

全国中学生物理竞赛委员会常委会 编写

# 全国中学生物理竞赛

## 1~20届 试题解析

热学、  
光学与近代物理分册







全国中学生物理竞赛分类试题解析丛书

全国中学生物理竞赛委员会常委会 编写

---

# 全国中学生物理竞赛 1~20届试题解析

---

热学、光学与近代物理分册

清华大学出版社  
北京

## 内 容 简 介

全国中学生物理竞赛试题解析丛书汇集了第1~20届全国中学生物理竞赛理论试题、实验试题及参考解答,并对大部分试题进行了分析评述。丛书按学科内容体系编辑成力学,电学,热学、光学与近代物理及实验等四个分册出版。本套丛书是由全国中学生物理竞赛委员会常委会编写的,该常委会集中了北京大学、清华大学、北京师范大学、复旦大学、首都师范大学等学校的著名教授专家,书中所收入的试题是由他们精心编写和挑选的,具有很高的权威性和指导性。

本书是这套丛书的热学、光学与近代物理分册,针对1984—2004年热学、光学与近代物理三部分的理论试题按照相关的知识点分类,并对试题进行了具体的剖析。这些试题有相当难度,对训练学生的综合思维能力、提高解题技巧大有裨益。本书可供全国高中学生、中学物理教师及师范院校物理系师生教学参考。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

### 图书在版编目(CIP)数据

全国中学生物理竞赛1~20届试题解析.热学、光学与近代物理分册/全国中学生物理竞赛委员会常委会编写.一北京:清华大学出版社,2006.10

(全国中学生物理竞赛分类试题解析丛书)

ISBN 978-7-302-11980-7

I. 全… II. 全… III. 物理课—中学—解题 IV. G634.75

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第117625号

责任编辑:孙中悦

封面设计:傅瑞学

版式设计:刘祯森

责任印制:何 芊

出版发行:清华大学出版社

地 址:北京清华大学学研大厦A座

<http://www.tup.com.cn>

邮 编:100084

社 总 机:010-62770175

邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, [c-service@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:c-service@tup.tsinghua.edu.cn)

质 量 反 馈:010-62772015, [zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn)

印 装 者:北京鑫海金澳胶印有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185×230 印张:16.25 字数:325千字

版 次:2006年10月第1版 印 次:2010年4月第2次印刷

印 数:5001~7000

定 价:22.80元

产品编号:016301-01

# 前言

从1984年开始到2004年底,全国中学生物理竞赛已举行了21届,共计有300万高中学生参加,在社会上具有良好的声誉。全国中学生物理竞赛活动是经国家教育部批准,由中国科协主管,并由中国物理学会主办的。物理竞赛活动自举办以来始终遵循着这样的宗旨,即激发优秀学生学习物理学的兴趣和积极性,开发他们潜在的智力,提高他们的能力和创造精神,促进他们科学素质的提高。20多年来,物理竞赛活动健康发展,同时对中学物理教学的改进和教学质量的提高也起到了一定的作用。

物理竞赛题无疑会对参赛学生的学习和努力方向起着引导作用,其中很多质量较高的试题,对于提高学生学习物理的兴趣,鼓励学生在学好课内知识的基础上深入学习、独立思考,促使学生扩大视野和改进学习方法,启迪和开发智力,尤其是在锻炼他们灵活地、创造性地进行科学思维和培养解决问题的能力等方面发挥了较好的作用。为了适应广大中学师生的需要,我们编辑了本书,汇集了第1~20届全国中学生物理竞赛试题(理论题和实验题)及参考解答,由命题组部分教师对大部分题目进行了剖析,并按学科内容体系编辑成力学,电学,热学、光学和近代物理及实验等四册出版。同时将《全国中学生物理竞赛内容提要》一并收入。对于如何利用本书我们提出以下几点建议:

1. 要以正确的教育思想指导使用。教育必须贯彻因材施教的原则,要按教育和教学的规律办事。要从学生的实际出发,以扎扎实实打好知识、能力、非智力因素等各方面的基础为前提,启发引导,充分调动学生的主观能动作用,使学生得以充分发挥潜力,达到与其智力发展水平相适应的高水平。必须重视能力和非智力因素的培养与

提高,以达到全面提高学生科学素质的要求。

2. 物理竞赛是学有余力并对物理有兴趣的高中学生参加的一项课外活动,竞赛题是为这些学生设计的,因此不能要求多数学生都来做这些题目。

3. 由于在竞赛中要求将学习特别优秀的学生选拔出来,部分题目无论是理论题或实验题难度较大,对能力的要求较高,即使是班上的优秀学生也不一定都能做出来,有时需要用很多的时间才能解出一个题目,这是正常的情况。正是在这种尝试、失败、再尝试的反复思考、探索过程中,学生才能发现自己对物理概念、物理原理的理解和灵活运用以及实践能力等方面存在的问题,才能在分析问题和解决问题的能力上获得突破和提高。久思不得其解,一旦迎刃而解,就会有豁然顿悟之感,这种不懈追求真知的精神更将永久受用。因此,千万不要盲目追求做题的数量。应该让学生在完成课内学习任务后自由选择做题,我们特别强调:在解题过程中,学生应独立思考、独立完成,必要时教师可以从旁指点引导,切忌越俎代庖,以“教”代“学”,更不要揠苗助长。不要把本应发挥学生主观能动性的课外学习活动又变为学生被动接受知识的过程。

4. 在个人认真钻研的基础上,同学间进行相互讨论或争辩对提高水平十分有益,应予以提倡。同学们处在平等的地位上,讨论时没有顾虑,发表意见能比较充分,要想说服对方就必须把问题真正搞清楚。别人的质疑和诘难可以揭露出自己在理解中存在的片面问题,促使自己更为深入、更加全面地思考。在讨论或争辩过程中双方都将受益,而且这也有助于培养自己与他人互相尊重、平等相处的作风和习惯。

5. 竞赛活动为参赛学生提供了有利于课外学习的环境和条件,这种学习包括认真读书、观察和研究现象、进行实验、讨论和辩论以及参加某些实践活动等。要特别强调的是,做习题或研究习题只是其中一个学习环节,千万不要误认为学物理就是做习题。否则不仅学不好物理,而且对提高自己的科学素养也很有害。

我们衷心希望物理竞赛活动能帮助学生生动活泼地进行学习,能促进他们主动获取新知识并能评价新知识,能将他们培养成为具有较强的科学思维能力、实践能力,能独立思考,具有创造精神的科学技术后备人才。

全国中学生物理竞赛委员会名誉主任: 沈克琦

全国中学生物理竞赛委员会主任: 丛树桐

# 目录

## 第一部分 热 学

- ◆ 73 一、分子动理论
- ◆ 16 二、气体的性质
- ◆ 三、热力学第一定律
- ◆ 四、物态变化
- ◆ 五、液体的性质、热传递和热膨胀

## 第二部分 光 学

- ◆ 95 六、光的直进、反射和折射
- ◆ 124 七、球面镜、透镜、三棱镜和组合光学系统
- ◆ 183 八、物理光学

### 第三部分 近代物理



九、原子结构



十、原子核和粒子



十一、相对论与量子论



十二、天体和宇宙



十三、科学史和科普知识



附录 全国中学生物理竞赛内容提要



第一部分

第一章



## 一、分子动理论

1. 估算在室温下,真空度达到  $1.3 \times 10^{-6}$  Pa 时,容器内空气分子间的平均距离(取 1 位有效数字即可).

$$\text{附: } R=8.3 \text{ J} \cdot (\text{mol} \cdot \text{K})^{-1}$$

$$N_A=6.0 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

### 解析

由理想气体状态方程  $pV = \frac{n}{N_A}RT$  可知,平均每个分子所占有的空间为  $\frac{V}{n} = \frac{RT}{pN_A}$ . 式中  $p$  为压强,  $V$  为气体体积,  $n$  为总分子数,  $N_A$  为阿伏加德罗常数,  $R$  为摩尔气体常量,  $T$  为热力学温度. 这样,可估算分子间平均距离约为

$$d = \sqrt[3]{\frac{V}{n}} = \sqrt[3]{\frac{RT}{pN_A}}$$

将  $p$ 、 $R$ 、 $N_A$  的值代入,取  $T=300 \text{ K}$ ,可得

$$d \approx 1 \times 10^{-5} \text{ m}$$

2. 气体分子的直径约为  $2 \times 10^{-10} \text{ m}$ ,试估算标准状况下近邻气体分子间的平均距离  $l$  与分子直径  $d$  的比值(取 2 位有效数字即可).

$$\text{附: } c=3.0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{质子质量 } m_p=1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$R=8.3 \text{ J} \cdot (\text{mol} \cdot \text{K})^{-1}$$

$$N_A=6.0 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

### 解析

标准状况下,1 mol 气体体积  $V=22.4 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ . 每个分子平均占有体积为  $\frac{V}{N_A}$ ,所以邻近分子间平均距离为

$$l = \left( \frac{V}{N_A} \right)^{1/3}$$

用  $d$  表示气体分子的直径, 则分子间的平均距离与分子直径之比为

$$\frac{l}{d} = \frac{\left( \frac{V}{N_A} \right)^{1/3}}{d} \approx 17$$

在本题中, 题目所附的常数只有阿伏加德罗常数  $N_A$  是有用的, 另外三个物理常数用不上.

### 3. 试就你所知, 回答下列关于温度的问题.

- 1) 从宏观角度看, 什么是温度? 从微观角度看, 什么是温度?
- 2) 一个水银温度计, 一个酒精温度计, 两者都在冰点校准了  $0^\circ\text{C}$ , 在水的沸点校准了  $100^\circ\text{C}$ , 然后在  $0^\circ\text{C}$  与  $100^\circ\text{C}$  之间等分成 100 份. 现在分别用这两个温度计测量两个物体的温度, 结果两个温度计都指示  $30^\circ\text{C}$  处. 问这两个物体的温度是否相同? 为什么?
- 3) 玻璃熔点以上的高温和水银凝固点以下的低温怎样测量? 这样的高温和低温是否仍能用摄氏度表示? 为什么?
- 4) 太阳表面的温度大约是 6000 K, 这是怎样测量出来的?

#### 解析

1) 从宏观角度看, 温度是物体冷热程度的量度; 从微观角度看, 温度是物体分子热运动程度的量度, 物体的热力学温度与其分子平均动能成正比.

2) 不一定一样. 用不同测温物质制成的温度计, 尽管在水的冰点和水的沸点校准  $0^\circ\text{C}$  和  $100^\circ\text{C}$ , 中间等分的刻度是 100 份, 但由于不同测温物质的体积随温度变化的规律不完全相同, 因此, 它们所测出的物体温度并不一定相同.

3) 对玻璃熔点以上和水银凝固点以下的温度, 可以用气体温度计, 电阻温度计, 热电偶温度计等测量.

对这样的高温和低温, 仍可用摄氏度表示, 因为现在摄氏温度  $t$  定义为

$$t/^\circ\text{C} = T/\text{K} - 273.15$$

$T$  是热力学温度.

4) 利用黑体热辐射中能量密度最大的波长与其热力学温度成反比的性质, 把太阳近似地看做黑体, 测出太阳光谱中能量密度最大处的波长, 即可推算出其表面温度.

4. 一个密闭容器内盛有水(未饱和), 处于热平衡状态. 已知水在  $14^\circ\text{C}$  时的饱和蒸汽压为  $1.60 \times 10^3 \text{ Pa}$ . 设水蒸气分子碰到水面时都变成水, 气体分子的平均速率与气体的

热力学温度  $T$  的平方根成正比, 试近似计算在  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$  和  $14\text{ }^{\circ}\text{C}$  时, 单位时间内通过单位面积水面的蒸发变为水蒸气的分子数之比  $n_{100}/n_{14}$  等于多少? (取 1 位有效数字即可)

### 解析

因为处于热平衡状态, 水面上的蒸汽是饱和汽, 所以单位时间内由水变为水蒸气的分子数等于由水蒸气变为水的分子数. 设用  $n$  表示单位时间内碰到水面单位面积上的水蒸气分子数,  $n_0$  表示单位体积内的水蒸气分子数,  $\bar{v}$  表示其平均速率, 则有

$$n \propto n_0 \bar{v} \quad (1)$$

由于我们只要求取一位有效数字, 所以水蒸气在平衡状态时各参量之间的关系可以近似地用理想气体状态方程来处理. 因此, 在热力学温度为  $T$  和  $T'$  时, 分别有  $n_0 = pN_A/(RT)$  和  $n'_0 = p'N_A/(RT')$ . 式中  $N_A$  为阿伏加德罗常数,  $R$  为摩尔气体常量. 可见

$$n_0 \propto p/T \quad (2)$$

将(2)式和题中已知的  $\bar{v} \propto \sqrt{T}$  代入(1)式中可得

$$n \propto p/\sqrt{T} \quad (3)$$

因而

$$\frac{n_{100}}{n_{14}} = \frac{p_{100}}{\sqrt{373}} \bigg/ \frac{p_{14}}{\sqrt{287}} \quad (4)$$

因为  $p_{100} = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ , 且已知  $p_{14} = 1.60 \times 10^3 \text{ Pa}$ , 代入(4)式可得

$$\frac{n_{100}}{n_{14}} = \frac{1.01 \times 10^5 \times \sqrt{287}}{1.6 \times 10^3 \times \sqrt{373}} \approx 55$$

此题属于分子热运动理论中的估算问题, 可以考查学生根据有关原理进行估算的能力. 解此题时必须明确:

- 1) 水蒸气分子与水分子相互转化的关系;
- 2) 分子运动中单位时间内碰到单位面积上的分子数与  $n_0 \bar{v}$  成正比;
- 3) 由饱和蒸汽压及温度可以估算  $n_0$ .

这些都是在学习时可以而且应该注意到的.



## 二、气体的性质

1. 两端封闭的均匀玻璃管内,有一段水银柱将管内气体分为两部分. 玻璃管与水平面成  $\alpha$  角,如图 2-1 所示,将玻璃管整体浸入较热的水中,重新达到平衡. 试论证水银柱的位置是否变化. 如果变化,如何变?

### 解析

原来平衡温度为  $T$ ,后来平衡温度为  $T'$ . 暂假定水银柱不移动. 设两次平衡时下面气体的压强分别为  $p_1, p'_1$ ; 上面气体相应的压强分别为  $p_2, p'_2$ . 按假定,上、下均为等容过程. 故有

$$\begin{aligned} T/T' &= p_1/p'_1, & T/T' &= p_2/p'_2 \\ p'_1/p_1 &= p'_2/p_2 = (p'_1 - p'_2)/(p_1 - p_2) \\ &= (\Delta p')/\Delta p \end{aligned}$$

$\Delta p$  为水银柱的压强. 因为  $T'/T > 1$ , 故有  $p'_1 - p'_2 > \Delta p$ .

由此可知,如设水银柱位置不变,则温度升高后,下面气体与上面气体的压强之差必然大于水银柱产生的压强. 故此水银柱位置不可能保持不变,它必然向上移动.



图 2-1

2. 如图 2-2 所示,一根两端封闭、粗细均匀的石英管,竖直放置,内有一段水银柱,将管隔成上下两部分. 下方为空气,上方为一种可分解的双原子分子气体(每个分子由两个原子组成). 此种双原子分子气体的性质为:当  $T > T_0$  时,其分子开始分解为单原子分子(仍为气体). 用  $n_0$  表示  $T_0$  时的双原子分子数,  $\Delta n$  表示  $T_0 + \Delta T$  时分解了的双原子分子数,其分解规律为当  $\Delta T$  很小时,有如下的关系:



已知初始温度为  $T_0$ , 此时,下方的气柱长度为  $2l_0$ , 上方气柱长度为  $l_0$ , 水银柱产生的压强为下方气体压强的  $\alpha$  倍 ( $0 < \alpha < 1$ ), 试讨论

当温度由  $T_0$  开始缓慢上升时,水银柱将上升还是下降. 忽略石英管

图 2-2

$$\Delta n/n_0 = \Delta T/T_0$$

和水银柱的体积随温度的变化。

[提示] 可用  $xl_0$  表示水银柱因温度升高而移动的距离,  $x > 0$  表示升高,  $x < 0$  表示下降。

### 解析

解法 I 在温度升高过程中, 上下端气体均应满足气态方程。

首先分析水银柱下端的气体。当温度为  $T_0$  时, 其压强设为  $p_0$ , 气柱长度为  $2l_0$ 。当温度上升到  $T_0 + \Delta T$  时, 水银柱向上移动  $xl_0$ , 从而气柱长度变为  $(2+x)l_0$  (图 2-3), 设此时之压强为  $p$ , 于是有物态方程:

$$\frac{p_0 \cdot 2l_0}{T_0} = \frac{p(2+x)l_0}{T_0 + \Delta T} \quad (1)$$

或 
$$\left(1 + \frac{x}{2}\right) \frac{p}{p_0} = 1 + \frac{\Delta T}{T_0} \quad (2)$$

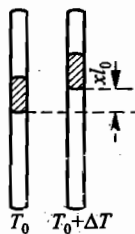


图 2-3

对于水银柱上方之气体, 若令水银柱之压强为  $\alpha p_0$ , 则当温度为  $T_0$  时, 其气体压强为  $p_0 - \alpha p_0$ , 气体柱长度为  $l_0$ , 分子数则为  $n_0$ , 当温度上升至  $T_0 + \Delta T$  时, 压强为  $p - \alpha p_0$ , 气体柱长度为  $(1-x)l_0$ , 而气体分子数则因有  $\Delta n$  个双原子分子分解为  $2\Delta n$  个单原子分子, 分子数变为

$$n_0 + \Delta n = n_0 \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right)$$

故有  $T_0$  时: 
$$(1 - \alpha)p_0 l_0 S = (n_0 / N_A) RT_0 \quad (3)$$

( $T_0 + \Delta T$ ) 时:

$$(p - \alpha p_0)(1 - x)l_0 S = n_0 \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right) R(T_0 + \Delta T) / N_A \quad (4)$$

式中  $S$  为管之内横截面积,  $N_A$  为阿伏加德罗常数。由(3)、(4)式可得

$$\frac{1}{1 - \alpha} \left(\frac{p}{p_0} - \alpha\right)(1 - x) = \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right)^2 \quad (5)$$

由(2)、(5)两式消去  $p/p_0$ , 可得  $x$  所满足的二次方程

$$ax^2 + bx + c = 0$$

其中

$$\left. \begin{aligned} a &= \alpha/2 \\ b &= - \left[ \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right)^2 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right)^2 \right] \\ &= - \left[ \left(\frac{3}{2} - \alpha\right) + (2 - \alpha) \frac{\Delta T}{T_0} + \frac{1}{2} (1 + \alpha) \left(\frac{\Delta T}{T_0}\right)^2 \right] \\ c &= \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right) - \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right)^2 - \alpha + \alpha \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right)^2 \\ &= (2\alpha - 1) \frac{\Delta T}{T_0} - (1 - \alpha) \left(\frac{\Delta T}{T_0}\right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$



方程式的解为 
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (7)$$

首先,应判别(7)式中“±”号取法问题. 为此,令  $\Delta T \rightarrow 0$ , 此时  $b \rightarrow -[(3/2) - \alpha]$ ,  $c \rightarrow 0$ . 则(7)式中  $x$  解为:

当(7)式中之“±”号取正时,

$$x \xrightarrow{\Delta T \rightarrow 0} \frac{[(3/2) - \alpha] + [(3/2) - \alpha]}{2 \cdot (\alpha/2)} = (3/\alpha) - 2 > 1$$

当(7)式中之“±”号取负时,

$$x \xrightarrow{\Delta T \rightarrow 0} \frac{[(3/2) - \alpha] - [(3/2) - \alpha]}{2 \cdot (\alpha/2)} = 0$$

显然,后者合理,前者不合理,故取  $x$  之解为

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (8)$$

据此可以分析,当  $\Delta T > 0$  时,水银柱在什么条件下上升 ( $x > 0$ ), 什么条件下下降. 因  $0 < \alpha < 1$ , 由(6)式可知

$$b < 0, \quad a > 0 \quad (9)$$

再由(8)式可知,  $x$  之值取决于  $c$  之值. 当  $c > 0$  时,  $x > 0$ . 而当  $c < 0$  时,  $x < 0$ . 因  $\Delta T$  很小, 在  $c$  之表示式(6)中忽略  $(\Delta T/T_0)^2$  项, 有

$$c = (2\alpha - 1)\Delta T/T_0 \quad (10)$$

由此可见, 当  $\alpha > 1/2$  时,  $c > 0$ ,  $x > 0$ , 水银柱上升;

当  $\alpha < 1/2$  时,  $c < 0$ ,  $x < 0$ , 水银柱下降;

当  $\alpha = 1/2$  时,  $c = -(1/2)(\Delta T/T_0)^2$ ,  $c < 0$ ,  $x < 0$ , 水银柱下降.

**解法 II** 暂时假定水银柱不动, 分析温度上升后, 上、下气体压强差的变化.

当温度为  $T_0$  时, 下部气体之压强为  $p_0$ . 温度上升至  $T_0 + \Delta T$  时, 其压强变为  $p_1$ , 因体积不变, 故有

$$p_1 = p_0(T_0 + \Delta T)/T_0 = p_0 + p_0(\Delta T/T_0) \quad (1')$$

水银柱压强为  $\alpha p_0$ , 故当  $T = T_0$  时, 上部气体之压强为  $(1 - \alpha)p_0$ , 当温度升至  $T_0 + \Delta T$  时, 有  $\Delta n$  个双原子气体分子分解而成为  $2\Delta n$  个单原子气体分子. 故气体分子数由  $n_0$  增至  $n_0 + \Delta n$  个. 设此时压强为  $p_2$ , 则在温度上升前后气态方程为

$$(1 - \alpha)p_0 l_0 S = (n_0/N_A)RT_0 \quad (2')$$

$$p_2 l_0 S = (n_0 + \Delta n)R(T_0 + \Delta T)/N_A \quad (3')$$

其中  $S$  为管之内横截面积,  $N_A$  为阿伏加德罗常数. 由(2')、(3')二式可得

$$p_2 = (1 - \alpha)p_0(1 + \Delta n/n_0)(1 + \Delta T/T_0) = (1 - \alpha)p_0(1 + \Delta T/T_0)^2 \quad (4')$$

比较升温之后下部气体和上部气体的压强之差

$$\Delta p = p_1 - p_2 - \alpha p_0 \quad (5')$$

若此差大于零,则水银柱上升;若小于零,水银柱应下降. 代入(1')、(4')式的结果有

$$\Delta p = (2\alpha - 1)(\Delta T/T_0)p_0 - (1 - \alpha)p_0(\Delta T/T_0)^2 \quad (6')$$

因  $\Delta T$  很小,故  $(\Delta T/T_0)$  项起主导作用,而  $(\Delta T/T_0)^2$  项的影响较之第一项要小得多. 故此分析如下:

当  $\alpha > 1/2$  时,  $\Delta p > 0$ , 水银柱上升;

当  $\alpha < 1/2$  时,  $\Delta p < 0$ , 水银柱下降;

当  $\alpha = 1/2$  时,  $\Delta p < 0$ , 水银柱下降.

3. 有一两端封闭的、横截面均匀的 U 形玻璃管, 两臂管内分别贮有适量的氢气 1 与氦气 2, 一段水银柱把两种气体隔开, 如图 2-4 所示. 将此 U 形管两端朝上竖直立起时, 两臂中气柱的长度分别为  $L_1 = 12$  cm,  $L_2 = 18$  cm; 两端朝下竖直立起时, 气柱的长度分别为  $L'_1 = 6$  cm,  $L'_2 = 24$  cm. 问将此 U 形管平放在水平桌面上时, 两臂中气柱的长度  $L_{10}$  与  $L_{20}$  各是多少? 设 U 形管两臂的长度相等, 水银柱不断裂, 没有发生气体从一臂通过水银逸入另一臂中的情况.

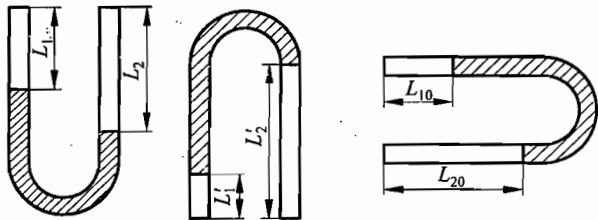


图 2-4

### 解析

两种气体均可视为理想气体, 过程是等温的, 对两种气体可分别使用玻意耳定律.

设在 U 形管两端朝上、朝下和平放三种情况下气体 1、2 的压强分别为  $p_1$ 、 $p_2$ ;  $p'_1$ 、 $p'_2$  和  $p_{10}$ 、 $p_{20}$ . 令 U 形管横截面积为  $S$ , 水银的密度为  $\rho$ , 则有

$$p_2 - p_1 = (L_2 - L_1)\rho g \quad (1)$$

$$p'_2 - p'_1 = -(L'_2 - L'_1)\rho g \quad (2)$$

由玻意耳定律

$$p_1 L_1 S = p_{10} L_{10} S, \quad p_2 L_2 S = p_{20} L_{20} S \quad (3)$$

$$p'_1 L'_1 S = p_{10} L_{10} S, \quad p'_2 L'_2 S = p_{20} L_{20} S \quad (4)$$

由(1)、(3)式可得

$$p_2 - p_1 = \frac{p_{20} L_{20}}{L_2} - \frac{p_{10} L_{10}}{L_1} = (L_2 - L_1)\rho g \quad (5)$$

由(2)、(4)式可得

$$p'_2 - p'_1 = \frac{p_{20}L_{20}}{L'_2} - \frac{p_{10}L_{10}}{L'_1} = -(L'_2 - L'_1)\rho g \quad (6)$$

在 U 形管平放情况下

$$p_{10} = p_{20} \quad (7)$$

把(7)式代入(5)、(6)式,并代入  $L_1$ 、 $L_2$ 、 $L'_1$ 、 $L'_2$  的数值,得

$$\frac{p_{10}L_{20}}{18} - \frac{p_{10}L_{10}}{12} = 6\rho g \quad (8)$$

$$\frac{p_{10}L_{20}}{24} - \frac{p_{10}L_{10}}{6} = -18\rho g \quad (9)$$

由(8)、(9)两式得到

$$2L_{10} = L_{20}$$

又因

$$L_{10} + L_{20} = L_1 + L_2 = 30 \text{ cm}$$

故可得

$$L_{10} = 10 \text{ cm}, \quad L_{20} = 20 \text{ cm}$$

4. 一容积为  $\frac{1}{4}$  L 的抽气筒,每分钟可完成 8 次抽气动作. 一容积为 1 L 的容器与此抽气筒相连通,求抽气筒工作多少时间才能使容器内气体的压强由  $1.01 \times 10^5$  Pa(合 760 mm 水银柱高)降为  $2.53 \times 10^2$  Pa(合 1.9 mm 水银柱高). 设在抽气过程中容器内的温度保持不变.

### 解析

用  $V_0$  表示容器的容积,  $V$  表示抽气筒的容积,则每抽一次之前,容器内气体的体积为  $V_0$ ; 抽气后,该气体的体积变为  $V_0 + V$ . 因此,根据玻意耳定律可知,每抽一次,抽前与抽后容器内气体压强之比应为  $\frac{V_0 + V}{V_0}$ . 若总共抽了  $N$  次,则最初压强  $p_0$  与最后压强  $p$  之比应为

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{V_0 + V}{V_0}\right)^N$$

或

$$N = \frac{\lg \frac{p_0}{p}}{\lg \frac{V_0 + V}{V_0}}$$

代入数值,经计算(取  $\lg 2 = 0.301$ )可得

$$N = 27$$

所以工作时间为

$$t = \frac{27}{8/\text{min}} = 3.4 \text{ min}$$

5. 一个粗细均匀的U形的玻璃管在竖直平面内放置,如图2-5所示. U形管左端封闭,右端通大气,大气压为 $p_0$ . 管内装入水银,两边水银面的高度差为 $h$ . 左管内空气柱的长度为 $L$ . 如果让该管在原来的竖直平面内自由下落,求两边水银面的高度差.

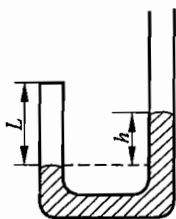


图 2-5

**解析**

设未下落时封闭管内空气压强为 $p_1$ ,则有

$$p_1 = p_0 + \rho gh \quad (1)$$

式中 $\rho$ 为水银密度. 当管和其中水银都以重力加速度 $g$ 自由下落时,水银处于失重状态,此时水银内任何处的压强都为 $p_0$ ,从而可知封闭管内空气压强也变为 $p_0$ . 若此时封闭管内空气柱长度为 $L'$ ,则在温度不变时由玻意耳定律可知

$$L'p_0 = Lp_1 \quad (2)$$

由(1)、(2)两式可得

$$L' = L(p_0 + \rho gh)/p_0$$

即封闭管内水银面下降了 $L' - L = \rho ghL/p_0$ ,所以两管内液面差变为 $h' = h + 2(L' - L)$ ,即

$$h' = h + 2\rho ghL/p_0$$

6. 一个密闭的圆柱形气缸竖直放在水平桌面上,缸内有一与底面平行的可上下滑动的活塞将气缸隔为两部分. 活塞导热性能良好,与气缸壁之间无摩擦、不漏气. 活塞上方盛有1.5 mol氢气,下方盛有1 mol氧气,如图2-6所示. 它们的温度始终相同. 已知在温度为320 K时,氢气的体积是氧气的4倍. 试求在温度是多少时氢气的体积是氧气的3倍?

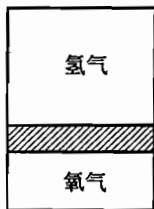


图 2-6

**解析**

设在温度 $T=320 \text{ K}$ 时,氢气和氧气的体积分别为 $V_1$ 、 $V_2$ ,压强分别为 $p_1$ 、 $p_2$ ,已知 $V_1=4V_2$ .

将氢气和氧气都看做理想气体,有

$$p_1 \cdot V_1 = 1.5RT \quad (1)$$

$$p_2 \cdot V_2 = RT \quad (2)$$

设在温度为 $T'$ 时,氢气的体积 $V'_1$ 为氧气的体积 $V'_2$ 的3倍, $V'_1=3V'_2$ ,用 $p'_1$ 、 $p'_2$ 分别表示此时氢气和氧气的压强,则有

$$p'_1 \cdot V'_1 = 1.5RT \quad (3)$$

$$p'_2 \cdot V'_2 = RT' \quad (4)$$

因为总体积不变,所以

$$V_1 + V_2 = V'_1 + V'_2 \quad (5)$$

因为活塞的质量不变,所以

$$p_2 - p_1 = p'_2 - p'_1 \quad (6)$$

根据题中已知数据和以上六式,可解得

$$T' = 500 \text{ K}$$

7. 如图 2-7 所示,一薄壁钢筒竖直放在水平桌面上,筒内有一与底面平行并可上下移动的活塞 K,它将筒隔成 A、B 两部分,两部分的总容积  $V = 8.31 \times 10^{-2} \text{ m}^3$ . 活塞导热性能良好,与筒壁无摩擦、不漏气. 筒的顶部轻轻放上一质量与活塞 K 相等的铅盖,盖与筒的上端边缘接触良好(无漏气缝隙). 当筒内温度  $t = 27^\circ \text{C}$  时,活塞上方 A 中盛有  $n_A = 3.00 \text{ mol}$  的理想气体,下方 B 中盛有  $n_B = 0.40 \text{ mol}$  的理想气体, B 中气体的体积占总容积的  $1/10$ . 现对筒内气体缓慢加热,把一定的热量传给气体,当达到平衡时, B 中气体的体积变为占总容积的  $1/9$ . 问筒内的气体温度  $t'$  是多少? 已知筒外大气压强为  $p_0 = 1.04 \times 10^5 \text{ Pa}$ , 摩尔气体常量  $R = 8.31 \text{ J} \cdot (\text{mol} \cdot \text{K})^{-1}$ .

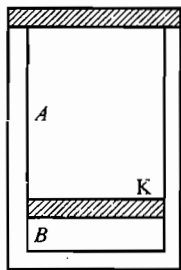


图 2-7

### 解析

设温度为  $t$  时, A、B 中气体的体积分别为  $V_A$ 、 $V_B$ , 它们的压强  $p_A$  和  $p_B$  可由气态方程

$$p_A V_A = n_A R T \quad (1)$$

$$p_B V_B = n_B R T \quad (2)$$

求得, 式中  $T = (273 + 27) \text{ K} = 300 \text{ K}$ ,  $V_B = (1/10)V$ ,  $V_A = (9/10)V$ . 加热时, 随着温度升高, 活塞 K 向上移动, A 中气体的压强增大. 如果 A 中气体对铅盖的压力大于筒外大气对铅盖的压力及铅盖的重力之和, 铅盖将被顶开, 气体将从 A 中缓慢漏出. 故首先应判定 B 中气体的体积由  $(1/10)V$  增加到  $(1/9)V$  的过程中, A 中气体是否有漏出.

先假设铅盖未被顶开, 当 A、B 中气体的体积分别是  $V'_B = (1/9)V$ ,  $V'_A = (8/9)V$  时, 压强分别为  $p_{A1}$ 、 $p_{B1}$ , 温度为  $T_1$ , 则有

$$p_{A1} V'_A = n_A R T_1 \quad (3)$$

$$p_{B1} V'_B = n_B R T_1 \quad (4)$$

$$p_{B1} - p_{A1} = p_B - p_A \quad (5)$$

由 (1)、(2)、(3)、(4)、(5) 式可求出

$$p_{A1} = 3.00 \times 10^5 \text{ Pa} \quad (6)$$

而  $p_0 + (p_B - p_A) = [1.04 \times 10^5 + (1.20 - 1.00) \times 10^5] \text{ Pa} = 1.24 \times 10^5 \text{ Pa}$

由于  $p_{A1} > p_0 + (p_B - p_A)$ , 可见, 在 B 中气体体积变为  $(1/9)V$  以前, 铅盖已被顶开, A 中气体不断缓慢漏出. 实际上只要 A 内气体压强比  $p_0 + (p_B - p_A)$  稍大一点, 就有气体漏出, 随着 A 中气体温度不断升高, 不断有气体漏出, 而 A 内气体的压强始终等于  $p_0 + (p_B - p_A)$ .

设加热完毕后, 气体温度为  $T'$ , A 中气体压强为  $p'_A$ , 则有

$$p'_A = p_0 + (p_B - p_A) \quad (7)$$

若 B 中气体的压强为  $p'_B$ , 则有

$$p'_B V'_B = n_B R T' \quad (8)$$

$$p'_B - p'_A = p_B - p_A \quad (9)$$

由(1)、(2)、(7)、(8)、(9)式可求得

$$T' = \frac{p'_B V'_B}{n_B R} = \frac{V'_B}{n_B R} [p_0 + 2(p_B - p_A)] \quad (10)$$

代入数据后可求得

$$T' = 400 \text{ K}$$

$$t' = T' - T_0 = 127 \text{ }^\circ\text{C}$$

8. 如图 2-8 所示, 在一内径均匀的绝热的环形管内, 有三个薄金属片制成的活塞将管隔成三部分. 活塞的导热性和封闭性良好, 且可无摩擦地在圆环内运动. 三部分中盛有同一种理想气体. 容器平放在水平桌面上. 起始时, I、II、III 三部分气体的压强都是  $p_0$ , 温度分别是  $t_1 = -3 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $t_2 = 47 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $t_3 = 27 \text{ }^\circ\text{C}$ . 三个活塞到圆环中心连线之间的夹角分别是  $\alpha_1 = 90^\circ$ ,  $\alpha_2 = 120^\circ$ ,  $\alpha_3 = 150^\circ$ .

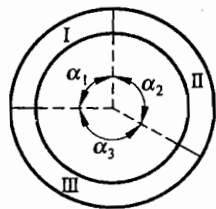


图 2-8

1) 试求最后达到平衡时, 三个活塞到圆环中心的连线之间的夹角各是多少.

2) 已知一定质量的理想气体的内能的变化量与其温度的变化量成正比(与压强、体积的变化无关), 试求达到平衡时气体的温度和压强.

### 解析

1) 设气体的摩尔质量为  $M$ , 三部分气体的质量分别为  $m_1, m_2, m_3$ . 起始时体积分别为  $V_1, V_2, V_3$ . 起始温度已知为  $T_1 = 270 \text{ K}$ ,  $T_2 = 320 \text{ K}$ ,  $T_3 = 300 \text{ K}$ . 由气态方程可知

$$p_0 V_1 = \frac{m_1}{M} R T_1, \quad p_0 V_2 = \frac{m_2}{M} R T_2, \quad p_0 V_3 = \frac{m_3}{M} R T_3 \quad (1)$$

由题意知

$$V_1 : V_2 : V_3 = \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 \quad (2)$$

最后达到平衡时,三部分气体的压强和温度都相同,所以它们的体积  $V'_1, V'_2, V'_3$  与其质量成正比. 设那时对应的角度为  $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$ , 则有

$$\alpha'_1 : \alpha'_2 : \alpha'_3 = V'_1 : V'_2 : V'_3 = m_1 : m_2 : m_3 \quad (3)$$

另外,有

$$\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3 = 360^\circ \quad (4)$$

由以上各式可解得

$$\alpha'_1 \approx 99^\circ, \quad \alpha'_2 \approx 112^\circ, \quad \alpha'_3 \approx 149^\circ \quad (5)$$

2) 设单位质量的这种理想气体温度变化 1 K 时其内能的变化量为  $c$ , 气体最后平衡时温度和压强分别为  $T$  和  $p$ , 由能量守恒可得

$$m_1 c(T - T_1) + m_2 c(T - T_2) + m_3 c(T - T_3) = 0 \quad (6)$$

由(3)、(5)、(6)三式可得

$$T = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2 + m_3 T_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{\alpha'_1 T_1 + \alpha'_2 T_2 + \alpha'_3 T_3}{\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3} = 298 \text{ K}$$

用  $V$  表示三部分的总体积, 由(1)式可得

$$p_0 V = (m_1 T_1 + m_2 T_2 + m_3 T_3) R / M \quad (7)$$

达到平衡时有

$$pV = (m_1 + m_2 + m_3) RT / M \quad (8)$$

由(6)式可知, (7)、(8)两式的右边相等, 所以得到

$$p = p_0$$

9. 如图 2-9 所示, 有两个截面为  $S$  的相同 U 形管 1、2, 其内分别装有高度为  $h_1$  和  $h_2$ 、密度为  $\rho$  的液体. 现用同样截面的导管将两者在大气中密接起来, 如图 2-10 所示. 导管中有一活塞 D, 它把管中气体分成长度皆为  $L_0$  的两部分, 每部分中气体的压强皆为大气压  $p_0$ . 活塞与管壁间的最大静摩擦力为  $F$ . 现向 U 形管 1 开口端缓慢注入一定量的同种液体, 达到平衡时 U 形管 2 的左侧液面高度变为  $h_3$ . 试求注入液体的体积.

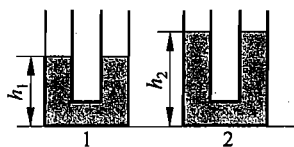


图 2-9

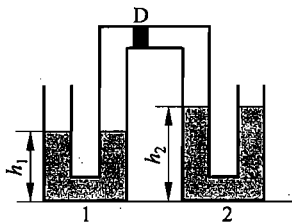


图 2-10

### 解析

设加入 U 形管 1 中的液体体积为  $V$ , 则这部分液体在 U 形管中的长度为

$$x = V/S \quad (1)$$

令  $h_{1L}$ 、 $h_{1R}$  分别表示 U 形管 1 中左、右两侧液面的高度,  $h_{2R}$  表示 U 形管 2 右侧液面的高度, 根据液体的不可压缩性, 由图 2-11 可知

$$2h_1 + x = h_{1L} + h_{1R} \quad (2)$$

$$h_{2R} + h_3 = 2h_2 \quad (3)$$

令  $p_L$  和  $p_R$  分别代表系统达到新的平衡后活塞 D 左、右两侧的气体压强, 由平衡条件可得

$$p_0 + \rho gh_{1L} = p_L + \rho gh_{1R} \quad (4)$$

$$p_R + \rho gh_3 = p_0 + \rho gh_{2R} \quad (5)$$

$$p_L = p_R + F/S \quad (6)$$

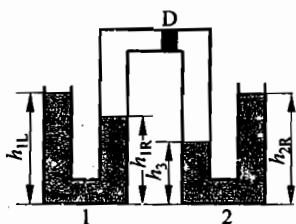


图 2-11

以  $L_L$ 、 $L_R$  分别代表系统达到新的平衡后活塞 D 左、右两侧气柱的长度. 若将中间密封气体视为理想气体, 运用玻意耳定律可以分别得到

$$p_0 L_0 = p_L L_L = p_R L_R \quad (7)$$

因为在液体注入前后管子各部分的长度是不变的, 因此可有关系式

$$h_1 + h_2 + 2L_0 = h_{1R} + h_3 + L_L + L_R \quad (8)$$

由以上各式解得

$$\begin{aligned} x &= h_{1L} + h_{1R} - 2h_1 = 2(h_2 - h_1 - h_3) + \frac{F}{\rho g S} + 2h_{1R} \\ &= 4(h_2 - h_3 + L_0) + \frac{F}{\rho g S} - \frac{2p_0 L_0}{p_0 + 2\rho g(h_2 - h_3)} \\ &\quad - \frac{2p_0 L_0}{p_0 + 2\rho g(h_2 - h_3) + F/S} \end{aligned} \quad (9)$$

由(1)和(9)式可知, 要注入液体的体积应为

$$\begin{aligned} V &= 4S(h_2 - h_3 + L_0) + \frac{F}{\rho g} - \frac{2Sp_0 L_0}{p_0 + 2\rho g(h_2 - h_3)} \\ &\quad - \frac{2Sp_0 L_0}{p_0 + 2\rho g(h_2 - h_3) + F/S} \end{aligned} \quad (10)$$

10. U 形管的两支管 A、B 和水平管 C 都是由内径均匀的细玻璃管做成的, 它们的内径与管长相比都可忽略不计. 已知三部分的截面积分别为  $S_A = 1.0 \times 10^{-2} \text{ cm}^2$ ,  $S_B = 3.0 \times 10^{-2} \text{ cm}^2$ ,  $S_C = 2.0 \times 10^{-2} \text{ cm}^2$ . 在 C 管中有一段空气柱, 两侧被水银封闭. 当温度为



$t_1 = 27^\circ\text{C}$  时, 空气柱长为  $l = 30\text{ cm}$  (图 2-12), C 中气柱两侧的水银柱长分别为  $a = 2.0\text{ cm}$ ,  $b = 3.0\text{ cm}$ , A、B 两支管都很长, 其中的水银柱高均为  $h = 12\text{ cm}$ . 大气压强保持为  $p_0 = 101\,325\text{ Pa}$  (合  $76\text{ cm Hg}$  柱) 不变. 不考虑温度变化时管和水银的热膨胀. 试求气柱中空气温度缓慢升高到  $t = 97^\circ\text{C}$  时空气的体积.

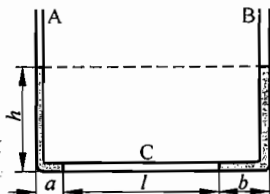


图 2-12

**解析**

在温度为  $T_1 = (27 + 273)\text{ K} = 300\text{ K}$  时, 气柱中的空气的压强和体积分别为

$$p_1 = p_0 + h\rho g \quad (1)$$

$$V_1 = lS_C \quad (2)$$

(1) 式中  $\rho$  为水银的密度,  $g$  为重力加速度. 当气柱中空气的温度升高时, 气柱两侧的水银将被缓慢压入 A 管和 B 管. 设温度升高到  $T_2$  时, 气柱右侧水银刚好全部压到 B 管中, 使管中水银高度增大

$$\Delta h = \frac{bS_C}{S_B} \quad (3)$$

由此造成气柱中空气体积的增大量为

$$\Delta V' = bS_C \quad (4)$$

与此同时, 气柱左侧的水银也有一部分进入 A 管, 进入 A 管的水银使 A 管中的水银高度也应增大  $\Delta h$ , 使两支管的压强平衡, 由此造成气柱空气体积增大量为

$$\Delta V'' = \Delta h S_A \quad (5)$$

所以, 当温度为  $T_2$  时, 空气的体积和压强分别为

$$V_2 = V_1 + \Delta V' + \Delta V'' \quad (6)$$

$$p_2 = p_1 + \Delta h\rho g \quad (7)$$

由状态方程知

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \quad (8)$$

由以上各式, 代入数据可得

$$T_2 = 347.7\text{ K} \quad (9)$$

此值小于题给的最终温度  $T = (273 + t/^\circ\text{C})\text{ K} = 370\text{ K}$ , 所以温度将继续升高. 从这时起, 气柱中的空气作等压变化. 当温度到达  $T$  时, 气柱体积为

$$V = \frac{T}{T_2} V_2 \quad (10)$$

代入数据可得

$$V = 0.72\text{ cm}^3 \quad (11)$$

11. 一根截面均匀、不变形的 U 形细塑料管, 两臂长分别为  $l_0 = 20.0 \text{ cm}$  和  $h_0 = 180.0 \text{ cm}$ , 竖直放置, 如图 2-13 所示. 管内灌有水银, 长管上端开口; 短管上端封闭, 管内封着长  $l = 10.0 \text{ cm}$  的空气柱. 已知长管及横管中的水银柱长度分别为  $h = 60.0 \text{ cm}$  和  $x = 10.0 \text{ cm}$ , 大气压强  $p_0 = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$  (合  $76.0 \text{ cm Hg}$  柱). 现将此管绕通过长管拐角点 A 且与塑料管所在平面相垂直的轴线沿逆时针方向缓慢地转过  $180^\circ$ , 然后将长管的开口端迅速截去  $50.0 \text{ cm}$ , 求与管内封闭的空气相接触的水银面的最后位置.

### 解析

经估算可知, 当管转过  $180^\circ$  后, 已有部分水银由开口端流出, 今设平衡后水银柱上端距 A 点为  $l'$  (见图 2-14), 此时管内空气柱的长度为  $l_0 + x + l'$ , 压强为  $p_0 - (h_0 - l')\rho g$ .  $\rho$  为水银密度. 根据玻意耳定律可知

$[p_0 + h\rho g - (l_0 - l)\rho g]l = [p_0 - (h_0 - l')\rho g](l_0 + x + l')$   
把各量的数值代入上式求解, 并取合理值可得

$$l' = 112.8 \text{ cm}$$

将长管截去  $50 \text{ cm}$  后, 管内剩下的水银柱长度设为  $a$ , 则

$$a = (h_0 - l') - 50 = 17.2 \text{ cm}$$

此时, 剩下的水银柱不能在原处保持平衡, 外界的大气压将使它上升, 在新的位置达到平衡.

