2}{2R^2}$$

故在 $r \ll R$ 之前提下，切力之作用可以忽略。

(c) 彈簧底端之扭轉力矩為 τ 時，彈簧底端鉛直截面相對於頂端 B 之角位移 ϕ 為

$$\phi = \frac{2\tau L}{n\pi r^4} \quad (3a)$$

當鉛直截面之角位移由 ϕ 增加到 $\phi + \Delta\phi$ 時，扭轉力矩對彈簧所做之功 ΔW 為

$$\Delta W = \tau\Delta\phi = n \frac{\pi r^4}{2L} \phi \Delta\phi \quad (3b)$$

故當彈簧底端鉛直截面之角位移為 ϕ 時，彈簧之形變位能 $U_r(\phi)$ 為

$$U_r(\phi) = \int_{\phi_0}^{\phi} \tau d\phi = n \frac{\pi r^4}{4L} (\phi^2 - \phi_0^2) \quad (3c)$$

如達靜力平衡時，形變位能為零，則上式中之 ϕ_0 可由(1)與(2)式求得為

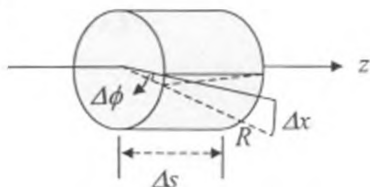
$$\phi_0 = \int_0^L d\phi = \frac{2}{n\pi r^4} \int_0^L \tau(s) ds = \frac{2gRL}{n\pi r^4} \left(M + \frac{m}{2} \right) \quad (3d)$$

(d) 當物體之位移為 x 時，彈簧重心下降 $x/2$ ，故物體與彈簧之總重力位能增加

$$U_g(x) = -\frac{1}{2}mgx - Mgx \quad (4a)$$

而由(b)小題可得彈簧底端鉛直截面之角位移增加 $\Delta\phi = x/R$ ，故依(3c)式，彈簧之形變位能增加

$$U_r(x) = U_r(\phi_0 + \Delta\phi) - U_r(\phi_0) = n \frac{\pi r^4}{4LR^2} (x^2 + 2xR\phi_0) \quad (4b)$$



(e)當物體之速度為 v 時，物體之動能為

$$K = \frac{1}{2} M v^2 \quad (5a)$$

而彈簧各點之速度與上端至該點之弧長 s 成正比，故彈簧動能為

$$K' = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{s}{L} v \right)^2 \frac{m}{L} ds = \frac{1}{6} m v^2 \quad (5b)$$

(f)彈簧與物體的總力學能 E 為

$$E = K + K' + U_x + U_r = \frac{1}{2} \left(M + \frac{m}{3} \right) v^2 - \left(M + \frac{m}{2} \right) gx + \frac{n\pi r^4}{4LR^2} (x^2 + 2xR\phi_0) \quad (6a)$$

因力學能 E 守恆，故可由 $dE/dt = 0$ 與(3d)式得物體之運動方程式為

$$\left(M + \frac{m}{3} \right) \frac{dv}{dt} = \left(M + \frac{m}{2} \right) g - \frac{n\pi r^4}{2LR^2} (x + R\phi_0) = -\frac{n\pi r^4}{2LR^2} x \quad (6b)$$

物體上下振盪的週期 T 為

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2LR^2}{n\pi r^4} \left(M + \frac{m}{3} \right)} \quad (6c)$$

二、解：

(a)電子欲到達偵檢器 A，其軌跡需為一半徑 $a = \frac{r_1 + r_2}{2}$ 的圓周，而所需的向心力

$\frac{mv_0^2}{a}$ 由靜電力 $-eE(a)$ 提供。

電容器內的電場在徑向方向，其大小由高斯定律得知為

$$E(r) = \frac{k}{r} \quad (1)$$

式中 $r_2 > r > r_1$ 。常數 k 可由內、外圓柱間的電位差 V_0 決定之，即

$$V_0 = \int_{r_1}^{r_2} E(r) dr = k \ln(r_2/r_1) \quad (2)$$

$$k = \frac{V_0}{\ln(r_2/r_1)} \quad (3)$$

故

$$E(r) = \frac{V_0}{r \ln(r_2/r_1)}, \quad E(a) = \frac{V_0}{a \ln(r_2/r_1)}$$

$$\frac{mv_0^2}{a} = eE(a) = \frac{eV_0}{a \ln(r_2/r_1)}$$

$$V_0 = \frac{mv_0^2}{e} \ln(r_2/r_1) \quad (4)$$

(2)當電子射出的方向稍有偏離時，因其所受的靜電力在徑向上，故其軌跡仍維持在圖 1 所示的平面上。取 O 點為極坐標的原點，電子的位置坐標為 (r, θ) ，則電子的速度與加速度分別可表示為

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \quad (5)$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} \quad (6)$$

電子所受的靜電力在徑向，其相對於原點的力矩為零，故電子相對於 O 點的角動量恆定，即

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = m\vec{r} \times (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) = mr^2\dot{\theta}\hat{z} = \bar{\ell}_0 = amv_0 \cos\alpha \hat{z} \quad (7)$$

電子的徑向運動方程式為

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -eE(r) = -\frac{eV_0}{r \ln(r_2/r_1)} \quad (8)$$

由(7)式可得

$$\dot{\theta} = \frac{av_0 \cos\alpha}{r^2} = \frac{\ell_0}{mr^2} \quad (9)$$

將(9)式代入(8)式，得

$$\ddot{r} - \frac{\ell_0^2}{m^2 r^3} = -\frac{eV_0}{mr \ln(r_2/r_1)} \quad (10)$$

令 $r = a + \rho$ ，當 $\alpha < 5^\circ$ 時，求 $\rho \ll a$ 之解：

$$\ddot{r} = \ddot{\rho} \quad (11)$$

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{(a + \rho)^3} = \frac{1}{a^3} \left(1 + \frac{\rho}{a}\right)^{-3} \approx \frac{1}{a^3} \left(1 - \frac{3\rho}{a}\right) \quad (12)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{(a + \rho)} = \frac{1}{a} \left(1 + \frac{\rho}{a}\right)^{-1} \approx \frac{1}{a} \left(1 - \frac{\rho}{a}\right) \quad (13)$$

將(11)~(13)式代入(10)式，得

$$\ddot{\rho} - \frac{\ell_0^2}{m^2 a^3} \left(1 - \frac{3\rho}{a}\right) = -\frac{eV_0}{ma \ln(r_2/r_1)} \left(1 - \frac{\rho}{a}\right) \quad (14)$$

整理後，得

$$\ddot{\rho} + \left[\frac{3\ell_0^2}{m^2 a^4} - \frac{eV_0}{ma^2 \ln(r_2/r_1)} \right] \rho = \left[\frac{\ell_0^2}{m^2 a^3} - \frac{eV_0}{ma \ln(r_2/r_1)} \right] \quad (15)$$

利用(4)和(7)兩式，代入 ℓ_0 和 V_0 值，上式變為

$$\ddot{\rho} + \left[\frac{v_0^2}{a^2} (3 \cos^2 \alpha - 1) \right] \rho = -\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{a} \quad (16)$$

上式可改寫成

$$\ddot{\rho} + C_1 \rho = C_2 \quad (17)$$

式中 $C_1 = \frac{v_0^2}{a^2} (3 \cos^2 \alpha - 1)$ ， $C_2 = -\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{a}$ 。令 $\rho = R + C_2/C_1$ ，則 (17) 式變成

$$\ddot{R} + C_1 R = 0 \quad (18)$$

但當 $\alpha < 5^\circ$ 時， $C_1 = \frac{v_0^2}{a^2} (3 \cos^2 \alpha - 1) > 0$ ，故 (18) 式有簡諧運動之解，其解可寫為

$$R = R_0 \cos(\sqrt{C_1} t + \varphi_0) \quad (19)$$

$$r = a + \rho = a + R + \frac{C_2}{C_1} = \left(a + \frac{C_2}{C_1} \right) + R_0 \cos(\sqrt{C_1} t + \varphi_0) \quad (20)$$

式中的常數 R_0 及 φ_0 可由起始條件決定之。當 $t=0$ 時， $r=a$ ，代入 (20) 式，得

$$a = \left(a + \frac{C_2}{C_1} \right) + R_0 \cos \varphi_0, \text{ 故}$$

$$R_0 \cos \varphi = -\frac{C_2}{C_1} \quad (21)$$

由 (20) 式可得

$$\dot{r} = -\sqrt{C_1} R_0 \sin(\sqrt{C_1} t + \varphi_0) \quad (22)$$

當 $t=0$ 時， $\dot{r} = v_0 \sin \alpha$ ，以之代入 (22) 式，得 $v_0 \sin \alpha = -\sqrt{C_1} R_0 \sin \varphi_0$ ，或

$$R_0 \sin \varphi = -\frac{v_0 \sin \alpha}{\sqrt{C_1}} \quad (23)$$

由(21)和(23)兩式，解得

$$R_0 = \frac{\sqrt{2} a \sin \alpha \cos \alpha}{3 \cos^2 \alpha - 1} \quad (24)$$

$$\tan \varphi_0 = -\frac{\sqrt{3 \cos^2 \alpha - 1}}{\sin \alpha} \quad (25)$$

電子聚焦於 A 點的條件為 $r=a$ ，而由 (20) 式，此條件即為

$$\sqrt{2} \cos \alpha \cos(\omega t + \varphi_0) = \sin \alpha \quad (26)$$

上式中， $\omega = \frac{v_0}{a} \sqrt{3 \cos^2 \alpha - 1}$ 為徑向簡諧運動的角頻率。

當 $\alpha \ll 1$ 時，由 (25) 式得

$$\varphi_0 \rightarrow \frac{3\pi}{2} \quad (27)$$

$\cos \alpha \rightarrow 1$, $\sin \alpha \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow \frac{\sqrt{2}v_0}{a}$, 故 (26) 式變成

$$\sin \omega t = 0 \quad (28)$$

其解為

$$\omega t^* = m\pi, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (29)$$

t^* 的最小值為

$$(t^*)_{\min} = \frac{\pi}{\omega} \quad (30)$$

電子在切線方向可視為做等速率圓周運動，其角速度 $\dot{\theta} = \frac{v_0}{a}$ ，故聚焦於 A 點所需

的最小角度為 $\theta = \dot{\theta} t^* = \frac{v_0}{a} \times \frac{\pi}{\omega} = \frac{v_0}{a} \times \frac{\pi a}{\sqrt{2}v_0} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \approx 127^\circ$ 。

三、解：

(a) 設聲波的波長為 λ_s ，則 $a \sin(k(x + \lambda_s)) = a \sin(kx)$ ，故 $k\lambda_s = 2\pi$ ，得 $\lambda_s = \frac{2\pi}{k}$ 。

(b) 疏部位於零位移處：

$$x = 0, \frac{2\pi}{k}, \frac{4\pi}{k}, \frac{6\pi}{k}, \dots$$

因為這些位置兩旁的質點運動方向相反，左負右正相互遠離，質點間距拉大，故為疏部。

密部位於零位移處：

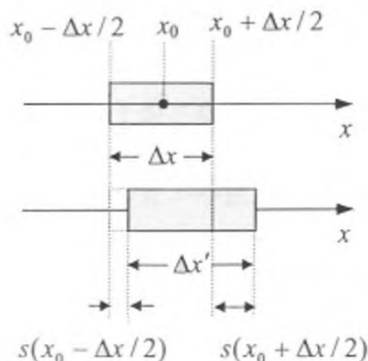
$$x = \frac{\pi}{k}, \frac{3\pi}{k}, \frac{5\pi}{k}, \dots$$

因為這些位置兩旁的質點運動方向相反，左正右負相互靠近，質點間距縮小，故為密部。

(c) 考量位於 x_0 處，截面積為 A，寬為 Δx 的一體積

元， $\Delta V = A\Delta x$ ，質量為 Δm ，密度為 $\rho_0 = \frac{\Delta m}{\Delta V}$ 。

聲波傳到的瞬時，這體積元的寬度變為



$$\Delta x' = \Delta x + s \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) - s \left(x_0 - \frac{\Delta x}{2} \right) = \Delta x + \Delta s$$

密度變為

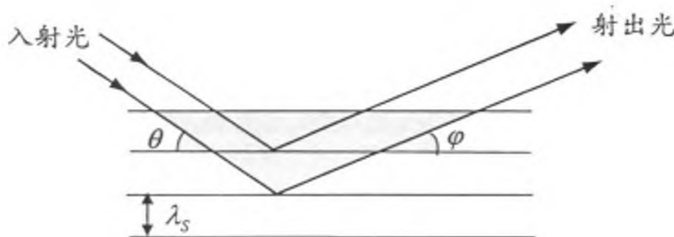
$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V'} = \frac{\Delta m}{A \Delta x'} = \frac{\Delta m}{A(\Delta x + \Delta s)} = \frac{\Delta m}{A \Delta x} \left(1 + \frac{\Delta s}{\Delta x} \right)^{-1} \approx \rho_0 \left(1 - \frac{\Delta s}{\Delta x} \right)$$

所以聲波傳播所造成的密度變化量為

$$\Delta \rho(x) = \rho(x) - \rho_0 = -\rho_0 \left(\frac{\Delta s}{\Delta x} \right) = -\rho_0 \left(\frac{ds}{dx} \right) = -\rho_0 k a \cos(kx)$$

在疏部處，即 $x = 0, \frac{2\pi}{k}, \frac{4\pi}{k}, \frac{6\pi}{k}, \dots$ ， $\Delta \rho < 0$ 。

在密部處，即 $x = \frac{\pi}{k}, \frac{3\pi}{k}, \frac{5\pi}{k}, \dots$ ， $\Delta \rho > 0$ 。



- (d) 考慮入射相鄰兩密部的兩光波，與聲波的波前夾成 θ 角，射出光和聲波波前的夾角為 φ ，則兩光波的光程差為

$$\delta(\varphi) = \lambda_s (\sin \theta + \sin \varphi) \approx \lambda_s (\theta + \varphi)$$

當光程差為光波波長的整數倍時，即 $\delta(\varphi) = N \left(\frac{\lambda_L}{n} \right)$ ，相鄰兩光波為完全相長干涉，得

$$\varphi = \frac{N \lambda_L}{n \lambda_s} - \theta$$

式中當 $N = 0$ 時， $\varphi = -\theta$ ，表示射出光沿原入射方向前進。

- (e) 光子的動量為 $p_L = \frac{hn}{\lambda_L}$ ，平行於光的前進方向，式中 λ_L 為光在真空中傳播時的

波長。聲子的動量為 $p_S = \frac{h}{\lambda_s}$ ，垂直於聲波波前。光子沿 θ 方向入射，吸收 N 個

聲子，在垂直於聲波波前方向獲得動量 $N p_S = \frac{N h}{\lambda_s}$ 之後，沿 φ 方向射出的光子動

量變為 p_L ，垂直於聲波波前方向的動量守恆式為：

$$p'_L \sin \varphi = -p_L \sin \theta + Np_S$$

由於光波的波長遠小於聲波的波長， $\lambda_L \ll \lambda_S$ ，所以 $p_L \gg p_S$ ， $p'_L \approx p_L = \frac{hn}{\lambda_L}$ ，

當 θ 與 φ 很小時 $\sin \varphi \approx \varphi$ ， $\sin \theta \approx \theta$ ，垂直於聲波波前的動量守恆式變為：

$$\left(\frac{hn}{\lambda_L}\right)\varphi = -\left(\frac{hn}{\lambda_L}\right)\theta + N\left(\frac{h}{\lambda_S}\right)$$

$$\varphi = \frac{N\lambda_L}{n\lambda_S} - \theta$$

和(d)小題的結果相同。

(g)受頻率為 f_S 的聲波影響的光波出射的方向為

$$\varphi = \frac{N\lambda_L f_S}{nv_S} - \theta$$

式中 v_S 為固體中的聲速。當聲波頻率變為 $(f_S \pm \Delta f_S/2)$ 的聲波影響的光波出射的方向為

$$\varphi' = \frac{N\lambda_L(f_S \pm \Delta f_S/2)}{nv_S} - \theta$$

光波出射的方向涵蓋的角度範圍為

$$\Delta\varphi = \varphi' - \varphi = \frac{N\lambda_L \Delta f_S}{nv_S} = \frac{D}{L}$$

使用一級繞射光強度最強， $N=1$ ，即聲波的頻寬至少應為 $\Delta f_S = \frac{Dnv_S}{L\lambda_L}$ 。

2001年國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊決選研習營

實驗模擬試題(一)

2001年4月5日

考試時間：150分鐘

- 一、本試題滿分為七十五分。
- 二、在指定的答案紙上作答。
- 三、在每一頁答題紙的頂端寫明：
 - 題號
 - 該題所用答題紙之頁碼
 - 該題所用答題紙的總頁數

例（以第一題用了三頁紙為例）：

1	1/3
2	2/3
3	3/3

2001 年國際物理奧林匹亞競賽國家代表隊決選研習營 實驗模擬試題(一)

題目：渦電流的磁屏蔽效應及磁導率之測定。

儀器：

- A、含有六個香蕉插座的電路板。
- B、嵌入電路板內的偵測線圈。
- C、U形鐵氧體磁芯，上面有標記「A」和「B」的兩個線圈。
- D、不含線圈的U形鐵氧體磁芯。
- E、鋁箔八小張，每張厚度為 $17\ \mu\text{m}$ 。
- F、附有輸出接線的函數訊號產生器。
- G、兩個多用途數位電表。
- H、六條附有香蕉接頭的連接線。
- I、兩條橡皮筋及兩小張不透油的紙片，每張厚度 0.10mm 。

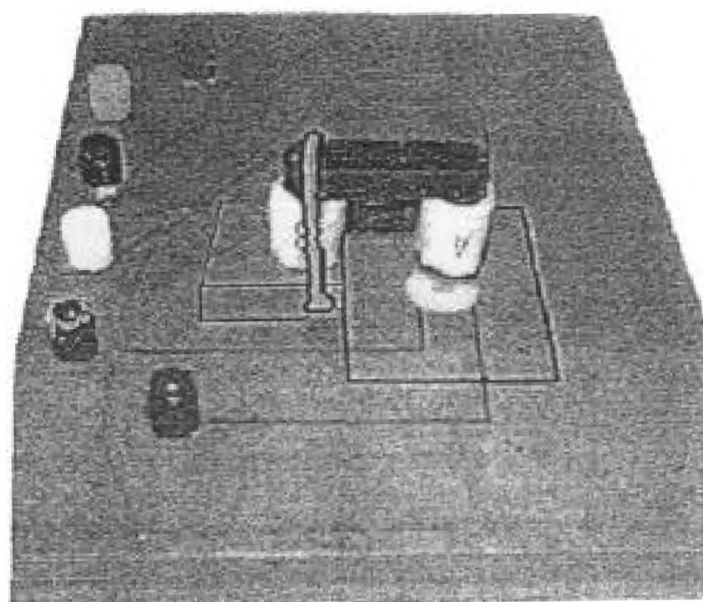


圖 1: 第一部份的實驗裝置。

鐵氧體磁芯

鐵氧體磁芯很脆弱，操作時要小心!! 鐵氧體是鐵磁性陶瓷材料，電導係數甚小，因此鐵氧體磁芯內的渦電流損失很小。

香蕉插座

要把線圈的接線連接到香蕉插座時，先轉鬆塑膠螺帽，將已鍍錫的接線頭夾在金屬螺帽和塑膠螺帽之間，再將塑膠螺帽鎖緊即可。

- ※ 使用電表測量 AC 電壓時，其測量誤差為±(讀數的 1.2% + 3×最後數字的單位)，
例：讀數為 20.5mV，其測量誤差為±(0.012×20.5mV+3×0.1mV)=±0.5mV。
※ 使用電表測量 AC 電流時，其測量誤差為±(讀數的 1.5% + 4×最後數字的單位)。

第一部分：渦電流的磁屏蔽效應

說明：

隨時間變化的磁場在導體內會感應產生渦電流。渦電流隨著產生一反抗磁場。由於正常金屬的電導係數為有限值，因此不能完全有效地屏蔽磁場。為了描述鋁箔的磁屏蔽效應，我們採用下述的現象模型：

$$B = B_0 e^{-\alpha d}$$

式中 B 是在鋁箔下面的磁通量密度， B_0 是沒有鋁箔時在同一地點的磁通量密度， α 為衰減係數， d 為鋁箔厚度。

實驗：

取繞有線圈的鐵氧體磁芯，腳向下，一腳放在凸起的小板塊上，使線圈 A 置於已嵌入電路板內的偵測線圈的正上方，如圖 1 所示。用橡皮筋緊繞在磁芯及凸起板塊下面的凹槽上，以便將鐵氧體磁芯穩穩地固定在凸起的小板塊上。我們假設鋁箔厚度和測量頻率的誤差可忽略。

1. 將線圈 A 和 B 的接線連到插座上，測量所有三個線圈的電阻，以確保接線良好。電阻應在 15 Ω 以下。將你量出的電阻值寫在答案卷上。
2. 量取實驗數據，以驗證上述的模型，並求出鋁箔（厚度由 17 μm 增至 85 μm ）在 10 kHz 至 100 kHz 頻率範圍內的衰減係數 α 。先把鋁箔放在電路板上黑色塑膠圓板上，使位在偵測線圈的正上方，並施加正弦波電壓於線圈 A。將實驗結果列表並繪圖，寫在答案卷上。
3. 畫出衰減係數 α 對頻率的關係圖線。

第二部分：磁導率之測定

實驗：

將兩個U形磁芯連在一起，用橡皮筋固定如圖2所示。使函數訊號產生器輸出10 kHz的正弦波。對每一個測量，切記要將多用途電表調到適合該測量的最靈敏檔。兩線圈的匝數分別為 $N_A = 150$ 匝和 $N_B = 100$ 匝（每一線圈的匝數誤差為 ± 1 匝）。

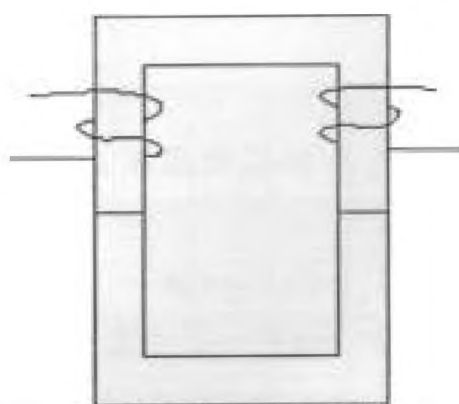


圖2 有封閉磁路的鐵氧體磁芯。

將紙片嵌入兩個U形磁芯之間，如圖3所示，這將使線圈的電感大為減少。已知安培定律，和磁通量密度 B 在鐵氧體—紙片的界面具有連續性，利用此減小的電感值可用於決定該鐵氧體磁芯的相對磁導率 μ_r 。

假設紙片的磁導率 $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N s}^2/\text{C}^2$ ，一張紙片的厚度為0.10mm。安培定律可表述如下：

$$\oint \frac{1}{\mu} B dl = I_{total}$$

式中 I_{total} 係通過積分環路的圈裏面的總電流。將 μ_r 的數學式及其數值寫在答案卷上。

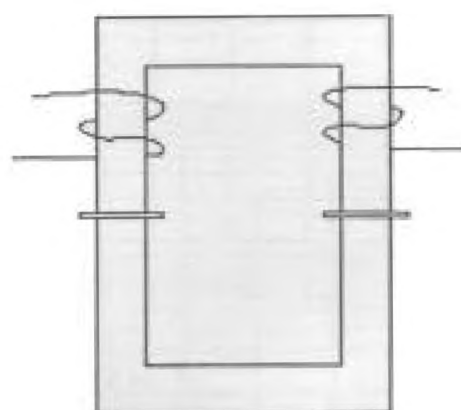


圖3 嵌入有兩紙片的鐵氧體磁芯。

2001 年國際物理奧林匹亞競賽國家代表隊決選研習營
實驗模擬試題(一)參考解答

第一部分：渦電流的效應

1. 線圈 A 的電阻 : 7.6Ω ,
 線圈 B 的電阻 : 5.4Ω ,
 偵測線圈的電阻 : 9.0Ω 。

2. 因為在鋁箔下方的磁通量密度 B 和偵測線圈上所感應的電壓 V 成正比，所以

$$V = V_0 e^{-\alpha d}$$

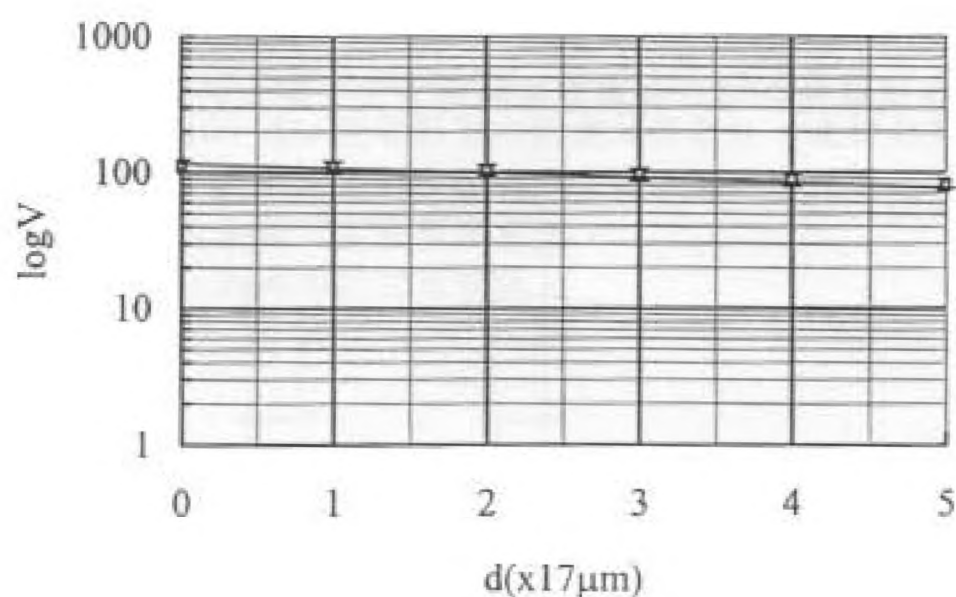
$$\Rightarrow \log V = \log V_0 - (\alpha \log e) d$$

即 $\log V$ 和 d 有線性關係，可從 $\log V - d$ 的直線斜率值中求出衰減係數 α 。

- (1) 頻率 $f = 10\text{kHz}$

鋁箔厚度 d ($\times 17\mu\text{m}$)	0	1	2	3	4	5
感應電壓 V (mV)	112.1 ± 1.6	108.6 ± 1.6	102.5 ± 1.5	95.8 ± 1.4	88.4 ± 1.4	81.6 ± 1.3

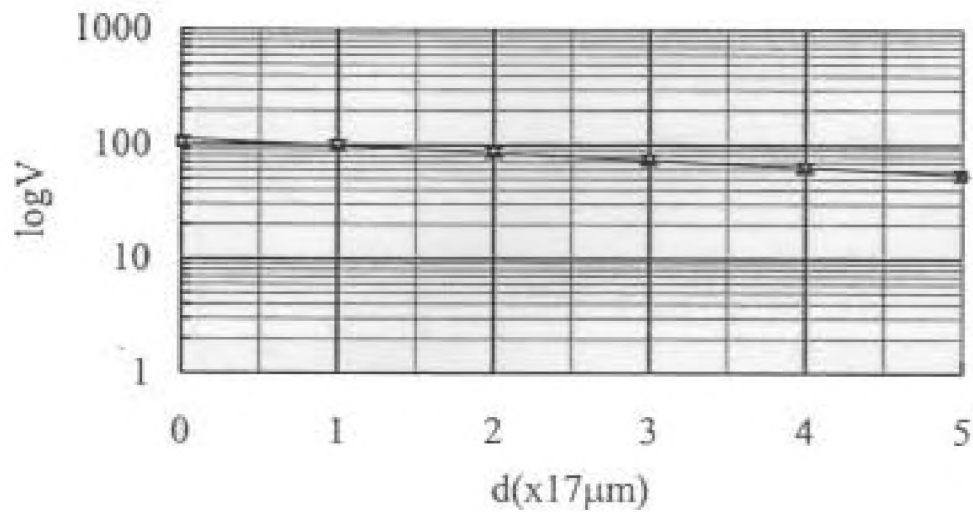
$$\alpha = 4.03 \pm 0.25 \text{mm}^{-1}$$



(2) 频率 $f = 20\text{kHz}$

铝箔厚度 d ($\times 17\ \mu\text{m}$)	0	1	2	3	4	5
感应电压 V (mV)	107.4 ± 1.6	99.6 ± 1.5	86.3 ± 1.3	73.9 ± 1.2	63.3 ± 1.1	54.2 ± 1.0

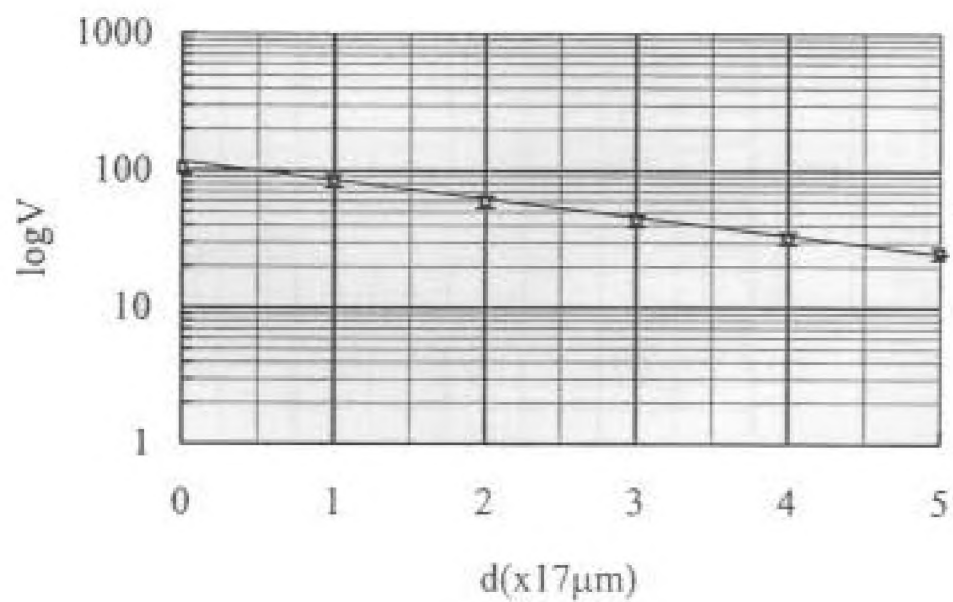
$$\alpha = 7.94 \pm 0.21\text{mm}^{-1}$$



(3) 频率 $f = 40\text{kHz}$

铝箔厚度 d ($\times 17\ \mu\text{m}$)	0	1	2	3	4	5
感应电压 V (mV)	104.3 ± 1.6	84.0 ± 1.3	59.2 ± 1.0	43.4 ± 0.8	32.4 ± 0.7	25.1 ± 0.6

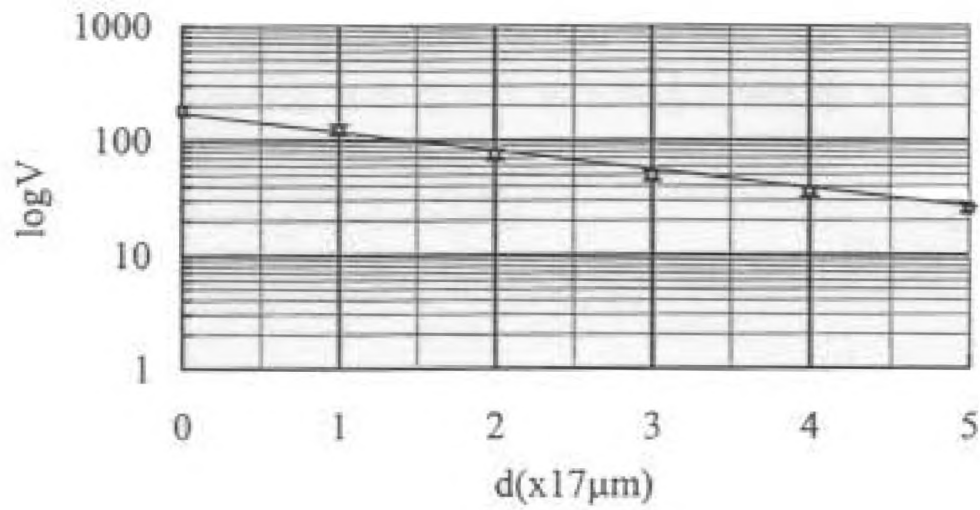
$$\alpha = 17.2 \pm 0.5\text{mm}^{-1}$$



(4) 頻率 $f = 60\text{kHz}$

鋁箔厚度 d ($\times 17\ \mu\text{m}$)	0	1	2	3	4	5
感應電壓 V (mV)	182.4 ± 2.5	123.5 ± 2.5	75.4 ± 1.2	49.3 ± 0.9	35.7 ± 0.7	25.8 ± 0.6

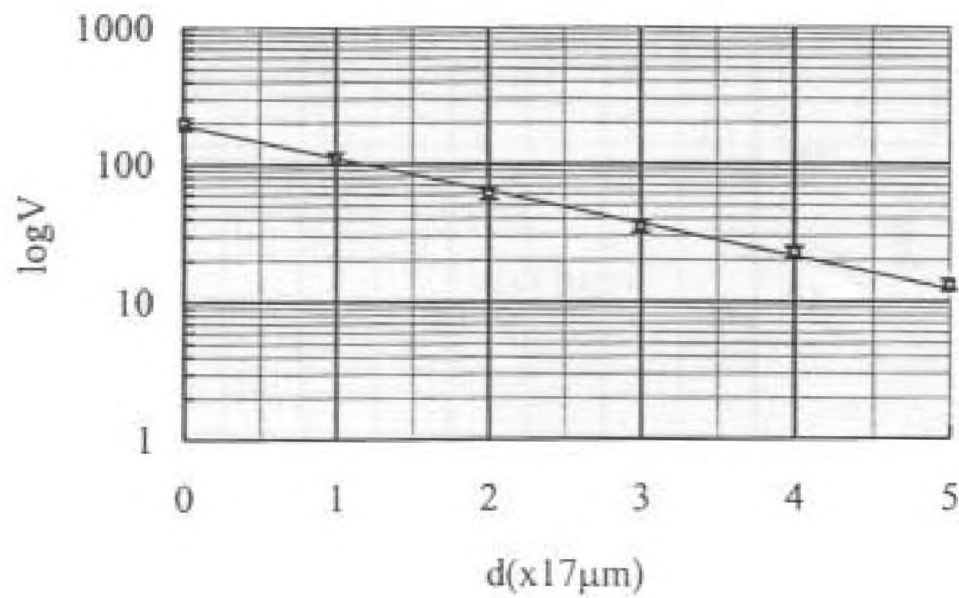
$$\alpha = 23.5 \pm 0.7\text{mm}^{-1}$$



(5) 頻率 $f = 80\text{kHz}$

鋁箔厚度 d ($\times 17\ \mu\text{m}$)	0	1	2	3	4	5
感應電壓 V (mV)	197.7 ± 2.7	110.5 ± 1.6	61.4 ± 1.1	35.3 ± 0.7	22.7 ± 0.6	13.2 ± 0.5

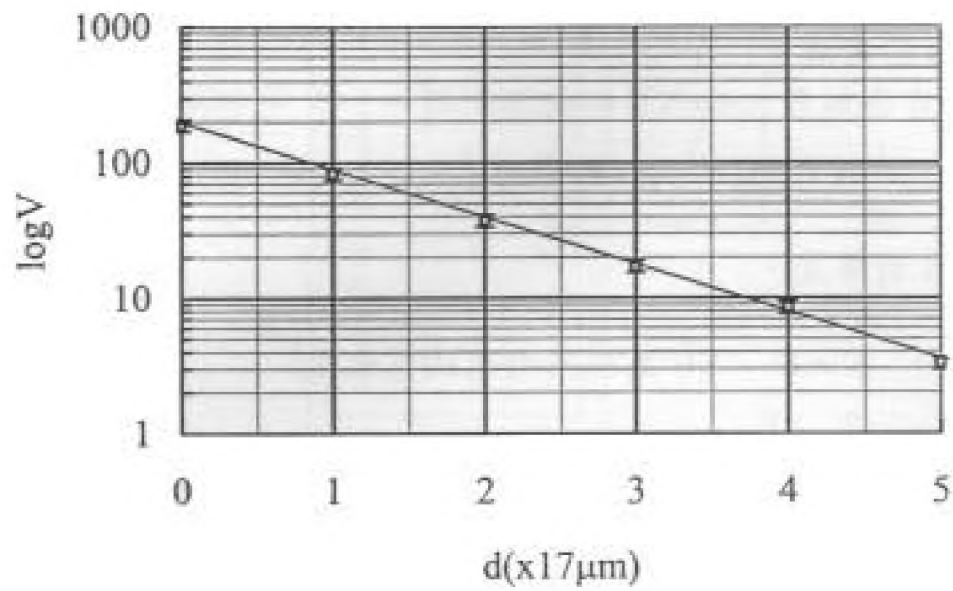
$$\alpha = 32.0 \pm 1.2\text{mm}^{-1}$$



(5) 頻率 $f=100\text{kHz}$

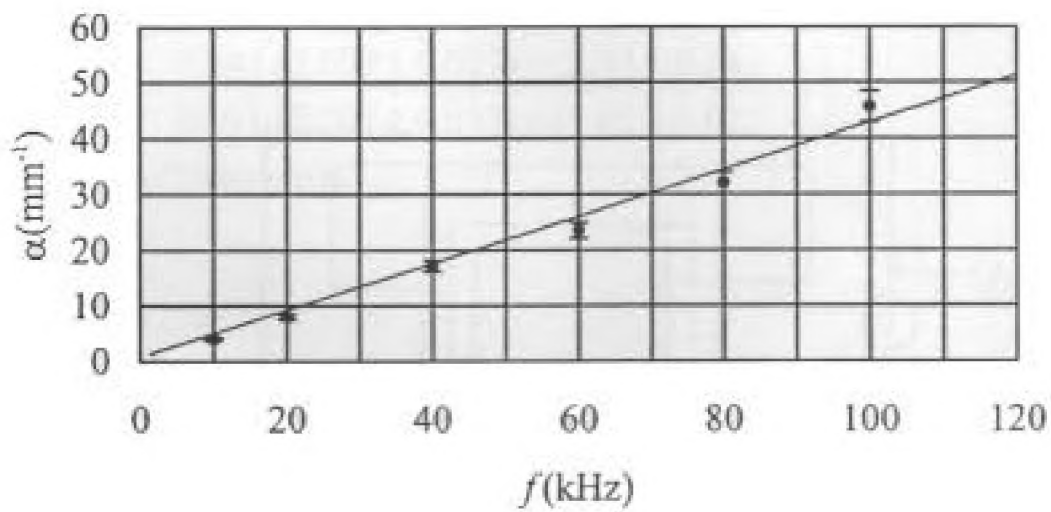
鋁箔厚度 d ($\times 17\ \mu\text{m}$)	0	1	2	3	4	5
感應電壓 V (mV)	188.5 ± 2.6	82.3 ± 1.3	37.5 ± 0.8	17.2 ± 0.5	8.5 ± 0.4	3.3 ± 0.3

$$\alpha = 45.6 \pm 3.2\text{mm}^{-1}$$



3. 衰減係數 α 對頻率 f 的關係：

$f(\text{kHz})$	10	20	40	60	80	100
$\alpha(\text{mm}^{-1})$	4.03 ± 0.25	7.94 ± 0.21	17.2 ± 0.5	23.5 ± 0.7	32.0 ± 1.2	45.6 ± 3.2



第二部分：磁導率之測定

將兩個 U 形磁芯連在一起，如試題中圖 2 所示，使用單一線圈或將兩線圈串聯，則由安培定律可得

$$\oint \frac{1}{\mu} B d\ell = I_{total}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu} B_1 (2\ell) = NI_1 \dots \dots \dots (1)$$

式中 μ 為鐵氧體材料的磁導率， ℓ 為一個 U 形鐵氧體磁芯的平均周長， N 為所用線圈的總匝數， I_1 為流經線圈的電流。

次將兩張紙片分別嵌入兩個 U 形磁芯之間，如試題中圖 3 所示，則由安培定律可得

$$\frac{1}{\mu} B_2 (2\ell) + \frac{1}{\mu_0} B_2 (2d) = NI_2 \dots \dots \dots (2)$$

式中 d 為單一紙片的厚度。

$$\because B \propto V \quad (V \text{ 為線圈兩端的電位差})$$

$$\therefore \frac{B_1}{B_2} = \frac{V_1}{V_2}$$

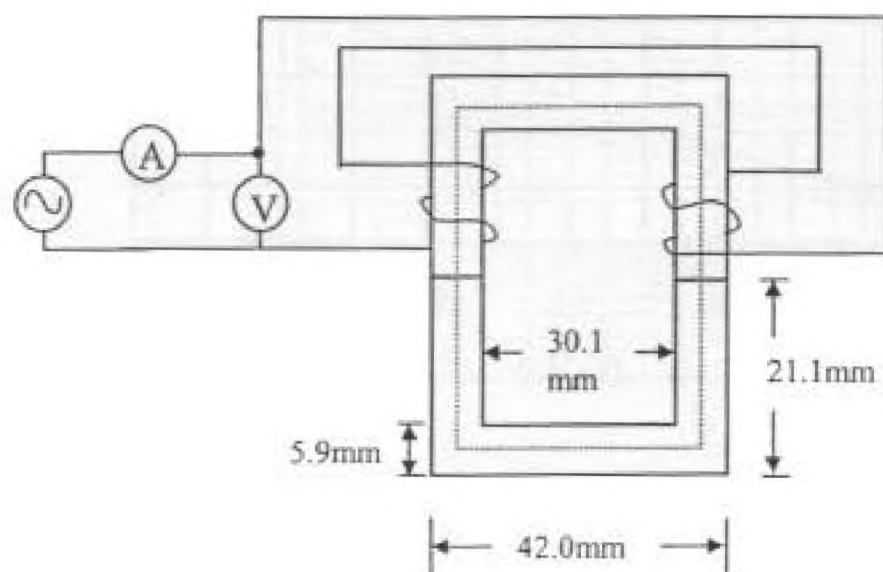
$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{\ell}{\ell + \mu_r d} = \frac{I_1}{I_2} \dots \dots \dots (3)$$

整理(3)式，可得

$$\mu_r = \frac{\ell}{d} \left(\frac{V_1 I_2}{I_1 V_2} - 1 \right) \dots \dots \dots (4)$$

因為 $V_1 / I_1 = \omega L_1$ ， $V_2 / I_2 = \omega L_2$ ，，所以上式可寫為

$$\mu_r = \frac{\ell}{d} \left(\frac{L_1}{L_2} - 1 \right) \dots \dots \dots (5)$$



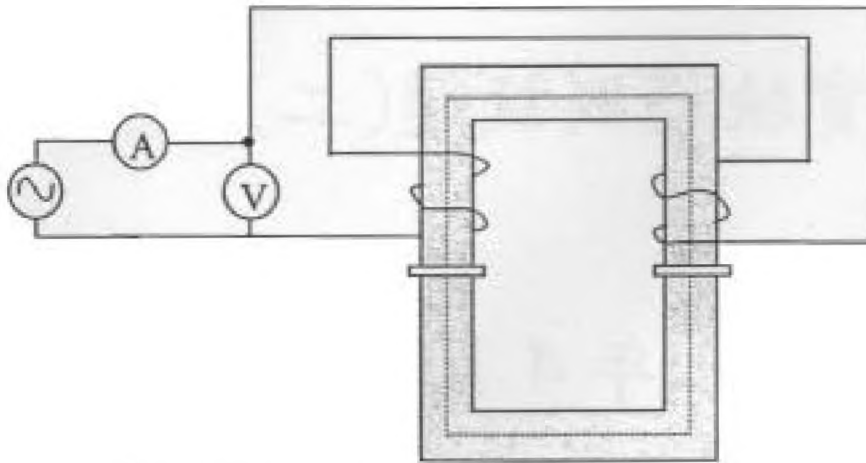
連接電路如上圖，使用雙線圈(串聯使磁通量加強)，實驗數據如下：

$$V_1 = 3.008 \pm 0.037 V$$

$$I_1 = 0.60 \pm 0.02 mA$$

$$f = 10kHz$$

其次將紙片嵌入 U 形磁鐵之間，如下圖所示，測得電壓和電流得數據如下：



$$V_2 = 3.005 \pm 0.037 V$$

$$I_2 = 2.33 \pm 0.04 mA$$

$$f = 10kHz$$

U 形磁鐵的平均周長 $\ell = \left(\frac{42.0 + 30.1}{2} \right) + 2 \times \left(21.1 - \frac{5.9}{2} \right) = 72.4 mm$ 。

紙片的厚度 $d = 0.10 mm$ 。

磁鐵的磁導率為

$$\begin{aligned} \mu_r &= \frac{\ell}{d} \left(\frac{V_1 I_2}{V_2 I_1} - 1 \right) \\ &= \frac{72.4}{0.10} \left(\frac{(3.008 \pm 0.037) \times (2.33 \pm 0.04)}{(3.005 \pm 0.037) \times (0.60 \pm 0.02)} - 1 \right) \\ &= 2090 \pm 109 \end{aligned}$$

2001年國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊決選研習營

實驗模擬試題(二)

2001年4月5日

考試時間：150分鐘

- 一、本試題滿分為七十五分。
- 二、在指定的答案紙上作答。
- 三、在每一頁答題紙的頂端寫明：
 - 題號
 - 該題所用答題紙之頁碼
 - 該題所用答題紙的總頁數

例（以第一題用了三頁紙為例）：

1	1/3
2	2/3
3	3/3

2001 年國際物理奧林匹亞競賽國家代表隊決選研習營
實驗模擬試題(二)

題目：測量「油」的密度。

在此實驗中，你只能使用下列的儀器及物品：

1. 試管（除下端外，其餘部分的截面皆均勻）
2. 透明容器
3. 直尺
4. 滴管
5. 繪圖紙
6. 乾布/紙巾
7. 橡皮圈（用以標示基準參考平面的位置）
8. 蒸餾水（密度為 1.00 g/cm^3 ）
9. 油（放在塑膠杯中）

在此實驗中，你要測出油的密度，但不得藉由測量試管的長度和管徑而得。你也不可以同時將油和水放在同一試管內。

在你的報告中必須包括下列各項：

- a. 簡述實驗原理並列出有關的理論公式。
- b. 敘述實驗方法和步驟。
- c. 寫出油密度的最後測定值。
- d. 估計油密度的誤差值並說明誤差來源。

$$E = E_0 \left\{ \sum_{m=-2000}^{2000} \exp\left(i2\pi m \frac{c}{2L_{air}} t\right) \right\} \times \exp\left[i2\pi f_0 \left(t - \frac{x}{c}\right)\right]$$

由於光強和其電場強度的平方成正比，即 $I \propto |E|^2$ ，故光的總強度為

$$I = I_0 \left| \sum_{m=-2000}^{2000} \exp\left(i2\pi m \frac{c}{2L_{air}} t\right) \right|^2 = I_0 \left\{ \frac{\sin n \left(\pi \frac{c}{2L_{air}} t\right)}{\sin \left(\pi \frac{c}{2L_{air}} t\right)} \right\}^2$$

式中 $n = 4001$ 。當 $t = k \left(\frac{2L_{air}}{c}\right)$ 時，式中 k 為任一正整數，可得極大值 $I = n^2 I_0$ 。因此

每一個脈衝光的強度為 $n^2 I_0 = (4001)^2 I_0$ ，而脈衝光的週期為 $\frac{2L_{air}}{c} = 2.4 \times 10^{-9} s$ 。

$$\lambda_A = (580.000, 580.010) \text{ nm}$$

$$\lambda_B = (580.001, 580.011) \text{ nm}$$

顯然這兩組雷射光波長的範圍彼此有重疊。若欲使它們不重疊，則需外加電壓 V 使 λ_A 的上限小於或等於 λ_B 的下限，即

$$\lambda_1 \left(1 + \frac{v'_2}{c} \right) \leq \lambda_2 \left(1 + \frac{v'_1}{c} \right) \quad (7)$$

上式中的 v'_1 和 v'_2 分別代表在外加電壓後，正離子速度的上限和下限。上式中取等號時，就得到符合要求的最小電壓值 V ，即

$$\lambda_1 \left(1 + \frac{v'_2}{c} \right) = \lambda_2 \left(1 + \frac{v'_1}{c} \right) \quad (8)$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{v'_2}{c} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left(1 + \frac{v'_1}{c} \right) = \frac{580.001}{580.000} \left(1 + \frac{v'_1}{c} \right) \approx 1 + \frac{0.001}{580.000} + \frac{v'_1}{c}$$

$$\Rightarrow v'_2 - v'_1 = \frac{0.001}{580.000} \times c = \frac{3 \times 10^8}{5.8 \times 10^5} = 517 \text{ m/s} \quad (9)$$

利用(4)式，得

$$\sqrt{v_2^2 + \frac{2qV}{m}} - \sqrt{\frac{2qV}{m}} = 517 \text{ m/s} \quad (10)$$

將上式兩邊同乘以 $\sqrt{v_2^2 + \frac{2qV}{m}} + \sqrt{\frac{2qV}{m}}$ ，可得

$$\left(v_2^2 + \frac{2qV}{m} \right) - \left(\frac{2qV}{m} \right) = 517 \times \left(\sqrt{v_2^2 + \frac{2qV}{m}} + \sqrt{\frac{2qV}{m}} \right)$$

$$\Rightarrow v_2^2 = 517 \left(\sqrt{v_2^2 + \frac{2qV}{m}} + \sqrt{\frac{2qV}{m}} \right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{v_2^2 + \frac{2qV}{m}} + \sqrt{\frac{2qV}{m}} = \frac{v_2^2}{517} = \frac{(5000)^2}{517} = 4.84 \times 10^4 \text{ m/s} \quad (11)$$

由(11)式減去(10)式，得

$$2\sqrt{\frac{2qV}{m}} = 4.84 \times 10^4 - 517 = 4.78 \times 10^4 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{q} \right) \left(\frac{4.78 \times 10^4}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5.00 \times 10^6} \times \left(\frac{4.78 \times 10^4}{2} \right)^2 = 57.1 \text{ V}$$

所需的最小加速電壓為 57.1 伏特。

四、解：

(1) 各電容器的電壓同為 $\varepsilon/3$ ，電量同為 $C\varepsilon/3$ 。

(2) 由於電容器 C_2 上極板的正電荷會流出，和電容器 C_1 和 C_3 上極板的負電荷中和，且電路的左右兩部分對稱，故當電容器 C_2 的電量降為零時，電容器 C_1 和 C_3 的電量相等，各為

$$Q = \frac{1}{2} \left(\frac{C\varepsilon}{3} + \frac{C\varepsilon}{3} - \frac{C\varepsilon}{3} \right) = \frac{C\varepsilon}{6}$$

其電壓也相等，各為

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{\varepsilon}{6}$$

這時流經電阻器 R_1 和 R_2 的電流相等，各為

$$I = \frac{V_1 + V_2}{R} = \frac{\varepsilon}{6R}$$

(3) 當電路達到最後平衡狀態時，電路中的電流為零，各電容器的電壓和電量皆相等，即 $V'_1 = V'_2 = V'_3$ ， $Q'_1 = Q'_2 = Q'_3$ 。由電荷守恆定律可得

$$Q'_1 + Q'_2 + Q'_3 = \frac{C\varepsilon}{3} + \frac{C\varepsilon}{3} - \frac{C\varepsilon}{3} = \frac{C\varepsilon}{3}$$

$$Q'_1 = Q'_2 = Q'_3 = \frac{C\varepsilon}{9}$$

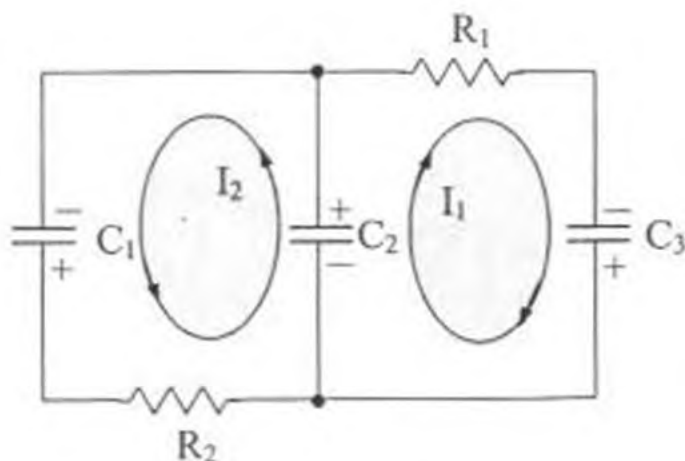
$$V'_1 = V'_2 = V'_3 = \frac{\varepsilon}{9}$$

三個電容器的總電能的變化量為

$$\Delta U = 3 \left(\frac{1}{2} CV^2 - \frac{1}{2} CV'^2 \right) = \frac{3C}{2} \left[\left(\frac{\varepsilon}{3} \right)^2 - \left(\frac{\varepsilon}{9} \right)^2 \right] = \frac{4C\varepsilon^2}{27}$$

由於電路的左右兩部分對稱，故流經電阻器 R_1 和 R_2 的電流相等，其消耗的電能也相等，其值為 $\frac{2C\varepsilon^2}{27}$ 。

(4)



設電路的迴路電流如上圖所示，則由左邊的迴路可得

$$V_2 + V_1 - I_2 R_2 = 0 \quad (1)$$

$$I_2 = -C \frac{dV_1}{dt} \quad (2)$$

$$I_1 + I_2 = -C \frac{dV_2}{dt} \quad (3)$$

由上三式可得

$$\frac{1}{C}(I_1 + I_2) + \frac{1}{C}I_2 = -R_2 \frac{dI_2}{dt} \quad (4)$$

同理，由電路右邊的迴路可得

$$V_2 + V_3 - I_1 R_1 = 0 \quad (5)$$

$$I_1 = -C \frac{dV_3}{dt} \quad (6)$$

$$I_1 + I_2 = -C \frac{dV_2}{dt} \quad (7)$$

由上三式可得

$$\frac{1}{C}(I_1 + I_2) + \frac{1}{C}I_1 = -R_1 \frac{dI_1}{dt} \quad (8)$$

由(4)和(8)兩式相加，且 $R_1 = R_2 = R$ ，可得

$$\frac{2}{C}(I_1 + I_2) + \frac{1}{C}(I_1 + I_2) = -R \frac{d}{dt}(I_1 + I_2)$$

$$\frac{d}{dt}(I_1 + I_2) = -\frac{3}{RC}(I_1 + I_2)$$

$$I_1 + I_2 = I_0 e^{-\frac{3t}{RC}} \quad (9)$$

當 $t=0$ 時， $I_{10} + I_{20} = I_0$ ，利用(1)和(5)式，可得

$$\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} - I_{20}R = 0 \Rightarrow I_{20} = \frac{2\varepsilon}{3R} \quad (10)$$

$$\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} - I_{10}R = 0 \Rightarrow I_{10} = \frac{2\varepsilon}{3R} \quad (11)$$