设新的平衡位置如图 2-15 所示,  $b$  为此时短管内空气柱的长度, 则根据玻意耳定律, 有

$$[p_0 + h\rho g - (l_0 - l)\rho g]l = \{p_0 - [a - x - (l_0 - b)]\rho g + (l_0 - b)\rho g\}b$$

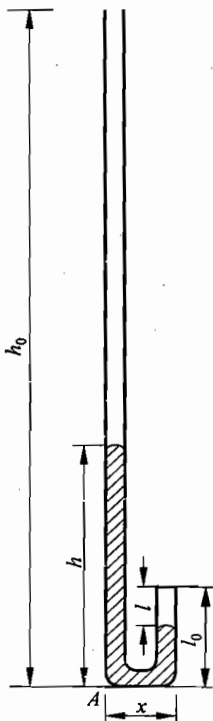


图 2-13

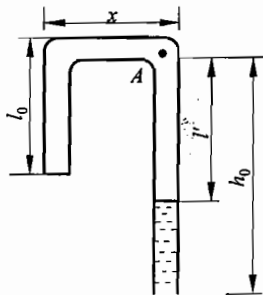


图 2-14

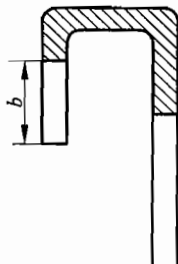


图 2-15

代入各量的数值求解并取合理值可得

$$b = 16.7 \text{ cm}$$

即与封闭的空气相接触的水银面最后的平衡位置距短管的封闭端为 16.7 cm.

本题题文所述的过程比较复杂. 首先, 要求学生能根据题目搞清全部过程中所发生的物理变化; 其次, 要能根据给出的数据初步估算, 判断出在倒转塑料管后已有部分水银由开口端流出; 第三, 想像出在截去 50 cm 后, 水银柱将怎样流动; 最后, 再两次运用玻意耳定律列出方程并求解. 作为决赛题, 本题旨在考查学生分析物理过程的能力和灵活运用气体方程的水平.

12. 有一内径均匀、两支管等长且大于 78 cm 的、一端开口的 U 形管 ACDB. 用水银将一定质量的理想气体封闭在 A 端后, 将管竖直倒立. 平衡时两支管中液面高度差为 2 cm, 此时封闭端气柱的长度  $L_0 = 38 \text{ cm}$  (如图 2-16 所示). 已知大气压强相当于高度为  $h_0 = 76 \text{ cm}$  水银柱所产生的压强. 若保持温度不变, 不考虑水银与管壁的摩擦, 当轻轻晃动一下 U 形管, 使左端液面上升  $\Delta h$  ( $\Delta h$  小于 2 cm) 时, 将出现什么现象? 试加以讨论并说明理由.

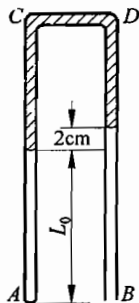


图 2-16

### 解析

当 U 形管处于如图 2-16 所示的最初的平衡位置时, A 端气体的压强相当于高度为

$$h = h_0 + 2 = 78 \text{ cm} \quad (1)$$

的水银柱所产生的压强. 若左端液面上升或下降  $\Delta h$  (设向上升时  $\Delta h$  取正值, 向下降时  $\Delta h$  取负值), 设想如果水银柱静止不动. 则根据玻意耳定律可得到 A 管中气柱的压强 (以厘米高水银柱为单位) 是

$$p = \frac{hL_0}{L_0 + \Delta h} \quad (2)$$

在 U 形管的 CD 部分, 管内水银柱所受左、右两边的压强差 (以厘米高水银柱为单位) 是

$$\Delta p = p - h + 2\Delta h \quad (3)$$

将 (1)、(2) 两式和  $L_0 = 38 \text{ cm}$  代入 (3) 式, 得到

$$\Delta p = \frac{\Delta h(2\Delta h + 2L_0 - h)}{L_0 + \Delta h} = \frac{\Delta h(2\Delta h - 2)}{38 + \Delta h} \quad (4)$$

(4) 式表明,  $\Delta p$  的正负取决于  $\Delta h$  的数值;

当  $\Delta h = 0$  时,  $\Delta p = 0$ , 即最初的平衡状态;

当  $\Delta h = 1 \text{ cm}$  时,  $\Delta p = 0$ , 为另一新的平衡状态;

若  $\Delta p > 0$ , 则  $CD$  管内水银柱所受合力方向向右,  $A$  管中液面将会上升;

若  $\Delta p < 0$ , 则  $CD$  管内水银柱所受合力方向向左,  $A$  管中液面将会下降.

讨论:

1) 当  $1 \text{ cm} > \Delta h > 0$  时,  $\Delta p < 0$ , 即由于晃动而使左端液面上升, 幅度不超过  $1 \text{ cm}$  时, 水银柱不能平衡, 左端液面将自动下降直至回到最初的平衡位置. 但由于此时左端水银柱仍有向下的速度, 因此将会越过最初的平衡位置而继续下降, 下降到某一位置时, 其速度变为零, 然后向上运动. 结果, 水银柱在最初的平衡位置附近来回振动.

2) 当  $\Delta h > 1 \text{ cm}$  时,  $\Delta p > 0$ , 即由于晃动而使左端液面上升, 幅度超过  $1 \text{ cm}$  时, 水银柱不能平衡, 左端液面将继续上升而不能自动回到最初的平衡位置. 且  $\Delta h$  越大,  $\Delta p$  也越大, 水银柱将不断由  $A$  管流向  $B$  管. 由于两支管长度和管中水银柱长度都大于  $78 \text{ cm}$ , 因此这种现象将继续下去, 直到有一部分水银从  $B$  端流出.

3) 当  $\Delta h = 1 \text{ cm}$  时,  $\Delta p = 0$ .  $CD$  管中水银柱所受左、右压强相等, 合力为零. 水银柱达到平衡. 但由于这是一种不稳定平衡, 因而这种状态实际上不会出现.

这是一道热学和力学结合的题目, 题目的要求不是单纯计算某一数值, 而是讨论一个现象将如何发展. 直接计算的是管中理想气体的压强变化, 但问题的关键却是横管  $CD$  部分中的水银的平衡. 抓住这个关键, 问题就不难解决了.

13. 有一个两端开口、粗细均匀的  $U$  形玻璃细管, 放置在竖直平面内, 处在压强为  $p_0$  的大气中. 两个竖直支管的高度均为  $h$ , 水平管的长度为  $2h$ , 玻璃细管的半径为  $r$ ,  $r \ll h$ . 今将水平管内灌满密度为  $\rho$  的水银, 如图 2-17 所示.

1) 如将  $U$  形管两个竖直支管的开口分别封闭起来, 使其管内空气压强均等于大气压强. 问当  $U$  形管向右做匀加速移动时, 加速度应多大才能使水平管内水银柱长度稳定为  $(5/3)h$ .

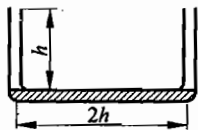


图 2-17

2) 如将其中一个竖直支管的开口封闭起来, 使其管内气体压强等于大气压强. 问当  $U$  形管绕以另一个竖直支管(开口的)为轴做匀速转动时, 转数  $n$  应为多大才能使水平管内水银柱长度稳定为  $(5/3)h$ .

( $U$  形管作以上运动时, 均不考虑管内水银液面的倾斜.)

### 解析

1) 当  $U$  形管向右加速移动时, 水平管内的水银柱将向左边的竖直支管中移动, 其稳定的位置是留在水平管内的水银柱所受的水平方向的合力等于使其以恒定加速度  $a$  向右运动时所需的力. 由于竖直支管内空气在膨胀或压缩前后的温度相等, 根据气态方程有

右管  $p_0 h S = p_1 (4/3) h S$

左管  $p_0 h S = p_2 (2/3) h S$

$S$  为管的截面积. 图 2-18 中  $A$ 、 $B$  两处压强分别为

$$p_A = p_2 + \rho g h / 3$$

$$p_B = p_1$$

而留在水平管内的水银柱质量

$$m = (5/3) \rho h S$$

其运动方程为

$$(p_A - p_B) S = m a$$

由以上各式可得

$$a = (9 p_0 + 4 \rho g h) / (20 \rho h)$$

2) 当 U 形管以开口的竖直支管为轴转动时, 水平管内的水银柱将向封闭的竖直支管中移动, 其稳定位置是水平管内的水银柱所受的水平方向的合力正好等于这段水银柱作匀速圆周运动所需的向心力. 由于封闭竖直支管内空气在压缩前后的温度相等, 根据气态方程有

$$p_0 h S = p (2/3) h S$$

$S$  为管的截面积. 图 2-19 中  $A$ 、 $B$  两处的压强分别为

$$p_A = p + \rho g h / 3$$

$$p_B = p_0$$

留在水平管内的水银柱的质量

$$m = (5/3) \rho g S$$

其运动方程为

$$(p_A - p_B) S = m \omega^2 R = 4 \pi^2 n^2 m R$$

其中

$$R = (7/6) h$$

由以上各式可得

$$n = [(9 p_0 + 6 \rho g h) / (140 \pi^2 \rho h^2)]^{1/2}$$

此题的解中用到了一些似乎是“不言而喻”的知识, 一是在竖直方向没有运动, 所以竖直方向仍用流体静力学中压强分布的知识; 二是在第 2) 问中的运动方程里, 用重心(质心)的运动代替了物体的运动. 其实这是需要证明的. 还有就是因为完全不考虑管内空气的质量对压强分布的影响, 所以无论管怎样运动, 都认为管内连通的空气中压强处处相等.

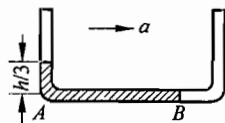


图 2-18

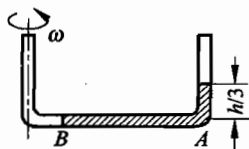


图 2-19

14. 在一个横截面面积为  $S$  的密闭容器中, 有一个质量为  $m$  的活塞把容器中的气体分成两部分. 活塞可在容器中无摩擦地滑动, 当活塞处于平衡时, 活塞两边气体的温度相同, 压强都是  $p$ , 体积分别是  $V_1$  和  $V_2$ , 如图 2-20 所示. 现用某种方法使活塞稍微偏离平衡位置, 然后放开, 活塞将在两边气体压力的作用下来回运动. 整个系统可看做是恒温的.

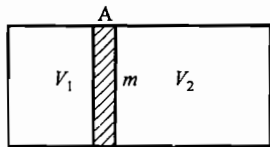


图 2-20

- 1) 求活塞运动的周期, 将结果用  $p$ 、 $V_1$ 、 $V_2$ 、 $m$  和  $S$  表示.  
2) 求气体温度  $t=0^\circ\text{C}$  时的周期  $\tau$  与气体温度  $t'=30^\circ\text{C}$  时的周期  $\tau'$  的比值.

### 解析

- 1) 如图 2-21 所示, 以活塞 A 处于平衡时的位置作为坐标原点  $x=0$ , 当活塞运动到  $x$  处时, 体积  $V_1$  变为  $V_1+Sx$ , 体积  $V_2$  变为  $V_2-Sx$ . 设此时两边气体的压强分别为  $p_1$  和  $p_2$ , 因系统的温度恒定不变, 根据玻意耳定律, 有

$$p_1(V_1+Sx) = pV_1$$

$$p_2(V_2-Sx) = pV_2$$

由上解出

$$p_1 = \frac{pV_1}{V_1(1+Sx/V_1)}$$

$$p_2 = \frac{pV_2}{V_2(1-Sx/V_2)}$$

按题意, 活塞只稍许离开平衡位置, 故又可将上式近似写成

$$p_1 = p\left(1 - \frac{S}{V_1}x\right)$$

$$p_2 = p\left(1 + \frac{S}{V_2}x\right)$$

于是, 活塞所受的合力是

$$(p_1 - p_2)S = -pS^2\left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}\right)x$$

所以活塞运动的方程是

$$ma = -pS^2\left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}\right)x = -pS^2\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}x$$

其中  $a$  是活塞的加速度. 运动方程说明, 活塞将做简谐振动, 振动周期是

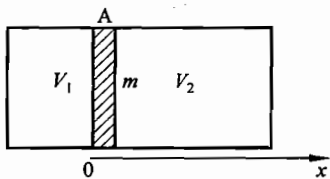


图 2-21

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{mV_1V_2}{pS^2(V_1+V_2)}}$$

2) 设温度为  $T$  时活塞的运动周期为  $\tau$ , 温度为  $T'$  时, 周期为  $\tau'$ , 由于

$$\frac{p}{T} = \frac{p'}{T'}$$

所以得出

$$\tau' = 2\pi \sqrt{\frac{mV_1V_2}{p'S^2(V_1+V_2)}} = 2\pi \sqrt{\frac{mV_1V_2}{pS^2(V_1+V_2)}} \cdot \frac{T}{T'} = \tau \sqrt{\frac{T}{T'}}$$

可见有

$$\frac{\tau'}{\tau} = \sqrt{\frac{T}{T'}}$$

以  $T=273\text{ K}$  和  $T'=303\text{ K}$  代入, 得出  $0\text{ }^\circ\text{C}$  时的周期  $\tau$  与  $30\text{ }^\circ\text{C}$  时的周期  $\tau'$  之比是

$$\frac{\tau'}{\tau} = 0.95$$

15. 一个质量  $m=200.0\text{ kg}$ , 长  $l_0=2.00\text{ m}$  的薄底大金属桶倒扣在宽阔的水池底部 (见图 2-22). 桶内的横截面积  $S=0.500\text{ m}^2$  (桶的容积为  $l_0S$ ), 桶本身(桶壁与桶底)的体积  $V_0=2.50\times 10^{-2}\text{ m}^3$ . 桶内封有高度  $l=0.200\text{ m}$  的空气. 池深  $H_0=20.00\text{ m}$ , 大气压强  $p_0$  相当于高度为  $10.00\text{ m}$  的水柱产生的压强, 水的密度  $\rho=1.000\times 10^3\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ , 重力加速度  $g$  取  $10.00\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ . 若用图中所示的吊绳将桶上提, 使桶底能到达水面处, 则绳拉力所需做的功有一最小值. 试求从开始到绳拉力刚完成此功的过程中, 桶和水(包括池水及桶内水)的机械能改变了多少(结果要保留三位有效数字). 不计水的阻力, 设水温很低, 不计其饱和蒸汽压的影响, 并设水温上下均匀且保持不变.

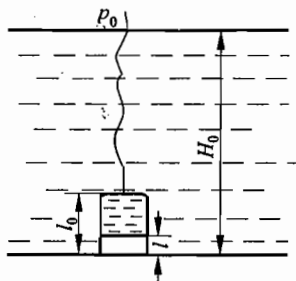


图 2-22

### 解析

在上提过程中, 桶内空气压强减小, 体积将增大, 从而对桶和桶内空气(空气质量不计)这一整体的浮力将增大. 在此题中若存在桶所受浮力等于重力的位置, 则此位置是桶的不稳定平衡点, 再稍上提, 浮力将大于重力, 桶就会上浮. 从这时起, 绳不必再拉桶, 桶也将在浮力作用下, 上浮到桶底到达水面并冒出. 因此绳对桶的拉力所需做的最小功的过程, 就是缓慢地将桶由池底提高到浮力等于重力的位置所经历的过程.

下面先看这一位置是否存在. 如果存在, 如图 2-23 所示, 设在此位置时桶内空气的高度为  $l'$ , 因为浮力等于重力, 应有

$$mg = \rho(l'S + V_0)g \quad (1)$$

代入已知数据可得

$$l' = 0.350 \text{ m} \quad (2)$$

设此时桶的下方边缘距池底的高度为  $H$ , 由玻意耳定律可知

$$[p_0 + H_0 - (l_0 - l)]l = [p_0 + H_0 - H - (l_0 - l')]l' \quad (3)$$

由(2)、(3)两式可得

$$H = 12.24 \text{ m}$$

因为  $H < (H_0 - l_0)$ , 即整个桶仍浸没在水中, 可知存在上述浮力等于重力的位置.

现在再求将桶由池底缓慢地提高到  $H$  处桶及水的机械能的增量  $\Delta E$ .  $\Delta E$  包括三部分: ①桶势能的增量  $\Delta E_1$ ; ②在  $H$  高度时桶本身排开的水可看做下降去填充在池底时桶本身所占的空间而引起水势能的增量  $\Delta E_2$ ; ③在  $H$  高度时桶内空气所排开的水可看做一部分下降去填充在池底时空气所占的空间, 一部分(由于空气膨胀)上升到水池表面, 由此引起水的势能的增量用  $\Delta E_3$  表示, 则

$$\Delta E_1 = mgH$$

$$\Delta E_2 = -\rho V_0 gH$$

$$\Delta E_3 = \rho S l g \left( l_0 - \frac{1}{2} l \right) + \rho S (l' - l) g H_0 - \rho S l' g \left( H + l_0 - \frac{1}{2} l' \right)$$

$$\Delta E = \Delta E_1 + \Delta E_2 + \Delta E_3$$

$$= [m - \rho(V_0 + Sl')]gH + \rho S g \left[ (l' - l)(H_0 - l_0) + \frac{l'^2 - l^2}{2} \right]$$

由(1)式可得

$$\Delta E = \rho S g \left[ (l' - l)(H_0 - l_0) + \frac{l'^2 - l^2}{2} \right]$$

代入数值计算, 结果取三位有效数字, 得

$$\Delta E = 1.37 \times 10^4 \text{ J}$$

本题是难度较大的竞赛题, 涉及气体性质、浮力、机械能等知识点, 主要的难点有两个: 一是先定性分析金属桶上提过程中桶内气体的压强、体积的变化, 桶所受浮力与重力的关系, 从而找出浮力等于重力的位置; 二是在计算机械能的改变时容易忽略  $\Delta E_2$  和  $\Delta E_3$  中的某一项.

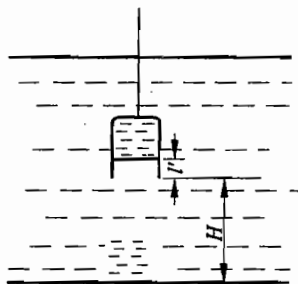


图 2-23



16. 1 mol 的理想气体经历了一个在  $T$ - $V$  图上标为 1—2—3—1 的循环过程, 如图 2-24 所示. 其中, 过程 1—2 的方程式为  $T = 2T_1 \left(1 - \frac{1}{2}\beta V\right)\beta V$ , 过程 2—3 为经过原点的直线上的一段, 过程 3—1 的方程式为  $T = T_1\beta^2 V^2$ , 式中  $\beta$  是常量. 状态 1 和 2 的热力学温度已知为  $T_1$  和  $\frac{3}{4}T_1$ . 求该气体在此循环过程中对外所做的功.

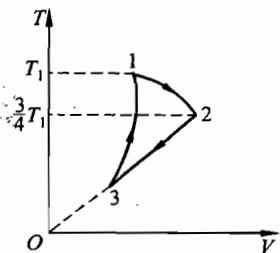


图 2-24

**解析**

先利用状态方程将此循环过程用  $p, V$  参量来表述, 并画出其  $p$ - $V$  图线. 以  $p, V$  为参量表述的过程 1—2 的方程为

$$p = 2RT_1 \left(1 - \frac{1}{2}\beta V\right)\beta = -R\beta^2 T_1 V + 2R\beta T_1 \quad (1)$$

此过程在  $p$ - $V$  图上为一直线段. 过程 2—3 中  $T$  与  $V$  成正比, 为一等压过程, 在  $p$ - $V$  图上为一条平行于横轴 ( $V$  轴) 过状态 2 的直线段, 其过程方程为

$$p = p_2 \quad (2)$$

$p_2$  为状态 2 的压强.

过程 3—1 的方程为

$$p = RT_1\beta^2 V \quad (3)$$

此过程在  $p$ - $V$  图上为一条其延长线过原点的直线段.

然后确定状态 1、2、3 在  $p$ - $V$  图上对应点的坐标. 用  $(p_1, V_1)$ ,  $(p_2, V_2)$ ,  $(p_3, V_3)$  分别表示状态 1、2、3 的参量, 由题中所给 1—2 过程方程可以求得状态 1、2 的体积分别为:

$$V_1 = \frac{1}{\beta} \quad (4)$$

$$V_2 = \frac{3}{2\beta} = \frac{3}{2}V_1$$

利用状态方程可得:

$$\begin{aligned} p_1 &= \beta RT_1 \\ p_2 &= \frac{1}{2}R\beta T_1 = \frac{1}{2}p_1 \end{aligned} \quad (5)$$

由 (2)、(3)、(5) 三式可求出状态 3 的体积  $V_3$  为

$$V_3 = \frac{1}{2\beta} = \frac{1}{2}V_1 \quad (6)$$

综合以上所得结果,可画出该循环过程的 $p$ - $V$ 图线,它是等腰三角形(如图2-25所示).

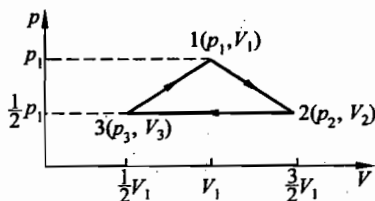


图 2-25

由循环过程的方向可知,气体在循环过程中对外做正功,其值 $A$ 等于此三角形的面积.即

$$A = \frac{1}{2}(p_1 - p_2) \cdot (V_2 - V_3)$$

将(4)、(5)、(6)式代入,得

$$A = 0.25RT_1$$

17. 1 mol 理想气体缓慢地经历了一个循环过程,在 $p$ - $V$ 图中这个过程是一个椭圆,如图2-26所示.已知此气体若处在与椭圆中心 $O'$ 点所对应的状态时,其温度为 $T_0 = 300$  K.求在整个循环过程中气体的最高温度 $T_1$ 和最低温度 $T_2$ 各是多少.

### 解析

在 $p$ - $V$ 图中,描写此气体循环过程的椭圆方程为

$$\frac{(V - V_0)^2}{\left(\frac{1}{2}V_0\right)^2} + \frac{(p - p_0)^2}{\left(\frac{1}{2}p_0\right)^2} = 1 \quad (1)$$

现在考虑椭圆与温度 $T$ 的等温线

$$pV = RT \quad (2)$$

的交点对应的状态.一般来说,对给定温度 $T$ 的等温线,它与椭圆有两个交点.而与椭圆相切的等温线,它所对应的温度即为循环过程中的最高或最低温度.

(1)、(2)两式可改写为

$$\left(\frac{V}{V_0} - 1\right)^2 + \left(\frac{p}{p_0} - 1\right)^2 = \frac{1}{4} \quad (3)$$

$$\frac{pV}{p_0V_0} = \frac{RT}{p_0V_0} = \frac{T}{T_0} \quad (4)$$

式中 $T_0 = \frac{p_0V_0}{R}$ 即为 $O'$ 点上的温度.

令

$$\frac{V}{V_0} = x, \quad \frac{p}{p_0} = y$$

则(3)、(4)两式可改写成

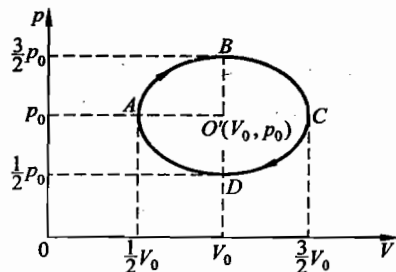


图 2-26

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4} \quad (5)$$

$$xy = C \quad (6)$$

式中  $C = \frac{T}{T_0}$ . (5)式又可改写成

$$(x+y-1)^2 - 2xy + 1 = \frac{1}{4} \quad (7)$$

(6)、(7)两式消去  $y$ , 得二曲线交点的  $x$  值应满足的方程式

$$x + \frac{C}{x} - 1 = \pm \sqrt{2C - \frac{3}{4}} \quad (8)$$

由于此循环过程中  $x = \frac{V}{V_0} \geq \frac{1}{2}$ ,  $y = \frac{p}{p_0} \geq \frac{1}{2}$ , 故  $x+y-1 > 0$ , 上式右边应取“+”号, (8)式可改写成

$$x^2 - \left(1 + \sqrt{2C - \frac{3}{4}}\right)x + C = 0 \quad (9)$$

这是  $x$  的二次方程, 它的两个根值就是等温线与椭圆的两个交点. 所求最高、最低温度相当于使曲线相切时的  $C$  值, 这时(9)式有等根, 即

$$\left(1 + \sqrt{2C - \frac{3}{4}}\right)^2 - 4C = 0 \quad (10)$$

由(10)式得

$$4C^2 - 9C + \frac{49}{16} = 0$$

解得二曲线相切时的两个  $C$  值

$$C_1 = \frac{9 + \sqrt{32}}{8} = 1.83$$

$$C_2 = \frac{9 - \sqrt{32}}{8} = 0.418$$

最后得

$$\text{最高温度 } T_1 = C_1 T_0 = 549 \text{ K}$$

$$\text{最低温度 } T_2 = C_2 T_0 = 125 \text{ K}$$

18. 太阳风是从太阳大气外层(称为日冕)不断向星际空间发射的稳定的、由相同数目的质子和电子构成的带电粒子流, 它使太阳每年减少的质量相对于太阳质量  $m_s$  可忽略不计. 观测表明, 太阳风的速度的大小  $v$  随着与太阳中心的距离  $r$  的增加而增大. 现提

出一简单的模型来解释太阳风的速度变化的机制：假定日冕中的大量电子可视为理想气体；日冕中的电子气是等温(温度为  $T$ )的、各向同性的，以球对称的速率  $v(r)$  (太阳风的速率)向外膨胀；太阳风中质子的定向运动速度比电子的小得多，太阳风的速度其实是电子定向运动的速度，太阳风可解释为日冕中的电子气向外的等温膨胀。记太阳风的速率  $v$  随着与太阳中心的距离  $r$  变化的变化率为  $\tau = \Delta v / \Delta r$ 。若不考虑质子和电子间的相互碰撞，试求  $\tau$  随  $r$  变化的关系式  $\tau(r)$ 。

### 解析

**解法 I** 如图 2-27 所示，在太阳风中，考察  $t$  时刻位于到太阳中心的距离为  $r$  和  $r + \Delta r$  的两个球面之间的一块薄层电子流，其厚度为  $\Delta r$ ，质量为  $m$ ，速度为  $v$ 。位于半径为  $r$  的球面上的薄层后缘的面积为  $S$ ，位于半径为  $r + \Delta r$  的球面上薄层前缘的面积为  $S'$ ，如图 2-27 中划有左斜线的区域所示。经过时间  $\Delta t$ ，它的后缘移动了一段距离  $\Delta r$ ，到达前缘所在处，而其前缘移动了一段距离  $\Delta r'$ ，即在  $t + \Delta t$  时刻，所观察的那块薄层电子流的厚度为  $\Delta r'$ ，速度为  $v'$ ，如图 2-27 中划有右斜线的区域所示。在  $t$  到  $t + \Delta t$  时间内，此块薄片的动量的改变为

$$\Delta K = mv' - mv \quad (1)$$

在这过程中，太阳对它引力的冲量为

$$I_1 = G \frac{m_s m}{r^2} \Delta t \quad (2)$$

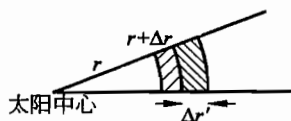


图 2-27

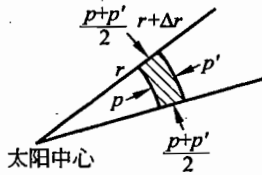


图 2-28

现分析所考虑的薄片所受的压力。如图 2-28 所示，设  $p'$  与  $p$  分别表示这块薄片前缘与后缘截面上所受到的压强，则  $(p + p')/2$  是这块薄片侧面上所受到的压强(由于  $\Delta r$  很小，侧面压强取两端面压强之平均值是一个合理的近似)。令后缘截面与前缘截面的半径分别为  $h$  和  $h'$ ，则薄片表面上所受压力的合力  $F$  是

$$\begin{aligned} F &= p\pi h^2 - p'\pi h'^2 + \left(\frac{p+p'}{2}\right) \left(\Delta r \frac{2\pi h + 2\pi h'}{2}\right) \left(\frac{h' - h}{\Delta r}\right) \\ &= p\pi h^2 - p'\pi h'^2 + \left(\frac{p+p'}{2}\right) (\pi h'^2 - \pi h^2) \\ &= pS - p'S' + \left(\frac{p+p'}{2}\right) (S' - S) \end{aligned}$$

即 
$$F = (p - p') \left( \frac{S + S'}{2} \right) \quad (3)$$

式中  $S = \pi h^2$ ,  $S' = \pi h'^2$ . 注意, 在导出(3)式时, 已考虑到薄片所受到的侧面压强在垂直于合力  $F$  方向上相互抵消的事实. 于是这块薄片前后的电子流对它的压力的冲量为

$$I_2 = (p - p') \left( \frac{S + S'}{2} \right) \Delta t \quad (4)$$

根据题意, 可以将带电粒子流视为理想气体, 由理想气体状态方程

$$p = \frac{mRT}{m_e N_A V} = \frac{mRT}{m_e N_A \frac{S + S'}{2} \Delta r} \quad (5)$$

$$p' = \frac{mRT}{m_e N_A V'} = \frac{mRT}{m_e N_A \frac{S' + S''}{2} \Delta r'} \quad (6)$$

式中  $m_e$  为电子质量,  $N_A$  为阿伏加德罗常数,  $S'$  是位于半径为  $r + \Delta r + \Delta r'$  的球面上的截面(如图 2-27 中所示). 根据动量定理有

$$m \Delta v = (p - p') \left( \frac{S + S'}{2} \right) \Delta t - G \frac{m_s m}{r^2} \Delta t \quad (7)$$

代入以上各式得

$$m \Delta v = \frac{mRT \Delta t}{m_e N_A \Delta r} - \frac{mRT \Delta t}{m_e N_A \Delta r'} \left( \frac{S + S'}{S' + S''} \right) - G \frac{m_s m}{r^2} \Delta t \quad (8)$$

又 
$$\frac{S'}{S} = \left( \frac{r + \Delta r}{r} \right)^2 = 1 + 2 \frac{\Delta r}{r} \quad (9)$$

$$\frac{S''}{S'} = \left( \frac{r + \Delta r + \Delta r'}{r + \Delta r} \right)^2 = 1 + 2 \frac{\Delta r'}{r + \Delta r} = 1 + 2 \frac{\Delta r'}{r} \quad (10)$$

所以 
$$\frac{S + S'}{S' + S''} = \frac{1 + \frac{S}{S'}}{1 + \frac{S''}{S'}} = \frac{2 - 2 \frac{\Delta r}{r}}{2 + 2 \frac{\Delta r'}{r}} = 1 - \frac{\Delta r}{r} - \frac{\Delta r'}{r} = 1 - 2 \frac{\Delta r}{r} \quad (11)$$

故(8)式成为

$$m \Delta v = \frac{mRT}{m_e N_A v} - \frac{mRT}{m_e N_A v'} + 2 \frac{mRT}{m_e N_A r} \Delta t - G \frac{m_s m}{r^2} \Delta t$$

或 
$$\begin{aligned} \Delta v &= \frac{RT}{m_e N_A} \left( \frac{1}{v} - \frac{1}{v'} \right) + \left( \frac{2RT}{m_e N_A r} - G \frac{m_s}{r^2} \right) \Delta t \\ &= \frac{RT}{m_e N_A} \left( \frac{\Delta v}{v^2} \right) + \left( \frac{2RT}{m_e N_A r} - G \frac{m_s}{r^2} \right) \Delta t \end{aligned}$$

解得

$$\Delta v = \frac{\left(\frac{2RT}{m_e N_A r} - G \frac{m_s}{r^2}\right) \Delta t}{\left(1 - \frac{RT}{m_e N_A v^2}\right)} \quad (12)$$

两边除以  $\Delta r$  得

$$\tau = \frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{\left(\frac{2RT}{m_e N_A r} - G \frac{m_s}{r^2}\right) v}{\left(v^2 - \frac{RT}{m_e N_A}\right)} \quad (13)$$

**解法 II** (1)、(2)、(3)、(4)式的得出与解法 I 相同。

据题意,带电粒子流可视为理想气体,于是由克拉珀龙方程得

$$p(r) = n(r)kT \quad (5')$$

$$\text{或} \quad p - p' = [n(r) - n(r + \Delta r)]kT = \Delta n kT \quad (6')$$

式中  $n(r)$  是距太阳中心为  $r$  处的单位体积中的电子数,  $k = R/N_A$  是玻耳兹曼常量,  $R$  是摩尔气体常量,  $N_A$  是阿伏加德罗常数。

由动量定理有

$$m\Delta v = (p - p')\left(\frac{S + S'}{2}\right)\Delta t - G \frac{m_s m}{r^2} \Delta t \quad (7')$$

由于质量守恒,每单位时间通过球壳  $S$ , 发射出的物质的质量是一个恒量

$$4\pi(r + \Delta r)^2 (n + \Delta n)(v + \Delta v) = 4\pi r^2 n v$$

由于  $\Delta r$  是小量,  $\Delta n$  与  $\Delta v$  也应是少量. 将上式左端展开, 忽略小量的乘积项, 得到

$$2r n v \Delta r + r^2 v \Delta n + r^2 n \Delta v = 0$$

$$\text{此即} \quad \Delta n = -2 \frac{n}{r} \Delta r - \frac{n}{v} \Delta v \quad (8')$$

(9)、(10)、(11)式如解法 I 所示, 故从(7')式可得(12)、(13)式。

**解法 III** 此块薄片受到四周压力的冲量为

$$\begin{aligned} I_2 &= (pS + F_{\text{侧面}} - p'S')\Delta t \\ &= [pS + F_{\text{侧面}} - p'(S + \Delta S)]\Delta t \\ &= (p - p')S\Delta t \end{aligned} \quad (1'')$$

式中  $p$  和  $p'$  分别表示这一块薄片电子流后缘截面和前缘截面所受到的压强,  $F_{\text{侧面}}$  是薄片侧面受到的压力, 它不为零, 沿径向, 恰与式中  $p'\Delta S$  项抵消. 根据题意, 将日冕视为理想气体, 应用克拉珀龙方程有

$$p = \frac{m}{m_e N_A} \frac{RT}{V} = \frac{RT}{m_e N_A S \Delta r} \quad (2'')$$

$$p' = \frac{m}{m_e N_A} \frac{RT}{V'} = \frac{RT}{m_e N_A S' \Delta r'} \quad (3'')$$

式中  $m_e$  是电子的质量,  $N_A$  为阿伏加德罗常数. 根据动量定理有

$$m\Delta v = (p - p')S\Delta t - G \frac{m_s m}{r^2} \Delta t \quad (4'')$$

代入(4)和(5)式得

$$\begin{aligned} \Delta v &= \frac{RT}{m_e N_A} \left( \frac{\Delta t}{\Delta r} - \frac{S\Delta t}{S'\Delta r'} \right) - \frac{Gm_s}{r^2} \Delta t \\ &= \frac{RT}{m_e N_A} \left( \frac{1}{v} - \frac{S}{S + \Delta S} \cdot \frac{1}{v'} \right) - \frac{Gm_s}{r^2} \cdot \Delta t \\ &= \frac{RT}{m_e N_A} \left[ \frac{1}{v} - \left( 1 - \frac{\Delta S}{S} \right) \frac{1}{v} \left( 1 - \frac{\Delta v}{v} \right) \right] - \frac{Gm_s}{r^2} \Delta t \\ &= \frac{RT}{m_e N_A} \left( \frac{\Delta v}{v^2} + \frac{1}{v} \cdot \frac{\Delta S}{S} \right) - \frac{Gm_s}{r^2} \Delta t \end{aligned} \quad (5'')$$

式中  $\Delta S/S$  按几何关系为

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{4\pi(r + \Delta r)^2 - 4\pi r^2}{4\pi r^2} = \frac{2\Delta r}{r} \quad (6'')$$

$$\Delta v = \frac{RT}{m_e N_A} \left( \frac{\Delta v}{v^2} + \frac{2\Delta r}{vr} \right) - \frac{Gm_s}{r^2} \Delta t \quad (7'')$$

故解出

$$\Delta v = \frac{\frac{Gm_s \Delta t}{r^2} - \frac{2RT}{m_e N_A} \cdot \frac{\Delta r}{vr}}{\frac{RT}{m_e N_A} \frac{1}{v^2} - 1} \quad (8'')$$

于是得

$$\tau = \frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{Gm_s \frac{v}{r^2} - \frac{2RT}{m_e N_A} \cdot \frac{v}{r}}{\frac{RT}{m_e N_A} - v^2} = \frac{v}{r^2} \cdot \frac{Gm_s - 2rv_c^2}{v_c^2 - v^2} \quad (9'')$$

式中已记

$$v_c = \sqrt{\frac{RT}{m_e N_A}} \quad (10'')$$

它实际上是等温声速.

**解法IV** 由解法III中动量定理(4'')式出发, 记所讨论的这一块小薄片, 当体积分别为  $V$  和  $V'$  时其中电子的密度分别为  $n$  和  $n'$ , 则(4'')式中的

$$m = m_e n S \Delta r = m_e n S v \Delta t \quad (1''')$$

$$p - p' = \frac{mRT}{m_e N_A V} - \frac{mRT}{m_e N_A V'} = \frac{RT}{N_A} (n - n') \quad (2''')$$

由于单位时间内进入小薄片的电子数等于穿出小薄片的电子数,才使得小薄片内所有电子的总质量  $m$  不变,故有

$$(r + \Delta r)^2 n' v' = r^2 n v \quad (3'')$$

即

$$(r + \Delta r)^2 (n + \Delta n) (v + \Delta v) = r^2 n v$$

得

$$\Delta n = n' - n = -\frac{n \Delta v}{v} - \frac{2n \Delta r}{r} \quad (4'')$$

代入(2'')式,再将(1'')和(2'')式代回(4'')式,同样得到(8'')式和(9'')式。

19. 设一氢气球可自由膨胀以保持球内外的压强相等. 则随着气球的不断升高,因大气压强随高度而减小,气球将不断膨胀. 如果氢气和大气皆可视做理想气体,大气的温度、平均摩尔质量以及重力加速度随高度的变化皆可忽略,则气球在上升过程中所受的浮力将如何变化?

### 解析

用  $V$  表示氢气球的体积,  $\rho_a$  表示空气的密度,  $\rho_H$  表示氢气的密度,  $m_H$  表示氢气的质量,根据阿基米德原理可知,氢气球所受的浮力  $F$  为

$$F = V \rho_a g = V \frac{\rho_H}{\rho_H} \rho_a g = m_H \frac{\rho_a}{\rho_H} g \quad (1)$$

式中  $m_H$  为定值,由此可知  $F$  与  $\frac{\rho_a}{\rho_H}$  成正比.

由理想气体状态方程  $pV = \frac{m}{M} RT$  可知( $M$  为气体的摩尔质量)

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT} \quad (2)$$

已知气球内的氢气和球外的空气压强相同,温度相同,而  $R$  为常量,所以可知  $\rho$  与  $M$  成正比. 令  $M_a$  和  $M_H$  分别表示空气和氢气的摩尔质量,代入(1)式可得

$$F = m_H \frac{M_a}{M_H} g$$

上式右方各量都不随高度变化,所以在气球上升过程中浮力  $F$  不变.

20. 一球形热气球,其隔热很好的球皮连同吊篮等装载的总质量为 300 kg,经加热后,气球膨胀到最大体积,此时它的直径为 18 m,球内外气体成分相同,而球内气体压强则稍稍高过大气压. 试求出刚好能使热气球上升时球内空气的温度. 已知此时大气温度为 27 °C,压强为  $1.01 \times 10^5$  Pa,在标准状态下空气的密度为  $1.3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .



**解析**

把球内外气体都当作理想气体. 当气球膨胀到刚要升起时, 气球所受浮力等于气球连同装载所受的重力, 由此得质量关系为

$$m_1 = m_2 + 300 \text{ kg}$$

其中  $m_2$  为此时球内气体质量,  $m_1$  为气球排开空气的质量, 它的大小为

$$m_1 = 4\pi(d/2)^3\rho/3$$

式中  $d=18 \text{ m}$  是气球的直径,  $\rho$  为此时(温度  $T_1=273 \text{ K}+27 \text{ K}=300 \text{ K}$ , 压强  $p_1=1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ )空气的密度, 它与标准状态下( $T_0=273 \text{ K}$ )的空气密度  $\rho_0$  的关系为

$$\rho = \rho_0 \times 273/300 = 1.18 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

于是我们得到

$$m_1 = 3603 \text{ kg}$$

设膨胀后的气球内空气体积和压强为  $V_2$  和  $p_2$ , 温度为  $T_2$ , 则由理想气体状态方程知

$$p_2V_2 = m_2RT_2/M$$

$M$  为气体的摩尔质量. 另一方面, 考虑被气球排开的那一部分大气, 应有

$$p_1V_1 = m_1RT_1/M$$

$p$ 、 $V_1$ 、 $T_1$  为那部分空气的压强、体积和温度, 由题设知,  $p_2=p_1$ ,  $V_2 \approx V_1$ , 故有

$$T_2 = m_1T_1/m_2 = 3603 \times 300 / (3603 - 300) \text{ K} = 327 \text{ K}$$

即当气球内气体被加热到  $54^\circ \text{C}$  时气球开始上浮.

21. 有一个用伸缩性极小且不漏气的布料制作的气球(布的质量可忽略不计), 直径为  $d=2.0 \text{ m}$ . 球内充有压强  $p_0=1.005 \times 10^5 \text{ Pa}$  的气体. 该布料所能承受的最大不被撕破力为  $F_m=8.5 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$  (即对于一块展平的一米宽的布料, 沿布面而垂直于布料宽度方向所施加的力超过  $8.5 \times 10^3 \text{ N}$  时, 布料将被撕破). 开始时, 气球被置于地面上, 该处的大气压强为  $p_{s0}=1.000 \times 10^5 \text{ Pa}$ , 温度  $T_0=293 \text{ K}$ , 假设空气的压强和温度均随高度而线性地变化, 压强的变化为  $\alpha_p=-9.0 \text{ Pa} \cdot \text{m}^{-1}$ , 温度的变化为  $\alpha_T=-3.0 \times 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}$ , 问该气球上升到多高时将破裂?

假设气球上升很缓慢, 可认为球内温度随时与周围空气的温度保持一致. 在考虑气球破裂时, 可忽略气球周围各处和底部之间空气压强的差别.

**解析**

当气球充满气体而球内压强大于球外时, 布料即被绷紧, 布料各部分之间产生张力,

正是这种张力可能使布料被撕裂,设想把气球分成上下两个半球,它们的交线是一个直径为  $d$  的圆周,周长为  $\pi d$ ,所以要从这条交线处撕破气球,至少需要的张力为  $F_m \cdot \pi d$ . 另一方面,考虑上半球(包括半球内的气体)受力的情况,它受到三个力的作用:

1) 下半球的球面布料所施加的张力  $F$ ;

2) 上半球外空气对它的压力的合力,其大小为  $\pi d^2 p_a/4$ ,  $p_a$  是气球所在高度处的大气压强.

3) 下半球内气体对它的压力为  $\pi d^2 p/4$ ,式中  $p$  为气球内气体的压强. 忽略浮力时,上述三力相互平衡,即

$$\pi d^2 p/4 = \pi d^2 p_a/4 + F$$

而当  $F > F_m \cdot \pi d$  时,布料即被撕裂,所以气球破裂的条件是

$$\pi d^2 (p - p_a)/4 > F_m \cdot \pi d \quad (1)$$

设气球破裂发生在高度  $h$  处,则

$$p_a = p_{a0} + \alpha_p h \quad (2)$$

而该处温度

$$T = T_0 + \alpha_T h \quad (3)$$

这个温度也就是破裂时气球内气体的温度,又因为气球在上升过程中球内气体是等容变化,所以有

$$p/T = p_0/T_0 \quad \text{即} \quad p = p_0 T/T_0 \quad (4)$$

将(2)、(4)和(3)式代入(1)式,得

$$h > \frac{(4F_m/d) - (p_0 - p_{a0})}{(p_0/T_0)\alpha_T - \alpha_p} = 2.1 \times 10^3 \text{ m}$$

即气球上升到  $2.1 \times 10^3 \text{ m}$  高度以上就将破裂.

22. 有一个用不会收缩也不会伸长的柔软导热性能良好的材料制成的薄皮气球,球皮质量  $m = 12.000 \text{ kg}$ ,气球的最大容积为  $V_1 = 12.500 \text{ m}^3$ . 当气球位于地面时,给气球充入  $n = 500.00 \text{ mol}$  的氦气后,释放气球. 问:该气球上升的最大高度为多少? 气球上升过程中的加速度  $a$  与气球高度  $h$  的关系如何? 在图 2-29 中画出  $a-h$  图线并标明关键点的坐标数值.

已知氦的摩尔质量  $M_{He} = 4.0026 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ ,大气压强与地面高度  $h$  之间的关系为

$$p(h) = p_0 e^{-\sigma h}$$

式中  $p_0 = 1.0000 \times 10^5 \text{ Pa}$  为地面处的大气压强.  $\sigma = \frac{M_a g}{RT}$ ,其中  $M_a$  为大气的平均摩尔质量,其数值为  $28.964 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ ,  $g = 9.800 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  为重力加速度,  $R = 8.315 \text{ J} \cdot (\text{mol} \cdot \text{K})^{-1}$  为摩尔气体常量,  $T$  为大气的温度. 为了使问题简化,我们假设在气

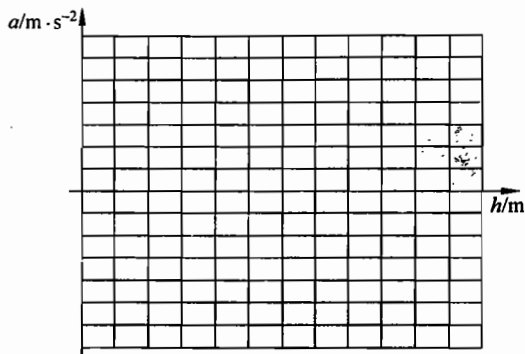


图 2-29

球上升的范围内,大气温度和氦气的温度都没有变化,其数值为  $T=289.64\text{ K}$ ,由此,可求得  $\sigma=1.179\times 10^{-4}\text{ m}^{-1}$ . 假设气球上升过程中气球与空气间的摩擦可忽略不计.

[提示] 在  $x\ll 1$  时,指数函数  $e^x$  可用近似公式  $e^x=1+x$  进行计算.

### 解析

解法 I 1) 先求  $500.00\text{ mol}$  氦气在压强为  $p_0$ , 温度为  $T$  时的体积  $V_0$ . 已知理想气体的状态方程为

$$pV = \frac{m}{M}RT = nRT \quad (1)$$

由此可求得

$$V_0 = \frac{nRT}{p_0} \quad (2)$$

代入已知数据,得

$$V_0 = \frac{500.00 \times 8.315 \times 289.64}{1.000 \times 10^5} \text{ m}^3 = 12.042 \text{ m}^3 \quad (3)$$

因  $V_0 < V_f$ , 可知气体体积未达到最大值,在地面处其体积为  $V_0$ . 设此时它所受的重力为  $G$ , 浮力为  $F_{b0}$ , 则有

$$G = (m + nM_{\text{He}})g = 137.21 \text{ N} \quad (4)$$

然后求浮力  $F_{b0}$ . 由于气球排开空气的体积、压强及温度均与氦气相同,排开空气的物质的量应等于氦气的物质的量,排开空气的质量为  $nM_a$ , 因而气球所受浮力为

$$F_{b0} = nM_a g = 141.92 \text{ N} \quad (5)$$

由  $F_{b0} > G$ , 可知气球将上升, 上升力  $F_0$  及加速度  $a_0$  分别为

$$F_0 = F_{b0} - G = 4.71 \text{ N} \quad (6)$$

$$a_0 = \frac{F_0}{m + nM_{He}} = 0.336 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad (7)$$

2) 气球从地面(高度  $h=0$ )上升时,大气压强随高度  $h$  的增大而减小,气球体积  $V$ (也就是排开空气的体积)膨胀,直至气球体积  $V=V_f$  时为止.在此过程中,氮气的压强始终等于大气压强,根据题设,其温度也始终等于大气的温度,所以排开空气的物质的量始终为  $500.00 \text{ mol}$ ,所受浮力  $F_b$  也不变,即

$$F_b = F_{b0} \quad (8)$$

设  $V=V_f$  时气球的高度为  $h_1$ ,则在  $h=0$  到  $h=h_1$  的过程中,气球所受的合力  $F_1$  为

$$F_1 = F_{b0} - G = F_0 = 4.71 \text{ N} \quad (9)$$

其加速度为

$$a_1 = a_0 = 0.336 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad (10)$$

气球的运动为匀加速运动.氮气做等温膨胀,由玻意耳定律得

$$p_0 V_0 = p_f V_f = V_f p_0 e^{-\sigma h_1}$$

由上式可求得

$$h_1 = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{V_f}{V_0} = \frac{1}{1.179 \times 10^{-4}} \ln \frac{12.500}{12.042} = 316.6 \text{ m} \quad (11)$$

由动能定理可求得  $h=h_1$  时气球的动能  $E_{k1}$  为

$$E_{k1} = F_1 h_1 = 1491 \text{ J} \quad (12)$$

3) 气球上升至高度  $h_1$  后将继续上升,气球的体积保持定值  $V_f$ ,不再膨胀,其温度及压强也保持不变.大气压强  $p$  随高度  $h$  增大而减小,  $p = p_0 e^{-\sigma h}$ ,由理想气体状态方程可知气体的密度  $\rho = \frac{m}{V} = \frac{Mp}{RT}$ ,温度不变时,  $\rho \propto p$ ,故气球上升时,所受浮力将因大气密度  $\rho_a$  的减小而减小,气球所受合力将随  $h$  的增大而减小.因此,气球做加速度大小逐渐减小的变加速运动.

设高度为  $h$  处的浮力为  $F'_b$ ,  $h=0$  处大气密度为  $\rho_{a0}$ ,则有

$$F'_b = V_f \rho_a g = V_f g \rho_{a0} e^{-\sigma h}, \quad h > h_1 \quad (13)$$

气球受到的合力

$$F' = F'_b - G = V_f g \rho_{a0} e^{-\sigma h} - G, \quad h > h_1 \quad (14)$$

设气球上升到高度  $h_2$  时,作用于气球的合力等于零,则有

$$G = V_f g \rho_{a0} e^{-\sigma h_2} \quad (15)$$

以  $\rho_{a0} = \frac{nM_a}{V_0}$  代入,得

$$G = nM_a g \frac{V_f}{V_0} e^{-\sigma h_2}$$

由此求得

$$h_2 = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{V_1 n M_a g}{V_0 G} = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{V_1}{V_0} + \frac{1}{\sigma} \ln \frac{n M_a g}{G} = h_1 + \frac{1}{\sigma} \ln \frac{F_{b0}}{G} \quad (16)$$

代入有关数据,得

$$h_2 = 6.03 \times 10^2 \text{ m} \quad (17)$$

在气球从高度  $h_1$  升到  $h_2$  的过程中,作用于气球的浮力  $F'_b$  是变力,利用(15)式可将(13)式改写为

$$F'_b = \rho_{a0} V_1 g e^{-\sigma h_2} e^{-\sigma(h-h_2)} = G e^{-\sigma(h-h_2)}$$

作用于气体的合力为

$$F' = F'_b - G = G[e^{-\sigma(h-h_2)} - 1] \quad (18)$$

加速度  $a_2$  与  $h$  的关系为

$$a_2 = g[e^{-\sigma(h-h_2)} - 1]$$

在  $h$  由  $h_1$  到  $h_2$  的过程中,对应的  $h-h_2$  则由  $-(h_2-h_1)$  到 0, 因为

$$\sigma(h_2 - h_1) = 1.179 \times 10^{-4} (603 - 316.6) = 3.4 \times 10^{-2} \ll 1$$

可用近似关系式  $e^x = 1+x$  对  $F'_b$  和  $a_2$  进行计算. 故有

$$F' = \sigma G(h_2 - h) \quad (19)$$

即  $F'$  与高度  $h$  成线性关系. 在计算气球上升过程中  $F'$  对气球所做的功时,可以用合力的算术平均值进行计算. 当  $h=h_1$  时,合力最大,由(6)式可知

$$F'_{\max} = F_0 = 4.71 \text{ N}$$

当  $h=h_2$  时,合力最小且为零,即

$$F'_{\min} = 0$$

设气球在  $h=h_2$  处的动能为  $E_{k2}$ ,则由动能定理可得

$$E_{k2} - E_{k1} = \frac{1}{2} (F'_{\max} + F'_{\min}) (h_2 - h_1) = \frac{1}{2} F_0 (h_2 - h_1)$$

代入有关数据得

$$E_{k2} - E_{k1} = 675 \text{ J}$$

$$E_{k2} = (1.491 \times 10^3 + 675) \text{ J} = 2.166 \times 10^3 \text{ J} \quad (20)$$

在气球从  $h=h_1$  到  $h=h_2$  的过程中的加速度  $a_2$  近似与  $h-h_2$  成指数关系,也可近似为与  $h$  成线性关系,即  $a_2 \approx \sigma g(h_2 - h)$ , 在  $h=h_2$  处,  $a_2=0$ .

4) 气球由高度  $h_2$  处继续上升时,浮力小于重力,合力的方向向下,气球做减速运动,气球克服合力做功,以消耗自己的动能为代价. 当气球的动能变为零时,上升的高度达到最大值,设此高度为  $H$ . 由(19)式可知,向下的合力  $F'' = G - F'_b \approx G\sigma(h-h_2)$ , 其大小与上升高度也成线性关系. 当  $h=h_2$  时,合力等于零. 当  $h=H$  时,向下合力的大小为

$$F''(H) = G\sigma(H - h_2) \quad (21)$$

由动能定理

$$E_{k2} = \frac{1}{2} F''(H - h_2) = \frac{1}{2} G\sigma(H - h_2)^2 \quad (22)$$

解得

$$H = \sqrt{\frac{2E_{k2}}{G\sigma}} + h_2 = (517 + 603)\text{m} = 1120\text{m} \quad (23)$$

气球从  $h=h_2$  上升到  $H$  的过程中,其加速度  $a_3$  与  $h$  也成线性关系,但其方向变为向下,在  $h=H$  处,  $a_3$  的大小为

$$|a_3(H)| = \frac{F''(H)}{m + nM_{\text{He}}} \approx g\sigma(H - h_2) \quad (24)$$

代入有关数值,得

$$a_3(H) = -0.597\text{m} \cdot \text{s}^{-2} \quad (25)$$

5) 气球的加速度  $a$  与高度  $h$  的关系的图线如图 2-30 所示.

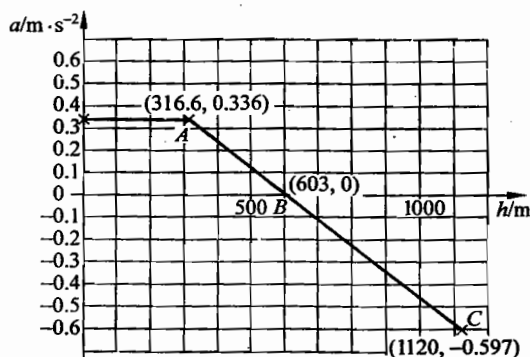


图 2-30

解法 II 直到求出  $h_2$  的数值和(18)式为止,解法与解法 I 相同,此后可求解如下:

(18)式在  $h_1 \leq h \leq H$  的范围内均适用,  $h=h_2$  处浮力与重力相互平衡,  $h < h_2$  时合力向上,指向平衡点;  $h > h_2$  时合力向下,也指向平衡点. 当  $\sigma(h-h_2) \ll 1$  时,对  $e^{-\sigma(h-h_2)}$  可作近似计算,得

$$F' = -\sigma G(h - h_2)$$

令  $x$  为气球相对于平衡点的位移  $h - h_2$ , 则有

$$F' = -\sigma Gx \quad (19')$$

由此可见气球的运动为简谐运动,设气球到达最高点时的高度为  $H$ , 则振幅为

$$A = H - h_2 \quad (20')$$

在  $h=h_1$  处,

$$x = h_1 - h_2, \quad \text{动能} = E_{k1} \quad (21')$$

由简谐运动的能量关系可得

$$\frac{1}{2}\sigma G(H-h_2)^2 = \frac{1}{2}\sigma G(h_1-h_2)^2 + E_{kl}$$

$$(H-h_2)^2 = (h_1-h_2)^2 + \frac{2E_{kl}}{\sigma G}$$

$$H = \sqrt{(h_1-h_2)^2 + \frac{2E_{kl}}{\sigma G}} + h_2$$

以  $h_2-h_1=286\text{ m}$ ,  $E_{kl}=1491\text{ J}$ ,  $\sigma=1.179\times 10^{-4}\text{ m}^{-1}$ ,  $G=137.21\text{ N}$  代入, 得

$$H = (516 + 603)\text{ m} = 1.12 \times 10^3\text{ m} \quad (22')$$

在  $h=h_1$  到  $h=H$  的过程中, 加速度为

$$a = -\sigma g(h-h_2)$$

当  $h=H$  时, 其加速度为

$$a(H) = \sigma g(H-h_2) = 0.597\text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \quad (23')$$

所得结果与解法 I 相同.

23. 如图 2-31 所示, C 为圆筒形容器, P 为活塞. P 的两边充有理想气体, P 与圆筒间无摩擦, 不漏气. L 为固定在活塞上的细长直杆, 细杆与圆筒间无摩擦且密封很好, 不漏气. a 为跨过无摩擦的定滑轮并与悬盘相连的轻绳, 两悬盘的质量相等. 整个系统放在恒温室内.

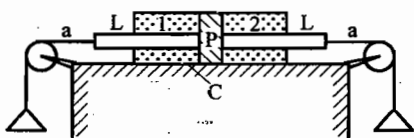


图 2-31

当温度为  $T=300\text{ K}$ , 左盘上放置砝码  $m_1=1.2\text{ kg}$  且活塞平衡时, 两部分气体体积相等, 即  $V_1:V_2=1:1$ .

当温度为  $T'=400\text{ K}$ , 右盘上放置砝码  $m_2=0.5\text{ kg}$  且活塞平衡时, 两部分气体体积之比为  $V'_1:V'_2=4:1$ .

现在欲使活塞不因温度的变化而左右移动, 问:

- 1) 应如何在盘内放置砝码?
- 2) 此时左右两部分的体积比是多少?

### 解析

1) 令  $p_1, V_1, T_1, n_1$  和  $p_2, V_2, T_2, n_2$  分别表示活塞左、右两部分气体的压强、体积、温度、物质的量. 由状态方程可知,

$$p_1 V_1 = n_1 R T_1, \quad p_2 V_2 = n_2 R T_2$$

因为两部分气体的温度总是相同的, 所以在任何温度下都有

$$\frac{p_1 V_1}{p_2 V_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad \text{或} \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{n_1 V_2}{n_2 V_1}$$

按题中要求,若  $V_1, V_2$  不随温度而改变,则必须

$$\frac{p_1(T)}{p_2(T)} = \frac{n_1 V_2}{n_2 V_1} = \text{常量}$$

设左、右两盘中所放砝码的质量差为

$$\Delta m = m_{\text{左}} - m_{\text{右}}$$

活塞面积为  $S$ , 则当活塞不动时有

$$p_2(T) = p_1(T) - \Delta m g / S$$

可得

$$\frac{p_1(T)}{p_1(T) - \Delta m g / S} = \frac{n_1 V_2}{n_2 V_1} = \text{常量}$$

因为  $p_1(T)$  是随温度变化的, 因而上式当而且仅当  $\Delta m = 0$  时成立.

以上说明只有当左、右两盘均不加重物或加等质量重物时, 才有可能使活塞不因温度变化而移动位置.

2) 下面求这种情况下体积比  $V_1''/V_2''$  的值, 由上面结果可知

$$\frac{n_1 V_2''}{n_2 V_1''} = 1 \quad \text{或} \quad \frac{V_1''}{V_2''} = \frac{n_1}{n_2}$$

因此需要用题给数据求出  $n_1/n_2$ .

令  $V$  表示容器的容积, 则温度为  $T=300\text{ K}$  时,  $V_1=V_2=V/2$  ( $m_1=1.2\text{ kg}$ ); 温度为  $T'=400\text{ K}$  时,  $V_1'=4V_2'=4V/5$  ( $m_2=0.5\text{ kg}$ ). 再令  $p_1, p_2$  分别表示温度为  $T$  时两边气体的压强,  $p_1', p_2'$  分别表示温度为  $T'$  时两边气体的压强, 则根据气体状态方程可得

$$p_1 = n_1 RT / V_1 = n_1 RT / (0.5V) \quad (1)$$

$$p_2 = n_2 RT / V_2 = n_2 RT / (0.5V) \quad (2)$$

$$p_1' = n_1 RT' / V_1' = n_1 RT' / (0.8V) \quad (3)$$

$$p_2' = n_2 RT' / V_2' = n_2 RT' / (0.2V) \quad (4)$$

由(1)、(2)、(3)、(4)式可得

$$p_1 - p_2 = 2(n_1 - n_2)RT/V \quad (5)$$

$$p_2' - p_1' = (5n_2 - 1.25n_1)RT'/V \quad (6)$$

由活塞的平衡条件可知

$$m_1 g = (p_1 - p_2)S, \quad m_2 g = (p_2' - p_1')S$$

代入(5)、(6)式, 得

$$m_1 g / S = 2(n_1 - n_2)RT/V$$

$$m_2 g / S = (5n_2 - 1.25n_1)RT'/V$$

得

$$\frac{2(n_1 - n_2)}{5n_2 - 1.25n_1} = \frac{m_1 T'}{m_2 T} = \frac{1.2 \times 400}{0.5 \times 300} = 3.2$$

故

$$n_1 - n_2 = 8n_2 - 2n_1, \quad n_1/n_2 = 3$$

$$V_1''/V_2'' = n_1/n_2 = 3$$



### 三、热力学第一定律

1. 图 3-1 中所示的 A、B 是两个管状容器,除了管较粗的部分高低不同之外,其他一切全同,将两容器抽成真空,再同时分别插入两个水银池中,当水银柱停止运动时(如图),问二管中水银温度是否相同?为什么?设水银与外界没有热交换.

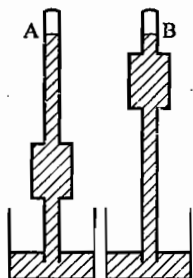


图 3-1

#### 解析

不同. A 管中水银的温度略高于 B 管中水银的温度. 两管插入水银池时,大气压强皆为  $p$ ,进入管中的水银的体积皆为  $V$ ,所以大气对两池中水银所做的功相同.但两装置中水银重力势能的增量不同,所以两者内能的改变也不同.由图可知,A 管中水银的重力势能较小,所以 A 管中的水银的内能增加较多,其温度应略高.

2. 图 3-2 中 A、B 是两个圆筒形绝热容器,中间用一非常细的短管相连通,短管中有导热性能良好的阀门 K,短管及阀门对外界也是绝热的. F 为一带柄的绝热的活塞,它与容器 A 的内表面紧密接触(不漏气),但摩擦可忽略不计.



图 3-2

开始时 K 关闭, F 处于 A 的左端. A 中有  $n$  mol 理想气体,温度是  $T_0$ , B 中为真空. 现在向右推动 F,直到 A 中气体的体积和 B 的容积相等. 在此过程中,已知对气体做功为  $W$ ,气体温度变为  $T_1$ . 这时将 K 稍打开一点点,使 A 中的气体缓慢地向 B 中扩散;同时让活塞 F 缓慢地前进,并保持 A 中活塞附近气体的压强近似于不变. 在此过程中,气体最后的温度是多少? 设活塞、阀门、容器的热容量皆可不计.

开始时 K 关闭, F 处于 A 的左端. A 中有  $n$  mol 理想气体,温度是  $T_0$ , B 中为真空. 现在向右推动 F,直到 A 中气体的体积和 B 的容积相等. 在此过程中,已知对气体做功为  $W$ ,气体温度变为  $T_1$ . 这时将 K 稍打开一点点,使 A 中的气体缓慢地向 B 中扩散;同时让活塞 F 缓慢地前进,并保持 A 中活塞附近气体的压强近似于不变. 在此过程中,气体最后的温度是多少? 设活塞、阀门、容器的热容量皆可不计.

### 解析

在 K 被打开前,推动 F 的过程是绝热过程,对气体所做的功  $W$  等于气体内能的增加量.因为理想气体的内能只与温度有关,所以若用  $c$  表示 1 mol 理想气体温度升降 1 K 时内能的改变,则可知

$$c = \frac{W}{n(T_1 - T_0)}$$

打开 K 后所进行的过程,实际上只能将活塞推进一段距离,而不可能把它推到 A 的右端.这是因为此过程是绝热过程,同时外力对气体做功,因此气体内能一定增加,温度必升高.假如能将气体全部压缩到容器 B 中,这时气体的体积和这一过程的初态相同,压强也相同,而温度却升高,这是不可能的.因此,实际上此过程最后只能进行到这样一种状态,即在容器 A 中还有体积为某一值  $V'$  的气体.用  $p$  表示此时气体的压强,  $T_2$  表示其温度,  $V$  表示容器 B 的容积,根据状态方程,对初态和终态分别有

$$pV = nRT_1$$

$$p(V + V') = nRT_2$$

又由于在绝热过程中对气体所做的功等于气体内能的增加量,则有

$$p(V - V') = nc(T_2 - T_1)$$

由以上四式,经运算可得气体最后的温度  $T_2$  为

$$T_2 = \frac{2nR(T_1 - T_0) + W}{nR(T_1 - T_0) + W} T_1$$

本题是理想气体状态变化的题目.关键在于理想气体的内能只与其温度有关.题目中要求达到的末态是“此过程的最后”,这是本题的难点所在.有的学生认为过程的最后应当是活塞达到 A 的最右端,而没有注意到在题目的条件,即在“A 中气体压强不变”的条件下,活塞达到 A 的最右端是不可能的.

3. 如图 3-3 所示,三个绝热的、容积相同的球状容器 A、B、C,用带有阀门  $K_1$ 、 $K_2$  的绝热细管连通,相邻两球球心的高度差  $h = 1.00$  m. 初始时,阀门是关闭的, A 中装有 1 mol 的氦(He)、B 中装有 1 mol 的氪(Kr)、C 中装有 1 mol 的氙(Xe),三者的温度和压强都相同,气体均可视为理想气体.现打开阀门  $K_1$ 、 $K_2$ ,三种气体相互混合,最终每一种气体在整个容器中均匀分布,三个容器中气体的温度相同.求气体温度的改变量.已知三种气体的摩尔质量分别为

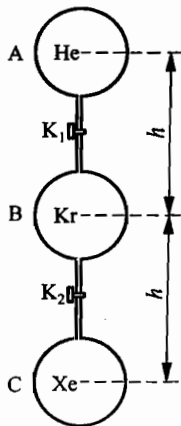


图 3-3

$$M_{\text{He}} = 4.003 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$M_{\text{Kr}} = 83.8 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$M_{\text{Xe}} = 131.3 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$$

在体积不变时,这三种气体任何一种每摩尔温度升高 1 K,所吸收的热量均为  $3R/2$ .  $R$  为摩尔气体常量.

### 解析

根据题设的条件可知:开始时 A 中氦气的质量  $m_{\text{He}} = 4.003 \times 10^{-3} \text{ kg}$ , B 中氦气的质量  $m_{\text{Kr}} = 83.8 \times 10^{-3} \text{ kg}$ , C 中氙气的质量  $m_{\text{Xe}} = 131.3 \times 10^{-3} \text{ kg}$ . 三种气体均匀混合后, A 中的 He 有  $\frac{1}{3} \text{ mol}$  降入 B 中,有  $\frac{1}{3} \text{ mol}$  降入 C 中, He 的重力势能增量为

$$\Delta E_{\text{He}} = \frac{1}{3} m_{\text{He}} g (-h) + \frac{1}{3} m_{\text{He}} g (-2h) = -m_{\text{He}} gh \quad (1)$$

B 中的 Kr 有  $\frac{1}{3} \text{ mol}$  升入 A 中,有  $\frac{1}{3} \text{ mol}$  降入 C 中. Kr 的重力势能增量为

$$\Delta E_{\text{Kr}} = \frac{1}{3} m_{\text{Kr}} gh + \frac{1}{3} m_{\text{Kr}} g (-h) = 0 \quad (2)$$

C 中的 Xe 有  $\frac{1}{3} \text{ mol}$  升入 A 中,有  $\frac{1}{3} \text{ mol}$  升入 B 中. Xe 的重力势能增量为

$$\Delta E_{\text{Xe}} = \frac{1}{3} m_{\text{Xe}} gh + \frac{1}{3} m_{\text{Xe}} g 2h = m_{\text{Xe}} gh \quad (3)$$

混合后,三种气体的重力势能共增加

$$\Delta E_p = \Delta E_{\text{He}} + \Delta E_{\text{Kr}} + \Delta E_{\text{Xe}} = (m_{\text{Xe}} - m_{\text{He}}) gh \quad (4)$$

因球与外界绝热,也没有外力对气体做功,故重力势能的增加必然引起内能的减少. 在体积不变时,气体不做功. 由热力学第一定律可知,此时传给气体的热量应等于气体内能的增量. 但因理想气体的内能只由温度决定,与体积无关,故只要温度改变量相同,则体积不变条件下内能的增量也就是任何过程中理想气体内能的增量. 根据题给的已知条件,注意到本题中所考察的理想气体共有 3 mol,故有

$$\Delta E_p = -3 \times \frac{3}{2} R \Delta T \quad (5)$$

上式中右方为气体内能减少量,  $\Delta T$  表示气体温度的增量,由(4)、(5)两式得

$$\Delta T = -\frac{2(m_{\text{Xe}} - m_{\text{He}}) gh}{9R} \quad (6)$$

将已知数据代入,注意到  $R = 8.31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ , 可得

$$\Delta T = -3.3 \times 10^{-2} \text{ K} \quad (7)$$

即混合后气体温度降低  $3.3 \times 10^{-2} \text{ K}$  (如果学生没记住  $R$  的数值,  $R$  的值可用标准状态的

压强  $p_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ , 温度  $T_0 = 273.13 \text{ K}$  和  $1 \text{ mol}$  理想气体在标准状态下的体积  $V_0 = 2.24 \times 10^{-2} \text{ m}^3$  求得, 即  $R = \frac{p_0 V_0}{T_0}$ ).

4. 某甲设计了一个如图 3-4 所示的“自动喷泉”装置, 其中 A, B, C 为三个容器, D, E, F 为三根细管. 管栓 K 是关闭的. A, B, C 及细管 D, E 中均盛有水, 容器水面的高度差分别为  $h_1$  和  $h_2$ , 如图所示. A, B, C 的截面半径为  $12 \text{ cm}$ , D 的半径为  $0.2 \text{ cm}$ . 甲向同伴乙说: “我若拧开管栓 K, 会有水从细管口喷出.” 乙认为不可能. 理由是: “低处的水自动走向高处, 能量从哪儿来?” 甲当即拧开 K, 果然见到有水喷出, 乙哑口无言, 但不明白自己的错误所在. 甲又进一步演示. 在拧开管栓 K 前, 先将喷管 D 的上端加长到足够长, 然后拧开 K, 管中水面即上升, 最后水面静止于某个高度处.

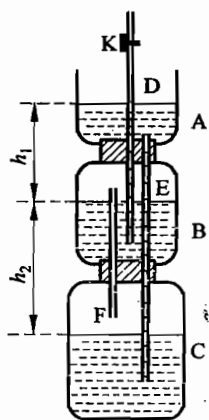


图 3-4

1) 论证拧开 K 后水柱上升的原因.  
2) 当 D 管上端足够长时, 求拧开 K 后 D 中静止水面与 A 中水面的高度差.  
3) 论证水柱上升所需能量的来源.

### 解析

实验证明, 甲的设计是正确的, 所以乙的结论肯定是错的.

1) 设大气压为  $p_0$ , 水的密度为  $\rho$ . 拧开 K 前的情况如图 3-5(a) 所示. 由流体静力学可知, B, C 中气体的压强关系为

$$p_B = p_C = p_0 + \rho g(h_1 + h_2) \quad (1)$$

D 中气体的压强为

$$p_D = p_B - \rho g h_1 \quad (2)$$

由(1)、(2)式可得

$$p_D = p_0 + \rho g h_2$$

即  $p_D > p_0$ . 当拧开 K 后, D 中气体压强降至  $p_0$ , 此时

$$p_B - p_0 > \rho g h_1 \quad (3)$$

即 D 管中容器 B 水面以上的那一段水柱所受合力向上, 所以 D 管中水柱上升.

2) 拧开 K 后, 水柱上升, 因 D 管上端已足够长, 故水不会从管口喷出. 设到 D 中的水面静止时 D 中增加水量的体积为  $\Delta V$ , 则 B 中减少水量的体积增加亦为  $\Delta V$ , 其水

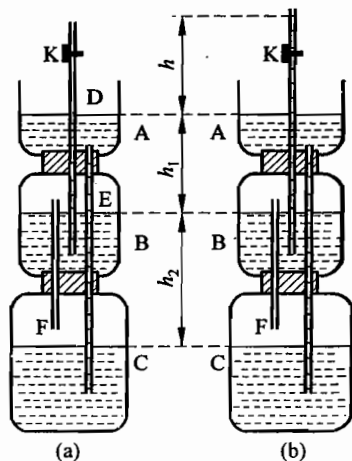


图 3-5

面将略有降低,因而 B 及 C 中气体压强略有下降,A 中的水将通过 E 管流入 C 中,当从 A 流入水量的体积等于  $\Delta V$  时,B,C 中气体压强恢复原值. 因为 A,B,C 的半径为 D 管半径的 60 倍,截面积比为 3600 倍,故 A,B,C 中少量水的增减( $\pm \Delta V$ )引起的 A,B,C 中水面高度的变化可忽略不计,即  $h_1$  和  $h_2$  的数值保持不变.

设 D 中水面静止时与 A 中水面的高度差为  $h$ (见图 3-5(b)),则有

$$p_0 + \rho g(h_1 + h_2) = p_0 + \rho g(h + h_1) \quad (4)$$

由此可得

$$h = h_2 \quad (5)$$

3) 将图 3-5(a)和图 3-5(b)相比较可知,其差别在于体积为  $\Delta V$  的水从 A 移至 C 中,另  $\Delta V$  的水又由 B 移入 D 中. 前者重力势能减少,而后者重力势能增大,前者的重力势能减少量为

$$\Delta E_1 = \rho \Delta V g (h_1 + h_2) \quad (6)$$

D 中增加的水柱的重心离 A 中水面的高度为  $h_2/2$ ,故后者的重力势能增量为

$$\Delta E_2 = \rho \Delta V g \left( h_1 + \frac{1}{2} h_2 \right) \quad (7)$$

即

$$\Delta E_1 > \Delta E_2$$

由此可知,体积为  $\Delta V$  的水由 A 流入 C 中减少的势能的一部分转化为同体积的水由 B 进入 D 中所需的势能,其余部分则转化为水柱的动能,故发生上下振动,D 中水面静止处为平衡点. 由于水管间有摩擦等原因,动能逐渐消耗,最后水面停留在距 A 中水面  $h_2$  处.

5. 如图 3-6 所示,两个截面相同的圆柱形容器,右边容器高为  $h$ ,上端封闭,左边容器上端是一个可以在容器内无摩擦滑动的活塞. 两容器由装有阀门的极细管道相连通,容器、活塞和细管都是绝热的. 开始时,阀门关闭,左边容器中装有热力学温度为  $T_0$  的单原子理想气体,平衡时活塞到容器底的距离为  $h$ ,右边容器内为真空. 现将阀门缓慢打开,活塞便缓慢下降,直至系统达到平衡. 求此时左边容器中活塞的高度和缸内气体的温度.

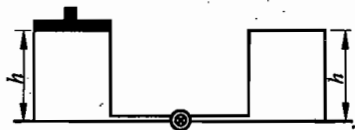


图 3-6

[提示] 1 mol 单原子理想气体的内能为  $\frac{3}{2}RT$ , 其中  $R$  为摩尔气体常量,  $T$  为气体的热力学温度.

### 解析

设容器的截面积为  $A$ , 封闭在容器中的气体为  $\nu$  mol, 阀门打开前, 气体的压强为  $p_0$ . 由理想气体状态方程有

$$p_0 Ah = \nu RT_0 \quad (1)$$

打开阀门后,气体通过细管进入右边容器. 活塞缓慢向下移动,气体作用于活塞的压强仍为  $p_0$ . 活塞对气体的压强也是  $p_0$ . 设达到平衡时活塞的高度为  $x$ , 气体的温度为  $T$ , 则有

$$p_0(h+x)A = \nu RT \quad (2)$$

根据热力学第一定律,活塞对气体所做的功等于气体内能的增量,即

$$p_0(h-x)A = \frac{3}{2}\nu R(T-T_0) \quad (3)$$

由(1)、(2)、(3)式解得

$$x = \frac{2}{5}h \quad (4)$$

$$T = \frac{7}{5}T_0 \quad (5)$$

6. 在一大水银槽中竖直插入一根玻璃管,管上端封闭,下端开口. 已知槽中水银液面以上的那部分玻璃管的长度  $l=76$  cm,管内封闭有  $n=1.0 \times 10^{-3}$  mol 的空气. 保持水银槽与玻璃管都不动而设法使玻璃管内空气的温度缓慢地降低  $10^\circ\text{C}$ ,问在此过程中管内空气放出的热量为多少? 已知管外大气的压强为  $1.013 \times 10^5$  Pa(合 76 cmHg 高),空气的摩尔内能  $U_m = C_V T$ ,其中  $T$  为热力学温度,常量  $C_V = 20.5 \text{ J} \cdot (\text{mol} \cdot \text{K})^{-1}$ ,摩尔气体常量  $R = 8.31 \text{ J} \cdot (\text{mol} \cdot \text{K})^{-1}$ .

### 解析

设玻璃管内空气柱的长度为  $h$ ,大气压强为  $p_0$ ,管内空气的压强为  $p$ ,水银密度为  $\rho$ ,重力加速度为  $g$ ,由图 3-7 可知

$$p + (l-h)\rho g = p_0 \quad (1)$$

根据题给的数据,可知  $p_0 = l\rho g$ ,得

$$p = \rho gh \quad (2)$$

若玻璃管的横截面积为  $S$ ,则管内空气的体积为

$$V = Sh \quad (3)$$

由(2)、(3)式得

$$p = \frac{V}{S}\rho g \quad (4)$$

即管内空气的压强与其体积成正比. 由克拉珀龙方程  $pV = nRT$  得

$$\rho g \frac{V^2}{S} = nRT \quad (5)$$

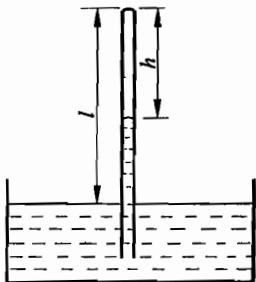


图 3-7

由(5)式可知,随着温度降低,管内空气的体积变小,根据(4)式可知管内空气的压强也变小,压强随体积的变化关系为  $p-V$  图上过原点的直线,如图 3-8 所示.在管内气体的温度由  $T_1$  降到  $T_2$  的过程中,气体的体积由  $V_1$  变到  $V_2$ ,体积缩小,外界对气体做正功,功的数值可用图中画有斜线的梯形面积来表示,即有

$$W = \frac{1}{2}\rho g \left( \frac{V_1}{S} + \frac{V_2}{S} \right) (V_1 - V_2) = \rho g \left( \frac{V_1^2 - V_2^2}{2S} \right) \quad (6)$$

管内空气内能的变化

$$\Delta U = nC_V(T_2 - T_1) \quad (7)$$

设  $Q$  为外界传给气体的热量,则由热力学第一定律  $W+Q=\Delta U$ ,有

$$Q = \Delta U - W \quad (8)$$

由(5)、(6)、(7)、(8)式代入得

$$Q = n(T_2 - T_1) \left( C_V + \frac{1}{2}R \right) \quad (9)$$

代入有关数据得

$$Q = -0.247 \text{ J}$$

$Q < 0$ ,表示管内空气放出热量,故空气放出的热量为

$$Q' = -Q = 0.247 \text{ J} \quad (10)$$

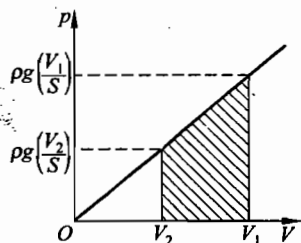


图 3-8

7. 绝热容器 A 经一阀门与另一容积比 A 的容积大很多的绝热容器 B 相连. 开始时阀门关闭,两容器中盛有同种理想气体,温度均为  $30^\circ\text{C}$ ,B 中气体的压强为 A 中的两倍. 现将阀门缓慢打开,直至压强相等时关闭. 问此时容器 A 中气体的温度为多少? 假设在打开到关闭阀门的过程中处在 A 中的气体与处在 B 中的气体之间无热交换. 已知该气体的摩尔内能(即每摩尔该气体的内能)为  $U_m = \frac{5}{2}RT$ ,式中  $R$  为摩尔气体常量, $T$  是热力学温度.

### 解析

设气体的摩尔质量为  $M$ ,容器 A 的体积为  $V$ ,阀门打开前,其中气体的质量为  $m$ ,压强为  $p$ ,温度为  $T$ . 由

$$pV = \frac{m}{M}RT$$

得

$$m = \frac{MpV}{RT} \quad (1)$$

因为容器 B 很大,所以在题中所述的过程中,B 中气体的压强和温度皆可视为不变. 根据

题意,打开阀门又关闭后,A 中气体的压强变为  $2p$ ,若其温度为  $T'$ ,质量为  $m'$ ,则有

$$m' = \frac{2MpV}{RT'} \quad (2)$$

进入 A 的气体的质量

$$\Delta m = m' - m = \frac{MpV}{R} \left( \frac{2}{T'} - \frac{1}{T} \right) \quad (3)$$

设这些气体处在容器 B 中所占的体积为  $\Delta V$ ,则

$$\Delta V = \frac{\Delta m}{2Mp} RT \quad (4)$$

为把这些气体压入容器 A,容器 B 中其他气体对这些气体做的功为

$$W = 2p\Delta V \quad (5)$$

由(3)、(4)、(5)式得

$$W = pV \left( \frac{2T}{T'} - 1 \right) \quad (6)$$

A 中气体内能的变化

$$\Delta U = \frac{m'}{M} \times 2.5R(T' - T) \quad (7)$$

因为与外界没有热交换,根据热力学第一定律有

$$W = \Delta U \quad (8)$$

由(2)、(6)、(7)和(8)式得

$$\left( \frac{2T}{T'} - 1 \right) = 2 \times 2.5 \left( 1 - \frac{T}{T'} \right) \quad (9)$$

结果为

$$T' = 353 \text{ K}$$

8. 1964 年制成了世界上第一盏用海浪发电的航标灯,它的气室示意图如图 3-9 所示.利用海浪上下起伏的力量,空气能被吸进来,压缩后再推入工作室,推动涡轮机带动发电机发电.当海水下降时,阀门  $K_1$  关闭, $K_2$  打开,设每次吸入压强为  $1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ 、温度为  $7^\circ\text{C}$  的空气  $0.233 \text{ m}^3$ (空气可视为理想气体).当海水上升时, $K_2$  关闭,海水推动活塞绝热压缩空气,空气压强达到  $\sqrt{32} \times 10^5 \text{ Pa}$  时,阀门  $K_1$  才打开. $K_1$  打开后,活塞继续推动空气,直到气体全部被推入工作室为止,同时工作室的空气推动涡轮机工作.设打开  $K_1$  后,活塞附近的压强近似保持不变,活塞的质量及活塞与筒壁间的摩擦忽略不计.问海水每次上升时所做的功是多少?已知空气从压强为  $p_1$ 、体积为  $V_1$  的状态绝热地改变到压强为  $p_2$ 、体积为  $V_2$  的状态过程中,近

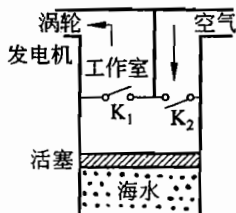


图 3-9



似遵循关系式  $p_1/p_2 = (V_2/V_1)^{5/3}$ , 1 mol 理想气体温度升高 1 K 时, 内能改变为  $3R/2$  ( $R=8.31 \text{ J} \cdot (\text{mol} \cdot \text{K})^{-1}$ ).

### 解析

海水做功可分为两个阶段来讨论:

#### 1) 绝热压缩阶段

根据热力学第一定律, 在绝热过程中海水对气体所做的功等于气体内能的增量, 即

$$A_1 = \Delta U = n \times (3/2)R(T_2 - T_1)$$

由于在绝热过程中, 压强和体积的变化遵循关系式

$$p_1/p_2 = (V_2/V_1)^{5/3}$$

以及理想气体状态方程  $pV=nRT$ , 从而得到

$$T_2/T_1 = p_2V_2/p_1V_1 = (p_2/p_1)(p_1/p_2)^{3/5}$$

所以

$$T_2 = T_1(p_2/p_1)^{2/5} = (273 + 7) \text{ K} \times (\sqrt{32})^{2/5} = 560 \text{ K}$$

而

$$n = \frac{pV}{RT} = \frac{1.0 \times 10^5 \times 0.233}{8.31 \times (273 + 7)} \approx 10 \text{ mol}$$

可得

$$A_1 = 10 \times (3/2) \times 8.31 \times (560 - 280) \text{ J} = 3.49 \times 10^4 \text{ J}$$

#### 2) 根据题设把空气推入工作室时活塞附近压力不变, 故

$$A_2 = p \cdot \Delta S \cdot \Delta l = p_2 V_2$$

其中  $\Delta S$  为活塞面积,  $\Delta l$  为活塞由气体体积是  $V_2$  时之位置移到筒之上端的距离, 而

$$V_2 = V_1(p_1/p_2)^{3/5}$$

则  $A_2 = p_2 V_1 (p_1/p_2)^{3/5} = \sqrt{32} \times 0.233 \times (1/\sqrt{32})^{3/5} \times 10^5 \text{ J} = 4.66 \times 10^4 \text{ J}$

所以海水做的总功为

$$A_{\text{总}} = A_1 + A_2 = 8.15 \times 10^4 \text{ J}$$

9. 在一具有绝热壁的刚性圆柱形封闭气缸内, 有一装有小阀门 L 的绝热活塞. 在气缸的 A 端装有电热器 H, 可用于加热气体.

起初, 活塞紧贴气缸 B 端的内壁, 小阀门 L 关闭; 整个气缸内盛有一定质量的某种理想气体. 其温度为  $T_0$ . 活塞与气缸壁之间的摩擦可以忽略. 现设法把活塞压至气缸中央, 并用销钉 F 把活塞固定, 从而把气缸分成体积相等的左右两室 (见图 3-10). 在上述压缩气体的过程中, 设对气体做功  $W$ , 气体的温度上升到  $T$ .

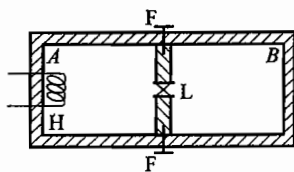


图 3-10

现开启小阀门,经过足够长的时间,将它关闭.然后拔出销钉(让活塞可自由移动),并用电热器加热气体.加热完毕并经过一定时间后,得知左室内气体的压强变为加热前的1.5倍,右室的体积变为原来的0.75倍.求电热器传给气体的热量.

### 解析

设气缸内盛有  $n$  mol 的理想气体,其摩尔定容热容量为  $C_V$ . 因为将气体压缩在 A 端的半个气缸内的过程为绝热过程,根据热力学第一定律和理想气体内能只与温度有关,可知:

$$W = \Delta U = nC_V(T - T_0)$$

即

$$nC_V = \frac{W}{T - T_0}$$

在气体自小阀门进入右室的过程中,气体不吸热不做功,内能不变,故气体进入右室后温度仍为  $T$ ,同时两室中气体的压强  $p$  和体积  $V$  亦相同.

加热后,左室中的气体压强由  $p \rightarrow \frac{3}{2}p$ , 体积由  $V \rightarrow V + \frac{1}{4}V = \frac{5}{4}V$ . 设温度为  $T_A$ , 则

$$\frac{pV}{T} = \frac{\frac{3}{2}p \cdot \frac{5}{4}V}{T_A}$$

$$T_A = \frac{15}{8}T$$

内能改变量为

$$\Delta U_A = \frac{1}{2}nC_V(T_A - T) = \frac{7}{16} \frac{WT}{T - T_0}$$

右室中的气体压强由  $p \rightarrow \frac{3}{2}p$ , 体积由  $V \rightarrow \frac{3}{4}V$ . 设温度变为  $T_B$ , 则

$$\frac{pV}{T} = \frac{\frac{3}{2}p \cdot \frac{3}{4}V}{T_B}$$

$$T_B = \frac{9}{8}T$$

内能改变量为

$$\Delta U_B = \frac{1}{2}nC_V(T_B - T) = \frac{1}{16} \cdot \frac{WT}{T - T_0}$$

因为电热器传给气体的热量等于整个气体内能的改变量,所以得

$$\Delta Q = \Delta U_A + \Delta U_B = \frac{1}{2} \frac{WT}{T - T_0}$$

本题是一道理想气体性质与热力学第一定律(能量守恒定律)的综合题. 关键的一点是, 理想气体的内能只是其温度的函数, 这一点学生比较清楚. 但是反过来, 理想气体无论发生怎样的变化, 只要内能不变, 温度也不会变, 有些同学就不那么清楚了.

10. 直立的气缸内装有一定质量的理想气体. 每摩尔这种气体的内能是  $E = \frac{3}{2}RT$ ,

其中  $R$  为摩尔气体常量,  $T$  为热力学温度. 质量  $m = 7.00 \text{ kg}$  的活塞与一倔强系数  $k = 300 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$  的轻质弹簧相连, 弹簧的下端固定在气缸底部, 如图 3-11 所示. 活塞与气缸壁间的摩擦及弹簧的体积均可忽略不计. 平衡时, 测得气缸内气体温度为  $T_1 = 300 \text{ K}$ , 压强  $p_1 = 1.40 \times 10^5 \text{ Pa}$ , 气柱长  $L_1 = 50.0 \text{ cm}$ . 而活塞上方大气压强  $p_0 = 1.00 \times 10^5 \text{ Pa}$ , 活塞的截面积  $S = 25.0 \text{ cm}^2$ . 现有一质量  $m' = 3.00 \text{ kg}$  的铅柱自活塞正上方  $h = 80.0 \text{ cm}$  高处自由落下, 与活塞发生完全非弹性碰撞, 碰撞时间极短而可忽略. 已知碰撞后铅柱在运动过程中某一时刻又与活塞分开, 此时气缸内气体的温度  $T_2 = 290 \text{ K}$ , 铅柱最终上升到活塞初始位置上方  $h' = 7.80 \text{ cm}$  高度. 试求自铅柱与活塞开始一起向下运动到铅柱刚离开活塞的整个过程中, 外界传给气缸内气体的热量. 计算中重力加速度取  $g = 10.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , 并假设活塞是绝热的, 气缸壁是可以导热的, 弹簧始终处于弹性限度范围之内.