故

$$I_0 = \frac{4\varepsilon}{3R} \quad (12)$$

$$I_1 + I_2 = \frac{4\varepsilon}{3R} e^{-\frac{3t}{RC}} \quad (13)$$

由於電路左右對稱，故

$$I_1 = I_2 = \frac{2\varepsilon}{3R} e^{-\frac{3t}{RC}} \quad (14)$$

利用(3)式，可得電容器 C_2 的電壓為

$$\begin{aligned} \frac{dV_2}{dt} &= -\frac{4\varepsilon}{3R} e^{-\frac{3t}{RC}} \Rightarrow \int_{\varepsilon/3}^{V_2} dV_2 = -\int_0^t \frac{4\varepsilon}{3R} e^{-\frac{3t}{RC}} dt \\ V_2(t) &= -\frac{\varepsilon}{9} + \frac{4\varepsilon}{9} e^{-\frac{3t}{RC}} \end{aligned} \quad (15)$$

利用(2)和(14)式，可得電容器 C_1 的電壓為

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dt} &= -\frac{2\varepsilon}{3R} e^{-\frac{3t}{RC}} \Rightarrow \int_{\varepsilon/3}^{V_1} dV_1 = -\int_0^t \frac{2\varepsilon}{3R} e^{-\frac{3t}{RC}} dt \\ V_1(t) &= \frac{\varepsilon}{9} + \frac{2\varepsilon}{9} e^{-\frac{3t}{RC}} \end{aligned} \quad (16)$$

電容器 C_3 和電容器 C_1 的電壓相等，故 $V_3(t) = V_1(t)$ 。

五、解：

(1) 因為在共振腔中有一增益物質 G (長度為 8cm ，折射率為 1.5)，光通過該物質所需的時間等於光在空氣中通過長度為 $1.5 \times 8\text{cm} = 12\text{cm}$ 的路徑所需的時間，所以圖六中所示的共振腔長度，相當於光在空氣中傳播的長度 $L_{\text{air}} = 60\text{cm}$ 。由於光在雷射腔中會因共振而形成駐波，故

$$L_{\text{air}} = m \frac{\lambda}{2} = m \frac{c}{2f}, \text{ 或 } f = m \frac{c}{2L_{\text{air}}}, \text{ 式中 } m = 1, 2, 3, \dots。$$

由上式可得最小的頻率差值為 $\frac{c}{2L_{\text{air}}} = 2.5 \times 10^8 \text{ Hz}$

(2) 由圖七知道 Δf 範圍內所有的光都被均勻放大，也就是每一個共振腔中所允許的頻率都具有 I_0 的強度。在 Δf 範圍中所允許的光數目 n 為

$$n = \frac{\Delta f}{c/2L_{\text{air}}} = 4001 \text{ (取整數值)}。$$

(3) 當加入相位鎖定裝置時，所有頻率的光的偏極電場總和可以寫成

$$E = \sum_m E_m = \sum_{m=-2000}^{2000} E_0 \exp\left[i2\pi f_m \left(t - \frac{x}{c}\right)\right]$$

式中 $f_m = f_0 + m \left(\frac{c}{2L_{\text{air}}}\right)$ ， f_{-2000} 是最低的允許頻率。因此上式可以改寫成

2002年國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊決選研習營

筆試(二)試題

2002年4月17日 14:00-17:00

- 一、本試題共五大題，每大題二十分，總分一百分。
- 二、考試時間三小時。
- 三、在指定的答案紙上作答。
- 四、可使用無程式掌上型計算機。

- (1) 在上述的共振腔內，可容許有多種不同頻率的光在其內傳播，這些頻率之間的最小差值為何？
- (2) 若在共振腔中傳播的光的總強度 I ，可以寫成 $I = nI_0$ ，式中 I_0 是頻率為 f_0 的光強度，則 n 的數值為何？
- (3) 若共振腔中的光是平面波，且偏振的方向均相同，今在 G 和 M_2 之間放入一個長度可忽略的相位鎖定（或稱為模鎖定）的裝置（Mode-Lock device），也就是所有共振腔內的光都具有相同的相位，因此雷射光會以脈衝（Pulse laser）的形式發出。試求此脈衝雷射的每個脈衝光強度為何？脈衝光的週期為何？

2002 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
決選研習營筆試(二)試題解答

一、解：

(1) 金屬導體的表面為等位面，故表面上任何兩點之間的電位差皆為零。

(i) 圓柱體內部，即 $r < R$ ：

因金屬導體為等電位體，故圓柱體內部任一點和金屬表面之間的電位差皆為零，即 $\Delta V = 0$ 。

(ii) 圓柱體外部，即 $r > R$ ：

由高斯定律 $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$ ，得

$$E 2\pi r L = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L r} \hat{r}$$

由電位差的定義， $V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$ ，得

$$\Delta V = V(r) - V(R) = -\int_R^r \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L r} dr = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \int_R^r \frac{dr}{r} = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{r}{R}$$

(2) 當圓柱體繞其中心軸轉動時，其表面電荷亦隨之轉動，因之產生表面電流。設 σ 為導體的表面電荷密度， $\sigma = \frac{Q}{2\pi R L}$ ，導體表面上所生每單位長度的表面電流 K 為

$$K = \sigma v = \left(\frac{Q}{2\pi R L} \right) (\omega_0 R) = \frac{Q\omega_0}{2\pi L}$$

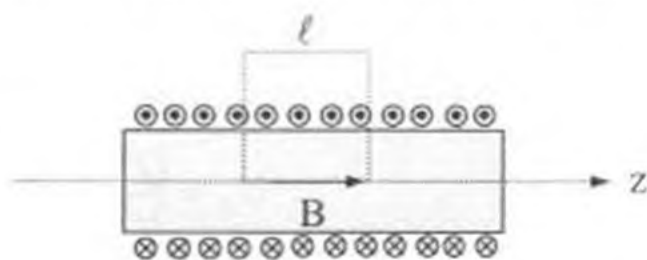
導體表面電流所生成的磁場和載流長螺線管所生者相似。參考下圖，利用安培定律

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i$ ，可得

$$B_{in} \ell = \mu_0 K \ell \Rightarrow B_{in} = \mu_0 K = \frac{\mu_0 Q \omega_0}{2\pi L}$$

(i) 圓柱體內部，即 $r < R$ ： $\vec{B}_{in} = \frac{\mu_0 Q \omega_0}{2\pi L} \hat{z}$

(ii) 圓柱體外部，即 $r > R$ ： $B_{out} = 0$



(3)(i) 由題設 $\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{t}{t_0} \right)$ ，可得環狀線圈上所生的感應電動勢為

$$\epsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(BA) = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\mu_0 Q \omega}{2\pi L} \pi R^2 \right) = -\frac{\mu_0 Q R^2}{2L} \frac{d\omega}{dt} = \frac{\mu_0 Q R^2 \omega_0}{2L t_0}$$

故線圈上的感應電流為

$$i = \frac{\epsilon}{r_e} = \frac{\mu_0 Q R^2 \omega_0}{2r_e L t_0}$$

(ii) 環狀線圈上所生的總熱能為

$$H = \int_0^{t_0} i^2 r_e dt = \int_0^{t_0} \left(\frac{\mu_0 Q R^2 \omega_0}{2r_e L t_0} \right)^2 r_e dt = \frac{\mu_0^2 Q^2 R^4 \omega_0^2}{4r_e L^2 t_0}$$

二、解：

(1) 此時的電容器分成兩部分：一部分不含介電溶液，其電容為 C_1 ，另一部分則含有介電溶液，其電容為 C_2 。這兩部分的電容實際上相當於並聯，因此電容器的總電容為

$$C = C_1 + C_2 = \varepsilon_0 \frac{L \times (L/2)}{d} + \kappa \varepsilon_0 \frac{L \times (L/2)}{d} = \frac{\varepsilon_0 L^2}{2d} (1 + \kappa) = \frac{1}{2} (1 + \kappa) C_0$$

$$\text{式中 } C_0 = \frac{\varepsilon_0 L^2}{d}。$$

(2) 電容器在充電完成後，所儲存的電量 $Q = C_0 V$ 。電容器插入溶液後，其極板上的電量保持不變，但兩極板之間的電位差則變為 V' ，故

$$Q = CV' = C_0 V \Rightarrow V' = \frac{C_0 V}{C} = \left(\frac{2}{1 + \kappa} \right) V$$

兩極板之間的電場強度為

$$E = \frac{V'}{d} = \left(\frac{2}{1 + \kappa} \right) \frac{V}{d}$$

(3) 電容器極板上的電荷密度，因有無接觸介電溶液而有不同。

(a) 未接觸介電溶液的上半部極板：

$$\text{因為 } E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \text{ 所以 } \sigma = \varepsilon_0 E = \left(\frac{2}{1 + \kappa} \right) \varepsilon_0 V$$

(b) 有接觸介電溶液的下半部極板：

$$\text{因為 } E = \frac{\sigma'}{\varepsilon} = \frac{\sigma'}{\kappa \varepsilon_0}, \text{ 所以 } \sigma' = \kappa \varepsilon_0 E = \left(\frac{2\kappa}{1 + \kappa} \right) \varepsilon_0 V = \kappa \sigma$$

(4) 若電容器兩極板之間的液柱長度為 x ，則其總電容為

$$C = \frac{\varepsilon_0 L(L-x)}{d} + \frac{\varepsilon Lx}{d} = \frac{\varepsilon_0 L(L-x)}{d} + \frac{\kappa \varepsilon_0 Lx}{d} = \frac{\varepsilon_0 L}{d} (L + (\kappa - 1)x)$$

電容器內的電場能量為

$$U_E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 L} \left[\frac{1}{L + (\kappa - 1)x} \right]$$

介電容液所受向上的靜電力為

$$F_E = - \left(\frac{dU_E}{dx} \right)_{x=L/2} = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 L} \cdot \frac{\kappa - 1}{[L + (\kappa - 1)x]^2} \Big|_{x=L/2} = \frac{2Q^2 d}{\varepsilon_0 L^3} \cdot \frac{\kappa - 1}{(\kappa + 1)^2}$$

此靜電力吸引兩極板之間的介電液體上升，形成高度為 h 的液柱 (h 為極板內外液面的高度差)，即靜電力等於該段液柱的重量，故

$$\frac{2Q^2 d}{\varepsilon_0 L^3} \cdot \frac{\kappa - 1}{(\kappa + 1)^2} = \rho g h L d \Rightarrow h = \frac{2Q^2}{\varepsilon_0 \rho g L^4} \cdot \frac{\kappa - 1}{(\kappa + 1)^2}$$

【另解】：計算系統總能量的變化。

按題設在平衡狀態時，兩極板之間的液柱長度為 $L/2$ ，此時極板內外的液面高度差

為 h 。現假想讓兩極板之間的液柱往上升高一小距離 y ，則整個系統的重力位能變化量為

$$\Delta U_G = \rho L d (h+y) g \cdot \frac{h+y}{2} - \rho L d h g \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{2} \rho L d g [(h+y)^2 - h^2]$$

這時兩極板之間的液柱長度增長為 $\frac{L}{2} + y$ ，電容器內的電場能量的變化量為

$$\Delta U_E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 L} \left[\frac{1}{L + (\kappa - 1) \left(\frac{L}{2} + y \right)} - \frac{1}{L + (\kappa - 1) \left(\frac{L}{2} \right)} \right]$$

整個系統的能量變化為

$$\begin{aligned} \Delta U &= \Delta U_G + \Delta U_E \\ &= \frac{1}{2} \rho L d g [(h+y)^2 - h^2] + \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 L} \left[\frac{1}{L + (\kappa - 1) \left(\frac{L}{2} + y \right)} - \frac{1}{L + (\kappa - 1) \left(\frac{L}{2} \right)} \right] \end{aligned}$$

當 $y=0$ 時，該系統處於平衡狀態，故 ΔU 應為極小值，即

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy}(\Delta U) \Big|_{y=0} &= 0 \\ \Rightarrow \rho L d g h - \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 L} \cdot \frac{\kappa - 1}{\left(L + (\kappa - 1) \frac{L}{2} \right)^2} &= 0 \\ \Rightarrow h &= \frac{2Q^2}{\epsilon_0 \rho g L^4} \cdot \frac{\kappa - 1}{(\kappa + 1)^2} \end{aligned}$$

三、解：

(1) 處理涉及光或電磁波的都卜勒效應，必須使用相對論性的都卜勒頻移公式，即

$$f' = f \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}, \text{ 式中 } v \text{ 為觀察者相對於光源的相對速度。如果 } v \ll c, \text{ 則此相對}$$

論性的頻移公式，可近似等於古典都卜勒頻移公式，即 $f' = f \left(1 + \frac{v}{c} \right)$ 。設雷射光

的頻率為 f ，依照都卜勒頻移公式，以速度 v 前進迎向雷射光的離子所接收到的

光子頻率為 $f' = f \left(1 + \frac{v}{c} \right)$ 。因為 $\lambda f = c$ ，故

$$\lambda = \frac{c}{f'} \left(1 + \frac{v}{c} \right) \quad (1)$$

按題設當離子靜止時，即 $v=0$ ， $\lambda = \lambda_1 = \frac{c}{f}$ ，故(1)式可改寫為

$$\lambda(v) = \lambda_1 \left(1 + \frac{v}{c}\right) \quad (2)$$

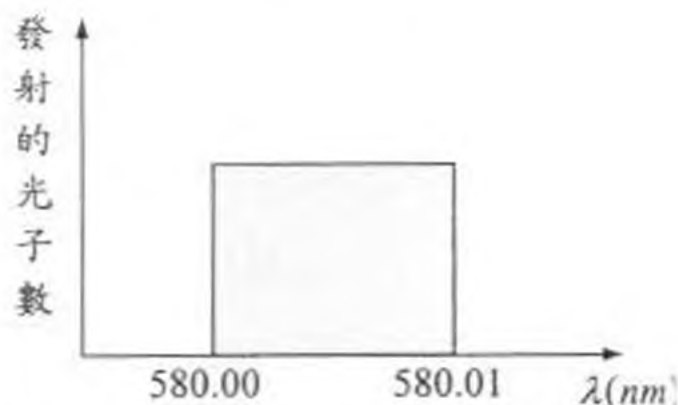
$\lambda(v)$ 就是使運動中的離子被激發所需要的入射雷射光的波長。

現將正離子速度分布的上下限，即 $v_1 = 0$ 和 $v_2 = 5000 \text{ m/s}$ ，代入(2)式，可得相應的雷射光波長的上下限， λ_1 和 λ_2 。

$$\lambda_1 = 580.000 \text{ nm}$$

$$\lambda_2 = 580.000 \times \left(1 + \frac{5000}{3 \times 10^8}\right) = 580.000 + 0.010 = 580.010 \text{ nm}$$

為了激發所有的離子，雷射光的波長必須調定在 $580.00 \sim 580.01 \text{ nm}$ 之間，且連續可變。由(2)式可知雷射光波長和離子速度之間呈線性關係，又每一個被激發後的離子會重新輻射出一個光子，所以所發射出的光子數隨波長的分布曲線，在上述的波長範圍內，亦為均勻分佈，如右圖所示。



- (2) 設離子的質量為 m ，所帶的正電量為 q ，初速度為 v ，加速電壓為 V ，則經過電場加速後的離子末速度 v' ，可利用能量守恆定律得出，即

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv'^2 &= \frac{1}{2}mv^2 + qV \\ \Rightarrow v' &= \sqrt{v^2 + \frac{2qV}{m}} \end{aligned} \quad (3)$$

將離子初速度的上下限代入上式，可得到末速度的上下限，分別為

$$v'_1 = \sqrt{\frac{2qV}{m}}, \quad v'_2 = \sqrt{v_2^2 + \frac{2qV}{m}} \quad (4)$$

在外加電壓後，正離子速度分佈範圍的寬度為

$$\Delta v' = v'_2 - v'_1 = \frac{v_2^2}{\sqrt{v_2^2 + \frac{2qV}{m}} + \sqrt{\frac{2qV}{m}}} = \frac{v_2}{\sqrt{1 + \frac{2qV}{mv_2^2}} + \sqrt{\frac{2qV}{mv_2^2}}} < v_2 = \Delta v \quad (5)$$

上式表示在外加電壓後，正離子速度分佈區間的寬度變小。

- (3) 在沒有電壓加速下，若要激發所有的離子，則與離子的兩個激發態相對應的兩組雷射光波長分別為

$$\lambda_A = \lambda_1 \left(1 + \frac{v}{c}\right) \quad \text{和} \quad \lambda_B = \lambda_2 \left(1 + \frac{v}{c}\right) \quad (6)$$

式中 $\lambda_1 = 580.000 \text{ nm}$ ， $\lambda_2 = (\lambda_1 + 0.001) \text{ nm} = 580.001 \text{ nm}$ 。將正離子速度的上、下限代入，得到此二組雷射光波長的變化範圍

電阻器 R_1 和 R_2 的電流各為何？

- (3) 在圖示的電路中，達到最後平衡狀態時，各電容器的電壓和電量各為何？銷耗在電阻器 R_1 和 R_2 的電能各為何？
- (4) 在圖示的電路中，流經電阻器 R_1 和 R_2 的電流隨時間變化的函數，即 $I_1(t)$ 和 $I_2(t)$ ，各為何？電容器 C_1 、 C_2 、和 C_3 的電壓隨時間變化的函數，即 $V_1(t)$ 、 $V_2(t)$ 、和 $V_3(t)$ ，各為何？

【註】：你可能需要用到的積分式：

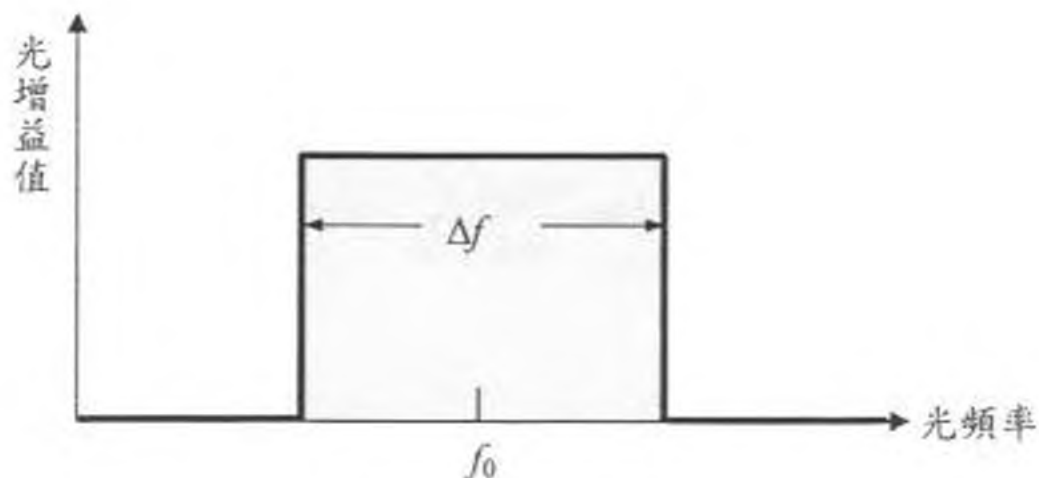
$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

- 五、一雷射共振腔的長度 $L = 56\text{cm}$ ，如圖六所示，其中 M_1 和 M_2 是兩個平面反射鏡， G 是長度為 $\frac{L}{7}$ ，折射率為 1.5 的光增益物質 (Gain medium)，對特定頻率的光有放大增強的作用。假設 G 的光增益特性曲線如圖七所示，且 $f_0 = 3.0 \times 10^{14}\text{Hz}$ ，頻寬為 $\Delta f = 1.00025 \times 10^{12}\text{Hz}$ 。(光速為 $c = 3.0 \times 10^8\text{m/s}$ 。)



圖六 雷射共振腔示意圖。



圖七 增益物質的放大曲線。

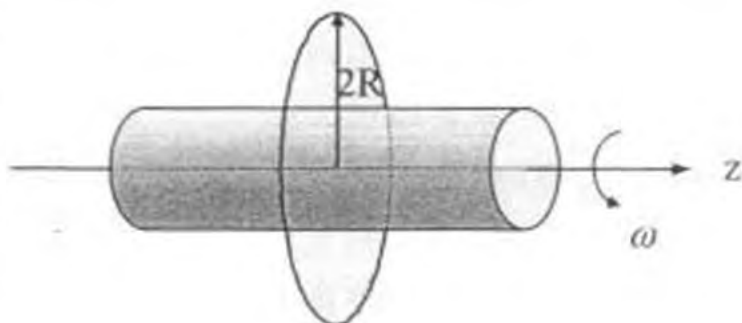
2002 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
 決選研習營筆試(二)試題

本試題共有計算題五大題，每題 20 分，合計 100 分。

一、一對外界絕緣良好的長圓柱金屬導體，長度為 L 、半徑為 R ($L \gg R$)，且帶有電量 Q ，電荷均勻分佈其表面上。

- (1) 求此圓柱體內外各點與其表面之間的電位差。
- (2) 若此圓柱體繞其中心軸(z 軸)以角速度 ω_0 轉動時，則圓柱體內外各點的磁場強度 B 為何？

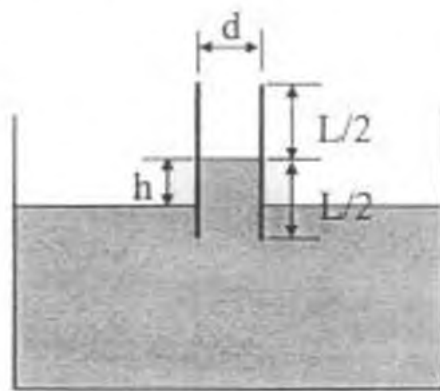
- (3) 一半徑為 $2R$ ，電阻為 r_0 的環形導線共軸圍繞於此轉動之圓柱體如圖一所示。若圓柱體以 $\omega(t) = \omega_0(1 - \frac{t}{t_0})$ 減速，式中 $t_0 \geq t \geq 0$ ，求(i)環形導線上所生的感應電流；(ii)環形導線所生的總熱能。



圖一

二、一邊長為 L 的正方形平行板電容器，兩極板的間隔為 d ，將之接至電壓為 V 的電池。等電容器完成充電後將電池移開，然後將此電容器鉛直地插入介電常數為 κ 的溶液內，結果會使介電溶液被吸引上升進入兩極板之間。假設在無其他外力作用的情況下，兩極板所插入的深度恰可使介電溶液在兩極板之間的液柱長度為 $L/2$ ，如圖二所示。設溶液的密度為 ρ ，回答下列問題：

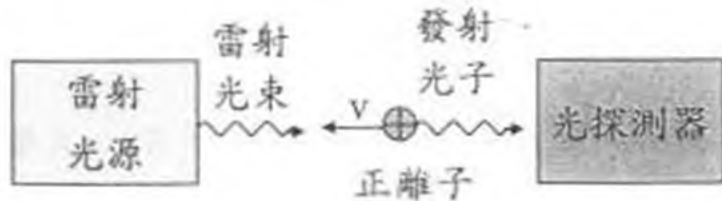
- (1) 此時電容器的電容為何？
- (2) 此時電容器兩極板之間的電場為何？
- (3) 電容器金屬極板上的電荷密度為何？
- (4) 電容器極板內外的液面高度差 h 為何？



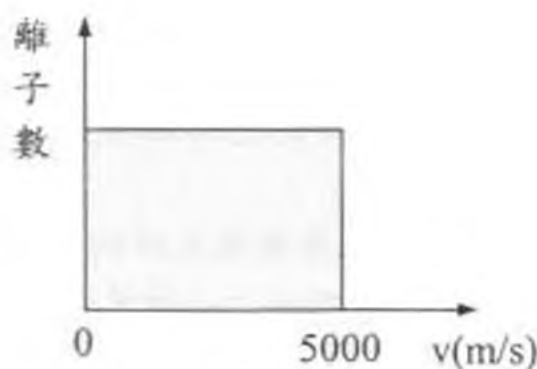
圖二

三、都卜勒效應常用於測定粒子的速度分布。處於基態的原子吸收一光子後，被激發到高能態，而後自發地從高能態釋放同樣能量的光子回到基態，因而我們可經由觀察原子被激發後的自發輻射，來探測光子的吸收。我們可以運用這種原理，來測定粒子束的速度分布。為了簡單明瞭起見，圖三所示為一理想化的實驗裝置簡圖。在此裝置中，採用一部低功率雷射，其雷射光的波長可調變。帶正電的離子以速度 v 朝向射出雷射光束的方向運動。當離子靜止時，它會被波長為 $\lambda_1 = 580.000nm$ 的一個光子所激發。由於都卜勒效應的緣故，若要激發運動中的離子，則所需要的雷射光波長 $\lambda(v)$ 是與 λ_1 不同。假設速度在 $v_1 = 0$ 和 $v_2 = 5000 m/s$ 之

間的離子數對速度的分布曲線，如圖四所示，回答下列問題：



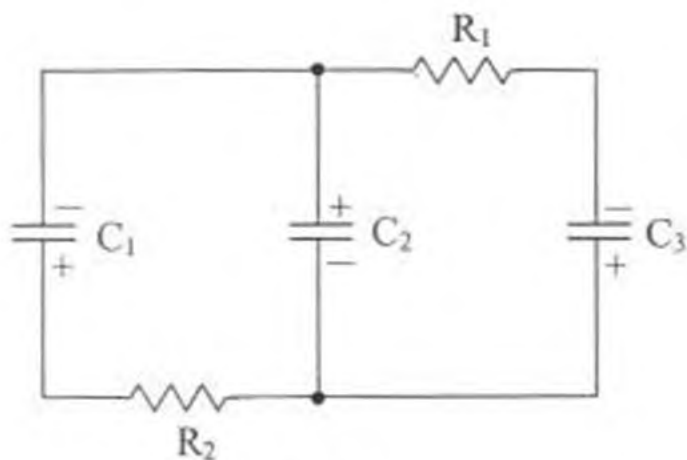
圖三



圖四

- (1) 利用都卜勒頻移公式，試求若欲激發所有離子，則所選用的雷射光的波長應在什麼範圍內調變？被激發後的離子最後會發射出光子，畫出光子數對波長的分佈曲線圖。
- (2) 假如正離子在被激發前，先通過一電位差 V 的電場予以加速，試求離子速度分布區間的寬度與加速電壓 V 之間的數學關係式。另外，此加速電壓將使得離子速度分布區間的寬度變大或是變小了？
- (3) 今有一正離子的荷質比 $\frac{q}{m} = 5.00 \times 10^6 \text{ C/kg}$ 。它有二個激發態，各自輻射出波長為 $\lambda_1 = 580.000 \text{ nm}$ 和 $\lambda_2 = (\lambda_1 + 0.001) \text{ nm}$ 的光子。試求在沒有加速電壓的情況下，要激發全部的正離子，所需兩組雷射光波長的調變範圍。此二組波長的範圍也許會重疊，試求若欲使這二組波長範圍不重疊，則所需最小的加速電壓值為何？

四、有三個相同的電容器，其電容各為 C ，串聯後接通一電動勢為 ε 的電池。在完全充電後，拆除電池，連接成如圖五所示的電路，圖中的兩電阻器相同，其電阻各為 R 。回答下列問題：



圖五

- (1) 在電容器完全充電，拆除電池後，但尚未連接成圖示的電路之前，各電容器的電壓和電量各為何？
- (2) 當電容器 C_2 的電量降為零時，電容器 C_1 和 C_3 的電壓和電量各為何？這時流經

2002年國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊決選研習營

理論模擬試題

2002年4月16日 08:00-13:00

- 一、本試題共三大題，每大題五十分，總分一百五十分。
 - 二、答卷時間五小時。
 - 三、在指定的答案紙上作答。
 - 四、在每題開始時請換用新頁。
 - 五、在每一頁答題紙的頂端寫明：
 - 題號
 - 該題所用答題紙之頁碼
 - 該題所用答題紙的總頁數
- 例(以第一題用了三頁紙為例)：
- | | |
|---|-----|
| 1 | 1/3 |
| 2 | 2/3 |
| 3 | 3/3 |

(5)在(4)小題所得 $R_B(T)$ 的關係式中， R_B 為實數的條件為

$$\ln\left(N^{\frac{1}{3}} \frac{h}{4k_B T} \sqrt{\frac{3a}{\pi m}}\right) \geq 0 \Rightarrow N^{\frac{1}{3}} \frac{h}{4k_B T} \sqrt{\frac{3a}{\pi m}} \geq 1$$

$$\Rightarrow T \leq N^{\frac{1}{3}} \frac{h}{4k_B} \sqrt{\frac{3a}{\pi m}}$$

$$\Rightarrow T_{\max} = N^{\frac{1}{3}} \frac{h}{4k_B} \sqrt{\frac{3a}{\pi m}}$$

(6)耦合原子雲有最大半徑的條件為 $\frac{dR_B}{dT} = 0$ ，令 $\alpha = N^{\frac{1}{3}} \frac{h}{4k_B} \sqrt{\frac{3a}{\pi m}}$ ，則

$$\frac{d}{dT} \left[\frac{3k_B T}{a} \ln\left(\frac{\alpha}{T}\right) \right] = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{\alpha}{T}\right) - 1 = 0 \Rightarrow T = \alpha e^{-1}$$

得耦合原子雲的最大半徑為

$$R_{\max} = \left[\frac{3k_B T}{a} \ln\left(\frac{\alpha}{T}\right) \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{3k_B \alpha e^{-1}}{a} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[N^{\frac{1}{3}} \frac{3h}{4e} \sqrt{\frac{3}{\pi a m}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

(7)兩波相向前進疊加成駐波時，兩相鄰波節的間距為 $\frac{\lambda}{2}$ 。題設干涉條紋的間距

為 $1\mu\text{m}$ ，故 $\lambda = 2\mu\text{m} = 2 \times 10^{-6}\text{m}$ 。設對應的原子雲的溫度為 T ，其物質波波長為

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mK}} = \frac{h}{\sqrt{3mk_B T}}$$

$$T = \frac{h^2}{3mk_B \lambda^2} = \frac{(6.63 \times 10^{-34})^2}{3 \times 23 \times 1.68 \times 10^{-27} \times 1.38 \times 10^{-23} \times (2 \times 10^{-6})^2} = 6.87 \times 10^{-8}\text{K}$$

三、解：

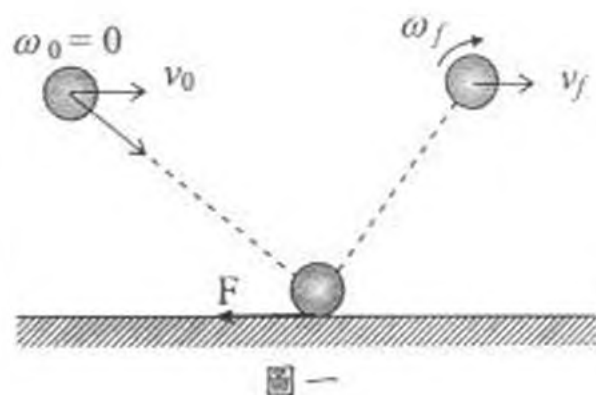
(1)不轉動： $\omega_0 = 0$

摩擦力 F 的方向如圖一所示。取方向向右的動量和衝量為正，則

$$-\bar{F}\Delta t = mv_f - mv_0 \quad (1)$$

式中 \bar{F} 為球與桌面在碰撞時間 Δt 內的平均摩擦力。取令順時鐘轉動的角動量和衝量矩為正，則

$$\bar{F}R\Delta t = I\omega_f \quad (2)$$



圖一

球不滑動的條件為球從桌面跳起之瞬間，底部相對於桌面的速度為零，即

$$v_f = \omega_f R \quad (3)$$

由(1)及(2)式消去 $\bar{F}\Delta t$ ，得

$$mR(v_0 - v_f) = I\omega_f \quad (4)$$

$$v_0 - v_f = \frac{I}{mR^2}(\omega_f R) \quad (5)$$

代入(3)式，得

$$v_0 - v_f = \frac{I}{mR^2}v_f \quad (6)$$

$$v_f = \frac{v_0}{\left(1 + \frac{I}{mR^2}\right)} \quad (7)$$

代入 $I = \frac{2}{3}mR^2$ ，得

$$v_f = \frac{3}{5}v_0 \quad (8)$$

$$\omega_f = \frac{v_f}{R} = \frac{3v_0}{5R} \quad (9)$$

故球反彈後從原來的不轉動變成上旋。

(2)上旋球： $\omega_0 > 0$

球和桌面接觸點的水平初速為 $v_0 - \omega_0 R$ 。

(a)若 $v_0 > \omega_0 R$ ，則摩擦力方向如圖二所示。

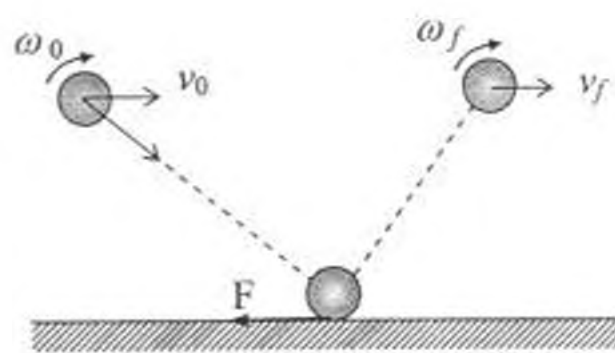
$$\begin{cases} -\bar{F}\Delta t = mv_f - mv_0 \\ \bar{F}R\Delta t = I\omega_f - I\omega_0 \\ v_f = \omega_f R \end{cases}$$

聯解得

$$v_f = \frac{v_0 + \frac{I}{mR}\omega_0}{\left(1 + \frac{I}{mR^2}\right)} = \frac{3}{5}\left(v_0 + \frac{2}{3}\omega_0 R\right) \quad (10)$$

$$\omega_f = \frac{v_f}{R} = \frac{3}{5}\left(\frac{v_0}{R} + \frac{2}{3}\omega_0\right) \quad (11)$$

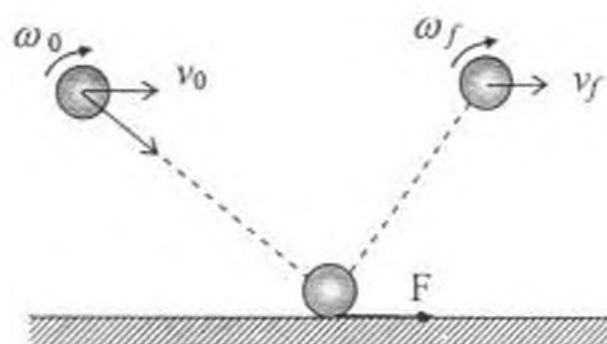
故球彈起後仍為上旋。



圖二

(b) 若 $v_0 < \omega_0 R$ ，則摩擦力如圖三所示。

$$\begin{cases} \bar{F}\Delta t = mv_f - mv_0 \\ -\bar{F}R\Delta t = I\omega_f - I\omega_0 \\ v_f = R\omega_f \end{cases}$$



圖三

聯解得

$$v_f = \frac{v_0 + \frac{I\omega_0}{mR}}{\left(1 + \frac{I}{mR^2}\right)} = \frac{3}{5}\left(v_0 + \frac{2}{3}\omega_0 R\right) \quad (12)$$

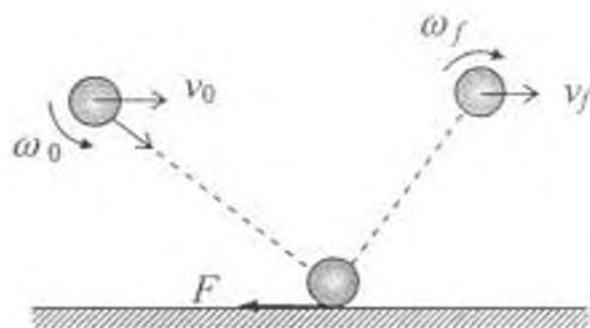
$$\omega_f = \frac{3}{5}\left(\frac{v_0}{R} + \frac{2}{3}\omega_0\right) \quad (13)$$

故球彈起後仍為上旋。

(3) 下旋球： $\omega_0 < 0$

摩擦力 F 的方向如圖四所示。

$$\begin{cases} -\bar{F}\Delta t = mv_f - mv_0 \\ \bar{F}R\Delta t = I\omega_f - (-I|\omega_0|) \\ v_f = R\omega_f \end{cases}$$



圖四

聯解得

$$v_f = \frac{v_0 - \frac{I|\omega_0|}{mR}}{\left(1 + \frac{I}{mR^2}\right)} = \frac{3}{5}\left(v_0 - \frac{2}{3}|\omega_0|R\right) \quad (14)$$

$$\omega_f = \frac{3}{5}\left(\frac{v_0}{R} - \frac{2}{3}|\omega_0|\right) \quad (15)$$

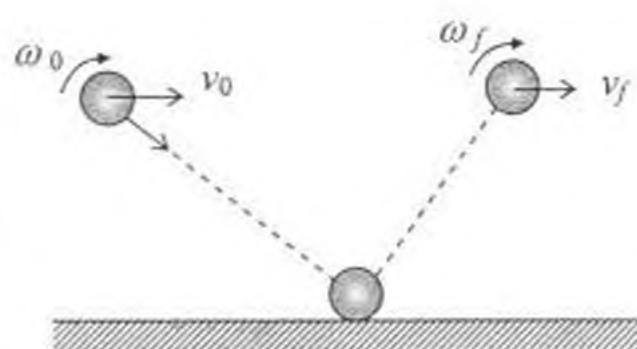
(a) 若 $v_0 > \frac{2}{3}|\omega_0|R$ ，則 $v_f > 0$ ，且 $\omega_f > 0$ 為上旋球。

(b) 若 $v_0 < \frac{2}{3}|\omega_0|R$ ，則 $v_f < 0$ ，球向後退，且 $\omega_f < 0$ ，仍為下旋球。

乒乓球在以上三種情況下，從桌面上反彈的速度與角速度綜合列於下表內：

三、本問題考慮旋轉對乒乓球從桌面上反彈的速度與旋轉的影響。質量 m 、半徑 R 的乒乓球斜向向下碰撞乒乓球桌面，碰撞前其速度的水平分量為 v_0 ，角速度為 $\bar{\omega}$ 。 $\bar{\omega}$ 的方向在水平面上，且垂直於乒乓球速度的水平分量。考慮本問題時，可做下列的假設：(a) 乒乓球與桌面的碰撞在鉛垂方向為彈性碰撞；(b) 乒乓球在桌面上的任何滑動距離可以不計；(c) 乒乓球從桌面上反彈的瞬間不滑動；(d) 空氣的阻力可以不計。

乒乓球的旋轉，依其轉動方向與向前速度的水平分量之間的關係，可區分為不轉，上旋，和下旋三種。如圖一所示者即為上旋，若其轉動方向相反，則為下旋。反彈速度的水平分量，若和 v_0 同向，視為正；若相反，則視為負。上旋的角速度視為正，下旋者則視為負。



圖四

試就下面三種乒乓球的起始旋轉狀況，分析它從桌面上彈起之瞬間的速度之水平分量 v_f 及角速度 ω_f ，分別以 m 、 R 、 v_0 、和 ω_0 表示之。已知乒乓球繞通過球心的轉軸的轉動慣量為 $I = \frac{2}{3}mR^2$ ，除將演算過程寫在答案卷外，並填寫下表。

- (1) $\omega_0 = 0$ (不轉)
- (2) $\omega_0 > 0$ (上旋)
- (3) $\omega_0 < 0$ (下旋)

	ω_0	v_f	ω_f	條件
(1)	$\omega_0 = 0$	量值:	量值:	
		符號:	符號:	
(2)	$\omega_0 > 0$	量值:	量值:	
		符號:	符號:	
(3)	$\omega_0 < 0$	量值:	量值:	
		符號:	符號:	

說明: (1) v_f 及 ω_f 之數值為正者，填寫“+”，為負者填寫“-”。

(2) 條件欄寫出 ω_0 、 v_0 、和 R 的不等關係式，無條件者填寫“無”。

2002 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
 決選研習營理論模擬試題參考解答

一、解：

(1) 在均勻磁場中，電子做等速率圓周運動。

在第一區內，圓周運動的半徑為

$r_a = \frac{mv_0}{eB_a}$ ，其圓心 O' 位於垂直於初速 \vec{v}_0 的

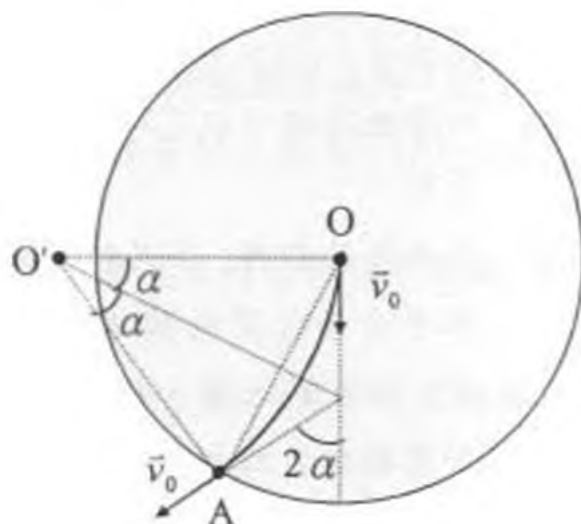
直線和弦 \overline{OA} 的中垂線的交點，如圖一所示。由圖中的幾何關係可得

$$\sin \alpha = \frac{a/2}{r_a} = \frac{eB_a a}{2mv_0} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{弧長 } \widehat{OA} = r_a \times (2\alpha) = \frac{mv_0}{eB_a} \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi a}{3}$$

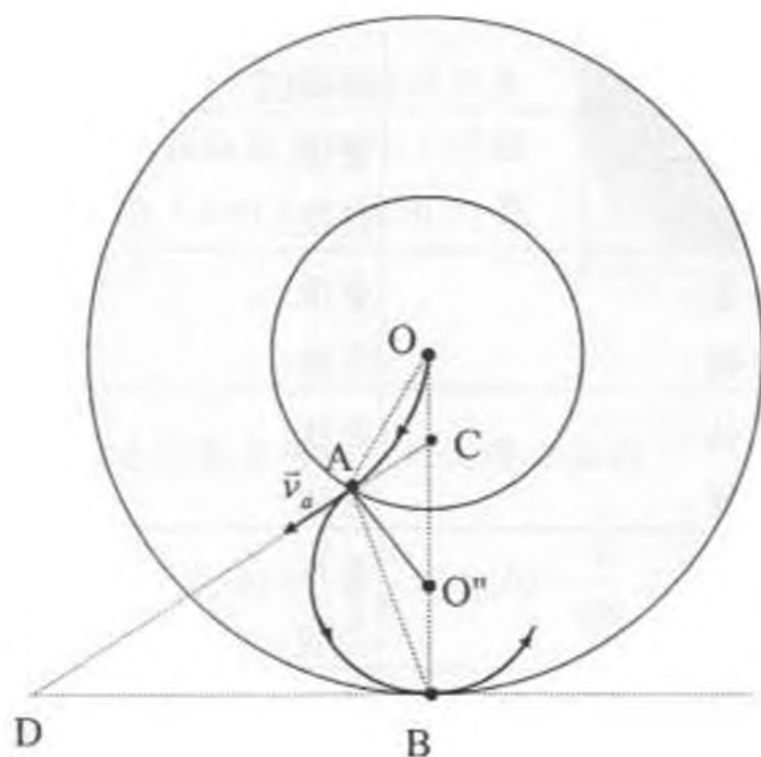
$$\text{故飛行時間等於 } \frac{\widehat{OA}}{v_0} = \frac{\pi a}{3v_0} = \frac{\pi m}{3eB_a}$$



圖一

(2) 電子在第二區內亦做速率為 v_0 的等速率圓周運動，其半徑 $r_b = \frac{mv_0}{eB_b}$ 。設電子在 A

點的速度為 \vec{v}_a ，則此圓周的中心 O'' 點位在垂直於 \vec{v}_a 的直線和 OB 連線的交點，如圖二所示。



圖二

由(1)小題知 $\angle OAC = \alpha = \frac{\pi}{6}$ ，故在 $\triangle OAO^*$ 中， $\angle O^*AO = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$ 。此角的

兩邊 $\overline{AO} = a$ ， $\overline{AO^*} = r_b = \frac{mv_0}{eB_b} = \frac{eB_a a}{eB_b} = \left(\frac{B_a}{B_b}\right)a$ 。由餘弦定律得

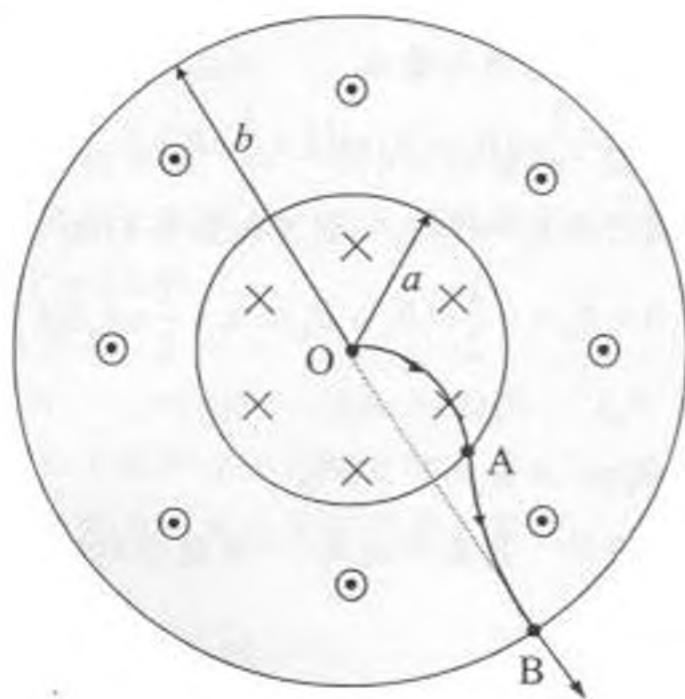
$$\overline{OO^*} = \left[a^2 - 2ar_b \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + r_b^2 \right]^{1/2} = \left[a^2 + \frac{a}{b} \left(\frac{B_a}{B_b}\right) + \left(\frac{B_a}{B_b}\right)^2 a^2 \right]^{1/2}$$

但 $\overline{OO^*} = b - r_b = b - \left(\frac{B_a}{B_b}\right)a$ ，以之代入上式，解得

$$B_b = \left[\frac{a(a+2b)}{b^2 - a^2} \right] B_a$$

本小題除了可用上述的幾何解法外，也可利用角動量解題，解法列在(3)小題之後的備註。

(3) 設電子在 A 點由第一區進入第二區，而在 B 點穿出第二區。因電子做垂直於磁場的平面運動，可用平面極坐標分析其運狀況。電子的速度可表為



圖五

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \quad (1)$$

相對於圓心 O 點的角動量 $\vec{\ell}$ 可表為

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times m\vec{v} = r\hat{r} \times (r\dot{\theta}\hat{\theta}) = mr^2\dot{\theta}\hat{k} \quad (2)$$

電子的角動量方向垂直於紙面。

相對於圓心 O 點，電子所受的磁力矩 \vec{N} 可表為

$$\vec{N} = \vec{r} \times (-e\vec{v} \times \vec{B}) = -e[(\vec{r} \cdot \vec{B})\vec{v} - (\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{B}] = e(\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{B} = er\dot{\theta}\vec{B} \quad (3)$$

將(3)式代入力矩方程式 $\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{N}$ ，可得

$$\frac{d\bar{\ell}}{dt} = e r \dot{r} \bar{B} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} e r^2 \bar{B} \right) \quad (4)$$

$$\therefore \bar{\ell} = \bar{\ell}_0 + \frac{1}{2} e r^2 \bar{B} \quad (5)$$

式中 $\bar{\ell}_0$ 為一定向量，可由起始條件決定之。

在第一區， $\bar{B} = \bar{B}_a = -B_a \hat{k}$ ，且當 $r=0$ 時， $\bar{\ell}=0$ ，故 $\bar{\ell}_0=0$ 。

$$\therefore \bar{\ell} = -\frac{1}{2} e B_a r^2 \hat{k} \quad (r < a) \quad (6)$$

故電子到達 A 點時的角動量為

$$\bar{\ell}_a = -\frac{1}{2} e B_a a^2 \hat{k} \quad (7)$$

在第二區， $\bar{B} = \bar{B}_b = +B_b \hat{k}$ ，得

$$\bar{\ell} = \bar{\ell}'_0 + \frac{1}{2} e r^2 \bar{B}_b \quad (8)$$

當 $r=a$ 時， $\bar{\ell} = \bar{\ell}_a = -\frac{1}{2} e B_a a^2 \hat{k}$ ，故 $\bar{\ell}_a = \bar{\ell}'_0 + \frac{1}{2} e a^2 \bar{B}_b$ 。

$$\therefore \bar{\ell}'_0 = \bar{\ell}_a - \frac{1}{2} e a^2 \bar{B}_b = -\frac{1}{2} e (B_a + B_b) a^2 \hat{k} \quad (9)$$

所以電子在第二區的角動量為

$$\bar{\ell} = -\frac{1}{2} e (B_a + B_b) a^2 \hat{k} + \frac{1}{2} e B_b r^2 \hat{k} \quad (10)$$

在 B 點，若電子沿徑向射出，則其相對於 O 點的角動量 $\bar{\ell}_b = 0$ ，即

$$0 = \bar{\ell}_b = -\frac{1}{2} e (B_a + B_b) a^2 \hat{k} + \frac{1}{2} e B_b b^2 \hat{k} \quad (11)$$

$$\Rightarrow B_a a^2 = B_b (b^2 - a^2)$$

$$B_a \pi a^2 = B_b \pi (b^2 - a^2) \quad (12)$$

此即為所求的條件，其意謂通過 $r=b$ 圓周內的總磁通量為零。

【註】：

在 B 點，電子軌跡相切於半徑為 b 的圓，故其角動量為 $\bar{\ell}_b = m v_0 b \hat{k} = e B_a a b \hat{k}$ ，

代入(10)式，得 $-(B_a + B_b) a^2 + B_b b^2 = 2 B_a a b$ ，解得 $B_b = \left[\frac{a(a+2b)}{b^2 - a^2} \right] B_a$ 。此式

和(3)小題的結果相符。

(4) 因電子不受耗散力之作用，故其運動為可逆，由(3)知，若電子朝圓心 O 點射入 ($c=0$)，且(12)式成立，即 $B_a \pi a^2 = B_b \pi (b^2 - a^2)$ ，則電子可抵達圓心 O 點。

二、解：

(1) 原子數密度 $n = \frac{N}{V} = \frac{1}{d^3}$ ，故原子間距為

$$d = \left(\frac{1}{n}\right)^{1/3} = \left(\frac{1}{10^{15}}\right)^{1/3} = 10^{-5} \text{ cm} = 10^{-7} \text{ m}$$

原子的平均動能 $K = \frac{3}{2} k_B T = \frac{3}{2} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 600 = 1.24 \times 10^{-20} \text{ J}$

原子的動量 $p = \sqrt{2mK}$ ，故其物質波波長為

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{\sqrt{2mK}} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{\sqrt{2 \times 23 \times 1.68 \times 10^{-27} \times 1.24 \times 10^{-20}}} = 2.14 \times 10^{-11} \text{ m}$$
$$\Rightarrow \frac{d}{\lambda} = \frac{10^{-7}}{2.14 \times 10^{-11}} = 4.67 \times 10^3$$

(2) 若取從中心向外的方向為正，則每一原子所受的侷限力為

$$F(R) = -\frac{dU}{dR} = -2aR$$

設在距中心點的徑向距離 R 處，取一極小的體積元，截面積為 A ，厚度為 dR ，即 $dV = AdR$ 。若 n 為原子數密度，則在該體積元內所包含的原子數為

$$dN = ndV = nAdR$$

這些原子所受的侷限力為

$$dF = FdN = -2aRdN = -2aRnAdR$$

該體積元的受力情形如下圖所示， P 和 $(P+dP)$ 分別為作用於內面和外面的壓力，在平衡狀態時，其所受的合力為零，即

$$-(P+dP)A + PA + dF = 0$$

$$-AdP - 2aRnAdR = 0$$

$$\Rightarrow dP = -2naRdR$$

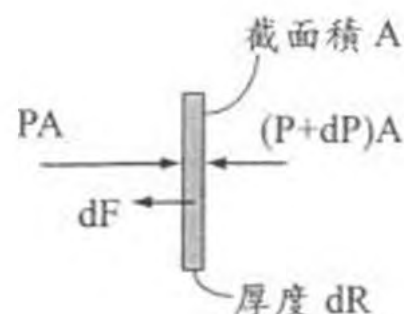
利用理想氣體方程式 $PV = Nk_B T$ ，可得 $P = \frac{N}{V} k_B T = nk_B T \Rightarrow dP = k_B T dn$ ，故

$$k_B T dn = -2naRdR \Rightarrow \frac{dn}{n} = \frac{-2aRdR}{kT}$$

將上式積分後，可得

$$n(R) = n_0 \exp\left(-\frac{a}{kT} R^2\right)$$

式中 n_0 為中心點 ($R=0$) 的原子數密度。



(3) 若受侷限的鈉原子總數為 N 個，則

$$\begin{aligned} N &= \int n dV = \int_0^{\infty} n 4\pi R^2 dR = \int_0^{\infty} 4\pi R^2 n_0 \exp\left(-\frac{a}{kT} R^2\right) dR \\ &= 4\pi n_0 \int_0^{\infty} R^2 \exp\left(-\frac{a}{kT} R^2\right) dR \end{aligned}$$

令 $b = \frac{a}{kT}$ ，則利用積分公式

$$I_2(b) = \int_0^{\infty} e^{-bR^2} R^2 dR = \frac{1}{4b} \sqrt{\frac{\pi}{b}} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left(\frac{kT}{a}\right)^{\frac{3}{2}}$$

可得原子總數為

$$N = 4\pi n_0 \int_0^{\infty} R^2 \exp\left(-\frac{a}{kT} R^2\right) dR = n_0 \left(\frac{\pi kT}{a}\right)^{\frac{3}{2}}$$

在中心點 ($R=0$) 處的原子密度 $n_0 = N \left(\frac{a}{\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}$ 。

(4) 鈉原子的物質波長為

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mK}} = \frac{h}{\sqrt{3mk_B T}}$$

若 $\frac{d}{\lambda} = \frac{3}{4}$ 為形成物質波相耦合的原子雲的臨界條件，則

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{1/3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{h}{\sqrt{3mk_B T}}$$

$$\left[N \left(\frac{a}{\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{a}{k_B T} R_B^2\right) \right]^{-1/3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{h}{\sqrt{3mk_B T}}$$

$$\exp\left(\frac{a}{3k_B T} R_B^2\right) = N^{\frac{1}{3}} \frac{h}{4k_B T} \sqrt{\frac{3a}{\pi m}}$$

$$\frac{a}{3k_B T} R_B^2 = \ln\left(N^{\frac{1}{3}} \frac{h}{4k_B T} \sqrt{\frac{3a}{\pi m}}\right)$$

$$\Rightarrow R_B = \left[\frac{3k_B T}{a} \ln\left(N^{\frac{1}{3}} \frac{h}{4k_B T} \sqrt{\frac{3a}{\pi m}}\right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

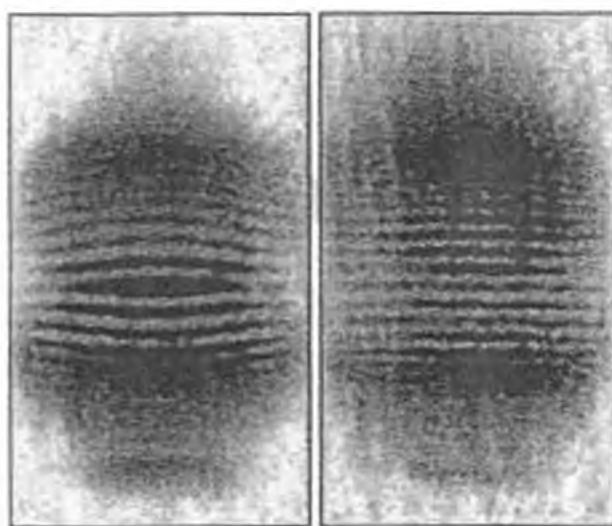
- (1) 估算在鈉原子氣體中，相鄰原子的平均間距 d 與其物質波波長 λ 的比值， $\frac{d}{\lambda}$ ，為何？（波茲曼常數 $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ ；卜朗克常數 $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ Js}$ 。）

現將鈉原子氣體以一向心的力場，侷限於一球形對稱的區域內。設 R 為區域內某點距中心點的徑向距離，在該點的每一原子所具有的位能為 $U(R) = aR^2$ ，回答下列問題：

- (2) 若該系統的溫度 T 保持固定且均勻，則鈉原子數密度 n 的徑向分布函數，即 $n(R)$ 為何？（ n 為每單位體積的鈉原子數目。）
- (3) 若受侷限的鈉原子總數為 N 個，則在中心點 ($R=0$) 的鈉原子密度隨溫度 T 變化的函數，即 $n(T)|_{R=0}$ ，為何？

設法將系統降溫，逐步冷卻使鈉原子的平均動能漸小。當原子的物質波波長 λ 大於原子間距 d 時，原子的物質波會重疊而致彼此耦合，形成一團原子雲，會呈現顯著的波動性質。若 $\frac{d}{\lambda} = \frac{3}{4}$ 為形成物質波相耦合的原子雲的臨界條件，回答下列問題：

- (4) N 個受侷限的鈉原子所形成的耦合原子雲，其半徑 R_B 和絕對溫度 T 的關係式為何？
- (5) 至少需降低到什麼溫度 T_{\max} ，才能夠使 N 個受侷限的鈉原子，形成物質波相耦合原子雲？
- (6) 在逐漸冷卻降溫的過程中，所形成的耦合原子雲的最大半徑 R_{\max} 為何？
- (7) 兩團物質波長相同的原子雲相向接近而重疊時，會造成干涉現象如圖三所示。若圖中的干涉條紋間距為 $1 \mu\text{m}$ ($= 10^{-6} \text{ m}$)，則原子雲的溫度為何？



圖三

在本題的計算中，你也許需要用到下列的積分公式：

$$\text{若 } I_n(b) = \int_0^{\infty} e^{-by^2} y^n dy, \text{ 則 } I_0(b) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{b}}; I_1(b) = \frac{1}{2b}; I_2(b) = \frac{1}{4b} \sqrt{\frac{\pi}{b}}; I_3(b) = \frac{1}{2b^2}.$$

【註】：2001 物理諾貝爾獎的研究主題即為這類原子雲的實驗觀察，圖三摘錄自得獎者之一的研究論文。

2002 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
決選研習營理論模擬試題

本試題共三大題，每大題五十分，總分一百五十分。

一、如圖一所示，在 $r=a$ 的圓柱內（第一區）有均勻磁場 B_a 垂直進入紙面；在 $r=b$ 與 $r=a$ 的兩圓之間（第二區）有均勻磁場 B_b 垂直透出紙面。在 $r > b$ 的區域沒有磁場。電子以垂直於磁場的初速 \vec{v}_0 從圓心 O 點射出。回答下列問題。

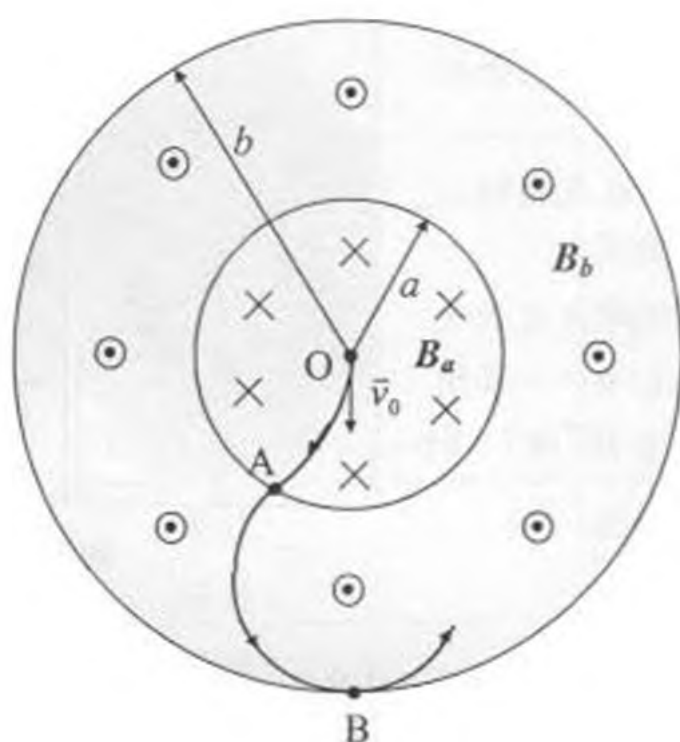
(1) 若 $v_0 = \frac{eB_a a}{m}$ ， m 和 e 分別為電子的質量和電量，且設電子射出後和半徑為 a 的

圓周交於 A 點，如圖一所示。試求電子從 O 點飛行至 A 點所經歷的時間。

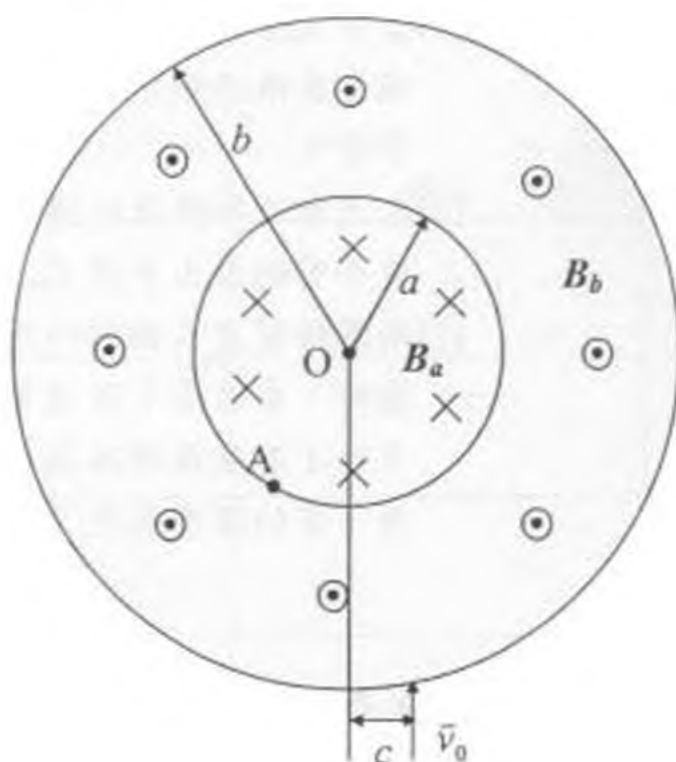
(2) 承(1)小題，若電子在進入第二區後，其軌跡和半徑為 b 的圓相切於 B 點，如圖一所示，則第二區的磁場 B_b 應為何（以 B_a 、 a 、和 b 表示之）？又 b 和 a 必須符合什麼條件時，才會發生？

(3) 若電子以可以穿越第一區及第二區的初速，垂直於磁場射出，試問 B_b 、 B_a 、 a 、和 b 之間必須存在有何種關係時，電子可以沿徑向穿越 $r=b$ 的圓周？

(4) 如圖二所示，若電子從磁場區外，以足可穿越磁場區的初速 \vec{v}_0 ，垂直於磁場方向直接射入磁場區，試問當那些條件成立時，此電子可抵達中心 O 點？



圖一



圖二

二、任何粒子皆具有粒子和波動的二元性質。當相鄰兩粒子的間距遠大於其物質波的波長時，彼此的物質波不會重疊而致彼此耦合，因此粒子的波動性質並不顯著，可視為單一獨立的個別粒子來考量。現考慮中性的鈉原子 ($m=23 \times 1.68 \times 10^{-27} \text{ kg}$) 氣體，是從溫度為 600 K 的高溫爐中所蒸發出來，其原子數密度約為 10^{15} 原子/cm^3 。原子氣體的行為可用理想氣體模型來描述。

	ω_0	v_f	ω_f	條件
(1)	$\omega_0 = 0$	量值: $\frac{3}{5}v_0$ 符號: +	量值: $\frac{3}{5}v_0$ 符號: +	無
		量值: 符號:	量值: 符號:	
(2)	$\omega_0 > 0$	量值: $\frac{3v_0}{5} + \frac{2}{5}\omega_0 R$ 符號: +	量值: $\frac{3v_0}{5R} + \frac{2}{5}\omega_0$ 符號: +	$v_0 > \omega_0 R$
		量值: $\frac{3v_0}{5} + \frac{2}{5}\omega_0 R$ 符號: +	量值: $\frac{3v_0}{5R} + \frac{2}{5}\omega_0$ 符號: +	$v_0 < \omega_0 R$
(3)	$\omega_0 < 0$	量值: $\frac{3v_0}{5} - \frac{2}{5} \omega_0 R$ 符號: +	量值: $\frac{3v_0}{5R} - \frac{2}{5} \omega_0 $ 符號: +	$v_0 > \frac{2}{3} \omega_0 R$
		量值: $\frac{3v_0}{5} - \frac{2}{5} \omega_0 R$ 符號: -	量值: $\frac{3v_0}{5R} - \frac{2}{5} \omega_0 $ 符號: -	$v_0 < \frac{2}{3} \omega_0 R$

2002年國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊決選研習營

筆試(一)試題

2002年4月15日 14:00-17:00

- 一、本試題共五大題，每大題二十分，總分一百分。
- 二、考試時間三小時。
- 三、在指定的答案紙上作答。
- 四、可使用無程式掌上型計算機。

內能的變化。本題中的理想氣體在通過噴嘴的前後，其溫度有變化，因此在使用下式時，須作修正。

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho_1 v_1^2 + \rho_1 g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho_2 v_2^2 + \rho_2 g h_2$$

- (2) 假設氣體在進口處和出口處的速度比值 v_1/v_2 遠小於 1，若氣體在出口處的壓力 p_2 可以改變，則 p_2 須為何值(答案以 γ 、 p_1 表示之)時，方能使每單位時間通過噴嘴的氣體質量 m 為極大？
- (3) 若進口端為一火箭的燃燒室，則由出口處噴出之氣體，對火箭產生的水平推力 F 為何？(答案以 γ 、 p_1 、 p_2 、 A_2 表示之。)

五、在吹肥皂泡的過程中，一方面肥皂泡的表面積經歷從無(近乎為零)到有，從小到大的變化；另一方面在肥皂泡的膨脹過程中，由於泡內的氣體壓力較外界大，相當於將一定質量，在一大氣壓下的空氣壓縮入肥皂泡中，其過程可視作是等溫壓縮過程。現在把肥皂泡吹成一個表面積為 0.025m^2 的球形，肥皂泡外的大氣壓力為 1 大氣壓 ($=1.01 \times 10^5 \text{N/m}^2$)，假設肥皂液的表面張力 $\gamma = 40 \times 10^{-3} \text{N/m}$ (不隨肥皂泡的大小而變化)，回答下列問題：

- (1) 因肥皂泡的內外表面積增大，外力為克服皂液表面張力所作的功為何？
- (2) 在最後平衡狀態時，肥皂泡內部和外部的空氣壓力差為何？
- (3) 將一定質量的空氣壓縮入肥皂泡內，在等溫壓縮過程中，外力所需作的功為何？
- (4) 若不考慮其他能量的損失，在本題中的外力吹肥皂泡所需作的總功為何？(1)小題中所作的功佔總功的百分比為何？

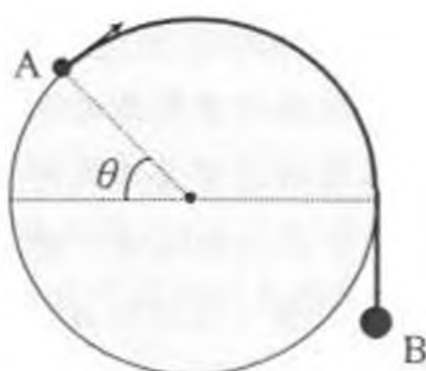
【註】你也許需要用到下列數學公式：

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots \quad (\text{適用於 } |x| < 1)$$

2002 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
 決選研習營筆試(一)試題

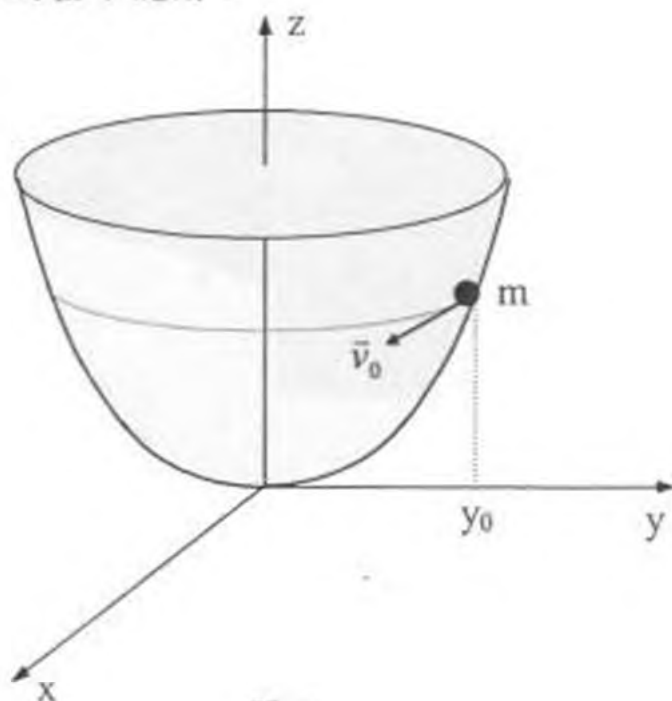
本試題共有計算題五大題，每題 20 分，合計 100 分。

- 一、兩質點 A(質量為 m_1) 和 B(質量為 m_2)，以長度為 πR 的細線連接，跨在一半徑為 R 的固定的光滑圓柱上。起始時，使兩質點靜止位在同一水平線上。現將此質點系統釋放，B 質點鉛直下降，A 質點順著圓柱面滑動，如圖一所示。當 A 點滑過一圓心角 θ (小於 90°) 時，求細線上的張力和圓柱面作用於 A 質點的正向力 (假設質點 A 保持和圓柱面接觸)。



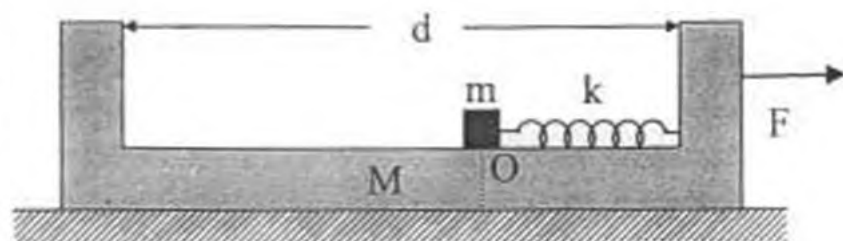
圖一

- 二、有一質量為 m 的質點在一光滑拋物面上運動，如圖二所示，其中 z 軸是鉛直軸，拋物面方程式為 $z = a(x^2 + y^2)$ 。設在起始時，質點的坐標為 $(0, y_0, ay_0^2)$ ，其速度為 $(v_0, 0, 0)$ ，回答下列問題：
- (1) 若此質點繞 z 軸作等速圓周運動，則 v_0 為何？
 - (2) 若質點的起始速度 v_0 僅為(1)小題中速度值的一半，則質點落至其軌跡中最低點時的高度和速率各為何？
 - (3) 承(1)小題，利用類似波耳的氫原子模型假設，即角動量為 $n\hbar$ (n 為正整數， $\hbar = \frac{h}{2\pi}$)，求此質點的量子能階。



圖二

三、一質量為 m 的質點，以一力常數為 k ，質量可忽略的彈簧繫於一質量為 M 的 U 形木塊的內壁，U 形木塊則放置在光滑的水平地面上。起始時彈簧處於其自然長度 l_0 ，質點與木塊皆靜止，



圖三

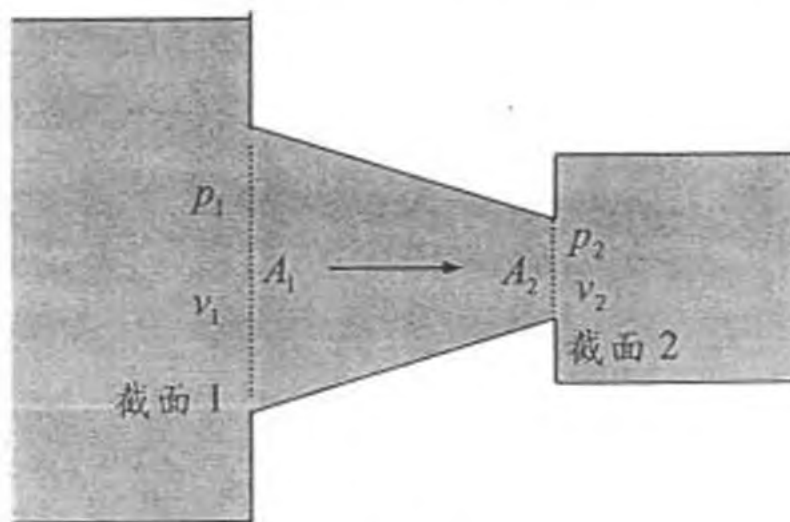
今以一定值的水平力 F 將 U 形木塊沿水平方向向右方拉動，如圖三所示。假定質點與木塊之間無摩擦，回答下列各問題。

- (1) U 形木塊兩內壁間距 d ，須滿足何種條件，質點才不會撞及 U 形木塊的後方內壁？
- (2) 若 d 滿足(1)小題中所述的條件，質點第一次回到 U 形木塊上的起始位置 O 點時，質點 m 相對於地面的速度為何？
- (3) 質點相對於 U 形木塊的最大速度為何？當時彈簧的長度為何？
- (4) 若 d 不滿足(1)小題中所述的條件，設質點以(3)小題中的最大相對速度第一次撞及 U 形木塊後方的內壁，設碰撞為完全彈性碰撞，碰撞時間極短可以略去，則在碰撞後的瞬間，質點與木塊相對於地面的速度各為何？

【註】：若在微分方程式 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = C$ 中， ω^2 和 C 皆為常數，且 $\omega^2 > 0$ ，則其一

$$\text{般解為 } x = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{C}{\omega^2}。$$

四、一理想氣體的水平穩流，在無摩擦損耗下，通過如圖四所示的絕熱剛體噴嘴。設此氣體在進口處的壓力、速度、質量密度、截面積分別為 p_1 、 v_1 、 ρ_1 、 A_1 ；而在出口處者為 p_2 、 v_2 、 ρ_2 、 A_2 。已知此氣體的定壓比熱 c_p 與定容比熱 c_v 之比值為 γ ，回答下列問題：



圖四

- (1) 試求每單位質量之氣體在出口處和進口處的動能的差值。(答案以 γ 、 p_1 、 p_2 、 ρ_1 表示之。)

【提示】：下式是常見的白努利方程式，適用於理想的穩流體，未涉及熱能或

2002年國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊決選研習營

筆試(一)試題

2002年4月15日 14:00-17:00

- 一、本試題共五大題，每大題二十分，總分一百分。
- 二、考試時間三小時。
- 三、在指定的答案紙上作答。
- 四、可使用無程式掌上型計算機。

內能的變化。本題中的理想氣體在通過噴嘴的前後，其溫度有變化，因此在使用下式時，須作修正。

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho_1 v_1^2 + \rho_1 g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho_2 v_2^2 + \rho_2 g h_2$$

- (2) 假設氣體在進口處和出口處的速度比值 v_1/v_2 遠小於 1，若氣體在出口處的壓力 p_2 可以改變，則 p_2 須為何值(答案以 γ 、 p_1 表示之)時，方能使每單位時間通過噴嘴的氣體質量 m 為極大？
- (3) 若進口端為一火箭的燃燒室，則由出口處噴出之氣體，對火箭產生的水平推力 F 為何？(答案以 γ 、 p_1 、 p_2 、 A_2 表示之。)

五、在吹肥皂泡的過程中，一方面肥皂泡的表面積經歷從無(近乎為零)到有，從小到大的變化；另一方面在肥皂泡的膨脹過程中，由於泡內的氣體壓力較外界大，相當於將一定質量，在一大氣壓下的空氣壓縮入肥皂泡中，其過程可視作是等溫壓縮過程。現在把肥皂泡吹成一個表面積為 $0.025m^2$ 的球形，肥皂泡外的大氣壓力為 1 大氣壓 ($=1.01 \times 10^5 N/m^2$)，假設肥皂液的表面張力 $\gamma = 40 \times 10^{-3} N/m$ (不隨肥皂泡的大小而變化)，回答下列問題：

- (1) 因肥皂泡的內外表面積增大，外力為克服皂液表面張力所作的功為何？
- (2) 在最後平衡狀態時，肥皂泡內部和外部的空氣壓力差為何？
- (3) 將一定質量的空氣壓縮入肥皂泡內，在等溫壓縮過程中，外力所需作的功為何？
- (4) 若不考慮其他能量的損失，在本題中的外力吹肥皂泡所需作的總功為何？(1)小題中所作的功佔總功的百分比為何？

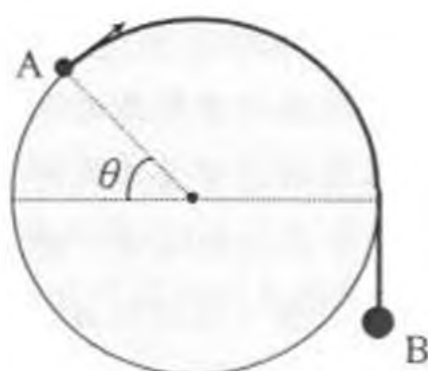
【註】你也許需要用到下列數學公式：

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots \quad (\text{適用於 } |x| < 1)$$

2002 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
 決選研習營筆試(一)試題

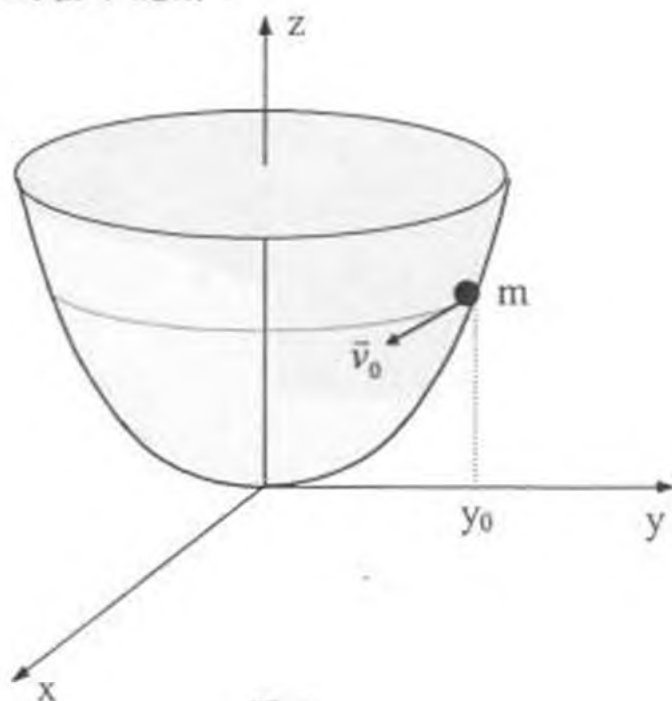
本試題共有計算題五大題，每題 20 分，合計 100 分。

- 一、兩質點 A(質量為 m_1) 和 B(質量為 m_2)，以長度為 πR 的細線連接，跨在一半徑為 R 的固定的光滑圓柱上。起始時，使兩質點靜止位在同一水平線上。現將此質點系統釋放，B 質點鉛直下降，A 質點順著圓柱面滑動，如圖一所示。當 A 點滑過一圓心角 θ (小於 90°) 時，求細線上的張力和圓柱面作用於 A 質點的正向力 (假設質點 A 保持和圓柱面接觸)。



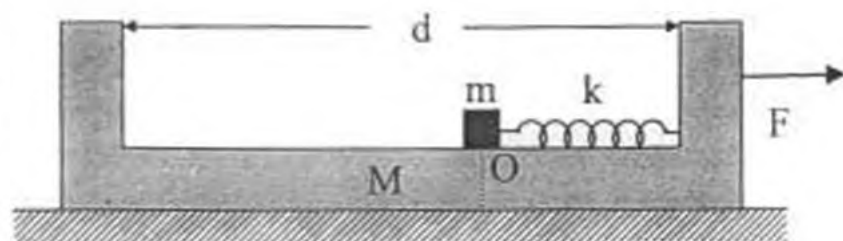
圖一

- 二、有一質量為 m 的質點在一光滑拋物面上運動，如圖二所示，其中 z 軸是鉛直軸，拋物面方程式為 $z = a(x^2 + y^2)$ 。設在起始時，質點的坐標為 $(0, y_0, ay_0^2)$ ，其速度為 $(v_0, 0, 0)$ ，回答下列問題：
- (1) 若此質點繞 z 軸作等速圓周運動，則 v_0 為何？
 - (2) 若質點的起始速度 v_0 僅為(1)小題中速度值的一半，則質點落至其軌跡中最低點時的高度和速率各為何？
 - (3) 承(1)小題，利用類似波耳的氫原子模型假設，即角動量為 $n\hbar$ (n 為正整數， $\hbar = \frac{h}{2\pi}$)，求此質點的量子能階。



圖二

三、一質量為 m 的質點，以一力常數為 k ，質量可忽略的彈簧繫於一質量為 M 的 U 形木塊的內壁，U 形木塊則放置在光滑的水平地面上。起始時彈簧處於其自然長度 l_0 ，質點與木塊皆靜止，今以一定值的水平力 F 將 U 形木塊沿水平方向向右方拉動，如圖三所示。假定質點與木塊之間無摩擦，回答下列各問題。



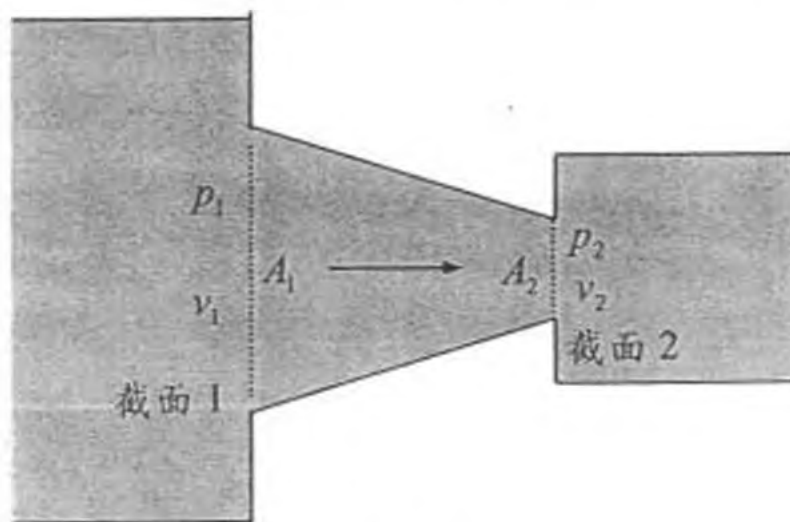
圖三

- (1) U 形木塊兩內壁的間距 d ，須滿足何種條件，質點才不會撞及 U 形木塊的後方內壁？
- (2) 若 d 滿足(1)小題中所述的條件，質點第一次回到 U 形木塊上的起始位置 O 點時，質點 m 相對於地面的速度為何？
- (3) 質點相對於 U 形木塊的最大速度為何？當時彈簧的長度為何？
- (4) 若 d 不滿足(1)小題中所述的條件，設質點以(3)小題中的最大相對速度第一次撞及 U 形木塊後方的內壁，設碰撞為完全彈性碰撞，碰撞時間極短可以略去，則在碰撞後的瞬間，質點與木塊相對於地面的速度各為何？

【註】：若在微分方程式 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = C$ 中， ω^2 和 C 皆為常數，且 $\omega^2 > 0$ ，則其一

$$\text{般解為 } x = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{C}{\omega^2}。$$

四、一理想氣體的水平穩流，在無摩擦損耗下，通過如圖四所示的絕熱剛體噴嘴。設此氣體在進口處的壓力、速度、質量密度、截面積分別為 p_1 、 v_1 、 ρ_1 、 A_1 ；而在出口處者為 p_2 、 v_2 、 ρ_2 、 A_2 。已知此氣體的定壓比熱 c_p 與定容比熱 c_v 之比值為 γ ，回答下列問題：



圖四

- (1) 試求每單位質量之氣體在出口處和進口處的動能的差值。(答案以 γ 、 p_1 、 p_2 、 ρ_1 表示之。)

【提示】：下式是常見的白努利方程式，適用於理想的穩流體，未涉及熱能或

(3) 由於題設在吹肥皂泡的過程中，為等溫壓縮過程，所以個別氣體分子的動能沒有變化。設 N 為流入肥皂泡內的總分子數，這些分子在一大氣壓 P_0 下所佔的總體積為 V_0 。將肥皂泡吹脹，泡內的氣體壓力必須較外界的大氣壓力大，因此吹肥皂泡的過程，相當於將這些空氣分子（壓力為 P_0 ，體積為 V_0 ）壓縮入肥皂泡的內部，最後泡內的空氣壓力和體積分別 P_1 和 V 。這一段等溫壓縮過程所需作的功為

$$W_2 = - \int_{V_0}^V p dV = - \int_{V_0}^V \frac{Nk_B T}{V} dV = -Nk_B T \int_{V_0}^V \frac{dV}{V} = -Nk_B T \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) \quad (7)$$

由於 $P_1 V = P_0 V_0 = Nk_B T$ ，利用(5)式，上式可改寫為

$$W_2 = -P_1 V \ln\left(\frac{P_0}{P_1}\right) = -P_1 V \ln\left(\frac{P_0}{P_0 + \frac{4\gamma}{r}}\right) = P_0 \left(1 + \frac{4\gamma}{P_0 r}\right) \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \ln\left(1 + \frac{4\gamma}{P_0 r}\right) \quad (8)$$

利用(6)式，可計算得

$$\frac{4\gamma}{P_0 r} = \frac{4 \times 40 \times 10^{-3}}{1.01 \times 10^5 \times 0.045} = 3.5 \times 10^{-5} \ll 1 \quad (9)$$

由於 $1 + \frac{4\gamma}{P_0 r} \approx 1$ ，又 $\ln\left(1 + \frac{4\gamma}{P_0 r}\right) \approx \frac{4\gamma}{P_0 r}$ ，(8)式可近似為

$$W_2 \approx P_0 \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \frac{4\gamma}{P_0 r} = \frac{2}{3} \times \gamma \times 2(4\pi r^2) = \frac{2}{3} W_1 = 1.3 \times 10^{-3} J \quad (10)$$

在上式中，已利用了(3)式的結果， $A = 4\pi r^2$ 。

(4) 吹肥皂泡所作的總功 W ，可分成兩部分：一為克服皂膜表面張力所作的功 W_1 ；另一為吹入空氣，相當於(3)小題中的等溫壓縮過程，所需作的功 W_2 ，故

$$W = W_1 + W_2 \approx 3.3 \times 10^{-3} J$$

W_1 所佔總功的百分比為 $\frac{W_1}{W_1 + W_2} = \frac{W_1}{W_1 + \frac{2}{3}W_2} = \frac{3}{5} = 60\%$ 。

$$v_2 \approx \sqrt{\left(\frac{2\gamma}{\gamma-1}\right) \frac{p_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]} \quad (8)$$

將上式代入(7)式可得

$$m = A_2 \sqrt{\left(\frac{2\gamma}{\gamma-1}\right) \frac{p_1}{\rho_1} \rho_2^2 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]}$$

利用(5)式，可得

$$\begin{aligned} m &= A_2 \sqrt{\left(\frac{2\gamma}{\gamma-1}\right) \frac{p_1}{\tau_1} \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{2/\gamma} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]} \\ &= A_2 \sqrt{\left(\frac{2\gamma}{\gamma-1}\right) \frac{p_1}{\tau_1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{2/\gamma} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\gamma+1)/\gamma}\right]} \end{aligned}$$

設當 $p_2 = p_c$ 時， m 為極大，其條件為

$$\frac{d}{dp_2} \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{2/\gamma} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\gamma+1)/\gamma} \right] = 0$$

得

$$2 \left(\frac{p_c}{p_1}\right)^{\frac{2}{\gamma}-1} - (\gamma+1) \left(\frac{p_c}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{p_c}{p_1} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

(3) 由出口離開之氣體，對火箭產生的水平推力為

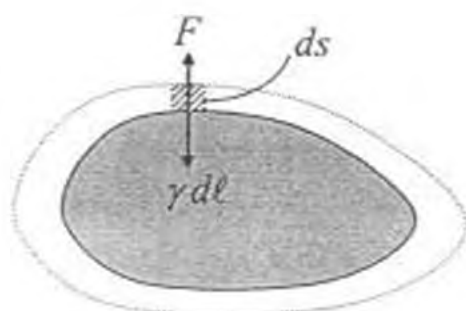
$$F = mv_2 = A_2 \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1}\right) \left(\frac{p_1}{\rho_1}\right) \rho_2 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]$$

利用(5)式，可得

$$\begin{aligned} F &= A_2 \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1}\right) p_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right) \right] \\ &= A_2 \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1}\right) p_2 \left[\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] \end{aligned}$$

五、解：

- (1) 取肥皂泡膜上一任意形狀的面積，如右圖所示，液體表面張力作用於邊長為 $d\ell$ 的力為 $\gamma d\ell$ 。若施加外力，使該液體面積增大至虛線所示的位置，則圖中的力 F 所須作的功為



$$dW_1 = Fds = 2\gamma dl ds = 2\gamma dA \quad (1)$$

式中 dA 為圖中斜線所標示的極小面積，由於肥皂泡有內外兩層，故所需的力 $F = 2\gamma dl$ 。就整個液體面積而言，為克服表面張力所作的總功為

$$W_1 = \int dW_1 = \int 2\gamma dA = 2\gamma \int dA = 2\gamma A \quad (2)$$

當肥皂泡的表面積由零增加至 0.025m^2 時，外力為克服液體表面張力所作的總功為

$$W_1 = \gamma \times 2A = 40 \times 10^{-3} \text{N/m} \times 2 \times 0.025\text{m}^2 = 2.0 \times 10^{-3} \text{J} \quad (3)$$

(2) 由(2)式可知表面張力的物理意義，乃係使液體表面每增加一個單位面積，外力所需作的功；或液體表面每單位面積所儲存的位能。若球形肥皂泡的半徑為 r ，則其表面積為 $4\pi r^2$ 。當半徑增加 Δr 時，液面所增加的表面積為 $8\pi r \Delta r$ ，故外力為克服液體表面張力所作的總功為 $\gamma \times 2(8\pi r \Delta r)$ ，式中的因子 2 是考慮皂膜有內外兩層。此功正好等於皂膜膨脹時，其內部和外部的氣體壓力差所作的功，即

$$(P_i - P_o) \times 4\pi r^2 \Delta r = \gamma \times 2(8\pi r \Delta r) \quad (4)$$

式中 P_i 為肥皂泡內的氣體壓力， P_o 則為肥皂泡外的大氣壓力。由上式可得

$$P_i - P_o = \frac{4\gamma}{r} \quad (5)$$

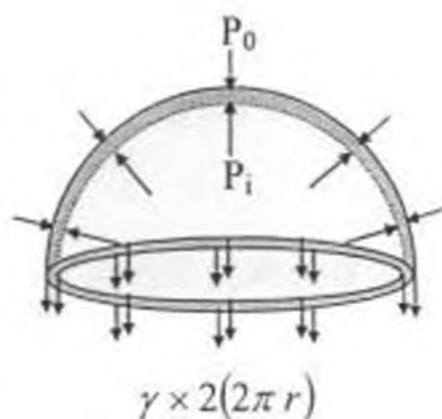
當肥皂泡的表面積為 0.025m^2 時，其半徑為

$$4\pi r^2 = 0.025 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{0.025}{4\pi}} = 0.045\text{m} \quad (6)$$

由(5)式可得肥皂泡內外的氣體壓力差為

$$P_i - P_o = \frac{4 \times 40 \times 10^{-3}}{0.045} = 3.6 \text{N/m}^2$$

另解：假想將肥皂泡切成兩半球，如右圖所示。皂膜內外的氣體壓力差，使皂膜受有向上的作用力， $(P_i - P_o) \times \pi r^2$ 。在半球的底面上則受有來自下半球皂膜表面張力的向下作用力， $\gamma \times 2(2\pi r)$ 。在球泡處於平衡狀態時，此兩力的大小相等，故



$$(P_i - P_o) \times \pi r^2 = \gamma \times 2(2\pi r)$$

$$P_i - P_o = \frac{4\gamma}{r}$$

2002 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
 決選研習營筆試(一)試題參考解答

一、解：

由於 A 質點仍在圓柱面上，A 和 B 兩質點的速率同為 $R\dot{\theta}$ ，質點 A 的切線加速度和質點 B 的加速度量值皆等於 $R\ddot{\theta}$ 。設以兩質點起始位置的水平面作為重力位能的零點，則由能量守恆定律可得

$$\frac{1}{2}m_1(R\dot{\theta})^2 + m_1gR\sin\theta + \frac{1}{2}m_2(R\dot{\theta})^2 - m_2gR\theta = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2g(m_2\theta - m_1\sin\theta)}{(m_1 + m_2)R}$$

將上式對時間 t 微分，可得

$$2\dot{\theta}\ddot{\theta} = \frac{2g(m_2 - m_1\cos\theta)\dot{\theta}}{(m_1 + m_2)R}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{g(m_2 - m_1\cos\theta)}{(m_1 + m_2)R}$$

細線上的張力可計算如下：

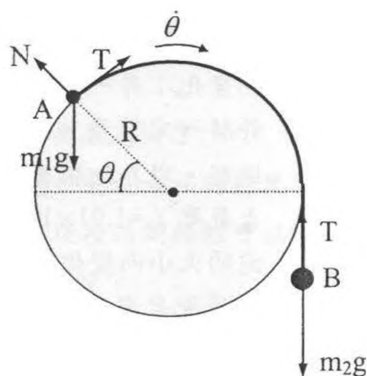
$$m_2g - T = m_2a = m_2(R\ddot{\theta})$$

$$\Rightarrow T = \left(\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\right)g(1 + \cos\theta)$$

圓柱面作用於質點 A 的正向力 N 可計算如下：

$$m_1R\dot{\theta}^2 = m_1g\sin\theta - N$$

$$\Rightarrow N = \frac{m_1(3m_1 + m_2)g\sin\theta - 2m_1m_2g\theta}{m_1 + m_2}$$

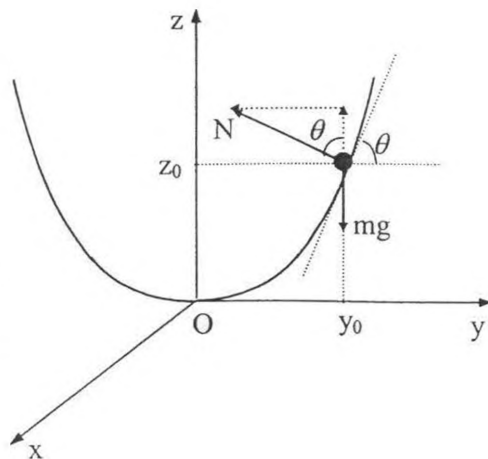


二、解：

- (1) 如右圖所示，質點在拋物面上運動時，受到兩個力的作用，即重力 mg 和正向力 N 。當質點的 y 坐標為 y_0 時，其所在位置的切線斜率為

$$\tan\theta = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{y_0} = 2ay_0 \quad (1)$$

若此質點繞 z 軸在水平面上作等速圓周運動，其半徑為 y_0 ，則



$$N \sin \theta = \frac{mv_0^2}{y_0}, \quad N \cos \theta = mg \quad (2)$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{mv_0^2}{mgy_0} \quad (3)$$

利用(1)式，可得

$$2\alpha y_0 = \frac{v_0^2}{gy_0} \Rightarrow v_0 = y_0 \sqrt{2ag} \quad (4)$$

- (2) 若質點的起始速度僅為(4)式速度值的一半，即 $v'_0 = \frac{1}{2}v_0 = \frac{1}{2}y_0\sqrt{2ag}$ ，則質點無法維持等速圓周運動。由於質點所受的重力和正向力，皆不會產生沿 z 軸方向的力矩，故沿 z 軸方向的角動量守恆，其大小為 $L = mv'_0 y_0$ 。設質點運動軌跡的最低點坐標為 (x, y, z) ，因質點在最低點時，只有水平速度 v ，故其角動量為

$$mv\sqrt{x^2 + y^2} = mv\sqrt{\frac{z}{a}} = mv'_0 y_0 \quad (5)$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{av_0'^2 y_0^2}{z} \quad (6)$$

取 $z=0$ 的平面為重力位能的零點，由力學能守恆定律可得

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz = \frac{1}{2}mv_0'^2 + mg(ay_0^2) \quad (7)$$

$$\Rightarrow v^2 = v_0'^2 + 2g(ay_0^2 - z) \quad (8)$$

由(6)和(8)兩式可得

$$v_0'^2 + 2g(ay_0^2 - z) = \frac{av_0'^2 y_0^2}{z} \quad (9)$$

因為 $z_0 = ay_0^2$ ，且 $v'_0 = \frac{1}{2}y_0\sqrt{2ag}$ ，故 $v_0'^2 = \frac{1}{2}z_0 g$ ，以之代入(9)式，得

$$\begin{aligned} 4z^2 - 5z_0 z + z_0^2 &= 0 \\ (4z - z_0)(z - z_0) &= 0 \\ z = \frac{z_0}{4} &= \frac{1}{4}ay_0^2 \end{aligned} \quad (10)$$

由(6)和(10)兩式可得

$$v = v'_0 y_0 \sqrt{\frac{a}{z_0}} = v'_0 y_0 \cdot \frac{2}{y_0} = 2v'_0 = y_0 \sqrt{2ag}$$

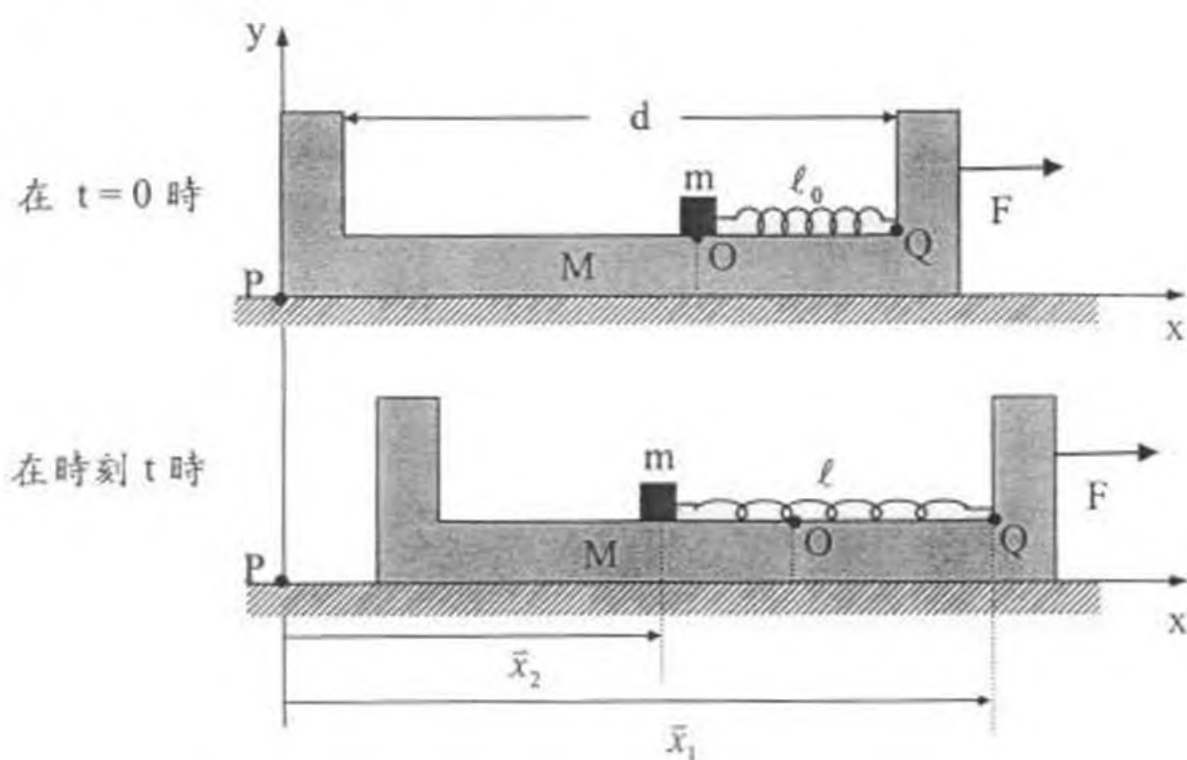
(3) 若質點的角動量 $L = n\hbar$ ，則 $mv_0 y_0 = n\hbar$ 。利用(4)式，可得 $y_0^2 = \frac{n\hbar}{m\sqrt{2ag}}$ 。質點的力學能為

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgz_0 = \frac{1}{2}m(2agy_0^2) + mg(ay_0^2) = 2mgy_0^2 = n\hbar\sqrt{2ag}$$

仿照波耳的原子模型，若質點的力學能可寫為 $E = n(\hbar\omega_0)$ ，則 $\omega_0 = \sqrt{2ag}$ 。

三、解：

(1) 參考下圖，取一個固定在地面上的 P 點為慣性坐標系的原點，Q 點為木塊右側內壁的端點， \bar{x}_1 和 \bar{x}_2 分別為 Q 點（代表木塊）和質點 m 相對於 P 點的位移。木塊 M 和質點 m 對原點 P 的運動方程式如下：



$$M \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k(x_1 - x_2 - l_0) + F \quad (1)$$

$$m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = k(x_1 - x_2 - l_0) \quad (2)$$

將(1)式 $\times m$ - (2)式 $\times M$ 得

$$mM(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -(m+M)k(x_1 - x_2 - l_0) + mF \quad (3)$$

設 $x_1 - x_2 - l_0 \equiv \Delta$ ，(3)式可改寫為

$$\frac{d^2 \Delta}{dt^2} = (\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -\frac{(m+M)}{mM}k\Delta + \frac{F}{M} \quad (4)$$

令約化質量 $\mu = \frac{mM}{m+M}$ ，(4)式可寫為

$$\frac{d^2 \Delta}{dt^2} + \left(\frac{k}{\mu}\right)\Delta = \frac{F}{M} \quad (5)$$

設 $\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \sqrt{k \left(\frac{m+M}{mM} \right)}$ ，(5)式的通解為

$$\Delta(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{\mu F}{kM} \quad (6)$$

將起始條件 $\Delta(0) = 0$ ， $\dot{\Delta}(0) = 0$ ，代入上式可得 $A = -\frac{\mu F}{kM}$ ， $B = 0$ ，故(6)式可寫為

$$\Delta(t) = \frac{\mu F}{kM} (1 - \cos \omega t) \quad (7)$$

由上式可知 $\Delta(t)$ 的最大值為 $\frac{2\mu F}{kM}$ ，最小值為 0，故 $(x_1 - x_2)$ 的最大值為 $\ell_0 + \frac{2\mu F}{kM}$ 。

若要質點 m 不撞及 U 形木塊的左側內壁，則木塊左右內壁的間隔 d 必須大於 $(x_1 - x_2)$ 的最大值，故 d 必須滿足的條件為

$$d > \ell_0 + \frac{2\mu F}{kM} \quad (8)$$

- (2) 當質點 m 第一次回到起始位置 O 點時， $\Delta = 0$ ，由(7)式得 $\cos \omega t_1 = 1$ ，即 $\omega t_1 = 2\pi$ 或 $t_1 = \frac{2\pi}{\omega}$ 。由(7)式可得

$$(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = \dot{\Delta} = \left(\frac{\mu F}{kM} \right) \omega \sin \omega t \quad (9)$$

當 $t = t_1$ 時， $\dot{\Delta} = \left(\frac{\mu F}{kM} \right) \omega \sin \left(\omega \times \frac{2\pi}{\omega} \right) = 0$ ，即當時木塊和質點之間的相對速度為零，即兩者相對於地面具有相同的速度，都等於整個系統的質心速度 v_c 。因為質心做等加速運動，其加速度 $a = \frac{F}{m+M}$ ，故

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = v_c = at_1 = \left(\frac{F}{m+M} \right) \frac{2\pi}{\omega} \quad (10)$$

- (3) 由(9)式得 $\dot{\Delta}$ 在第一次到達其極大值的時刻 $t_m = \frac{\pi}{2\omega}$ ，且 $\dot{\Delta}_{\max} = \left(\frac{\mu F}{kM} \right) \omega$ ，當時

$$\Delta(t_m) = \frac{\mu F}{kM} (1 - \cos \omega t_m) = \frac{\mu F}{kM}$$

故當質點相對於 U 形木塊的最大速度為 $\left(\frac{\mu F}{kM} \right) \omega$ ，當時彈簧的長度為

$$\ell = x_1(t_m) - x_2(t_m) = \ell_0 + \frac{\mu F}{kM}$$

- (4) 設木塊在碰撞前後相對於地面的速度分別為 u_1 及 v_1 ，質點在碰撞前後相對於地面的速度分別為 u_2 及 v_2 ，則因碰撞為完全性碰撞，故恢復係數為 1，即

$$e = \frac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2} = 1$$

$$v_2 - v_1 = u_1 - u_2 = \dot{\Delta}_{\max} = \left(\frac{\mu F}{kM} \right) \omega \quad (10)$$

由質心的定義得

$$mv_2 + Mv_1 = (m + M)v_c \quad (11)$$

先求出碰撞時的質心速度 v_c ，再聯立(10)和(11)兩式，即可求得 v_1 和 v_2 。

$$v_c = at_m = \left(\frac{F}{m + M} \right) \frac{\pi}{2\omega} \quad (13)$$

由(10)和(11)兩式聯解，可得

$$v_1 = v_c - \frac{mF}{\omega M(m + M)} = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{m}{M} \right) \frac{F}{\omega(m + M)} \quad (14)$$

$$v_2 = v_c + \frac{F}{\omega(m + M)} = \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) \frac{F}{\omega(m + M)} \quad (15)$$

四、解：

(1) 設以 T 代表氣體的絕對溫度，以 $\tau = 1/\rho$ 代表氣體的比容（即每單位質量的體積），由理想氣體方程式可得

$$p_1\tau_1 - p_2\tau_2 = R(T_1 - T_2) \quad (1)$$

以 u 代表氣體每單位質量所含的內能，並考慮一單位質量的氣體由截面 1 進入，在絕熱條件下，由截面 2 流出。根據穩流的能量關係式，可得如下的方程式：

$$(p_1\tau_1 - p_2\tau_2) = u_2 - u_1 + \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) \quad (2)$$

因 $c_p - c_v = (\gamma - 1)c_v = R$ ，根據熱力學第一定律可得

$$u_2 - u_1 = c_v(T_2 - T_1) = \frac{1}{\gamma - 1}(p_2\tau_2 - p_1\tau_1) \quad (3)$$

將(3)式代入(2)式，得

$$\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) = (p_1\tau_1 - p_2\tau_2) - (u_2 - u_1) = \frac{\gamma}{\gamma - 1}(p_1\tau_1 - p_2\tau_2) \quad (4)$$

在絕熱過程中可得

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\tau_1}{\tau_2} \right)^\gamma = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^\gamma \quad (5)$$

將(5)式代入(4)式，可得每單位質量之氣體在出口處與進口處的動能的差值為

$$\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) = \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) \frac{p_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] \quad (6)$$

(2) 每單位時間通過截面 2 之氣體質量 m 為

$$m = \rho_2 A_2 v_2 \quad (7)$$

若速度比值 v_1/v_2 遠小於 1 時，由(6)式可得

(3) 由於題設在吹肥皂泡的過程中，為等溫壓縮過程，所以個別氣體分子的動能沒有變化。設 N 為流入肥皂泡內的總分子數，這些分子在一大氣壓 P_0 下所佔的總體積為 V_0 。將肥皂泡吹脹，泡內的氣體壓力必須較外界的大氣壓力大，因此吹肥皂泡的過程，相當於將這些空氣分子（壓力為 P_0 ，體積為 V_0 ）壓縮入肥皂泡的內部，最後泡內的空氣壓力和體積分別 P_1 和 V 。這一段等溫壓縮過程所需作的功為

$$W_2 = - \int_{V_0}^V p dV = - \int_{V_0}^V \frac{Nk_B T}{V} dV = -Nk_B T \int_{V_0}^V \frac{dV}{V} = -Nk_B T \ln \left(\frac{V}{V_0} \right) \quad (7)$$