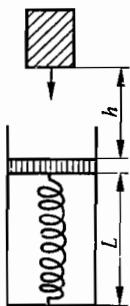


图 3-11

### 解析

1) 先计算相关的位置和速度. 设弹簧的原长为  $L_0$ , 当活塞处于平衡时

$$p_1 S = p_0 S + mg + F_1 \quad (1)$$

$$F_1 = k(L_1 - L_0) \quad (2)$$

由(1)、(2)式解得

$$\begin{aligned} L_0 &= L_1 - [(p_1 - p_0)S - mg]/k \\ &= 0.500 \text{ m} - [(1.40 - 1.00) \times 10^5 \times 25.0 \times 10^{-4} - 7.00 \times 10.0]/300 \text{ m} \\ &= 0.400 \text{ m} \end{aligned} \quad (3)$$

铅柱下落而与活塞碰撞前瞬间的速度为

$$v_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 10.0 \times 0.800} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 4.00 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (4)$$

所以, 铅柱与活塞在碰撞后向下运动的共同速度

$$v_1 = m'v_0 / (m + m') = 3.00 \times 4.00 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} / (7.00 + 3.00) = 1.20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (5)$$

铅柱与活塞一起向下运动, 经过平衡位置, 直到速度变为零, 这时弹簧压缩到最短, 气

缸内气体的体积也压缩到最小.接着,铅柱与活塞一起向上作加速运动,再次到达平衡位置时,加速度为零,向上运动的速度为最大.以后,两者一起向上作减速运动,即作加速度向下的竖直向上运动.当加速度的数值增大到  $g$  时,铅柱与活塞分离,设这时气柱长度为  $L_2$ ,则可求得这时铅柱的速度为

$$v_2 = \sqrt{2g[h' - (L_2 - L_1)]} \quad (6)$$

这时气体的温度是  $T_2$ ,如设此时气体压强为  $p_2$ ,则有

$$p_2 L_2 S / T_2 = p_1 L_1 S / T_1 \quad \text{即} \quad p_2 = p_1 L_1 T_2 / (T_1 L_2) \quad (7)$$

由于此时铅柱和活塞的加速度方向向下,大小等于  $g$ ,根据牛顿第二定律,有

$$p_2 S - p_0 S - (m + m')g - F_2 = (m + m')(-g)$$

其中

$$F_2 = k(L_2 - L_0)$$

所以

$$p_2 S - p_0 S - k(L_2 - L_0) = 0 \quad (8)$$

将(7)式代入,经整理得

$$kL_2^2 + (p_0 S - kL_0)L_2 - p_1 L_1 T_2 S / T_1 = 0 \quad (9)$$

这是关于  $L_2$  的一元二次方程  $AL_2^2 + BL_2 + C = 0$ ,其中

$$A = k = 300 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$B = p_0 S - kL_0$$

$$= 1.00 \times 10^5 \times 25.0 \times 10^{-4} \text{ N} - 300 \times 0.400 \text{ N} = 130 \text{ N}$$

$$C = -p_1 L_1 T_2 S / T_1$$

$$= (-1.40 \times 10^5 \times 0.500 \times 290 \times 25.0 \times 10^{-4} / 300) \text{ J}$$

$$= -169 \text{ J}$$

解出

$$L_2 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{-130 \pm \sqrt{130^2 + 4 \times 300 \times 169}}{2 \times 300} \text{ m} = 0.565 \text{ m} \quad (10)$$

其中因  $L_2 > 0$  而舍去了负号解.求出  $L_2$  后代入(6)式还可得出  $v_2$  值.

$$v_2 = \sqrt{2 \times 10.0 \times [0.078 - (0.565 - 0.500)]} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 0.510 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

2) 计算功和热量.若以活塞、铅柱和弹簧组成的系统为对象,以铅柱和活塞发生非弹性碰撞后以同一初速  $v_1$  开始向下运动的状态为初态,以两者一起回复向上运动期间,铅柱刚离开活塞时的状态为末态,设系统在由初态到末态过程,气缸内气体对活塞的功为  $W_1$ ,活塞反抗大气压做的功为  $W_2$ ,则有

$$W_1 - W_2 = k(L_2 - L_0)^2 / 2 - k(L_1 - L_0)^2 / 2 + (m + m')gL_2 - (m + m')gL_1 + (m + m')v_2^2 / 2 - (m + m')v_1^2 / 2 \quad (11)$$

其中

$$W_2 = p_0 S(L_2 - L_1) \quad (12)$$

又根据热力学第一定律,在由初态到末态的过程中,外界传给气体的热量  $Q$  等于气

体内能的增量  $\Delta E$  加上气体对外界(对活塞)做的功  $W_1$ , 即

$$Q = \Delta E + W_1 \quad (13)$$

式中内能增量  $\Delta E$  可以如下求得: 初态时气体的内能和末态时的气体内能分别是  $E_1 = n3RT_1/2$  和  $E_2 = n3RT_2/2$ , 而由于  $p_1 L_1 S = nRT_1$ , 可得

$$n = p_1 L_1 S / (RT_1) \quad (14)$$

所以  $\Delta E = E_2 - E_1 = n3R(T_2 - T_1)/2 = 3p_1 L_1 S(T_2 - T_1)/(2T_1)$  (15)

将(11)、(12)、(15)式代回(13)式, 即得

$$\begin{aligned} Q &= 3p_1 L_1 S(T_2 - T_1)/(2T_1) + p_0 S(L_2 - L_1) + k[(L_2 - L_0)^2 - (L_1 - L_0)^2]/2 \\ &\quad + (m + m')g(L_2 - L_1) + (m + m')(v_2^2 - v_1^2)/2 \\ &= (-8.75 + 16.25 + 2.58 + 6.50 - 5.90) \text{ J} \\ &= 10.7 \text{ J} \end{aligned}$$

本题是一道力、热结合的题目, 共有 11 个数据, 看来很复杂. 其实力、热结合的题目的一般特点是繁而不难, 只要把题目分解成几段, 一段一段仔细去做, 思考周密一些, 不要漏掉条件, 都是可以得到正确解答的.

11. 如图 3-12 所示的圆柱形容器, 其截面积  $S = 1.70 \times 10^{-2} \text{ m}^2$ , 器壁绝热, 圆筒内有两个以弹簧相连接的绝热活塞, 弹簧的劲度系数为  $k = 1.50 \times 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ , 筒中部有一带孔的固定隔板, 筒壁上有开口, 与大气相通. 整个装置的结构及尺寸如图. 容器左、右端气室中分别盛有同种的理想气体, 左室中有一电加热器. 已知: 大气压强  $p_0 = 1.00 \times 10^5 \text{ Pa}$ ; 电加热器未加热前两室气体均处于平衡态, 温度均为  $T_0 = 300 \text{ K}$ , 压强均为  $p_0$ ; 活塞的位置如图所示,  $l_0 = 1.00 \times 10^{-1} \text{ m}$ ; 如果通过加热器对左室气体不断地徐徐加热, 弹簧长度的最大改变量  $l_m = 7.40 \times 10^{-2} \text{ m}$ ; 理想气体的绝热过程遵循的规律为  $pV^\alpha = \text{恒量}$ ; 筒内气体的摩尔内能与温度的关系为  $U_m = \frac{RT}{\alpha - 1}$ , 式中  $T$  为气体的热力学温度,  $R$  为摩尔气体常量. 求当左室气体吸热为  $Q = 1000 \text{ J}$  时, 左、右两室气体的温度和压强. 设活塞与筒壁的摩擦可忽略不计, 且不漏气. 计算过程各量均取三位有效数字.

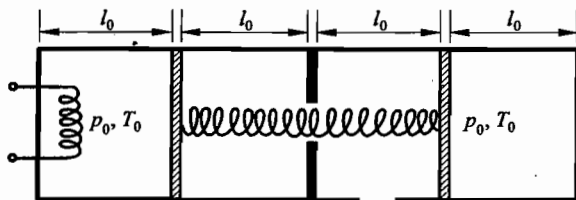


图 3-12

**解析**

## 1) 对加热过程作分析

开始时弹簧的弹力为零,弹簧长度为自然长度,左、右室气体的温度、压强、体积均相同,由此可知它们的物质的量也相同,设为  $n$ ,则有

$$n = \frac{p_0 V_0}{RT_0} = \frac{1.00 \times 10^5 \times 1.00 \times 10^{-1} \times 1.70 \times 10^{-2}}{8.31 \times 300} \text{ mol} = 0.0682 \text{ mol}$$

开始加热后左室气体的温度和压强均缓慢增大,从而推动左活塞右移,压缩弹簧. 被压缩的弹簧又推动右活塞右移,压缩右室气体. 整个过程是:左室气体吸热膨胀,右室气体绝热压缩,弹簧被压缩,活塞对大气做功,部分大气被排出筒外. 此过程进行至左活塞右移距离为  $l_0$  (见图 3-13) 后情况发生变化. 此时左活塞与隔板相接触,左室气体压强再升高时活塞不再右移,弹簧不再被进一步压缩,弹簧的压缩量达最大值,右室气体状态此后不再发生变化. 题给条件  $Q=1000 \text{ J}$  相当于何种情况,是左活塞右移小于  $l_0$  还是等于  $l_0$ ,需要通过计算得出左活塞刚好右移  $l_0$  所需热量  $Q_0$ , 然后比较  $Q$  与  $Q_0$  的大小才能作出判断.

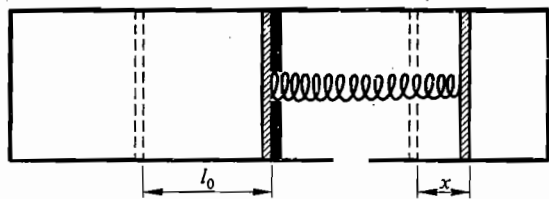


图 3-13

2) 左活塞右移距离刚达到  $l_0$  时左室电加热器提供的热量  $Q_0$ .

设此时右活塞右移距离为  $x$ , 则弹簧的压缩量, 即弹簧长度的最大改变量为

$$l_m = l_0 - x = 7.40 \times 10^{-2} \text{ m} \quad (1)$$

左、右室气体的压强为

$$\begin{aligned} p_1 = p_2 &= p_0 + \frac{kl_m}{S} \\ &= \left( 1.00 \times 10^5 + \frac{1.50 \times 10^4 \times 7.40 \times 10^{-2}}{1.70 \times 10^{-2}} \right) \text{ Pa} \\ &= 1.65 \times 10^5 \text{ Pa} \end{aligned} \quad (2)$$

左、右室气体体积分别为

$$\begin{aligned} V_1 &= 2l_0 S = 2 \times 1.00 \times 10^{-1} \times 1.70 \times 10^{-2} \text{ m}^3 = 3.40 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \\ V_2 &= (l_0 - x) S = l_m S = 7.40 \times 10^{-2} \times 1.70 \times 10^{-2} \text{ m}^3 \\ &= 1.26 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \end{aligned}$$

由气体定律可求得左、右室气体的温度分别为

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{p_0 V_0} T_0 = \frac{1.65 \times 10^5 \times 3.40 \times 10^{-3}}{1.00 \times 10^5 \times 1.70 \times 10^{-3}} \times 300 \text{ K} = 990 \text{ K} \quad (3)$$

$$T_2 = \frac{p_2 V_2}{p_0 V_0} T_0 = \frac{1.65 \times 10^5 \times 1.26 \times 10^{-3}}{1.00 \times 10^5 \times 1.70 \times 10^{-3}} \times 300 \text{ K} = 367 \text{ K} \quad (4)$$

以左、右两室气体、活塞和弹簧作为一个系统,根据热力学第一定律有

$$Q_0 = \Delta U + \Delta E_{\text{弹}} + W$$

其中  $\Delta U$  为气体内能的增量,  $\Delta E_{\text{弹}}$  为弹簧弹性势能的增量,  $W$  为两个活塞对大气所做的功, 它们的数值分别为

$$\Delta U = \frac{nR}{a-1}(T_1 - T_0) + \frac{nR}{a-1}(T_2 - T_0) = \frac{nR}{a-1}(T_1 + T_2 - 2T_0) \quad (5)$$

$$\Delta E_{\text{弹}} = \frac{1}{2} k l_m^2 = \frac{1}{2} \times 1.50 \times 10^4 \times (7.40 \times 10^{-2})^2 \text{ J} = 41 \text{ J} \quad (6)$$

$$W = p_0 S l_0 - p_0 S x = p_0 S l_m = 1.00 \times 10^5 \times 1.70 \times 10^{-2} \times 7.40 \times 10^{-2} \text{ J} \\ = 126 \text{ J} \quad (7)$$

3) 为求出  $\Delta U$  的值, 必须先求出  $a$  的值, 方法如下:

由于右室气体遵从绝热过程的方程式, 即  $pV^a = \text{恒量}$ , 因而有

$$p_0 V_0^a = p_2 V_2^a$$

两边取对数可得

$$a = \frac{\lg(p_2/p_0)}{\lg(V_0/V_2)} = \frac{\lg(p_2/p_0)}{\lg(l_0/l_m)} = 1.67 \quad (8)$$

将有关数据代入(5)式可得

$$\Delta U = 640 \text{ J} \quad (9)$$

因此

$$Q_0 = (640 + 41 + 126) \text{ J} = 807 \text{ J} \quad (10)$$

4)  $Q=1000 \text{ J}$  时, 左、右两室气体的温度和压强

如前所述; 当电加热器提供  $807 \text{ J}$  的热量时左活塞就与隔板相接触, 此后右室气体的状态不再改变, 故当  $Q=1000 \text{ J}$  时, 右室气体的温度仍为

$$T'_2 = 367 \text{ K} \quad (11)$$

右室气体的压强仍为

$$p'_2 = 1.65 \times 10^5 \text{ Pa} \quad (12)$$

此后提供的热量全部用于增加左室气体的内能, 即

$$\Delta Q = (1000 - 807) \text{ J} = \frac{nR}{a-1}(T'_1 - T_1) \quad (13)$$

代入数据解得左室气体的温度为

$$T'_1 = 1.22 \times 10^3 \text{ K} \quad (14)$$

左室气体的压强为

$$p'_1 = \frac{T'_1}{T_1} p_1 = 2.03 \times 10^5 \text{ Pa} \quad (15)$$

12. 图 3-14 所示为一放在支架上的直立气缸, 其上部圆筒的体积为  $V_m$ , 内有一质量为  $2m$ 、截面积为  $2S$  的很薄的活塞 A. 下部圆筒足够长, 内有一质量为  $m$ 、截面积为  $S$  的活塞 B. 两圆筒由一细而短的管道连通. 活塞均可在各自的圆筒内无摩擦地上下滑动. 活塞 A 的上方盛有 1 mol 的理想气体, 活塞 A, B 之间盛有 2 mol 的同种理想气体. 达到平衡时, A 上方气体的温度为  $T_0$ ; A, B 之间的气体的体积大于  $V_m$ . 该理想气体的摩尔内能  $U_m$  可用  $U_m = cT$  来表示,  $c$  为恒量,  $T$  为热力学温度. 设活塞、气缸壁、管道都是不导热的, 活塞 B 处的大气压强为  $p_0$ . 今通过上圆筒顶部的电热丝 L 对 A 上方气体缓慢加热, 若在整个加热过程中传递给 A 上方气体的热量为  $Q_0$ , 问

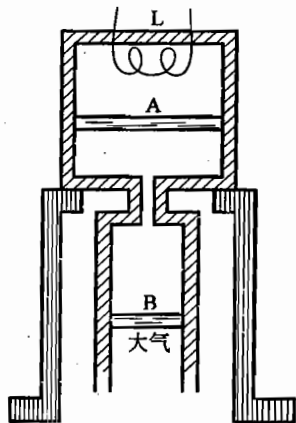


图 3-14

- 1) 在达到平衡时, A 上方气体的温度  $T_f$  等于多少?
- 2) 在加热过程中, 活塞 B 对大气所做的功  $W$  等于多少?

### 解析

活塞 A 的位置与 A 上方的气体的温度有关, 只要活塞 A 不达到上部圆筒的底部, 上方气体和下方气体所进行的过程都是等压过程, 用  $p_1$  和  $p_2$  分别表示上、下气体的压强, 有

$$p_1 = p_2 - (2mg/2S) \quad (1)$$

$$p_2 = p_0 - (mg/S) \quad (2)$$

令  $V_0$  表示温度为  $T_0$  时, 上方气体的体积, 则起始时活塞 A 不达到上部圆筒的底部的条件是

$$V_0 = RT_0/p_1 < V_m \quad (3)$$

由以上三式得到

$$T_0 < (V_m/R)[p_0 - (2mg/S)] \quad (4)$$

1) 情况 I 若  $T_0$  过高, 条件(3)不满足, 即

$$T_0 \geq (V_m/R)[p_0 - (2mg/S)]$$

A 上方气体的体积  $V_1 = V_m$ , 加热时气体体积不变, 为等容过程, 不做功. 根据热力学第一定律

$$Q_0 = \Delta U_1 = cT_f - cT_0$$



即 
$$T_f = (Q_0/c) + T_0 \quad (5)$$

情况 II 若满足等压过程条件(3),则上方气体的初始体积  $V_0$  为

$$V_0 = RT_0/p_1 \quad (6)$$

在加热过程中,活塞 A 向下移动. 设移动的距离为  $\Delta x$ , 则上方气体对外做的功

$$W = p_1 2S\Delta x$$

$2S\Delta x$  为加热过程中,上方气体体积的增加量. 若  $V'$  为上方气体末态的体积, 则  $2S\Delta x = V' - V_0$ , 上方气体在等压过程中做的功为

$$W = p_1(V' - V_0) \quad (7)$$

由热力学第一定律

$$Q_0 = \Delta U_1 + W = cT_f - cT_0 + p_1(V' - V_0) \quad (8)$$

下面再分两种情况讨论:

i) 设整个过程完成后,活塞 A 仍未达到上圆筒的底部,则有

$$p_1 V' = RT_f \quad (9)$$

将(9)式及(6)式代入(8)式中,得

$$T_f = [Q_0/(R+c)] + T_0 \quad (10)$$

因为此情况成立的条件是  $V' < V_m$ , 反映到(8)式中则要求

$$Q_0 \leq c(T_f - T_0) + p_1(V_m - V_0) = Q_{\max}$$

而

$$\begin{aligned} Q_{\max} &= c(T_f - T_0) + p_1 V_m - RT_0 \\ &= cp_1 V_m/R - (c+R)T_0 + p_1 V_m \\ &= (c+R)[(p_0 - 2mg/S)V_m/R - T_0] \end{aligned} \quad (11)$$

所以此情况成立的条件是(3)式和

$$Q_0 \leq (c+R)[(p_0 - 2mg/S)V_m/R - T_0] \quad (12)$$

ii) 当(12)式不成立时,即所加的热量过多,热量加到(11)式所表示的  $Q_{\max}$  时,活塞 A 已经到达底部,设这时上方气体的温度为  $T$ , 根据(10)式有

$$T = Q_{\max}/(R+c) + T_0 \quad (13)$$

在此之后,连续加入热量  $(Q_0 - Q_{\max})$  时,上方气体经历的过程是等容过程,其温度的增加服从(5)式,即

$$T_f = (Q_0 - Q_{\max})/c + T$$

将(13)式代入,得

$$\begin{aligned} T_f &= (Q_0 - Q_{\max})/c + Q_{\max}/(R+c) + T_0 \\ &= Q_0/c - RQ_{\max}/(R+c) + T_0 \\ &= [Q_0 - (p_0 - 2mg/S)V_m + (R+c)T_0]/c \end{aligned} \quad (14)$$

总结以上,可知

$$T_i = \begin{cases} (Q_0/c) + T_0 & \text{当 } T_0 \geq (V_m/R)[p_0 - (2mg/S)] \text{ 时} \\ Q_0/(R+c) + T_0 & \text{当 } \begin{cases} T_0 < (V_m/R)[p_0 - (2mg/S)] \\ Q_0 \leq (R+c)[(p_0 - 2mg/S)V_m/R - T_0] \end{cases} \text{ 时} \\ [Q_0 - (p_0 - 2mg/S)V_m + (R+c)T_0]/c & \text{当 } \begin{cases} T_0 < (V_m/R)[p_0 - (2mg/S)] \\ Q_0 > (c+R)[(p_0 - 2mg/S)V_m/R - T_0] \end{cases} \text{ 时} \end{cases}$$

2) 活塞 A 下部的气体的压强始终保持恒定不变, 与外界亦不发生热交换. 如果该气体对外界做了一定的功, 则由(6)式可知气体的体积将增大. 根据该气体的气态方程和内能表示式  $p_2V = \nu RT$ ,  $U_2 = \nu cT$  (式中  $\nu$  为下部气体的物质的量). 气体体积的增加将导致温度上升, 内能增加. 但根据热力学第一定律, 在绝热的条件下, 若气体对外界做了一定的功, 其内能必减少. 这一矛盾的结论表明气体不可能对外界做功, 气体的体积也不会减小. 即在绝热的条件下, 一定质量的理想气体, 若其压强恒定不变, 则其体积也恒定不变. 在本题中, 体积保持恒定不变有几种不同的情况.

情况 I A 上方体积  $V_1 = V_m$ . 即活塞已到达圆筒的底部, 活塞 A 不移动, 活塞 B 也不移动, 活塞 B 对大气做功

$$W = 0 \quad (15)$$

情况 II i) 活塞 A 未达到上部圆筒的底部, 向下移动一定的距离后仍未达到上部圆筒的底部, 活塞 B 向下移动适当的距离  $x$ , 从而保持下部气体的体积不变. 在这种情况下, 活塞 B 对大气的压力为  $p_0S$ , 它对大气所做的功

$$W = p_0 Sx \quad (16)$$

式中  $Sx$  是活塞 B 扫过的体积. 由于下部气体的体积不变, 所以活塞 B 扫过的体积等于活塞 A 扫过的体积, 即等于上部气体体积的增加, 由(6)式和(9)式可知

$$Sx = V' - V_0 = R(T_i - T_0)/p_1$$

代入(16)式并利用(10)式可得

$$W = [p_0/(p_0 - 2mg/S)][RQ_0/(R+c)] \quad (17)$$

ii) 当  $Q_0 > Q_{\max}$  时,  $Q_0 = Q_{\max} + (Q_0 - Q_{\max})$ , 其中在  $Q_{\max}$  传给 A 上部气体的过程中, 活塞 B 对大气做的功仍由(17)式表示; 而在  $(Q_0 - Q_{\max})$  传给 A 上部气体的过程中, 活塞 A 不动, 所以活塞 B 亦不动, 对大气做功为零. 因此由(17)式和(11)式得

$$\begin{aligned} W &= [p_0/(p_0 - 2mg/S)][RQ_{\max}/(R+c)] \\ &= p_0 V_m - [p_0 R T_0 / (p_0 - 2mg/S)] \end{aligned} \quad (18)$$

总结以上, 可知

$$W = \begin{cases} 0 & \text{[情况 I]} \\ [p_0/(p_0 - 2mg/S)][RQ_0/(R + c)] & \text{[情况 II i)]} \\ p_0V_m - [p_0RT_0/(p_0 - 2mg/S)] & \text{[情况 II ii)]} \end{cases}$$

这是一道热学综合题. 此题的特点在于有几种不同的情况, 不仅末态有不同情况, 初态也有不同的情况. 做题时不应忽略任何一种情况, 对每一种情况都要加以讨论.

13. 1) 已知每摩尔单原子分子理想气体温度升高 1 K 时, 内能增加  $1.50R$  ( $R$  为摩尔气体常量). 现有  $(\frac{2.00}{8.31})$  mol 的单原子分子理想气体, 经历 ABCDA 循环过程, 在  $p$ - $V$  图上是一个圆, 如图 3-15 所示. 图中横坐标表示气体容积  $V$ , 纵坐标表示气体压强  $p$ .

i) 试分析该循环过程中哪一点  $H$  气体温度最高, 并求出该温度  $T_H$ .

ii) 气体从状态 C 到状态 D 过程中, 内能增量、外界对气体做功、气体吸热各为多少?

2) 是否可能设计一个过程, 使  $n$  mol 的单原子分子理想气体, 从图 3-16 所示的初态  $A(p_A, V_A, T_A)$  到终态  $B(p_B = p_A, V_B = 2V_A, T_B)$ , 气体净吸热刚好等于内能增量?

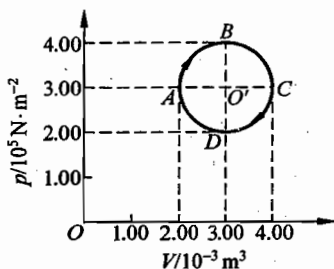


图 3-15

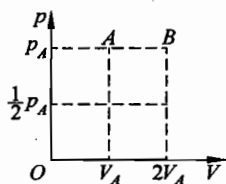


图 3-16

### 解析

1) i) 题给圆循环过程  $p$ - $V$  图的圆心  $O'$  在第一象限等分角线上, 而等温线是等轴双曲线, 对  $OO'$  直线对称, 故圆循环中最高温度的等温线必在  $OO'$  直线与圆之交点  $H$  处相切, 如图 3-17 所示.

$$T_H = \frac{p_H V_H}{nR} = \frac{[(3 + 1 \times \sin 45^\circ) \times 10^5][(3 + 1 \times \cos 45^\circ) \times 10^{-3}]}{(2/8.31) \times 8.31} \text{ K}$$

$$= \frac{\left(3 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \times 10^2}{2} \text{ K} = 687 \text{ K}$$

$$\text{II) } T_C = \frac{p_C V_C}{nR} = \frac{3 \times 10^5 \times 4 \times 10^{-3}}{(2/8.31) \times 8.31} \text{ K} = 600 \text{ K}$$

$$T_D = \frac{p_D V_D}{nR} = \frac{2 \times 10^5 \times 3 \times 10^{-3}}{(2/8.31) \times 8.31} \text{ K} = 300 \text{ K}$$

$$\begin{aligned} \Delta U_{CD} &= n \times 1.5R(T_D - T_C) \\ &= \frac{2.00}{8.31} \times 1.50 \times 8.31 \times (300 - 600) \text{ J} \\ &= -900 \text{ J} \end{aligned}$$

负号表示内能减少。

在 C 到 D 压缩过程中, 外界对气体做正功  $W_{CD}$ , 其数值等于图中 DCFED 面积(该面积等于矩形面积  $O'CFE$  减去四分之一圆面积)乘以每单位面积对应的  $10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} \times 10^{-3} \text{ m}^3 = 100 \text{ J}$  的功。即

$$\begin{aligned} W_{CD} &= \left[ (3 \times 1) - \frac{\pi}{4} \times 1^2 \right] \times 10^2 \text{ J} \\ &= \left( 3 - \frac{\pi}{4} \right) \times 10^2 \text{ J} = 222 \text{ J} \end{aligned}$$

按热力学第一定律  $Q_{CD} + W_{CD} = \Delta U_{CD}$ , 得

$$Q_{CD} = \Delta U_{CD} - W_{CD} = -900 \text{ J} - 222 \text{ J} = -1122 \text{ J}$$

负号表示放热。

2) 从热力学第一定律  $Q_{AB} + W_{AB} = \Delta U_{AB}$  可以看出: 凡满足  $W_{AB} = 0$  条件的过程, 均有  $Q_{AB} = \Delta U_{AB}$  关系, 而具有  $W_{AB} = 0$  特点的过程原则上有无多个。图 3-18 中 ACDEB 过程

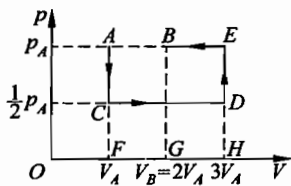


图 3-18

就是使  $W_{AB} = 0$  的理想过程之一。从图中不难看出:  $C \rightarrow D$  过程, 外界对体系做负功, 大小等于  $CDHF$  矩形面积;  $E \rightarrow B$  过程, 外界对体系做正功, 大小等于  $BGHE$  矩形面积。这两个矩形面积相等, 因此  $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow B$  过程中, 外界对体系做功之代数和为零, 即这过程中体系净吸热总量等于从初态到终态内能的增量。

14. 0.1 mol 的理想气体, 历经如图 3-19 所示的循环过程, 由初态 A 等容升压到 B 态, 再沿 BC 直线膨胀到 C 态, 最后等压压缩到 A 态。

1) 问此循环过程中, 气体所能达到的最高温度状态在何处。

2) 求从 B 态至 C 态过程中, 气体从外界吸收的热量是多少(不包括放出的)。

已知: 1 mol 这种理想气体的内能  $U = \frac{3}{2} RT$ ;  $R = 8.31 \text{ J} \cdot (\text{mol} \cdot \text{K})^{-1}$ , 为摩尔气体常量。

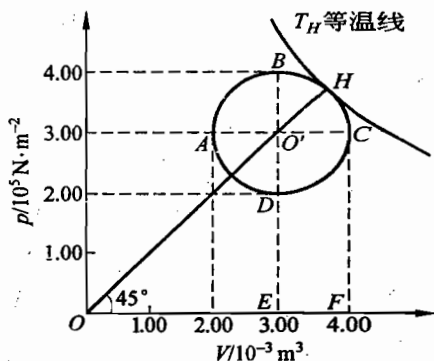


图 3-17

**解析**

1) 由题图所标数值可知, B, C 二态之气体温度是相同的, 但 BC 线与许多等温线 ( $pV = \text{常数}$ ) 相交, 而 BC 与某一等温线相切的切点即应为此循环过程的最高温度点.

在  $p$ - $V$  图上 BC 线的方程式应为  $(p - p_B) = k(V - V_B)$ ,  $k$  为斜率, 由 C, B 两点之坐标可知  $k = -\frac{1}{2} \times \frac{10^5}{10^{-3}} \text{ Pa} \cdot \text{m}^{-3} = -5 \times 10^7 \text{ Pa} \cdot \text{m}^{-3}$

而  $p = kV + (p_B - kV_B)$

设  $a = p_B - kV_B$ , 代入数值得

$$p = kV + a, \quad a = 2 \times 10^5 \text{ Pa} \quad (1)$$

在  $p$ - $V$  图上等温线方程为

$$pV = \nu RT \quad (2)$$

式中  $\nu$  为物质的量. 联立方程 (1)、(2) 求解可得出此等温线与 BC 的交点, 交点的位置与  $T$  有关, 当此联立方程组只有一个解时, 等温线与 BC 相切, 据此可求得最高温度如下: 将 (2) 式代入 (1) 式得

$$kV^2 + aV - \nu RT = 0$$

只有一个解时判别式

$$\Delta = B^2 - 4AC = 0$$

即

$$a^2 + 4k\nu RT = 0$$

$$\text{故 } T = \frac{-a^2}{4k\nu R} = \frac{-(2 \times 10^5)^2}{4 \times (-5 \times 10^7) \times 0.1 \times 8.31} \text{ K} = 240.7 \text{ K} = T_H$$

$T_H$  在  $p$ - $V$  图上的坐标为

$$p_H = 10^5 \text{ Pa}$$

$$V_H = 2 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

2) 气体从 B 态到达 H 态的过程中, 是温度升高, 即内能增加且对外界做功的过程, 故气体必然从外界吸收热量. 但从 H → C 态过程中温度是下降, 对外做功.

根据气体内能的变化与对外做的功可求出在每一微小过程中之  $\Delta Q''$ .

$\Delta Q'' = \Delta U + p\Delta V$ . 若  $\Delta Q'' > 0$ , 吸收热量; 若  $\Delta Q'' < 0$ , 放出热量.

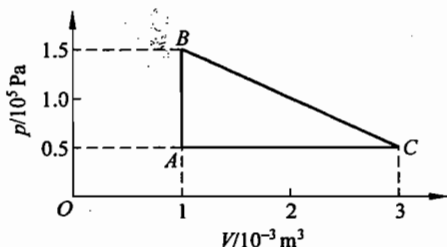


图 3-19

$$\begin{aligned}\Delta U &= \nu \frac{3}{2} R \Delta T = \frac{3}{2} [(p + \Delta p)(V + \Delta V) - pV] \\ &= \frac{3}{2} (p\Delta V + V\Delta p) \quad (\text{略去二级小量})\end{aligned}$$

因  
故

$$p = kV + a, \quad (p + \Delta p) = k(V + \Delta V) + a, \quad \Delta p = k\Delta V$$

$$\begin{aligned}\Delta U &= \frac{3}{2} (p\Delta V + V\Delta p) = \frac{3}{2} [(a + kV)\Delta V + Vk\Delta V] \\ &= \frac{3}{2} (a + 2kV)\Delta V\end{aligned}$$

$$\Delta Q'' = \frac{3}{2} (a + 2kV)\Delta V + (a + kV)\Delta V = \left(\frac{5}{2}a + 4kV\right)\Delta V$$

从  $H \rightarrow C$  过程中  $\Delta V > 0$ , 故有

$$\frac{5}{2}a + 4kV \begin{cases} > 0 & \text{吸热;} \\ < 0 & \text{放热.} \end{cases}$$

而  $k < 0$ , 故  $\frac{5}{2}a \begin{cases} > 4|k|V & \text{吸热;} \\ < 4|k|V & \text{放热.} \end{cases}$

即  $V < 2.5 \times 10^{-3} \text{ m}^3$  时气体吸热,  $V > 2.5 \times 10^{-3} \text{ m}^3$  时气体放热.

在  $BC$  线上,  $V = V_M = 2.5 \times 10^{-3} \text{ m}^3$  的一点 ( $M$ ) 是吸热放热转变点, 它的压强为

$$p_M = \frac{3}{8}a = \frac{3}{4} \times 10^5 \text{ Pa} = 0.75 \times 10^5 \text{ Pa}$$

所以从  $B$  态到  $M$  态是吸热过程,  $M$  态到  $C$  态是放热过程, 故  $B$  态到  $C$  态过程中气体从外界吸收的热量达到的最高值为

$$\begin{aligned}\Delta Q_{BM} &= \Delta U + \Delta W \\ &= \frac{3}{2} (\nu RT_M - \nu RT_B) + \frac{1}{2} (p_M + p_B)(V_M - V_B) \\ &= \frac{3}{2} (p_M V_M - p_B V_B) + \frac{1}{2} (p_M + p_B)(V_M - V_B)\end{aligned}$$

代入数值, 得

$$\Delta Q_{BM} = 225 \text{ J}$$

求  $\Delta Q_{\max}$  的另一种解法

$$\begin{aligned}p_B, V_B, T_B &\rightarrow p, V, T \\ \frac{p_B V_B}{T_B} &= \frac{pV}{T} = \nu R\end{aligned}$$

设  $\frac{p_B - p}{V - V_B} = k$ ,  $p = p_B - kV + kV_B$  (注: 此  $k$  与上述解法的  $k$  差一负号).

做功

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{2}(p_B + p)(V - V_B) \\
 &= \frac{1}{2}(2p_B - kV + kV_B)(V - V_B) \\
 &= \frac{1}{2}[2(p_B + kV_B)V - kV^2 - kV_B^2 - 2p_B V_B]
 \end{aligned}$$

内能增加

$$\begin{aligned}
 \Delta U &= \frac{3}{2}\nu R(T - T_B) = \frac{3}{2}(pV - p_B V_B) \\
 &= \frac{3}{2}[(p_B + kV_B)V - kV^2 - p_B V_B]
 \end{aligned}$$

吸热

$$\begin{aligned}
 \Delta Q &= \Delta U + W \\
 &= \frac{1}{2}[-4kV^2 + 5(p_B + kV_B)V - (5p_B + kV_B)V_B] \\
 &= -2k\left[V^2 - \frac{5(p_B + kV_B)}{4k}V + \frac{5p_B + kV_B V_B}{4k}\right]
 \end{aligned}$$

配方,得

$$\Delta Q = 2k\left\{\left[\frac{5(p_B + kV_B)}{8k} - V\right]^2 - \left[\frac{5(p_B + kV_B V_B)}{8k} - V\right]^2\right\}$$

代入数值,得

$$\Delta Q = \left[\frac{9}{4} \times 10^2 - \left(\frac{1 - 400V/\text{m}^3}{400}\right)^2\right]$$

$V$  从  $10^{-3} \text{ m}^3$  增加时,  $(1 - 400V)$  逐渐减小, 因而  $Q$  将单调地增大, 直至  $400V = 1 \text{ m}^3$ , 即  $V = 2.5 \times 10^{-3} \text{ m}^3$  时,  $\Delta Q$  达最大值,  $\Delta Q_{\text{max}} = 225 \text{ J}$ . 以后随  $V$  的增大,  $Q$  将单调地减小. 因此, 我们知道, 在  $V$  从  $V_0 \rightarrow 2.5 \times 10^{-3} \text{ m}^3$  过程中, 每一段小过程都是吸热过程; 在  $V$  从  $2.5 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \rightarrow 3 \times 10^{-3} \text{ m}^3$  过程中, 每一段小过程都是放热过程.

15. 一直立的不传热的刚性封闭圆筒, 高度为  $2h$ , 被一水平透热隔板  $C$  分成体积皆为  $V$  的  $A, B$  两部分, 如图 3-20 所示.  $A$  中充有  $1 \text{ mol}$  较轻的理想气体, 其密度为  $\rho_A$ ;  $B$  中充有  $1 \text{ mol}$  较重的理想气体, 其密度为  $\rho_B$ . 现将隔板抽开, 使  $A, B$  两部分的气体在短时间内均匀混合. 若  $A, B$  中气体的摩尔定容热容量 ( $1 \text{ mol}$  的气体在体积不变的条件下温度升高  $1 \text{ K}$  所吸收的热量) 皆为  $\frac{3}{2}R$  ( $R$  为摩尔气体常量), 则两部分气体完全混合后的温度  $T_2$  与混合前的温度  $T_1$  之差  $T_2 - T_1 =$  \_\_\_\_\_.

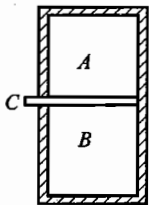


图 3-20

**解析**

$$\frac{(\rho_B - \rho_A)Vgh}{6R}$$

求解本题的过程如下:

取 A, B 中的气体作为系统. 从抽开隔板到气体完全均匀混合的过程中, 系统中的气体分子克服重力所做的总功为

$$\rho_B Vg \frac{h}{2} - \rho_A Vg \frac{h}{2} = \frac{1}{2}(\rho_B - \rho_A)Vgh$$

由于气体为刚性不传热的封闭圆筒包围, 系统与外界没有热交换, 也没有形变功. 此总功只能由系统内能的减少量  $2C_V(T_1 - T_2)$  来补偿,  $C_V$  为气体的摩尔定容热容量. 由此得

$$2C_V(T_1 - T_2) = \frac{1}{2}(\rho_B - \rho_A)Vgh$$

$$T_2 - T_1 = -\frac{\frac{1}{2}(\rho_B - \rho_A)Vgh}{2C_V} = -\frac{(\rho_B - \rho_A)Vgh}{6R}$$

原题是填空题, 只要求写出答案, 不要求写求解过程.

16. 空气是混合气体, 其质量的百分比是: 氮气约 76.9%、氧气约 23.1%, 其他组分可忽略不计.

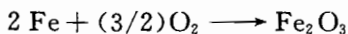
现有一气缸, 缸内充有空气, 并装有一些由极细钢丝组成的钢丝棉; 气缸内的活塞能无摩擦地活动, 使缸内气压恒定为  $1.01 \times 10^5$  Pa; 缸内有非常缓慢的化学反应, 假定反应生成 1 mol 的  $Fe_2O_3$  后, 氧气耗尽. 已知这个过程是在  $1.01 \times 10^5$  Pa, 300 K 的条件下进行, 系统放出热量  $8.24 \times 10^5$  J. 试求在此过程中:

- 1) 整个系统内能的改变量;
- 2) 缸内气体内能的改变量;
- 3) 缸内氮气密度的改变量.

计算时, 缸内气体作理想气体处理; 1 mol 氧气和 1 mol 氮气的内能均认为是  $\frac{5}{2}RT$ ,  $R$  是摩尔气体常量,  $T$  是热力学温度; 缸内钢丝棉等固态物质与缸内气体相比, 所占体积很小, 可忽略不计.

**解析**

1) 缸内的化学反应是





因铁氧化,反应完毕后缸内气体的物质的量减少,  $\Delta n = -1.5 \text{ mol}$ , 气体体积也将随之减少

$$\Delta V = (T/p)R\Delta n$$

在此等温等压过程中,外界对系统所做的功为

$$W = -p\Delta V = -RT\Delta n = -8.31 \times 300 \times (-1.5) \text{ J} = 3739.5 \text{ J}$$

用  $Q$  表示系统吸收的热量,已知系统放热,所以

$$Q = -8.24 \times 10^5 \text{ J}$$

系统内能的改变量可由热力学第一定律得出,为

$$\Delta U = W + Q = -8.203 \times 10^5 \text{ J}$$

即系统内能减少  $8.203 \times 10^5 \text{ J}$ .

2) 缸内气体温度恒定,氧气的内能不会因温度而变化,但氧气的内能会因其物质的量的减少而减小,因此缸内气体内能的改变量为

$$\Delta U' = (5/2)RT\Delta n = 2.5 \times 8.31 \times 300 \times (-1.5) \text{ J} = -9349 \text{ J}$$

3) 由于缸内生成物是  $1 \text{ mol Fe}_2\text{O}_3$ , 可知缸内原有氧气的质量  $m_1$  和氮气质量  $m_2$  分别为

$$m_1 = 1.5 \times 32 \times 10^{-3} \text{ kg} = 48 \times 10^{-3} \text{ kg}$$

$$m_2 = 48 \times 10^{-3} \times (76.9/23.1) \text{ kg} = 159.8 \times 10^{-3} \text{ kg}$$

用  $p_0$  表示  $1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ ,  $p$  表示反应前氮气压强,  $V_0$  表示反应前缸内空气的体积(等于氮气的体积,也等于氧气的体积),  $V$  表示反应后氮气体积,  $M_1$  和  $M_2$  分别表示氧和氮的摩尔质量,  $\Delta\rho$  表示缸内氮气密度的改变量,则有

$$pV_0 = (m_2/M_2)RT$$

$$(p_0 - p)V_0 = (m_1/M_1)RT$$

反应后对氮气有

$$p_0V = (m_2/M_2)RT$$

$$\Delta\rho = (m_2/V) - (m_2/V_0)$$

解以上方程并代入数据,可得

$$\Delta\rho = \frac{M_2 p_0 m_1 / M_1}{[(m_2/M_2) + (m_1/M_1)]RT} = 0.236 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

这是一道综合热学题,含有化学反应.加入化学反应的目的无非是使各物质的量发生变化.掌握了这一点,能量计算就不困难了.

17. 一直立的气缸中装有  $\nu \text{ mol}$  单原子理想气体,气缸为一质量为  $m$ , 面积为  $A$  的活塞所密封. 整个气缸和活塞都是绝热的,且位于真空室内. 起初活塞被销钉夹持在某个位置,使气缸中气体的体积为  $V_0$ , 温度为  $T_0$ . 拔去销钉后,活塞下落,最终活塞停止在某平

衡位置. 这时气缸中气体的体积为  $V$ , 温度为  $T$ . 已知单原子理想气体的摩尔定容热容量 (使 1 mol 气体在体积不变情况下温度升高 1 K 所吸收的热量) 为  $\frac{3R}{2}$  ( $R$  为摩尔气体常量). 忽略活塞和气缸热容量以及它们之间的摩擦. 试计算气体的最终温度  $T$  和体积  $V$ , 将结果用  $T_0, V_0, m, A, \nu, R$  和重力加速度  $g$  表示.

### 解析

当活塞最终停止在平衡位置时, 缸中气体的压强为

$$p = \frac{mg}{A} \quad (1)$$

由气体状态方程可知

$$pV = \nu RT \quad (2)$$

在绝热过程中, 气体内能的增加量等于外界对气体所做的功, 因此有

$$mg \frac{V - V_0}{A} = \nu \frac{3}{2} R (T - T_0) \quad (3)$$

由(1)、(2)、(3)式可解出

$$T = 3T_0 - \frac{2mgV_0}{\nu RA}$$

$$V = \frac{3\nu RT_0 A}{mg} - 2V_0$$

## 四、物态变化

1. 相对湿度是\_\_\_\_\_。  
水的比热容是\_\_\_\_\_  $\text{J} \cdot (\text{kg} \cdot \text{K})^{-1}$ 。纯水在\_\_\_\_\_  $^{\circ}\text{C}$  时密度最大。100  $^{\circ}\text{C}$  的纯水的饱和蒸汽压是\_\_\_\_\_ Pa。

### 解析

本题是填空题,只要求写出答案。

相对湿度是某温度时空气中的水蒸气压强跟同一温度下水的饱和汽压的百分比;

按题目所给定的单位,水的比热容是  $4.2 \times 10^3$ ;

纯水在  $4^{\circ}\text{C}$  时密度最大;

100  $^{\circ}\text{C}$  的纯水的饱和蒸汽压是  $1.0 \times 10^5$  Pa。

2. 某地大气中的水汽没有达到饱和状态,若无其他水汽来源,则当气温升高后,以下各物理量将有何种改变?

- 1) 饱和水汽压\_\_\_\_\_。
- 2) 相对湿度\_\_\_\_\_。
- 3) 绝对湿度\_\_\_\_\_。
- 4) 露点\_\_\_\_\_。

### 解析

1) 饱和水汽压随气温升高而增大。

2) 由于没有其他水汽来源,空气中的水汽压强不变,但饱和水汽压随气温上升而增大,故相对湿度随气温升高而减小。

3) 因无其他水汽来源,空气中的水汽压强不变,所以绝对湿度不变。

4) 露点只与绝对湿度有关,由于绝对湿度不变,所以露点也不变。

3. 夏天,在运输大量冰块的卡车上,有时看到冰面上有淡乳白色的气体漂动,出现这种现象是由于\_\_\_\_\_.

### 解析

靠近冰面处空气的温度低于当时的露点,使空气中的水汽凝结为小水滴.

当时大气中的水蒸气未达到饱和,不能凝结成水.但是,靠近冰面处的空气温度低于当时的露点(使空气里水的未饱和汽变成饱和汽的温度),使空气中的水汽凝结成为小水滴.我们看到淡乳白色的气体就是由大量的小水滴形成的.

有的学生答乳白色气体是冰升华成的,这是错误的.因为冰升华成为水蒸气,而水蒸气是无色透明的.

4. 图 4-1 中所示为一两臂内径相同的 U 形管,其中盛有乙醚.两臂中各有一活塞与液面紧密接触.起始时两活塞在同一水平面上.现将两活塞同时十分缓慢地上提,左右臂活塞提高的距离分别为  $h$  和  $2h$ ,然后将两活塞固定.两臂中液面的高度差应为\_\_\_\_\_.

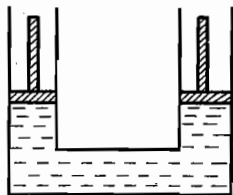


图 4-1

### 解析

零.

因为活塞缓慢上提时,乙醚不断蒸发.当活塞固定后,液面上将充满乙醚的饱和蒸气,其压强为饱和蒸气压强,与体积无关.因此,左右两边压强相同,两臂中液面的高度差为零.

5. 有一壶水,水温是  $10^\circ\text{C}$ ,把它放到火力恒定的炉火上烧.当气压为一大气压时,经 20 min 即沸腾.若继续放在火上,试估算再经过约多少分钟后,这壶水将被烧干(结果取两位有效数字即可).

### 解析

若把每分钟内水吸收的热量看做是恒定的,则可近似估计如下:用  $m$  表示水的质量, $t$  表示温度, $c$  表示比热容, $L$  表示汽化热, $\tau$  表示所需时间,则有

$$\frac{mc(t_{100} - t_{10})}{20} \tau = mL$$

将  $c=4.18 \text{ J} \cdot (\text{g} \cdot \text{K})^{-1}$ ,  $L=2.25 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1}$  代入可得

$$\tau = 1.2 \times 10^2 \text{ min}$$

6. 一密闭气缸内有空气,平衡状态下缸底还有极少量的水,如图 4-2 所示.缸内气体温度为  $T$ ,气体体积为  $V_1$ ,压强  $p_1 = 2.02 \times 10^5 \text{ Pa}$ .

现将活塞缓慢下压,并保持缸内温度不变,当气体体积减少到  $V_2 = \frac{1}{2}V_1$  时,压强变为  $p_2 = 3.03 \times 10^5 \text{ Pa}$ . 求温度  $T$  的值.

### 解析

由于在平衡状态下缸底有水,表明缸内除了空气外,还有饱和水汽. 设在温度为  $T$  时水的饱和汽压为  $p_s$ ,缸内空气原来的压强为  $p$ ,则有

$$p + p_s = p_1 \quad (1)$$

当活塞下压到气体体积减少为  $V_2$  时,饱和汽压与体积无关,仍为  $p_s$ ,而空气压强变为  $p'$ ,由玻意耳定律可知

$$pV_1 = p'V_2 \quad (2)$$

且

$$p' + p_s = p_2 \quad (3)$$

由题给条件  $V_2 = \frac{1}{2}V_1$  和以上三式,代入已知数据可求出

$$p_s = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$$

由于压强为  $1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$  时,水的沸点是  $100^\circ\text{C}$ ,故

$$T = 100^\circ\text{C}$$

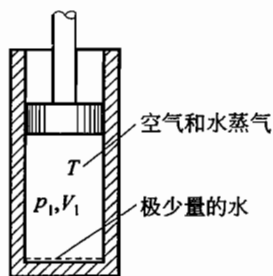


图 4-2

7. 在一个横截面积为  $S$  的密闭容器中,有一个质量为  $m$  的活塞把容器隔成 I、II 两室, I 室中为饱和水蒸气, II 室中有质量为  $m'$  的氮气. 活塞可在容器中无摩擦地滑动. 原来,容器被水平地放置在桌面上. 活塞处于平衡时,活塞两边气体的温度均为  $T_0 = 373 \text{ K}$ , 压强同为  $p_0$ ,如图 4-3 所示. 今将整个容器缓慢地转到图 4-4 所示的直立位置,两室内的温度仍是  $T_0$ ,并有少量水蒸气液化成水. 已知水的汽化热为  $L$ ,水蒸气和氮气的摩尔质量分别为  $M_1$  和  $M_2$ . 求在整个过程中, I 室内的系统与外界交换的热量.