由於 $P_1 V = P_0 V_0 = Nk_B T$ ，利用(5)式，上式可改寫為

$$W_2 = -P_1 V \ln \left(\frac{P_0}{P_1} \right) = -P_1 V \ln \left(\frac{P_0}{P_0 + \frac{4\gamma}{r}} \right) = P_0 \left(1 + \frac{4\gamma}{P_0 r} \right) \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \ln \left(1 + \frac{4\gamma}{P_0 r} \right) \quad (8)$$

利用(6)式，可計算得

$$\frac{4\gamma}{P_0 r} = \frac{4 \times 40 \times 10^{-3}}{1.01 \times 10^5 \times 0.045} = 3.5 \times 10^{-5} \ll 1 \quad (9)$$

由於 $1 + \frac{4\gamma}{P_0 r} \approx 1$ ，又 $\ln \left(1 + \frac{4\gamma}{P_0 r} \right) \approx \frac{4\gamma}{P_0 r}$ ，(8)式可近似為

$$W_2 \approx P_0 \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \frac{4\gamma}{P_0 r} = \frac{2}{3} \times \gamma \times 2(4\pi r^2) = \frac{2}{3} W_1 = 1.3 \times 10^{-3} J \quad (10)$$

在上式中，已利用了(3)式的結果， $A = 4\pi r^2$ 。

(4) 吹肥皂泡所作的總功 W ，可分成兩部分：一為克服皂膜表面張力所作的功 W_1 ；另一為吹入空氣，相當於(3)小題中的等溫壓縮過程，所需作的功 W_2 ，故

$$W = W_1 + W_2 \approx 3.3 \times 10^{-3} J$$

W_1 所佔總功的百分比為 $\frac{W_1}{W_1 + W_2} = \frac{W_1}{W_1 + \frac{2}{3}W_2} = \frac{3}{5} = 60\%$ 。

$$v_2 \approx \sqrt{\left(\frac{2\gamma}{\gamma-1}\right) \frac{p_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]} \quad (8)$$

將上式代入(7)式可得

$$m = A_2 \sqrt{\left(\frac{2\gamma}{\gamma-1}\right) \frac{p_1}{\rho_1} \rho_2^2 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]}$$

利用(5)式，可得

$$\begin{aligned} m &= A_2 \sqrt{\left(\frac{2\gamma}{\gamma-1}\right) \frac{p_1}{\tau_1} \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{2/\gamma} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]} \\ &= A_2 \sqrt{\left(\frac{2\gamma}{\gamma-1}\right) \frac{p_1}{\tau_1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{2/\gamma} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\gamma+1)/\gamma} \right]} \end{aligned}$$

設當 $p_2 = p_c$ 時， m 為極大，其條件為

$$\frac{d}{dp_2} \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{2/\gamma} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\gamma+1)/\gamma} \right] = 0$$

得

$$2 \left(\frac{p_c}{p_1}\right)^{\frac{2}{\gamma}-1} - (\gamma+1) \left(\frac{p_c}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{p_c}{p_1} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

(3) 由出口離開之氣體，對火箭產生的水平推力為

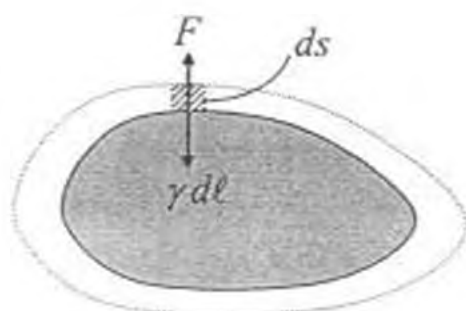
$$F = mv_2 = A_2 \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1}\right) \left(\frac{p_1}{\rho_1}\right) \rho_2 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]$$

利用(5)式，可得

$$\begin{aligned} F &= A_2 \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1}\right) p_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right) \right] \\ &= A_2 \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1}\right) p_2 \left[\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] \end{aligned}$$

五、解：

- (1) 取肥皂泡膜上一任意形狀的面積，如右圖所示，液體表面張力作用於邊長為 $d\ell$ 的力為 $\gamma d\ell$ 。若施加外力，使該液體面積增大至虛線所示的位置，則圖中的力 F 所須作的功為



$$dW_1 = Fds = 2\gamma dl ds = 2\gamma dA \quad (1)$$

式中 dA 為圖中斜線所標示的極小面積，由於肥皂泡有內外兩層，故所需的力 $F = 2\gamma dl$ 。就整個液體面積而言，為克服表面張力所作的總功為

$$W_1 = \int dW_1 = \int 2\gamma dA = 2\gamma \int dA = 2\gamma A \quad (2)$$

當肥皂泡的表面積由零增加至 0.025m^2 時，外力為克服液體表面張力所作的總功為

$$W_1 = \gamma \times 2A = 40 \times 10^{-3} \text{N/m} \times 2 \times 0.025\text{m}^2 = 2.0 \times 10^{-3} \text{J} \quad (3)$$

(2) 由(2)式可知表面張力的物理意義，乃係使液體表面每增加一個單位面積，外力所需作的功；或液體表面每單位面積所儲存的位能。若球形肥皂泡的半徑為 r ，則其表面積為 $4\pi r^2$ 。當半徑增加 Δr 時，液面所增加的表面積為 $8\pi r \Delta r$ ，故外力為克服液體表面張力所作的總功為 $\gamma \times 2(8\pi r \Delta r)$ ，式中的因子 2 是考慮皂膜有內外兩層。此功正好等於皂膜膨脹時，其內部和外部的氣體壓力差所作的功，即

$$(P_i - P_o) \times 4\pi r^2 \Delta r = \gamma \times 2(8\pi r \Delta r) \quad (4)$$

式中 P_i 為肥皂泡內的氣體壓力， P_o 則為肥皂泡外的大氣壓力。由上式可得

$$P_i - P_o = \frac{4\gamma}{r} \quad (5)$$

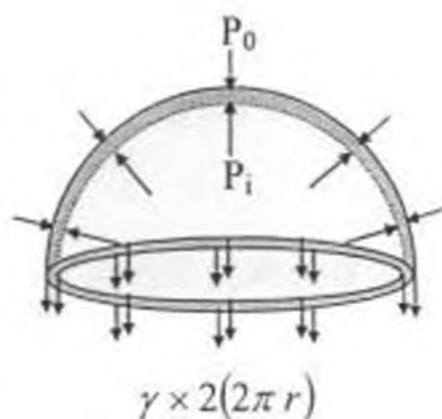
當肥皂泡的表面積為 0.025m^2 時，其半徑為

$$4\pi r^2 = 0.025 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{0.025}{4\pi}} = 0.045\text{m} \quad (6)$$

由(5)式可得肥皂泡內外的氣體壓力差為

$$P_i - P_o = \frac{4 \times 40 \times 10^{-3}}{0.045} = 3.6 \text{N/m}^2$$

另解：假想將肥皂泡切成兩半球，如右圖所示。皂膜內外的氣體壓力差，使皂膜受有向上的作用力， $(P_i - P_o) \times \pi r^2$ 。在半球的底面上則受有來自下半球皂膜表面張力的向下作用力， $\gamma \times 2(2\pi r)$ 。在球泡處於平衡狀態時，此兩力的大小相等，故



$$(P_i - P_o) \times \pi r^2 = \gamma \times 2(2\pi r)$$

$$P_i - P_o = \frac{4\gamma}{r}$$

2002 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
 決選研習營筆試(一)試題參考解答

一、解：

由於 A 質點仍在圓柱面上，A 和 B 兩質點的速率同為 $R\dot{\theta}$ ，質點 A 的切線加速度和質點 B 的加速度量值皆等於 $R\ddot{\theta}$ 。設以兩質點起始位置的水平面作為重力位能的零點，則由能量守恆定律可得

$$\frac{1}{2}m_1(R\dot{\theta})^2 + m_1gR\sin\theta + \frac{1}{2}m_2(R\dot{\theta})^2 - m_2gR\theta = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2g(m_2\theta - m_1\sin\theta)}{(m_1 + m_2)R}$$

將上式對時間 t 微分，可得

$$2\dot{\theta}\ddot{\theta} = \frac{2g(m_2 - m_1\cos\theta)\dot{\theta}}{(m_1 + m_2)R}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{g(m_2 - m_1\cos\theta)}{(m_1 + m_2)R}$$

細線上的張力可計算如下：

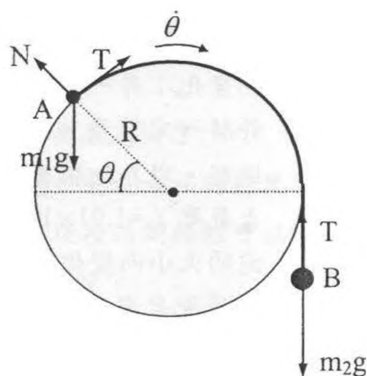
$$m_2g - T = m_2a = m_2(R\ddot{\theta})$$

$$\Rightarrow T = \left(\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\right)g(1 + \cos\theta)$$

圓柱面作用於質點 A 的正向力 N 可計算如下：

$$m_1R\dot{\theta}^2 = m_1g\sin\theta - N$$

$$\Rightarrow N = \frac{m_1(3m_1 + m_2)g\sin\theta - 2m_1m_2g\theta}{m_1 + m_2}$$

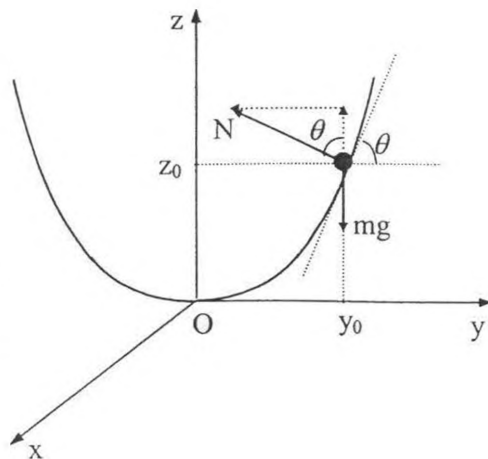


二、解：

- (1) 如右圖所示，質點在拋物面上運動時，受到兩個力的作用，即重力 mg 和正向力 N 。當質點的 y 坐標為 y_0 時，其所在位置的切線斜率為

$$\tan\theta = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{y_0} = 2ay_0 \quad (1)$$

若此質點繞 z 軸在水平面上作等速圓周運動，其半徑為 y_0 ，則



$$N \sin \theta = \frac{mv_0^2}{y_0}, \quad N \cos \theta = mg \quad (2)$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{mv_0^2}{mgy_0} \quad (3)$$

利用(1)式，可得

$$2\alpha y_0 = \frac{v_0^2}{gy_0} \Rightarrow v_0 = y_0 \sqrt{2ag} \quad (4)$$

- (2) 若質點的起始速度僅為(4)式速度值的一半，即 $v'_0 = \frac{1}{2}v_0 = \frac{1}{2}y_0\sqrt{2ag}$ ，則質點無法維持等速圓周運動。由於質點所受的重力和正向力，皆不會產生沿 z 軸方向的力矩，故沿 z 軸方向的角動量守恆，其大小為 $L = mv'_0 y_0$ 。設質點運動軌跡的最低點坐標為 (x, y, z) ，因質點在最低點時，只有水平速度 v ，故其角動量為

$$mv\sqrt{x^2 + y^2} = mv\sqrt{\frac{z}{a}} = mv'_0 y_0 \quad (5)$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{av_0'^2 y_0^2}{z} \quad (6)$$

取 $z=0$ 的平面為重力位能的零點，由力學能守恆定律可得

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz = \frac{1}{2}mv_0'^2 + mg(ay_0^2) \quad (7)$$

$$\Rightarrow v^2 = v_0'^2 + 2g(ay_0^2 - z) \quad (8)$$

由(6)和(8)兩式可得

$$v_0'^2 + 2g(ay_0^2 - z) = \frac{av_0'^2 y_0^2}{z}$$

$$(v_0'^2 + 2gay_0^2)z - 2gz^2 = av_0'^2 y_0^2 \quad (9)$$

因為 $z_0 = ay_0^2$ ，且 $v'_0 = \frac{1}{2}y_0\sqrt{2ag}$ ，故 $v_0'^2 = \frac{1}{2}z_0g$ ，以之代入(9)式，得

$$4z^2 - 5z_0z + z_0^2 = 0$$

$$(4z - z_0)(z - z_0) = 0$$

$$z = \frac{z_0}{4} = \frac{1}{4}ay_0^2 \quad (10)$$

由(6)和(10)兩式可得

$$v = v'_0 y_0 \sqrt{\frac{a}{z_0}} = v'_0 y_0 \cdot \frac{2}{y_0} = 2v'_0 = y_0 \sqrt{2ag}$$

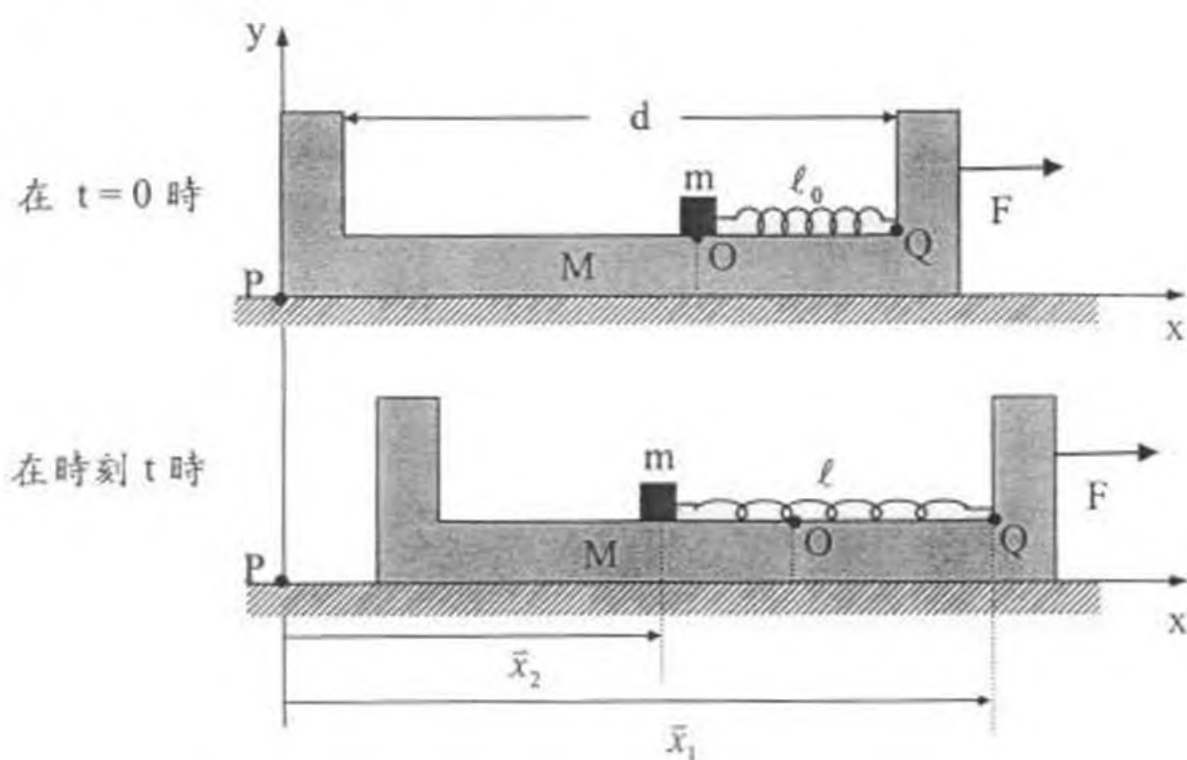
(3) 若質點的角動量 $L = n\hbar$ ，則 $mv_0 y_0 = n\hbar$ 。利用(4)式，可得 $y_0^2 = \frac{n\hbar}{m\sqrt{2ag}}$ 。質點的力學能為

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgz_0 = \frac{1}{2}m(2agy_0^2) + mg(ay_0^2) = 2mgy_0^2 = n\hbar\sqrt{2ag}$$

仿照波耳的原子模型，若質點的力學能可寫為 $E = n(\hbar\omega_0)$ ，則 $\omega_0 = \sqrt{2ag}$ 。

三、解：

(1) 參考下圖，取一個固定在地面上的 P 點為慣性坐標系的原點，Q 點為木塊右側內壁的端點， \bar{x}_1 和 \bar{x}_2 分別為 Q 點（代表木塊）和質點 m 相對於 P 點的位移。木塊 M 和質點 m 對原點 P 的運動方程式如下：



$$M \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k(x_1 - x_2 - l_0) + F \quad (1)$$

$$m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = k(x_1 - x_2 - l_0) \quad (2)$$

將(1)式 $\times m - (2)$ 式 $\times M$ 得

$$mM(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -(m+M)k(x_1 - x_2 - l_0) + mF \quad (3)$$

設 $x_1 - x_2 - l_0 \equiv \Delta$ ，(3)式可改寫為

$$\frac{d^2 \Delta}{dt^2} = (\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -\frac{(m+M)}{mM}k\Delta + \frac{F}{M} \quad (4)$$

令約化質量 $\mu = \frac{mM}{m+M}$ ，(4)式可寫為

$$\frac{d^2 \Delta}{dt^2} + \left(\frac{k}{\mu}\right)\Delta = \frac{F}{M} \quad (5)$$

設 $\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \sqrt{k \left(\frac{m+M}{mM} \right)}$ ，(5)式的通解為

$$\Delta(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{\mu F}{kM} \quad (6)$$

將起始條件 $\Delta(0) = 0$ ， $\dot{\Delta}(0) = 0$ ，代入上式可得 $A = -\frac{\mu F}{kM}$ ， $B = 0$ ，故(6)式可寫為

$$\Delta(t) = \frac{\mu F}{kM} (1 - \cos \omega t) \quad (7)$$

由上式可知 $\Delta(t)$ 的最大值為 $\frac{2\mu F}{kM}$ ，最小值為 0，故 $(x_1 - x_2)$ 的最大值為 $\ell_0 + \frac{2\mu F}{kM}$ 。

若要質點 m 不撞及 U 形木塊的左側內壁，則木塊左右內壁的間隔 d 必須大於 $(x_1 - x_2)$ 的最大值，故 d 必須滿足的條件為

$$d > \ell_0 + \frac{2\mu F}{kM} \quad (8)$$

- (2) 當質點 m 第一次回到起始位置 O 點時， $\Delta = 0$ ，由(7)式得 $\cos \omega t_1 = 1$ ，即 $\omega t_1 = 2\pi$ 或 $t_1 = \frac{2\pi}{\omega}$ 。由(7)式可得

$$(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = \dot{\Delta} = \left(\frac{\mu F}{kM} \right) \omega \sin \omega t \quad (9)$$

當 $t = t_1$ 時， $\dot{\Delta} = \left(\frac{\mu F}{kM} \right) \omega \sin \left(\omega \times \frac{2\pi}{\omega} \right) = 0$ ，即當時木塊和質點之間的相對速度為零，即兩者相對於地面具有相同的速度，都等於整個系統的質心速度 v_c 。因為質心做等加速運動，其加速度 $a = \frac{F}{m+M}$ ，故

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = v_c = at_1 = \left(\frac{F}{m+M} \right) \frac{2\pi}{\omega} \quad (10)$$

- (3) 由(9)式得 $\dot{\Delta}$ 在第一次到達其極大值的時刻 $t_m = \frac{\pi}{2\omega}$ ，且 $\dot{\Delta}_{\max} = \left(\frac{\mu F}{kM} \right) \omega$ ，當時

$$\Delta(t_m) = \frac{\mu F}{kM} (1 - \cos \omega t_m) = \frac{\mu F}{kM}$$

故當質點相對於 U 形木塊的最大速度為 $\left(\frac{\mu F}{kM} \right) \omega$ ，當時彈簧的長度為

$$\ell = x_1(t_m) - x_2(t_m) = \ell_0 + \frac{\mu F}{kM}$$

- (4) 設木塊在碰撞前後相對於地面的速度分別為 u_1 及 v_1 ，質點在碰撞前後相對於地面的速度分別為 u_2 及 v_2 ，則因碰撞為完全性碰撞，故恢復係數為 1，即

$$e = \frac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2} = 1$$

$$v_2 - v_1 = u_1 - u_2 = \dot{\Delta}_{\max} = \left(\frac{\mu F}{kM} \right) \omega \quad (10)$$

由質心的定義得

$$mv_2 + Mv_1 = (m + M)v_c \quad (11)$$

先求出碰撞時的質心速度 v_c ，再聯立(10)和(11)兩式，即可求得 v_1 和 v_2 。

$$v_c = at_m = \left(\frac{F}{m + M} \right) \frac{\pi}{2\omega} \quad (13)$$

由(10)和(11)兩式聯解，可得

$$v_1 = v_c - \frac{mF}{\omega M(m + M)} = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{m}{M} \right) \frac{F}{\omega(m + M)} \quad (14)$$

$$v_2 = v_c + \frac{F}{\omega(m + M)} = \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) \frac{F}{\omega(m + M)} \quad (15)$$

四、解：

(1) 設以 T 代表氣體的絕對溫度，以 $\tau = 1/\rho$ 代表氣體的比容（即每單位質量的體積），由理想氣體方程式可得

$$p_1\tau_1 - p_2\tau_2 = R(T_1 - T_2) \quad (1)$$

以 u 代表氣體每單位質量所含的內能，並考慮一單位質量的氣體由截面 1 進入，在絕熱條件下，由截面 2 流出。根據穩流的能量關係式，可得如下的方程式：

$$(p_1\tau_1 - p_2\tau_2) = u_2 - u_1 + \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) \quad (2)$$

因 $c_p - c_v = (\gamma - 1)c_v = R$ ，根據熱力學第一定律可得

$$u_2 - u_1 = c_v(T_2 - T_1) = \frac{1}{\gamma - 1}(p_2\tau_2 - p_1\tau_1) \quad (3)$$

將(3)式代入(2)式，得

$$\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) = (p_1\tau_1 - p_2\tau_2) - (u_2 - u_1) = \frac{\gamma}{\gamma - 1}(p_1\tau_1 - p_2\tau_2) \quad (4)$$

在絕熱過程中可得

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\tau_1}{\tau_2} \right)^\gamma = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^\gamma \quad (5)$$

將(5)式代入(4)式，可得每單位質量之氣體在出口處與進口處的動能的差值為

$$\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) = \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) \frac{p_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(\gamma - 1)/\gamma} \right] \quad (6)$$

(2) 每單位時間通過截面 2 之氣體質量 m 為

$$m = \rho_2 A_2 v_2 \quad (7)$$

若速度比值 v_1/v_2 遠小於 1 時，由(6)式可得

2002 年國際物理奧林匹亞競賽國家代表隊決選研習營 實驗模擬試題(一)

一、題目：測量錫的熔化熱。

二、器材：

- | | |
|--------------------|--------------------|
| (1) 錫塊、鋁坩鍋、焊錫爐各一個。 | (10) 酒精燈一具。 |
| (2) T-型熱電偶、溫度計各一支。 | (11) 打火機一個。 |
| (3) 保溫杯一個。 | (12) 三腳架一具(附石棉心網)。 |
| (4) 燒杯二個。 | (13) 膠帶。 |
| (5) 攪拌棒一根。 | (14) 小刀、剪刀(公用)。 |
| (6) 三用數字電表一具。 | (15) 小冰塊(公用)。 |
| (7) 鱘魚夾導線三條。 | (16) 電子秤(公用)。 |
| (8) 碼錶一個。 | |
| (9) 塑膠夾二個。 | |

三、原理：

當液態和固態的錫共存時，其溫度保持一定，稱為熔點。當錫從熔融狀態開始降溫時，測量其溫度對時間的冷卻曲線，可用以計算錫的熔化熱。

四、說明：

本實驗包含兩部分：

- (1) 測量鋁坩鍋(內含待測的錫塊)的總熱容。
- (2) 將裝著錫塊的鋁坩鍋置入焊錫爐中加熱，使錫完全熔化，並持續加熱至約 $280\sim 300^{\circ}\text{C}$ 。然後拔掉焊錫爐的電源插頭，用鉗子將鋁坩鍋自焊錫爐中夾出，置於磁磚上，測量錫的冷卻曲線，並計算錫的熔化熱。

【註】：Al 的比熱為 $0.217\text{cal/g}\cdot^{\circ}\text{C}$

Sn 的比熱為

溫度 ($^{\circ}\text{C}$)	25	127	227	327
比熱 ($\text{cal/g}\cdot^{\circ}\text{C}$)	0.054	0.058	0.064	0.062

【注意】：

- (i) 將錫塊熔化前，先分別測量錫塊和鋁坩鍋的質量，以備需要時使用。
- (ii) 測溫時，應避免熱電偶的絕緣膠皮碰觸熱坩鍋或熱焊錫爐。

五、報告：

在你的報告中必須包括下列各項：

- (1) 說明測定鋁坩鍋(內含待測的錫塊)總熱容的實驗方法。
- (2) 將實驗數據列成表格，並繪出錫的冷卻曲線。
- (3) 說明如何自冷卻曲線求得錫的熔化熱。
- (4) 說明誤差來源並估計其誤差值。

2002 年國際物理奧林匹亞競賽國家代表隊決選研習營
實驗模擬試題(二)

一、題目：光敏電阻的基本特性。

二、器材：

(1)光敏電阻與接線

(2)三用電錶二具

(3)乾電池 (1.5V×2) 一組

(4)精密可變電阻 (5KΩ) 一個

【注意：不要將可變電阻的中間接頭（紅線）直接接到電池上，這樣做會燒壞電阻】

(5)白色光源附電源一組

(6)偏極片二個

（注意：偏極片對波長比黃色濾光鏡截止波長短的光，其偏光效果不佳）

(7)濾光鏡紅、橙、黃各一片

(8)偏極片或濾光鏡之鏡座（注意：偏極片和濾光鏡可以一齊裝在同一鏡座上）

(9)光具座（光凳）

(10)接線裝置：小彈簧 6 個

(11)方格紙、半對數作圖紙

（注意：避免因熱毀損，偏極片與濾光鏡應盡量遠離光源，

至少距離 20 公分）

2002年國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊決選研習營

實驗模擬試題(一)

2002年4月18日

考試時間：150分鐘

- 一、本試題滿分為七十五分。
- 二、在指定的答案紙上作答。
- 三、在每一頁答題紙的頂端寫明：

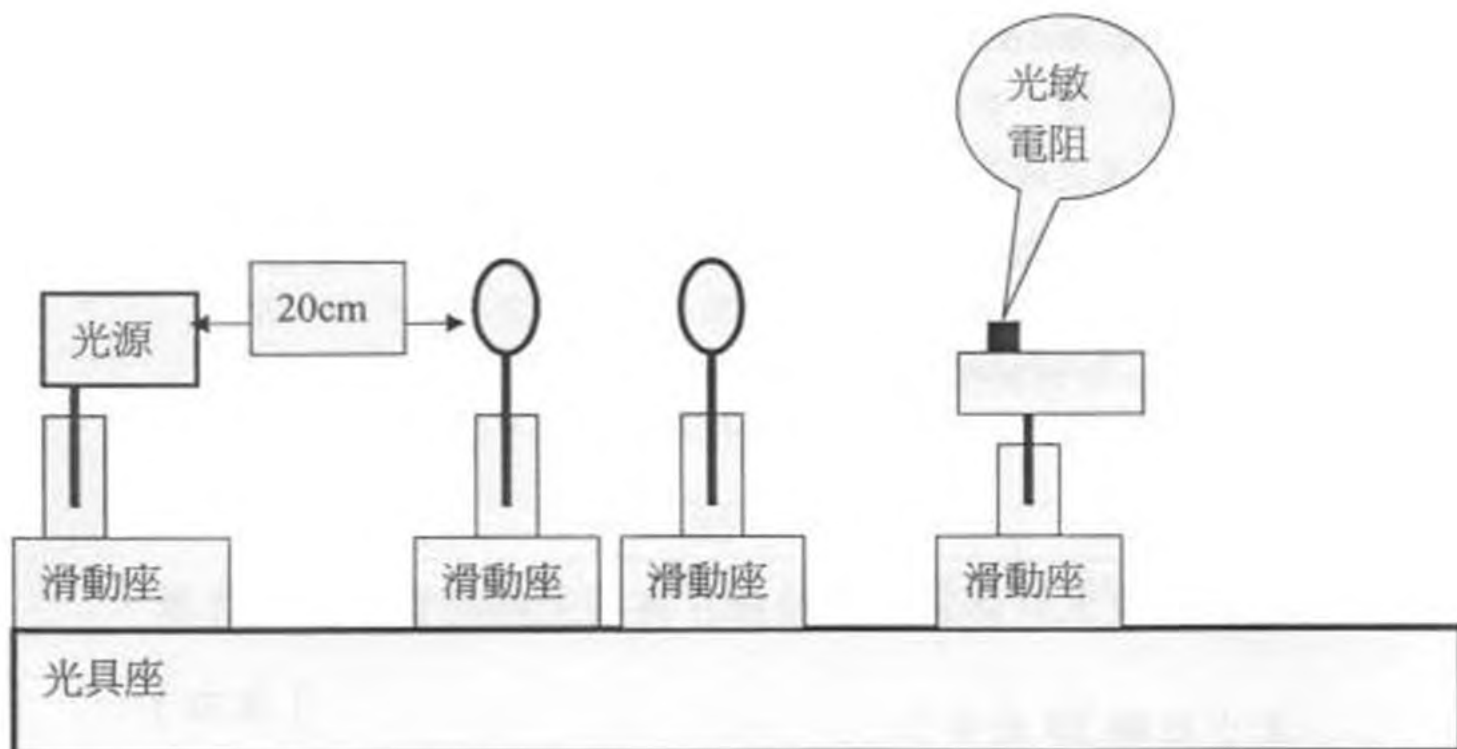
- 題號
- 該題所用答題紙之頁碼
- 該題所用答題紙的總頁數

例(以第一題用了三頁紙為例)：

1	1/3
2	2/3
3	3/3

三、實驗步驟：

1. 在無光照之下，從 0 到 3 伏特，逐步增加光敏電阻兩端的電壓：
量測並描繪出通過光敏電阻的電流 I 和電壓 V 之間的 I - V 關係曲線，找出電流 I 和電壓 V 之間的近似關係函數，並計算在無光照之下光敏電阻的電阻值。
2. 利用光源與一對偏極片的組合，改變不同相對光照強度 J_r 。探討光敏電阻的電阻值隨著相對光照強度 J_r 變化的近似關係函數



2003年國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊決選研習營

筆試(二)試題

2003年4月2日 14:00-17:00

- 一、本試題共五大題，每大題二十分，總分一百分。
- 二、考試時間三小時。
- 三、在指定的答案紙上作答。
- 四、可使用無程式掌上型計算機。

2003 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
決選研習營筆試(二)試題

本試題共有計算題五大題，每題 20 分，合計 100 分。

- 一、兩無窮長的平行導線相距 $2a$ ，導線上帶有靜電荷的線密度分別為 λ 及 $-\lambda$ ，如圖 1 所示。回答下列各題：
- 求空間中任一點 $P(x, y)$ 處的電場；
 - 求空間中任一點 $P(x, y)$ 處的電位；
 - 證明等位面為圓柱面；
 - 畫出半徑為 a 的等位面與紙面之交線（需註明圓心的位置）；
 - 證明紙面上的電力線是以 y 軸上之點為圓心的圓弧；
 - 畫出半徑為 a 的電力線，並證明此電力線與(d)小題中的等位線正交。

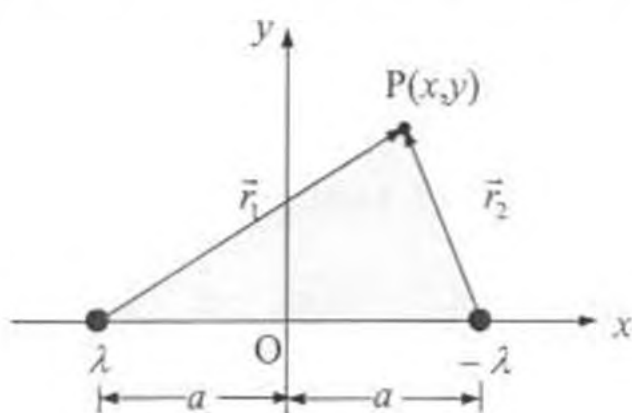


圖 1

- 二、均勻磁鐵棒可視為由位於其兩端的負磁荷 $-q_m$ (即 S 磁極)，與正磁荷 $+q_m$ (即 N 磁極) 所組成。若 S 磁極至 N 磁極的位移為 \vec{d} ，則磁鐵棒的磁矩 $\vec{\mu}$ 為磁荷與位移的乘積，即 $\vec{\mu} = q_m \vec{d}$ ，磁荷 q_m 亦稱為磁極強度。就如同庫倫靜電力一樣，磁荷 q_m 對磁荷 q'_m 的靜磁力 \vec{F} 為連心力，其大小與兩磁荷的乘積成正比，而與兩磁荷間的距離 r 的平方成反比。若以 \hat{r} 代表由磁荷 q_m 指向磁荷 q'_m 的單位向量，則靜磁力公式可寫成

$$\vec{F} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{q_m q'_m}{r^2} \hat{r} \quad (1)$$

位於原點的磁荷 q'_m ，在位置向量 \vec{r} 處所產生的磁場 \vec{B} 為

$$\vec{B} = \frac{\vec{F}}{q'_m} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{q_m}{r^2} \hat{r} \quad (2)$$

在下列(a)–(d)題中，均勻磁鐵棒(如圖 2-1 所示)的長度為 d ，磁矩 $\vec{\mu} = q_m d \hat{i} = \mu \hat{i}$ ，取磁棒的中點為原點 O ，棒的長軸為 x 軸。

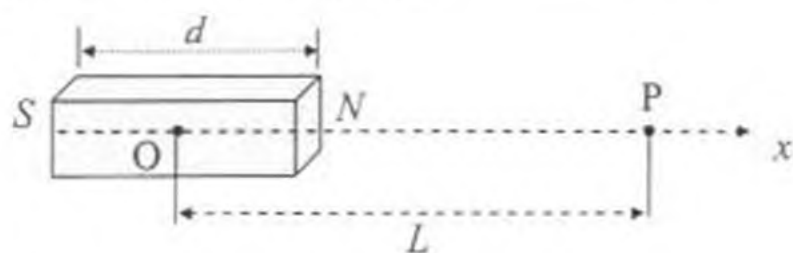


圖 2-1

- (a) 設在 $+x$ 軸上的 P 點，與 O 點間的距離為 L ，試求磁鐵棒在 P 點處所產生的磁場。
 (b) 如圖 2-2 所示，在 $+y$ 軸上的 Q 點，與 O 點間的距離為 L ，試求磁鐵棒在 Q 點處所產生的磁場。

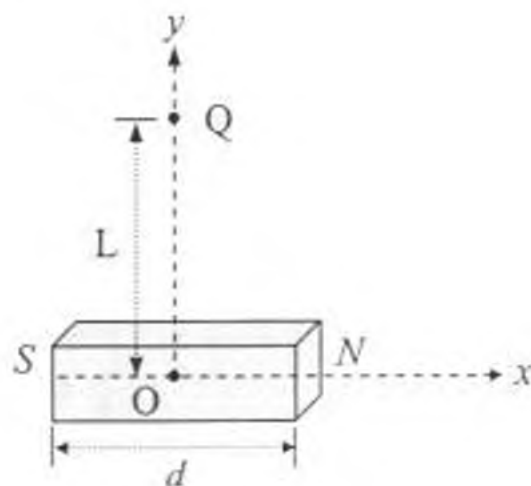


圖 2-2

- (c) 如圖 2-3 所示，使磁鐵棒的棒軸沿東西向。棒軸上距離其中心 L 處，有一磁矩為 m 的小磁針，僅能在水平面上自由轉動。若小磁針所在處的地球磁場水平分量為 B_H (向北)，則小磁針靜止時與南北向之間的夾角 ϕ_x 的正切值為何？若如圖 2-4 所示，將小磁針放置於磁鐵棒垂直軸上距中心 L 處，則磁針靜止時與南北向之間的夾角 ϕ_y 的正切值為何？

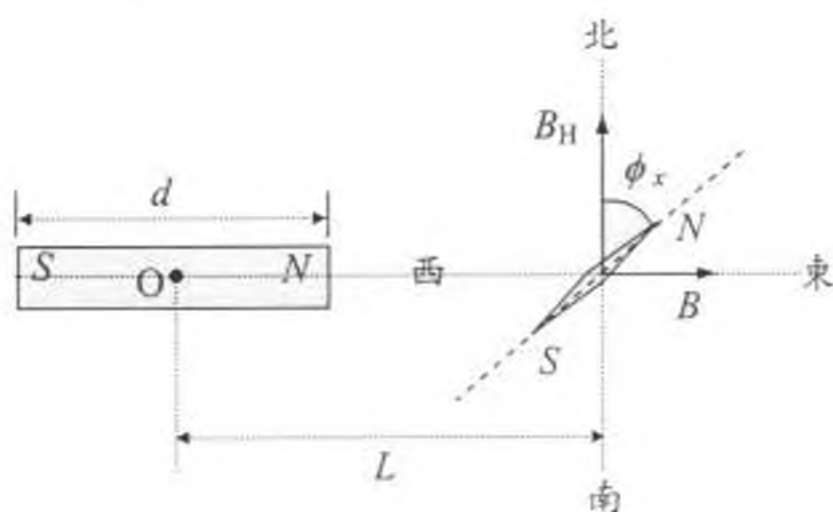


圖 2-3

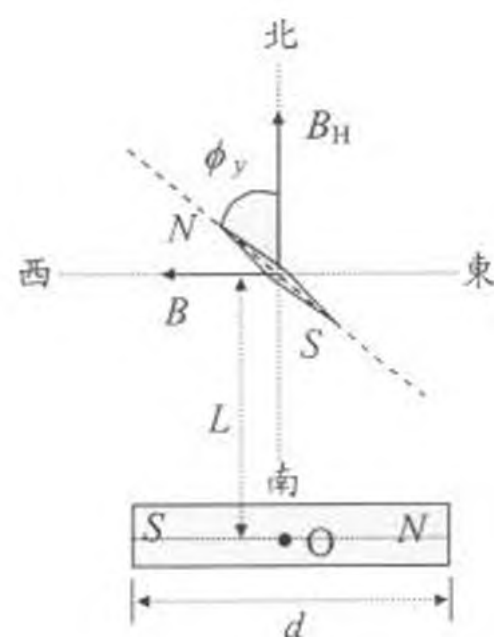


圖 2-4

- (d) 設以一條垂直懸線，將磁鐵棒自中心吊起，使棒軸只能在一水平面內轉動。當磁鐵棒沿南北向靜懸時，使其略微偏轉一小角度後放開，則磁鐵棒的轉動方程式為何？其振動角頻率為何？(設磁鐵棒繞通過其中心之垂直線轉動時，其轉動慣量為 I_C ，磁鐵棒所在處的地球磁場水平分量為 B_H 。)

- (e) 如圖 2-5 所示，將兩個完全相同的螺線圈，使其軸線沿東西向成一直線，並在兩者之間的中點處置一偏向磁強計。將兩螺線圈串聯，並接通電源，使其產生方向相反之磁場(如圖 2-5 中左、右邊螺線圈內的箭矢所示)，則在地磁水平分量 B_H 的作用下，磁強計之磁針指向北，其偏角為零。此時若於左邊螺線圈內，插入一長度為 d ，且完全去磁的鐵棒，則鐵棒會被磁化而出現磁矩，並產生磁場，使距離

其中心為 L 之磁強計磁針產生偏角 ϕ (如圖 2-5 所示)。試求鐵棒之磁矩 μ 。

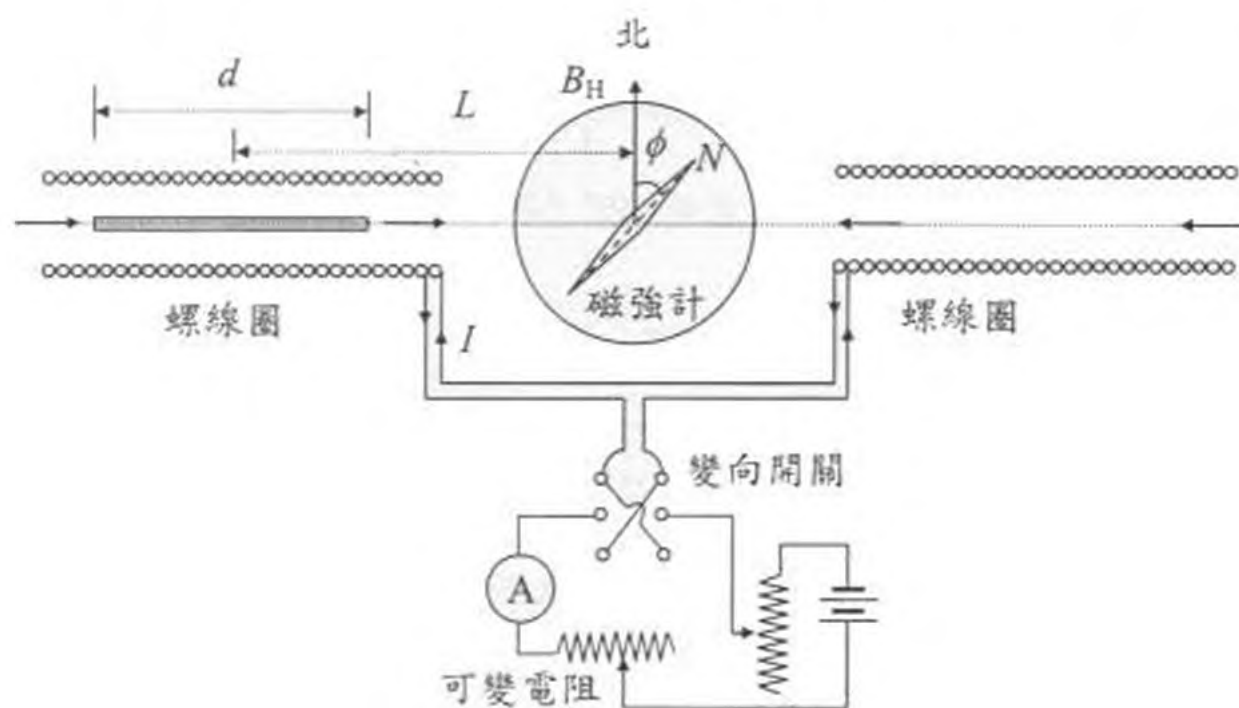


圖 2-5

三、假設有一粒子同時具有正電荷 e 與正磁荷 g ，且其質量遠大於電子質量。現有一電子在此粒子（設在原點，且固定不動）所發出的電場和磁場中做等速圓周運動，如圖 3 所示，該圓面垂直於 z 軸，且以 z 軸上之一點為圓心，電子與該粒子連線和 z 軸之間的夾角為 θ 。在此題中，我們將採用 CGS 單位，該粒子所產生的電場 \vec{E} 和磁場 \vec{B} 分別為 $\vec{E} = \frac{e}{r^2} \hat{r}$ 和 $\vec{B} = \frac{g}{r^2} \hat{r}$ ，電子在電場及磁場中運動所受的力為 $\vec{F} = -e(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B})$ ，回答下列各題：

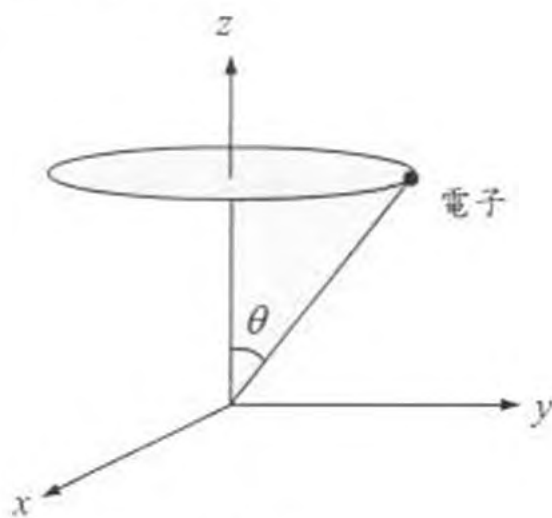


圖 3

(a) 導出 θ 與電子運動速率 v 之關係式： $\cot \theta = \left(\frac{g}{e}\right) \frac{v}{c}$ 。

(b) 設電子運動之軌道角動量為 L ，試證電子的總力學能 $\epsilon = -\frac{me^4 \sin^2 \theta}{2L^2}$ 。

(c) 若模仿波耳原子模型，令 $L = n\hbar$ ， n 為正整數，則 θ 可能之值為何？

- (d) 若 $g = \frac{e}{2\alpha}$ ，式中 $\alpha \equiv \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$ ，則電子在最低能階時的 θ 角為何？其基態能量與氫原子基態能量的比值為何？

四、在量子化的一維簡諧運動中，粒子的位移形式和古典力學的粒子相同。當一維簡諧振盪的粒子以最低能量運動時，其位移 $x(t)$ 可以表之如下：

$$x(t) = x_0 \cos \omega t$$

式中 x_0 為振幅， $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 為角頻率， k 為力常數， m 為粒子的質量。

(a) 證明下述兩關係式：

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle$$

$$(\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle$$

式中 Δx 和 Δp 是位移和動量變化量的方均根值，其定義如下：

$$\Delta x = \sqrt{(\Delta x)^2} = \sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle}$$

$$\Delta p = \sqrt{(\Delta p)^2} = \sqrt{\langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle}$$

注意式中 $\langle \rangle$ 的符號代表時間的平均值，也就是一個週期內的時間平均值。

(b) 由測不準原理 $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ ，證明此簡諧振盪粒子的可能的最小振幅為

$$x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

並求此振幅所對應的系統之最小總能量。($\hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$ ， h 為卜朗克常數。)

(c) 若此振盪的粒子是一個帶有電荷 q 的離子，且置於很微弱的均勻電場中，電場強度為 ϵ 。已知在此微弱的電場中，粒子仍保有簡諧振盪的特性，且電場的方向與粒子振盪的方向平行，求此時粒子的最低總能量和相對應的振幅。

五、在光滑的水平面上，一質量為 1.20kg 的小球以 0.8c 的速度向東運動，和另一質量為 1.60kg 以 0.6c 向西運動的小球，發生正向碰撞，撞後兩球連成一體。c 為真空中的光速，忽略可能的輻射損失，利用相對論，計算下列各題：

(a) 碰撞後物體的速度(以 c 為單位)和質量(以 kg 為單位)各為何？

(b) 碰撞後物體的動能和損失的動能(以 $\text{kg} \cdot c^2$ 為單位)各為何？

(c) 比較以相對論和古典物理計算的結果，說明相對論結果的物理意義。

2003 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
 決選研習營筆試(二)試題參考解答

一、解：

(a)依題意，電場、電位與 z 軸無關， x - y 平面上各點的電場與和電位，可代表空間中任一點的對應量。由高斯定律及疊加原理可得

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_1}{r_1} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_2}{r_2}$$

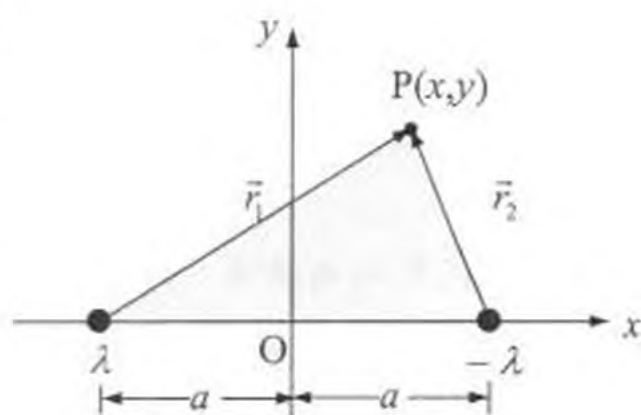
式中 $\vec{r}_1 = \frac{\vec{r}_1}{r_1} = \frac{1}{r_1} [(x+a)\hat{i} + y\hat{j}]$

$$\vec{r}_2 = \frac{\vec{r}_2}{r_2} = \frac{1}{r_2} [(x-a)\hat{i} + y\hat{j}]$$

將 \vec{r}_1 和 \vec{r}_2 代入上式，得

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{x+a}{r_1^2} - \frac{x-a}{r_2^2} \right) \hat{i} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{y}{r_1^2} - \frac{y}{r_2^2} \right) \hat{j}$$

式中 $r_1^2 = (x+a)^2 + y^2$
 $r_2^2 = (x-a)^2 + y^2$



(b)取原點 O 為零電位，帶正電的導線在 P 點所產生的電位為

$$V_+ = -\int_a^{r_1} E_r dr = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_a^{r_1} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{r_1}$$

同理可得帶負電的導線在 P 點所產生的電位為

$$V_- = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{r_2}$$

故在 P 點的總電位為

$$V = V_+ + V_- = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2} \right]$$

(c)取 $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{1}{c} \right) = \text{常數}$ ，則對應的等位面方程式為

$$(x+a)^2 + y^2 = c[(x-a)^2 + y^2]$$

$$x^2 - 2\left(\frac{c+1}{c-1}\right)x + a^2 + y^2 = 0$$

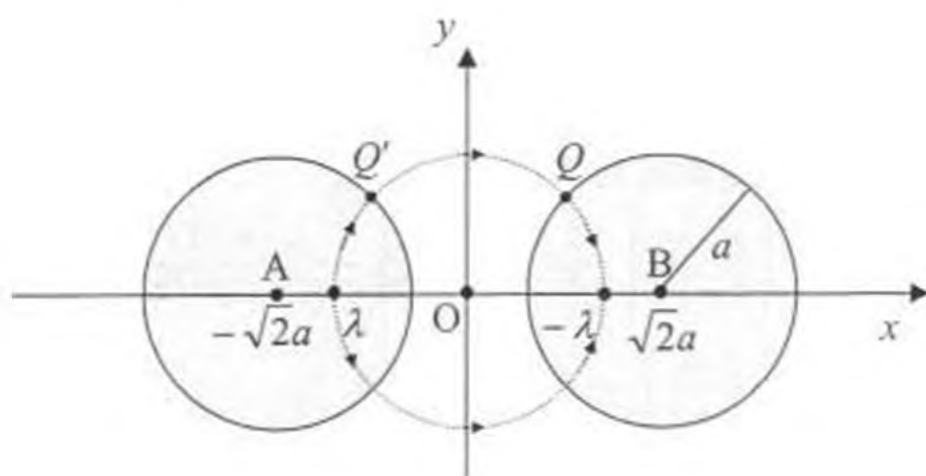
設 $k = \frac{c+1}{c-1}$ ，代入上式，得

$$(x-ka)^2 + y^2 = (k^2 - 1)a^2$$

上式為圓的方程式。由於電位的函數和 z 坐標無關，故所得的等位面為圓柱面。

(d)若取圓柱面的半徑為 a ，則 $k = \sqrt{2}$ ，等位面的方程式為 $(x - \sqrt{2}a)^2 + y^2 = a^2$ 。該等位面和 x - y 平面的相交線為圓，圓心坐標為 $(\sqrt{2}a, 0)$ 。利用對稱關係，可畫出另一

圓心在 $(-\sqrt{2}a, 0)$ 處的等位面。



(e)以 y 軸上的點為圓心的圓方程式為

$$x^2 + (y - y_c)^2 = R^2 \dots\dots\dots (1)$$

其斜率 $\frac{dy}{dx}$ 可求得為

$$2x + 2(y - y_c) \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y - y_c}$$

由(a)小題的結果知

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{\frac{y}{r_1^2} - \frac{y}{r_2^2}}{\frac{x+a}{r_1^2} - \frac{x-a}{r_2^2}} = \frac{y(-4ax)}{x(-4ax) + a(2x^2 + 2a^2 + 2y^2)} = \frac{2xy}{x^2 - y^2 - a^2}$$

若(1)式為電力線之方程式，則可求得 y_c 及 R ，即令 $\frac{E_y}{E_x} = \frac{dy}{dx}$ ，得

$$\begin{aligned} \frac{2xy}{x^2 - y^2 - a^2} &= -\frac{x}{y - y_c} \\ \Rightarrow x^2 - y^2 - a^2 &= -2y^2 + 2yy_c \\ \Rightarrow x^2 + (y - y_c)^2 &= a^2 + y_c^2 \end{aligned}$$

在上式中，若取 $(0, y_c)$ 為圓心，則半徑 $R = \sqrt{a^2 + y_c^2}$ ，該圓即為所求的一條電力線的方程式。

(f)由 $x^2 + (y - y_c)^2 = a^2 + y_c^2$ ，知半徑為 a 的電力線所對應的 $y_c = 0$ ，即圓心在原點。在(d)小題圖中的虛線所示者，即為此故電力線，與半徑為 a 的等位線相交於 Q 和 Q' 兩點。因 $\overline{AQ'} = \overline{OQ'} = a$ ，且 $\overline{AO} = \sqrt{2}a$ ，故

$$\overline{AQ'}^2 + \overline{OQ'}^2 = \overline{AO}^2$$

滿足畢氏定理（勾股定理），故知 $\angle AQ'O = 90^\circ$ ，即電力線和等位面正交。

二、解：

(a) 磁鐵棒的兩磁荷在 P 點處的總磁場強度為

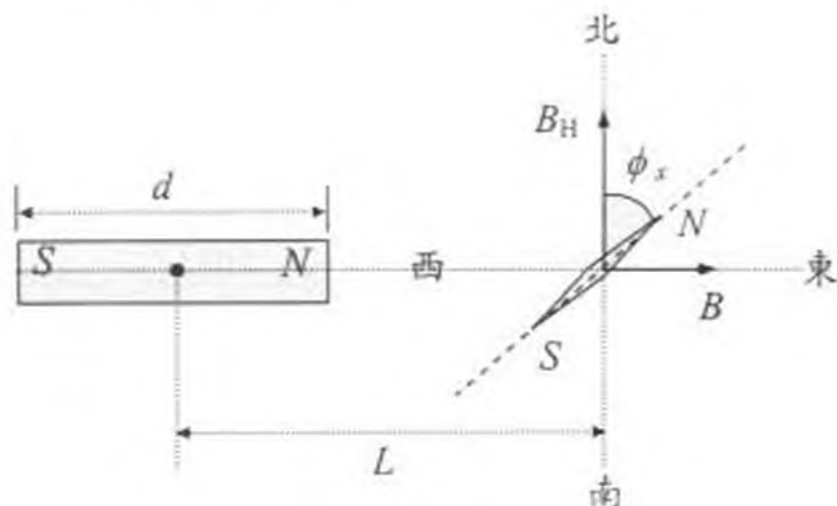
$$\vec{B} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) \left[\frac{q_m}{(L-d/2)^2} - \frac{q_m}{(L+d/2)^2} \right] \hat{i} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{2L}{(L^2 - d^2/4)^2} \vec{\mu} \quad (1)$$

(b) 磁鐵棒的兩磁荷在 Q 點處的總磁場強度為

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) q_m \left[\frac{L\hat{j} - (d/2)\hat{i}}{(L^2 + d^2/4)^{3/2}} - \frac{L\hat{j} + (d/2)\hat{i}}{(L^2 + d^2/4)^{3/2}} \right] = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{(-q_m d)\hat{i}}{(L^2 + d^2/4)^{3/2}} \\ &= - \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{1}{(L^2 + d^2/4)^{3/2}} \vec{\mu} \end{aligned} \quad (2)$$

(c) 磁鐵棒在小磁針處的磁場 \vec{B} 可視為均勻。設小磁針的 S 極和 N 極極強分別為 $-q_m$ 與 q_m ，S 極至 N 極的位移為 \vec{d} ，則小磁針之磁矩為 $\vec{m} = q_m \vec{d}$ 。因一均勻磁場 \vec{B} 對磁針 S 極與 N 極的靜磁力分別為 $-q_m \vec{B}$ 與 $q_m \vec{B}$ ，故磁針所受的力矩為 $\vec{\tau} = \vec{d} \times (q_m \vec{B})$ ，即

$$\vec{\tau} = (q_m \vec{d}) \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (3)$$



小磁針受到兩個磁場的作用，一為地球磁場的水平分量 B_H (向北)，另一則為磁鐵棒的磁場 \vec{B} ，依(1)式， \vec{B} 指向東。當磁針靜止於 ϕ_x 角時，上述二磁場對其作用之力矩和必須為零，故由(3)式得

$$mB_H \sin \phi_x - mB \cos \phi_x = 0 \quad (4)$$

利用(1)式，上式亦可寫成

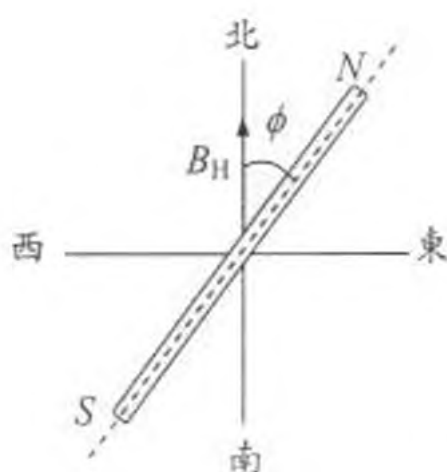
$$\tan \phi_x = \frac{B}{B_H} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{2L}{(L^2 - d^2/4)^2} \left(\frac{\mu}{B_H} \right) \quad (5)$$

同理，將小磁針放置於磁鐵垂直軸上離中心 L 處，則利用(2)式可得

$$\tan \phi_y = \frac{B}{B_H} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{1}{(L^2 + d^2/4)^{3/2}} \left(\frac{\mu}{B_H} \right) \quad (6)$$

(d) 當磁鐵棒沿南北向靜懸並略微偏轉一小角度 ϕ 時，磁鐵棒因地磁之作用，依(3)式之結果，受到回復力矩 $\mu B_H \sin \phi$ 的作用，將作簡諧振動，如下圖所示。因磁鐵棒繞通過其中心之垂直軸的轉動慣量為 I_C ，角加速度為 $\ddot{\phi}$ ，故其做小角度轉動的運

動方程式為 $I_C \ddot{\phi} = -\mu B_H \sin \phi \approx -\mu B_H \phi$ ，其振動角頻率為 $\omega = \sqrt{\mu B_H / I_C}$ 。



(c) 當左邊螺線圈內插入鐵棒後，在螺線圈磁場作用下，鐵棒會被磁化而出現磁矩 μ ，並在磁針處產生一向東之磁場 B_M ，由(1)式得其大小為

$$B_M = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{2L\mu}{(L^2 - d^2/4)^2} \quad (7)$$

在地磁水平分量 B_H 與磁場 B_M 的作用下，磁強計之磁針偏角 ϕ 可由(4)式求得為 $\tan \phi = B_M / B_H$ ，故得磁矩為

$$\mu = \left(\frac{4\pi}{\mu_0} \right) \frac{(L^2 - d^2/4)^2}{2L} B_H \tan \phi \quad (8)$$

三、解：

(a) 右圖所示為電子的受力情形， \vec{F}_E 和 \vec{F}_B 分別為電子所受的電力和磁力：

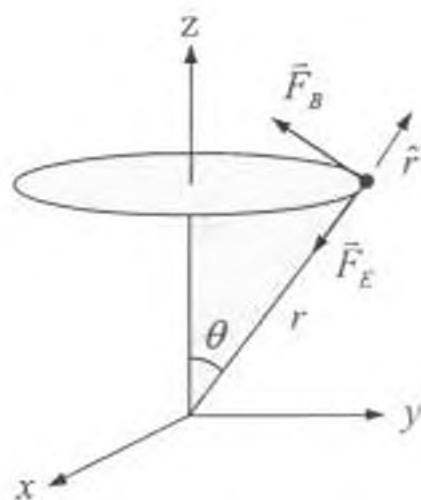
$$\vec{F}_E = -\frac{e^2}{r^2} \hat{r}$$

$$\vec{F}_B = -\frac{eg}{r^2} \frac{v}{c} \hat{v} \times \hat{r}$$

因為電子運動的軌道面和 z 軸垂直，所以 $F_{Ez} = F_{Bz}$ ，得

$$\frac{e^2}{r^2} \cos \theta = \frac{eg}{r^2} \frac{v}{c} \sin \theta$$

$$\cot \theta = \left(\frac{g}{e} \right) \frac{v}{c} \quad (1)$$



(b) 電子作圓運動所需的向心力為

$$\frac{mv^2}{r \sin \theta} = \frac{e^2}{r^2} \sin \theta + \frac{eg}{r^2} \frac{v}{c} \cos \theta = \frac{e^2}{r^2} \sin \theta \left(1 + \frac{g}{e} \frac{v}{c} \cot \theta \right)$$

$$= \frac{e^2}{r^2} \sin \theta (1 + \cot^2 \theta) = \frac{e^2}{r^2} \frac{1}{\sin \theta}$$

$$\Rightarrow mv^2 = \frac{e^2}{r} \quad (2)$$

電子的總力學能為

$$\varepsilon = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{r} = -\frac{e^2}{2r} \quad (3)$$

電子的角動量 $L = rmv \sin \theta$ ，得 $v = \frac{L}{rm \sin \theta}$ ，故

$$m \left(\frac{L}{rm \sin \theta} \right)^2 = \frac{e^2}{r} \Rightarrow r = \frac{L^2}{me^2 \sin^2 \theta}$$

以之代入(3)式，得

$$\varepsilon = -\frac{me^4 \sin^2 \theta}{2L^2} \quad (4)$$

(c) 按題設仿照波耳模型，電子的角動量 $L = n\hbar$ ，代入(4)式，得

$$\varepsilon = -\frac{me^4 \sin^2 \theta}{2n^2 \hbar^2} \quad (5)$$

由(2)和(3)兩式知 $|\varepsilon| = \frac{1}{2}mv^2$ ，故

$$\frac{me^4 \sin^2 \theta}{2n^2 \hbar^2} = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v^2 = \frac{e^4 \sin^2 \theta}{n^2 \hbar^2}$$

$$\frac{v}{c} = \frac{e^2 \sin \theta}{n\hbar c}$$

利用(1)式，可得

$$\cot \theta = \frac{g}{e} \frac{e^2}{n\hbar c} \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{g}{e} \frac{\alpha}{n} \sin^2 \theta \quad (\text{式中 } \alpha \equiv \frac{e^2}{\hbar c})$$

$$\cos \theta = \frac{k}{2n} (1 - \cos^2 \theta) \quad (\text{式中 } k \equiv \frac{2\alpha}{e} g)$$

$$\cos^2 \theta + \frac{2n}{k} \cos \theta = 1$$

$$\left(\cos \theta + \frac{n}{k} \right)^2 = 1 + \frac{n^2}{k^2}$$

由上可解得可能的 θ 值為

$$\cos \theta = \sqrt{1 + \frac{n^2}{k^2}} - \frac{n}{k} \quad (6)$$

(d) 若 $g = \frac{e}{2\alpha}$ ，則 $k = 1$ 。由(6)式可得

$$\cos \theta_n = \sqrt{1 + n^2} - n \quad (7)$$

當 $n = 1$ 時，所對應的 θ_1 值為

$$\cos \theta_1 = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow \theta_1 = 65.5^\circ$$

電子在最低能階時， $n = 1$ 。利用(5)式，可得電子的基態能量為

$$\varepsilon_1 = -\frac{me^4(1 - \cos^2 \theta_1)}{2\hbar^2} = (\varepsilon_H)(1 - \cos^2 \theta_1)$$

式中 ε_H 為氫原子在基態時的能量，故電子的基態能量與氫原子基態能量的比值為

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_H} = 1 - \cos^2 \theta_1 = 2\sqrt{2} - 2 = 0.83$$

四、解：

(a) 粒子的位移 $x = x_0 \cos \omega t$ 和動量 $p = m\dot{x} = -m\omega x_0 \sin \omega t$ ，在一週期內的平均值分別為

$$\langle x \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x_0 \cos \omega t dt = 0$$

$$\langle p \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T (-m\omega x_0 \sin \omega t) dt = 0$$

根據 Δx 和 Δp 的定義，得

$$\langle \Delta x^2 \rangle = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \langle x^2 \rangle$$

$$\langle \Delta p^2 \rangle = \langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 = \langle p^2 \rangle$$

(b) 粒子的總能量等於動能和位能的總和，也等於是動能平均值和位能平均值的總和

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} + \frac{m\omega^2 \langle x^2 \rangle}{2} = \frac{\Delta p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \Delta x^2$$

由測不準原理 $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ ，得 $(\Delta p)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4(\Delta x)^2}$ ，故

$$E = \frac{\Delta p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \Delta x^2 \geq \frac{1}{2m} \cdot \frac{\hbar^2}{4\Delta x^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 \Delta x^2$$

利用配分法，可得

$$E \geq \left(\frac{\hbar^2}{8m} \right) \frac{1}{(\Delta x)^2} + \left(\frac{m\omega^2}{2} \right) (\Delta x)^2 = \left(\sqrt{\frac{\hbar^2}{8m}} \frac{1}{\Delta x} - \sqrt{\frac{m\omega^2}{2}} \Delta x \right)^2 + \frac{1}{2} \hbar \omega$$

由上式可看出 E 的最小值是 $\frac{1}{2} \hbar \omega$ ，所對應的 Δx 為

$$\sqrt{\frac{\hbar^2}{8m}} \frac{1}{\Delta x} - \sqrt{\frac{m\omega^2}{2}} \Delta x = 0 \Rightarrow (\Delta x)^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}$$

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle = \int_0^T (x_0 \cos \omega t)^2 dt = \frac{x_0^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\hbar}{2m\omega} = \frac{x_0^2}{2}$$

由上式得證簡諧振盪粒子的可能的最小振幅為 $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ 。

(c) 粒子在電場中運動的總能量等於動能、彈性能量和電位能的總和，即

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} - q\varepsilon x$$

利用配分法，可得

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \left(x - \frac{q\varepsilon}{m\omega^2} \right)^2 - \frac{q^2\varepsilon^2}{2m\omega^2}$$

$$E + \frac{q^2\varepsilon^2}{2m\omega^2} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \left(x - \frac{q\varepsilon}{m\omega^2} \right)^2$$

因為 q 、 ε 、 m 、和 ω 均為常數，設 $E' = E + \frac{q^2\varepsilon^2}{2m\omega^2}$ ， $x' = x - \frac{q\varepsilon}{m\omega^2}$ ，則上式可寫成：

$$E' = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x'^2$$

利用(a)和(b)兩小題的結果，可得

$$E' \geq \frac{1}{2}\hbar\omega, \quad x' = x_0 \cos \omega t$$

$$\Rightarrow E \geq \frac{1}{2}\hbar\omega - \frac{q^2\varepsilon^2}{2m\omega^2}$$

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{q\varepsilon}{m\omega^2}, \quad \text{式中 } x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

粒子的最低總能量為 $E_{\min} = \frac{1}{2}\hbar\omega - \frac{q^2\varepsilon^2}{2m\omega^2}$ ，相對應的振幅為 $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ 。

五、解：

(a) 由動量守恆定律 $\gamma_1 m_1 v_1 + \gamma_2 m_2 v_2 = \gamma_f m_f v_f$ ，式中 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ ，可得

$$\frac{1}{\sqrt{1-0.8^2}}(1.20 \times 0.8c) + \frac{1}{\sqrt{1-0.6^2}}[1.60 \times (-0.6c)] = \frac{m_f v_f}{\sqrt{1-v_f^2/c^2}} \quad (1)$$

由能量守恆定律 $\gamma_1 m_1 c^2 + \gamma_2 m_2 c^2 = \gamma_f m_f c^2$ ，得

$$\frac{1.20c^2}{\sqrt{1-0.8^2}} + \frac{1.60c^2}{\sqrt{1-0.6^2}} = \frac{m_f c^2}{\sqrt{1-v_f^2/c^2}} \quad (2)$$

由(1)和(2)兩式可解得

$$m_f = 3.98 \text{ kg}$$

$$v_f = 0.10c$$

(b) 碰撞後物體的總動能為

$$K_f = \gamma_f m_f c^2 - m_f c^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1-0.10^2}} - 1 \right) \times 3.98c^2 = 0.020kg \cdot c^2$$

碰撞後物體所損失的動能為

$$\begin{aligned} \Delta K &= K_f - K_i \\ &= (\gamma_f m_f c^2 - m_f c^2) - [(\gamma_1 m_1 c^2 - m_1 c^2) + (\gamma_2 m_2 c^2 - m_2 c^2)] \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{1-0.1^2}} - 1 \right) \times 3.98c^2 - \left[\left(\frac{1}{\sqrt{1-0.8^2}} - 1 \right) \times 1.20c^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{0.6^2}} - 1 \right) \times 1.60c^2 \right] \\ &= -1.18kg \cdot c^2 \end{aligned}$$

(c)按古典物理之計算，碰撞後物體的速度 v_c 為

$$1.2 \times 0.8c - 1.6 \times 0.6c = (1.8 + 1.6)v_c$$

解得 $v_c = 0$ ，即碰撞後不動。但按相對論的計算結果，碰撞後的物體速度 $v_f = 0.10c$ ，而且碰撞後質量增加，所增加之質量恰為所減少動能的相對質量。

2003年國際物理奧林匹亞競賽 國家代表隊決選研習營

理論模擬試題

2003年4月1日 08:00-13:00

- 一、本試題共三大題，每大題五十分，總分一百五十分。
 - 二、答卷時間五小時。
 - 三、在指定的答案紙上作答。
 - 四、在每題開始時請換用新頁。
 - 五、在每一頁答題紙的頂端寫明：
 - 題號
 - 該題所用答題紙之頁碼
 - 該題所用答題紙的總頁數
- 例(以第一題用了三頁紙為例)：
- | | |
|---|-----|
| 1 | 1/3 |
| 2 | 2/3 |
| 3 | 3/3 |

2003 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
 決選研習管理論模擬試題

本試題共三大題，每大題五十分，總分一百五十分。

- 一、如下圖所示，一質量為 m_3 ，斜角為 θ 的斜面放置在水平光滑的地面上，在此斜面上另放置有一質量為 m_2 的楔形木塊，又在此木塊上方放置一質量為 m_1 的小鐵塊。起始時，此楔形木塊連同其上的小鐵塊，從靜止開始自光滑的斜面上滑下來，在此同時，斜面亦開始向左滑動。設小鐵塊與楔形木塊之間的動摩擦係數和靜摩擦係數皆為 μ ，考慮 $m_1 = m_2 = m_3 = M$ 的情況，回答下列各題：

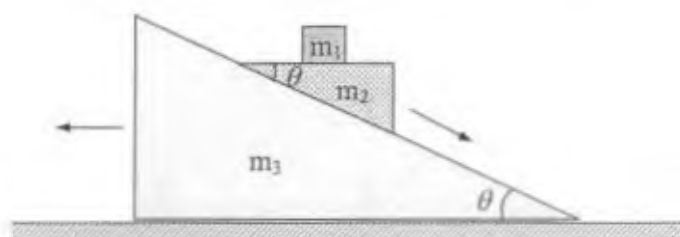


圖 1

- (a) 當小鐵塊與楔形木塊之間無相對滑動時，兩者之間的摩擦力為何？又斜面作用於楔形木塊的正向力 N ，和楔形木塊作用於小鐵塊的正向力 N' 各為何？
 (b) 當 θ 和 μ 滿足何種關係時，小鐵塊與楔形木塊之間會產生相對滑動？
 (c) 當小鐵塊與楔形木塊之間有相對滑動時， N 和 N' 之值各為何？
- 二、邊長為 a 、電阻為 R 的正方形線圈可繞通過其中心，且平行於其一邊的轉軸，無摩擦地轉動，如圖 2-1 所示。有一均勻磁場 \vec{B}_0 垂直於轉軸，在時間 $t=0$ 時，線圈面垂直於磁場。今施力使線圈以等角速率 ω 轉動。在下面(a)~(c)諸小題中，暫不考慮線圈的自感應所產生的效應。

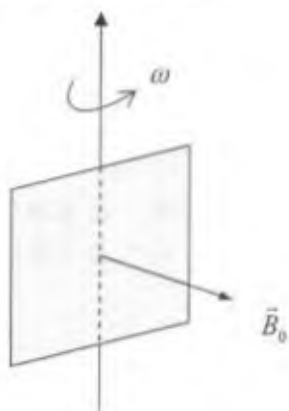


圖 2-1

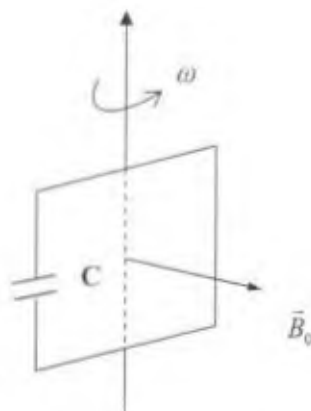


圖 2-2

- (a) 求線圈上的電流 I 與時間 t 之間的函數關係式 $I(t)$ 。
 (b) 要維持線圈做等速率轉動，求外力在線圈轉動一圈的時間內所需做的功。
 (c) 計算在線圈轉動一圈的時間內，線圈所消耗的焦耳熱。
 (d) 若線圈的自感應為 L ，求線圈上的電流 $I(t)$ 所遵守的方程式。
 (e) 承(d)，令 $I(t) = \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t$ ， α 與 β 為與時間無關的常數，求 α 、 β 及 $I(t)$ 。
 (f) 若在此線圈的一邊上串聯一電容 C ，如圖 2-2 所示，求線圈上的電流 $I(t)$ 所遵守的方程式，並求其解。

三、雷射光陀螺

雷射光陀螺是使用沿閉合光路行進的雷射光束，來測定相對於慣性空間的轉速和方位。它的基本原理，可藉下面二個稍微不同的干涉儀來瞭解。

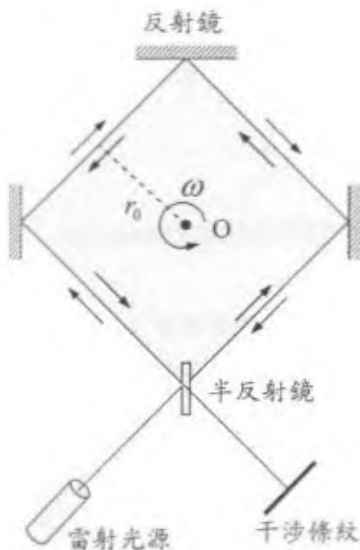


圖 3-1

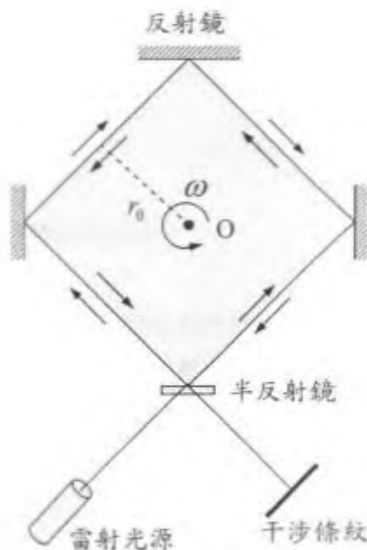


圖 3-2

首先考慮一個正方形的環路干涉儀，如圖 3-1 所示，當環路對慣性空間沒有轉動時，逆時鐘行進的光束和順時鐘行進的光束，每圈的光程 L 是相等的，兩者之間的光程差為零。當環路有轉動角速度時，兩束光繞每圈的光程就不相等。

- (a) 若環路以等角速度 ω ，沿逆時鐘方向轉動時，試求沿逆時鐘方向行進的光束，在環路中繞一圈的光程 L_s ，以 r_0 、 ω 、 c 和 L 表示之。其中 c 是光速， r_0 是環路中心 O 點至正方形一邊的垂直距離。環路的轉動軸通過 O 點，且垂直於正方形面。
- (b) 試求沿逆時鐘方向和沿順時鐘方向行進的兩光束，在環路中繞一圈的光程差。並在 $r_0 \omega \ll c$ 的條件下，予以近似到一階 ($r_0 \omega / c$)，在所得的近似關係式中，以環的面積 $A = \frac{1}{2} r_0 L$ 、 ω 和 c 表示之。
- (c) 已知地球自轉的角速度 $\omega = 15^\circ / \text{小時}$ ，採用紅光波長 $\lambda = 0.70 \mu\text{m}$ ，和一個 $A = 600 \times 300 \text{ m}^2$ 的大環路，試證明逆時鐘和順時鐘的光束，在環路中繞一圈的

光程差約為 $\lambda/4$ ，即可觀察到 $1/4$ 個干涉條紋的移動。

從(c)小題的結果可知環形干涉儀的精度太低，使得它沒有實用價值。假如把環形干涉儀中的半反射鏡轉 90° ，如圖 3-2 所示，則光路就成為閉合的環路，形成一個環形共振腔。此時雷射光的波長要由共振腔的共振條件來決定： $L = m\lambda$ ， m 為正整數， L 為環路一圈的總光程，近似等於環路的周長。現在環路以角速度 ω ，沿逆時鐘方向轉動，繼續回答下列問題：

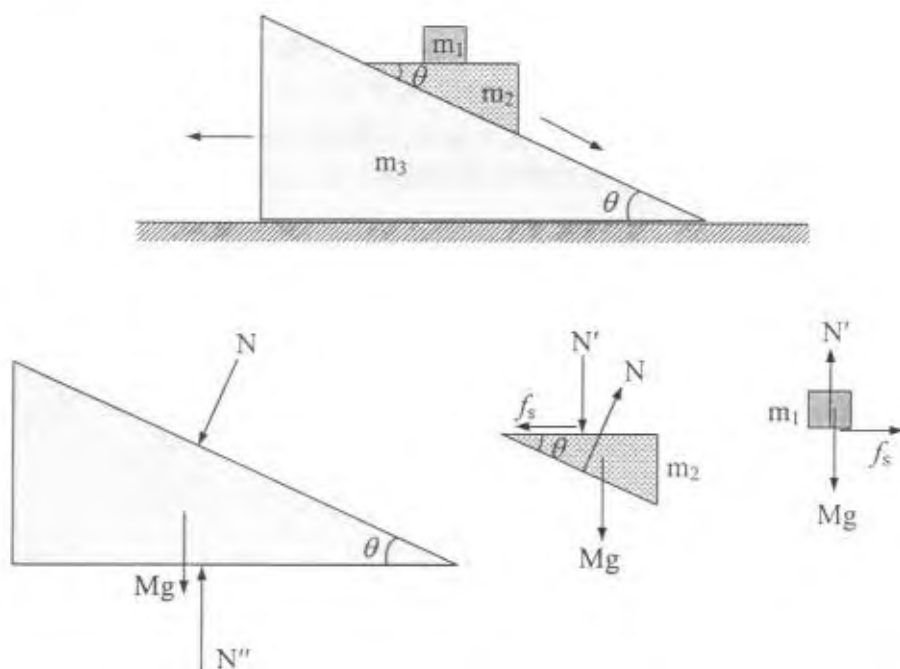
- (d) 試求逆時鐘光束(L_+)與順時鐘光束(L_-)繞環路一圈的光程差，即 $L_+ - L_-$ 為何？
(e) 在(d)小題的結果中，令 $L_\pm = m\lambda_\pm$ ，式中 λ_+ 、 λ_- 分別為逆、順時鐘光束的波長，試求順、逆兩光束的差頻($f_- - f_+$)，即拍頻，以 A 、 λ 、 L 、及 ω 表示之，式中 f_+ 、 f_- 分別為順、逆時鐘光束的頻率。

現在若以 $L = 40\text{cm}$ ，地球自轉角速度 $\omega = 15^\circ/\text{小時}$ ，採用紅光波長 $\lambda = 6328\text{\AA}$ ，得到差頻 8.87Hz ，這是可準確地測出，因此環路尺寸可減小很多，且測量靈敏度提高許多，使得它具實用性。

2003 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
 決選研習營理論模擬試題參考解答

一、解：

(a) 當小鐵塊與楔形木塊之間無相對滑動時：



參看上圖所示斜面、楔形木塊、和小鐵塊的受力圖。設 m_1 和 m_2 沿鉛直方向向下的加速度為 a_y ，則 m_1 和 m_2 在鉛直方向的運動方程式分別為

$$Mg - N' = Ma_y \quad (1)$$

$$Mg - N \cos \theta + N' = Ma_y \quad (2)$$

由(1)-(2)可得

$$2N' = N \cos \theta \quad (3)$$

設 m_1 和 m_2 之間的靜摩擦力為 f_s ，並設 m_1 、 m_2 、 m_3 在水平方向上的加速度分別為 a_1 、 a_2 、 a_3 ，則三者水平方向上的運動方程式分別為

$$f_s = Ma_1 \quad (4)$$

$$N \sin \theta - f_s = Ma_2 \quad (5)$$

$$-N \sin \theta = Ma_3 \quad (6)$$

因 $a_1 = a_2$ ，故由(4)和(5)兩式得

$$f_s = \frac{N}{2} \sin \theta \quad (7)$$

將(7)式代入(5)式，得

$$\frac{N}{2} \sin \theta = Ma_2 \quad (8)$$

由(6)及(8)式得

$$\frac{3}{2} N \sin \theta = M(a_2 - a_3) \quad (9)$$

因為楔形木塊緊貼在斜面上滑下，故 m_2 相對於 m_3 的水平加速度分量和鉛直加速度分量之間，有下列的拘限關係式：

$$\frac{a_y}{a_2 - a_3} = \tan \theta \quad (10)$$

由(1)+(2)可得

$$2Ma_y = 2Mg - N \cos \theta \quad (11)$$

由(9)、(10)、和(11)三式可得

$$\frac{2Mg - N \cos \theta}{3N \sin \theta} = \tan \theta$$

解得

$$N = \frac{2Mg}{(1 + 3 \tan^2 \theta) \cos \theta} \quad (12)$$

利用(3)式，可得

$$N' = \frac{Mg}{1 + 3 \tan^2 \theta} \quad (13)$$

利用(7)式，可得

$$f_s = \frac{Mg \tan \theta}{1 + 3 \tan^2 \theta} \quad (14)$$

(b)由(13)和(14)兩式得 $f_s = N' \tan \theta$ 。若 $\tan \theta < \mu$ ，則 f_s 小於其最大靜摩擦值 $\mu N'$ 。當 θ 增大時， f_s 隨之增大，但 N' 則減小，終至 $f_s = \mu N'$ ，亦即 $\tan \theta = \mu$ 。當 $\tan \theta > \mu$ 時， m_1 和 m_2 之間已開始有相對滑動，即 $a_1 \neq a_2$ 。此時(12)式至(14)式已不再適用，必須另行求解。

(c)當小鐵塊與楔形木塊之間有相對滑動時：

(5)式應改寫為

$$N \sin \theta - \mu N' = Ma_2 \quad (5')$$

由(5)'式及(6)式得

$$2N \sin \theta - \mu N' = M(a_2 - a_3) \quad (15)$$

由(2)、(10)、和(15)三式得

$$\tan \theta = \frac{a_y}{a_2 - a_3} = \frac{Mg - N \cos \theta + N'}{2N \sin \theta - \mu N'} \quad (16)$$

將(3)式代入(16)式，可得

$$N = \frac{2Mg}{4 \sin \theta \tan \theta - \mu \cos \theta \tan \theta + \cos \theta} \quad (17)$$

利用(3)式，可得

$$N' = \frac{Mg \cos \theta}{4 \sin \theta \tan \theta - \mu \cos \theta \tan \theta + \cos \theta}$$

二、解：

(a) 在時間 t 時，線圈面的法線與磁場夾 $\theta = \omega t$ ，通過線圈的磁通為 $\Phi = B_0 a^2 \cos \omega t$ ，

故線圈上的感應電動勢為 $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega B_0 a^2 \sin \omega t$ ，線圈上的電流為

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} = \left(\frac{\omega B_0 a^2}{R} \right) \sin \omega t。$$

(b) 線圈上的電流 $I(t)$ 受外加磁場的作用，所產生的磁力矩為

$$\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}$$

$\vec{m} = Ia^2 \hat{n}$ ， \hat{n} 為線圈面的單位法線。當線圈轉動 $\theta = \omega t$ 角度時， \hat{n} 與 \vec{B} 的夾角為 ωt ，且 \vec{N} 的方向相反於 $\vec{\omega}$ 。

$$N = m B_0 \sin \omega t = Ia^2 B_0 \sin \omega t = \left(\frac{\omega B_0^2 a^4}{R} \right) \sin^2 \omega t$$

要維持線圈做等角速度轉動，外力的力矩必須抵消磁力矩，在線圈轉動一圈的時間內，需做功

$$W = \int_0^{2\pi} N d\theta = \left(\frac{\omega B_0^2 a^4}{R} \right) \int_0^{2\pi} \sin^2 \omega t d(\omega t) = \frac{\pi \omega B_0^2 a^4}{R}$$

(c) 線圈轉動一圈的時間內，線圈上所產生的焦耳熱為

$$W = \int_0^{2\pi/\omega} I^2(t) R dt = \left(\frac{\omega^2 B_0^2 a^4}{R} \right) \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2 \omega t dt = \frac{\pi \omega B_0^2 a^4}{R}$$

其值等於外力所做的功。

(d) 當線圈面轉動 $\theta = \omega t$ 角度時，通過線圈的磁通為

$$\Phi = LI(t) + B_0 a^2 \cos \omega t$$

線圈上的感應電動勢為

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt} + \omega B_0 a^2 \sin \omega t$$

故線圈上的電流為

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{L}{R} \frac{dI}{dt} + \left(\frac{\omega B_0 a^2}{R} \right) \sin \omega t$$

上式亦可寫為

$$L \frac{dI}{dt} + IR = (\omega B_0 a^2) \sin \omega t \quad (1)$$

此式可視為電感 L 與電阻 R 的串聯交流電路，交流電源的電壓峰值為 $\varepsilon_0 = \omega B_0 a^2$

(e) $I(t) = \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t$ ，代入(1)式，可得

$$-\omega L \alpha \sin \omega t + \omega L \beta \cos \omega t + R \alpha \cos \omega t + R \beta \sin \omega t = (\omega B_0 a^2) \sin \omega t$$

令上式等號兩邊 $\cos \omega t$ 及 $\sin \omega t$ 的係數相等，可得

$$R\alpha + \omega L\beta = 0 \quad (2)$$

$$-\omega L\alpha + R\beta = \omega B_0 a^2 \quad (3)$$

解(2)與(3)聯立方程式，可得

$$\alpha = -\frac{\omega^2 L B_0 a^2}{R^2 + \omega^2 L^2}, \beta = \frac{\omega R B_0 a^2}{R^2 + \omega^2 L^2} \quad (4)$$

故

$$I(t) = \frac{\omega B_0 a^2}{R^2 + \omega^2 L^2} [-\omega L \cos \omega t + R \sin \omega t] = \frac{\omega B_0 a^2}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \varphi) \quad (5)$$

式中 $\tan \varphi = \frac{\omega L}{R}$ 。

(f) 等效電路為一種 $L \cdot C \cdot R$ 與一個電壓為 $\omega B_0 a^2 \sin \omega t$ 的交流電源所串聯行程的電路。

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = \omega B_0 a^2 \sin \omega t \quad (6)$$

上式中， Q 為電容器所儲存的電荷。

(6)式對時間微分一次，得

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \omega^2 B_0 a^2 \cos \omega t \quad (7)$$

$$\text{令 } I = \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t \quad (8)$$

$$\text{則 } \frac{dI}{dt} = -\omega \alpha \sin \omega t + \omega \beta \cos \omega t \quad (9)$$

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = -\omega^2 \alpha \cos \omega t = \omega^2 \beta \sin \omega t \quad (10)$$

將(8)、(9)及(10)式代入(7)式，

$$\begin{aligned} & -\omega^2 L \alpha \cos \omega t - \omega^2 L \beta \sin \omega t - \omega R \alpha \sin \omega t + \omega R \beta \cos \omega t + \frac{\alpha}{C} \cos \omega t + \frac{\beta}{C} \sin \omega t \\ & = \omega^2 B_0 a^2 \cos \omega t \end{aligned}$$

令等號兩邊 $\cos \omega t$ 及 $\sin \omega t$ 的係數相等，得

$$\left(\frac{1}{C} - \omega^2 L\right)\alpha + \omega R \beta = \omega^2 B_0 a^2 \quad (11)$$

$$\left(\frac{1}{C} - \omega^2 L\right)\beta - \omega R \alpha = 0 \quad (12)$$

解(11)與(12)聯立方程式，得

$$\alpha = \frac{\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)(\omega B_0 a^2)}{\left[R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2\right]} \quad (13)$$

$$\beta = \frac{R(\omega B_0 a^2)}{\left[R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2\right]} \quad (14)$$

$$\text{令 } \varepsilon_0 = \omega B_0 a^2, \quad X = \omega L - \frac{1}{\omega C}, \quad Z = [R^2 + X^2]^{1/2}$$

則

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{X\varepsilon_0}{Z^2}, \quad \beta = \frac{R\varepsilon_0}{Z^2}, \\ I(t) &= \frac{R\varepsilon_0}{Z^2} \sin \omega t - \frac{X\varepsilon_0}{Z^2} \cos \omega t = \frac{\varepsilon_0}{Z^2} [R \sin \omega t - X \cos \omega t] \\ &= \frac{\varepsilon_0}{Z^2} \sqrt{R^2 + X^2} \left[\frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}} \sin \omega t - \frac{X}{\sqrt{R^2 + X^2}} \cos \omega t \right] \\ &= \frac{\varepsilon_0}{Z} \sin(\omega t - \varphi) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\text{式中 } \tan \varphi = \frac{X}{R} = \frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R}.$$

三、解：

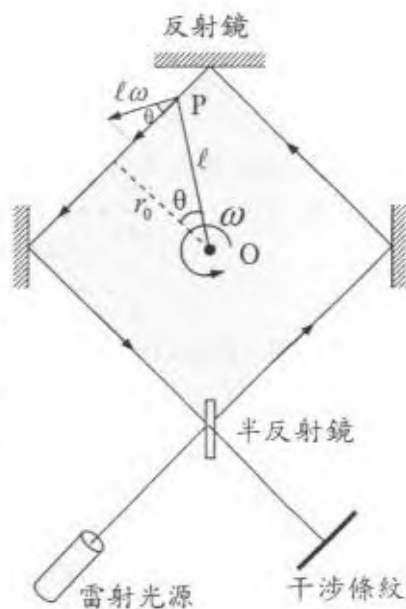
(a) 設逆時鐘光束在環路中繞一圈的光程為 L_+ ，所需的時間為 τ_+ ，則

$$\tau_+ = \frac{L_+}{c}$$

參看右圖，設 P 點為光路上的任一點，則當環路以等角速度 ω ，沿逆時鐘方向轉動時，P 點的速度為 $v = \ell\omega$ ，方向垂直於 OP 。因此該點沿光路方向的速度分量為 $v \cos \theta = \ell\omega \cos \theta = r_0\omega$ ，為一常數，故光束在環路上繞一圈時，必須多走的光程為 $r_0\omega\tau_+$ ，即

$$L_+ = L + r_0\omega\tau_+ = L + r_0\omega \left(\frac{L_+}{c}\right)$$

$$L_+ = \frac{L}{1 - \frac{r_0\omega}{c}}$$



(b) 同(a)小題的計算方式，可得順時鐘光束在環路中繞一圈所走的光程為

$$L_- = \frac{L}{1 + \frac{r_0\omega}{c}}$$

$$\text{兩光束的光程差 } L_+ - L_- = \frac{L}{1 - \frac{r_0\omega}{c}} - \frac{L}{1 + \frac{r_0\omega}{c}} = \frac{(2r_0\omega/c)L}{1 - \left(\frac{r_0\omega}{c}\right)^2}$$

若 $r_0\omega \ll c$ ，則 $L_+ - L_- \approx \left(\frac{2r_0\omega}{c}\right)L = \left(\frac{4A}{c}\right)\omega$ ，式中 $A = \frac{1}{2}Lr_0$ 。

(c) 地球自轉的角速度 $\omega = 15^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} \times \frac{1}{3600} = 7.27 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$

$$\text{環路面積 } A = 600 \times 300 \text{ m}^2 = 1.8 \times 10^5 \text{ m}^2$$

$$\text{光程差 } L_+ - L_- = \left(\frac{4A}{c} \right) \omega = \left(\frac{4 \times 1.8 \times 10^5}{3.0 \times 10^8} \right) \times 7.27 \times 10^{-5} = 1.74 \times 10^{-7} \text{ m}$$

採用紅光波長 $\lambda = 0.70 \mu\text{m} = 0.70 \times 10^{-6} \text{ m}$ ，故

$$L_+ - L_- = \left(\frac{1.74 \times 10^{-7} \text{ m}}{0.70 \times 10^{-6} \text{ m}} \right) \lambda = 0.25 \lambda = \frac{\lambda}{4}$$

(d) 同(a)和(b)小題的結果，即

$$L_{\pm} = \frac{L}{1 \mp \frac{r_0 \omega}{c}} = \frac{L}{1 \mp \frac{2A\omega}{Lc}}$$

(e) 環形共振腔的條件： $L = m\lambda$ ， $L_{\pm} = m\lambda_{\pm}$ 。以之代入(d)小題的結果，得

$$\begin{aligned} m\lambda_{\pm} &= \frac{m\lambda}{1 \mp \frac{2A\omega}{Lc}} \\ \Rightarrow f_{\pm} &= \frac{c}{\lambda_{\pm}} = \frac{c}{\lambda} \left(1 \mp \frac{2A\omega}{Lc} \right) \end{aligned}$$

順時鐘和逆時鐘二光束的差頻 $= f_- - f_+ = \left(\frac{4A}{\lambda L} \right) \omega$ 。

2003年國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊決選研習營

筆試(一)試題

2003年3月31日 14:00-17:00

- 一、本試題共五大題，每大題二十分，總分一百分。
- 二、考試時間三小時。
- 三、在指定的答案紙上作答。
- 四、可使用無程式掌上型計算機。

2003 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
決選研習營筆試(一)試題

本試題共有計算題五大題，每題 20 分，合計 100 分。

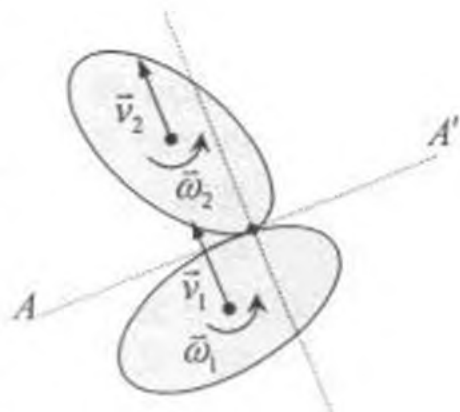
一、將一根內半徑為 1.0mm 的均勻毛細管，插入一半徑為 5.0cm 的球形肥皂泡內，使球泡內的空氣緩緩地經由毛細管流出到大氣中。問：

- (a) 證明肥皂泡內外的壓力差為 $P - P_0 = \frac{4S}{r}$ ，式中 P_0 為大氣壓力， S 為皂液的表面張力， r 為肥皂泡的半徑。
- (b) 若流經毛細管的空氣可適用白努利定律，則從插入毛細管算起，經多少秒後，肥皂泡將消失？（皂液的表面張力 $S = 0.025 \text{ N/m}$ ，空氣的密度 $\rho = 1.3 \text{ kg/m}^3$ 。）

二、兩物體碰撞的恢復係數問題：

(a) 兩球碰撞的過程，可分為兩階段來分析：第一階段為壓縮階段，即從兩球剛接觸到兩球發生最大形變的階段；第二階段為恢復階段，即從兩球發生最大形變到兩球恰分離的階段。由實驗中發現，當兩球作對正碰撞(正碰)時，壓縮階段的衝量大小 P 和恢復階段的衝量大小 P' ，有下式的近似關係： $P' = eP$ ，式中 e 為常數，稱為恢復係數。根據前述的實驗事實，證明牛頓規則(Newton's Rule) 成立，即兩球在對正碰撞後相對速度大小，與碰撞前相對速度大小的比值等於恢復係數。

(b) 兩個大小和質量皆相同的光滑橢圓面盤，在平滑的水平面上運動，彼此發生碰撞。碰撞前其質心速度分別為 \vec{v}_1 及 \vec{v}_2 ，其方向相同，均垂直於兩橢圓公切線 AA' ，角速度分別為 $\vec{\omega}_1$ 及 $\vec{\omega}_2$ ，如右圖所示。若兩橢圓面盤的碰撞恢復係數為 e ，證明此兩橢圓面盤的碰撞滿足下式之關係： $|\vec{v}_s| = e|\vec{v}_a|$ ，式中 \vec{v}_a 為兩橢圓面盤的接觸點，在碰撞前的瞬間，沿垂直於公切線方向互相接近的速度； \vec{v}_s 為兩橢圓面盤的接觸點，在碰撞後的瞬間，沿垂直於公切線方向，互相離開的速度。



(c) 在碰撞後的瞬間，兩橢圓面盤的質心沿平行於 AA' 方向的速度分量各為何？

三、有關鋁的一些物理常數如下：

熱傳導係數 $\kappa = 235 \text{ W/m}\cdot\text{K}$

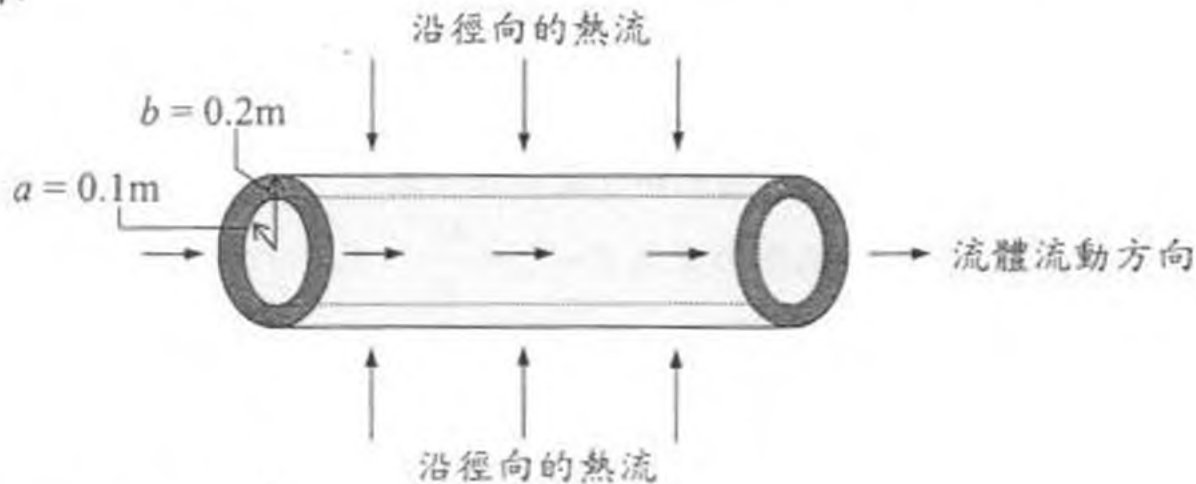
線膨脹係數 $\alpha = 23 \times 10^{-6} / \text{C}^\circ$

楊氏彈性係數 $Y = 7.0 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$

一長圓柱形的均勻鋁管，內半徑 $a = 0.1 \text{ m}$ ，外半徑 $b = 0.2 \text{ m}$ ，起始時此鋁管的溫度為均勻，其值為 T_0 ，今將此鋁管放置於一環形對稱的熱源環境中，此熱源對鋁管產生一徑向向內的均勻熱流，流入此鋁管的熱能可由流經管內的流體帶走(方向如圖中箭頭所示)。已知在每一公尺長的鋁管上，每秒流入的熱能為 $1.00 \times 10^3 \text{ J}$ ，且鋁管的內表面溫度保持為 T_0 ，回答下列各題：

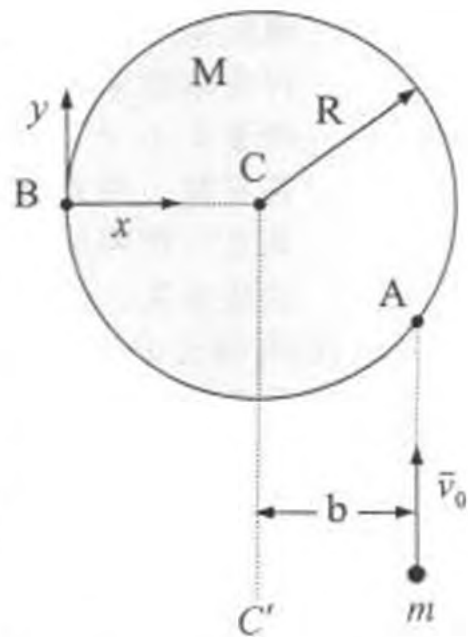
(a) 在熱流穩定時，鋁管溫度沿徑向上的分布函數為何？

- (b) 若鋁管可不受任何拘束的向外膨脹，則膨脹後其管壁厚度的增加量為何？
 (c) 若鋁管的外管壁被箝制住，使其不能沿徑向向外膨脹，則其外管壁上所受的壓力為何？



* 可能有用之積分式： $\int \frac{dx}{x} = \ln x$ ， $\int \ln x dx = x \ln x - x$ 。

- 四、如右圖所示，一半徑為 R 且質量為 M 的均勻圓盤，起始時靜置在光滑的水平桌面上。另一質量為 m ，初速 \bar{v}_0 的質點射向圓盤，擊中後箝入在盤緣上的一點 A 。圖中 C 為圓心， $C'C$ 平行於 \bar{v}_0 ， $C'C$ 與 \bar{v}_0 之間的距離為 b ， B 點位在盤緣上，且 BC 垂直於 $C'C$ 。假設 $m \ll M$ ，回答下列問題：



- (a) 當 b 為何值時，可使 B 點相對於桌面的速度為零？
 (b) 承(a)小題，設當質點 m 箝入在 A 點的時刻為 $t=0$ ，以此時 B 點的位置作為固定於桌面的參考坐標系的原點，取向右為 $+x$ 方向，向上為 $+y$ 方向，求 A 點在時刻 t 的坐標 $x(t)$ 和 $y(t)$ 。
 (c) 若在盤緣非常靠近 B 點處穿一小孔，孔內固定一小釘，使圓盤得以無摩擦地繞小釘旋轉。在質點 m 射向圓盤並箝入的過程中，一般而言，小釘會承受一衝量，但當 b 為某一特定值時，此衝量為零，求此 b 值，並求在此 b 值時的圓盤轉速。

【註】：圓盤繞其中心轉軸的轉動慣量為 $\frac{1}{2}MR^2$ 。

- 五、一太空船原先在半徑為 r_0 的圓軌道上，環繞一質量為 M 的恆星轉動。太空船上的噴氣引擎可用以改變太空船的行進速度。假設噴氣引擎每次所噴出的氣體質量，皆遠小於太空船本身的質量，回答下列問題：

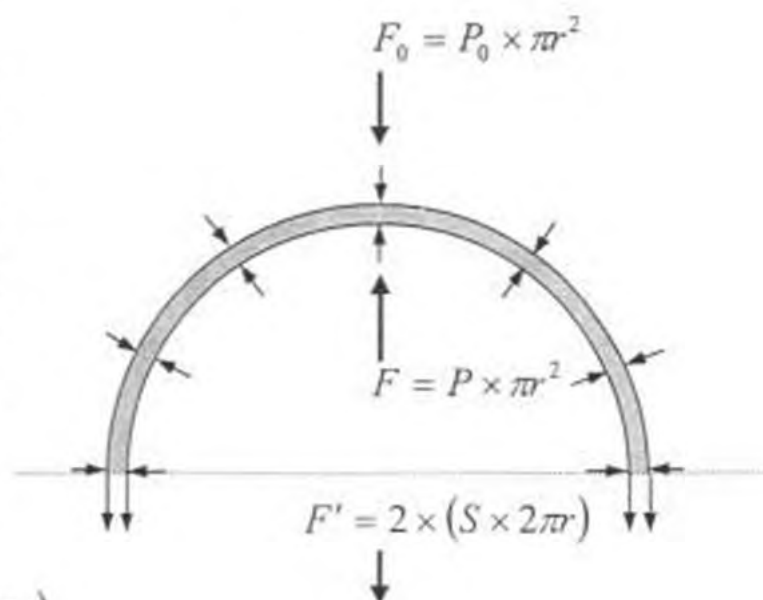
- (a) 今欲在一次噴氣後，使太空船可逃脫此恆星的引力束縛，則噴氣引擎所須提供的最小能量為何？噴氣的方向為何？在此情況下，太空船所獲得的初速為何？
 (b) 承(a)小題，在第一次噴氣後太空船飛離原先的圓軌道。在太空船的飛行過程中，欲使太空船可探測另一在半徑為 r_1 的圓軌道上，環繞恆星運轉的行星，則需在太空船到達該行星的圓軌道處（即距離恆星中心 r_1 處）再噴氣一次，使太空船可與此行星在同一軌道上同步繞恆星運轉，計算太空船的速度變化量為何？
 (c) 若欲使太空船在原先半徑 r_0 的圓軌道處，使其墜落在恆星上，則噴氣引擎應向

哪一方向噴氣？計算太空船的速度變化量為何？

2003 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
 決選研習營筆試(一)試題參考解答

一、解：

(a) 考慮肥皂泡上半球的受力情形，如右圖所示。圖中 F_0 為大氣壓力作用於肥皂泡外表面的合力， F 為肥皂泡內部空氣作用於內表面的合力， F' 為皂液（有兩層）表面張力作用內外表面的合力。設肥皂泡的半徑為 r ，其內的空氣壓力為 P ，大氣壓力為 P_0 ，由靜力平衡可得



$$F = F_0 + F'$$

$$P \times \pi r^2 = P_0 \times \pi r^2 + 2 \times (S \times 2\pi r)$$

$$P - P_0 = \frac{4S}{r} \quad (1)$$

(b) 當球泡內的空氣經由毛細管流出時，由白努利定律可得

$$P = P_0 + \frac{1}{2} \rho v^2 \quad (2)$$

由毛細管流出的空氣體積等於肥皂泡所縮小的體積，即

$$vAdt = -4\pi r^2 dr \quad (3)$$

式中 A 為毛細管的截面積。將(1)和(2)兩式代入(3)式，得

$$r^{5/2} dr = -\frac{A}{\pi} \left(\frac{S}{2\rho} \right)^{1/2} dt$$

將上式積分得

$$\int_R^0 r^{5/2} dr = -\frac{A}{\pi} \left(\frac{S}{2\rho} \right)^{1/2} \int_0^T dt$$

$$T = \frac{2\pi}{7A} \left(\frac{2\rho R}{S} \right)^{1/2} R^3 \quad (4)$$

式中 R 為肥皂泡的起始半徑。將 $A = \pi \times (1.0 \times 10^{-3})^2 m^2$ ， $\rho = 1.3 kg/m^3$ ， $R = 5.0 \times 10^{-2} m$ ， $S = 0.025 N/m$ 代入(4)式，得

$$T = 81s$$

二、解：

(a) 設兩球的質量分別為 m_1 和 m_2 ；碰撞前的速度分別為 v_1 和 v_2 ；碰撞後的速度為 v_1' 和 v_2' ；發生最大形變時之速度為 V （取 \bar{v}_1 方向為正向），則兩球在壓縮階段的動量變化和衝量之間的關係式為

$$m_1 V - m_1 v_1 = -P$$

$$m_2 V - m_2 v_2 = P$$

$$\text{故} \quad v_1 - v_2 = P \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right) \quad (1)$$

又兩球在恢復階段的動量變化和衝量之間的關係式為

$$m_1 v_1' - m_1 V = -P'$$

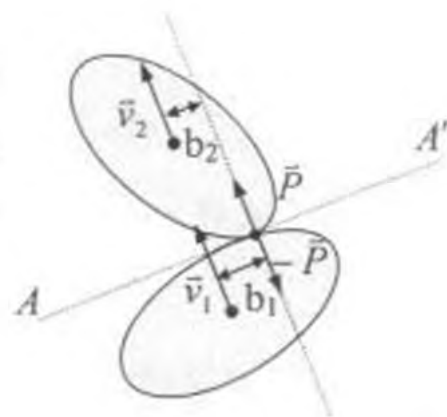
$$m_2 v_2' - m_2 V = P'$$

$$\text{故} \quad v_1' - v_2' = -P' \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right) = -eP \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right) \quad (2)$$

由(1)和(2)兩式解得

$$v_1' - v_2' = -e(v_1 - v_2) \Rightarrow \frac{|v_1' - v_2'|}{|v_1 - v_2|} = e$$

(b) 設兩橢圓面盤在碰撞期間達到最大變形時（碰撞階段）的質心速度分別為 V_1 及 V_2 ，角速度分別為 Ω_1 及 Ω_2 ；在碰撞後瞬間的質心速度分別為 v_1' 及 v_2' ，角速度分別為 ω_1' 及 ω_2' ，則在碰撞的壓縮和恢復兩階段，分別有下列的關係式：



壓縮階段

$$\begin{cases} m_1 V_1 - m_1 v_1 = -P & (3) \\ m_2 V_2 - m_2 v_2 = P & (4) \\ I(\Omega_1 - \omega_1) = -\int F b_1 dt = -b_1 P & (5) \\ I(\Omega_2 - \omega_2) = \int F b_2 dt = b_2 P & (6) \end{cases}$$