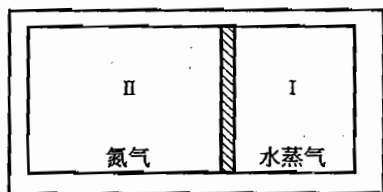


图 4-3

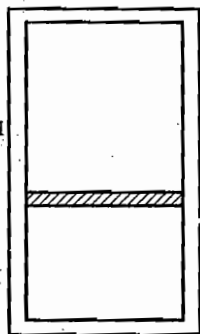


图 4-4

**解析**

当容器处在初始位置时,设水蒸气的体积为  $V_1$ ,氮气的体积为  $V_2$ .当容器处在直立位置时,水蒸气的体积为  $V_1 - \Delta V$ ,压强仍为  $p_0$ ,氮气的体积为  $V_2 + \Delta V$ ,压强为

$$p = p_0 - mg/S \quad (1)$$

因

$$p_0 V_2 = \frac{m'}{M_2} RT_0 \quad (2)$$

$$p(V_2 + \Delta V) = \frac{m'}{M_2} RT_0 \quad (3)$$

由(1)、(2)、(3)式解得

$$\Delta V = \frac{mgV_2}{p_0 S - mg} \quad (4)$$

设转变成水的质量为  $\Delta m$ ,则因为只有少量的水蒸气变为水,所以水的体积可忽略不计,于是

$$\Delta m = \frac{M_1 p_0 V_1}{RT_0} - \frac{M_1 p_0 (V_1 - \Delta V)}{RT_0} = \frac{M_1 p_0 \Delta V}{RT_0} \quad (5)$$

将(4)式代入(5)式得

$$\Delta m = \frac{M_1 p_0}{RT_0} \cdot \frac{mgV_2}{p_0 S - mg} = \frac{M_1}{M_2} \cdot \frac{mg}{p_0 S - mg} m' \quad (6)$$

I 室内的系统向外界放出的热量为

$$Q = \Delta mL = \frac{M_1}{M_2} \cdot \frac{mg}{p_0 S - mg} m' L \quad (7)$$

8. 在如图 4-5 所示的装置中,上下两个容器和连接它们的细长管都是用热容量很小的良导热体做成的,管长为  $l$ ,  $K$  为阀门,整个装置与外界绝热. 开始时,阀门关闭,两容器中都盛有质量为  $m$ , 比热容为  $c$  的某种液体. 平衡时,温度都是  $T_0$ . 由于该液体的蒸气分子受到重力的作用,所以平衡时,在管内的气体分子并非均匀分布,而是上疏下密,已知其蒸气压强是按指数规律分布

$$p_h = p_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}$$

式中  $h$  是管内某点距下面容器中液面的高度,  $p_h$  是该点的蒸气的压强,  $p_0$  是下面容器中液面处(即  $h=0$  处)蒸气的压强,  $m$  是一个蒸气分子的质量,  $T$  是热力学温度,  $k$  是一个常数. 现在打开阀门,试论述该系统的状态将发生怎样的变化,并估算出变化最后的结果.



图 4-5

### 解析

1) 在打开阀门前,平衡时,上下容器中液体表面处的蒸气皆为饱和蒸气. 因为温度相同,所以其饱和蒸气压相同. 但在阀门两旁,由指数分布规律可知,蒸气的蒸气压不同,在左边,因为容器内液面上方空间的高度差很小,所以蒸气压几乎等于液面处的饱和蒸气压;而在右边,由于管较长,所以蒸气压明显小于下面容器内液面处的饱和蒸气压,因而也小于阀门左边的蒸气压. 这样,打开阀门后,左边蒸气将向右边迁移. 按照指数分布规律,将使下面容器中表面处的蒸气压大于饱和蒸气压,从而有一部分蒸气液化(凝结),使下方容器中的液量增加,另一方面,上面容器中液面上方的蒸气由于向阀门右边迁移,从而使蒸气压降低,造成液面处的蒸气压小于饱和蒸气压. 这样,上面容器中液体将汽化(蒸发),使液量减少. 以上所述的过程将持续不断地进行,直到上面容器中的液体全部汽化而凝结在下面容器中为止,此后状态将不再变化.

2) 由于最后结果是上面容器中的液体全部转移到下面容器中,所以从能量来看,就是上面质量为  $m$  的液体的重力势能  $mgl$  转化为总质量为  $2m$  的液体的内能,从而使系统温度上升. 若忽略容器、长管以及蒸气等的热容量的影响,用  $T$  表示最后的温度,则由能量守恒定律可知

$$mgl = 2mc(T - T_0)$$

$$T = \frac{gl}{2c} + T_0$$

9. 一汽缸的初始体积为  $V_0$ , 其中盛有 2 mol 的空气和少量的水(水的体积可忽略). 平衡时气体的总压强是  $3.039 \times 10^5$  Pa, 经做等温膨胀使其体积加倍,在膨胀结束时,其中的水刚好全部消失,此时的总压强为  $2.026 \times 10^5$  Pa. 若让其继续做等温膨胀,使体积再次加倍. 试计算此时

1) 汽缸中气体的温度;

2) 汽缸中水蒸气的物质的量;

3) 汽缸中气体的总压强.

假定空气和水蒸气均可当作理想气体处理.

### 解析

1) 只要有液态水存在,平衡时汽缸中气体的总压强就等于空气压强与饱和水蒸气压强之和

$$p_{\text{总}0} = p_{\text{空}0} + p_{\text{饱}} = 3.039 \times 10^5 \text{ Pa} \quad (1)$$

第一次膨胀后

$$V_1 = 2V_0$$

$$p_{\text{总}1} = p_{\text{空}1} + p_{\text{饱}} = 2.026 \times 10^5 \text{ Pa} \quad (2)$$

由于第一次膨胀是等温过程,所以

$$p_{\text{空}0}V_0 = p_{\text{空}1}V_1 = 2p_{\text{空}1}V_0 \quad (3)$$

解(1)、(2)、(3)三式,得

$$p_{\text{饱}} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa} \quad (4)$$

$$p_{\text{空}0} = 2.026 \times 10^5 \text{ Pa} \quad (5)$$

$$p_{\text{空}1} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa} \quad (6)$$

由于  $p_{\text{饱}} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ ,可知汽缸中气体的温度

$$T_0 = 373 \text{ K} \quad (7)$$

根据题意,经两次膨胀,气体温度未改变.

2) 设水蒸气为  $\nu_{\text{水}}$  mol. 经第一次膨胀,水全部变成水蒸气,水蒸气的压强仍为  $p_{\text{饱}}$ ,这时对于水蒸气和空气分别有

$$p_{\text{饱}}V_1 = \nu_{\text{水}}RT_0 \quad (8)$$

$$p_{\text{空}1}V_1 = \nu_{\text{空}}RT_0 = 2RT_0 \quad (9)$$

由此二式及(5)、(6)式可得

$$\nu_{\text{水}} = 2 \text{ mol} \quad (10)$$

3) 在第二次膨胀过程中,混合气体可按理想气体处理,有

$$p_{\text{总}2}V_2 = p_{\text{总}1}V_1 \quad (11)$$

由题意知,  $V_2 = 4V_0$ ,  $V_1 = 2V_0$ ,再将(2)式代入,得

$$p_{\text{总}2} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa} \quad (12)$$

10. 质量为 2.0 kg、温度为  $-13^\circ\text{C}$ 、体积为  $0.19 \text{ m}^3$  的氟利昂(其分子量为 121),在保持温度不变的条件下被压缩,其体积变为  $0.10 \text{ m}^3$ . 试问在此过程中有多少千克的氟利昂被液化? (已知在  $-13^\circ\text{C}$  时,液态氟利昂的密度  $\rho_l = 1.44 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,其饱和蒸气



压  $p_s = 2.08 \times 10^5$  Pa. 氟利昂的饱和蒸气可近似地看做理想气体.)

### 解析

设氟利昂被压缩后,其液态部分的质量为  $m_1$ , 体积为  $V_1$ , 气态部分的质量为  $m_2$ , 体积为  $V_2$ , 其压强即为饱和蒸气压  $p_s$ . 根据假设, 气态服从理想气体的状态方程, 即

$$p_s V_2 = \frac{m_2}{M} RT$$

其中  $M$  为氟利昂的摩尔质量. 而

$$V_1 + V_2 = V$$

$$m_1 + m_2 = m$$

$$m_1 = \rho_l V_1$$

式中  $V$  为被压缩后的氟利昂的体积,  $m$  为氟利昂的质量. 解以上四式, 得

$$m_1 = \frac{m \frac{RT}{M} - p_s V}{\frac{RT}{M} - \frac{p_s}{\rho_l}} = \frac{2 \times \frac{8.31 \times (273 - 13)}{121 \times 10^{-3}} - 2.08 \times 0.10 \times 10^5}{\frac{8.31 \times (273 - 13)}{121 \times 10^{-3}} - \frac{2.08 \times 10^5}{1.44 \times 10^3}} \text{ kg} = 0.84 \text{ kg}$$

假设压缩前全部氟利昂都以气态存在, 则其压强  $p_i$  可由状态方程求得, 即

$$p_i V_i = \frac{m}{M} RT$$

式中  $V_i$  为压缩前氟利昂的体积, 则

$$p_i = \frac{mRT}{MV_i} = \frac{2 \times 8.31 \times (273 - 13)}{121 \times 10^{-3} \times 0.19} \text{ Pa} = 1.87 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$p_i < p_s$ , 所以压缩前氟利昂全部处于气态的假设成立. 故压缩过程中有 0.84 kg 氟利昂液化.

本题是一道综合热学题, 学生容易遗忘的是需要设法认证压缩前氟利昂是否全部处于气态.

11. 已知冰、水和水蒸气在一密闭容器内(容器内没有任何其他物质)如能三态平衡共存, 则系统的温度和压强必定分别是  $t_1 = 0.01$  °C 和  $p_1 = 610$  Pa. 现在有冰、水和水蒸气质量均为  $m_0 = 1$  g 处于上述平衡状态. 若保持总体积不变而对此系统缓缓加热, 输入的热量  $Q = 0.255$  kJ, 试估算系统再达到平衡后冰、水和水蒸气的质量. 已知在此条件下冰的升华热  $L_{\text{升}} = 2.83$  kJ · g<sup>-1</sup>, 水的汽化热  $L_{\text{汽}} = 2.49$  kJ · g<sup>-1</sup>.

### 解析

解法 I 由题给数据可利用以下近似关系求得冰的熔解热

$$L_{\text{熔}} = L_{\text{升}} - L_{\text{汽}} = 0.34 \text{ kJ} \cdot \text{g}^{-1} \quad (\text{A})$$

因为缓缓加给系统的热  $Q < L_{\text{熔}}$ , 所以冰不能全部融化, 系统在物态变化过程中始终是三态共存且接近平衡, 因此系统的温度和压强均不变. (B)

现在估算在题给温度、压强条件下水蒸气的密度  $\rho_{\text{汽}}$ . 用理想气体状态方程可得  $\rho_{\text{汽}} = Mp_i / (RT_i)$  ( $M$  为水蒸气的摩尔质量). 代入数值  $M = 18 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ ,  $R = 8.31 \text{ J} \cdot (\text{mol} \cdot \text{K})^{-1}$ ,  $p_i = 610 \text{ Pa}$ ,  $T_i = 273 \text{ K}$ , 粗算可得  $\rho_{\text{汽}} \approx 5 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . 在同样条件下, 水的密度  $\rho_{\text{水}} \approx 1 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , 冰的密度  $\rho_{\text{冰}} \approx 0.9 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . 由此可知, 在本题中水蒸气的体积远远大于水和冰的体积之和. 又由于冰融化为水时体积变化不大, 在总体积保持不变的条件下, 完全可以认为本题物态变化过程中水蒸气的体积不变, 也就是再达到平衡时水蒸气的质量仍为  $m_0 = 1 \text{ g}$ , 本题的物态变化过程几乎完全是冰融为水的过程. (C)

设后来冰、水、水蒸气的质量分别为  $x, y, z$  (以  $\text{g}$  为单位), 则有

$$z = 1 \text{ g} \quad (1)$$

$$x + y = 2 \text{ g} \quad (2)$$

根据能量守恒, 有

$$(m_0 - x)L_{\text{熔}} = Q \quad (3)$$

由(2)、(3)式解出  $x, y$ , 再加上(1)式可得

$$x = 0.25 \text{ g}, \quad y = 1.75 \text{ g}, \quad z = 1 \text{ g}$$

解法 II 由题给数据可利用以下近似关系求得冰的熔解热

$$L_{\text{熔}} = L_{\text{升}} - L_{\text{汽}} = 0.34 \text{ kJ} \cdot \text{g}^{-1} \quad (\text{A}')$$

因为加给系统的热  $Q < L_{\text{熔}}$ , 所以冰不能全部融化, 系统在物态变化过程中始终是三态共存且接近平衡, 因此系统的温度和压强均不变. (B')

用  $x, y, z$  (以  $\text{g}$  为单位) 分别表示后来冰、水、水蒸气的质量, 并根据(A')式近似关系, 在计算热的交换时把冰融为水的过程看做冰升华为汽再液化为水的过程, 从而可只考虑冰的升华(及其逆过程)和水的汽化(及其逆过程), 则根据能量守恒有

$$(m_0 - x)L_{\text{升}} + (m_0 - y)L_{\text{汽}} = Q \quad (1')$$

又因总质量不变, 总体积不变, 有

$$x + y + z = 3m_0 \quad (2')$$

$$(m_0 - x)/\rho_{\text{冰}} + (m_0 - y)/\rho_{\text{水}} + (m_0 - z)/\rho_{\text{汽}} = 0 \quad (3')$$

式中  $\rho_{\text{冰}}, \rho_{\text{水}}, \rho_{\text{汽}}$  分别为题给条件下处于平衡态的冰、水、汽的密度. 由(2')式、(3')式消去  $z$  得

$$\left(\frac{1}{\rho_{\text{汽}}} - \frac{1}{\rho_{\text{水}}}\right)x + \left(\frac{1}{\rho_{\text{汽}}} - \frac{1}{\rho_{\text{水}}}\right)y = \left(\frac{2}{\rho_{\text{汽}}} - \frac{1}{\rho_{\text{水}}} - \frac{1}{\rho_{\text{水}}}\right)m_0 \quad (4')$$

现在估算  $\rho_{\text{汽}}, \rho_{\text{水}}, \rho_{\text{冰}}$  的相对大小. 用理想气体状态方程可得  $\rho_{\text{汽}} = Mp_i / (RT_i)$  ( $M$  为水蒸气的摩尔质量). 代入数值  $M = 18 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ ,  $p_i = 610 \text{ Pa}$ ,  $R = 8.31 \text{ J} \cdot (\text{mol} \cdot \text{K})^{-1}$ ,  $T_i = 273 \text{ K}$ , 估算得  $\rho_{\text{汽}} \approx 5 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , 而由于  $\rho_{\text{水}} = 1 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $\rho_{\text{冰}} =$

$0.9 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , 可知

$$1/\rho_{\text{冰}} \gg 1/\rho_{\text{水}}, \quad 1/\rho_{\text{冰}} \gg 1/\rho_{\text{铝}} \quad (5')$$

则(4')式完全可化简为

$$x + y = 2m_0 \quad (6')$$

利用(6')式与(1')式解出

$$y = m_0 + Q/(L_{\text{冰}} - L_{\text{铝}}) \quad (7')$$

$$\text{故} \quad y = 1.75 \text{ g}, \quad x = 0.25 \text{ g}, \quad z = 1 \text{ g} \quad (8')$$

可见加给系统的热实际上完全用于融冰成水。

此题涉及的物理内容比较丰富. 在解法 I 中的结论(A)、(B)与(C)都是分析此题的关键所在, 也是学生在解题时必须越过的关口. 解法 II 则是对解法 I 中的结论(C)作了具体分析.

学生的最大困难在于在解法 I 中作出结论(C), 或在解法 II 中写出(1')式. 这个困难就使物态变化过程中的能量关系很难处理, 导致解题失败.

12. 物理小组的同学在寒冷的冬天做了一个这样的实验: 他们把一个实心的大铝球加热到某温度  $t$ , 然后把它放在结冰的湖面上(冰层足够厚), 铝球便逐渐陷入冰内. 当铝球不再下陷时, 测出球的最低点陷入冰中的深度  $h$ . 将铝球加热到不同的温度, 重复上述实验 8 次, 最终得到如下的数据:

实验顺序数	1	2	3	4	5	6	7	8
热铝球的温度 $t/^\circ\text{C}$	55	70	85	92	104	110	120	140
陷入深度 $h/\text{cm}$	9.0	12.9	14.8	16.0	17.0	18.0	17.0	16.8

已知铝的密度约为冰的密度的 3 倍, 设实验时的环境温度及湖面冰的温度均为  $0^\circ\text{C}$ . 已知此情况下, 冰的熔解热  $L_{\text{熔}} = 3.34 \times 10^5 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

- 1) 试采用以上某些数据估算铝的比热容  $c$  (图 4-6 为  $h-t$  图).
- 2) 对未被你采用的实验数据, 试说明不采用的原因, 并作出解释.

### 解析

1) 铝球放热, 使冰熔化. 设当铝球的温度为  $t_0$  时, 能熔化冰的最大体积恰与半个铝球的体积相等, 即铝球的最低点下陷的深度  $h$  与球的半径  $R$  相等. 当热铝球的温度  $t > t_0$  时, 铝球最低点下陷的深度  $h > R$ , 熔化的冰的体积等于一个圆柱体的体积与半个铝球的体积之和, 如图 4-7 所示.

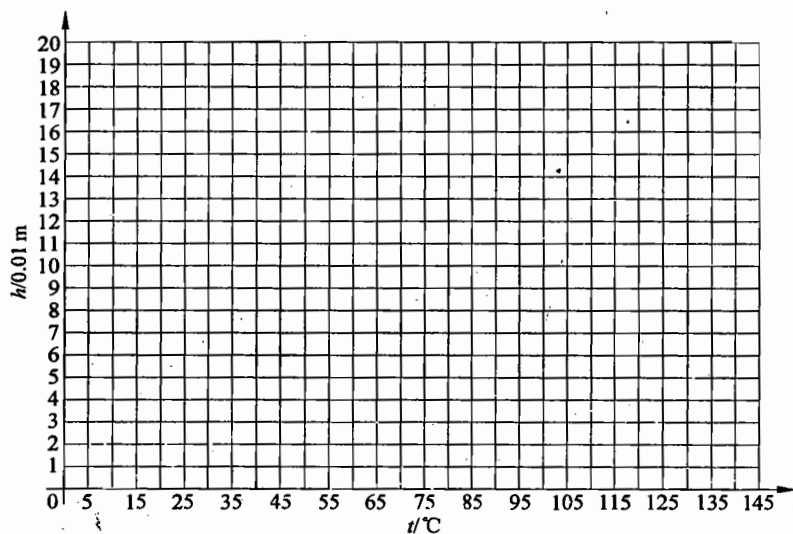


图 4-6

设铝的密度为  $\rho_{Al}$ , 比热容为  $c$ , 冰的密度为  $\rho$ , 熔解热为  $L_{熔}$ , 则铝球的温度从  $t$  °C 降到 0 °C 的过程中, 放出的热量

$$Q_1 = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_{Al} c t \quad (1)$$

熔化的冰吸收的热量

$$Q_2 = \rho \left[ \pi R^2 (h - R) + \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi R^3 \right] L_{熔} \quad (2)$$

假设不计铝球使冰熔化过程中向外界散失的热量, 则有

$$Q_1 = Q_2 \quad (3)$$

解得

$$h = \frac{4Rc}{L_{熔}} t + \frac{1}{3} R \quad (4)$$

即  $h$  与  $t$  成线性关系. 此式只对  $t > t_0$  时成立. 将表中数据画在  $h-t$  图中, 得第 1, 2, ..., 8 次实验对应的点  $A, B, \dots, H$ . 数据点  $B, C, D, E, F$  五点可以拟合成一直线, 如图 4-8 所示. 此直线应与 (4) 式一致. 这样, 在此直线上任取两点的坐标, 代入 (4) 式, 再解联立方程, 即可求出比热容  $c$  的值. 例如, 在直线上取相距较远的横坐标为 8 和 100 的两点  $X_1$  和  $X_2$ , 它们的坐标由图 4-8 可读得为

$$X_1(8.0, 5.1), \quad X_2(100, 16.7)$$

将此数据及  $L_{熔}$  的值代入 (4) 式, 消去  $R$ , 得

$$c = 8.6 \times 10^2 \text{ J} \cdot (\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})^{-1} \quad (5)$$

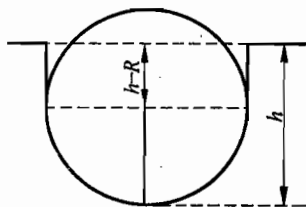


图 4-7

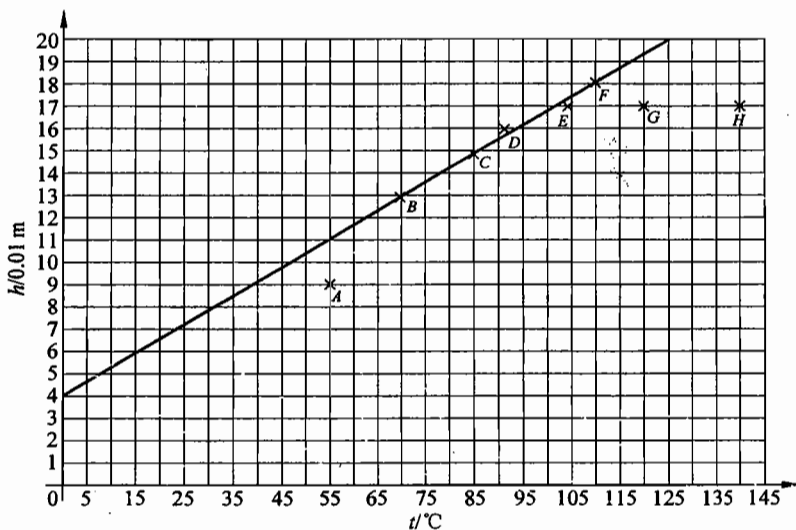


图 4-8

2) 在本题作的图 4-8 中,第 1,7,8 次实验的数据对应的点偏离直线较远,未被采用。这三个实验数据在  $h-t$  图上的点即 A, G, H。

A 点为什么偏离直线较远? 因为当  $h \approx R$  时,从(4)式得对应的温度  $t_0 \approx 65^\circ\text{C}$ , (4)式在  $t > t_0$  的条件下才成立。但第一次实验时铝球的温度  $t_1 = 55^\circ\text{C} < t_0$ , 熔解的冰的体积小于半个球的体积,故(4)式不成立。

G, H 为什么偏离直线较远? 因为铝球的温度过高( $120^\circ\text{C}$ 、 $140^\circ\text{C}$ ),使得一部分冰升华成蒸汽,且因铝球与环境的温度相差较大而损失的热量较多,(2)、(3)式不成立,因而(4)式不成立。

13. 正确使用高压锅(见图 4-9)的办法是:将已加上密封锅盖的高压锅加热,当锅内水沸腾时,加上一定重量的高压阀,此时可以认为锅内空气已全部排除,只有水的饱和蒸气。继续加热,水温将继续升高,到高压阀被蒸气顶起时,锅内温度即达到预期温度。

某一高压锅的预期温度为  $120^\circ\text{C}$ ,如果某人在使用此锅时,未按上述程序而在水温被加热至  $90^\circ\text{C}$  时就加上高压阀(可以认为此时锅内水汽为饱和气),问当继续加热到高压阀开始被顶起而冒气时,锅内温度为多少?

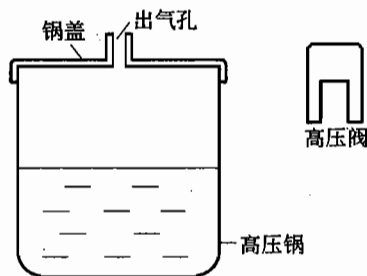


图 4-9

已知:大气压强  $p_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ ;  $90^\circ\text{C}$  时水的饱和汽压  $p_w(90) = 7.010 \times 10^4 \text{ Pa}$ ;  $120^\circ\text{C}$  水的饱和汽压  $p_w(120) = 1.985 \times 10^5 \text{ Pa}$ ; 在  $90^\circ\text{C}$  和  $120^\circ\text{C}$  之间水的饱和汽压  $p_w$  和温度  $t(^\circ\text{C})$  的函数关系  $p_w(t)$  如图 4-10 所示.

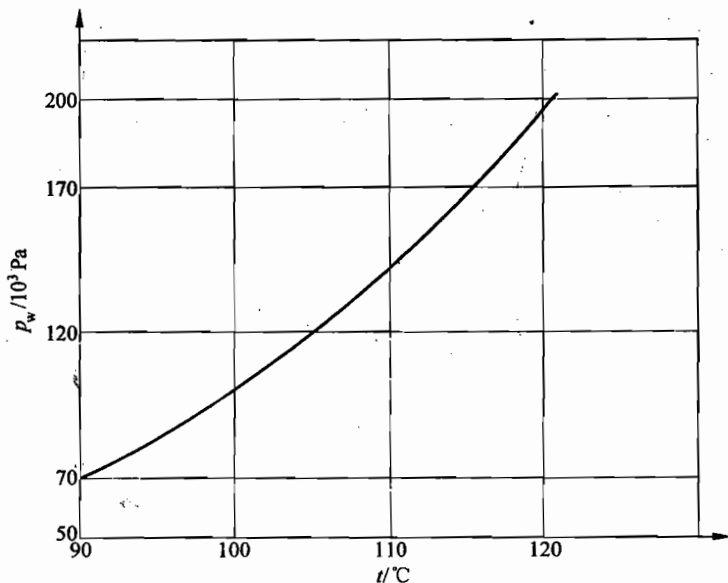


图 4-10

**解析**

解法 I 由题设条件及图 4-11 中  $p_w-t$  曲线可知:

1) 高压阀被顶起时锅内气体压强即为  $p_w(120)$ , 其数值为

$$p = p_w(120) = 1.985 \times 10^5 \text{ Pa} \quad (1)$$

2)  $90^\circ\text{C}$  时锅内水汽压为  $p_w(90) = 7.010 \times 10^4 \text{ Pa}$ , 因为锅内总压强与锅外大气压相等, 所以锅内剩余空气的分压强  $p(90)$  为

$$p(90) = p_0 - p_w(90) = 3.12 \times 10^4 \text{ Pa} \quad (2)$$

3) 随着水温的升高, 空气的分压强增大, 在温度为  $t(^\circ\text{C})$  时的压强为

$$p(t) = p(90) \frac{273+t}{273+90} = (2.35 \times 10^4 + 86.0t) \text{ Pa} \quad (3)$$

水的饱和汽压也随温度增大, 如图 4-11 中  $p_w-t$  图线所示.

设高压阀被顶起时锅内温度为  $t_1$ , 则有

$$p(t_1) + p_w(t_1) = 1.985 \times 10^5 \text{ Pa} \quad (4)$$

令

$$p'_w(t) = p(t_1) + p_w(t_1) - p(t)$$

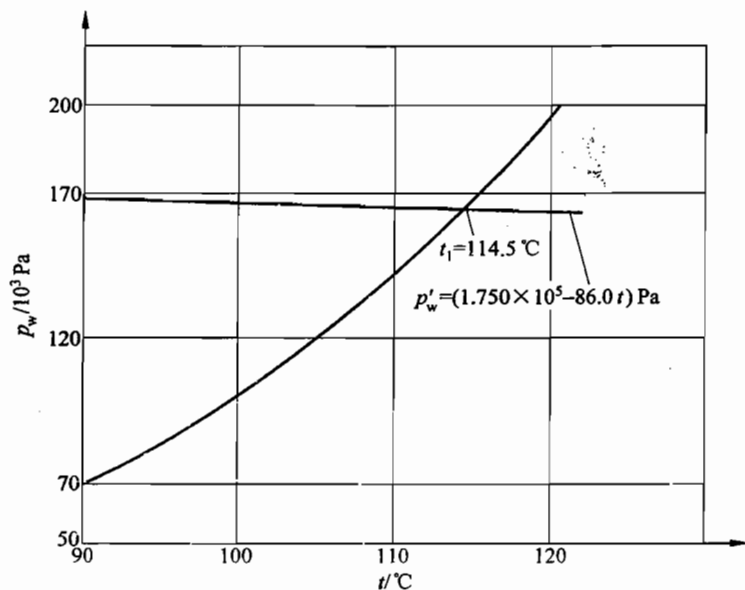


图 4-11

$$\begin{aligned}
 &= (1.985 \times 10^5 - 2.35 \times 10^4 - 86.0t) \text{ Pa} \\
 &= (1.750 \times 10^5 - 86.0t) \text{ Pa} \quad (5)
 \end{aligned}$$

在  $t=t_1$  时,  $p'_w(t)=1.985 \times 10^5 - p(t_1)$ , 作  $p'_w-t$  图线, 所得为一直线, 它应在  $t=t_1$  处与  $p_w-t$  曲线相交, 故由  $p'_w-t$  直线与  $p_w-t$  曲线的交点即可求  $t_1$  的值, 利用数据

$$t = 90 \text{ } ^\circ\text{C} \quad p'_w(90) = 1.673 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$t = 120 \text{ } ^\circ\text{C} \quad p'_w(120) = 1.647 \times 10^5 \text{ Pa}$$

在题给出的附图  $p_w-t$  中画出  $p'_w-t$  直线, 如图 4-11 所示. 由此直线与  $p_w-t$  曲线的交点, 便得所求温度

$$t_1 = 114.5 \text{ } ^\circ\text{C} \quad (6)$$

**解法 II** 1) 高压阀被顶起时, 锅内气压为

$$p = 1.985 \times 10^5 \text{ Pa} \quad (1')$$

2) 在  $90 \text{ } ^\circ\text{C}$  时, 水汽压强为  $7.010 \times 10^4 \text{ Pa}$ , 空气温度为  $90 \text{ } ^\circ\text{C}$ , 空气压强为

$$p(90) = (1.013 \times 10^5 - 7.010 \times 10^4) \text{ Pa} = 3.12 \times 10^4 \text{ Pa} \quad (2')$$

3) 水温升高, 空气压强增大, 在  $t(^\circ\text{C})$  时

$$p(t) = p(90) \frac{273+t}{273+90} = (2.35 \times 10^4 + 86.0t) \text{ Pa} \quad (3')$$

在  $90 \sim 120 \text{ } ^\circ\text{C}$  之间空气的压强  $p(t)$  由 (3') 式求出, 水汽压强可由  $p_w-t$  的曲线上找出, 结果如下表所示.

$t$	90 °C	100 °C	110 °C	120 °C
$p(t)$	$3.12 \times 10^4$ Pa	$3.21 \times 10^4$ Pa	$3.30 \times 10^4$ Pa	$3.38 \times 10^4$ Pa
$p_w(t)$	$7.010 \times 10^4$ Pa	$10.13 \times 10^4$ Pa	$14.32 \times 10^4$ Pa	$19.85 \times 10^4$ Pa
$p(t) + p_w(t)$	$10.13 \times 10^4$ Pa	$13.34 \times 10^4$ Pa	$17.62 \times 10^4$ Pa	$23.23 \times 10^4$ Pa

高压阀被顶起时

$$p(t) + p_w(t) = 19.85 \times 10^4 \text{ Pa} \quad (4')$$

从以上数据可知,与此压强对应的温度在 110 °C 和 120 °C 之间,由于  $p(t)$  在  $3.30 \times 10^4 \sim 3.38 \times 10^4$  Pa 之间,高压锅内水蒸气的压强  $p_w(t)$  应在  $16.55 \times 10^4 \sim 16.47 \times 10^4$  Pa 之间,从图 4-11 可看出  $16.0 \times 10^4 \sim 17.0 \times 10^4$  Pa 之间的压强对应的温度在 113.6 °C 和 115.4 °C 之间,而在这范围内  $p_w(t)$  可近似看作直线. 故有

$$\begin{aligned} p_w(t) &= \left( 1.60 \times 10^5 + \frac{t - 113.6}{115.4 - 113.6} \times 10^4 \right) \text{ Pa} \\ &= \left( \frac{5}{9} \times 10^4 t - 4.71 \times 10^5 \right) \text{ Pa} \end{aligned} \quad (5')$$

将(3')、(5')两式代入(4')式,得

$$(1.985 + 4.71 - 0.235) \times 10^5 = \left( \frac{5}{9} \times 10^4 + 86.0 \right) t = 5.64 \times 10^3 t$$

$$\text{得} \quad t = \frac{646}{5.64} \text{ °C} = 114.5 \text{ °C} \quad (6')$$

14. 正确使用压力锅的方法是:将已盖好密封锅盖的压力锅(如图 4-12)加热,当锅内水沸腾时再加盖压力阀 S,此时可以认为锅内只有水的饱和蒸气,空气已全部排除. 然后继续加热,直到压力阀被锅内的水蒸气顶起时,锅内即已达到预期温度(即设计时希望达到的温度). 现有一压力锅,在海平面处加热能达到的预期温度为 120 °C. 某人在海拔 5000 m 的高山上使用此压力锅,锅内有足量的水.



图 4-12

- 1) 若不加盖压力阀,锅内水的温度最高可达多少?
- 2) 若按正确方法使用压力锅,锅内水的温度最高可达多少?



3) 若未按正确方法使用压力锅,即盖好密封锅盖一段时间后,在点火前就加上压力阀,此时水温为  $27^\circ\text{C}$ ,那么加热到压力阀刚被顶起时,锅内水的温度是多少?若继续加热,锅内水的温度最高可达多少?假设空气不溶于水.

已知:水的饱和蒸汽压  $p_w(t)$  与温度  $t$  的关系图线如图 4-13 所示.大气压强  $p(z)$  与高度  $z$  的关系的简化图线如图 4-14 所示. $t=27^\circ\text{C}$  时  $p_w(27^\circ) = 3.6 \times 10^3 \text{ Pa}$ ;  $z=0$  处  $p(0) = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ .

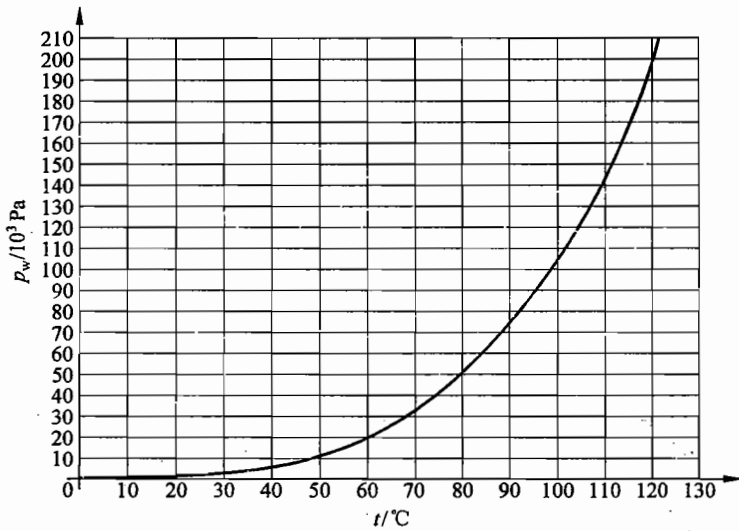


图 4-13

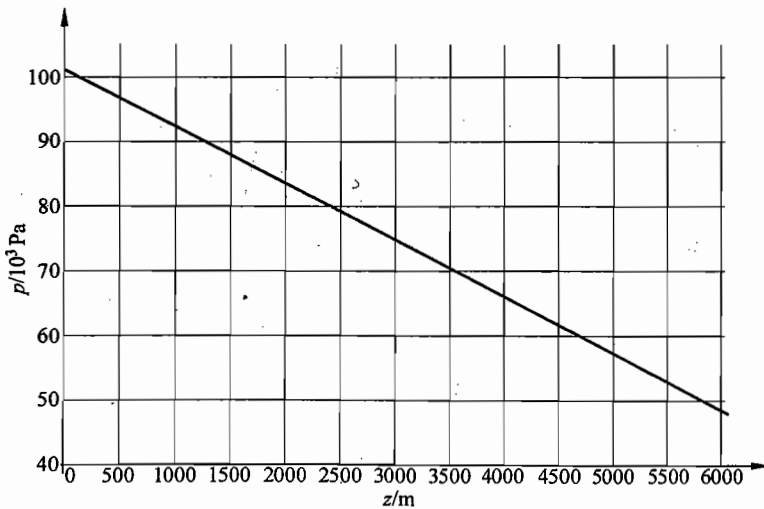


图 4-14

**解析**

1) 已知在海平面处,大气压强  $p(0) = 101.3 \times 10^3 \text{ Pa}$ . 由图 4-15 可知,在  $z = 5000 \text{ m}$  处,大气压强

$$p(5000) = 53 \times 10^3 \text{ Pa} \quad (1)$$

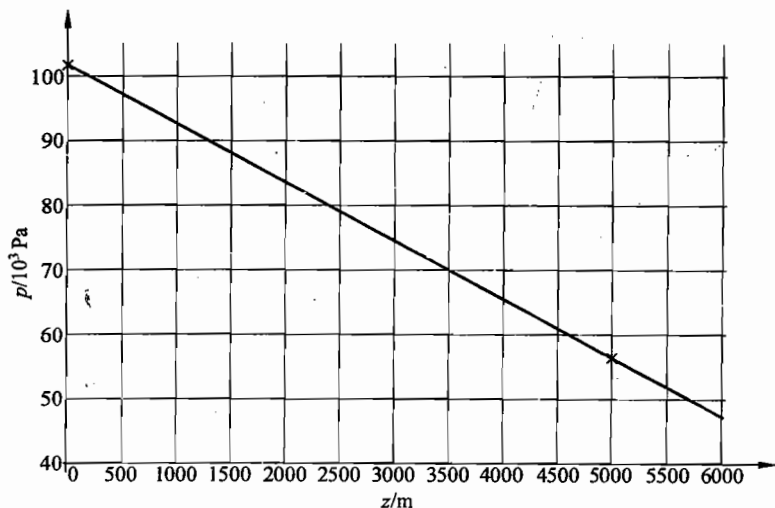


图 4-15

此处水沸腾时的饱和蒸汽压  $p_w$  应等于此值. 由图 4-16 可知,对应的温度即沸点为

$$t_1 = 82 \text{ }^\circ\text{C} \quad (2)$$

达到此温度时锅内水沸腾,温度不再升高,故在 5000 m 高山上,若不加盖压力阀,锅内温度最高可达  $82 \text{ }^\circ\text{C}$ .

2) 由图 4-16 可知,在  $t = 120 \text{ }^\circ\text{C}$  时,水的饱和蒸汽压  $p_w(120^\circ) = 198 \times 10^3 \text{ Pa}$ ,而在海平面处,大气压强  $p(0) = 101.3 \times 10^3 \text{ Pa}$ . 可见压力阀的附加压强为

$$\begin{aligned} p_s &= p_w(120^\circ) - p(0) = (198 \times 10^3 - 101.3 \times 10^3) \text{ Pa} \\ &= 96.7 \times 10^3 \text{ Pa} \end{aligned} \quad (3)$$

在 5000 m 高山上,大气压强与压力阀的附加压强之和为

$$\begin{aligned} p' &= p_s + p(5000) = (96.7 \times 10^3 + 53 \times 10^3) \text{ Pa} \\ &= 149.7 \times 10^3 \text{ Pa} \end{aligned} \quad (4)$$

若在  $t = t_2$  时阀被顶起,则此时的  $p_w$  应等于  $p'$ ,即

$$p_w = p' \quad (5)$$

由图 4-16 可知,

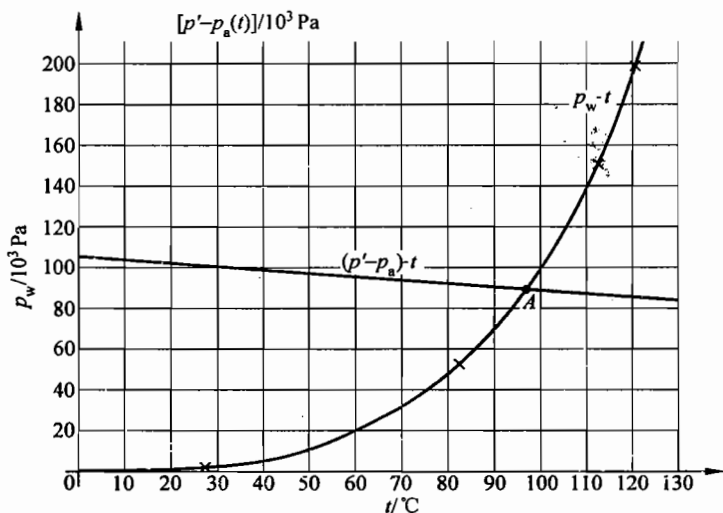


图 4-16

$$t_2 = 112 \text{ } ^\circ\text{C} \quad (6)$$

此时锅内水开始沸腾,温度不再升高,故按正确方法使用此压力锅,在 5000 m 高山上锅内水的温度最高可达  $112 \text{ } ^\circ\text{C}$ 。

3) 在未按正确方法使用压力锅时,锅内有空气,且设空气不溶于水. 设加压力阀时,内部水蒸气已饱和. 由图 4-16 可知,在  $t = 27 \text{ } ^\circ\text{C}$  时,题中已给出水的饱和汽压  $p_w(27^\circ) = 3.6 \times 10^3 \text{ Pa}$ ,这时锅内空气的压强(用  $p_a$  表示)为

$$p_a(27^\circ) = p(5000) - p_w(27^\circ) = (53 \times 10^3 - 3.6 \times 10^3) \text{ Pa} = 49.4 \times 10^3 \text{ Pa} \quad (7)$$

当温度升高时,锅内空气的压强也随之升高,设在温度为  $t \text{ } ^\circ\text{C}$  时,锅内空气压强为  $p_a(t)$ . 则有

$$\frac{p_a(t)}{273 + t / ^\circ\text{C}} = \frac{p_a(27^\circ)}{273 + 27}$$

$$p_a(t) = (164.7t + 45.0 \times 10^3) \text{ Pa} \quad (8)$$

若在  $t = t'$  时压力阀刚好开始被顶起,则有

$$p_w(t') + p_a(t') = p' \quad (9)$$

由此得

$$p_w(t') = p' - p_a(t') = (105 \times 10^3 - 164.7t') \text{ Pa} \quad (10)$$

画出函数  $p' - p_a(t')$  的图线,取

$$t = 0, \quad p' - p_a(0) = 105 \times 10^3 \text{ Pa}$$

$$t = 100 \text{ } ^\circ\text{C}, \quad p' - p_a(100) = 88.6 \times 10^3 \text{ Pa}$$

由此二点便可在图 4-16 上画出直线. 此直线与该图中的  $p_w(t)-t$  曲线的交点为  $A$ ,  $A$  即为所求的满足(10)式的点. 由图可看出与  $A$  点对应的温度为

$$t' = 97\text{ }^{\circ}\text{C} \quad (11)$$

即在压力阀刚开始被顶起时, 锅内水的温度是  $97\text{ }^{\circ}\text{C}$ . 若继续加热, 压力阀被顶起后, 锅内空气随水蒸气一起被排出, 最终空气排净, 锅内水温仍可达  $112\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

## 五、液体的性质、热传递和热膨胀

1. 在航天飞机中原来有两个圆柱形洁净玻璃容器,其中分别封装有水和汞(如图 5-1(a),(b)所示).当航天飞机处于失重状态时,试把水和汞的表面的形状分别画在图 5-1(c),(d)两空框内.

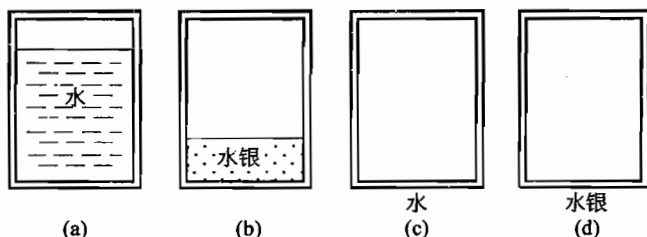


图 5-1

### 解析

由于水润湿玻璃,水与玻璃相接触的附着层有延展的倾向,所以容器内壁与水的接触面达到尽可能大的程度.而水的表面层则由于表面张力的作用有收缩到最小的趋势,因此表面呈球形,如图 5-2(a)所示.

由于水银不润湿玻璃,水银与玻璃的接触面及表面均有收缩的趋势,又由于失重,故水银将收缩成球形并悬空浮在容器内,如图 5-2(b)所示.球形的位置,画在容器内任何地方均可.

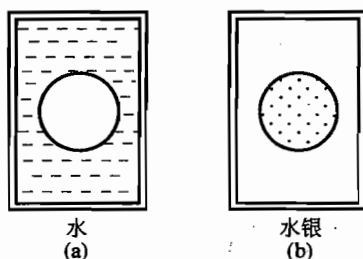


图 5-2

2. 在水平放置的洁净的平玻璃板上倒一些水银,由于重力和表面张力的影响,水银近似呈圆饼形状(侧面向外凸出),过圆饼轴线的竖直截面如图 5-3 所示.为了计算方便,水银和玻璃的接触角可按  $180^\circ$  计算.已知水银的密度  $\rho = 13.6 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,水银的表面张力系数  $\sigma = 0.49 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ .当圆饼的半径很大时,试估算其厚度  $h$  的数值大约是多少?(取 1 位有效数字即可)

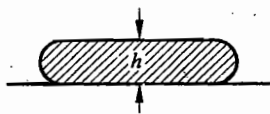


图 5-3

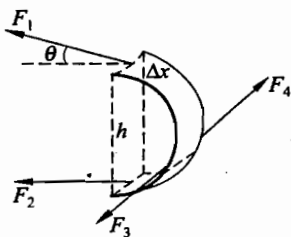


图 5-4

**解析**

如图 5-4 所示,在圆饼的侧面处取宽度为  $\Delta x$ 、高为  $h$  的面积元  $\Delta S$ ,由于重力而产生的水银对  $\Delta S$  的侧压力为

$$F = \bar{p}\Delta S = \frac{1}{2}\rho gh\Delta x = \frac{1}{2}\rho gh^2\Delta x \quad (1)$$

式中  $\bar{p} = \frac{1}{2}\rho gh$  为水银对侧面的平均压强. 由于压力  $F$  使圆饼侧面向外凸出,因而使侧面的面积增大(如图). 但是,在水银与空气接触的表面层中,由于表面张力的作用使水银表面有收缩到尽可能小的趋势,上下两层的表面张力的合力的水平力  $F'$  是指向水银内部的,其方向与  $F$  的方向相反. 设上表面处的表面张力  $F_1$  的方向与水平方向成  $\theta$  角,则  $F'$  的大小为

$$\begin{aligned} F' &= F_1 \cos \theta + F_2 = \sigma \Delta x \cos \theta + \sigma \Delta x \\ &= \sigma \Delta x (1 + \cos \theta) \end{aligned} \quad (2)$$

当水银的形状稳定时,  $F' = F$ . 由于圆饼半径很大,  $\Delta S$  两侧的表面张力  $F_3$ 、 $F_4$  可认为方向相反而抵消. 因而

$$\sigma \Delta x (1 + \cos \theta) = \frac{1}{2}\rho gh^2 \Delta x \quad (3)$$

由(3)式解出

$$h = \sqrt{\frac{2\sigma(1 + \cos \theta)}{\rho g}} \quad (4)$$

由于  $\theta$  的实际数值一定大于 0, 小于  $\pi/2$ , 所以  $1 < \sqrt{1 + \cos \theta} < \sqrt{2}$ , 将  $\rho$  和  $\sigma$  的数值代入(4)式, 得到

$$h = \sqrt{\frac{2 \times 0.49(1 + \cos \theta)}{13.6 \times 10^3 \times 9.8}} \text{ m} \approx 0.0027 \sqrt{1 + \cos \theta} \text{ m} \quad (5)$$

$h$  的取值范围是

$$2.7 \times 10^{-3} \text{ m} < h < 1.4 \times 2.7 \times 10^{-3} \text{ m}$$

所以水银层的厚度的估算数值可取为  $3 \times 10^{-3} \text{ m}$  或  $4 \times 10^{-3} \text{ m}$ .

3. 房中间有一台电冰箱,夏天时把这台正在工作的电冰箱的门打开,想用此法来降低室内的平均温度,这是否可能?为什么?

### 解析

不可能. 因为电冰箱的作用是把热由箱内转到箱外,因此室内平均温度不会降低.

4. 由于大气中  $\text{CO}_2$  含量增多,导致全球气温增高,这被称为温室效应,是环境保护面临的一个重大问题.  $\text{CO}_2$  对地面附近气温产生影响,主要是因为  $\text{CO}_2$  \_\_\_\_\_.

(A) 对射来的太阳光中的红外线有强烈的吸收作用,这就足以使全球气温增高.

(B) 在一昼夜中对射来的太阳光中吸收的热大于它向地球外四周辐射的热,这就使  $\text{CO}_2$  的温度升高,导致全球气温增高.

(C) 对由地面向外辐射的红外线有强烈的吸收作用,是这些被吸收的热使大气温度升高.

(D) 强烈吸收由地面向外辐射的红外线,又向各方向辐射红外线,其中约一半向地面辐射,从而地面附近气温增高.

(E) 对由地面向外辐射的红外线有强烈的反射作用,使这些能量返回地面,从而地面附近气温增高.

### 解析

由于  $\text{CO}_2$  能强烈吸收由地面向外辐射的红外线,又向各方向辐射红外线,其中约有一半又射向地面,使地表附近气温升高,形成温室效应. 所以本题应选(D).

5. 一密闭容器中,盛有温度均匀的热水,在室温始终保持为  $20^\circ\text{C}$  的环境中慢慢冷却. 测出各时刻  $t$  时热水与室温的温度差  $\Delta T$ , 结果如下表所示.

$t/\text{min}$	0	30	60	90	120	150
$\Delta T/^\circ\text{C}$	64	32	16	8	4	2

试根据以上的数据,找出温度差随时间变化的规律的公式,求出  $t=45 \text{ min}$  时水的温度.

### 解析

令  $\Delta t=30 \text{ min}$ , 由测出的数据可看到每隔  $\Delta t$  时间温度差  $\Delta T$  减半. 设  $t=0$  时温度差

为  $\Delta T_0$ , 则  $t$  时刻的温度差  $\Delta T$  应满足下式:

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{t/\Delta t}$$

根据此式, 可求得  $t=45 \text{ min}$  时的温度差为

$$\Delta T = 64 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{45/30} = 22.6 \text{ }^\circ\text{C}$$

所以这时热水温度为  $42.6 \text{ }^\circ\text{C}$ .

通过实验, 由实验数据总结经验规律是研究物理学的重要方法之一. 本题的目的就是要引导学生重视这种训练.

6. 在野外施工中, 需要使质量  $m=4.20 \text{ kg}$  的铝合金构件升温. 除了保温瓶中尚存有温度  $t=90.0 \text{ }^\circ\text{C}$  的  $1.200 \text{ kg}$  的热水外, 无其他热源. 试提出一个操作方案, 能利用这些热水使构件从温度  $t_0=10.0 \text{ }^\circ\text{C}$  升温到  $66.0 \text{ }^\circ\text{C}$  以上(含  $66.0 \text{ }^\circ\text{C}$ ), 并通过计算验证你的方案. 已知铝合金的比热容  $c=0.880 \times 10^3 \text{ J} \cdot (\text{kg} \cdot \text{ }^\circ\text{C})^{-1}$ , 水的比热容  $c_0=4.20 \times 10^3 \text{ J} \cdot (\text{kg} \cdot \text{ }^\circ\text{C})^{-1}$ , 不计向周围环境散失的热量.

### 解析

1) 操作方案: 将保温瓶中  $t=90.0 \text{ }^\circ\text{C}$  的热水分若干次倒出来. 第一次先倒出一部分, 与温度为  $t_0=10.0 \text{ }^\circ\text{C}$  的构件充分接触, 并达到热平衡, 构件温度已升高到  $t_1$ , 将这部分温度为  $t_1$  的水倒掉. 再从保温瓶倒出一部分热水, 再次与温度为  $t_1$  的构件充分接触, 并达到热平衡, 此时构件温度已升高到  $t_2$ , 再将这些温度为  $t_2$  的水倒掉. 然后再从保温瓶倒出一部分热水来使温度为  $t_2$  的构件升温……直到最后一次, 将剩余的热水全部倒出来与构件接触, 达到热平衡. 只要每部分水的质量足够小, 最终就可使构件的温度达到所要求的值.

2) 验证计算: 例如, 将  $1.200 \text{ kg}$  热水分 5 次倒出来, 每次倒出  $m_0=0.240 \text{ kg}$ , 在第一次使热水与构件达到热平衡的过程中, 水放热为

$$Q_1 = c_0 m_0 (t - t_1) \quad (1)$$

构件吸热为

$$Q_1' = cm(t_1 - t_0) \quad (2)$$

由  $Q_1 = Q_1'$  及题给的数据, 可得

$$t_1 = 27.1 \text{ }^\circ\text{C} \quad (3)$$

同理, 第二次倒出  $0.240 \text{ kg}$  热水后, 可使构件升温到

$$t_2 = 40.6 \text{ }^\circ\text{C} \quad (4)$$

依次计算出  $t_1 \sim t_5$  的数值, 分别列在下表中.



倒水次数	1	2	3	4	5
平衡温度/°C	27.1	40.6	51.2	59.5	66.0

可见  $t_5 = 66.0\text{ }^\circ\text{C}$ , 符合要求.

附: 若将 1.200 kg 热水分 4 次倒, 每次倒出 0.300 kg, 依次算出  $t_1 \sim t_4$  的数值, 如下表中的数据.

倒水次数	1	2	3	4
平衡温度/°C	30.3	45.5	56.8	65.2

由于  $t_4 = 65.2\text{ }^\circ\text{C} < 66.0\text{ }^\circ\text{C}$ , 所以如果将热水等分后倒到构件上, 则倒出次数不能少于 5 次.

7. 钢尺 A、钢尺 B 和一段角钢是用同样的材料制成的. 钢尺 A 在  $+20\text{ }^\circ\text{C}$  使用时是准确的; 钢尺 B 在  $-30\text{ }^\circ\text{C}$  使用时是准确的.

- 1) 用这两把尺子在  $-30\text{ }^\circ\text{C}$  的野外去测量上述角钢的长度, 其读数分别为  $l_A$  及  $l_B$ . 则  
(A)  $l_A > l_B$ ; (B)  $l_A = l_B$ ; (C)  $l_A < l_B$ .
- 2) 在  $+20\text{ }^\circ\text{C}$  温度下, 用这两把尺子分别去测量角钢的长度, 其读数为  $l'_A$  及  $l'_B$ . 则  
(A)  $l'_A > l'_B$ ; (B)  $l'_A = l'_B$ ; (C)  $l'_A < l'_B$ .

### 解析

- 1) A          2) A

在  $-30\text{ }^\circ\text{C}$  野外测量时, 尺 B 的读数是正确的, 因此  $l_B$  反映了这时角钢的实际长度. 由于热胀冷缩, 在  $-30\text{ }^\circ\text{C}$  情况下, 尺 A 缩短了, 这时用尺 A 去测量角钢的长度, 读数  $l_A$  会变大, 于是就有  $l_A > l_B$ , 所以第 1) 问应选择 (A).

同理, 在  $+20\text{ }^\circ\text{C}$  时尺 A 的读数反映了角钢这时的实际长度, 而尺 B 在  $+20\text{ }^\circ\text{C}$  时比  $-30\text{ }^\circ\text{C}$  时膨胀了, 变长了, 读数  $l'_B$  会变小, 于是有  $l'_B < l'_A$ , 所以第 2) 问应选择 (A).

8. 有人曾用图 5-5 所示的装置测量液体的体膨胀系数. A、B 为 U 形管的两臂, 它们是粗细均匀的细玻璃管, U 形管竖直放置. 两臂分别插在恒温容器 C (较热的) 和 D (较冷的) 内. U 形管内盛有适量的待测液体. 通过测量 C、D 内的温度和 U 形管两臂内液面的高度, 就可计算出待测液体的体膨胀系数. 试导出计算公式. 不计玻璃管的热膨胀.

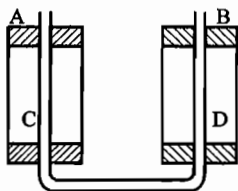


图 5-5

**解析**

用  $t_1, t_2$  分别表示两臂内液体的温度;  $V_1, V_2$  表示它们的体积;  $h_1, h_2$  表示两液面的高度. 因为管的截面是均匀的, 所以有

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{V_1}{V_2}$$

由力学平衡可知两管中液体所受的重力是相等的. 由于  $g$  相同, 故质量是相等的, 在  $0^\circ\text{C}$  时它们的体积也应是一样的, 可用  $V_0$  表示, 用  $\beta$  表示体膨胀系数, 根据体膨胀公式可知

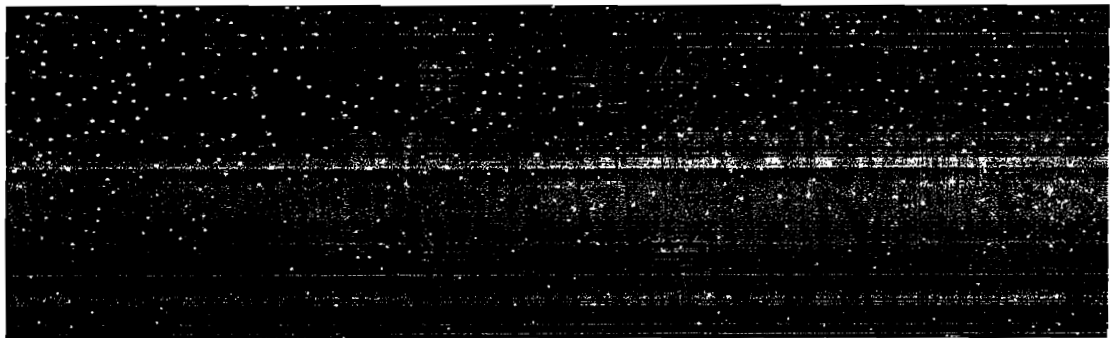
$$V_1 = V_0(1 + \beta t_1)$$

$$V_2 = V_0(1 + \beta t_2)$$

由以上各式可得

$$\beta = \frac{h_1 - h_2}{h_2 t_1 - h_1 t_2}$$

本题与通常试题不同之处在于不是给出各种条件让学生计算结果, 而是给出一个测量液体体膨胀系数的装置的设想, 让学生自己分析. 要求这生找出应测量哪些量, 以及体膨胀系数与这些量有怎样的关系. 因此, 本题可以更好地检查学生的分析问题和解决问题的能力, 对学生的实验知识也有较高的要求.





## 六、光的直进、反射和折射

1. 太阳光通过一个三角形的小孔射在观察屏上. 在改变屏到小孔的距离的过程中:

1) 屏上能否出现三角形的光斑? 若能, 出现这种光斑的条件是什么? 若不能, 其理由是什么?

2) 在屏上能否出现圆形的光斑? 若能, 出现这种形状光斑的条件是什么? 若不能, 理由是什么?

### 解析

1) 能. 条件是屏与小孔的距离跟太阳角直径的乘积比小孔的线度小很多.

2) 能. 条件是屏与小孔的距离跟太阳角直径的乘积比小孔的线度大很多.

理由: 太阳由无数个点光源组成. 每一点光源射来一束平行光, 在屏上产生一个与小孔形状大小均相同的光斑. 不同点光源射来的平行光方向不同, 因而这些光斑的位置发生平移. 所有光斑叠合的总和就是我们观察到的图像. 太阳的角直径  $\theta = 1^\circ \approx 1 \times 10^{-2} \text{ rad}$ , 屏与小孔的距离为  $d$ , 光斑平移的最大距离  $s = \theta d$ , 如果小孔的线度大小为  $x$ , 当  $s \ll x$  时, 这些光斑近乎相互重叠, 所以见到的是三角形光斑. 当  $s \gg x$  时, 各三角形光斑将相互错开, 太阳边缘处射来的光经小孔射到远处屏上时, 形成的三角形光斑位于半径  $r = \theta d$  的圆上. 此时  $\theta d \gg x$ , 三角形线度很小, 与  $r$  相比可以忽略, 圆内各处充满阳光, 形成圆形光斑. 这也就是太阳的“针孔成像”, 与小孔的形状无关.

2. 图 6-1 中 L 是一水平放置的点亮的 8 W 日光灯管, T 是一藤椅的竖直靠背, 横的藤条与日光灯管平行, 竖的藤条与日光灯管垂直, 横竖藤条间都是透空方格. P 是与藤椅背平行放置的很大的白屏. 现将白屏从紧贴椅背的地方慢慢向远处 (图中右方) 平移, 在屏上会陆续看到什么图像?

**解析**

白屏很靠近椅背时,在屏上看到水平与竖直藤条的暗影,形成方格图像;白屏移远些时,在屏上只看到水平藤条的暗影,形成水平直条图像;白屏移到足够远处后,屏上的光亮接近均匀,看不出暗影。

日光灯管可看做线光源.线光源由一系列“点”光源组成.当灯管与椅背距离较近时,每一个点光源在屏上产生一个相应的方格图像,这些图像的位置相互间有一个连续的沿水平方向的平移,因而竖直方向的暗影将消失.日光灯管实际上并非点光源,在竖直方向有一定宽度,且其宽度比藤条的宽度还大一些,因而产生的影子有本影与半影,如果屏与藤椅背的距离大于本影的长度很多,水平暗影图像也将消失而接近均匀。

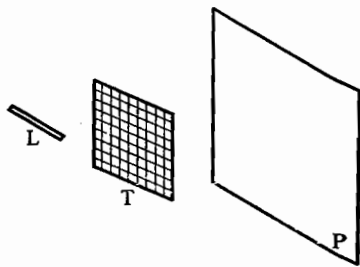


图 6-1

3. 要在一张照片上同时拍摄物体正面和几个不同侧面的像,可以在物体的后面放两个直立的大平面镜  $AO$  和  $BO$ ,使物体和它对两个平面镜所成的像都摄入照相机,如图 6-2 所示,图中带箭头的圆圈  $P$  代表一个人的头部(其尺寸远小于  $OC$  的长度),白色半圆代表人的脸部,此人正对着照相机的镜头;有斜线的半圆代表脑后的头发;箭头表示头顶上的帽子.图 6-3 为俯视图.若两平面镜的夹角  $\angle AOB=72^\circ$ ,设人头的中心恰好位于  $\angle AOB$  的角平分线上,且照相机到人的距离远大于人到平面镜的距离。

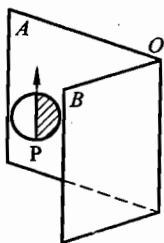


图 6-2

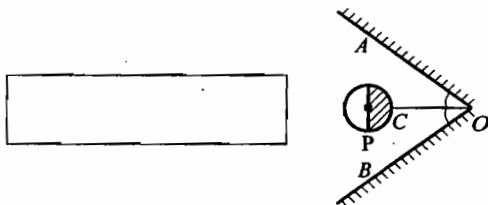


图 6-3

- 1) 试在图 6-3 中标出  $P$  的所有的像的方位示意图。
- 2) 在方框中画出照片上得到的所有的像(分别用空白和斜线表示脸和头发,用箭头表示头顶上的帽子)。

**解析**

照片上的像如图 6-4(a)所示;像方位示意图如图 6-4(b)所示。

根据两镜夹角为  $72^\circ$ ,由图 6-4(b)可看出人头的像共有 5 个, $P_A$  是  $P$  在镜  $A$  中的像,

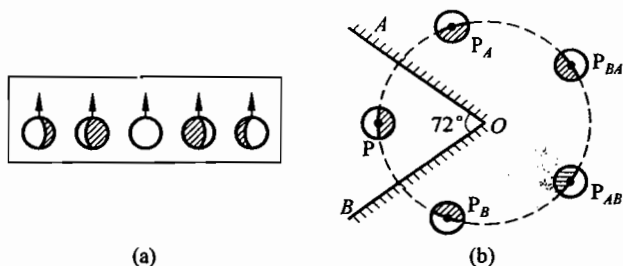


图 6-4

$P$  和  $P_A$  对  $A$  是镜面对称,画头像时必须注意这种对称关系; $P_B$  是  $P$  在镜  $B$  中的像; $P_{AB}$  是  $P_A$  在镜  $B$  中的像; $P_{BA}$  是  $P_B$  在镜  $A$  中的像.照相机沿  $CO$  方向拍摄到的就是这 5 个头像面向  $CO$  方向的头像表面的形象,如图 6-4(a)所示.

4. 图 6-5 中所示是一潜望镜壳体的侧视图,长镜筒沿竖直方向.  $MN$  为光线的入口.在上方  $AB$  处已放置一块与纸面垂直的平面镜,它的法线和竖直方向之间的夹角为  $45^\circ$ .眼睛在观察孔  $S$  处观察,在  $CD$  处放置一块与  $AB$  平行的平面镜.今要使观察到的视场不受  $CD$  处的平面镜的限制,则平面镜  $CD$  至少要有多大的线度才行? 要求直接在图上用作图法画出即可,但要说明作图的步骤.

### 解析

由于眼睛的瞳孔直径较小,可以近似地看做一点,即图 6-6 中的  $S$ ,射来的光线必须能到达  $S$ ,才能被看见.

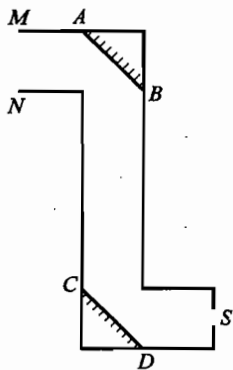


图 6-5

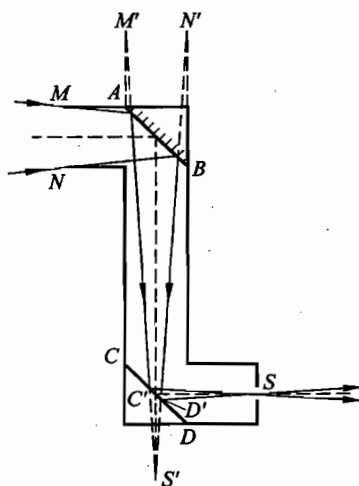


图 6-6

先作出  $MN$  在  $AB$  镜中的虚像  $M'N'$ , 再作出眼睛在  $CD$  处镜中的虚像  $S'$ . 将  $S'$  与  $M'N'$  相连, 与  $CD$  面相交于  $C'D'$  处,  $C'D'$  即为所求的结果(图 6-6).  $M'N'$  是一个圆, 镜面  $C'D'$  是顶点为  $S'$ 、底面为  $M'N'$  的圆锥与  $CD$  平面相交的截面, 是一个椭圆.

凡能进入潜望镜的光线都通过镜筒口  $MN$ , 它们经  $AB$  反射后的反射线都通过  $MN$  的像  $M'N'$ ; 凡经  $CD$  反射后能到达  $S$  的光线, 与之相应的射至  $CD$  面上的人射线一定射向  $S'$ , 因此分别连接  $S'$  与  $M'$ 、 $N'$ , 在  $S'M'$  和  $S'N'$  之间光线就是全部位于纸面内能进入眼中的入射光线.  $M'N'$  为一圆形, 因而绕轴旋转一周就包括进入潜望镜的光线中所有可能被眼睛接收到的光线. 由解析几何得知  $C'D'$  面是一个椭圆.

5. 一束在空气中波长为  $0.65 \mu\text{m}$  的光, 人眼看是红色的. 当它射入折射率为 1.33 的水中, 人眼在水中看时, 看到的颜色有无变化? 为什么?

### 解析

没有变化. 因为人眼感觉到的光的颜色是由视网膜上接收到的光的频率决定的, 当光由一种介质进入另一种介质时, 频率不变, 所以看到的颜色也没变.

6. 如图 6-7 所示, 在一凸透镜左侧放一块厚的矩形玻璃砖, 当平行光从透镜右边射来时, 其聚焦位置较无此玻璃砖时, (A) 向左移 (B) 向右移 (C) 不变.

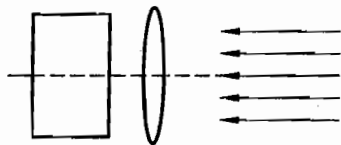


图 6-7

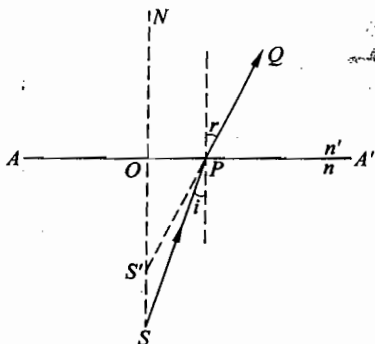


图 6-8

### 解析

A.

本题中的关键是平面折射成像的问题. 分析如下:

图 6-8 中  $S$  为物点,  $AA'$  为一折射平面, 下面介质的折射率为  $n$ , 上面介质的折射率为  $n'$ .  $SON$  垂直于  $AA'$  面,  $SP$  为入射线,  $PQ$  为折射线,  $PQ$  的反向延长线与  $SO$  交于  $S'$ ,



入射角为  $i$ , 折射角为  $r$ , 由折射定律得

$$n \sin i = n' \sin r \quad (1)$$

由几何关系得

$$\overline{OP} = \overline{SO} \tan i = \overline{S'O} \tan r \quad (2)$$

对于傍轴光线,  $\sin i \approx \tan i$ ,  $\sin r \approx \tan r$ , 代入(2)式, 由(1)、(2)式得

$$\overline{S'O} = \frac{n'}{n} \overline{SO} \quad (3)$$

由(3)式, 由  $S$  发出的傍轴光束经平面折射后, 全部折射线都相交于一点  $S'$ ,  $S'$  就是  $S$  经平面折射后所成的像. 这里的“傍轴”就是要求入射光束近乎垂直于平面. 用  $h$  表示物  $S$  与平面的距离,  $h'$  表示像  $S'$  与平面的距离, 则(3)式可写为

$$h' = \frac{n'}{n} h \quad (4)$$

(4)式称为平面折射的视深公式,  $n$  和  $n'$  分别为入射光线和折射光线所在介质的折射率.

本题的答案是(A). 在图 6-9 中,  $F$  为无玻璃砖时平行光束经透镜后将会聚的点(透镜的焦点), 对玻璃砖的前表面来说,  $F$  是物, 经平面折射后  $F_1$  是  $F$  的像. 根据视深公式它们与前表面的距离  $d$  和  $d_1$  符合下式

$$\frac{d}{d_1} = \frac{1}{n} \quad (5)$$

$n$  为玻璃砖的折射率, 对玻璃砖后表面上的折射来说,  $F_1$  是物, 它与后表面的距离是  $d_1 - l$ ;  $F_2$  是像. 设  $F_2$  与后表面的距离为  $d_2$ , 则由视深公式有

$$\frac{d_1 - l}{d_2} = \frac{n}{1} \quad (6)$$

$$F_2 F = d_2 - (d_1 - l) = \frac{1}{n} (d_1 - l) - \left( \frac{d}{n} - l \right) = \left( 1 - \frac{1}{n} \right) l > 0 \quad (7)$$

故  $F_2$  在  $F$  的左方  $\left( 1 - \frac{1}{n} \right) l$  处.

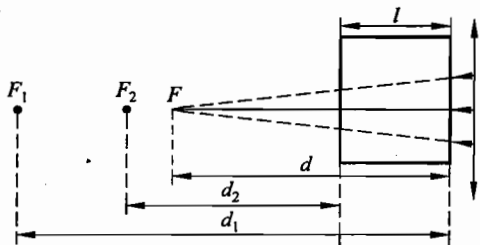


图 6-9

7. 有一水平放置的平行平面玻璃板  $H$ , 厚  $3.0 \text{ cm}$ , 折射率为  $n=1.5$ . 在其下表面下  $2.0 \text{ cm}$  处有一小物  $S$ ; 在玻璃板上方有一薄凸透镜  $L$ , 其焦距  $f=30 \text{ cm}$ , 透镜的主轴与玻

璃板面垂直;S位于透镜的主轴上,如图6-10所示.若透镜上方的观察者顺着主轴方向观察到S的像就在S处,问透镜与玻璃板上表面的距离为多少?

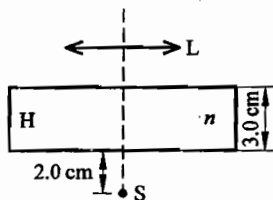


图 6-10

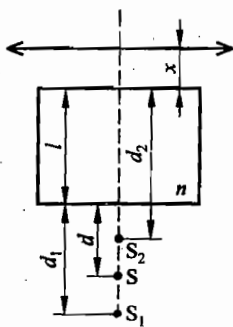


图 6-11

### 解析

本题与第6题类似.如图6-11所示用 $l$ 表示玻璃板的厚度, $d$ 表示S与下表面的距离, $d_1$ 表示S经下表面折射后所成像 $S_1$ 与下表面的距离, $d_2$ 表示 $S_1$ 经上表面折射后所成像 $S_2$ 与上表面的距离,设透镜与上表面的距离为 $x$ 时, $S_2$ 经透镜折射后所成的像恰好位于S处,则由视深公式和透镜成像公式有

$$\frac{d}{d_1} = \frac{1}{n} \quad (1)$$

$$\frac{d_1 + l}{d_2} = n \quad (2)$$

$$\frac{1}{d_2 + x} - \frac{1}{d + l + x} = \frac{1}{f} \quad (3)$$

以 $d=2.0\text{ cm}$ , $n=1.5$ , $l=3.0\text{ cm}$ 代入上列诸式,可得

$$d_1 = 3.0\text{ cm}$$

$$d_2 = 4.0\text{ cm}$$

$$x = 1.0\text{ cm}$$

即透镜与玻璃板上表面的距离应为 $1.0\text{ cm}$ .

8. 光导纤维能够长距离地传输光信号是利用\_\_\_\_\_现象.每根光导纤维的折射率沿半径方向的分布是\_\_\_\_\_.

### 解析

光的全反射;中心大边缘小.

9. 图 6-12 表示一个盛有折射率为  $n$  的液体的槽, 槽的中部扣着一个对称圆锥形的薄壁透明罩  $ADB$ , 顶角为  $2\varphi$ , 罩内为空气, 整个罩子浸没在液体中. 槽底  $AB$  的中点处有一亮点  $C$ . 试问:  $n$  和  $\varphi$  的数值满足什么条件时, 位于液面上方图示平面内的眼睛在液面上方从侧面观察可看到亮点? (液槽有足够的宽度; 罩壁极薄, 可不计它对光线产生折射的影响)

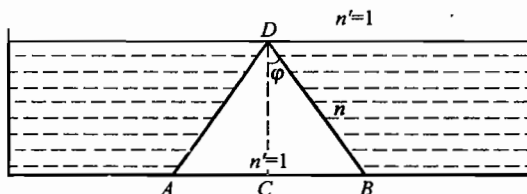


图 6-12

### 解析

本题可用图示平面内的光线进行分析, 并只讨论从右侧观察的情形. 由于此光学系统对于  $CD$  具有轴对称性, 绕  $CD$  旋转  $360^\circ$ , 即可得到全部光线, 所以由图中光线所得的分析结论适用于所有光线: 如图 6-13 所示, 由亮点发出的任一光线  $CP$  将经过两次折射后从液面射出. 由折射定律, 按图上标记的各相关角度, 有

$$\sin \alpha = n \sin \beta \quad (1)$$

$$\sin \gamma = (1/n) \sin \delta \quad (2)$$

其中

$$\delta \leq \pi/2, \quad \gamma = (\pi/2) - (\beta + \varphi) \quad (3)$$

注意到, 若液内光线入射到液面上时发生全反射, 就没有从液面射出的折射光线. 全反射临界角  $\gamma_c$  满足条件

$$\sin \gamma_c = 1/n$$

可知光线  $CP$  经折射后能从液面射出从而可被观察到的条件为

$$\gamma < \gamma_c \quad (4)$$

或

$$\sin \gamma < 1/n \quad (5)$$

从  $C$  向不同方向发出的光线,  $\alpha$  不同,  $\gamma$  也不同. 只要有一部分光线的  $\gamma < \gamma_c$ , 从液面上方就能接收到这些出射线, 也就能看到亮点. 也就是说, 只要所有光线的  $\gamma$  角中的最小值  $\gamma_{\min} < \gamma_c$ . 从(3)式可看出  $\gamma$  为最小值时,  $\beta$  达最大值; 由(1)式又可看出  $\beta$  为最大值时,  $\alpha$  达最大值. 从图 6-13 看出, 当  $P$  点移至  $D$  点时,  $\alpha$  达最大值, 其数值为

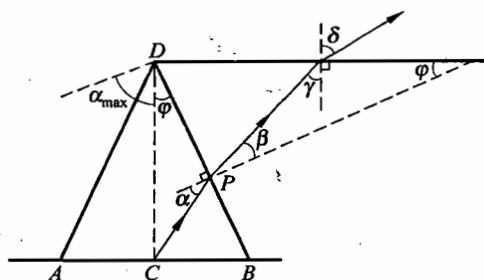


图 6-13

$$\alpha_{\max} = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

相应地

$$\begin{aligned} \sin \beta_{\max} &= \frac{1}{n} \sin \alpha_{\max} = \frac{1}{n} \cos \varphi \\ \sin \gamma_{\min} &= \cos(\beta_{\max} + \varphi) \\ &= \cos \beta_{\max} \cos \varphi - \sin \beta_{\max} \sin \varphi \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{n^2} \cos^2 \varphi} \cos \varphi - \frac{1}{n} \cos \varphi \sin \varphi \end{aligned}$$

能看到亮点的条件是  $\sin \gamma_{\min} < \frac{1}{n}$ , 即

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \frac{1}{n^2} \cos^2 \varphi} \cos \varphi - \frac{1}{n} \cos \varphi \sin \varphi &< \frac{1}{n} \\ \sqrt{n^2 - \cos^2 \varphi} \cos \varphi &< 1 + \cos \varphi \sin \varphi \end{aligned}$$

因不等式两侧都是正数, 两侧平方, 不等式号不变, 得

$$\begin{aligned} (n^2 - \cos^2 \varphi) \cos^2 \varphi &< 1 + 2 \cos \varphi \sin \varphi + \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \\ (n^2 - 1) \cos^2 \varphi &< 1 + 2 \cos \varphi \sin \varphi \\ (n^2 - 1) \cos^2 \varphi &< (\cos \varphi + \sin \varphi)^2 \end{aligned}$$

两侧开平方, 并加以化简, 得

$$\tan \varphi > \sqrt{(n^2 - 1)} - 1$$

这就是在液面上方从侧面适当的方向能看到亮点时  $n$  与  $\varphi$  之间应满足的条件。

10. 有一半导体砷化镓发光管, 它发出波长为  $0.9 \mu\text{m}$  的红外光. 发光区为直径  $AB$  等于  $3 \text{ mm}$  的圆盘, 发光面上覆盖一折射率  $n=3.4$  的半球形介质, 如图 6-14 所示. 问: 要使发光区发出的全部光线在球面上都不发生全反射, 介质半球的半径  $R$  至少应该多大?

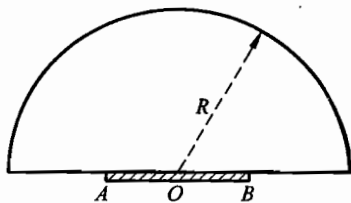


图 6-14

### 解析

1) 当入射角  $\theta$  大于临界角时, 将发生全反射. 在介质半球表面上发生全反射的临界角  $\theta_c$  的值可由下式求出

$$\sin \theta_c = \frac{1}{n} = \frac{1}{3.4} \quad (1)$$

要避免发生全反射,所有从发光面发出的光线的入射角都必须满足  $\theta < \theta_c$  这个条件.

2) 首先分析在纸面内的入射光线. 见图 6-15.

i) 对于所有由发光线  $AOB$  射至图中右半球面上  $P$  点的光线可作如下分析.

从发光区边缘点  $B$  发出的光线的入射角  $\theta_B$  比  $OB$  上任一点射至  $P$  点的光线的入射角都大,这从图上可明显看出. 还可看出,从  $AO$  发出的光线以  $AP$  的入射角  $\theta_A$  为最大. 可以证明  $\theta_A < \theta_B$  如下:

分别将正弦定律应用于  $\triangle AOP$  和  $\triangle BOP$ , 有

$$\frac{\sin \theta_A}{r} = \frac{\sin \angle AOP}{AP}; \quad \frac{\sin \theta_B}{r} = \frac{\sin \angle BOP}{BP}$$

因  $\sin \angle AOP = \sin \angle BOP$ ,  $AP$  显然大于  $BP$ , 二式相除, 得

$$\frac{\sin \theta_B}{\sin \theta_A} = \frac{AP}{BP} > 1; \quad \theta_B > \theta_A \quad (2)$$

故  $AOB$  上各发光点射至纸面内右半球上各点的光线的入射角都不会大于  $\theta_B$ , 只要能满足  $\theta_B < \theta_c$  的条件, 这些光线都不会发生全反射.

ii) 对于从  $AOB$  射至左半球的光线, 情况与 i) 完全一样, 不同的是  $A$  点代替了  $B$  点. 若 i) 中  $\theta_B < \theta_c$  能满足, 则 ii) 中的  $\theta_A < \theta_c$  也能满足. 因而所有纸面内从  $AOB$  发出的光线都不会发生全反射.

iii) 求  $\theta_B < \theta_c$  的条件. 对  $\triangle BOP$  应用正弦定律, 得

$$\frac{\sin \theta_B}{r} = \frac{\sin \angle PBO}{R} = \frac{\sin \varphi}{R}$$

$$\sin \theta_B = (r/R) \sin \varphi$$

当  $\varphi = 90^\circ$  时,  $\sin \varphi$  达最大值,  $\sin \theta_B$  也达最大值, 相应的  $\theta_B$  的最大值  $\theta_{\max}$  可由下式求出:

$$\sin \theta_{\max} = r/R \quad (3)$$

不发生全反射的充分必要条件为

$$\sin \theta_{\max} < \sin \theta_c$$

即

$$R > 3.4r = 5.1 \text{ mm} \quad (4)$$

3) 将图 6-15 以  $AOB$  为轴旋转  $180^\circ$ , 从与纸面垂直的位置转至另一垂直位置. 各截面内的情形完全一样, 分析结论也相同. 这样, 所有从  $AOB$  发出的光线, 包括不在纸面内的光线都已包括在所分析的范围了, 故可得出如下结论: 所有从  $AOB$  发出的光线, 在满足 (4) 式的条件下, 都不会发生全反射.

4) 将图 6-15 绕发光面的法线  $ON$  旋转  $180^\circ$ , 线光源  $AOB$  变成发光圆盘, 分析和结论也完全相同. 所以不发生全反射的条件也是 (4) 式.

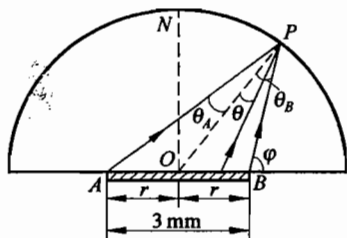


图 6-15

通过以上分析可得如下结论:只要  $R > 5.1 \text{ mm}$ , 所有从发光面发出的光线都不会发生全反射.

此题在物理原理上只用到光的反射、折射定律, 但必须对此定律有准确的掌握才能作出完整的解答. 首先要看到, 为了作出不发生全反射的判断, 必须找出发光面上任一点发出、射到半球面上任一点  $P$  的光线的入射角  $\theta$ . 根据定义, 此入射角是入射面(即包含光线与面上法线  $PO$  的平面)内的角, 因此解此题时选出讨论的平面应是一个入射面. 解答中的纸面便是对应于发光圆盘任一个直径  $AOB$  上各点的这样一个入射面. 如果(如解答中的 3)) 把纸面绕  $AOB$  转  $180^\circ$ , 则把  $AOB$  直径上各点到半球面各点的光线都包含在内, 而且也就是这些光线的入射面. 如果(如解答中的 4)) 把纸面绕  $ON$  转  $180^\circ$ , 则又包括了圆盘面上全部各点. 这就是说, 此题解答中所选定讨论的纸面, 对于此题确实是一个典型平面. 也可以说, 任何一条由发光圆盘上一点到半球面上一点的光线的入射面, 都可由选定盘面直径和(绕  $ON$  旋转)选定绕此直径旋转的这种平面找到.

其次, 应该在这一典型平面上, 把从  $AOB$  上任一点到半圆上任一点  $P$  的入射角都考虑在内, 找出一个最大的入射角, 则只要令这个入射角小于全反射临界角, 便得到球半径应满足的条件. 这就是此题解答中 1)、2) 的内容. 以 2) 中可看出, 这个分析也有一定的技巧, 要善于选定三角形, 运用正弦定理.

总的说, 此题是一个紧紧抓住原理概念, 进行全面透彻考虑解决问题的实例. 应该说它符合考查学生实力的目的.

11. 光导纤维是利用全反射传递光信号的装置, 图 6-16 所示为一光导纤维,  $AB$  为其端面, 纤维内芯材料的折射率  $n_1 = 1.5$ , 外层材料的折射率  $n_2 = 1.4$ . 在如图所示的情况下, 试求人射角  $i$  在什么范围内的光线都可在此纤维内传递.

### 解析

用  $\alpha$  表示在光导纤维内芯和外层材料之间发生全反射的临界角, 则有

$$\frac{\sin 90^\circ}{\sin \alpha} = \frac{n_1}{n_2}, \quad \sin \alpha = \frac{n_2}{n_1}$$

要光线限在光导纤维内传播, 则图 6-17 中所示的  $\beta$  角应满足

$$\beta \geq \alpha$$

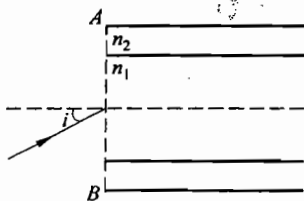


图 6-16

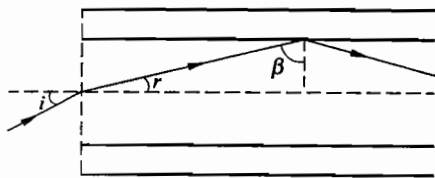


图 6-17

用  $r$  表示光线由光导纤维的一端截面处射入时的折射角, 由几何关系可知

$$r + \beta = 90^\circ$$

根据折射定律有

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n_1$$

已知  $n_1 = 1.5, n_2 = 1.4$ , 由以上四式可解得

$$\sin i \leq n_1 \cos \alpha = 0.539$$

即

$$i \leq 32.6^\circ$$

12. 设有一块透明光学材料, 由折射率略有不同的许多相互平行、厚度为  $d = 0.1 \text{ mm}$  的薄层密接构成. 图 6-18 表示与各薄层垂直的一个截面,  $AB$  为此材料的端面, 与薄层界面垂直.  $OO'$  表示截面的中心线. 各薄层的折射率  $n_k$  的数值为  $n_k = n_0 - k\nu$ , 其中  $n_0 = 1.4142, \nu = 0.0025$ . 今有一光线  $PO$  以入射角  $\theta_0 = 30^\circ$  射向  $O$  点. 求此光线在材料内能够到达的离  $OO'$  最远的距离.

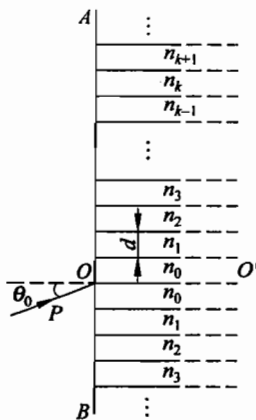


图 6-18

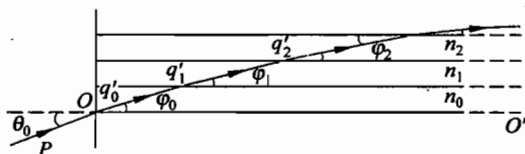


图 6-19

### 解析

令光线进入材料后的折射角为  $\varphi_0$  (见图 6-19), 则有

$$\sin \theta_0 = n_0 \sin \varphi_0 \quad (1)$$

此光线射至薄层 1 时, 入射角为  $\pi/2 - \varphi_0$ , 设光线进入薄层 1 后与  $OO'$  的夹角为  $\varphi_1$ , 则有

$n_0 \cos \varphi_0 = n_1 \cos \varphi_1$ , 依此逐层考虑, 可得

$$n_0 \cos \varphi_0 = n_1 \cos \varphi_1 = \dots = n_k \cos \varphi_k = \text{常数} \quad (2)$$

式中  $\varphi_k$  为薄层  $k$  中光线与  $OO'$  的夹角. 已知  $n_k = n_0 - k\nu$ ,  $n_0 = 1.4142$ ,  $\nu = 0.0025$ , 即  $n_k$  随序号  $k$  的增大而减小, 故  $\cos \varphi_k$  随  $k$  的增大而增大,  $\varphi_k$  随  $k$  的增大而减小. 满足(2)式的各  $\cos \varphi_k$  值中最接近于 1 的那个值所对应的  $k$  即光线能进入的最远的薄层的序号. 在这薄层的上表面将发生全反射, 光线返回, 经逐层折射进入材料的下半部, 到达第  $k$  层后又被反射回去, 来回传播. 因此, 需要求出能满足

$$\cos \varphi_k = \frac{n_0 \cos \varphi_0}{n_k} = \frac{n_0 \cos \varphi_0}{n_0 - k\nu} < 1 \quad (3)$$

的  $k$  的最大值. 由(1)式得

$$n_0 \cos \varphi_0 = n_0 \sqrt{1 - \sin^2 \theta_0 / n_0^2} = \sqrt{n_0^2 - \sin^2 \theta_0}$$

代入(3)式, 化简得

$$k < (n_0 - \sqrt{n_0^2 - \sin^2 \theta_0}) / \nu$$

代入数值得

$$k < 36.52$$

取小于 36.52 的最大整数, 得  $k=36$ .  $k$  层上表面即光线能到达的离  $OO'$  最远处, 它与  $OO'$  的距离为

$$h = (k+1)d = 3.7 \text{ mm}$$

在特殊情况下, 即  $(n_0 - \sqrt{n_0^2 - \sin^2 \theta_0}) / \nu$  恰等于某整数  $k'$  时, 光线由  $k'-1$  层进入  $k'$  层时光线即与  $OO'$  平行, 故  $k'-1$  层的上表面即为光线能达到之最远处. 这时

$$h = (k'-1+1)d = k'd$$

如果介质的折射率是线性连续变化, 即若  $n = n_0 - \nu y$ , 其中  $y$  轴沿图中  $OA$  方向,  $\nu = 25 \text{ m}^{-1}$ , 则参看图 6-19 可知

$$n_0 \cos \varphi_0 = n \cos \varphi = (n_0 - \nu y) \cos \varphi$$

当  $y$  达到最远时  $\varphi = 0$ , 得

$$y = \frac{n_0}{\nu} (1 - \cos \varphi_0)$$

由于

$$\sin \theta_0 = n_0 \sin \varphi_0 = n_0 \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_0}$$

由上面两式可解得

$$y = \frac{1}{\nu} (n_0 - \sqrt{n_0^2 - \sin^2 \theta_0})$$

代入数值, 可得

$$y = 3.65 \text{ mm}$$

13. 普通光纤是一种可传输光的圆柱形细丝, 由具有圆形截面的纤芯 A 和包层 B 组成, B 的折射率小于 A 的折射率, 光纤的端面与圆柱体的轴垂直, 由一端面射入的光在



很长的光纤中传播时,在纤芯 A 和包层 B 的分界面上发生多次全反射. 现在利用普通光纤测量流体 F 的折射率. 实验方法如下: 让光纤的一端(出射端)浸在流体 F 中. 令与光纤轴平行的单色平行光束经凸透镜折射后会聚在光纤入射端面的中心 O, 经端面折射进入光纤, 在光纤中传播. 由 O 点发出的光束为圆锥形, 已知其边缘光线的折射线和轴的夹角为  $\alpha_0$ , 如图 6-20 所示. 最后光从另一端面出射进入流体 F. 在距出射端面  $h_1$  处放置一垂直于光纤轴的毛玻璃屏 D, 在 D 上出现一圆形光斑, 测出其直径为  $d_1$ , 然后移动光屏 D 至距光纤出射端面  $h_2$  处, 再测出圆形光斑的直径  $d_2$ , 如图 6-21 所示.

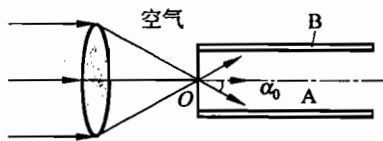


图 6-20

- 1) 若已知 A 和 B 的折射率分别为  $n_A$  与  $n_B$ , 求被测流体 F 的折射率  $n_F$  的表达式.
- 2) 若  $n_A$ 、 $n_B$  和  $\alpha_0$  均为未知量, 如何通过进一步的实验以测出  $n_F$  的值?