式中 I 為橢圓面盤繞通過其質心之鉛垂線的轉動慣量。

恢復階段

$$\begin{cases} m_1 v_1' - m_1 V_1 = -P' = -eP & (7) \\ m_2 v_2' - m_2 V_2 = P' = eP & (8) \\ I(\omega_1' - \Omega_1) = -\int F' b_1 dt = -b_1 P' = -b_1 eP & (9) \\ I(\omega_2' - \Omega_2) = \int F' b_2 dt = b_2 P' = b_2 eP & (10) \end{cases}$$

由(3)和(4)兩式得

$$(v_1 - v_2) - (V_1 - V_2) = P \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right) = \frac{2P}{m} \quad (11)$$

由(7)和(8)兩式得

$$(v'_1 - v'_2) - (V_1 - V_2) = eP \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right) = \frac{2eP}{m} \quad (12)$$

由(11)和(12)兩式得

$$(v'_1 - v'_2) - (V_1 - V_2) = -e[(v_1 - v_2) - (V_1 - V_2)] \quad (13)$$

由(5)和(6)兩式得

$$\begin{aligned} -b_1(\Omega_1 - \omega_1) + b_2(\Omega_2 - \omega_2) &= \frac{P}{I}(b_1^2 + b_2^2) \\ (b_1\omega_1 - b_2\omega_2) - (b_1\Omega_1 - b_2\Omega_2) &= \frac{P}{I}(b_1^2 + b_2^2) \end{aligned} \quad (14)$$

同理由(7)和(8)兩式得

$$(b_1\omega'_1 - b_2\omega'_2) - (b_1\Omega_1 - b_2\Omega_2) = -\frac{eP}{I}(b_1^2 + b_2^2) \quad (15)$$

由(14)及(15)兩式得

$$(b_1\omega'_1 - b_2\omega'_2) + e(b_1\omega_1 - b_2\omega_2) = (1+e)(b_1\Omega_1 - b_2\Omega_2) \quad (16)$$

當達最大變形時，兩橢圓面盤的接觸點，在沿垂直於公切線的方向上，有相同的速度，故

$$\begin{aligned} V_1 + b_1\Omega_1 &= V_2 + b_2\Omega_2 \\ V_1 - V_2 &= -(b_1\Omega_1 - b_2\Omega_2) \end{aligned} \quad (17)$$

將(17)式代入(16)式，得

$$(b_1\omega'_1 - b_2\omega'_2) + e(b_1\omega_1 - b_2\omega_2) = -(1+e)(V_1 - V_2) \quad (18)$$

由(13)和(18)兩式中消去 $V_1 - V_2$ 得

$$(v'_1 + b_1\omega'_1) - (v'_2 + b_2\omega'_2) = -e[(v_1 + b_1\omega_1) - (v_2 + b_2\omega_2)] \quad (19)$$

上式等號左邊為為兩橢圓面盤的接觸點，在碰撞後的瞬間，沿垂直於公切線方向，相互離開的速度量值 v_s ；等號右邊中括號內則為碰撞前的瞬間，互相接近的速度量值 v_a ，即 $v_s = -ev_a$ 。若只計大小，則為 $|v_s| = e|v_a|$ 。

(c)由於兩橢圓面盤均光滑，因此在碰撞時的相互作用力方向垂直於公切線 AA' ，故在碰撞後的瞬間，兩橢圓面盤的質心沿平行於 AA' 方向的速度分量均為零。

三、解：

(a)設在長為 h 的鋁管上，每單位時間所流入的熱量為 J ，則

$$J = \kappa A \frac{dT}{dr} = \kappa(2\pi h) \frac{dT}{dr} \quad (1)$$

$$dT = \left(\frac{J}{2\pi h \kappa} \right) \frac{dr}{r}$$

$$T = \left(\frac{J}{2\pi h \kappa} \right) \ln r + C \quad (2)$$

當 $r = a$ ， $T = T_0$ ，故

$$\begin{aligned} T_0 &= \left(\frac{J}{2\pi h\kappa} \right) \ln a + C \\ C &= T_0 - \left(\frac{J}{2\pi h\kappa} \right) \ln a \end{aligned} \quad (3)$$

將(3)代入(2)式，得

$$T = T_0 + \frac{J}{2\pi h\kappa} \ln \left(\frac{r}{a} \right) \quad (4)$$

(b) 當原來厚度為 dr 的鋁管管壁受熱膨脹時，其厚度會膨脹為 $dr(1 + \alpha\Delta T)$ ，故鋁管膨脹後的總厚度為

$$\int_a^b (1 + \alpha\Delta T) dr = \int_a^b [1 + \alpha(T - T_0)] dr$$

設 $G \equiv \frac{J}{2\pi h\kappa}$ ，則上式可寫為

$$\begin{aligned} \int_a^b \left[1 + \alpha G \ln \left(\frac{r}{a} \right) \right] dr &= (b - a) + \alpha G \left[r \ln \left(\frac{r}{a} \right) - r \right]_a^b \\ &= (b - a) + \alpha G \left[b \ln \left(\frac{b}{a} \right) - (b - a) \right] \end{aligned}$$

鋁管管壁厚度的增加量為

$$\delta = \alpha G \left[b \ln \left(\frac{b}{a} \right) - (b - a) \right]$$

將已知數據代入，得

$$\begin{aligned} G &= \frac{J}{2\pi h\kappa} = \frac{1.00 \times 10^3}{2\pi \times 235} = 0.677 K \\ \delta &= 23 \times 10^{-6} \times 0.677 (0.2 \ln 2 - 0.1) = 6.0 \times 10^{-7} m \end{aligned}$$

(c) 利用楊氏係數的定義 $\frac{F}{A} = Y \frac{\Delta L}{L}$ ，可得被箝制的外管壁所受的壓力為

$$P = 7.0 \times 10^{10} \times \frac{6.0 \times 10^{-7}}{0.1} \approx 4.2 \times 10^5 N/m^2$$

四、解：

根據題設 $m \ll M$ ，碰撞後，由於質點嵌入圓盤內，故圓盤—質點系統的質心，幾乎位在圓盤中心。

(a) 設碰撞後，圓盤連同嵌入的質點 m 的移動速度為 \bar{v}_C ，由動量守恆定律得

$$(m+M)\bar{v}_C = m\bar{v}_0$$

$$\bar{v}_C = \frac{m\bar{v}_0}{m+M} \quad (1)$$

即圓盤在碰撞後作等速度運動。設圓盤在碰撞後所得的角速度為 ω ，則由角動量守恆定律可得

$$\left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega = mv_0b \quad (2)$$

$$\omega = \frac{mv_0b}{(m+M/2)R^2} \quad (3)$$

B 點相對於桌面的速度為

$$v_B = v_C - \omega R = \frac{mv_0}{m+M} - \frac{mv_0b}{(m+M/2)R} \quad (4)$$

若欲使 $v_B = 0$ ，則

$$b = \left(\frac{m+M/2}{m+M}\right)R \quad (5)$$

(b) 設 $\bar{r}(t)$ 為質點 m 相對於 B 點的位置向量， $\bar{r}_C(t)$ 為圓心 C 相對於 B 點的位置向量， $\bar{r}'(t)$ 為質點 m 相對於圓心 C 的位置向量，則

$$\bar{r}(t) = \bar{r}_C(t) + \bar{r}'(t) \quad (6)$$

在碰撞後，圓心做速度為 \bar{v}_C 的等速運動，故

$$\bar{r}_C(t) = R\hat{i} + v_C t \hat{j} \quad (7)$$

A 點相對於圓心做角速度為 ω 的圓周運動，故

$$\bar{r}'(t) = R \cos(\omega t - \alpha) \hat{i} + R \sin(\omega t - \alpha) \hat{j} \quad (8)$$

將(7)和(8)兩式代入(6)式，得

$$\bar{r}(t) = R[1 + \cos(\omega t - \alpha)]\hat{i} + [v_C t + R \sin(\omega t - \alpha)]\hat{j} \quad (9)$$

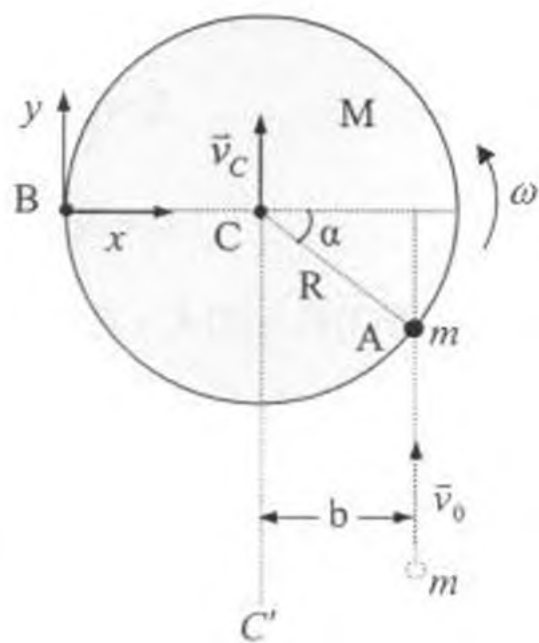
A 點相對於 B 點的位置坐標參數方程式為

$$\begin{cases} x(t) = R[1 + \cos(\omega t - \alpha)] \\ y(t) = R[v_C t + \sin(\omega t - \alpha)] \end{cases}$$

式中 $\cos \alpha = \frac{b}{R} = \frac{m+M/2}{m+M}$ 。質點 m 的運動軌跡為擺線。

(c) 在碰撞過程中，小釘受一方向向上的衝量 \bar{P} ，而圓盤受一量值相同，但方向向下的衝量 $-\bar{P}$ 。由動量-衝量定理得

$$(m+M)v_C - mv_0 = -P$$



$$v_C = \frac{mv_0 - P}{m + M} \quad (10)$$

式中 v_C 為碰撞後瞬間的系統質心速度，也是圓盤中心的速度。在碰撞後，圓心以半徑 R ，繞 B 點做角速度為 ω 的等速率圓周運動，故

$$v_C = \omega R \quad (11)$$

由平行軸定理可得圓盤繞 B 點轉動的轉動慣量為 $\frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$ ，而質點 m 繞 B 點轉動的轉動慣量為 $m[(R+b)^2 + (R^2 - b^2)] = 2mR(R+b)$ ，故整個系統的轉動慣量為

$$I_B = \frac{3}{2}MR^2 + 2mR(R+b) \quad (12)$$

由角動量守恆定律，得

$$I_B \omega = mv_0(R+b) \quad (13)$$

$$\text{得 } \omega = \frac{mv_0(R+b)}{I_B} \quad (14)$$

由(10)、(11)、和(14)三式得

$$\begin{aligned} P &= mv_0 - (m+M)v_C = mv_0 - (m+M)R\omega \\ &= mv_0 - (m+M)\frac{mv_0R(R+b)}{I_B} \end{aligned} \quad (15)$$

$P=0$ 的條件為

$$I_B = (m+M)R(R+b) \quad (16)$$

$$\frac{3}{2}MR^2 + 2mR(R+b) = (m+M)R(R+b)$$

由上式可解得

$$b = \left(\frac{m+M/2}{M-m} \right) R \quad (17)$$

當 $P=0$ 時，由(10)和(11)式可得

$$\omega = \frac{v_C}{R} = \frac{mv_0}{(M+m)R} \quad (18)$$

五、解：

(a) 設太空船在圓軌道運行的速度為 v_0 ，噴氣後的脫離速度為 v_{0e} ，則

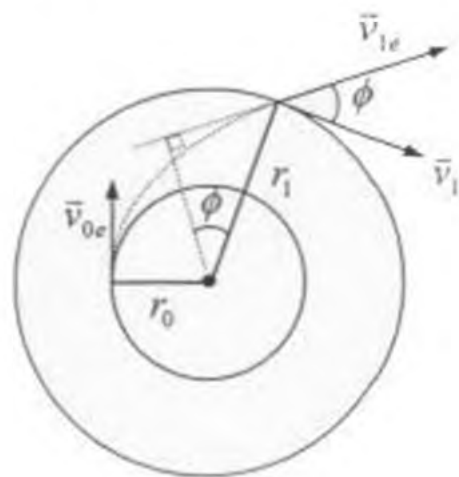
$$\frac{mv_0^2}{r_0} = \frac{GmM}{r_0^2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$$

$$\frac{1}{2}mv_{0e}^2 = \frac{GMm}{r_0} \Rightarrow v_{0e} = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$$

噴氣引擎所須提供的最小能量為

$$\Delta E = \frac{1}{2}mv_{0e}^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{GMm}{r_0} - \frac{GMm}{2r_0} = \frac{GMm}{2r_0}$$

噴氣引擎必須逆向太空船的飛行方向噴氣。



(b)如右圖所示，設太空船到達距離恆星為 r_1 處的速度為 \bar{v}_{1e} ，由能量守恆定律可得

$$\frac{1}{2}mv_{1e}^2 - \frac{GMm}{r_1} = \frac{1}{2}mv_{0e}^2 - \frac{GMm}{r_0} = 0$$

解得 $v_{1e} = \sqrt{\frac{2GM}{r_1}}$ (1)

又由角動量守恆定律可得

$$mv_{0e}r_0 = mv_{1e}r_1 \cos\phi \Rightarrow v_{1e} \cos\phi = \frac{r_0 v_{0e}}{r_1} \quad (2)$$

設行星在半徑為 r_1 的圓軌道上的速度為 \bar{v}_1 ，則

$$\frac{mv_1^2}{r_1} = \frac{GMm}{r_1^2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r_1}} \quad (3)$$

欲使太空船能和該行星同步運轉，則必須利用噴氣引擎，使太空船的速度從 \bar{v}_{1e} 改變至 \bar{v}_1 ，即其速度變化量為 $\Delta\bar{v} = \bar{v}_1 - \bar{v}_{1e}$ 。利用(1)、(2)、和(3)三式，可得

$$\begin{aligned} |\Delta\bar{v}|^2 &= v_1^2 + v_{1e}^2 - 2v_1v_{1e} \cos\phi = \frac{GM}{r_1} + \frac{2GM}{r_1} - \frac{2r_0v_{0e}v_1}{r_1} \\ &= \frac{3GM}{r_1} - \frac{2r_0}{r_1} \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} \sqrt{\frac{GM}{r_1}} = \frac{GM}{r_1} \left(3 - 2\sqrt{\frac{2r_0}{r_1}} \right) \\ |\Delta\bar{v}| &= \left[\frac{GM}{r_1} \left(3 - 2\sqrt{\frac{2r_0}{r_1}} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

(c)噴氣引擎必須順著太空船的飛行方向噴氣，使太空船的速度減至零，故其速度變

化量為 $|\Delta\bar{v}| = |0 - \bar{v}_0| = v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$ 。

2003年國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊決選研習營

實驗模擬試題(一)

2003年4月3日

考試時間：150分鐘

- 一、本試題滿分為七十五分。
- 二、在指定的答案紙上作答。
- 三、在每一頁答題紙的頂端寫明：

- 題號
- 該題所用答題紙之頁碼
- 該題所用答題紙的總頁數

例(以第一題用了三頁紙為例)：

1	1/3
2	2/3
3	3/3

2003 年國際物理奧林匹亞競賽國家代表隊決選研習營 實驗模擬試題(一)

一、注意事項：

- (一)實驗試題與報告紙共九頁(不含封面)，並且內附有方格紙四張。另外有數張 A4 紙。
- (二)實驗報告除了要用文字述說實驗過程，仍應繪圖說明測量方法，且圖中標明各項器材相關位置及待測的物理量。
- (三)數據分析應記錄於報告紙中，報告紙背面也可以書寫，但請註明。
- (四)實驗用的電源是 110V，60Hz 的交流電，在沒有量測數據時，請務必將振盪器電源關閉，每次使用時間不超過 20 秒。

二、實驗器材：(請先清點實驗器材，若有不足，請即刻告知評審)

器材名稱	數量	器材名稱	數量
光橋附滑軌(上有螺絲)	一支	砝碼	數個
小刀(或剪刀)	一支	螺絲起子	一個
振盪器(附插頭與開關)	一個	細線	1.5 公尺
滑輪	一只	膠帶	一只

三、實驗說明：

此實驗的目的是利用所提供的器材與繩波的特性，測量細繩每單位長度的質量。實驗共分成三部分：

第一部份是將振盪器振動方向與細繩平型的方式進行實驗，實驗數據列表並繪圖，分析出細繩單位長度的質量。

第二部份是將振盪器振動方向與細繩垂直的方式進行實驗，實驗數據列表並繪圖，分析出細繩單位長度的質量。

第三部份是討論第一部份與第二部份實驗方法中所得之結果。

四、實驗量測與報告：

- (一)將振盪器振動方向與細繩平行的方式進行實驗，求細線單位長度的質量。請說明實驗的方法與實驗步驟，必要時請繪圖說明。實驗數據要以列表和繪圖的方式呈現，並由其中分析出細繩單位長度的質量。

- (1) 實驗設置繪圖：5 分
- (2) 說明實驗依據的原理和數學計算式，條列實驗的步驟：10 分
- (3) 表列數據與繪圖：15 分（請用方格紙）
- (4) 結果與誤差分析：10 分

(二) 將振盪器振動方向與細繩垂直的方式進行實驗。請說明實驗的方法與實驗步驟，必要時請繪圖說明。實驗數據要以列表和繪圖的方式呈現，並由其中分析出細繩單位長度的質量。

- (1) 表列數據與繪圖：15 分
- (2) 結果與誤差分析：10 分

(三) 討論第一部份與第二部份振盪器與細線平行和垂直的實驗方法差異和原因，並分析兩者所得的結果。

- (1) 描述上述兩部份，在實驗上觀測到的差異：5 分
- (2) 解釋第一部份與第二部份所觀測到的差異：5 分

2003年國際物理奧林匹亞競賽 國家代表隊決選研習營

實驗模擬試題(二)

2003年4月3日

考試時間：150分鐘

- 一、本試題滿分為七十五分。
- 二、在指定的答案紙上作答。
- 三、在每一頁答題紙的頂端寫明：

- 題號
- 該題所用答題紙之頁碼
- 該題所用答題紙的總頁數

例(以第一題用了三頁紙為例)：

1	1/3
2	2/3
3	3/3

2003 年國際物理奧林匹亞競賽國家代表隊決選研習營 實驗模擬試題(二)

一、題目：以電解法測定 e/k_B 值

二、器材：

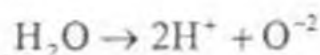
- | | |
|--------------|-------------|
| (1) 鋼球一顆。 | (7) 滴管一支。 |
| (2) 接線四條 | (8) 垂直支架一具。 |
| (3) 釣魚線一條。 | (9) 一個數位碼錶。 |
| (4) 鋼片電極二片。 | (10) 美工刀一支。 |
| (5) 白色修正液一瓶。 | (11) 膠帶一卷。 |
| (6) 多功能電錶一具。 | (12) 剪刀一把。 |
- (13) 500cc 燒杯一個和水一壺。
(14) 一支標示有未知刻度的試管。
(15) 電源供應器一具 (0~50V, 最大輸出電流 5A)。
(16) 木製的試管夾一個, 用以固定試管, 使保持垂直。

※注意：(1) 在方格紙和實驗器材(例如試管等)上所標示的刻度線，其間隔皆相同，
但不是以毫米作為刻度單位。

(2) 電源供應器不可超載(使用時，當面板上的紅燈亮時即表示超載)。

三、原理：

水的電解反應式如下：



當浸在水中的兩電極通有電流時，水就會發生電解反應。假設在兩電極處生成的氣體皆為理想氣體。電解反應所產生的氣體之一，收集在一個標有未知刻度的試管中。由電荷移轉的總電量和試管中所收集的氣體體積，可定出 e/k_B 值，其中 e 是電子電量，而 k_B 是波茲曼常數。

四、說明：

本實驗分為兩部分：

A 部分：利用單擺的週期，校準試管上所標示的未知刻度。校準的結果將用在 B 部分。

B 部分：利用水的電解反應，定出物理量 e/k_B 的數值。

- 組裝電解實驗器材，並適當地裝置試管，用以收集在電解過程中，其中一個電極所產生的氣體。
- 導出一數學式，可表達實驗中所測得的三個物理量(時間 t 、電流 I 、和液面高度差 Δh)之間的關係。為簡單起見，你可假設在實驗過程中，試管中的氣體壓力保持不變。
- 定出 e/k_B 之值。

2004年國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊決選研習營

筆試(二)試題

2004年4月7日 14:00-17:00

- 一、本試題共五大題，每大題二十分，總分一百分。
- 二、考試時間三小時。
- 三、在指定的答案紙上作答。
- 四、可使用無程式掌上型計算機。

2004 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試

決選研習營筆試(二)試題

本試題共有計算題五大題，每題 20 分，合計 100 分。

一、DC 和 AC 的電路分析

(a) 在圖 1a 中每個電阻值均為 R ，求 AB 兩點之間的電阻。

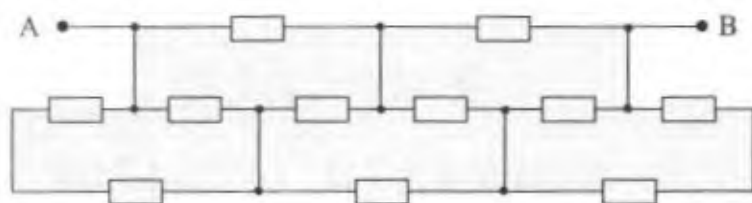


圖 1a

(b) 一帶通濾波器如圖 1b 所示，設 $V_{in} = V_0 \cos \omega t$ ，式中 V_0 為定值，頻率 ω 可調度：

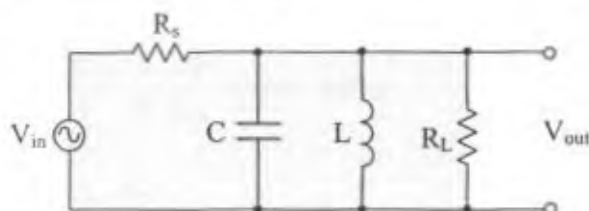


圖 1b

(i) 當 ω 為何值時，輸出電壓 V_{out} 的振幅為最大？其振幅為何？

(ii) 當 R_L 電阻所消耗的平均功率為其最大值的一半時， ω 為何？

(iii) 帶通濾波器的頻寬定義為(ii)小題中兩個頻率解的差值 $\Delta f = \frac{\Delta \omega}{2\pi}$ 。求此濾波器的

頻寬為何？

二、線圈在磁場中的運動

如圖 2 所示，強度為 B 的均勻磁場垂直於紙面（紙面為水平面），且磁場僅侷限於邊長為 w 的正方形內。在磁場的左邊，有一長度遠大於 w ，但寬度 b 小於 w 的矩形線圈，位於一垂直於磁場的光滑水平面上。此線圈的質量為 m ，自感為 L ，電阻為 R 。在時刻 $t=0$ 時，線圈右方的短邊 MN 位於正方形的正中央，且此時線圈以平行於正方形磁場一邊的初速 v_0 射出。假設在運動過程中，線圈的 MN 邊一直留在磁場內，回答下列問題：

(a) 導出該線圈在磁場中的運動方程式。

(b)若線圈的電阻很小，可以忽略不計，證明該線圈作簡諧運動，並求其運動週期。

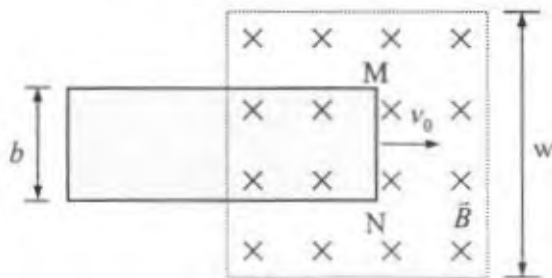


圖 2

三、帶電質點在電磁場中的運動

如圖 3 所示，一帶正電 q 、質量為 m 的質點，被限制在 $x-y$ 的水平面上運動。圖中 $x \leq 0$ 的區域為真空，電子無法進入，故可將 $x \leq 0$ 的區域視為一個質量很大的硬牆。假設質點與其發生的碰撞，為完全彈性碰撞，且碰撞時間極短，可以忽略，回答下列問題：

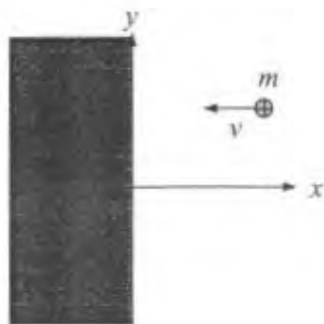


圖 3

(a)今在 $x-y$ 平面上施加一強度為 B 的均勻磁場，方向為向上垂直於紙面。若質點的起始位置為 (x_0, y_0) ，其初速度為 $(v_x, v_y) = (v, 0)$ ，試求該質點的平均速度為何？

(b)現除了(a)小題的磁場 B 之外，再加上一強度為 E 的均勻電場，其方向為 $+x$ 方向，並假設質點在起始時處於靜止狀態，試求該質點的平均速度為何？

(c)承(b)小題，假設在外加有電磁場的 $x-y$ 平面上，不是僅有一個質點，而是存在有許多其它的質點。這些質點之間會互相碰撞，其結果相當於個別的質點受到一阻力 $\vec{F} = -\frac{\vec{v}}{\tau}$ 的作用，式中 \vec{v} 為質點的瞬時速度， τ 為平均碰撞時間，試求各質點的平均速度為何？

四、帶電絕緣球殼在磁場中的轉動效應：

(a)有一質量為 m 、半徑為 r 的絕緣球殼（球殼的厚度與 r 相較，可以忽略不計），其外表面均勻分佈有總電量為 q 的正電荷。取球心為坐標原點，球殼可沿 z 軸自由旋轉，已知其起始的角速度為零，且球殼與轉軸之間的摩擦力可以忽略。現外加一沿 $+z$ 方向的均勻磁場，其強度由零漸增至 B 。試問球殼最後可獲得的角速度為何？

(b)承上題，若有兩相同的球殼，其球心皆在 z 軸上且相距恆為 d ，且 $d \gg 2r$ 。當沿 z 軸的磁場增至 B 時，則兩球殼之間的電磁力為何？

【註】：(1)球殼繞其直徑的轉動慣量 $I = \frac{2}{3}mr^2$ 。

(2) 你也許會用到這個積分式： $\int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}$ 。

(3) 已知位於原點之磁矩，在 z 軸上所產生的磁場 $B(z) = \left(\frac{\mu_0}{2\pi}\right) \frac{\mu}{z^3}$ 。

五、量子能階

(a) 一質量為 m 的粒子，在位能場 $U(r) = F_0 r$ (F_0 為大於零的常數) 中作等速率圓周運動。若其角動量完全遵守波耳原子模型的量子化條件，試求

(i) 該粒子的能階；

(ii) 若該粒子從第七受激態回復至基態時，所放射的光子頻率為何？以 m 、 F_0 、和卜朗克常數 h 表示之。

(b) 同(a)小題，但粒子所受之位能場改為 $U(r) = V_0 \left(\frac{r}{a}\right)^N$ ，式中 N 和 a 皆正值常數。試

求

(i) 該粒子的能階；

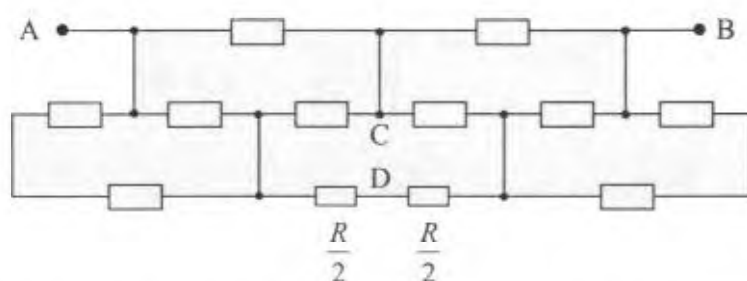
(ii) 當 $N \rightarrow \infty$ 時，其能階為何？並討論其物理意義。

2004 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試

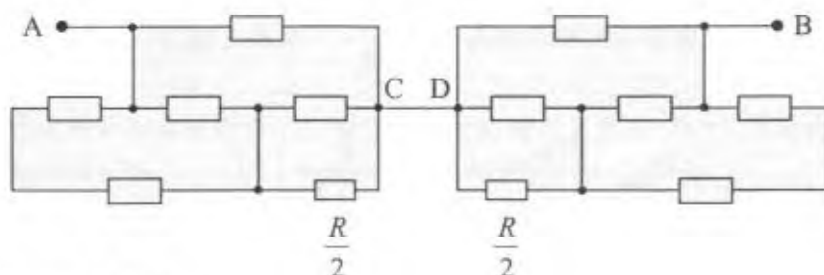
決選研習營筆試(二)試題參考解答

一、解：

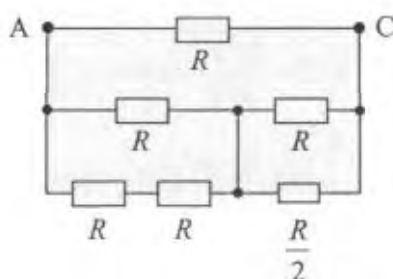
(a) 試題中圖 1a 所示的電路，可改畫成下圖。



由對稱性可知 C 點和 D 點的電位相同，即 C 和 D 之間的電位差為零，故可將 CD 兩點連接而得下圖。

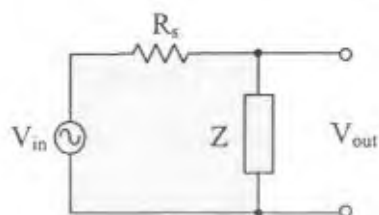


AC 之間可以看成是



由串、並聯電阻公式可得 A 和 C 之間的電阻值為 $\frac{R}{2}$ ，故 A 和 B 之間的電阻值為 R 。

(b) 原電路可等效為



$$Z^{-1} = Z_C^{-1} + Z_L^{-1} + R_L^{-1} = j\omega C + \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{R_L} = \frac{-\omega^2 LCR_L + R_L + j\omega L}{j\omega LR_L}$$

$$Z = \frac{j\omega LR_L}{j\omega L + R_L(1 - \omega^2 LC)} = \frac{\omega LR_L}{\omega L - jR_L(1 - \omega^2 LC)}$$

$$V_{out} = \frac{Z}{R_s + Z} V_{in}, \quad V_{in} = V_0 e^{j\omega t}$$

$$|V_{out}|^2 = \left| \frac{Z}{R_s + Z} \right|^2 |V_{in}|^2 = \frac{1}{\left| 1 + \frac{R_s}{Z} \right|^2} V_0^2$$

$$\Rightarrow \frac{|V_{out}|^2}{V_0^2} = \frac{R_L^2}{(R_s + R_L)^2 + \frac{R_s^2 R_L^2}{\omega^2 L^2} (1 - \omega^2 LC)^2}$$

(i) 當 $\omega^2 LC = 1$ 或 $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ 時, $|V_{out}|$ 為極大值, 其值為 $|V_{out}|_{\max} = \left(\frac{R_L}{R_s + R_L} \right) V_0$ 。

(ii) R_L 電阻的平均耗損功率為 $\bar{P} = \frac{|V_{out}|^2}{2R_L}$, 其最大值為

$$(\bar{P})_{\max} = \frac{|V_{out}|_{\max}^2}{2R_L} = \frac{1}{2R_L} \left(\frac{R_L}{R_s + R_L} \right)^2 V_0^2$$

若 $\bar{P} = \frac{1}{2} (\bar{P})_{\max}$, 則

$$\frac{1}{2R_L} \cdot \frac{R_L^2 V_0^2}{(R_s + R_L)^2 + \frac{R_s^2 R_L^2}{\omega^2 L^2} (1 - \omega^2 LC)^2} = \frac{1}{2R_L} \left(\frac{R_L}{R_s + R_L} \right)^2 V_0^2$$

$$\Rightarrow (R_s + R_L)^2 = \frac{R_s^2 R_L^2}{\omega^2 L^2} (1 - \omega^2 LC)^2$$

$$\Rightarrow R_s R_L (1 - \omega^2 LC) = \pm \omega L (R_s + R_L)$$

設 $x \equiv \sqrt{\omega^2 LC} = \frac{\omega}{\omega_0}$, 式中 $\omega_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}$, 以之代入上式, 可得

$$R_s R_L (1 - x^2) = \pm x \sqrt{\frac{L}{C}} (R_s + R_L)$$

$$\Rightarrow x^2 \pm 2 \left(\sqrt{\frac{L}{C}} \frac{R_s + R_L}{2R_s R_L} \right) x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = \mp \left(\sqrt{\frac{L}{C} \frac{R_s + R_L}{2R_s R_L}} \pm \sqrt{\frac{L}{C} \left(\frac{R_s + R_L}{2R_s R_L} \right)^2 + 1} \right)$$

因為 x 必須取正值，所以 $x = \sqrt{\frac{L}{C} \left(\frac{R_s + R_L}{2R_s R_L} \right)^2 + 1} \pm \sqrt{\frac{L}{C} \left(\frac{R_s + R_L}{2R_s R_L} \right)}$ ，得

$$\omega_{\pm} = \omega_0 \left[\sqrt{\frac{L}{C} \left(\frac{R_s + R_L}{2R_s R_L} \right)^2 + 1} \pm \sqrt{\frac{L}{C} \left(\frac{R_s + R_L}{2R_s R_L} \right)} \right]$$

此帶通濾波器的頻寬為

$$\Delta f = \frac{\omega_+ - \omega_-}{2\pi} = \frac{\omega_0}{2\pi} \sqrt{\frac{L}{C} \left(\frac{R_s + R_L}{R_s R_L} \right)} = \frac{1}{2\pi C} \left(\frac{R_s + R_L}{R_s R_L} \right)$$

二、解：

(a) 設線圈在某一時刻的速度為 v ，感應電流為 I ，則線圈的總能量 E 為

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}LI^2 \quad (1)$$

由於線圈的電阻所消耗的功率為 I^2R ，故

$$\frac{dE}{dt} = mv \frac{dv}{dt} + LI \frac{dI}{dt} = -I^2R \quad (2)$$

當線圈在磁場中向右運動時，其 MN 邊所受的磁力為 $F = -IbB$ （方向向左），故線圈的運動方程式為

$$m \frac{dv}{dt} = -IbB \quad (3)$$

由(3)式得 $I = -\left(\frac{m}{bB}\right) \frac{dv}{dt}$ ，將之代入(2)式，整理後得線圈在磁場中的運動方程式為

$$\frac{d^2v}{dt^2} = -\left(\frac{b^2B^2}{mL}\right)v - \left(\frac{R}{L}\right)\frac{dv}{dt} \quad (4)$$

(b) 若線圈的電阻很小，可以忽略，則由(4)式可得

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \left(\frac{b^2B^2}{mL}\right)v = 0 \quad (5)$$

上式可解得 $v = v_0 \cos \omega t$ ，式中 $\omega = \sqrt{\frac{b^2B^2}{mL}}$ 。若取線圈 MN 邊的起始位置作為原點，

則由 $\frac{dx}{dt} = v$ ，解得該邊的位置坐標 $x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$ ，顯示線圈作簡諧運動，且其運動

$$\text{週期為 } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{mL}{b^2 B^2}} \text{。}$$

【另解】：

(a) 當線圈在磁場中運動時，在線圈內所產生的感應電動勢為

$$\varepsilon = L \frac{dI}{dt} + IR = \frac{d\phi}{dt} \quad (6)$$

式中 ϕ 為通過線圈的磁通量。若線圈的速度為 v ，則在 dt 時間內，線圈內的磁通變化量為 $d\phi = BdA = B(bvdt)$ 。將之代入(5)式，得

$$L \frac{dI}{dt} + IR = bBv \quad (7)$$

當線圈在磁場中向右運動時，其 MN 邊所受的磁力為 $F = -IbB$ (方向向左)，故線圈的運動方程式為

$$m \frac{dv}{dt} = -IbB \quad (8)$$

由(8)式得 $I = -\left(\frac{m}{bB}\right) \frac{dv}{dt}$ ，將之代入(7)式，整理後得線圈在磁場中的運動方程式為

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = -\left(\frac{b^2 B^2}{mL}\right)v - \left(\frac{R}{L}\right) \frac{dv}{dt} \quad (9)$$

所得結果和(4)式完全相同。

(b) 解法和前相同。

三、解：

(a) 帶電質點在均勻磁場中可作圓周運動，其所需的向心力由磁力所提供，即

$$\frac{mv^2}{R} = qvB \Rightarrow R = \frac{mv}{qB}$$

式中 R 為圓運動的半徑。因此質點的運動狀況，可分成下列兩種：

(i) 若 $x_0 > R$ ，則質點可作完整的圓運動，其平均速度為零。

(ii) 若 $x_0 < R$ ，則質點無法作完整圓周運動，形成所謂的跳躍軌道 (Skipping orbits)，如右圖所示。質點在 x 和 y 方向的速度可分別計算如下：

由圖上的軌跡可看出，質點沿 $+x$ 和 $-x$ 方向的速度分量成對稱，故 $\langle v_x \rangle = 0$ 。

沿 y 方向的速度分量 $\langle v_y \rangle = \frac{-AA'}{t}$ ，式中的 t 為質點從 A 點沿不完整的圓軌跡，運動至 A' 點所經歷的時間。參考下右圖，

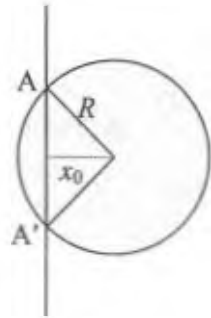


可得

$$t = T \left(\frac{2\pi - 2\cos^{-1}(x_0/R)}{2\pi} \right)$$

$$\overline{AA'} = 2\sqrt{R^2 - x_0^2}$$

式中 T 為質點繞行一完整圓周的時間，即 $T = \frac{2\pi R}{v}$ 。由上兩式可得



$$\langle v_x \rangle = - \left(\frac{2\sqrt{R^2 - x_0^2}}{1 - \frac{1}{\pi} \cos^{-1}(x_0/R)} \right) \cdot \frac{v}{2\pi R} = - \frac{v\sqrt{1 - (x_0/R)^2}}{\pi - \cos^{-1}(x_0/R)}$$

(b) 質點在電磁場中的運動方程式為 $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = m \frac{d\vec{v}}{dt}$ ，沿 x 和 y 方向的分量分別為

$$m \frac{dv_x}{dt} = qE + qv_y B = qB \left(v_y + \frac{E}{B} \right) \quad (1)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = -qBv_x \quad (2)$$

設 $\omega \equiv \frac{qB}{m}$ ，上二式可改寫為

$$\frac{dv_x}{dt} = \omega \left(v_y + \frac{E}{B} \right) \quad (3)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\omega v_x \quad (4)$$

由(3)和(4)兩式可得

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = \omega \frac{dv_y}{dt} = -\omega v_x \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 v_x}{dt^2} + \omega^2 v_x = 0 \quad (5)$$

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} = -\omega \frac{dv_x}{dt} = -\omega^2 \left(v_y + \frac{E}{B} \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 v_y}{dt^2} + \omega^2 \left(v_y + \frac{E}{B} \right) = 0 \quad (6)$$

(5)和(6)式顯示 v_x 和 v_y 的解，具有簡諧運動的函數形式，即

$$v_x(t) = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t \quad (7)$$

$$v_y(t) + \frac{E}{B} = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad (8)$$

代入起始條件：當 $t=0$ 時， $v_x = v_y = 0$ ，得 $A_1 = 0$ ， $C_1 = \frac{E}{B}$ ，故

$$v_x(t) = A_2 \sin \omega t \quad (7)$$

$$v_y(t) = \frac{E}{B}(\cos \omega t - 1) + C_2 \sin \omega t \quad (8)$$

將(7)式代入(3)式，得

$$A_2 \omega \cos \omega t = \omega \left[\frac{E}{B}(\cos \omega t - 1) + C_2 \sin \omega t + \frac{E}{B} \right] = \omega \frac{E}{B} \cos \omega t + C_2 \omega \sin \omega t$$

$$\Rightarrow \left(A_2 - \frac{E}{B} \right) \omega \cos \omega t - C_2 \omega \sin \omega t = 0$$

上式適用於所有的時刻 t ，故 $\cos \omega t$ 和 $\sin \omega t$ 的係數必須分別為零，故得 $A_2 = \frac{E}{B}$ ，

$C_2 = 0$ 。(7)和(8)兩式可改寫為

$$v_x(t) = \frac{E}{B} \sin \omega t \quad (9)$$

$$v_y(t) = \frac{E}{B}(\cos \omega t - 1) \quad (10)$$

將(9)和(10)兩式分別積分，並假設質點的起始位置為 (x_0, y_0) ，可得

$$x(t) = x_0 + \frac{E}{B\omega}(1 - \cos \omega t) \quad (11)$$

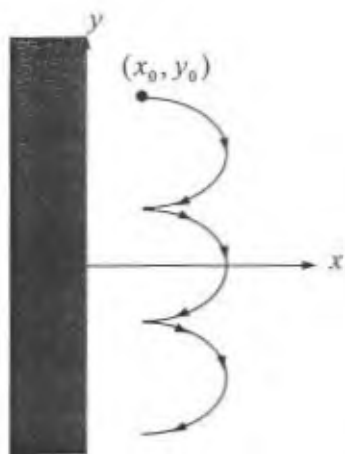
$$y(t) = y_0 - \frac{Et}{B} + \frac{E}{B\omega} \sin \omega t \quad (12)$$

質點的運動軌跡類似跳躍軌道 (skipping orbits)，但不會碰觸 $x=0$ 的邊界，如右圖所示。由(9)和(10)兩式可得質點的平均速度為

$$\langle v_x \rangle = 0$$

$$\langle v_y \rangle = -\frac{E}{B}$$

(c) 質點所受的阻尼力 $\vec{F} = -\frac{\vec{v}}{\tau}$ ，其大小和質點的速度成正比



比，但方向和質點的速度相反，因此除了質點開始運動後的一小段時間外，質點速度最後會趨近終端速度 \vec{v}^∞ ，此時質點的加速度為零，所以平均速度等於 \vec{v}^∞ 。質點的運動方程式可將(1)和(2)式改寫為

$$m \frac{dv_x}{dt} = -\frac{v_x}{\tau} + qE + qv_y B \quad (13)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = -\frac{v_y}{\tau} - qBv_x \quad (14)$$

當質點達到終端速度時， $\frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_y}{dt} = 0$ ，得

$$-\frac{v_x^m}{\tau} + qE + qv_y^m B = 0 \quad (15)$$

$$-\frac{v_y^m}{\tau} - qBv_x^m = 0 \quad (16)$$

由(15)和(16)兩式可解得

$$\langle v_x \rangle = v_x^m = \frac{\tau q E}{1 + \tau^2 q^2 B^2}$$

$$\langle v_y \rangle = v_y^m = -\frac{\tau^2 q^2 E B}{1 + \tau^2 q^2 B^2}$$

四、解：

(a)如右圖所示，考慮 θ 至 $\theta + d\theta$ 之間的環形電荷，通過

該環截面的磁通量為 $B\pi(r\sin\theta)^2$ ，當沿 z 方向的外加磁場 \bar{B} 隨時間變化時，產生環形的感應電場，由法拉第定律可得感應電動勢為

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\pi(r\sin\theta)^2 \frac{dB}{dt}$$

因此在環上各點在切線方向的電場為

$$E = \frac{\varepsilon}{2\pi r \sin\theta} = -\frac{1}{2} r \sin\theta \frac{dB}{dt}$$

環上的每一個電荷皆受有該電場的作用力，方向為電荷所在位置的切線方向。設此環上的電量為 dq ，因環的表面積為 $(2\pi r \sin\theta) \cdot r d\theta = 2\pi r^2 \sin\theta d\theta$ ，故

$$dq = \frac{q}{4\pi r^2} dS = \frac{q}{4\pi r^2} \cdot 2\pi r^2 \sin\theta d\theta = \frac{1}{2} q \sin\theta d\theta$$

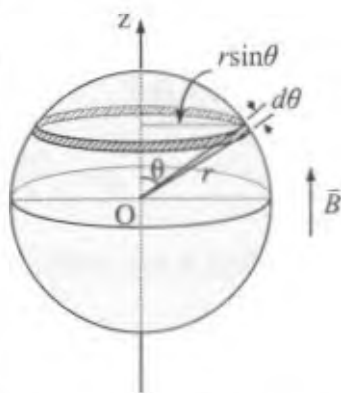
該環所受的力矩為

$$\begin{aligned} d\tau &= (r \sin\theta)(dq)E \\ &= (r \sin\theta) \left(\frac{1}{2} q \sin\theta d\theta \right) \left(-\frac{1}{2} r \sin\theta \frac{dB}{dt} \right) \\ &= -\frac{1}{4} q r^2 \left(\frac{dB}{dt} \right) \sin^3 \theta d\theta \end{aligned}$$

將上式積分可得作用球殼的總力矩為

$$\tau = -\frac{1}{4} q r^2 \left(\frac{dB}{dt} \right) \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = -\frac{1}{4} q r^2 \left(\frac{dB}{dt} \right) \cdot \frac{4}{3} = -\frac{1}{3} q r^2 \left(\frac{dB}{dt} \right)$$

利用轉動方程式 $\tau = I \frac{d\omega}{dt}$ ，式中 $I = \frac{2}{3} m r^2$ 為球殼繞 z 軸的轉動慣量，可得



$$I \frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{3}qr^2 \left(\frac{dB}{dt} \right) \Rightarrow d\omega = -\left(\frac{q}{2m} \right) dB$$

題設球殼的起始角速度為零，將上式積分可得球殼最後所獲得的角速度為

$$\omega = -\frac{2qB}{m}$$

式中的負號表示球殼繞順時鐘方向轉動（或繞負 z 軸轉動）。

(b) 帶電球殼因旋轉而有磁矩。因電流迴路的磁矩為電流和迴路面積的乘積。參考上圖，可先計算環形部分的磁矩，再積分求得球殼的總磁矩。

環形部分的電荷因轉動而生的電流為 $\frac{dq}{2\pi/\omega} = \frac{\frac{1}{2}q \sin\theta d\theta}{2\pi/\omega} = \frac{q\omega}{4\pi} \sin\theta d\theta$ ，故其磁矩為

$$d\mu = \left(\frac{q\omega}{4\pi} \sin\theta d\theta \right) \cdot \pi(r \sin\theta)^2 = \left(\frac{q\omega}{4} \right) r^2 \sin^3\theta d\theta$$

將上式積分，可得球殼的總磁矩為

$$\mu = \left(\frac{q\omega}{4} \right) r^2 \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \frac{1}{3}q\omega r^2$$

位於原點之磁矩，在 z 軸上所產生的磁場 $B(z)$ 為

$$B(z) = \left(\frac{\mu_0}{2\pi} \right) \frac{\mu}{z^3}$$

另一相同的帶電球殼所生的磁矩 μ 位在 $(0, 0, d)$ ，其所受的磁力為

$$F_M(d) = \mu \left(\frac{dB(z)}{dz} \right)_{z=d} = -\left(\frac{3\mu_0}{2\pi} \right) \frac{\mu^2}{d^4} = -\left(\frac{3\mu_0}{2\pi} \right) \frac{(q\omega r^2/3)^2}{d^4} = -\left(\frac{\mu_0}{6\pi} \right) \frac{q^2 r^4}{d^4} \omega^2$$

將 $\omega = -\frac{2qB}{m}$ 代入上式，可得

$$F_M(d) = -\left(\frac{2\mu_0}{3\pi} \right) \frac{q^4 r^4 B^2}{m^2 d^4}$$

兩球殼之間的靜電力 $F_E(d)$ 為

$$F_E(d) = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{q^2}{d^2}$$

所以兩球殼之間的電磁力為

$$F = F_E + F_M = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{q^2}{d^2} - \left(\frac{2\mu_0}{3\pi} \right) \frac{q^4 r^4 B^2}{m^2 d^4} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{d^2} \left(1 - \frac{8}{3} (\epsilon_0 \mu_0) \frac{q^2 r^4 B^2}{m^2 d^2} \right)$$

因為在真空中的光速 $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ ，故上式可寫為 $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{d^2} \left(1 - \frac{8q^2 r^4 B^2}{3m^2 d^2 c^2} \right)$ 。

五、解：

(a) 由於粒子的位能 $U(r) = F_0 r$ ，僅和徑向坐標 r 有關，因此粒子所受的力皆指向原點，其值為

$$F = -\frac{dU}{dr} = -F_0 \quad (F_0 > 0)$$

題設粒子在位能場中作等速圓周運動，故其所受的向心力為

$$\frac{mv^2}{r} = F_0 \quad (1)$$

粒子的角動量為

$$L = mvr = n\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

將(2)式代入(1)式，消去 v 後，得

$$r = \left(\frac{n^2 \hbar^2}{mF_0} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3)$$

粒子的總能量或能階為

$$\begin{aligned} E_n &= KE + PE = \frac{1}{2}mv^2 + F_0 r = \frac{1}{2}F_0 r + F_0 r = \frac{3}{2}F_0 r \\ &= \frac{3}{2}F_0 \left(\frac{n^2 \hbar^2}{mF_0} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \left(\frac{n^2 \hbar^2 F_0^2}{m} \right)^{\frac{1}{3}} \end{aligned} \quad (4)$$

粒子從第七受激態 ($n=8$) 回復至基態 ($n=1$) 時，所放射的光子能量為

$$hf = E_8 - E_1 = \frac{3}{2} \left(\frac{\hbar^2 F_0^2}{m} \right)^{\frac{1}{3}} \left(8^{\frac{2}{3}} - 1 \right) = \frac{9}{2} \left(\frac{\hbar^2 F_0^2}{m} \right)^{\frac{1}{3}}$$

光子的頻率為

$$f = \frac{3}{4\pi} \left(\frac{F_0^2}{m\hbar} \right)^{\frac{1}{3}} (4-1) = \frac{9}{4\pi} \left(\frac{F_0^2}{m\hbar} \right)^{\frac{1}{3}}$$

(b) 由於粒子的位能 $U(r) = V_0 \left(\frac{r}{a} \right)^N$ ，僅和徑向坐標 r 有關，因此粒子所受的力皆指向

原點，其值為

$$F = -\frac{dU}{dr} = -\frac{nV_0}{a^N} r^{N-1} \quad (5)$$

又粒子在位能場中作等速圓周運動，故其所受的向心力為

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{NV_0}{a^N} r^{N-1} \quad (6)$$

粒子的角動量為

$$L = mvr = n\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

將(7)式代入(6)式，消去 v 後，得

$$r^{N+1} = \frac{n^2 \hbar^2 a^N}{mNV_0}$$

粒子的總能量或能階為

$$E_n = \frac{1}{2}mv^2 + V_0 \left(\frac{r}{a}\right)^N = \left(\frac{N}{2} + 1\right)V_0 \left(\frac{r}{a}\right)^N = \left(\frac{N}{2} + 1\right) \left(\frac{n^2 \hbar^2 V_0^{2/N}}{mNa^2}\right)^{N/(N+2)} \quad (8)$$

當 $N \rightarrow \infty$ 時，粒子的能階為

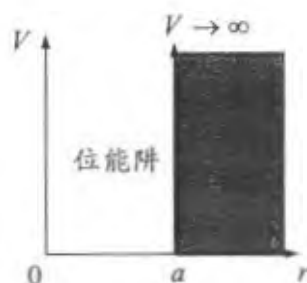
$$\lim_{N \rightarrow \infty} E_n = n^2 \left(\frac{\hbar^2}{2ma^2}\right) \quad (9)$$

物理意義：

若 $N \rightarrow \infty$ ，則位能函數變成如下式：

$$V(r) = \begin{cases} 0, & r < a \\ \infty, & r > a \end{cases}$$

$V(r)$ 的函數圖形如右圖所示，相當於一半徑為 a 的球形對稱位能阱，在阱內的位能為零，而在阱外的位能障礙高度則為無限大。這表示粒子的運動將被限制在這球形的空腔內（或是邊長為 a 的立方盒子內）。因此粒子的物質波將在這位能阱內形成駐波，其波函數的數學式為



$$\psi(x, t) = A \frac{\sin kr}{r} \sin \omega t$$

由於粒子無法穿透無限大的位能障礙，所以在 $r = a$ 處的波函數為零（相當於波節），即

$$\sin ka = 0 \Rightarrow ka = n\pi \quad \text{或} \quad k = \frac{n\pi}{a}$$

$$\text{粒子的能量為 } E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = n^2 \left(\frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}\right)$$

2004年國際物理奧林匹亞競賽 國家代表隊決選研習營

理論模擬試題

2004年4月6日 08:00-13:00

- 一、本試題共三大題，每大題五十分，總分一百五十分。
- 二、答卷時間五小時。
- 三、在指定的答案紙上作答。
- 四、在每題開始時請換用新頁。
- 五、在每一頁答題紙的頂端寫明：
 - 題號
 - 該題所用答題紙之頁碼
 - 該題所用答題紙的總頁數例(以第一題用了三頁紙為例)：

1	1/3
2	2/3
3	3/3

2004 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
決選研習營理論模擬試題

本試題共三大題，每大題五十分，總分一百五十分。

一、地球的形狀

地球並非是一個完美的圓球，因為在赤道處的半徑 r_E 比在兩極處的半徑 r_P 略大，其差值 $\Delta R = r_E - r_P \approx 21\text{km}$ 。已知地球的平均半徑 $R_e = \frac{r_E + r_P}{2} = 6.37 \times 10^3 \text{ km}$ ，質量 $M = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$ ，萬有引力常數 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$ ，回答下列三部分的問題，此三部分的問題可視為互相獨立。

第一部分：

假設有一質量為 m 的質點，位在以地心 O 點為坐標原點的位置向量 $\vec{r} = (r, \theta, \phi)$ ，如圖 1a 所示，其重力位能 V 可以表示為

$$V = -\frac{GMm}{r} \left[1 - \alpha \left(\frac{R_e}{r} \right)^2 (3 \cos^2 \theta - 1) \right] \quad (1)$$

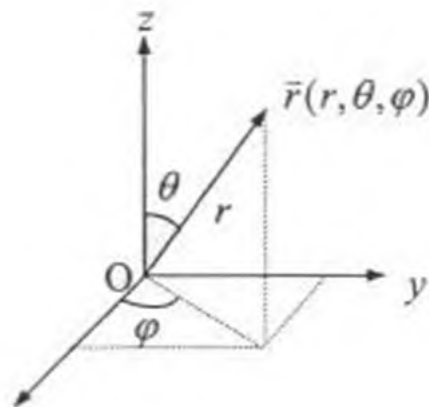


圖 1a

式中 r 大於或等於地球的半徑， θ 為 \vec{r} 和地球自轉軸（取為 z 軸）之間的夾角， α 為一常數。

- (a) 試求用於表示 α 近似值的數學式（取至 $\frac{\Delta R}{R_e}$ 的一次方）。
- (b) 承(a)小題，若已知 $\alpha = 5.40 \times 10^{-4}$ ，求 ΔR 的數值。

第二部分：

一般認為地球的扁平形狀，是因地球自轉所造成。假設地球在形成後的自轉角速率為 ω ，回答下列各小題：

- (c) 證明地球表面的形狀遵守下列的方程式

$$\left(1 - \frac{\omega^2 r^3}{GM} \right) x dx + z dz = 0 \quad (2)$$

上式中 x 、 z 、和 r 的定義見圖 1b， z 軸為地球的自轉軸， x - y 平面為赤道面。

- (d) 若將(2)式中的 r 以地球的平均半徑 R_e 取代，試求地球形狀的扁平率 e （以 ω 、 R_e 、 G 、及 M 表示之）。

【註】扁平率的定義 $e \equiv \frac{r_E - r_P}{r_E}$ 。

- (e) 若取 $\Delta R \approx e R_e$ ，試求 ΔR 的數值。

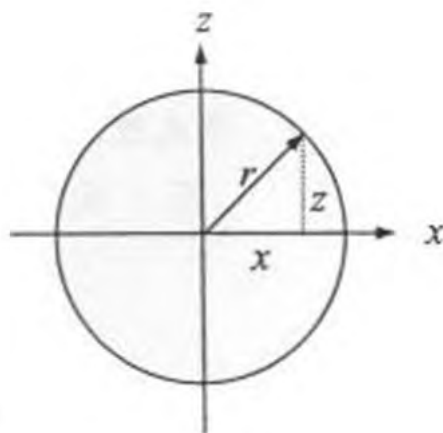


圖 1b

第三部分：

考慮一在赤道面上空，和地球自轉同步轉動的人造衛星。若在地球上將該衛星射入同步軌道時，其軌道高度 R_s （從地心算起）正確，但衛星進入軌道的速度 v_0 （方向垂直於徑向）比正確值 v_s 略小，其差值 $\Delta v = v_s - v_0$ ，回答下列問題：

(f) 若暫不考慮地球的扁平效應，求衛星的同步軌道高度 R_s 和其 v_s 的正確值（以 ω 、 G 、和 M 表示之）。

(g) 承(f)小題，由於此衛星進入軌道的速率不正確，因此將以近乎圓形的橢圓軌道運轉。設此橢圓軌道的遠地點和近地點的高度分別為 a 和 b ，試求用於表示 $\frac{a}{b}$ 近

似值的數學式（取至 $\frac{\Delta v}{v_s}$ 的一次方）。

(h) 若考慮地球的扁平效應，即衛星的重力位能為(1)式所給予，衛星仍在近乎圓形的橢圓軌道上運動。設衛星的徑向坐標 $r = R_s + \varepsilon$ ， $\varepsilon \ll R_s$ ，求 r 振盪的角頻率 ω_r ，並判斷衛星的軌道為開放或封閉？

二、熱電致冷效應

當電流 i 自導體 A 流向導體 B 時，通過兩導體接合面的電流載子會吸收或釋出熱能，使接合面的溫度降低或升高。每單位時間吸收或釋出的熱能 \dot{q} 為

$$\dot{q} = (\alpha_B - \alpha_A)Ti \quad (1)$$

式中 T 為接合面的絕對溫度， α_A 、 α_B 分別代表 A、B 二導體的賽貝克（Seebeck）係數。 \dot{q} 稱為帕耳帖（Peltier）熱，當吸收熱能時， \dot{q} 為正值。

由於帕耳帖熱，使圖 2a 所示的模組可作為冷凍機使用。以銅片連接 N 型和 P 型半導體晶粒的兩端面。通直流電流 i 之後，在上方的接合面處，熱被吸收，在下方的接合面處，熱被釋出。因此模組的上端溫度被冷卻為 T_c ，另一端溫度則被加熱至 T_h 。使用時，欲冷卻的物體可直接與冷端接觸，熱端則接散熱片。

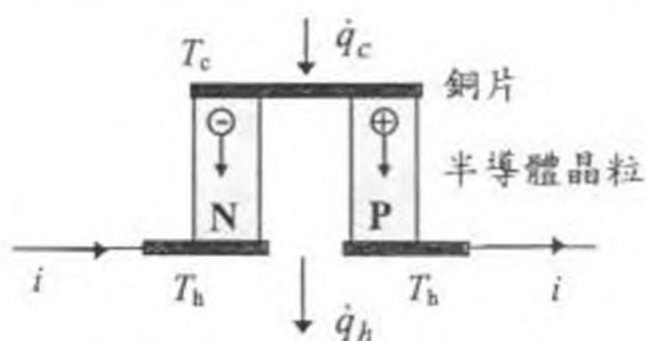


圖 2a

在冷端的抽熱能力，會因半導體晶粒內所產生的焦耳熱，及自熱端傳導至冷端的熱，而減少。因此(1)式經修正後，每單位時間自冷端抽出的熱能 \dot{q}_c 應為

$$\dot{q}_c = (\alpha_p - \alpha_n)T_c i - a(T_h - T_c) - bi^2 \quad (2)$$

式中 a 和 b 皆為大於零的常數。在(2)式中，我們忽略接合面及銅片的電阻，並假

設只在接合面處才跟外界有熱交換。N 型及 P 型半導體晶粒的熱導係數分別為 k_n 和 k_p ，電導係數分別為 σ_n 和 σ_p ，賽貝克係數分別為 α_n 和 α_p 。這些性質常數均假設與溫度無關。

(a) 已知模組中，每個半導體晶粒的長度為 L ，截面積為 A 。試求(2)式中的常數 a 和 b ，以 k_n 、 k_p 、 σ_n 、 σ_p 、 A 、和 L 表示之。

(b) 若 T_h 為定值，則 T_c 的最低值為何？應用表 1 的數據，計算當熱端溫度 $T_h = 300\text{K}$ 時， T_c 的最低值為何？

表 1

$\alpha_p - \alpha_n$ (V/K)	a (W/K)	b (Ω)
4.0×10^{-4}	2.0×10^{-3}	1.5×10^{-2}

利用多對 N 型及 P 型半導體晶粒相接，可增加冷卻能力，圖 2b 為 3 對模組熱電致冷器。

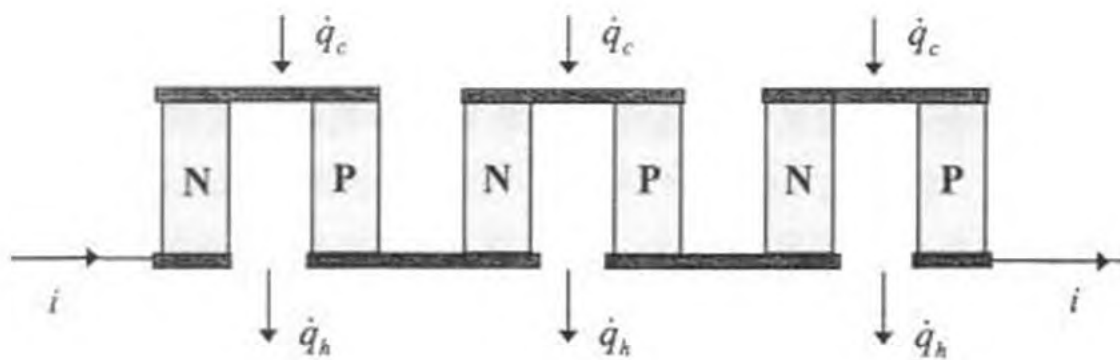


圖 2b

(c) 現欲利用 30 對模組致冷器，冷卻一個發熱功率為 2.0W 的雷射用二極體，使其維持 25°C 的運作溫度。已知二極體與致冷器的接觸熱阻為 2.5K/W ，致冷器的熱端溫度為 70°C ，應用表 1 中的數據，計算輸入致冷器的電流應為多少？

【註】熱阻的定義：

若一均勻平板的截面積為 A ，厚度為 L ，兩端面的溫度分別為 T_1 和 T_2

($T_1 > T_2$)，則每單位時間內通過該平板的热量為 $H = kA \left(\frac{T_1 - T_2}{L} \right)$ ，式中

k 為熱傳導係數。上式也可改寫為 $T_1 - T_2 = RH$ ，式中 $R = \frac{L}{kA}$ 稱為該物體

的熱阻 (Thermal Resistance)。

(d) 承(c)小題，此致冷器的性能係數(COP)為多少？

三、相對論的二維都卜勒效應公式

第一部分

如圖 3a 所示，一處於受激態 E_1 的靜止原子（靜質量為 m_0 ），放射出一頻率為 f_0 的光子後，本身回復至基態 E_0 （靜質量為 m'_0 ），但獲得一反衝的動量 \vec{p}' 。回答下列問題：

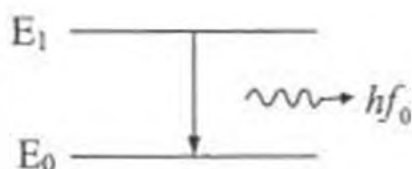


圖 3a

- (a) 此反衝動量 \vec{p}' 的大小和方向各為何？
 (b) 設 $Q_0 = m_0 c^2 - m'_0 c^2$ ，求反衝原子的動能 K ，以 Q_0 、 m'_0 或 m_0 表示之。
 (c) 試證光子的頻率 f_0 可寫成 $hf_0 = Q_0 \left(1 - \frac{Q_0}{2m_0 c^2} \right)$ 。

第二部分

繼續第一部分，如圖 3b 所示，設 m 和 \vec{p} 為一運動中原子的質量和動量，該原子放射出一個光子後，其質量和動量變為 m' 和 \vec{p}' 。設光子的頻率為 f' ，沿 \hat{n} 方向射出， \hat{n} 和原子的起始運動方向之間夾成 θ 角， \hat{n} 為單位向量，且設兩原子前後的動態質量差為 $Q' = mc^2 - m'c^2$ ，回答下列問題：

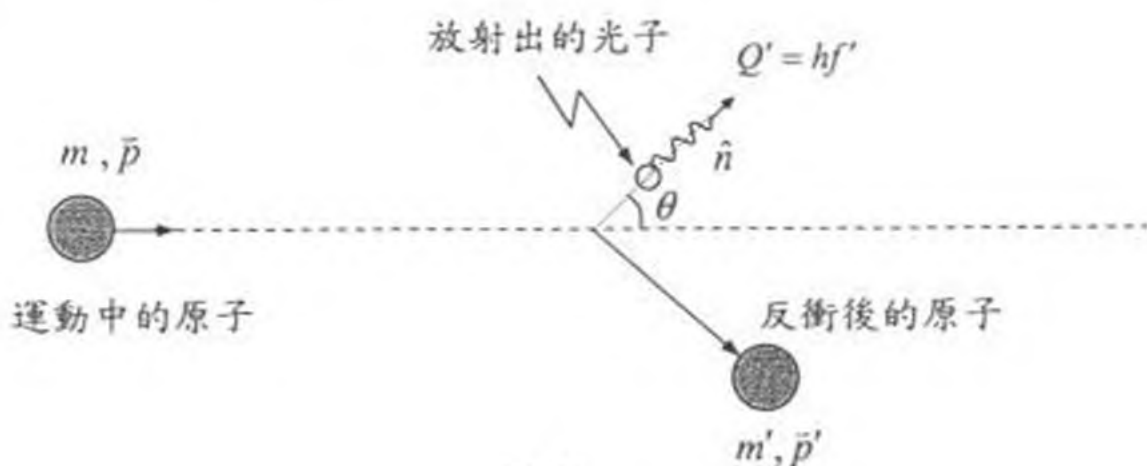


圖 3b

- (d) 寫出 m 、 m' 、和光子能量之間的關係式。
 (e) 寫出 \vec{p} 、 \vec{p}' 、和光子動量之間的關係式。
 (f) 設 $\beta = \frac{v}{c}$ ，式中 v 為原子的初速，試證 $f' = f_0 \left(\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta \cos \theta} \right)$ 。（註：此式為相對論的二維都卜勒效應公式。）

2004 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
決選研習管理論模擬試題參考解答

一、解：

第一部分：

(a) 質點 m 在北極處 ($r = r_p, \theta = 0^\circ$) 的重力位能為

$$V_p = -\frac{GMm}{r_p} \left[1 - 2\alpha \left(\frac{R_e}{r_p} \right)^2 \right] \quad (1)$$

在赤道處 ($r = r_E, \theta = \frac{\pi}{2}$) 的重力位能為

$$V_E = -\frac{GMm}{r_E} \left[1 + \alpha \left(\frac{R_e}{r_E} \right)^2 \right] \quad (2)$$

由於地球表面是一個重力位能的等位面，故 $V_p = V_E$ ，得

$$\frac{1}{r_p} - 2\alpha \left(\frac{R_e^2}{r_p^3} \right) = \frac{1}{r_E} + \alpha \left(\frac{R_e^2}{r_E^3} \right) \quad (3)$$

由地球的平均半徑 $R_e = \frac{r_E + r_p}{2}$ ，以及在赤道和兩極處的地球半徑的差值

$\Delta R = r_E - r_p$ ，可得 $r_E = R_e + \frac{1}{2}\Delta R$ 和 $r_p = R_e - \frac{1}{2}\Delta R$ 。因為 $\frac{\Delta R}{R_e} \ll 1$ ，故下列各量的近

似值保留至 $\frac{\Delta R}{R_e}$ 項，得

$$\frac{1}{r_E} = \left(R_e + \frac{1}{2}\Delta R \right)^{-1} \approx \frac{1}{R_e} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta R}{R_e} \right)$$

$$\frac{1}{r_p} = \left(R_e - \frac{1}{2}\Delta R \right)^{-1} \approx \frac{1}{R_e} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta R}{R_e} \right)$$

又
$$\frac{1}{r_E^3} = \left(R_e + \frac{1}{2}\Delta R \right)^{-3} \approx \frac{1}{R_e^3} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\Delta R}{R_e} \right)$$

$$\frac{1}{r_p^3} = \left(R_e - \frac{1}{2}\Delta R \right)^{-3} \approx \frac{1}{R_e^3} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\Delta R}{R_e} \right)$$

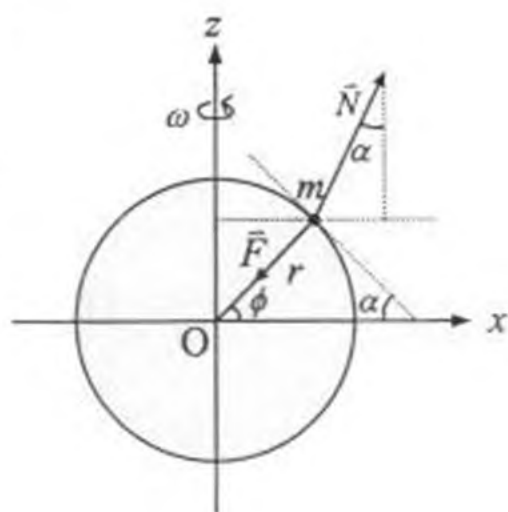
將以上的近似值代入(3)式，得

$$\alpha = \frac{\frac{\Delta R}{R_e}}{3 \left(1 + \frac{\Delta R}{R_e} \right)} \approx \frac{\Delta R}{3R_e} \quad (4)$$

(b) $\Delta R = 3\alpha R_e = 3 \times (5.40 \times 10^{-4}) \times (6.37 \times 10^3 \text{ km}) = 10.3 \text{ km}$

第二部分：

(c) 如右圖所示，考慮一附著在地球表面上質量為 m 的質點。此質點在地球引力 \vec{F} 及正向力 \vec{N} 的作用下，隨著地球的自轉，作半徑為 $r \cos \phi$ ，角速率為 ω 的圓周運動。地球引力 \vec{F} 的量值 $F = \frac{GMm}{r^2}$ ，方向指向地心。



質點作圓周運動所需的向心力為

$$m\omega^2 r \cos \phi = F \cos \phi - N \sin \alpha \quad (5)$$

在 z 方向上的力平衡條件為

$$F \sin \phi = N \cos \alpha \quad (6)$$

由圖上的幾何關係得

$$\cos \phi = \frac{x}{r}, \quad \sin \phi = \frac{z}{r}, \quad \tan \alpha = -\frac{dz}{dx} \quad (7)$$

將(6)式代入(5)式，消去 N ，可得

$$\frac{GMm}{r^2} \cos \phi = m\omega^2 r \cos \phi + \frac{GMm}{r^2} \tan \alpha \sin \phi \quad (8)$$

將(7)式代入(8)式，得證

$$\left(1 - \frac{\omega^2 r^3}{GM}\right) x dx + z dz = 0 \quad (9)$$

(d) 以 R_e 取代(9)式中的 r ，得

$$\left(1 - \frac{\omega^2 R_e^3}{GM}\right) x dx + z dz = 0 \quad (10)$$

將(10)式積分，可得

$$\left(1 - \frac{\omega^2 R_e^3}{GM}\right) x^2 + z^2 = c^2 \quad (11)$$

上式中的 c^2 為常數，且(11)式代表一個橢圓方程式，其半短軸 r_p 與半長軸 r_e 的比值為

$$\frac{r_p}{r_e} = \sqrt{1 - \frac{\omega^2 R_e^3}{GM}} \approx 1 - \frac{\omega^2 R_e^3}{2GM} \quad (12)$$

按扁平率的定義，得

$$e = \frac{r_e - r_p}{r_e} = \frac{\omega^2 R_e^3}{2GM} \quad (13)$$

(e) 將已知數值代入(13)式，得 $e = 1.71 \times 10^{-3}$ ，故 $\Delta R \approx e R_e = 11 \text{ km}$ 。

第三部分：

(f) 若不考慮地球的扁平效應，即地球為圓球形，且衛星進入同步軌道的高度 R_s 和其

速率 v_s 皆正確，則其軌道為圓形。 R_s 和 v_s 必須滿足下列二式：

$$mR_s\omega^2 = \frac{GMm}{R_s^2} \quad (14a)$$

$$v_s = \omega R_s \quad (14b)$$

解得

$$R_s = \left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{1/3} \quad (15a)$$

$$v_s = (GM\omega)^{1/3} \quad (15b)$$

(g) 由於 v_0 為衛星進入軌道時的初速，其值略小於正確值 v_s ，故進入點為橢圓軌道的遠地點，設 v_b 為衛星在近地點時的速度，則由角動量守恆定律得

$$v_0 a = v_b b \quad (16)$$

由力學能守恆定律得

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{a} = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{GMm}{b} \quad (17)$$

由(16)及(17)兩式及題設 $v_0 = v_s - \Delta v$ ，可得

$$\frac{a}{b} = \left(\frac{2GM}{v_0^2 a} - 1\right) \quad (18)$$

$$\frac{2GM}{v_0^2 a} \approx \frac{2GM}{(v_s - \Delta v)^2 R_s} \approx 2 + 4\left(\frac{\Delta v}{v_s}\right) \quad (19)$$

將(19)式代入(18)式，解得

$$\frac{a}{b} \approx 1 + 4\left(\frac{\Delta v}{v_s}\right) \quad (20)$$

(h) 由於同步衛星在赤道面的上空運轉，故在(1)式中代入 $\theta = \frac{\pi}{2}$ ，得其重力位能為

$$V = -\frac{GMm}{r} \left[1 + \alpha \left(\frac{R_e}{r}\right)^2\right] \quad (21)$$

設 $k = GMm$ ， $\beta = \alpha R_e^2$ ，則(21)式可改寫成

$$V = -\frac{k}{r} - \frac{k\beta}{r^3} \quad (22)$$

衛星在徑向上所受的力為

$$f(r) = -\frac{dV}{dr} = -\frac{k}{r^2} - \frac{3k\beta}{r^4} \quad (23)$$

衛星在徑向上的運動方程式為

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = f(r) \quad (24)$$

由角動量守恆定律得

$$mr^2\dot{\theta} = L \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2} \quad (25)$$

將(23)和(25)兩式代入(24)式，得

$$m\ddot{r} = \frac{L^2}{mr^3} - \left(\frac{k}{r^2} + \frac{3k\beta}{r^4} \right) \quad (26)$$

因衛星作近乎圓軌道的運動，故可將 $-\frac{3k\beta}{r^4}$ 項視為對圓周運動的一種微擾。令

$r = R_s + \varepsilon$ ，則(26)式變成

$$m\ddot{\varepsilon} = \frac{L^2}{m(R_s + \varepsilon)^3} - \frac{k}{(R_s + \varepsilon)^2} - \frac{3k\beta}{(R_s + \varepsilon)^4} \quad (27)$$

利用二項式展開，得

$$\frac{1}{(R_s + \varepsilon)^n} \approx \frac{1}{R_s^n} \left(1 - \frac{n\varepsilon}{R_s} \right) \quad (28)$$

將(28)式代入(27)式，整理後可得

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{k}{mR_s^3} \left(1 - \frac{12\beta}{R_s^2} \right) \varepsilon = -\frac{3k\beta}{mR_s^4} \quad (29)$$

設
$$\omega_r^2 = \frac{k}{mR_s^3} \left(1 - \frac{12\beta}{R_s^2} \right) = \frac{GM}{R_s^3} \left(1 - \frac{12\beta}{R_s^2} \right) \quad (31)$$

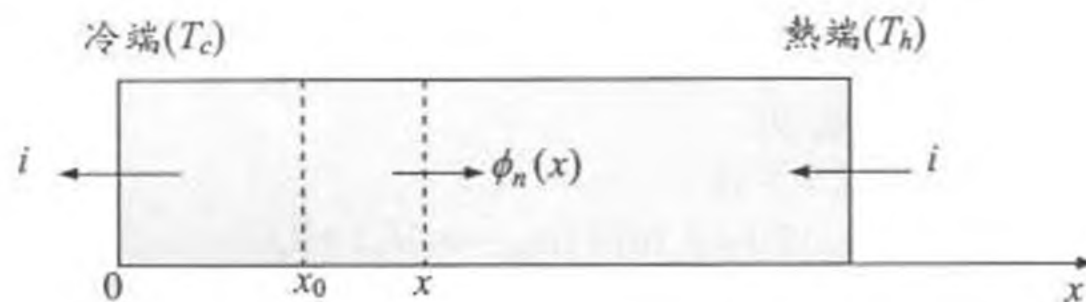
因 $\omega_r^2 > 0$ ，故衛星在徑向的振動角頻率為

$$\omega_r = \omega \left(1 - \frac{12\beta}{R_s^2} \right)^{1/2} \approx \omega \left(1 - \frac{6\beta}{R_s^2} \right) = \omega \left(1 - 6\alpha \frac{R_e^2}{R_s^2} \right) \quad (32)$$

因為 ω_r 與 ω 的比值並不等於兩個整數比，故衛星的軌道開放。

二、解：

(a)先考慮同時有熱流和電流的N型半導體晶粒，如下圖所示，



在截面 x 處，沿 x 方向傳導的熱流為 $\phi_n(x) = -k_n A \frac{dT}{dx}$ 。

N-型半導體晶粒的電阻為 $R_n = \frac{L}{\sigma_n A}$ 。

在 x_0 和 x 之間的區塊，電流 i 產生的焦耳熱為 $\left(\frac{x-x_0}{L} \right) i^2 R_n$ 。在穩定狀態時，就每單位時間而言，

(流出的熱能) - (流入的熱能) = (本身所產生的熱能)

$$\begin{aligned} \text{即} \quad \phi_n(x) - \phi_n(x_0) &= \left(\frac{x-x_0}{L} \right) i^2 R_n \\ -k_n A \frac{dT}{dx} &= \phi_n(x_0) + \left(\frac{i^2 R_n}{L} \right) (x-x_0) \end{aligned} \quad (1)$$

將上式對 x 積分，可得

$$-k_n A [T(x) - T(x_0)] = \phi_n(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{i^2 R_n}{L} \right) (x-x_0)^2$$

若取 $x_0 = 0, x = L$ ，則

$$-k_n A [T(L) - T(0)] = \phi_n(0)L + \frac{1}{2} \left(\frac{i^2 R_n}{L} \right) L^2 \quad (2)$$

將邊界條件： $T(L) = T_h$ 和 $T(0) = T_c$ ，代入(2)式，可得

$$\phi_n(0) = -k_n \frac{A}{L} (T_h - T_c) - \frac{1}{2} i^2 R_n \quad (3)$$

由於銅片及接合面的電阻可忽略，因此不需考慮二者的焦耳熱損失，且銅片處於均勻的溫度 T_c ，不會有熱流自一半導體晶粒傳導至另一晶粒。因此進入 N 型半導體冷端的熱流，應是來自周圍，或是經由晶粒本身。前者以 $\dot{q}_n(0)$ 表示之，後者就是 $-\phi_n(0)$ 。在穩定狀態時，設電流為 i ，則進入冷端的淨熱流，應等於接合面的熱吸收率，也就是 Peltier 熱：

$$\dot{q}_n(0) - \phi_n(0) = (\alpha_{Cu} - \alpha_n) T_c i \quad (\text{在冷端}) \quad (4)$$

式中 α_{Cu} 和 α_n 分別為銅片和 N 型半導體晶粒的 Seebeck 係數。

同理，對 P 型晶粒的分析，可得

$$R_p = \frac{L}{\sigma_p A}$$

$$\phi_p(0) = -k_p \frac{A}{L} (T_h - T_c) - \frac{1}{2} i^2 R_p \quad (5)$$

$$\dot{q}_p(0) - \phi_p(0) = (\alpha_p - \alpha_{Cu}) T_c i \quad (\text{在冷端}) \quad (6)$$

因此冷端的總吸熱率為

$$\dot{q}_c = \dot{q}_p(0) + \dot{q}_n(0)$$

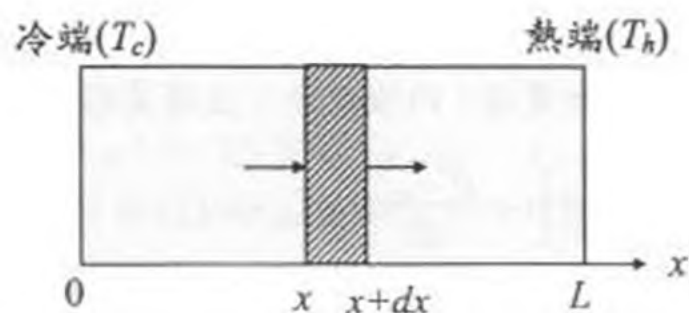
代入(3)，(4)，(5)和(6)式，可得：

$$\begin{aligned} \dot{q}_c &= (\alpha_p - \alpha_{Cu}) T_c i + \phi_p(0) + (\alpha_{Cu} - \alpha_n) T_c i + \phi_n(0) \\ &= (\alpha_p - \alpha_n) T_c i - (k_p + k_n) \frac{A}{L} (T_h - T_c) - \frac{1}{2} i^2 (R_p + R_n) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{可知} \quad a = (k_p + k_n) \frac{A}{L}, \quad b = \frac{1}{2} (R_p + R_n) = \frac{L}{2A} \left(\frac{1}{\sigma_p} + \frac{1}{\sigma_n} \right)$$

【另解】：

考慮半導體晶粒，取厚度為 dx 的一小段，如下圖所示：



在穩定狀態時，每單位時間內

(傳導出的熱流) - (傳導入的熱流) = (內部產生的熱能)

$$\begin{aligned} & \left(-kA \frac{dT}{dx} \right)_{x+dx} - \left(-kA \frac{dT}{dx} \right)_x = i^2 R \frac{dx}{L} \\ \Rightarrow & -kA \frac{d^2T}{dx^2} dx = i^2 R \frac{dx}{L} \\ \Rightarrow & -kA \frac{d^2T}{dx^2} = i^2 \frac{R}{L} \end{aligned} \quad (8)$$

將上式對 x 積分，並代入冷端 ($x=0$) 處的邊界條件： $-kA \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = \dot{q}_c$ 和 $T|_{x=0} = T_c$ ，

可得

$$-kA \frac{dT}{dx} - \dot{q}_c = i^2 \frac{R}{L} x \quad (9)$$

$$\Rightarrow -kA(T - T_c) - \dot{q}_c x = i^2 \frac{R}{2L} x^2 \quad (10)$$

在(9)和(10)兩式中，代入熱端 ($x=L$) 處的邊界條件： $-kA \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = \dot{q}_h$ 和 $T = T_h$ ，

可得

$$\dot{q}_h - \dot{q}_c = i^2 R \quad (11)$$

$$-kA(T_h - T_c) - \dot{q}_c L = i^2 \frac{R}{2} L \quad (12)$$

由(12)式可得

$$\dot{q}_c = -k \frac{A}{L} (T_h - T_c) - \frac{1}{2} i^2 R \quad (13)$$

試題圖 1 所示的模組，N 型和 P 型半導體晶粒的組合，對電阻而言為串聯，對熱導而言為並聯，因此(13)式可寫為

$$\dot{q}_c = -(k_p + k_n) \frac{A}{L} (T_h - T_c) - \frac{1}{2} i^2 (R_p + R_n) \quad (14)$$

加上帕帖耳熱的效應，上式可寫為：

$$\dot{q}_c = (\alpha_p - \alpha_n) T_c i - (k_p + k_n) \frac{A}{L} (T_h - T_c) - \frac{1}{2} i^2 (R_p + R_n) \quad (15)$$

(15)式和(7)式的結果完全相同。

(b)在冷端的吸熱率為

$$\dot{q}_c = \beta T_c i - a(T_h - T_c) - bi^2 \quad (16)$$

式中 $\beta = (\alpha_p - \alpha_n)$ 。將含電流 i 的項配方，並將其移到等號左邊，得

$$\dot{q}_c + b\left(i - \frac{\beta T_c}{2b}\right)^2 = \frac{\beta^2 T_c^2}{4b} + aT_c - aT_h \quad (17)$$

(17)式等號的右邊，對 T_c 而言，為一單調增加的函數。當等號左邊為極小值時， T_c 為最低。由於冷凍機冷端的抽熱率 $\dot{q}_c \geq 0$ ，可知當 $\dot{q}_c = 0$ 且 $i = \frac{\beta T_c}{2b}$ 時，(17)式左邊為極小值，也就是零。因此當 T_c 為最低值時，得

$$\frac{\beta^2 T_c^2}{4b} + aT_c - aT_h = 0 \quad (18)$$

若 T_h 為定值，則(18)式的正根即為最低的 T_c 值，即

$$T_{c,\min} = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4(\beta^2/4b)(aT_h)}}{2(\beta^2/4b)} = \frac{2ab}{\beta^2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\beta^2}{ab}\right)T_h} - 1 \right) \quad (19)$$

代入題設的數據，可得

$$\frac{\beta^2}{2ab} = \frac{(\alpha_p - \alpha_n)^2}{2ab} = \frac{(4.0 \times 10^{-4})^2}{2 \times 1.5 \times 10^{-2} \times 2.0 \times 10^{-3}} = 2.67 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$$

當 $T_h = 300 \text{ K}$ 時， T_c 的最低值為

$$T_{c,\min} = (\sqrt{1 + 2 \times 2.67 \times 10^{-3} \times 300} - 1) / (2.67 \times 10^{-3}) = 2.3 \times 10^2 \text{ K}$$

【另解】：

由(16)式可得

$$T_c = \frac{aT_h + bi^2 + \dot{q}_c}{\beta i + a} \quad (20)$$

欲使 T_c 最低，則 \dot{q}_c 必須為零，同時 T_c 對電流 i 必須為極小，也就是 $\frac{dT_c}{di} = 0$ ，即

$$\beta bi^2 + 2abi - \beta aT_h = 0$$

解得

$$i = \frac{a}{\beta} \left(\sqrt{1 + \frac{T_h \beta^2}{ab}} - 1 \right) \quad (21)$$

將(21)式代入(20)式，並令 $\dot{q}_c = 0$ ，可得最低的冷端溫度 $T_{c,\min}$ 為

$$T_{c,\min} = \frac{2T_h - \frac{2ab}{\beta^2} \left(\sqrt{1 + \frac{\beta^2}{ab} T_h} - 1 \right)}{\sqrt{1 + \frac{\beta^2}{ab} T_h}} = \frac{2ab}{\beta^2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\beta^2}{ab}\right)T_h} - 1 \right) = \frac{2b}{\beta} i \quad (22)$$

(22)式和(19)式完全相同。

(c) 冷端的溫度 $T_c = T_d - R_H \dot{q}_c$ ，式中 T_d 為二極體的運作溫度； R_H 為二極體與冷端的接觸熱阻。將題設的數據代入計算，得

$$T_c = 25 - 2.5 \times 2.0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$$

由試題的圖 2b，可知 N 對模組的抽熱率為單一對模組的 N 倍，故

$$\dot{q}_c = N [(\alpha_p - \alpha_n) T_c i - a(T_h - T_c) - bi^2] \quad (23)$$

將已知數據 $\dot{q}_c = 2.0 \text{ W}$ ， $N = 30$ ， $T_c = 20 \text{ }^\circ\text{C} = 293 \text{ K}$ ，和 $T_h = 70 \text{ }^\circ\text{C} = 343 \text{ K}$ ，代入上式，得

$$15i^2 - 117i + 167 = 0$$

$$i = \frac{117 \pm \sqrt{117^2 - 4 \times 15 \times 167}}{2 \times 15} \approx \frac{117 \pm 61}{30} \approx 1.9 \text{ A 或 } 5.9 \text{ A}$$

取較小的電流，以減少致冷器熱端排出的熱，得 $i = 1.9 \text{ A}$ 。

(d) 冷凍機的性能係數(COP)為

$$COP = \frac{\dot{q}_c}{\dot{W}} = \frac{\dot{q}_c}{\dot{q}_h - \dot{q}_c} \quad (24)$$

熱端的放熱率為

$$\dot{q}_h = N [(\alpha_p - \alpha_n) T_h i - a(T_h - T_c) + bi^2] \quad (25)$$

將(23)和(25)式，代入(24)式，得

$$COP = \frac{\dot{q}_c}{N[(\alpha_p - \alpha_n)(T_h - T_c)i + 2bi^2]}$$

代入數值，可得

$$COP = \frac{2.0}{30 \times [4.0 \times 10^{-4} \times (70 - 20) \times 1.8 + 2 \times 1.5 \times 10^{-2} \times 1.8^2]} = 0.5$$

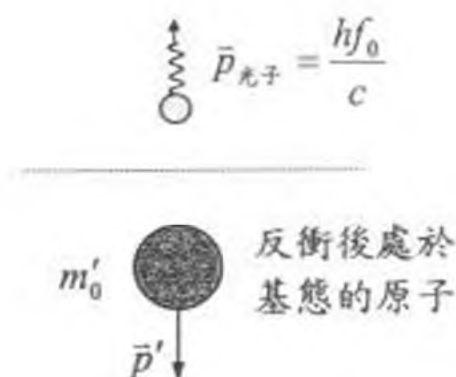
三、解：

第一部分

(a) 由動量守恆定律得

$$\vec{p}' + \vec{p}_{\text{光子}} = 0 \Rightarrow \vec{p}' = -\vec{p}_{\text{光子}}$$

反衝動量的大小為 $|\vec{p}'| = \frac{hf_0}{c}$ ，其方向
和光子的射出方向相反。



(b) 由能量守恆定律可得

$$m_0 c^2 = (m'_0 c^2 + K) + hf_0$$

式中 K 為粒子在反衝後的動能。利用相對論的能量-動量關係式，得

$$E'^2 = p'^2 c^2 + m_0'^2 c^4$$

$$\Rightarrow (m_0' c^2 + K)^2 = \left(\frac{hf_0}{c}\right)^2 c^2 + m_0'^2 c^4 = (hf_0)^2 + m_0'^2 c^4$$

題設 $Q_0 = m_0 c^2 - m_0' c^2$ ，則 $Q_0 = K + hf_0$ 。上式可改寫為

$$(m_0' c^2 + K)^2 = (Q_0 - K)^2 + m_0'^2 c^4$$

$$\Rightarrow m_0'^2 c^4 + 2m_0' c^2 K + K^2 = Q_0^2 - 2Q_0 K + K^2 + m_0'^2 c^4$$

$$\Rightarrow (2m_0' c^2 + 2Q_0)K = Q_0^2$$

$$\Rightarrow K = \frac{Q_0^2}{2(m_0' c^2 + Q_0)} = \frac{Q_0^2}{2m_0 c^2}$$

$$(c) hf_0 = Q_0 - K = Q_0 - \frac{Q_0^2}{2m_0 c^2} = Q_0 \left(1 - \frac{Q_0}{2m_0 c^2}\right)$$

$$\text{【註】: } Q_0 - \frac{Q_0^2}{2m_0 c^2} = (hf_0 + K) - K \Rightarrow hf_0 = Q_0 - K$$

$hf_0 + K$	反衝原子的動能 K
------------	-------------

第二部分

(d) 光子的能量為 hf' ，根據題設

$$Q' = mc^2 - m'c^2 \tag{1}$$

由能量守恆定律得

$$mc^2 = m'c^2 + hf'$$

故 $Q' = hf'$ 。

(e) 光子的動量為 $\frac{hf'}{c} = \frac{Q'}{c}$ ，由動量守恆定律得

$$\vec{p} = \vec{p}' + \frac{Q'}{c} \hat{n} \tag{2}$$

(f) 由(1)和(2)式得

$$mc^2 - Q' = m'c^2 \tag{3}$$

$$c\vec{p} - \hat{n}Q' = c\vec{p}' \tag{4}$$

將(3)式平方，得

$$(mc^2 - Q')^2 = (m'c^2)^2$$

$$\Rightarrow (mc^2)^2 - 2mc^2 Q' + Q'^2 = (m'c^2)^2 \tag{5}$$

將(4)式平方，得

$$(c\vec{p} - \hat{n}Q') \cdot (c\vec{p} - \hat{n}Q') = (c\vec{p}') \cdot (c\vec{p}')$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (cp)^2 - 2cQ'(\bar{p} \cdot \hat{n}) + (Q')^2 &= (cp')^2 \\ \Rightarrow (cp)^2 - 2cpQ' \cos \theta + (Q')^2 &= (cp')^2 \end{aligned} \quad (6)$$

將(5)式減(6)式，得

$$\left[(mc^2)^2 - (cp)^2 \right] - 2mc^2Q' \left(1 - \frac{p}{mc} \cos \theta \right) = (m'c^2)^2 - (cp')^2 \quad (7)$$

利用相對論的能量-動量關係式 ($E^2 = p^2c^2 + (m_0c^2)^2$) 得

$$(mc^2)^2 - (cp)^2 = (m_0c^2)^2 \quad (8)$$

$$(m'c^2)^2 - (cp')^2 = (m'_0c^2)^2 \quad (9)$$

將(8)和(9)兩式，以及 $\frac{p}{mc} = \frac{v}{c} = \beta$ ，代入(7)式，得

$$(m_0c^2)^2 - 2mc^2Q'(1 - \beta \cos \theta) = (m'_0c^2)^2 \quad (10)$$

式中 m_0 和 m'_0 分別為該粒子在受激態和基態時的靜質量，其相應的能量差值為 Q_0 ，即 $Q_0 = m_0c^2 - m'_0c^2$ ，或寫成

$$m_0c^2 - Q_0 = m'_0c^2 \quad (11)$$

將(11)式平方，可得

$$(m_0c^2)^2 - (m'_0c^2)^2 = 2m_0c^2Q_0 - Q_0^2 \quad (12)$$

由(10)和(12)兩式可得

$$2mc^2Q'(1 - \beta \cos \theta) = 2m_0c^2Q_0 \left(1 - \frac{Q_0}{2m_0c^2} \right) \quad (13)$$

$$Q' = \frac{m_0}{m} \cdot \frac{Q_0 \left(1 - \frac{Q_0}{2m_0c^2} \right)}{1 - \beta \cos \theta} \quad (14)$$

因為 $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ ，故

$$Q' = \left[Q_0 \left(1 - \frac{Q_0}{2m_0c^2} \right) \right] \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta}$$

因為 $Q' = hf'$ ，利用(c)小題的結果，可得

$$hf' = hf_0 \cdot \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta}$$

$$f' = f_0 \left(\frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta} \right)$$

式中 f_0 為處於受激態的粒子，在靜止時所發出的光子頻率。

2004年國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊決選研習營

筆試(一)試題

2004年4月5日 14:00-17:00

- 一、本試題共五大題，每大題二十分，總分一百分。
- 二、考試時間三小時。
- 三、在指定的答案紙上作答。
- 四、可使用無程式掌上型計算機。

2004 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
決選研習營筆試(一)試題

本試題共有計算題五大題，每大題 20 分，合計 100 分。

- 一、如圖 1a 所示，A 和 B 兩球的半徑相同，但質量分別為 m 和 M ($M > m$)。兩球以彈力常數為 k 的輕彈簧相連，靜止在光滑的水平地面上，其中 A 球固定在地面不能移動。另一質量為 M 的同半徑 C 球，以初速 \bar{v}_0 ，沿水平方向正向彈性撞擊 B 球。

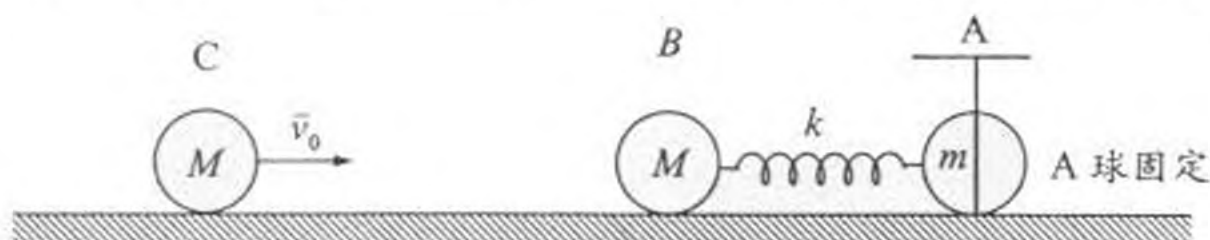


圖 1a

- (a) 求 B 球相對於 A 球的振動振幅和頻率。

將 A 球釋放，使 A 和 B 兩球連同彈簧一起以速度 v_0 ，沿兩球的連心線方向，向左滑動。同時，C 球改以速度 v_L 向右滑動，和 B 球作正向彈性碰撞，如圖 1b 所示。

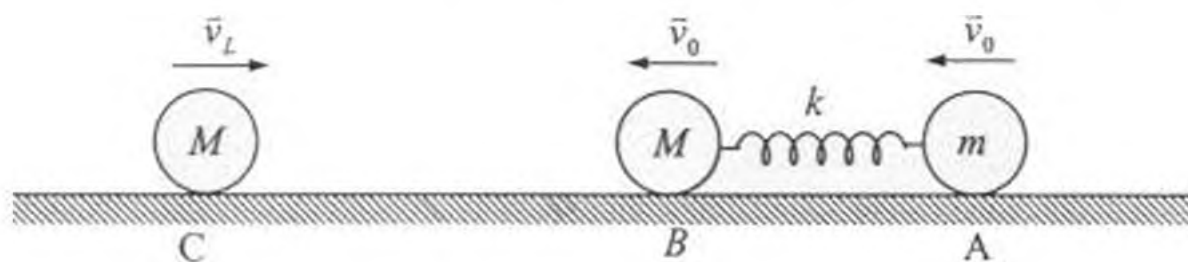


圖 1b

- (b) 若碰撞之後，A 和 B 兩球與彈簧系統的質心靜止，則 v_L 的量值為何？
(c) A 和 B 兩球相對於其系統質心的振動頻率為何？

現改用兩組雙球—彈簧系統，沿水平方向以速度 v_0 ，彼此正向彈性對撞，如圖 1c 所示。

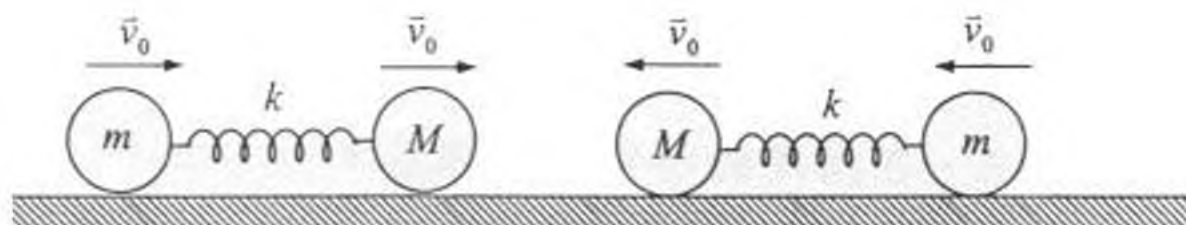


圖 1c

- (d) 在碰撞之後，各組的質心速度為何？
(e) 在碰撞之後，各組中 m 和 M 兩球，相對於其系統質心的振幅為何？
(f) 氫分子 (H_2) 之間的碰撞，類似於上述的雙球碰撞情況。氫分子在碰撞後，因振

動能階之間的躍遷，而輻射出的最低光子能量為 0.55eV ，已知氫原子質量為 $1.67 \times 10^{-27}\text{kg}$ ，卜朗克常數 $h = 4.13 \times 10^{-15}\text{eV}\cdot\text{s}$ ，計算氫分子鍵的等效彈力常數。

- 二、半透膜只容許水溶液中的水分子通過，而不容許如糖*、鹽*之類的溶質分子通過。圖 2 所示為以半透膜分隔容器中的水和糖水的示意圖，水分子可經由半透膜雙向滲透。起初滲入糖水的水分子較多，使糖水液壓漸升。達成平衡時，糖水液壓 P_S 高於水中的液壓 P_W 。兩邊的液壓差稱為水與糖水的滲透壓 $P_{SW} = P_S - P_W$ 。

【註】：蔗糖： $C_{12}H_{22}O_{11}$ ， $342\text{g}/\text{mole}$
食鹽： $NaCl$ ， $58\text{g}/\text{mole}$

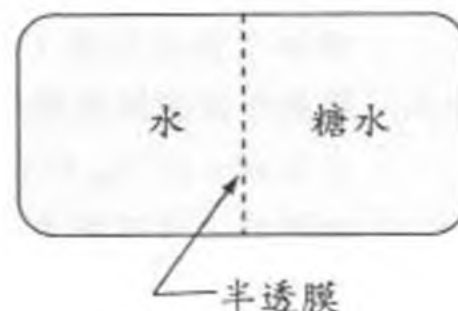


圖 2

(a) 利用下列器材：

- 底部密封的長量筒
- 底部為半透膜的長量筒
- 水槽
- 配製與測定不同濃度糖水的器材，如天平、量筒、試管…等等。
- 各種支持架與固定架。

設計實驗裝置，以測量在不同的糖水濃度 c 下，水和糖水之間的滲透壓 P_{SW} 。簡單繪圖說明所設計的實驗裝置，以及所需測量的物理量和實驗步驟。

(b) 下表為有關水與糖水的滲透壓 P_{SW} (10^{-2}atm) 在不同濃度和溫度下的實驗數據：

糖水濃度 (mol/m^3) \backslash 溫度($^{\circ}\text{C}$)	20	40	60	80
1	2.41	2.57	2.73	2.9
2	4.81	5.14	5.47	5.8
3	7.22	7.71	8.20	8.70
4	9.63	10.28	10.93	11.60

利用表中的實驗數據，導出水與糖水的滲透壓隨溫度和濃度變化的函數關係式。

- 滲透壓方程式與理想氣體方程式有何異同？其物理緣由為何？
- 在蜜糖樹之類的植物盛產季節時，利用地下水與樹根內溶液之間的滲透壓，大自然可使樹液從樹皮切口湧出供人們採收。已知樹液中的溶質莫耳濃度為 $30\text{mol}/\text{m}^3$ ，在溫度為 27°C 的情況下，滲透壓約可將樹液推升至多高？
- 水的表面張力在 27°C 時為 $S = 0.07\text{N}/\text{m}$ 。若樹中的維管束半徑約 $r = 2 \times 10^{-5}\text{m}$ ，則單靠毛細現象的作用，大自然約可將水在樹中推升至多高？

三、當一物質的汽、液兩態共存而處於熱平衡狀態時，其壓力 P 和其絕對溫度 T 之間的變化關係為 $\frac{\Delta P}{\Delta T} = \frac{L}{T(v'' - v')}$ ，式中 L 為莫耳汽化熱， v' 和 v'' 分別為液態和汽態的單位莫耳體積。

(a) 導出水的飽和蒸氣壓與絕對溫度之間的關係式。

假設有一間歇泉，此間歇泉係由一個在地下深處的大洞，以一通道與地面相連所形成，大洞與通道充滿地下水，如圖 3 所示。地熱使水的溫度上升，狹窄的通道阻礙了熱的對流，當洞中的水沸騰時，上升的氣泡將上方通道的水向上推出，隨後洞中激烈沸騰的水向外噴出，噴出的水柱高達 40.0 m，在 5.0 秒鐘內，大約噴出 4.40×10^4 kg 的水蒸汽。停止噴出後，地下水重新注滿大洞和通道，並重複前述的過程。此間歇泉大約每 1 小時噴出一次。若在此地區，地面的溫度為 17°C ，地下溫度隨深度增加的變化率為 $+1.00^\circ\text{C}/\text{m}$ ，

(b) 大洞距地面的距離 h 至少應為多少 m?

(c) 此大洞可容納的水約為多少 kg?