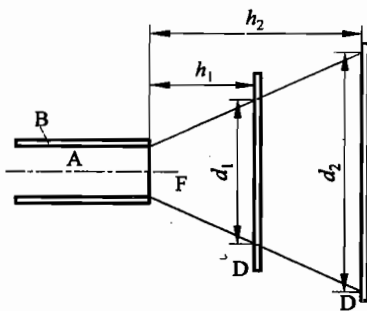


图 6-21

### 解析

- 1) 由于光纤内所有光线都从轴上的 O 点出发, 在光纤中传播的光线都与轴相交, 位于通过轴的纵剖面内, 图 6-22 为纵剖面内的光路图. 设由 O 点发出的与轴的夹角为  $\alpha$  的光线, 射至 A、B 分界面的入射角为  $i$ , 反射角也为  $i$ . 该光线在光纤中多次反射时的人射角均为  $i$ , 射至出射端面时的人射角为  $\alpha$ . 若该光线

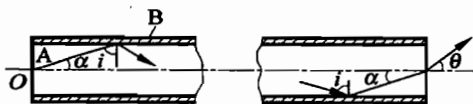


图 6-22

折射后的折射角为  $\theta$ , 则由几何关系和折射定律可得

$$i + \alpha = 90^\circ \quad (1)$$

$$n_A \sin \alpha = n_F \sin \theta \quad (2)$$

当  $i$  大于全反射临界角  $i_c$  时将发生全反射, 没有光能损失, 相应的光线将以不变的光强射

向出射端面. 面  $i < i_c$  的光线则因在发生反射时有部分光线通过折射进入 B, 反射光强随着反射次数的增大而越来越弱, 以致在未达到出射端面之前就已经几乎衰减为零了. 因而能射向出射端面的光线的  $i$  的数值一定大于或等于  $i_c$ ,  $i_c$  的值由下式决定:

$$n_A \sin i_c = n_B \quad (3)$$

与  $i_c$  对应的  $\alpha$  值为

$$\alpha_c = 90^\circ - i_c \quad (4)$$

当  $\alpha_0 > \alpha_c$  时, 即  $\sin \alpha_0 > \sin \alpha_c = \cos i_c = \sqrt{1 - \sin^2 i_c} = \sqrt{1 - (n_B/n_A)^2}$  时, 或  $n_A \sin \alpha_0 > \sqrt{n_A^2 - n_B^2}$  时, 由  $O$  发出的光束中, 只有  $\alpha \leq \alpha_c$  的光线才满足  $i \geq i_c$  的条件, 才能射向端面, 此时出射端面处  $\alpha$  的最大值为

$$\alpha_{\max} = \alpha_c = 90^\circ - i_c \quad (5)$$

若  $\alpha_0 < \alpha_c$  即  $n_A \sin \alpha_0 < \sqrt{n_A^2 - n_B^2}$  时, 则由  $O$  发出的光线都能满足  $i > i_c$  的条件, 因而都能射向端面, 此时出射端面处  $\alpha$  的最大值为

$$\alpha_{\max} = \alpha_0 \quad (6)$$

端面处入射角  $\alpha$  最大时, 折射角  $\theta$  也达最大值, 设为  $\theta_{\max}$ , 由(2)式可知

$$n_F \sin \theta_{\max} = n_A \sin \alpha_{\max} \quad (7)$$

由(6)式、(7)式可得, 当  $\alpha_0 < \alpha_c$  时

$$n_F = \frac{n_A \sin \alpha_0}{\sin \theta_{\max}} \quad (8)$$

由(3)式至(7)式可得, 当  $\alpha_0 \geq \alpha_c$  时

$$n_F = \frac{n_A \cos i_c}{\sin \theta_{\max}} = \frac{\sqrt{n_A^2 - n_B^2}}{\sin \theta_{\max}} \quad (9)$$

$\theta_{\max}$  的数值可由图 6-23 上的几何关系求得为

$$\sin \theta_{\max} = \frac{(d_2 - d_1)/2}{\sqrt{[(d_2 - d_1)/2]^2 + (h_2 - h_1)^2}} \quad (10)$$

于是  $n_F$  的表达式应为

$\alpha_0 < \alpha_c$  时

$$n_F = n_A \sin \alpha_0 \frac{\sqrt{[(d_2 - d_1)/2]^2 + (h_2 - h_1)^2}}{(d_2 - d_1)/2} \quad (11)$$

$\alpha_0 \geq \alpha_c$  时

$$n_F = \sqrt{n_A^2 - n_B^2} \frac{\sqrt{[(d_2 - d_1)/2]^2 + (h_2 - h_1)^2}}{(d_2 - d_1)/2} \quad (12)$$

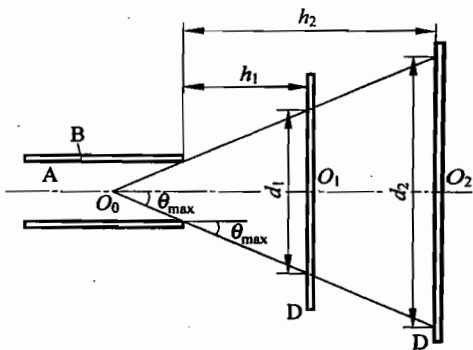


图 6-23

2) 可将输出端介质改为空气, 光源保持不变, 按同样方法再做一次测量, 可测得  $h'_1$ 、

$h'_2, d'_1, d'_2$ , 这里打撇的量与前面未打撇的量意义相同. 已知空气的折射率等于 1, 故有当  $\alpha_0 < \alpha_c$  时

$$1 = n_A \sin \alpha_0 \frac{\sqrt{[(d'_2 - d'_1)/2]^2 + (h'_2 - h'_1)^2}}{(d'_2 - d'_1)/2} \quad (13)$$

当  $\alpha_0 \geq \alpha_c$  时

$$1 = \sqrt{n_A^2 - n_B^2} \frac{\sqrt{[(d'_2 - d'_1)/2]^2 + (h'_2 - h'_1)^2}}{(d'_2 - d'_1)/2} \quad (14)$$

将(11)、(12)两式分别与(13)、(14)式相除, 均得

$$n_F = \frac{d'_2 - d'_1}{d_2 - d_1} \frac{\sqrt{[(d_2 - d_1)/2]^2 + (h_2 - h_1)^2}}{\sqrt{[(d'_2 - d'_1)/2]^2 + (h'_2 - h'_1)^2}} \quad (15)$$

此结果适用于  $\alpha_0$  为任何值的情况.

14. 在光导纤维制造过程中, 由于拉伸速度不均匀, 会使拉出的光纤偏离均匀的圆柱体, 而呈圆锥状. 现把一段长为  $L$ , 折射率为  $n (=1.5)$  的光纤简化为细长圆锥体的一部分, 其顶角很小, 两端截面的半径分别是  $R_1$  和  $R_2$ ,  $R_1$  略大于  $R_2$ .

图 6-24 是过光纤轴线的剖面图.

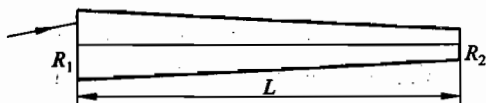


图 6-24

1) 若将该光纤置于空气中, 求在图示平面内从大头入射并能从小头出射的光线的最大入射角.

2) 计算以最大的人射角入射的光线在光纤中的反射次数.

### 解析

1) 设光纤的半顶角为  $\alpha$ ,  $O$  为圆锥面的顶点, 由图 6-25 中的几何关系可求得

$$\tan \alpha = \frac{R_1 - R_2}{L} \quad (1)$$

入射光线在光纤中的光路如图 6-26 所示. 由光纤的大头进入光纤的光线; 在光纤中来回反射, 由于上、下反射面的两根法线之间夹角为  $2\alpha$ , 每次反射的入射角比前一次的入射角小  $2\alpha$ . 由于  $\alpha$  是很小的角, 光线经  $n$  次反射到达右端附近时, 入射角  $\varphi_n$  仍大于 0, 光线将

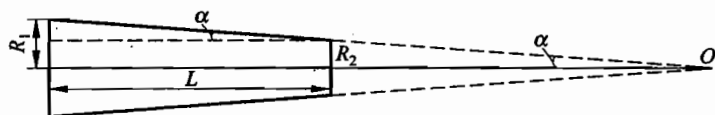


图 6-25

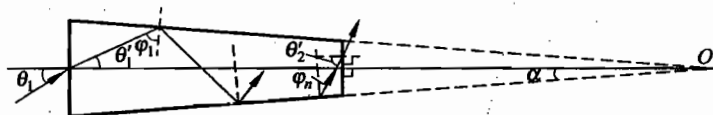


图 6-26

射至小头的端面上,入射角  $\theta_2' = \frac{\pi}{2} - \varphi_n - \alpha$ , 如果  $\theta_2'$  大于临界值  $i_c$ , 则在右侧端面处将发生全反射而不能从小头出射. 因此  $\theta_2'$  和  $\varphi_n$  必须符合下面的条件

$$\theta_2' < i_c = \arcsin \frac{1}{n} = \arcsin \frac{2}{3} = 41.81^\circ \quad (2)$$

$$\alpha + \varphi_n > \frac{\pi}{2} - \theta_2' = 48.19^\circ$$

$\varphi_n$  的数值是由  $\theta_1$ ,  $L$  和  $\alpha$  决定的, 在  $L$  和  $\alpha$  已确定的情况下,  $\varphi_n$  有一个能允许的最大值,  $\theta_1$  也就有一个能允许的最大值. 在求  $\theta_1$  的最大值时我们可利用反射光线的特点, 用等效法处理, 以求得结果. 如图 6-27 所示, 以  $A_1B_1$  为反射镜作圆锥截面  $A_1B_1BA$  的镜面像  $A_2B_2B_1A_1$ . 考虑以入射角  $\theta_1$  射至圆锥端面中心的光线, 相应的折射线是  $P_1P_2$ , 而图 6-27

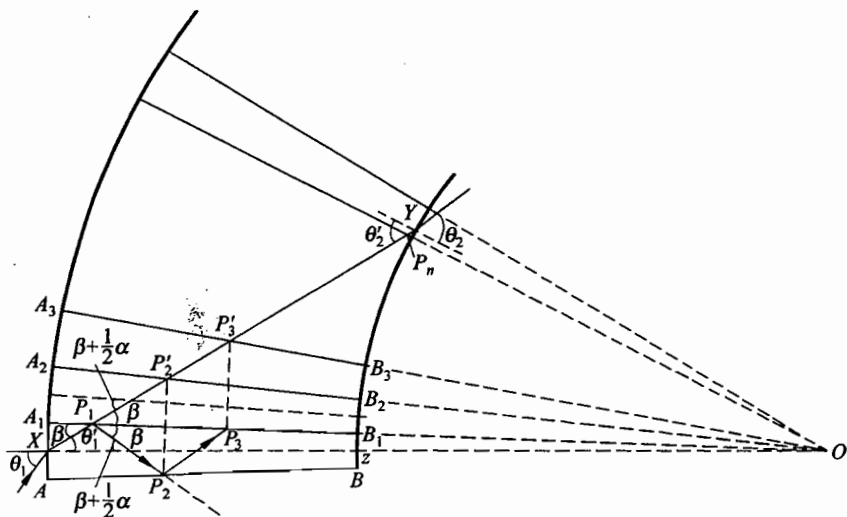


图 6-27

中的  $P_1P'_2$  就是光线  $P_1P_2$  的镜面像, 它们的长度相等, 与所在圆锥的轴线的夹角都是  $\beta + \alpha$ , 而  $P_1P'_2$  在  $XP_1$  的延长线上. 因此  $P_1P'_2$  就可反映实际光线在圆锥内传播时的特性. 按类似的方法作圆锥截面  $A_2B_2B_1A_1$  在反射镜  $A_2B_2$  中的镜面像  $A_3B_3B_2A_2$ , 利用几何关系可以证明  $P'_2P'_3$  和反射线  $P_2P_3$  与所在圆锥轴线的夹角都是  $\beta + 3\alpha$ , 二者长度相等,  $P'_2P'_3$  也在  $XP_1$  的延长线上. 这样, 作一系列的圆锥体截面  $A_nB_nB_{n-1}A_{n-1}$ , 并将  $XP_1$  延长, 就可以得到各条反射线在圆锥截面中的位置和方向, 当然有的光线变为它的镜面像.

由于  $\alpha$  是很小的角, 折线  $BB_1B_2B_3 \cdots B_n$  近乎是一个以  $O$  为半径的圆弧,  $XP_1$  的延长线与此圆弧的交点就是以入射角  $\theta_1$  射至  $X$  点的光线经过多次反射后到达小头端面时的入射点(图 6-27 中的  $Y$ ).

在  $\triangle OXY$  中,  $OX=R_1$ ,  $OY=R_2$ , 用  $\theta'_1$  表示大头端面处的折射角 ( $\angle OXY$ ), 用  $\theta'_2$  表示小头端面处的入射角 ( $\angle OYX = \pi - \theta'_2$ ), 由正弦定理可得

$$\frac{R_1}{\sin \theta'_2} = \frac{R_2}{\sin \theta'_1}$$

$$\sin \theta'_1 = \frac{R_2}{R_1} \sin \theta'_2 \quad (3)$$

由折射定律

$$\sin \theta_1 = n \sin \theta'_1 \quad (4)$$

故有

$$\sin \theta_1 = \frac{nR_2}{R_1} \sin \theta'_2 \quad (5)$$

要使从大头入射并能小头出射的光线的  $\theta'_2$  的最大值  $\theta'_{2\max} = i_c = \arcsin \frac{1}{n}$ , 则  $\theta_1$  的最大值  $\theta_{1\max}$  可由下式求出:

$$\theta_{1\max} = \arcsin \left( \frac{nR_2}{R_1} \sin i_c \right) = \arcsin \frac{R_2}{R_1} \quad (6)$$

2) 计算反射的次数.

第一次发生反射的入射点为  $P_1$ ,  $\angle XOP_1 = \alpha$ . 与第二次发生反射时的入射点相应的位于  $XP_1$  延长线上的点为  $P_2$ ,  $\angle XOP_2 = 3\alpha$ . 图 6-27 中的  $P_n$  是  $XP_1$  延长线上与第  $n$  次反射相应的点,

$$\angle XOP_n = (2n-1)\alpha \quad (7)$$

在  $\triangle XOP_n$  中, 当  $\theta_1 = \theta_{1\max}$  时,  $\theta'_2 = i_c$ ,  $\theta'_1 = \arcsin \frac{1}{n}$ , 故有

$$\angle XOP_n = (2n-1)\alpha = \theta'_2 - \theta'_1 = \arcsin \frac{1}{n} - \arcsin \frac{R_2}{nR_1} \quad (8)$$

由(1)式, 并考虑到  $\alpha$  是个很小的角度,

$$\alpha = \frac{R_1 - R_2}{L} \quad (9)$$

代入(8)式得

$$n = \frac{\arcsin \frac{1}{n} - \arcsin \frac{R_2}{nR_1}}{2(R_1 - R_2)} L + \frac{1}{2} \quad (10)$$

设从(10)式解出的  $n = k + x$ ,  $k$  为一整数,  $0 < x < 1$ , 则反射次数为  $k$ . 如  $k$  恰为一整数, 这表示射到小头端面的光线正好射至圆锥小头端面的边缘处, 在圆锥侧面的反射次数应计为  $k-1$ .

本题题文中将入射光线限在“在图示平面内”, 这一点非常重要. 因为图示平面“过光纤轴线”, 图中圆锥面内各点处的法线都在“图示平面”内, 入射线、反射线都在图示平面内. 如果入射线不在含光纤轴的平面内, 每次反射时的入射面都不同, 问题就复杂了, 就不能采用上面的分析讨论的办法了.

15. 如图 6-28 所示, 一半径为  $R_1$  的不透明黑球外面包着一半径为  $R_2$  的同心透明介质球层,  $R_1/R_2 = 2/3$ , 球层介质材料的折射率  $n = 1.35$ . 球层外表面的右半部分(图中  $ABC$  球面)为磨砂面. 现用平行光从左向右沿图中所示的方向照到球层上. (已知, 在题给条件下, 随着入射角的增大, 在图面内能到达  $ABC$  面上的各光线的折射线与  $ABC$  面的交点是朝一个方向变动的, 即没有往返的变动.)

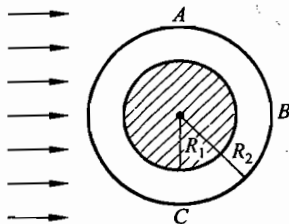


图 6-28

1) 试求  $ABC$  球面上被照到的范围是什么图形(准确的结果用反三角函数表示即可).

- 2) 若其他条件仍如题述, 但介质球层的折射率依次取从  $n = 1.35$  逐渐增到  $n \geq 3/2$  的各值, 试定性地说出  $ABC$  球面上被照到的范围是如何变化的. (为使学生不用计算器也能作出判断, 原题中提供了下列数据:  $\sin 40^\circ = 0.64$ ,  $\sin 45^\circ = 0.71$ ,  $\sin 50^\circ = 0.77$ ,  $\sin 55^\circ = 0.82$ ,  $\sin 60^\circ = 0.87$ ,  $\sin 65^\circ = 0.91$ ,  $\sin 70^\circ = 0.94$ ,  $\sin 75^\circ = 0.97$ ,  $\sin 80^\circ = 0.98$ . 在下述解析中是用计算器求解的)

### 解析

图 6-29 中  $AC$ 、 $DB$  为球的直径,  $DB$  平行于入射光束,  $AC$  垂直于入射光束. 入射光线的入射角等于  $i$  时, 其折射角  $r$  可由下式求得:

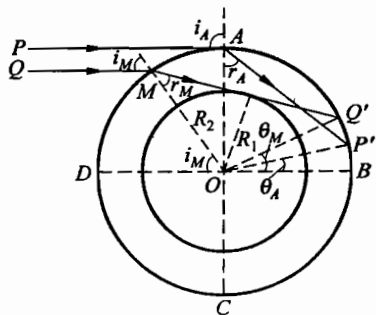


图 6-29

$$\sin i = n \sin r$$

球心  $O$  到折射线的距离  $d$  为

$$d = R_2 \sin r$$

所有  $d < R_1$  的折射线将被黑球吸收而不能通过. 图 6-29 中的  $MQ'$  与黑球相切, 它刚好不被黑球挡住而能照到  $ABC$  面上. 图中与透明介质球面相切的入射线  $PA$  则是能射入介质球层的光束的上边缘.

在  $PA$  和  $QM$  之间的入射光线都能进入介质球层且在折射后照射到  $ABC$  面上. 已知在题给条件下折射线与  $ABC$  面上的交点随入射角的增大只朝一个方向变动, 所以所有能照射到  $ABC$  面上的光线都落在  $P'Q'$  之间. 由轴的对称性可知,  $ABC$  面上被照到的范围为一圆环形球面或一圆形球帽(视  $Q'$  和  $P'$  的位置而定).

1) 用  $\theta_A$  和  $\theta_M$  分别表示图中  $\angle P'OB$  和  $\angle Q'OB$ , 根据折射定律  $\sin i = n \sin r$  可知,

$$\sin r_A = \frac{1}{n} \quad \text{或} \quad r_A = \arcsin \frac{1}{n} \quad (1)$$

由几何关系可知

$$\theta_A = 2r_A - 90^\circ \quad \text{或} \quad \theta_A = 2\arcsin \frac{1}{n} - 90^\circ \quad (2)$$

对于  $QM$ , 因为折射线与黑球相切, 所以

$$\sin r_M = \frac{R_1}{R_2} \quad \text{或} \quad r_M = \arcsin \frac{R_1}{R_2} \quad (3)$$

由折射定律知

$$\sin i_M = n \sin r_M \quad \text{或} \quad i_M = \arcsin \left( \frac{R_1}{R_2} n \right) \quad (4)$$

由几何关系得

$$\theta_M = 2r_M - i_M \quad \text{或} \quad \theta_M = 2\arcsin \left( \frac{R_1}{R_2} \right) - \arcsin \left( \frac{R_1}{R_2} n \right) \quad (5)$$

将  $R_1/R_2 = 2/3$ ,  $n = 1.35$  代入可得

$$\theta_A = 2\arcsin 0.741 - 90^\circ = 5.6^\circ \quad (6)$$

$$\theta_M = 2\arcsin 0.667 - \arcsin 0.900 = 19.5^\circ \quad (7)$$

(与所给三角函数值对比, 可判断出  $\theta_A, \theta_M$  皆大于零, 且  $\theta_M > \theta_A$ ) 所以,  $ABC$  面上被照区为球面上一圆环形带, 其边界由(6)、(7)两式决定.

2) 随  $n$  取值的增大, 由(2)式及(5)式可知,  $\theta_A$  (代数值) 和  $\theta_M$  (代数值) 均将变小.  $P', Q'$  都将沿球面下移, 当  $\theta_A$  变为零时, 相应的  $n = \sqrt{2}$ , 代入(5)式可得此时的  $\theta_M$  值为

$$\theta_M = 2\arcsin \frac{2}{3} - \arcsin \left( \frac{2}{3} \sqrt{2} \right) = 13.09^\circ$$

所以此时  $ABC$  面上被照区变为一圆形球帽, 它在圆心处的张角为  $26.18^\circ$ .

若  $n$  再增大, 当  $\theta_M$  变到零时, 由(5)式及所给三角函数值可得  $n=1.4907$ , 再代入(2)式, 可知此时  $\theta_A = -5.74^\circ$ , 负号表示  $P'$  点在  $B$  的下方. 即  $ABC$  面上被照区仍为球面上一球帽, 但  $AP'$  为边缘光线.

当  $n$  再大时,  $Q'$  离开  $B$  点,  $P'$  点继续下移, 又变为球面上一圆环形带.

当  $n=3/2$  时, 由(4)式可知,  $i_M=90^\circ$  即  $QM$  与  $PA$  合一,  $\theta_M=\theta_A=-6.38^\circ$ ,  $ABC$  面上圆形环带成为一圆线.

当  $n>3/2$  时,  $r < \arcsin \frac{2}{3}d = R_2 \sin r < \frac{2}{3}R_2 = R_1$ , 所有折射光线都将被黑球吸收, 都照不到  $ABC$  面上.

就所涉及的物理和数学知识来说, 本题并没有超出中学课内学习的范围. 但从思维的角度看, 本题难度较大. 题目要求学生从  $PA, QM$  这两条“边界”光线在半球面上照到的范围去进行严密的推理, 由折射定律出发, 计算出圆环形带的边界, 并进一步讨论  $\theta_M$  与  $n$  的关系.

16. 在折射率为  $n$  的介质  $A$  中有一半径为  $R$  的球形气泡, 气体的折射率为  $n_0$ . 现在在气泡中再放一个与气泡同心的由透明介质  $B$  构成的球, 并令一均匀平行光束射向气泡.

1) 如果任意一条在介质  $A$  中射向气泡表面的人射光线, 在通过各介质界面时的人射角和折射角都满足  $\sin \theta \approx \theta$  的条件, 且该光线再进入介质  $A$  时能沿原入射光线方向行进, 如图 6-30 所示, 则介质  $B$  的折射率  $n'$  和  $B$  球的半径  $R'$  必须满足什么样的关系式?

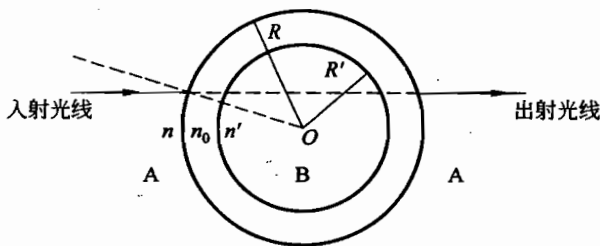


图 6-30

2) 如果两球面间的介质不是气体而是一种透明液体(其折射率仍用  $n_0$  表示), 并要求任何入射角和折射角的数值都不大于  $0.1 \text{ rad}$ , 则符合此条件的入射光束占射至外球面上的光束的百分比为多少?



## 解析

1) 图 6-30 中取入射光束中的一根任意的人射光线. 根据题设条件出射光线与入射光线在同一直线上, 通过球心  $O$  作一与此入射光线平行的直线. 由于入射光线和出射光线是左右对称的, 光学系统(球形气泡和球形介质 B) 又是左右对称的, 在 B 球中的光线一定与入射光线平行, 因而光路图如图 6-31 所示.

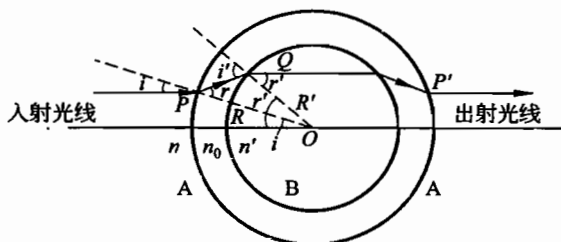


图 6-31

用  $i$  和  $r$  分别表示在 A 与气泡的界面上的人射角和折射角,  $i'$  和  $r'$  分别表示在气泡和 B 球的界面上的人射角和折射角, 则根据折射定律和  $\sin \theta \approx \theta$  的近似, 得

$$ni = n_0 r \quad (1)$$

$$n_0 i' = n' r' \quad (2)$$

对  $\triangle QPO$  应用正弦定理, 可得

$$i' = \frac{R}{R'} r = \frac{n}{n_0} \cdot \frac{R}{R'} i \quad (3)$$

由几何关系得

$$i' = r + r' - i \quad (4)$$

由(1)、(2)、(3)、(4)式可解得  $n'$  和  $R'$  应满足的关系式为

$$n' = \frac{n_0 n}{n - (R'/R)(n - n_0)} \quad (5)$$

此关系式与  $i$  无关, 即满足题设要求的任一入射光线经过 4 次折射后都将沿原方向进入介质 A, 就像气泡和 B 球不存在似的.

2)  $i, r, i', r'$  的数值各不相同, 只要其中数值最大的角满足  $\theta = 0.1 \text{ rad}$  的要求, 其他角一定满足  $\theta < 0.1 \text{ rad}$  的要求. 至于哪个角数值最大, 有下列两种情况:

i)  $n_0 < n$ , 光路图如图 6-31 所示, 显然  $i'$  最大.

$$i' = 0.1 \text{ rad}$$

由(3)式可知, 与之相应的  $i$  的数值为

$$i = \frac{n_0}{n} \cdot \frac{R'}{R} \times 0.1 \text{ rad} \quad (6)$$

符合条件的人射平行光束的截面积为

$$A = \pi(Ri)^2 = 0.01\pi\left(\frac{n_0 R'}{n}\right)^2 \quad (7)$$

射至外球面的平行光束的截面积  $A_0 = \pi R^2$ , 故所求百分比为

$$\frac{A}{A_0} = 0.01\left(\frac{n_0 R'}{nR}\right)^2 \times 100\%$$

ii)  $n_0 > n$ , 光路图如图 6-32 所示, 由图可看出  $r'$  最大, 由(2)、(3)式可得

$$r' = \frac{n_0 i'}{n'} = \frac{n_0}{n'} \cdot \frac{n}{n_0} \cdot \frac{R}{R'} i$$

令  $r' = 0.1 \text{ rad}$ , 则有  $i = \frac{n'R'}{nR} \times 0.1 \text{ rad} \quad (8)$

故所求百分比

$$\frac{A'}{A_0} = 0.01\left(\frac{n'R'}{nR}\right)^2 \times 100\% \quad (9)$$

以(5)式代入得

$$\begin{aligned} \frac{A'}{A_0} &= 0.01 \left[ \frac{n_0 R' / R}{n - (R' / R)(n - n_0)} \right]^2 \\ &= 0.01 \left[ \frac{n_0 R'}{n(R - R') + n_0 R'} \right]^2 \times 100\% \end{aligned} \quad (10)$$

上述解答利用了光学系统的对称性, 因而解答比较简明. 如果利用球面折射公式逐面进行计算, 所得结果一样.

17. 如图 6-33 所示, 一半径为  $R$ 、折射率为  $n$  的玻璃半球, 放在空气中, 球表面中央半径为  $h_0$  的区域被涂黑. 一平行光束垂直入射到此平面上, 正好覆盖整个表面.  $Ox$  为以球心  $O$  为原点, 与平面垂直的坐标轴. 通过计算, 求出坐标轴  $Ox$  上玻璃半球右边有光线通过的各点(有光线段)和无光线通过的各点(无光线段)的分界点的坐标.

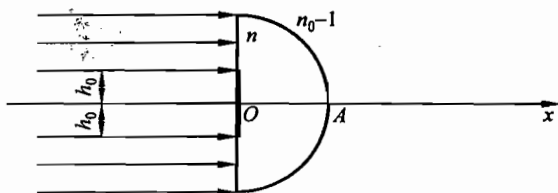


图 6-33

## 解析

图 6-34 中画出的是进入玻璃半球的任一光线的光路(图中阴影处是无光线进入的区域),光线在球面上的入射角和折射角分别为  $i$  和  $i'$ , 折射光线与坐标轴交在  $P$  点. 令轴上  $O, P$  的距离为  $x$ , 根据折射定律, 有

$$\frac{\sin i'}{\sin i} = n \quad (1)$$

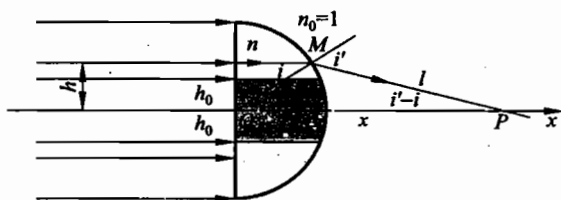


图 6-34

在  $\triangle OMP$  中

$$\frac{x}{\sin i'} = \frac{R}{\sin(i' - i)} \quad (2)$$

$$x(\sin i' \cos i - \cos i' \sin i) = R \sin i'$$

$$x = \frac{R}{\cos i - \frac{1}{n} \cos i'} \quad (3)$$

由于  $\cos i = \sqrt{1 - \sin^2 i}$      $\cos i' = \sqrt{1 - n^2 \sin^2 i}$

故  $x = \frac{nR}{n \sqrt{1 - \sin^2 i} - \sqrt{1 - n^2 \sin^2 i}} = \frac{nR(n \sqrt{1 - \sin^2 i} + \sqrt{1 - n^2 \sin^2 i})}{n^2 - 1}$     (4)

由(4)式可看出,  $x$  的数值随  $i$  的增大而减小. 当  $h = h_0$  时,  $i$  达最小值;  $i \geq i_c$  (临界角) 时, 光线将被全反射, 所以  $i$  的最大值为  $i_c = \arcsin \frac{1}{n}$ . 因此  $x$  的最大值  $x_{\max}$  和最小值  $x_{\min}$  可求得如下:

$$i = i_{\min} = \arcsin(h_0/R), \quad x_0 = x_{\max} = \frac{n^2 \sqrt{R^2 - h_0^2} + n \sqrt{R^2 - n^2 h_0^2}}{n^2 - 1}$$

$$i = i_{\max} = \arcsin \frac{1}{n}, \quad x_c = x_{\min} = \frac{n^2 R \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}}{n^2 - 1} = \frac{nR}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

当  $R < x < x_{\min}$  或  $x > x_{\max}$  时, 没有光线通过, 图 6-35 中的  $P_0 (x_0 = x_{\max})$  和  $P_c (x_c = x_{\min})$  就是所要求的分界点.

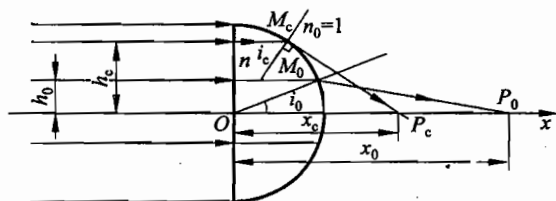


图 6-35

18. 一圆锥透镜如图 6-36 所示.  $S$ 、 $S'$  为锥面,  $M$  为底面, 锥面母线与底面的夹角  $\beta \ll 1$ , 底面的半径为  $R$ , 透镜材料的折射率为  $n$ . 通过锥顶  $A$  垂直于底面的直线为圆锥面的轴. 现有一平行于轴的平行光束入射到此透镜的底面上, 出射光束投射到一与锥顶  $A$  的距离为  $D$  的平面屏  $P$  上. 不考虑光的干涉和衍射.

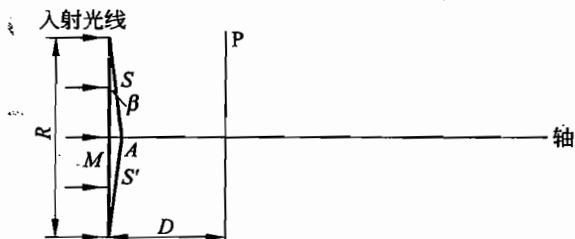


图 6-36

- 1) 试画出出射光束的光路图.
- 2) 当屏  $P$  从  $A$  点不断右移时屏上光斑的图样将发生什么变化?
- 3) 光斑内各处单位面积上接收到的光功率如何分布?

### 解析

1) 入射光线进入透镜底面时方向不变, 只在锥面上发生折射, 如图 6-37 所示. 在入射点  $N$  附近的锥面可近似地看做与纸面垂直的平面, 其法线如图 6-37 中虚线所示, 入射角为  $\beta$ , 折射角为  $\gamma$ , 由折射定律有

$$n \sin \beta = \sin \gamma \quad (1)$$

设出射线与轴的夹角为  $\delta$ , 由几何关系可得

$$\delta = \gamma - \beta$$

由于  $\beta \ll 1$ ,  $n$  是一个 1 和 2 之间的数,  $\gamma \ll 1$ , 可用  $\sin \theta \approx \theta$  的近似, 因而有

$$\delta = n\beta - \beta = (n-1)\beta \quad (2)$$

$\delta$  也是一个远小于 1 的数. 纸面内的所有出射线组成与轴夹角为  $\delta$  的平行光束, 如图 6-38

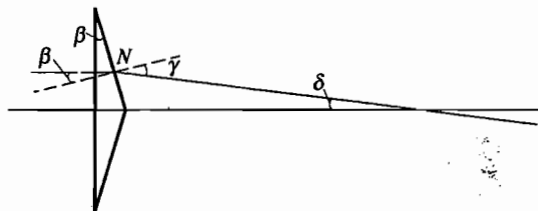


图 6-37

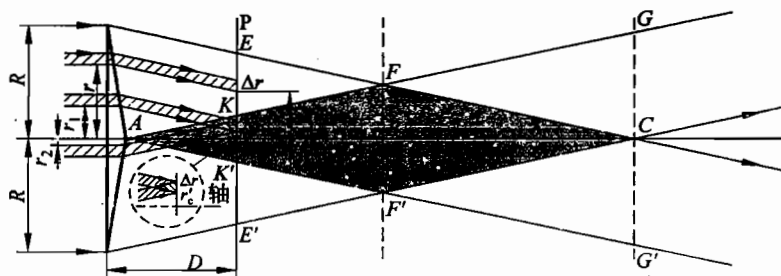


图 6-38

所示. 由于此光学系统具有轴对称性, 将此图绕轴旋转  $360^\circ$  就得到经过透镜后的全部出射光线的空间分布. 由图 6-38 可看出, 出射光束到达区域有两种情况: 只受到从  $S$  (或从  $S'$ ) 射来的光照射的区域和同时受到从  $S$  和  $S'$  射来的光照射的区域(重叠区), 后者在图 6-38 中用阴影表示.

2) 屏上光斑图样随  $D$  的改变而变化的情况.

当  $P$  紧贴  $A$  点时,  $P$  上出现半径为  $R$  的圆形光斑, 各点照度相同.

屏从  $A$  向  $B$  移动的过程中, 圆形光斑的半径逐渐减小, 到  $B$  点时其半径为  $R/2$ ,

$$\overline{AB} = \frac{R}{2\delta}$$

屏从  $B$  向  $C$  移动的过程中, 圆形光斑的半径逐渐增大, 到  $C$  点时其半径为  $R$ ,  $AC = R/\delta$ .

屏从  $C$  继续向右移动时, 屏上光斑将变为圆环形带, 中间有一圆形无光区, 其半径等于  $D\delta - R$ , 随  $D$  的增加而增大. 圆环的外圆半径等于  $D\delta$ , 其大小也随  $D$  的增加而增大.

3) 光斑内各处单位面积接收到的光功率的分布.

当  $P$  位于  $A$ 、 $B$  之间时, 屏上有重叠区和非重叠区.

考虑非重叠区内半径为  $r'$ 、宽度为  $\Delta r$  的细圆环形带, 它们接收到平行光束中半径为  $r$ 、宽度为  $\Delta r$  的圆环形带光束的光功率, 如图 6-38 所示. 用  $I$  表示入射平行光束单位截面积光束的光功率, 用  $I'$  表示屏上相应圆环形带单位面积接收的光功率(下同). 因全部圆环

形带内的人射光都照到屏上的环形带上,而且由于轴对称,各处的  $I'$  应该相等,故有

$$2\pi r \Delta r I = 2\pi r' \Delta r I' \quad (3)$$

$$I' = \frac{r}{r'} I$$

由几何关系可知,

$$r - r' = D\delta, r = D\delta + r'$$

代入(3)式得

$$I' = \left( \frac{D\delta}{r'} + 1 \right) I, \quad 0 < D < \frac{R}{2\delta}, \quad D\delta < r' < R - D\delta \quad (4)$$

由(4)式可知,从边缘处往内,屏上的  $I'$  不断增大,在边缘点(E)处,

$$r'_E = R - D\delta$$

$$I'_E = \frac{R}{R - D\delta} I \quad (5)$$

考虑重叠区内半径为  $r'_c$ 、宽度为  $\Delta r$  的细圆环形带,它们同时受到入射光束中半径为  $r_1$ 、宽度为  $\Delta r$  的圆环形带光束通过 S 面射来的光和入射光束中半径为  $r_2$ 、宽度为  $\Delta r$  的圆环形带光束通过 S' 面射来的光,如图 6-38 所示.由几何关系可知

$$r_1 = D\delta + r'_c \quad (6)$$

$$r_2 + r'_c = D\delta \quad r_2 = D\delta - r'_c \quad (7)$$

屏上圆环形带的面积为  $2\pi r'_c \Delta r$ ,  $r_1$  处入射光带的面积为  $2\pi r_1 \Delta r$ ,  $r_2$  处入射光带的面积为  $2\pi r_2 \Delta r$ , 这些光束都射到半径为  $r'_c$  的圆环形带上,用  $I'_c$  表示此圆环形带上单位面积接收到的光功率,则有

$$2\pi r_1 \Delta r I + 2\pi r_2 \Delta r I = 2\pi r'_c \Delta r I'_c$$

$$I'_c = \left( \frac{r_1}{r'_c} + \frac{r_2}{r'_c} \right) I \quad (8)$$

以(6)式、(7)式代入,得

$$I'_c = \frac{2D\delta}{r'_c} I, \quad 0 < D < \frac{R}{2\delta}, \quad 0 < r'_c < D\delta \quad (9)$$

(9)式是重叠区中的  $I'$ , 它的范围是

$$0 < D < R/2\delta, \quad 0 < r'_c < D\delta$$

由(9)式可知,在重叠区内,  $I'_c$  与  $r'_c$  成反比,即越靠近轴越明亮,在轴上将出现非常亮的亮点.

在重叠区和非重叠区的交界处(即图 6-38 中的 K 和 K' 处),它们与轴的距离为  $D\delta$ , 以  $D\delta$  作为  $r'$  的值代入非重叠区  $I'$  的公式(4),得

$$I'(K) = 2I$$

以  $D\delta$  作为  $r'_c$  的值代入重叠区  $I'_c$  的公式(9),得

$$I'_c(K) = 2I \quad (10)$$

由此可见,在交界处两边的  $I'$  的数值是连续变化的,没有突变.因而看不到它们之间的分界线.

综上所述,屏处在  $A, B$  之间时,在  $P$  上将观察到一个半径为  $R - D\delta$  的光亮圆盘,盘内各处单位面积接收到的光功率与该点离轴的距离有下面的关系

$$I' = \left( \frac{D\delta}{r'} + 1 \right) I \quad D\delta \leq r' \leq R - D\delta \quad (11)$$

$$I'_c = \frac{2D\delta}{r'_c} I \quad 0 < r'_c \leq D\delta \quad (12)$$

盘的中心有一亮点,重叠区与非重叠区之间连续过渡,看不到明亮程度的突变,但  $I'$  随  $r'$  改变的变化率在此边界处有一突变,在  $r'$  由大变小越过边界时,变化率会突增一倍.(如果读者学过微分学,对(11)式和(12)式求导即可得此结果)

当屏处在  $B$  处时,  $D = \frac{R}{2\delta}$ , 此时分别由  $S, S'$  来的光束全部重叠,圆盘半径为  $R/2$ , 在圆盘外没有光照射,圆盘内各处单位面积接收的光功率为

$$I'_c = \frac{2D\delta}{r'_c} I, \quad 0 < r'_c \leq \frac{R}{2} \quad (13)$$

当屏  $P$  位于  $B, C$  之间时,可用类似的方法分别求得非重叠区和重叠区各点的  $I'$  和  $I'_c$ . 图 6-39 中忽略透镜的厚度.

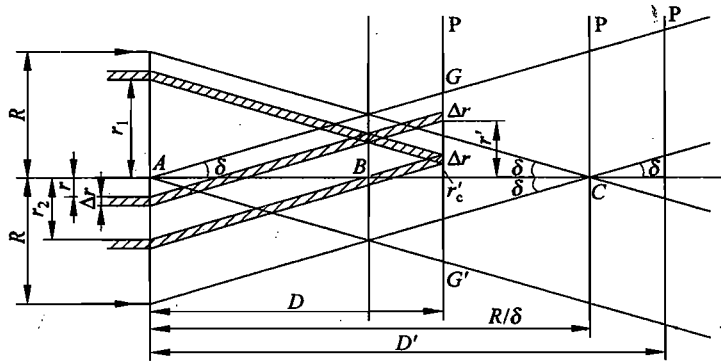


图 6-39

在非重叠区

$$I' = \frac{r}{r'} I$$

$$r + r' = D\delta$$

故有

$$I' = \left( \frac{D\delta}{r'} - 1 \right) I, \quad \frac{R}{2\delta} \leq D \leq \frac{R}{\delta}, \quad R - D\delta \leq r' \leq D\delta \quad (14)$$

在重叠区,射到屏上圆环形带的光来自半径分别为  $r_1$  和  $r_2$  的两个圆环带状入射光束,因而有

$$I'_c = \frac{r_1}{r'_c} I + \frac{r_2}{r'_c} I \quad (15)$$

由几何关系可知:

$$\begin{aligned} r_1 - r'_c &= D\delta, & r_1 &= D\delta + r'_c \\ r_2 + r'_c &= D\delta, & r_2 &= D\delta - r'_c \end{aligned}$$

代入(15)式得

$$I' = \frac{2D\delta}{r'_c} I, \quad \frac{R}{2\delta} \leq D \leq \frac{R}{\delta}, \quad r' < R - D\delta \quad (16)$$

(14)式和(16)式就是屏在  $B$ 、 $C$  之间时屏上圆形光斑中各点的  $I'$  和  $I'_c$ . 在圆形光斑的外边缘处,  $r' = D\delta$ ,  $I' = 0$ . 即圆形光斑由内往外明亮程度逐渐变为零, 没有一个明显的外部边界. 在非重叠区与重叠区的边界处,  $r = r'_c = R - D\delta$ , 有:

在非重叠区内,  $r' \rightarrow R - D\delta$  时

$$I' = \left( \frac{D\delta}{R - D\delta} - 1 \right) I = \frac{2D\delta - R}{R - D\delta} I \quad (17)$$

在重叠区内,  $r'_c \rightarrow R - D\delta$  时

$$I'_c = \frac{2D\delta}{R - D\delta} I \quad (18)$$

显然  $I'_c > I'$ , 屏上的明亮程度在此有一个突变, 因而可以观察到明显的边界, 内部是一个较为明亮的圆盘, 且越接近圆心越明亮; 外部是一个较暗的圆环, 越往外越暗, 到  $r' = D\delta$ ,  $I'$  降低到零, 没有明显的外部边缘. 当  $D$  逐渐增大, 即屏向右移动时, 亮圆盘逐渐变小, 外圆环逐渐扩大.

当屏  $P$  位于  $C$  点时, 亮圆盘消失, 只剩下轴上的一个亮点, 屏上出现一个由内往外明亮程度渐减的圆形光斑, 外部边缘不清晰, 内部  $I'$  的分布为

$$I' = \left( \frac{R}{r'} - 1 \right) I, \quad 0 < r' \leq R, \quad D = R/\delta \quad (19)$$

若屏  $P$  继续右移, 此时屏与  $A$  的距离  $D' > \frac{R}{\delta}$ , 屏中央将出现一个暗斑, 周围是圆环形带亮斑. 暗斑的半径为  $a = \left( D' - \frac{R}{\delta} \right) \delta = D'\delta - R$ . 圆环形带中各点的  $I'$  随  $r'$  的减小而增大,



$$I' = \left( \frac{D'\delta}{r'} - 1 \right) I, \quad D' > \frac{R}{\delta}, \quad D'\delta - R \leq r' \leq D'\delta \quad (20)$$

在内边缘处,  $r' = D'\delta - R$ ,

$$I' = \left( \frac{D'\delta}{D'\delta - R} - 1 \right) = \frac{R}{D'\delta - R} I \quad (21)$$

在外边缘处,  $r' = D'\delta$ ,

$$I' = 0 \quad (22)$$

圆环形带的宽度为  $R$ . 随着  $D'$  的增大, 圆环形带的面积为  $A = \pi(D'\delta)^2 - \pi(D'\delta - R)^2 = 2\pi D' \cdot \delta R - \pi R^2$ .  $A$  随  $D'$  的增加而增大, 明亮程度自然越来越小.

本题中圆锥透镜不是中学中讲过的薄透镜. 过去讲过的薄透镜的表面是球面, 对于傍轴光线来说可以成像, 从一点发出的傍轴光经过薄透镜后会聚于一点(像点), 平行光经过薄透镜后会聚于焦平面上的一点. 圆锥透镜则完全不同, 没有成像的性质. 但根据折射定律可以获得出射光束的性质, 再根据光束传播过程中该光束传递的光功率保持不变的性质(假设没有吸收和散射), 就可以知道这些光束落到屏上何处和因此在屏上产生的明亮程度. 对每一个  $D$  和每一个  $r'$  都进行分析就可以得出全面的答案.

关于(9)式的讨论, 读者可能有一个疑问: 当  $r'_c \rightarrow 0$  时,  $I'_c$  将  $\rightarrow \infty$ , 这是怎么回事? 实际上这种情况并不存在. 我们知道一根光线谈不上能量问题, 一个具有一定大小截面的光束才能传输能量. 会聚到  $r'_c = 0$  这个几何点的一圈光线形成的是一个几何的面, 因而没有能量的传输. 如果考虑屏上的一个轴线附近、直径为  $\Delta r$  的小圆, 它接收的是半径为  $D\delta$ 、宽度为  $\Delta r$  的圆环形带入射光束经圆锥透镜折射后射来的光, 因而小圆上单位面积接收的光功率为

$$I'_{\#} = \frac{2\pi D\delta\Delta r}{\pi\left(\frac{1}{2}\Delta r\right)^2} I = \frac{8D\delta}{\Delta r} I \quad (23)$$

$\Delta r$  越小,  $I'_{\#}$  越大, 但  $\Delta r$  不能等于零. 当(23)式尚能成立时, 小圆盘上接收的光功率为

$$\pi\left(\frac{\Delta r}{2}\right)^2 I'_{\#} = 2\pi D\delta I \Delta r$$

它是一个随  $\Delta r$  的减小而减小的很小的量.