【註】： $1\text{atm} = 1.01 \times 10^5 \text{ N/m}^2$

氣體常數 $R = 8.31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$

水的密度為 $1.00 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$

水的比熱為 $4.18 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$

水的汽化熱為 40.0 kJ/mol



圖 3

四、一模型小飛機在靠近地面的水平面上，繞 O 點作等速率圓周運動，如圖 4 所示。有一觀察者站在圓軌道外的 P 點處，測得模型飛機所發出的聲音的最大振動頻率 f_{max} 為 630Hz ，最小振動頻率 f_{min} 為 594Hz 。從測得最大頻率到最小頻率的時間間隔為 3.00 秒。在測得最小頻率時，觀察者所看到模型飛機的位置與 \overline{OP} 線段所夾的角度為 30° 。假設當時的聲速為 340m/s ，回答下列各題：

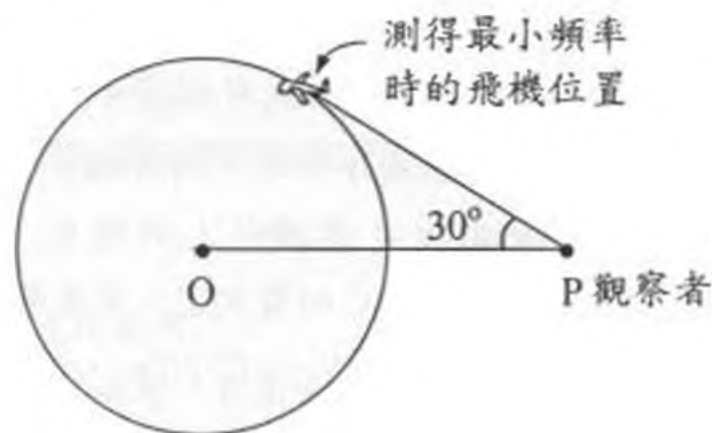


圖 4

- (a) 試求觀察者先測得最小頻率，而後再測得最大頻率，所經過的時間為多少秒？
- (b) 試求模型飛機的速率 v 及其本身所發出的聲音頻率 f_0 為何？
- (c) 計算 P 點到 O 點的距離為多少公尺？
- (d) 假設觀測者首先聽到最大頻率，再聽到 f_0 頻率，而後聽到最小頻率，試求觀察者在聽到 f_0 頻率時起算，經多少秒後，才聽到最小頻率的聲音？
- (e) 若 P 點離開 O 點很遠，即兩點之間的距離遠大於模型飛機的圓軌道半徑，則觀察者先測得最大頻率時起算，需經多少秒後，才再聽到最小頻率的聲音？

五、弦振動的頻率：

- (a) 一小提琴的弦長為 L ，線密度為 μ ，張力為 T ，求產生駐波時的基音及第一泛音的頻率。
- (b) 若小提琴的弦在前 $\frac{L}{3}$ 部分的線密度為 4μ ，後 $\frac{2L}{3}$ 部分的線密度仍為 μ ，所受之張力保持為 T ，求產生駐波時的基音及第一泛音的頻率。

【提示】：駐波位移 $y(x,t)$ 的數學式可寫為

$$y(x,t) = (A \cos \omega t + B \sin \omega t)(C \sin kx + D \cos kx)$$

2004 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
決選研習營筆試(一)試題參考解答

一、解：

- (a) 由於 C 和 B 兩球的質量相同，兩球在彈性碰撞後的瞬間，速度交換，即 C 球靜止，B 球的速度為 v_0 ，向右運動。之後，B 球壓縮彈簧，作簡諧振動，設其振幅為 A，由力學能守恆定律得

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}Mv_0^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{M}{k}}v_0$$

振動頻率為 $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ 。

- (b) 在 C 和 B 兩球彈性碰撞後的瞬間，速度交換，即 C 球以速度 v_0 向左運動，而 B 球則以速度 v_L ，向右運動，這時 A 球仍以速度 v_0 向左運動。題設碰撞後，A 和 B 球系統的質心靜止，得

$$Mv_L + (-mv_0) = (M+m)v_c = 0$$

式中 v_c 為系統質心的速度。由上式可得 $v_L = \left(\frac{m}{M}\right)v_0$ 。

- (c) 取 A 和 B 球系統的質心為參考坐標系的原點，設 x_m 和 x_M 分別為 A 球和 B 球相對於質心的位移，符號規則取向右為正，向左為負，則兩球的運動方程式分別為

$$m \frac{d^2 x_m}{dt^2} = -k[(x_m - x_M) - \ell_0] \quad (1)$$

$$M \frac{d^2 x_M}{dt^2} = k[(x_m - x_M) - \ell_0] \quad (2)$$

式中 ℓ_0 為彈簧的自然長度。在質心坐標系中， $Mx_M + mx_m = 0$ ，得

$$x_m = -\left(\frac{M}{m}\right)x_M \quad \text{或} \quad x_M = -\left(\frac{m}{M}\right)x_m \quad (3)$$

將(3)式分別代入(1)和(2)式，整理後可得

$$\frac{d^2 x_m}{dt^2} + k \left(\frac{m+M}{mM}\right) \left(x_m - \frac{M\ell_0}{m+M}\right) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{d^2 x_M}{dt^2} + k \left(\frac{m+M}{mM}\right) \left(x_M + \frac{m\ell_0}{m+M}\right) = 0 \quad (5)$$

設 $u_m \equiv x_m - \frac{M\ell_0}{m+M}$ ， $u_M \equiv x_M + \frac{m\ell_0}{m+M}$ ，以之代入(4)和(5)式，得

$$\frac{d^2 u_m}{dt^2} + k \left(\frac{m+M}{mM}\right) u_m = 0 \quad (6)$$

$$\frac{d^2 u_M}{dt^2} + k \left(\frac{m+M}{mM}\right) u_M = 0 \quad (7)$$

(6)和(7)兩式為標準的簡諧運動方程式，其振動頻率同為

$$\omega = \sqrt{k \left(\frac{m+M}{mM} \right)} = \sqrt{\frac{k}{\mu}} \quad \text{或} \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}} \quad (8)$$

式中 $\mu = \frac{mM}{m+M}$ ，稱為 A 和 B 兩球系統的約化質量 (reduced mass)。

(d) 在碰撞後，各組中的 m 和 M 兩球的速度皆為 v_0 ，但方向相反。就右方的一組而言，

其總動量為 $(Mv_0 - mv_0)$ ，故其系統質心的速度 $v_c = \left(\frac{M-m}{M+m} \right) v_0$ ，方向向右。

左方一組的系統質心以同大的速度運動，但方向向左。

(e) 各組在碰撞後的質心動能為 $K_c = \frac{1}{2}(M+m)v_c^2$ ，但其總動能皆為

$K_T = \frac{1}{2}(m+M)v_0^2$ ，其差值為

$$\begin{aligned} \Delta K &= K_T - K_c = \frac{1}{2}(M+m)v_0^2 - \frac{1}{2}(M+m)v_c^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[(M+m) - \frac{(M-m)^2}{(M+m)} \right] v_0^2 = \left(\frac{2Mm}{M+m} \right) v_0^2 \end{aligned} \quad (9)$$

此差值等於兩球相對於其系統質心的力學能之和。

對系統質心而言，原彈簧可視為以質心分界，由兩條自然長度各為 ℓ_M 與 ℓ_m 的小彈簧串聯而成。由於 $M\ell_M = m\ell_m$ ，故兩小彈簧的彈力常數分別為

$$k_M = \left(\frac{M+m}{m} \right) k, \quad k_m = \left(\frac{M+m}{M} \right) k \quad (10)$$

在質心坐標系中，由(3)式知兩球同時達到最大位移，或同時達到最大速率，因此兩球的力學能之和為

$$\Delta K = \frac{1}{2} k_M A_M^2 + \frac{1}{2} k_m A_m^2 = \frac{1}{2} M V_M^2 + \frac{1}{2} m V_m^2 \quad (11)$$

式中 A_M 和 A_m 分別為兩球相對於質心的振幅，而 V_M 和 V_m 則為兩球相對於質心的最大速率。利用 $MV_M = mV_m$ ，由(9)和(10)兩式可得

$$V_M = \left(\frac{2m}{M+m} \right) v_0, \quad V_m = \left(\frac{2M}{M+m} \right) v_0 \quad (12)$$

對 M 球而言， $\frac{1}{2} k_M A_M^2 = \frac{1}{2} M V_M^2$ ，利用(10)和(12)式，可得

$$A_M = \sqrt{\frac{Mm}{k(M+m)}} \left(\frac{2m}{M+m} \right) v_0 = \left(\frac{2m}{M+m} \right) \frac{v_0}{\omega} \quad (13)$$

同理可得

$$A_m = \sqrt{\frac{Mm}{k(M+m)}} \left(\frac{2M}{M+m} \right) v_0 = \left(\frac{2M}{M+m} \right) \frac{v_0}{\omega} \quad (14)$$

(f) 題設氫分子的最小能階差為 $\Delta E = hf = 0.55\text{eV}$ ，故

$$f = \frac{\Delta E}{h} = \frac{0.55\text{eV}}{4.13 \times 10^{-15} \text{eV} \cdot \text{s}} = 1.33 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

$$\mu = \frac{Mm}{M+m} = \frac{m_H \cdot m_H}{m_H + m_H} = \frac{1}{2} m_H = 0.835 \times 10^{-27} \text{ Kg}$$

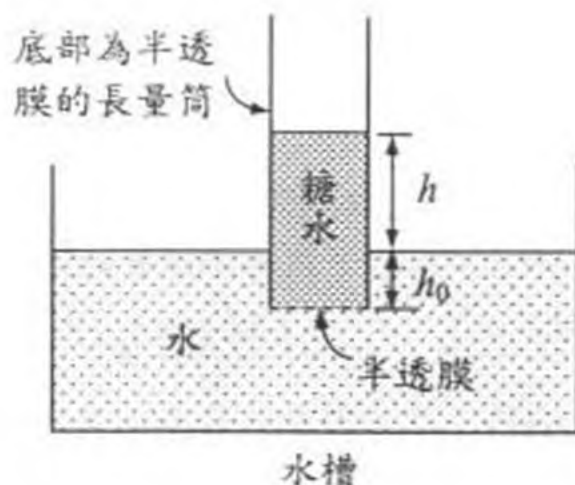
設 k_H 為氫分子鍵的等效彈力常數，則 $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_H}{\mu}}$ ，得

$$k_H = 4\pi^2 f^2 \mu = 583 \text{ N/m}$$

二、解：

(a) 實驗裝置和步驟如下：

1. 下圖為實驗裝置的簡圖。



- 將底部為半透膜的長量筒插入裝水的水槽中，盡快將糖水倒入量筒中，至約與筒外的液面等高，待筒內的液面停止上昇之後，測量筒內外液面的高度差 h 。
- 測量筒內糖水的莫耳濃度 c 。
- 在此濃度 c 時，水與糖水的滲透壓 $P_{sw}(c) = \rho_s g(h+h_0) - \rho_w g h_0$ ，式中的 ρ_s 為糖水密度， ρ_w 為水的密度。因為糖的分子量為 342g/mol ，即使糖水濃度高至 10mol/m^3 （試題數據表中的糖水濃度在 4mol/m^3 以下），糖液和水的密度差的百分比值為

$$\frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_w} \approx \frac{3.420}{10^3} \approx 0.34\%$$

由上式可知 $\rho_s \approx \rho_w$ ，我們可取 $P_{sw}(c) = \rho_w g h$

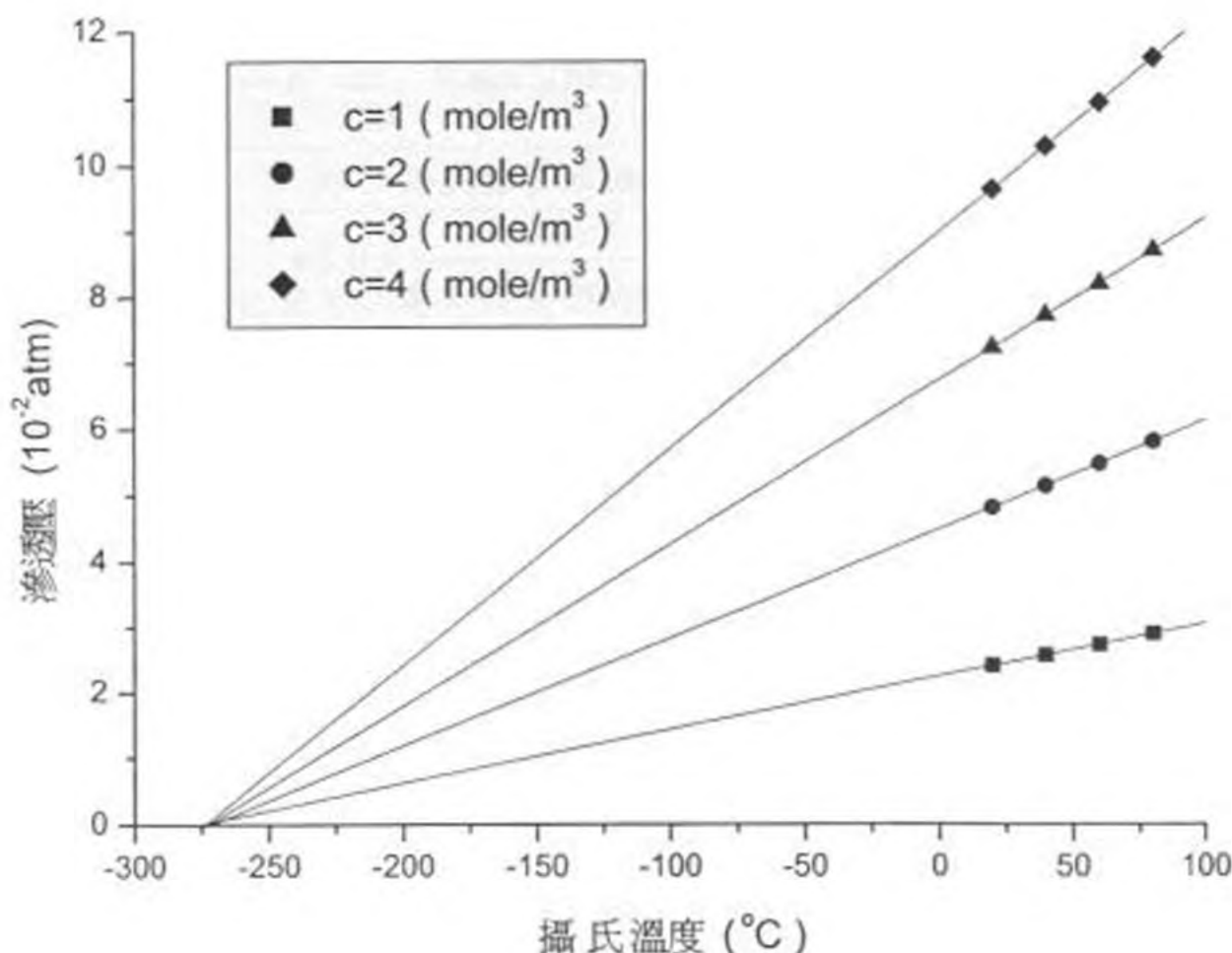
- 逐次改變半透膜量筒中的糖水濃度 c ，重複步驟 2 與 3。繪出 $P_{sw}(c)$ 的函數關係曲線圖。

(b)表中的實驗數據，可轉換為四條不同濃度的滲透壓對溫度 ($P_{sw} - t(^{\circ}C)$) 的關係曲線，如下圖所示。這四條直線皆外延相交 $P_{sw} = 0$ 之軸於 $-273^{\circ}C$ 處，故滲透壓方程式可寫為

$$P_{sw} = cR(t + 273) = cRT, \text{ 式中}$$

式中 $T = 273 + t$ ，為糖水的絕對溫度；

$$R = 0.00820 \left(\frac{10^{-2} \text{ atm} \cdot \text{m}^3}{\text{mol} \cdot \text{K}} \right) = 8.20 \times 10^{-5} \left(\frac{\text{atm} \cdot \text{m}^3}{\text{mol} \cdot \text{K}} \right) = 0.0820 \left(\frac{\text{atm} \cdot \ell}{\text{mol} \cdot \text{K}} \right)。$$



(c)由上題可知滲透壓方程式可寫為

$$P_{sw} = cRT = \frac{n}{V} RT$$

式中 n 為溶質的分子莫耳數， V 為溶液體積， $R = 0.082 \left(\frac{\text{atm} \cdot \ell}{\text{mole} \cdot \text{K}} \right)$ 恰等於理想氣體

方程式的氣體常數，又 $T = 273 + t$ 為溶液的絕對溫度。因此溶液的滲透壓方程式和理想氣體方程式 $PV = nRT$ 相同，這是由於糖分子在水溶液中的運動和理想氣體中的分子性質相同，其理由如下：

1. 分子極小不佔體積；
2. 分子之間彼此無交互作用；
3. 分子與器壁之間作彈性碰撞。
4. 分子數極多，以莫耳計。

(d) 樹液和水之間的滲透壓為

$$P_{sw} = cRT = \left(30 \frac{\text{mol}}{\text{m}^3}\right) \times \left(8.2 \times 10^{-5} \frac{\text{atm} \cdot \text{m}^3}{\text{mol} \cdot \text{K}}\right) \times 300\text{K} = 0.738 \text{ atm}$$

換算成水柱的高度為

$$\begin{aligned} h &= 0.738 \times 76 = 56\text{cm}(\text{汞柱}) \\ &= 0.738 \times 76 \times 13.6 = 762\text{cm}(\text{水柱}) \end{aligned}$$

滲透壓約可將樹液推升 7.6m 高。

(e) 設 S 代表水的表面張力， r 為樹中維管束的半徑， ρ 為水的密度， h 為水在樹中被推升的高度，則

$$mg = \rho(\pi R^2)hg = (2\pi R)S \cos \theta \Rightarrow h = \frac{2S \cos \theta}{\rho Rg}$$

式中 θ 為接觸角。若 $\theta = 0$ ，則 h 為最大值，即

$$h_{\max} = \frac{2S}{\rho Rg} = \frac{2 \times 0.07}{10^3 \times 2 \times 10^{-5} \times 9.8} \approx 0.7\text{m}$$

三、解：

(a) 因為定量的物質在汽態時的體積遠大於其液態時的體積，即 $v^m \gg v^l$ ，故

$$\frac{\Delta P}{\Delta T} \approx \frac{L}{T v^m} = \frac{L}{T \left(\frac{RT}{P}\right)} = \frac{LP}{RT^2} \quad (1)$$

式中 R 為氣體常數。將上式積分得

$$P \approx A \exp\left(-\frac{L}{RT}\right) \quad (2)$$

水的莫耳汽化熱 $L = 40.0 \text{ kJ/mol}$ ，又當 $T = 100^\circ\text{C} = 373 \text{ K}$ 時， $P = P_0 = 1 \text{ atm} = 1.01 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ ，將這些數據代入上式，可得

$$\begin{aligned} A &= 4.06 \times 10^{10} \text{ N/m}^2 \quad \text{或} \quad 4.02 \times 10^5 \text{ atm} \\ \Rightarrow P &\approx (4.06 \times 10^{10}) \exp\left(-\frac{L}{RT}\right) \quad (\text{N/m}^2) \quad (3) \end{aligned}$$

(b) 設地面處的大氣壓力為 P_0 、溫度為 T_0 ，洞與地面之間的距離為 h ，則當洞內的水沸騰時，由(2)式得

$$\begin{aligned} P_0 + hdg &= A \exp\left(-\frac{L}{RT}\right) \\ \Rightarrow P_0 + hdg &= (4.06 \times 10^{10}) \exp\left(-\frac{L}{R(T_0 + h)}\right) \end{aligned}$$

應用逼近求根法，解出 h 值：

h (m)	$T=T_0+h$ (K)	$A\exp[-L/(RT)]$ (N/m ²)	$P_0 + hdg$ (N/m ²)	$A\exp[-L/(RT)] - (P_0+hdg)$ (N/m ²)
100	390	1.79×10^5	10.8×10^5	-9.02×10^5
150	440	7.27×10^5	15.7×10^5	-8.44×10^5
200	490	22.2×10^5	20.6×10^5	1.60×10^5

h (m)	$T=T_0+h$ (K)	$A\exp[-L/(RT)]$ (N/m ²)	$P_0 + hdg$ (N/m ²)	$A\exp[-L/(RT)] - (P_0+hdg)$ (N/m ²)
180	470	14.6×10^5	18.7×10^5	-4.03×10^5
195	485	20.1×10^5	20.1×10^5	-5.02×10^3
196	486	20.5×10^5	20.2×10^5	2.66×10^4

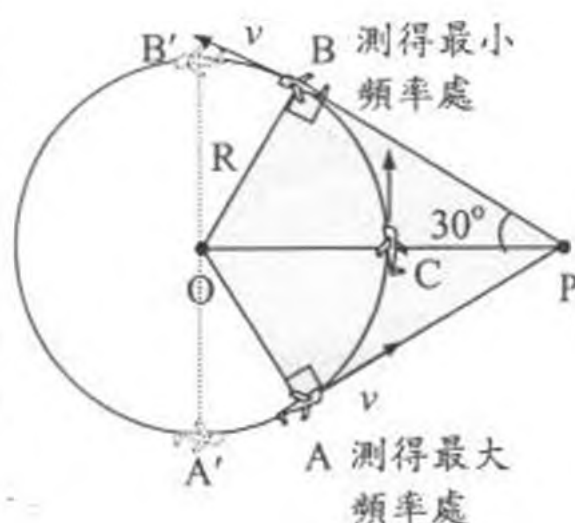
解得 $h \approx 195 \text{ m}$ 。在此深度的壓力約為 $20.1 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \approx 19.9 \text{ atm}$ ，溫度約為 $485 \text{ K} = 212^\circ \text{C}$

- (b) 當洞中的水達到 212°C 時，水的蒸氣壓等於洞中的水壓，水開始沸騰。最先產生的一些氣泡上升，將通道的水推出，使洞中的水壓減為 1 atm ，此時洞內溫度為 212°C 的過熱水，開始劇烈沸騰，有一部分的水汽化成水蒸氣，使過熱水的溫度降至 100°C 。設洞中水的質量為 m ，產生的水蒸氣質量為 m_s ，水的汽化熱為 L 、比熱為 c ，則

$$\begin{aligned}
 mc\Delta T &= m_s L \\
 \Rightarrow m &= \frac{m_s L}{c\Delta T} = \frac{(4.40 \times 10^4 \text{ kg}) \times (40.0 \text{ kJ/mol}) \times \left(\frac{1}{18 \times 10^{-3}} \text{ mol/kg}\right)}{(4.18 \text{ kJ/kg}\cdot^\circ\text{C}) \times (212 - 100)^\circ\text{C}} \\
 &= 1.95 \times 10^5 \text{ kg}
 \end{aligned}$$

四、解：

- (a) 如右圖所示，當飛機位在圓周上 A 點時，觀察者可測得最大頻率，這時 AP 為通過 A 點的切線；而當飛機通過 B 點時，觀察者測得最小頻率。飛機從 A 點飛到 B 點所經歷的時間為 3 秒，所繞過對 O 點的角度為 120° ；飛機再從 B 點飛回 A 點，所繞過的角度為 240° ，因此觀察者先測得最小頻率，而後再測得最大頻率，所經過的時間為 $2 \times 3.00 = 6.00 \text{ 秒}$



- (b) 利用都卜勒公式，得

$$630 = \frac{340}{340-v} f_0, \quad 594 = \frac{340}{340+v} f_0$$

由上二式可解得 $v = 10 \text{ m/s}$, $f_0 = 611 \text{ Hz}$ 。

(c) 由圖上的幾何關係可知, $\overline{OP} = 2R$, R 為圓軌道的半徑。由(a)題的結果知飛機繞

一圈的時間為 9.00 秒, 故 $9.00 = \frac{2\pi R}{v}$, 得

$$\overline{OP} = 2R = \frac{9.00v}{\pi} = \frac{9.00 \times 10}{\pi} = 29 \text{ m}$$

(d) 當飛機通過 C 點時, 觀察者所測得的聲音頻率為 f_0 。設取這時的時刻為 $t = 0$, 則

飛機所發出的聲音須經 $t_0 = \frac{\overline{CP}}{v_a} = \frac{R}{v_a}$ 後, 才被觀測者(P 點)所聽到, 式中 v_a 為聲速。

飛機從 C 點飛到 B 點, 需要 $9.00 \times \left(\frac{60^\circ}{360^\circ}\right) = 1.50 \text{ s}$ 。觀察者聽到最小頻率聲音的時

刻為 $t_{\min} = 1.50 + \frac{\sqrt{3}R}{v_a}$ 。因此觀察者從聽到 f_0 頻率時起算; 至聽到 f_{\min} 所經歷的時間為

$$\Delta t = t_{\min} - t_0 = 1.50 + \frac{(\sqrt{3}-1)R}{v_a} = 1.50 + \frac{(\sqrt{3}-1) \times 14.5}{340} = 1.53 \text{ s}$$

(e) 若 P 離開 O 點很遠, 那麼當飛機通過 A' 點時, 觀察者聽到 f_{\max} ; 而當飛機通過 B' 時, 聽到 f_{\min} 。因此觀察者從先聽到最大頻率時起算, 再聽到最小頻率的聲音, 所

經歷的時間為 $\frac{9.00}{2} = 4.50 \text{ s}$, 正好是飛機飛行半圓周所需要的時間。

五、解：

(a) 當弦振動產生駐波時, 設其波長為 λ , 則弦長和波長之間必須滿足下列關係：

$$L = \frac{n\lambda}{2} \quad \text{或} \quad \lambda = \frac{2L}{n}$$

波在弦上傳播的速度 $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, 式中 T 為弦的張力, μ 為其線密度, 故駐波的頻率為

$$f_n = \frac{v}{\lambda} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

當 $n = 1$ 時, $f_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, 為基音的頻率;

當 $n=2$ 時， $f_2 = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ ，為第一泛的音頻率。

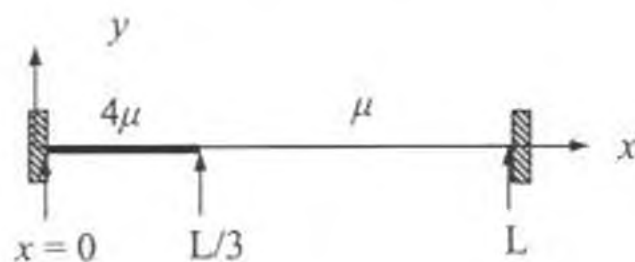
(b) 參考下圖，駐波位移 $y(x,t)$ 的數學式可寫為

$$y_1(x,t) = (A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t)(C_1 \sin k_1 x + D_1 \cos k_1 x), \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{3} \quad (1)$$

$$y_2(x,t) = (A_2 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t)(C_2 \sin k_2(L-x) + D_2 \cos k_2(L-x)), \quad \frac{L}{3} \leq x \leq L \quad (2)$$

式中 $k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{2\pi f}{v_1} = \frac{\omega}{v_1}$ ， $v_1 = \sqrt{\frac{T}{4\mu}}$ ；

$$k_2 = \frac{\omega}{v_2}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = 2v_1。$$



(1)和(2)兩式必須滿足下列兩項邊際條件 (boundary conditions)：

(i) 在弦的兩端點的位移必須為零，即

$$y(0,t) = y(L,t) = 0; \quad (3)$$

(ii) 在兩不同介質的交界處，弦的振動位移和張力在 y 方向的分量必須相等，即

$$y_1(L/3,t) = y_2(L/3,t) \quad (4)$$

$$T \frac{dy_1}{dx} \Big|_{L/3} = T \frac{dy_2}{dx} \Big|_{L/3} \quad (5)$$

利用(3)式，可得

$$y(0,t) = 0 \quad , \quad \text{得 } D_1 = 0$$

$$y(L,t) = 0 \quad , \quad \text{得 } D_2 = 0$$

(1)和(2)兩式可改寫為

$$y_1(x,t) = (A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t) \sin \frac{\omega x}{v_1}, \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{3} \quad (6)$$

$$y_2(x,t) = (A_2 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t) \sin \frac{\omega(L-x)}{v_2}, \quad \frac{L}{3} \leq x \leq L \quad (7)$$

利用(4)式，可得

$$(A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t) \sin \frac{L\omega}{3v_1} = (A_2 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t) \sin \frac{2L\omega}{3v_2} \quad (8)$$

利用(5)式，可得

$$\frac{\omega}{v_1} (A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t) \cos \frac{L\omega}{3v_1} = -\frac{\omega}{v_2} (A_2 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t) \cos \frac{2L\omega}{3v_2} \quad (9)$$

在(8)和(9)兩式中，在等號兩邊 $\cos \omega t$ 和 $\sin \omega t$ 的係數各自相等，並將 $v_2 = 2v_1$ 代入，得

$$\begin{cases} A_1 \sin \frac{L\omega}{3v_1} - A_2 \sin \frac{L\omega}{3v_1} = 0 \\ A_1 \frac{\omega}{v_1} \cos \frac{L\omega}{3v_1} + A_2 \frac{\omega}{2v_1} \cos \frac{L\omega}{3v_1} = 0 \\ B_1 \sin \frac{L\omega}{3v_1} - B_2 \sin \frac{L\omega}{3v_1} = 0 \\ B_1 \frac{\omega}{v_1} \cos \frac{L\omega}{3v_1} + B_2 \frac{\omega}{2v_1} \cos \frac{L\omega}{3v_1} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

若 A_1 、 A_2 、 B_1 、和 B_2 非零解，則其條件為

$$\begin{vmatrix} \sin \frac{L\omega}{3v_1} & -\sin \frac{L\omega}{3v_1} \\ \frac{\omega}{v_1} \cos \frac{L\omega}{3v_1} & \frac{\omega}{2v_1} \cos \frac{L\omega}{3v_1} \end{vmatrix} = 0 \quad (11)$$

由(11)式解得 $\frac{3\omega}{4v_1} \sin \frac{2L\omega}{3v_1} = 0$ ，即

$$\frac{2L\omega}{3v_1} = n\pi \quad \text{或} \quad \omega_n = \frac{3n\pi}{2L} \sqrt{\frac{T}{4\mu}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

當 $n=1$ 時， $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{3}{8L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ 為基音的頻率；

當 $n=2$ 時， $f_2 = \frac{3}{4L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ 為第一泛音的頻率。

2004年國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊決選研習營

實驗模擬試題(一)

2004年4月8日

考試時間：150分鐘

- 一、本試題滿分為七十五分。
- 二、在指定的答案紙上作答。
- 三、在每一頁答題紙的頂端寫明：

- 題號
- 該題所用答題紙之頁碼
- 該題所用答題紙的總頁數

例(以第一題用了三頁紙為例)：

1	1/3
2	2/3
3	3/3

2004 年國際物理奧林匹亞競賽國家代表隊決選研習營
實驗模擬試題(一)

電容的測量

一、背景說明：

眾所周知，電容器在電路中扮演一個重要的角色。有好幾種方法可以用來測量電容器的電容。本實驗要求你利用簡單的交流電路實驗，來測量一個電容器的電容。

如圖 1.1(a)所示，一電容為 C 的電容器和一個電阻 R 串聯後，連接到一個交流電壓電源。耗散於該電阻 R 上的電功率，和 \mathcal{E}_0 、 C 、 R 以及交流電源的頻率 f 有函數關係。這個關係式的曲線圖可以用來定出電容 C 的數值。

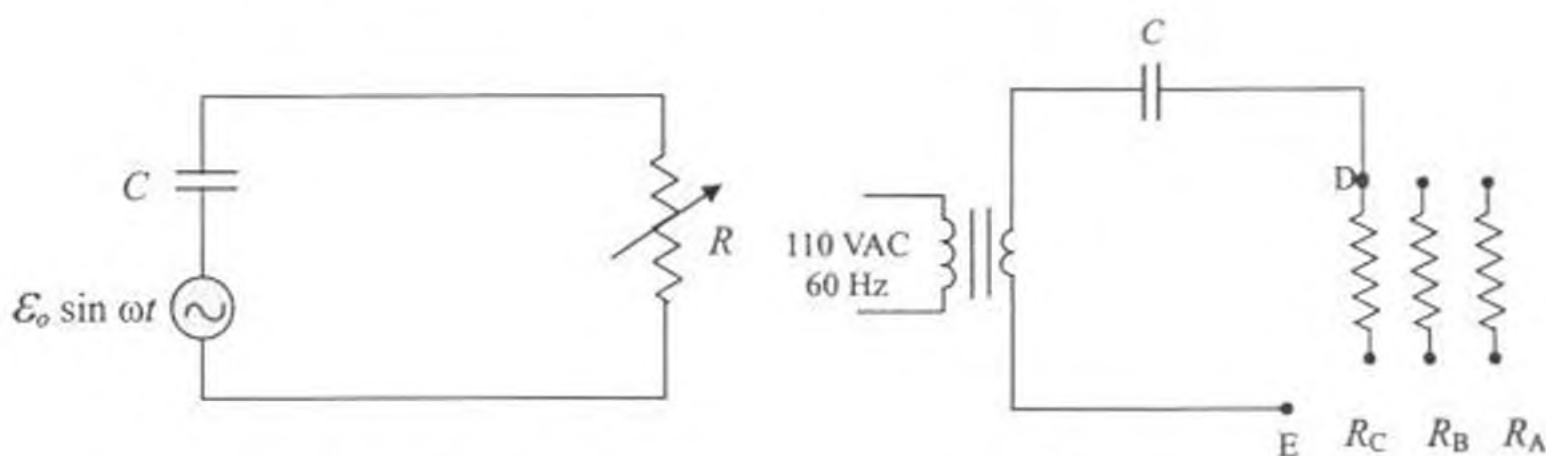


圖 1.1(a) 測量電容 C 的交流電路。

圖 1.1(b) 本實驗所用裝置的示意圖。

二、實驗材料和裝置：

1. 待測電容器一個。
2. 三個已知電阻值的電阻，其誤差值為 $\pm 5\%$ ($R_A = 680\Omega$ 、 $R_B = 1500\Omega$ 、 $R_C = 3300\Omega$)，如圖 1.1(b)所示。
3. 降壓變壓器一個，交流電源的頻率 $f = 60\text{Hz}$ 。
4. 三用數位電表一具。
5. 麵包板一片及跳線若干。
6. 方格紙四張。

三、實驗要求：

- (a) 導出電阻 R 上的平均耗熱功率 \bar{P} 的數學式，以 \mathcal{E}_0 、 R 、 C 、和 ω 表示之。
- (b) 導出 \bar{P} 為極大值的條件。
- (c) 在(a)題所導出的數學關係式中，設法定義出某兩個量 α 和 β ，使該關係式可以轉換成 α 和 β 之間的線性關係式。

- (d) 在 R_A 、 R_B 、和 R_C 的所有可能的串、並聯組合中（包括只使用一個電阻、或使用二個電阻、或者三個電阻全用），對每一種組合所得的等效電阻 R ，測量跨過該組合電阻的方均根(rms)電壓 V 。
- (e) 畫出 \bar{P} 對組合電阻 R 的關係圖，並利用該關係曲線，求出電容 C 的值。
- (f) 畫出(c)題中所得兩量 α 和 β 之間的關係直線，並利用該直線，求出電容 C 。
- (g) 估計在(e)和(f)兩題中所得電容 C 的不準量。

答案卷

電容的測量

- (a) 導出電阻 R 上的平均耗熱功率 \bar{P} 的數學式：
- (b) 極大值 \bar{P}_{\max} 的條件：
- (c) 定義出某兩個量 α 和 β ，找出 α 和 β 之間的線性關係式：
- (d) 將所得的實驗數據列表（寫在另一張白紙上）：
- (e) 畫出 \bar{P} 對組合電阻 R 的關係圖，並利用該關係曲線，求出電容 C 的值（畫在方格紙上）。
- (f) 畫出(c)題中所得兩量 α 和 β 之間的關係直線，並利用該直線，求出電容 C （畫在方格紙上）。
- (g) 估計在(c)和(f)兩題中所得電容 C 的不準量。

電容的測定

I. 理論分析

$$a) \quad \bar{P} = I^2 R = \frac{\frac{1}{2} \varepsilon_0^2}{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} R$$

$$b) \quad \frac{d}{dR} \bar{P} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dR} \bar{P} &= \frac{d}{dR} \left[\frac{\frac{1}{2} \varepsilon_0^2}{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} R \right] \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_0^2 \frac{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2 - R(2R)}{\left[R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2 \right]^2} \end{aligned}$$

$$\text{極大值 } \bar{P}_{\max}: \quad R = \frac{1}{\omega C}$$

c)

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{\frac{1}{2} \varepsilon_0^2}{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} R = \frac{\frac{1}{2} \varepsilon_0^2 R}{R^2 \left[1 + \left(\frac{1}{R\omega C}\right)^2 \right]} = \frac{\frac{1}{2} \varepsilon_0^2}{R \left[1 + \left(\frac{1}{R\omega C}\right)^2 \right]} \\ \Rightarrow \frac{1}{R\bar{P}} &= \frac{2}{\varepsilon_0^2} \left[1 + \frac{1}{R^2 \omega^2 C^2} \right] \\ \frac{1}{R\bar{P}} &= \frac{1}{V^2} = \frac{2}{\varepsilon_0^2} + \frac{2}{\varepsilon_0^2} \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2 \frac{1}{R^2} \end{aligned}$$

上式中 $\frac{1}{R\bar{P}}$ 或 $\frac{1}{V^2}$ 對 $\frac{1}{R^2}$ 有線性關係。若取 $\frac{1}{R\bar{P}}$ 對 $\frac{1}{R^2}$ 作圖，設所得直線的斜率為 a ，在

縱軸上的截距為 b ，則 $\frac{1}{\omega^2 C^2} = \frac{a}{b} \Rightarrow C = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{1}{2\pi f} \sqrt{\frac{b}{a}}$ 。

【另解】：

$$\begin{aligned}\frac{V^2}{R^2} &= \frac{\frac{1}{2}\varepsilon_0^2}{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \\ \frac{R^2}{V^2} &= \left[R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2 \right] \frac{2}{\varepsilon_0^2} \\ \frac{1}{V^2} &= \left[1 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2 \frac{1}{R^2} \right] \frac{2}{\varepsilon_0^2} \\ \frac{1}{V^2} &= \frac{2}{\varepsilon_0^2} + \frac{2}{\varepsilon_0^2} \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2 \frac{1}{R^2} \\ R^2 &= \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0^2\right) \left(\frac{R}{V}\right)^2 - \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2\end{aligned}$$

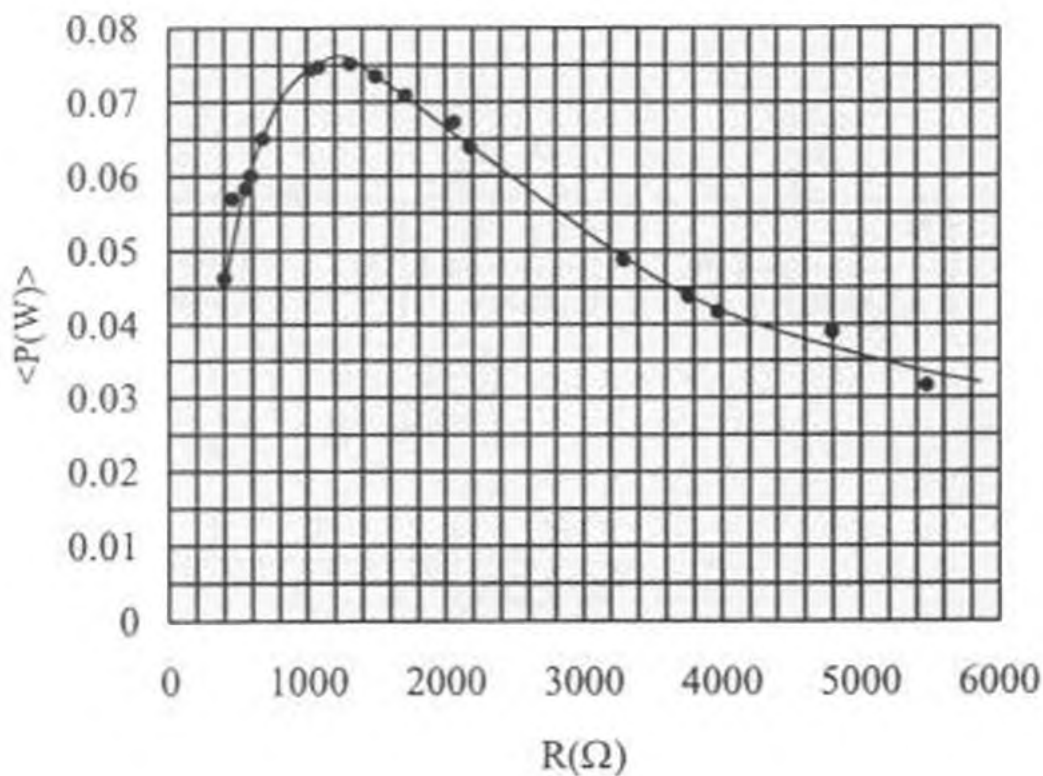
在上式中 R^2 對 $\left(\frac{R}{V}\right)^2$ 有线性關係。若取 R^2 對 $\left(\frac{R}{V}\right)^2$ 作圖，設所得直線在縱軸上的截距

為 b ，則 $\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2 = b$ ，得 $C = \frac{1}{2\pi f \sqrt{b}}$ 。

d)

No.	Resistor(s)	$R(\Omega)$	$V(V)$	$\bar{P} = \frac{V^2}{R} (W)$
1	R_A	680	6.65	0.0650
2	R_B	1500	10.49	0.0734
3	R_C	3300	12.67	0.0486
4	$R_A + R_B$	2180	11.79	0.0638
5	$R_A // R_B$	468	4.88	0.0569
6	$R_B + R_C$	4800	13.65	0.0388
7	$R_B // R_C$	1032	8.76	0.0743
8	$R_C + R_A$	3980	12.86	0.0416
9	$R_C // R_A$	564	5.73	0.0582
10	$R_A + R_B + R_C$	5480	13.15	0.0316
11	$(R_A // R_B) + R_C$	3768	12.83	0.0437
12	$(R_B // R_C) + R_A$	1712	11.01	0.0708
13	$(R_C // R_A) + R_B$	2064	11.78	0.0672
14	$(R_A // R_B) // R_C$	410	4.35	0.0462
15	$(R_A + R_B) // R_C$	1313	9.93	0.0751
16	$(R_B + R_C) // R_A$	596	5.98	0.0600
17	$(R_C + R_A) // R_B$	1089	9.02	0.0747

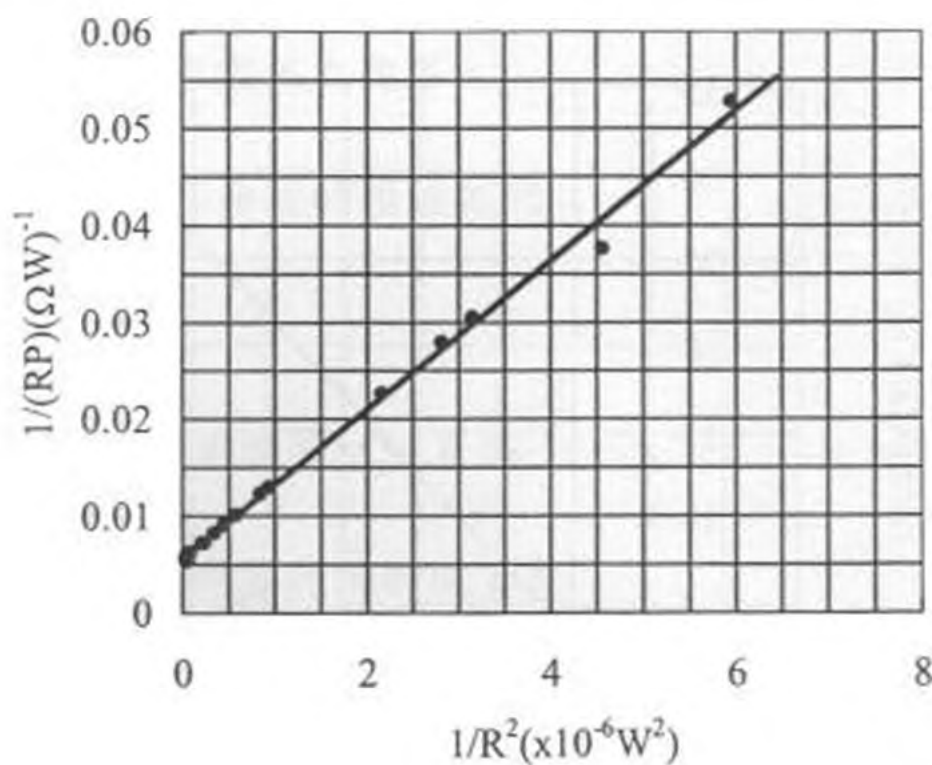
e)



$$R \text{ at } \bar{P}_{\max} = 1200\Omega \Rightarrow C = \frac{1}{\omega R} = \frac{1}{2\pi f} = \frac{1}{2\pi \times 60 \times 1200} = 2.2 \times 10^{-6} \text{ F} = 2.2 \mu\text{F}$$

c) $\frac{1}{RP}$ 對 $\frac{1}{R^2}$ 的線性關係圖

$R(\Omega)$	$V(V)$	$\bar{P} = \frac{V^2}{R} (W)$	$\frac{1}{RP} (\Omega W)^{-1}$	$\frac{1}{R^2} (\times 10^{-6} \Omega^{-2})$
410	4.35	0.0462	0.0528	5.948
468	4.88	0.0569	0.0376	4.565
564	5.73	0.0582	0.0305	3.143
596	5.98	0.0600	0.0280	2.815
680	6.65	0.0650	0.0226	2.162
1032	8.76	0.0743	0.0130	0.938
1089	9.02	0.0747	0.0123	0.843
1313	9.93	0.0751	0.0101	0.580
1500	10.49	0.0734	0.00908	0.444
1712	11.01	0.0708	0.00825	0.341
2064	11.78	0.0672	0.00721	0.234
2180	11.79	0.0638	0.00719	0.210
3300	12.67	0.0486	0.00624	0.091
3768	12.83	0.0437	0.00560	0.070
3980	12.86	0.0416	0.00604	0.0631
4800	13.65	0.0388	0.00537	0.0434
5480	13.15	0.0316	0.00577	0.0333

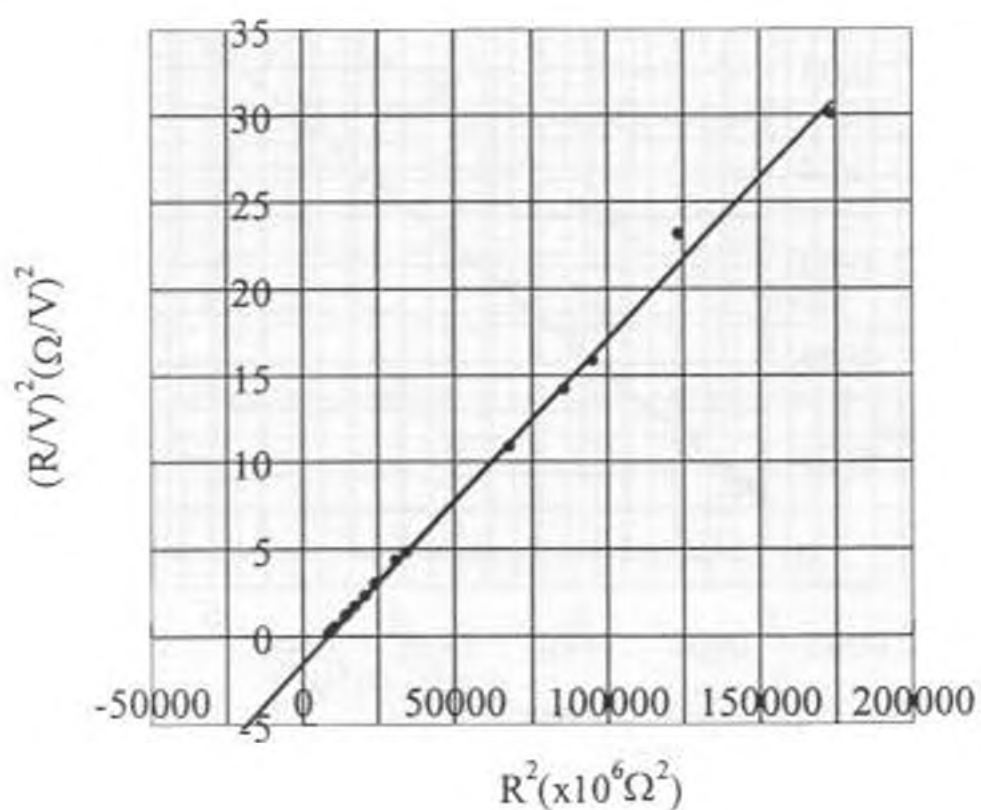


直線斜率 = $a = 0.00771 \times 10^6 \Omega/W$, 縱軸截距 = $b = 0.00553 (\Omega W)^{-1}$;

$$\frac{1}{\omega^2 C^2} = \frac{a}{b} \Rightarrow C = \frac{1}{2\pi f} \sqrt{\frac{b}{a}} = 2.2 \times 10^{-6} F = 2.25 \mu F$$

【另解】： R^2 對 $\left(\frac{R}{V}\right)^2$ 的線性關係圖

$R(\Omega)$	$V(V)$	$\bar{P} = \frac{V^2}{R} (W)$	$\left(\frac{R}{V}\right)^2 (\Omega/V)^2$	$R^2 (\times 10^6 \Omega^2)$
410	4.35	0.0462	8880	0.168
468	4.88	0.0569	9200	0.219
564	5.73	0.0582	9690	0.318
596	5.98	0.0600	9930	0.355
680	6.65	0.0650	10500	0.462
1032	8.76	0.0743	13900	1.07
1089	9.02	0.0747	14600	1.19
1313	9.93	0.0751	17500	1.72
1500	10.49	0.0734	20450	2.25
1712	11.01	0.0708	24180	2.93
2064	11.78	0.0672	30700	4.26
2180	11.79	0.0638	34190	4.75
3300	12.67	0.0486	67840	10.89
3768	12.83	0.0437	86250	14.20
3980	12.86	0.0416	95780	15.84
4800	13.65	0.0388	123700	23.04
5480	13.15	0.0316	173700	30.03



縱軸截距 $= b = \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2 = 1.505 \times 10^6 \Omega^2$, $C = \frac{1}{2\pi f \sqrt{b}} = 2.16 \times 10^{-6} F = 2.16 \mu F$ 。

2004年國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊決選研習營

實驗模擬試題(二)

2004年4月8日

考試時間：150分鐘

- 一、本試題滿分為七十五分。
- 二、在指定的答案紙上作答。
- 三、在每一頁答題紙的頂端寫明：

- 題號
- 該題所用答題紙之頁碼
- 該題所用答題紙的總頁數

例（以第一題用了三頁紙為例）：

1	1/3
2	2/3
3	3/3

2004 年國際物理奧林匹亞競賽國家代表隊決選研習營
實驗模擬試題(二)

測量錫的熔化熱

一、器材：

- | | |
|-----------------------|--------------------|
| (1) 錫塊、鋁坩鍋、焊錫爐各一個。 | (10) 酒精燈一具。 |
| (2) T-型熱電偶一支(附標準較準表)。 | (11) 打火機一個。 |
| (3) 保溫杯、小紙杯各一個。 | (12) 塑膠夾(或金屬夾)二個。 |
| (4) 燒杯二個。 | (13) 磁磚二塊。 |
| (5) 溫度計、攪拌棒各一根。 | (14) 三腳架一具(附石棉心網)。 |
| (6) 三用數字電表一具。 | (15) 小冰塊(公用)。 |
| (7) 鱷魚夾導線三條。 | (16) 電子秤(公用)。 |
| (8) 碼錶一個。 | |
| (9) 鉗子一支。 | |

二、原理：

當液態和固態的錫共存時，其溫度保持一定，稱為熔點。當錫從熔融狀態開始降溫時，測量其溫度對時間的冷卻曲線，可用以計算錫的熔化熱。

三、說明：

本實驗包含兩部分：

- (1) 利用提供的器材，測量鋁坩鍋（內含待測的錫塊）的總熱容。
- (2) 將裝著錫塊的鋁坩鍋置入焊錫爐中加熱，使錫完全熔化，並持續加熱至約 $280\sim 300^{\circ}\text{C}$ 。然後拔掉焊錫爐的電源插頭，用鉗子將鋁坩鍋自焊錫爐中夾出，置於磁磚上，測量錫的冷卻曲線，並計算錫的熔化熱

【註】：Al 的比熱為 $0.217\text{cal/g}\cdot^{\circ}\text{C}$

Sn 的比熱為

溫度 ($^{\circ}\text{C}$)	25	127	227	327
比熱 ($\text{cal/g}\cdot^{\circ}\text{C}$)	0.054	0.058	0.064	0.062

【注意】：

- (i) 將錫塊熔化前，先分別測量錫塊和鋁坩鍋的質量，以備需要時使用。
- (ii) 應避免拉扯熱電偶熔接端的兩導線，否則熔接處有可能斷開。
- (iii) 測量錫的冷卻曲線時，熱電偶的測溫端應直接置入錫中測溫。
- (iv) 測溫時，避免熱電偶的絕緣膠皮碰觸熱坩鍋或熱焊錫爐。

四、報告：

在你的報告中必須包括下列各項：

- (1) 說明測定鉛坩鍋（內含待測的錫塊）總熱容的實驗方法。
- (2) 將實驗數據列成表格，並繪出錫的冷卻曲線。
- (3) 說明如何自冷卻曲線求得錫的熔化熱。

測量錫的熔化熱

錫塊的質量 $m = 80.5\text{g}$

鉗鍋的質量 $M = 12.5\text{g}$

240°C 時的總熱容約為：

$$(mc + Mc')_1 = (80.5 \times 0.063 + 12.5 \times 0.217) = 7.78 \text{ cal/}^\circ\text{C}$$

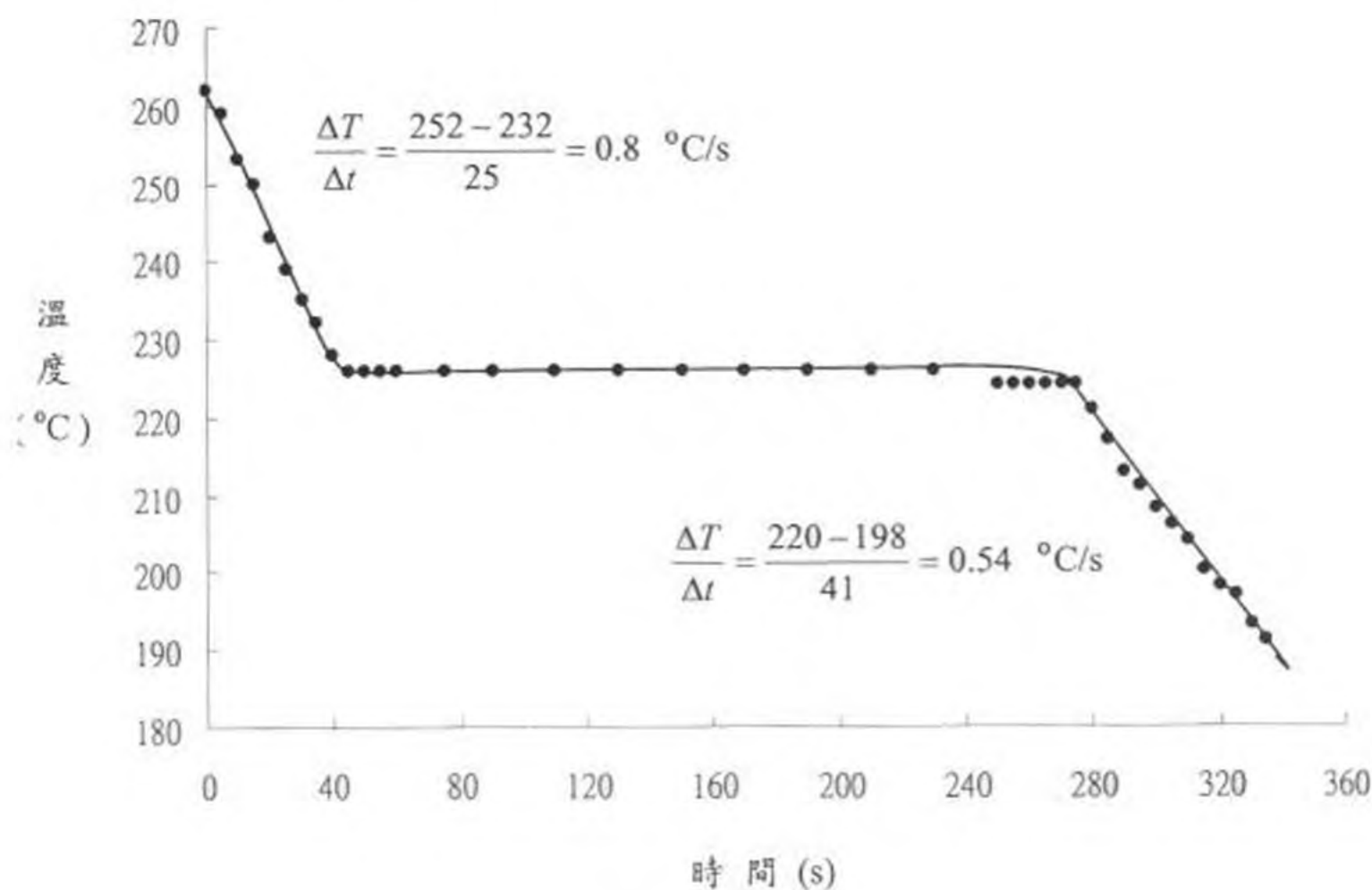
210°C 時的總熱容約為：

$$(mc + Mc')_1 = (80.5 \times 0.062 + 12.5 \times 0.217) = 7.70 \text{ cal/}^\circ\text{C}$$

數據表：

時間 t (s)	電壓 (mV)	溫度 T (°C)	時間 t (s)	電壓 (mV)	溫度 T (°C)
0	12.7	262	210	10.7	226
5	12.5	259	230	10.7	226
10	12.2	253	250	10.6	224
15	12.0	250	255	10.6	224
20	11.6	243	260	10.6	224
25	11.4	239	265	10.6	224
30	11.2	235	270	10.6	224
35	11.0	232	275	10.6	224
40	10.8	228	280	10.4	221
45	10.7	226	285	10.2	217
50	10.7	226	290	10.0	213
55	10.7	226	295	9.9	211
60	10.7	226	300	9.7	208
75	10.7	226	305	9.6	206
90	10.7	226	310	9.5	204
110	10.7	226	315	9.3	200
130	10.7	226	320	9.2	198
150	10.7	226	325	9.1	197
170	10.7	226	330	8.9	193
190	10.7	226	335	8.8	191

繪出溫度與時間的關係曲線。



由數據圖，計算熔化溫度兩端的冷卻曲線斜率 $\left(\frac{\Delta T}{\Delta t}\right)_1$ 及 $\left(\frac{\Delta T}{\Delta t}\right)_2$ 。

$$\left(\frac{\Delta T}{\Delta t}\right)_1 = \frac{252 - 232}{25} = 0.8 \text{ } ^\circ\text{C/s}$$

$$\left(\frac{\Delta T}{\Delta t}\right)_2 = \frac{220 - 198}{41} = 0.54 \text{ } ^\circ\text{C/s}$$

分別乘上對應的熱容，可得每秒散失的熱量：

$$\left(\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right)_1 = (mc + Mc')_1 \left(\frac{\Delta T}{\Delta t}\right)_1 = 7.78 \times 0.8 = 6.22 \text{ cal/s}$$

$$\left(\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right)_2 = (mc + Mc')_2 \left(\frac{\Delta T}{\Delta t}\right)_2 = 7.70 \times 0.54 = 4.16 \text{ cal/s}$$

取兩者之平均：

$$\left(\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right) = \frac{6.22 + 4.16}{2} = 5.19 \text{ cal/s}$$

凝固過程需時：3 分 50 秒 = 230 秒

⇒ 凝固過程釋出的總熱量為 $\Delta Q = 5.19 \times 230 = 1193.7 \text{ cal}$

⇒ 熔化熱 $L = \frac{\Delta Q}{m} = \frac{1193.7}{80.5} = 14.83 \text{ cal/g}$

純錫熔化熱的公認值為 14.2 cal/g