[注] 本题原为第十届竞赛题, 这次保留了原来的物理内容, 但提问和解答都做了很大的修改, 原题的解答中有错误之处, 请读者注意.

19. 虹和霓是太阳光射入大气中的水珠时经折射、反射和色散产生的光学现象. 虹的外圈是红色的, 内圈是紫色的, 霓的外圈是紫色的, 内圈是红色的. 虹是太阳光在水珠中经过\_\_\_\_\_次折射和\_\_\_\_\_次反射形成的. 霓是太阳光在水珠中经过\_\_\_\_\_次折

射和\_\_\_\_\_次反射形成的.

### 解析

2;1;2;2.

形成虹霓时太阳光在水珠表面的折射和水珠中的反射的光路如图 6-40 所示. 水珠是圆的, 一束平行的太阳光中的光线在水珠上时各光线的入射角大小不同, 出射线方向也不相同. 但当入射角在某一特定值  $i_0$  (其数值与光的频率有关) 附近时, 即使入射角  $i_0$  稍有改变, 出射线方向与入射太阳光线的夹角(图 6-40 中的  $4r-2i$  和  $6r-2i$ ) 基本不变, 因而迎此出射光方向观察可看到较强的光. 不同颜色的光的出射方向不同, 因而能看到彩色的虹霓.

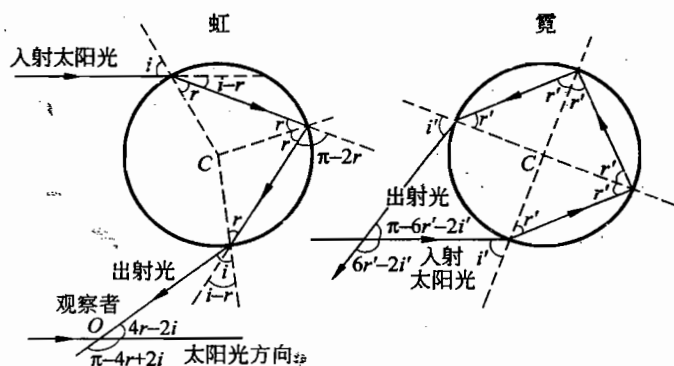


图 6-40

水对各种色光的折射率和虹霓中各色光的出射方向下表所示.

光的颜色		红	黄	深绿	紫
波长 $\lambda/\text{nm}$		656.3	589.3	486.1	404.7
折射率		1.3311	1.3330	1.3371	1.3428
虹	入射角 $i_0/(\circ)$	59.52	59.41	59.17	58.84
	折射角 $r_0/(\circ)$	40.35	40.225	39.96	39.59
	$(4r_0 - 2i_0)/(\circ)$	42.36	42.08	41.50	40.68
霓	入射角 $i_0/(\circ)$	71.90	71.84	71.71	71.53
	折射角 $r_0/(\circ)$	46.569	45.466	45.244	44.938
	$(\pi - 6r_0 + 2i_0)/(\circ)$	50.38	50.88	51.96	53.43

图 6-41 是眼睛观察虹霓的示意图。

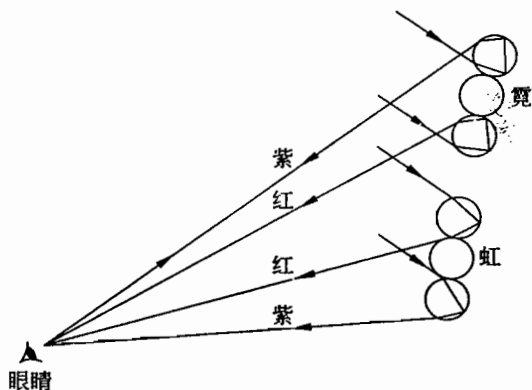


图 6-41

20. 为什么落日是红色的?

**解析**

因为落日的光经过靠近地面的稠密大气层的路程很长, 散射作用十分显著, 大部分蓝紫光被散射, 而红光被散射的比例比蓝紫光小得多, 所以透过的光呈红色。

21. 晴朗的天空呈蔚蓝色的原因是\_\_\_\_\_。

**解析**

大气对太阳光的散射。

如果媒质中存在其他物质的微粒, 或媒质本身有密度起伏, 当光在这些媒质中传播时, 就会发生散射。纯净大气由密度起伏引起的散射的强度与光的波长有关, 波长越短, 散射强度越大。因此, 太阳光中波长较短的紫光、蓝光的散射比波长较长的黄光和红光强得多。我们看到的从天空来的光就是纯净大气的散射光, 所以天空呈现蔚蓝色。

22. 如图 6-42 所示, 一束平行白光沿  $x$  方向穿过屏 P 上小孔 C 后, 射向玻璃立方体 A。设 A 的折射率在  $y$  方向上随着  $y$  值的增加而线性增大, 但在与  $y$  轴垂直的平面内是均匀的。从 A 射出的光线经过折射率均匀的玻璃三棱镜 B 后, 照到与  $x$  轴垂直的观察屏 (毛玻璃) E 上。试在图 6-43 中定性地画出所看到的 E 上的图像。

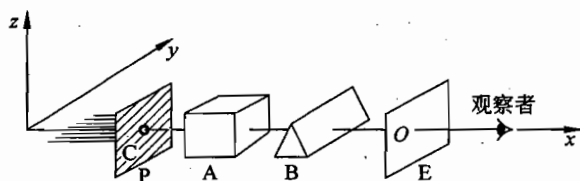


图 6-42

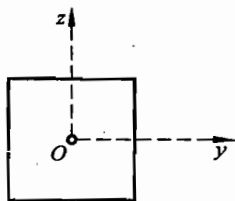


图 6-43

**解析**

答案如图 6-44(a) 所示.

图 6-44(b) 所示为  $xy$  平面内光线传播的情况, 入射光束沿  $x$  方向,  $y$  是折射率不同的介质的分界面的法线方向. 入射光束沿  $x$  轴方向射入 A 后, 将在介质分界面上发生折射, 入射角  $\approx 90^\circ$ , 折射角  $\approx$  临界角  $i_c = \sin\left(\frac{n}{n'}\right)$ , 折射线在折射率较大 ( $n'$ ) 的介质中, 即向  $y$  轴正方向偏折.

本题中的玻璃立方体可看做由许多折射率不同的平行于  $xz$  平面的薄片叠合而成, 且立方体中任一平行于  $xz$  平面的面皆可作为两种不同媒质的“交界面”. 光线沿  $x$  方向射入 A 时, 将因上述过程而折入折射率较大的一侧. 由于折射率与波长有关, 波长不同的光偏折的程度不相同, 故入射的细束白光通过 A 后将发生色散, 其中紫色成分偏折最大. (此时若在 A 后放一与  $x$  轴垂直的观察屏, 在屏上将出现一条大致与  $y$  轴平行的彩色光带, 其远离  $x$  轴的一端为紫色.) 从 A 射出的光通过棱镜 B 后, 向棱镜底偏折, 即向负  $z$  方向偏折, 其中仍是紫色成分偏折最大, 故在棱镜后的观察屏上将出现如图 6-44(a) 所示弯曲的彩色光带.

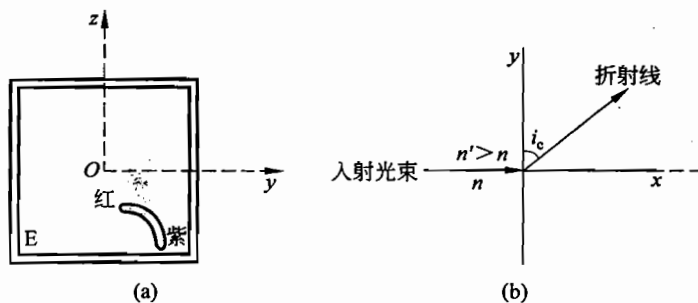


图 6-44

## 七、球面镜、透镜、三棱镜和组合光学系统

1. 有一物  $AB$  (如图 7-1 所示) 从远处移向凹面镜到  $2f$  处过程中. 问下列情况哪些是正确的?

- (1) 像的大小总是不断增大;
- (2) 像的大小总是大于物;
- (3) 像的大小总是小于物;
- (4) 像总是正立;
- (5) 像总是倒立.
- (A) 只有(3)正确;
- (B) 只有(1)、(2)正确;
- (C) 只有(2)、(4)正确;
- (D) 只有(3)、(4)正确;
- (E) 只有(1)、(5)正确.

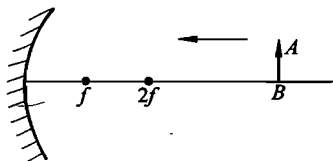


图 7-1

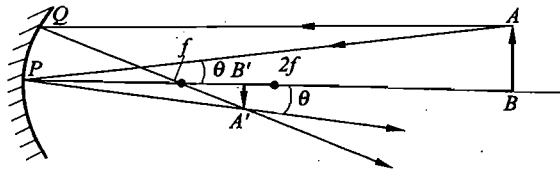


图 7-2

### 解析

E.

用作图法(见图 7-2)即可作出判断.  $AB$  向球面镜靠拢时,  $AQ$  的反射线不变,  $AP$  的入射角  $\theta$  不断增大. 显然点  $A'$  逐渐下移, 且始终在  $B'$  点下方.

2. 有一半径为  $R=0.128\text{ m}$  的玻璃半球. 过球心  $O$  并与其平面部分相垂直的直线为其主光轴, 在主光轴上沿主光轴放置一细条形发光体  $A_1A_2$  (如图 7-3 所示), 其长度为

$l=0.020$  m. 若人眼在主光轴附近向右对着半球体观察, 可以看到条形发光体的两个不很亮的像(此外可能还有亮度更弱的像, 不必考虑), 当条形发光体在主光轴上前后移动时, 这两个像也在主光轴上随着移动. 现在调整条形发光体的位置, 使得它的两个像恰好头尾相接, 连在一起, 此时条形发光体的近端  $A_2$  距球心  $O$  的距离为  $a_2=0.020$  m.

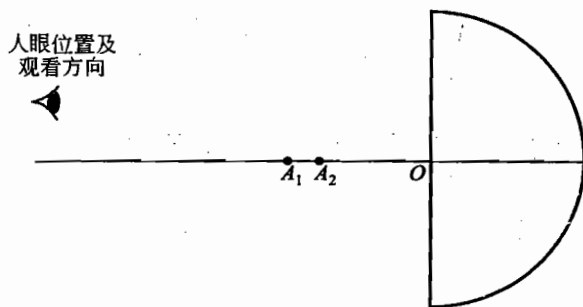


图 7-3

试利用以上数据求出构成此半球的玻璃的折射率  $n$  (计算时只考虑傍轴光线).

### 解析

1) 条形发光体的两个像, 一个是光线在平面部分反射后形成的, 一个是光线经平面折射进入玻璃, 在凹球面上反射后, 又经平面折射穿出玻璃后形成的.

2) 求半球外任一个在轴上的光点  $A$  的上述两个像. 平面反射像在  $A'$  处,  $OA'=OA=a$ . (见图 7-4) 凹面镜反射像  $D$  的求法如下:

i)  $A$  点发出的光经平面折射后进入玻璃, 射向凹面镜, 对凹面镜来说, 相当于光线从  $B$  点射来(见图 7-5), 令  $OB=b$ . 则

$$b = na \quad (1)$$

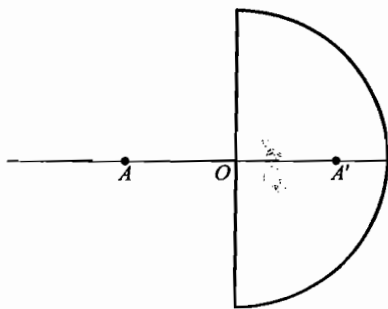


图 7-4

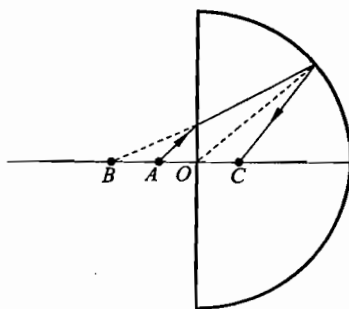


图 7-5

ii) 用凹面镜公式  $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f} = \frac{2}{R}$  ( $f$  为焦距) 求凹面镜成的像  $C$  的位置. 令  $OC=c$ , 则  $u=b+R, v=R-c$ , 代入上式

$$\frac{1}{b+R} + \frac{1}{R-c} = \frac{2}{R}$$

解得

$$c = \frac{bR}{2b+R} = \frac{naR}{2na+R} \quad (2)$$

由此式可看出  $C$  点在半球内.

iii) 由  $C$  点发出的光线, 经折射穿出玻璃外时, 由外面观察其像点在  $D$  处 (见图 7-6), 令  $OD=d$ , 则

$$d = \frac{1}{n}c = \frac{aR}{2na+R} = \frac{R}{2n+R/a} \quad (3)$$

$D$  点就是人眼所看到的光点  $A$  的像的位置. 由 (3) 式可知,  $a$  越大,  $d$  也越大, 且  $d < a$ .

3) 现在, 条形发光体  $A_1A_2$  经平面反射所成的像为  $A'_1A'_2$ , 设经凹面镜反射所成的像为  $D_1D_2$ . 根据 (3) 式中  $a$  与  $d$  的关系, 可知  $D_2$  离球心  $O$  比  $D_1$  和  $A'_2$  都近, 所以当两像恰好头尾相接时, 其位置应如图 7-7 所示, 即  $D_1$  与  $A'_2$  重合.

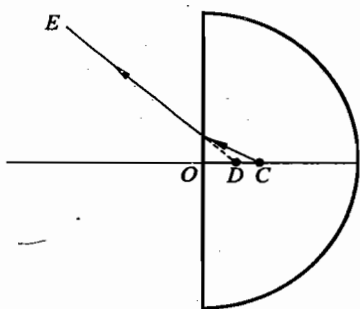


图 7-6

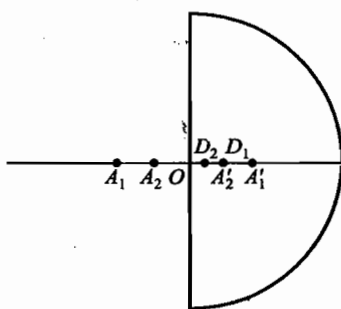


图 7-7

即

$$OD_1 = OA'_2$$

$$\frac{a_1R}{2na_1+R} = a_2$$

式中  $a_1$  为  $A_1$  距球心  $O$  的距离. 由此得

$$n = \frac{a_1 - a_2}{2a_1a_2}R = \frac{l}{2a_1a_2}R$$

代入已知数据:  $R=0.128$  m,  $l=0.020$  m,  $a_2=0.020$  m,  $a_1=a_2+l=0.040$  m  
得

$$n = \frac{0.020}{2 \times 0.020 \times 0.040} \times 0.128 = 1.60$$

本题是球面镜成像和平面折射的综合题,第二个像要经过平面折射,球面反射和第二次平面折射才形成,因此分析像的位置似乎比较复杂,但只要循序讨论,每一步都是学生掌握的内容,不难完成.不过每一步都要仔细分析,像的相对关系不要搞错.

3. 1) 图 7-8 所示为一凹球面镜,球心为  $C$ ,内盛透明液体,已知  $C$  离液面高度  $CE$  为  $40.0 \text{ cm}$ ,主轴  $CO$  上有一物  $A$ ,物离液面高度  $AE$  恰好为  $30.0 \text{ cm}$  时,物  $A$  的实像和物重合.实验时光阑直径很小,可以保证符合傍轴光线的条件.试求该透明液体的折射率  $n$ .

2) 体温计横截面如图 7-9 所示,已知细水银柱  $A$  离圆柱面顶点  $O$  的距离为  $2R$ ,  $R$  为该圆柱面半径.  $C$  为圆柱面中心轴位置.玻璃的折射率  $n=3/2$ ,  $E$  代表人眼.求图示横截面内人眼所见水银柱像的位置、虚实、正倒和放大倍数.

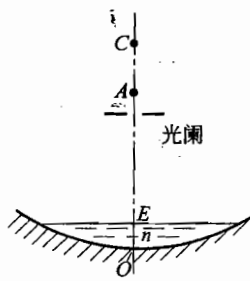


图 7-8

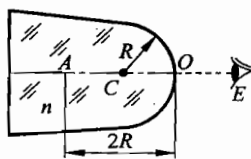


图 7-9

### 解析

1) 主光轴上物  $A$  发出的光线  $AB$ , 经液体界面折射后沿  $BD$  方向入射于球面镜时, 只要  $BD$  的反向延长线过球心  $C$ , 光线经球面反射后必能沿原路折回. 按光路可逆性原理, 折回的光线相交于  $A$  (图 7-10).

对空气、液体界面用折射定律有:

$$\sin i = n \sin r$$

$$n = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{BE/AB}{BE/CB}$$

当光阑足够小时,  $i \ll 1, r \ll 1, \sin i \approx \tan i, \sin r \approx \tan r$ ,

$$n = \frac{CE}{AE} = \frac{40.0}{30.0} = 1.333$$

2) 先考虑主光轴上物点  $A$  发出的两条光线, 其一沿主光轴

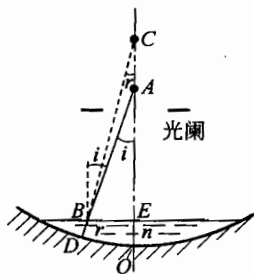


图 7-10



方向  $ACOE$  入射界面, 无偏折地出射, 进入人眼  $E$ . 其二沿  $AP$  方向以入射角  $i$  斜入射于界面  $P$  点, 折射角为  $r$ . 折射光线  $PQ$  要能进入人眼  $E$ ,  $P$  点应非常靠近  $O$  点, 或说入射角  $i$  和折射角  $r$  应很小. 在小角(傍轴)近似下, 折射定律  $n \sin i = \sin r$  可写为  $r = ni$ . 这两条光线反向延长, 在主光轴上相交于  $A'$ ,  $A'$  即物  $A$  之虚像点(图 7-11).

对  $\triangle APA'$  用正弦定理, 得

$$\frac{\sin \angle A'PA}{\overline{A'A}} = \frac{\sin(\pi - i)}{\overline{A'P}} = \frac{\sin i}{\overline{A'P}}$$

在傍轴近似下:

$$\begin{aligned} \sin \angle A'PA &= \angle A'PA = ni - i, \sin i = i \\ \overline{A'P} &= \overline{A'O} \end{aligned}$$

上式可写为

$$\frac{ni - i}{\overline{A'O} - 2R} = \frac{i}{\overline{A'O}}$$

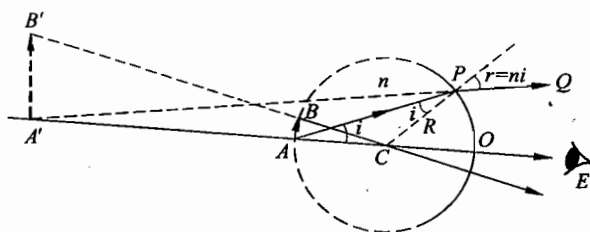


图 7-11

解上式得

$$\overline{A'O} = \frac{2R}{2-n} = \frac{2R}{2-3/2} = 4R$$

为了分析成像倒正和放大情况, 将水银柱看成有一定高度的垂直于轴的小物体  $AB$ . 既然  $A-A'$  是一对共轭点, 只要选从  $B$  发出的任一条光线, 它的折射线反向延长线与过  $A'$  点且与轴垂直的直线相交于  $B'$ ,  $B'$  是物点  $B$  的虚像点, 即  $A'B'$  是物  $AB$  之正立虚像.

图 7-11 中选择的是从  $B$  点发出过圆柱面轴心  $C$  之光线  $BC$ . 该光线入射角为零, 故无偏折地通过界面出射, 利用它找出  $B'$ . 从  $\triangle A'B'C \sim \triangle ABC$  得

$$\text{放大率} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C}}{\overline{AC}} = \frac{3R}{R} = 3$$

[注] 此题中光线发生折射成的曲面是圆柱体表面, 严格地讲不能成像. 上述题解中只考虑了图示平面内诸光线的折射情况, 在傍轴条件下, 将这些折射线交点近似地视做物体的像, 不是严格的论证.

4. 200度远视眼镜片的焦距是多少?

**解析**

0.50 m.

远视镜和近视镜片的度数  $D$  和焦距  $f$  的关系是这样规定的, 即  $D = \frac{1}{f} \times 100$ ,  $f$  以米为单位. 所以 200 度镜片的焦距

$$f = \frac{100}{200} \text{ m} = 0.50 \text{ m}$$

5. 物体沿主轴向凸透镜移近, 当移至焦点以内时, 无论把屏放在什么位置, 屏上都得不到物体的像. 但是镜前的观察者可以看到镜后有正立的像, 像的尺度比物体大, 物体越靠近凸透镜, 像比物体大得越\_\_\_\_\_.

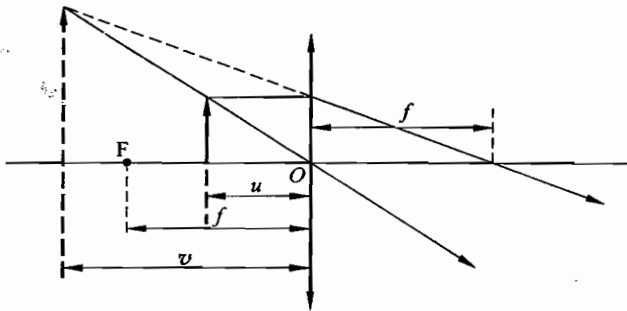


图 7-12

**解析**

小.

凸透镜成像公式为

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$$

放大率

$$m = \left| \frac{v}{u} \right| = \left| \frac{f}{u-f} \right|$$

$u < f$  时,  $u$  越小,  $m$  越小(参见图 7-12).

6. 一光学系统如图 7-13 所示. A 为物平面, 垂直于光轴, L 为会聚透镜,  $\overline{AL} >$  透镜的

焦距.  $M$  为与光轴成  $45^\circ$  角的平面镜.  $P$  为像面, 垂直于经平面镜反射后的主光轴. 图 7-14 为该光学系统的透视图. 设物为  $A$  面上的“上”字, 试在图 7-14 中实像面  $P$  上画出像的形状.

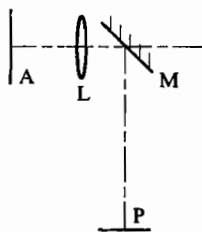


图 7-13

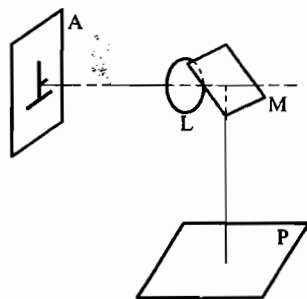


图 7-14

### 解析

答案如图 7-15(a)所示.

如果没有反射镜, 应在像面  $P'$  上成一绕光轴转  $180^\circ$  的实像, 如图 7-15(b)中虚线所示. 因此, 对于平面反射镜, 这就是光束会聚在镜后各点的成像问题. 从镜面反射的光束应会聚在镜前的镜面  $P$  上, 实际成的像与  $P'$  上假想像对于镜面对称. 故得如图 7-15(a)的答案.

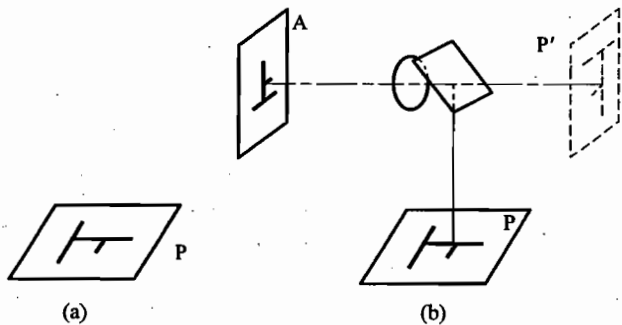


图 7-15

7. 如图 7-16 所示, 某人的眼睛在  $E$  处通过放大镜  $L$  观察标尺  $M$ ,  $F_1$  和  $F_2$  为  $L$  的焦点. 他既能通过  $L$  看到  $M$  上的一部分刻度, 又能直接从镜外看到一部分刻度. 试在图上用作图法求出他看不到的  $M$  上的刻度值的范围. 在作图时用①、②……标明你画的光线, 并写出作图步骤. 看不到的  $M$  上的刻度值范围为\_\_\_\_\_.

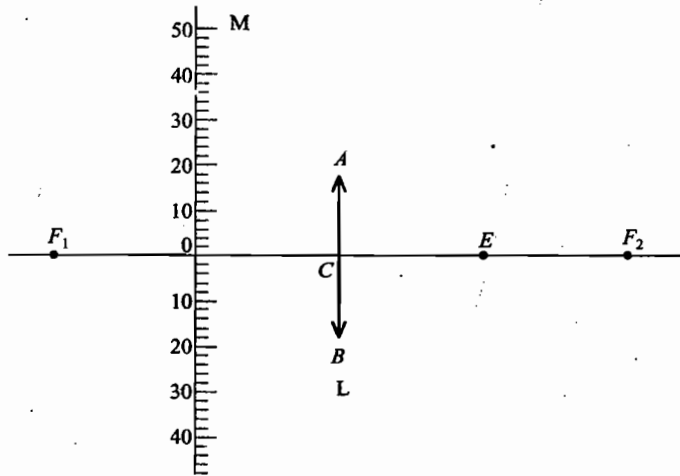


图 7-16

**解析**

光路图如图 7-17 所示.

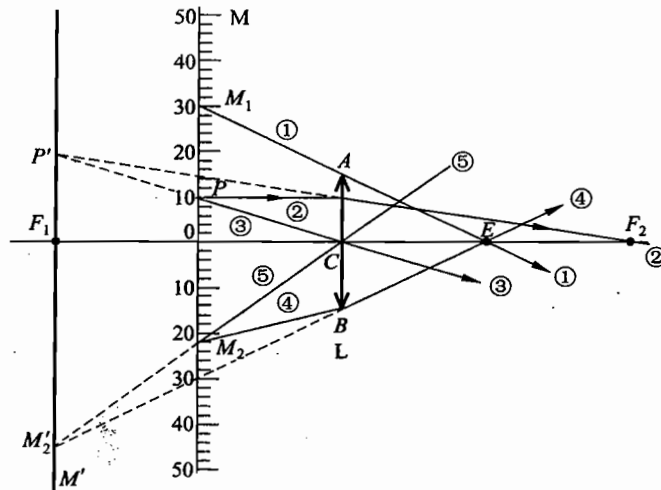


图 7-17

作图步骤:

1) 通过  $E$  与  $L$  的边缘点  $A$  作光线①, 并使之与  $M$  相交于  $M_1$  点. 光线①是从镜外观察标尺时能见到标尺的边缘光线. 由图可知, 位于  $M_1$  (其刻度值为 30) 外面的刻度均可见

到,而小于  $M_1$  的刻度从镜外不能看到.

2) 为了求得通过透镜所看到的范围,可先求出  $M$  的像. 为此可利用  $M$  上一点  $P$  所发的光线②、③求出其像  $P'$  的位置,如图 7-17 所示.

3) 通过  $P'$  作与主光轴垂直的直线,此即  $M$  的像  $M'$ .

4) 联结  $E$  与  $L$  的边缘点  $B$ ,作出射光线④(为了画图时不与①重叠,故不再用  $A$  点而改用  $B$  点,因为上下是对称的,结果一样),并使之沿反向延长,与  $M'$  交于  $M'_2$ .  $M'_2$  就是从  $E$  处通过  $L$  能观察到的像的边缘点.

5) 通过  $M'_2$  和  $L$  的光心  $C$  作光线⑤,它与  $M$  交于  $M_2$ ,  $M'_2$  即为  $M_2$  的像. 联结  $M_2B$ , 这就是与出射光线④相应的入射光线. 由图可知  $M_2$  的值为 22.5.

6) 由上可知: 通过  $L$  可见到  $0 \sim 22.5$  之间的刻度; 由镜外可见到数值大于或等于 30 的刻度; 看不到的是刻度值在 22.5 和 30 之间的刻度.

如果有的学生利用焦平面的概念作图,也是正确的(见图 7-18),具体作图步骤如下:

1) 通过  $E$  与  $L$  的边缘点  $A$  作光线①,并使之与  $M$  相交于  $M_1$  点. 由图可知,位于  $M_1$  (其刻度值为 30) 外面的刻度均可从镜外看到,而小于  $M_1$  的刻度从镜外不能见到.

2) 联结  $E$  与  $L$  的边缘点  $B$ ,作出射光线②,作为从  $E$  处通过  $L$  观察时所能接收到的出射光线的边缘光线,然后采用下面的作图法求出与之相应的入射光线,从而求出相应的刻度.

3) 通过  $F_2$  作与主光轴垂直的焦平面. 光线②与焦平面交于  $Q$  点. 作联结  $L$  的光心  $C$  与  $Q$  的辅助线③.

4) 通过  $B$  作平行于  $CQ$  的光线,与  $M$  交于  $M_2$  点,  $M_2B$  就是与出射光线②相应的入射光线.  $M_2$  即为通过  $L$  能见到的边缘刻度. 由图可知  $M_2$  的刻度值为 22.5.

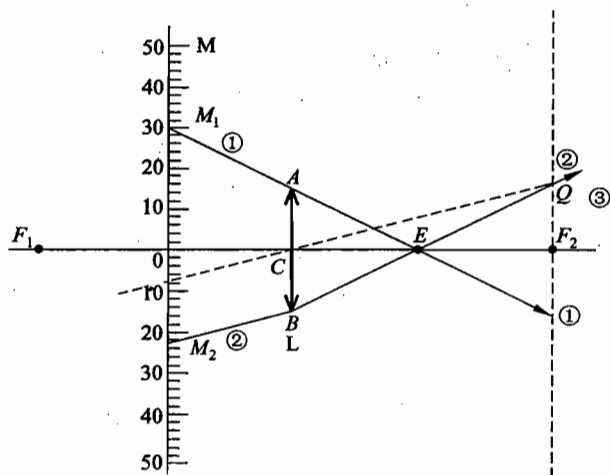


图 7-18

结论见前一解法.

在中学的光学教学中,一般只讨论像的大小、位置和虚实.在实际使用光学仪器观察物体时有个“视场”问题,即能看到其像的物体的范围,本题就是一个简单的视场问题.只要根据实际情况和几何光学的原理进行分析就能得出所需的结论.这要求学生具有灵活运用所学知识对具体问题进行分析的能力.

8. 如图 7-19 所示,凸透镜 L 的主光轴与  $x$  轴重合,光心  $O$  就是坐标原点.凸透镜的焦距为 10 cm.有一平面镜 M 放在  $y = -2$  cm、 $x > 0$  的位置,眼睛从平面镜反射的光中看到光点 A 的像位于  $A_2$  处, $A_2$  的坐标见图.

- 1) 求出此发光点 A 的位置.
- 2) 写出用作图法确定 A 的位置的步骤,并作图.

### 解析

1) 已知  $A_2$  是经过平面镜 M 反射后所成的像,根据平面镜成像规律可知,与  $A_2$  相应的物点  $A_1$  应在点  $(-10, 8)$  处(图 7-20).同时  $A_1$  应是所求发光点 A 发的光经凸透镜 L 折射后所成的像点,所以进一步由成像公式可求出 A 点坐标.

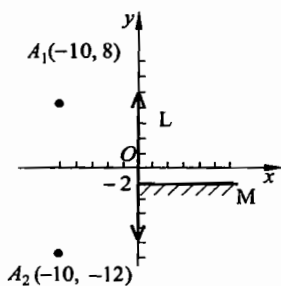


图 7-20

设  $u$  为物距,  $v$  为像距,  $f$  为焦距, 则  $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$ . 由  $A_1$  的位置可以推知,入射到透镜的光是由图 7-20 中左方来的,所以  $A_1$  应是透镜所成的虚像,因此  $v = -10$  cm,代入上式可得  $u = \frac{vf}{v-f} = \frac{-10 \times 10}{-10-10}$  cm = 5 cm,即发光点 A 的横坐标在  $x = -5$  cm 处.

因为  $A_1$  点的纵坐标为  $y_1 = 8$  cm,设 A 点的纵坐标为  $y$ ,则由横向放大率公式可知

$$\left| \frac{y_1}{y} \right| = \left| \frac{v}{u} \right| = \left| \frac{-10}{5} \right| = 2$$

即  $|y| = 4$  cm,因为已知  $A_1$  是 A 的虚像, A 的纵坐标与  $A_1$  同号,即得  $y = 4$  cm,所以 A 点坐标为  $(-5, 4)$ .

- 2) 作图步骤如图 7-21 所示:利用  $A_2$  与  $A_1$  的对称关系画出  $A_1$  点;连  $A_1O$ ;连  $A_1F$ ,

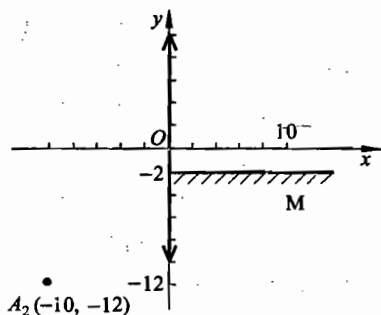


图 7-19

与透镜相交于  $C$  点;过  $C$  点作  $x$  轴的平行线,与  $A_1O$  相交于  $A$  点. $A$  点即为发光点.

9. 已知一薄凸透镜主光轴为  $OO'$ , 发光点为  $A$ ,  $A$  经该透镜所成的像为  $A'$ ; 另有两个互相垂直且几何尺寸、位置都已给定的平面镜  $M_1$  与  $M_2$ , 如图 7-22 所示.

1) 在题中给定的图面上, 用作图法画出透镜的位置和大小以及焦点的位置. 已知透镜的直径为  $2R$ .

2) 图中的物点  $C$  对整个光学系统成几个实像? 几个虚像?

3) 在题中给定的图面上, 再画出  $C$  点所成实像的光路图.

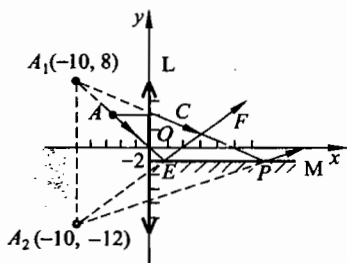


图 7-21

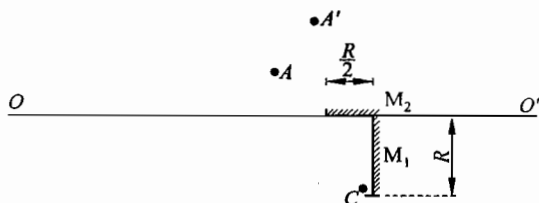


图 7-22

### 解析

用作图法所得答案见图 7-23.

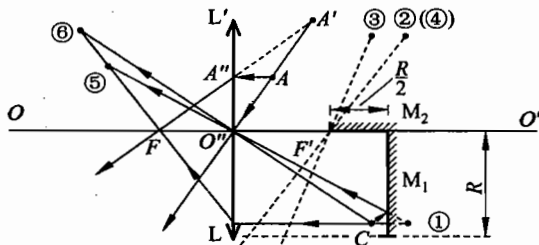


图 7-23

1) 因为入射光线通过透镜中心时方向不变, 所以物点、像点和透镜中心位于同一直线上. 连接通过  $A$ 、 $A'$  的直线并使之与透镜主光轴相交, 此交点  $O'$  即为透镜的中心. 通过  $O'$  画出半径为  $R$  的薄凸透镜  $LL'$ . 通过  $A$  作平行于主光轴的人射线  $AA''$ , 经透镜折射后, 出射线的延长线应通过  $A'$ , 折射线与主光轴的交点应为透镜的焦点. 至此透镜的位置及

焦点都已确定.

2) 如图所示,  $C$  发出的光线照射到平面镜  $M_1$  和  $M_2$  上时, 反射成虚像①和③. 因为虚像①位于  $M_2$  的前方, 由  $M_1$  反射的、形成虚像①的光线能被  $M_2$  反射, 从而形成虚像②. 虚像③位于  $M_1$  的前方, 由  $M_2$  反射的、形成虚像③的光线能被  $M_1$  反射形成虚像④, 但由对称可知, ④与②重合. 虚像②(或④)位于  $M_1$  和  $M_2$  的镜后, 形成②(或④)的光线已不能再被反射成像, 所以在平面镜中只有 3 个虚像.

形成虚像①、②、③的光线向左方射出, 由图 7-23 中所画光路图可知, 只有形成虚像①的由  $M_1$  反射的光线能射到透镜上, 经透镜折射形成实像⑤. 此外从光源  $C$  发出的光线经透镜后能形成另一实像⑥.

所以物点  $C$  经整个光学系统的反射、折射后形成的像共有 5 个, 3 个虚像, 2 个实像.

10. 一平凸透镜, 焦距为  $f$ , 其平面上镀了银, 现在其凸面一侧距它  $2f$  处, 垂直于主轴放置一高为  $h$  的物, 其下端在透镜的主光轴上(如图 7-24 所示).

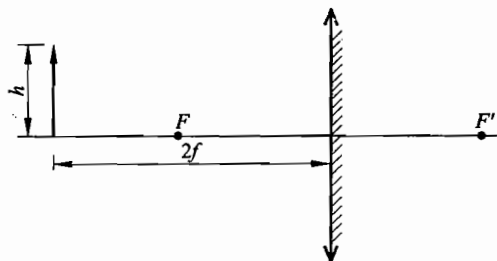


图 7-24

- 1) 用作图法画出物经镀银透镜所成的像, 并标明该像是虚像还是实像.
- 2) 用计算法求出此像的位置和大小.

### 解析

- 1) 用作图法求得物  $AP$  的像  $A'P'$  及所用各条光线的光路如图 7-25 所示.

说明: 平凸薄透镜平面上镀银后构成一个由会聚透镜  $L$  和与它密接的平面镜  $M$  的组合  $LM$ , 如图 7-25 所示. 图中  $O$  为  $L$  的光心,  $AOF'$  为主光轴,  $F$  和  $F'$  为  $L$  的两个焦点,  $AP$  为物. 作图时利用了下列三条特征光线:

i) 由  $P$  射向  $O$  的入射光线, 它通过  $O$  后方向不变, 沿原方向射向平面镜  $M$ , 然后被  $M$  反射, 反射光线与主光轴的夹角等于入射角, 均为  $\alpha$ . 反射线射入透镜时通过光心  $O$ , 故由透镜射出时方向与上述反射线相同, 即图中的  $OP'$ .

- ii) 由  $P$  发出且通过  $L$  左方焦点  $F$  的入射光线  $PFR$ , 它经过  $L$  折射后的出射线与



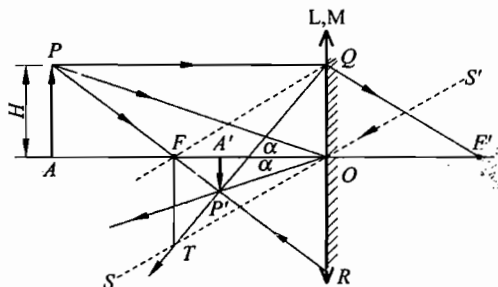


图 7-25

主光轴平行,垂直射向平面镜 M,然后被 M 反射,反射光线平行于 L 的主光轴,并向左射入 L,经 L 折射后的出射线通过焦点 F,即为图中的 RFP.

iii) 由 P 发出的平行于主光轴的人射光线 PQ,它经过 L 折射后的出射线将射向 L 的焦点 F',即沿图中的 QF' 方向射向平面镜,然后被 M 反射,反射线指向与 F' 对称的 F 点,即沿 QF 方向.此反射线经 L 折射后的出射线可用以下方法画出:通过 O 作平行于 2F 的辅助线 S'OS, S'OS 通过光心,其方向保持不变,与焦面相交于 T 点.由于入射平行光线经透镜后,相交于焦面上的同一点,故 QF 经 L 折射后的出射线也通过 T 点,图中的 QT 即为 QF 经 L 折射后的出射光线.

上列三条出射光线的交点 P' 即为 LM 组合所成的 P 点的像,对应的 A' 即 A 的像点.由图可判明,像 A'P' 是倒立实像,只要采取此三条光线中任意两条即可得 A'P',即为正确的解答.

2) 按陆续成像计算物 AP 经 LM 组合所成像的位置、大小.

物 AP 经透镜 L 成的像为第一像,取  $u_1 = 2f$ ,由成像公式可得像距  $v_1 = 2f$ ,即像在平面镜后距离  $2f$  处,像的大小  $h'$  与原物相同,  $h' = h$ .

第一像作为物经反射镜 M 成的像为第二像.第一像在反射镜 M 后  $2f$  处.对 M 来说是虚物,成实像于 M 前  $2f$  处.像的大小  $h''$  也与原物相同,  $h'' = h' = h$ .

第二像作为物,再经透镜 L 而成的像为第三像.这时因为光线由 L 右方入射.且物(第二像)位于 L 左方,故为虚物,取物距  $u_3 = -2f$ ,由透镜公式  $\frac{1}{u_3} + \frac{1}{v_3} = \frac{1}{f}$  可得像距

$$v_3 = \frac{fu_3}{u_3 - f} = \frac{2}{3}f > 0$$

上述结果表明,第三像,即本题所求的像的位置在透镜左方距离  $\frac{2}{3}f$  处,像的大小  $h'''$

可由  $\frac{h'''}{h''} = \left| \frac{v_3}{u_3} \right| = \frac{1}{3}$  求得,即

$$h''' = \frac{1}{3}h'' = \frac{1}{3}h$$

像高为物高的 $\frac{1}{3}$ .

在讨论本题中平面镀银的平凸薄透镜成像问题时,可以把它看作两个平凸透镜合在一起,形成一个双凸透镜,然后研究物体经过此双凸透镜后成像的情况,这个像在平面镜中的镜面对称像就是物体由镀银平凸透镜折射、反射、折射后形成的像.如果原来平凸透镜的焦距为 $f$ ,则双凸透镜的焦距为 $\frac{1}{2}f$ ,可证明如下:图7-26为两个相互密接的焦距均为 $f$ 的透镜组成的透镜组.平行于主光轴的光线经 $L_1$ 折射后将会聚于主光轴上 $F_1$ 处, $F_1$ 与 $L_1$ 的距离为 $f$ .忽略 $L_1$ 、 $L_2$ 之间的距离, $F_1$ 与 $L_2$ 之间的距离也是 $f$ , $F_1$ 对 $L_2$ 来说是虚像,它经 $L_2$ 后所成的像 $F$ 与 $L_2$ 的距离 $v$ 可由下式求出:

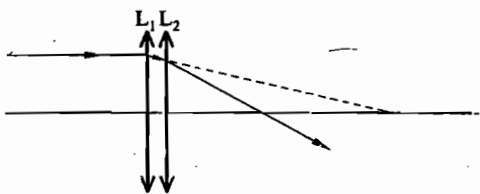


图 7-26

$$-\frac{1}{f} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$$

由此可得

$$v = \frac{f}{2}$$

也就是说,透镜组的焦点与透镜组中心的距离,也就是透镜组的焦距是

$$f' = \frac{f}{2}$$

要注意的是,这里透镜是相互密接的,否则透镜组的焦距不是 $f/2$ .

11. 一束平行光沿薄平凸透镜的主光轴入射,经透镜折射后,会聚于透镜后 $f=48\text{ cm}$ 处,透镜的折射率 $n=1.5$ .若将此透镜的凸面镀银,物置于平面前 $12\text{ cm}$ 处,求最后所成像的位置.

### 解析

1) 先求凸球面的曲率半径 $R$ .平行于主光轴的光线与平面垂直,不发生折射,它在球面上发生折射,交主光轴于 $F$ 点,如图7-27所示, $C$ 点为球面的球心, $\overline{CO}=R$ ,由正弦定理可得

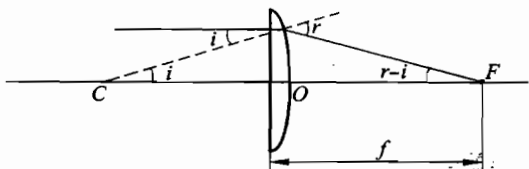


图 7-27

$$\frac{R+f}{R} = \frac{\sin r}{\sin(r-i)} \quad (1)$$

由折射定律知

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{1}{n} \quad (2)$$

当  $i, r$  很小时,  $\sin r \approx r, \sin(r-i) \approx r-i, \sin i \approx i$ , 由以上两式得

$$1 + \frac{f}{R} = \frac{r}{r-i} = \frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1} \quad (3)$$

所以

$$R = (n-1)f \quad (4)$$

2) 凸面镀银后将成半径为  $R$  的凹面镜, 如图 7-28 所示.

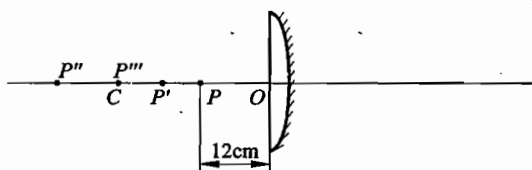


图 7-28

令  $P$  表示物所在位置,  $P$  点经平面折射成像于  $P'$ , 根据视深公式可知

$$\overline{P'O} = n \overline{PO} \quad (5)$$

由于这是一个薄透镜,  $P'$  与凹面镜的距离可认为等于  $\overline{P'O}$ , 设反射后成像于  $P''$ , 则由球面镜成像公式可得

$$\frac{1}{\overline{P''O}} + \frac{1}{\overline{P'O}} = \frac{2}{R} \quad (6)$$

因此可解得  $\overline{P''O} = 36$  cm, 可知  $P''$  位于平面的左方. 对平面折射来说,  $P''$  是一个虚物, 经平面折射后, 成实像于  $P'''$  点.

$$\frac{\overline{P''O}}{\overline{P'''O}} = \frac{1}{n} \quad (7)$$

所以  $\overline{P''O} = 24 \text{ cm}$  (8)  
最后所成实像在透镜左方 24 cm 处.

12. 在很高的圆柱形容器的上口平放一个焦距为 90 mm 的凸透镜. 在透镜下方中轴线上距透镜 100 mm 处平放一个圆面形光源(如图 7-29 所示).

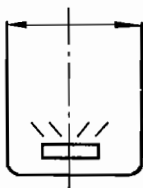


图 7-29

1) 光源产生一个半径为  $b=45 \text{ mm}$  的实像, 求此实像的位置和光源的半径  $a$ .

2) 若往容器中注水, 水的折射率  $n_k = \frac{4}{3}$ , 水面高于光源 10 mm, 求此时像的位置.

3) 继续注水, 注满容器但又恰好不碰上透镜, 求此时像的大小.

### 解析

由题意可知, 原来物距大于焦距, 所以必在透镜上方成实像, 且可求得实像的位置. 又因为已知此实像的大小, 所以可求出光源的大小, 当往容器中注水, 由于水的折射率大于空气的折射率, 由视深公式可知, 等效物点向上移了, 也就是等效物距减小了, 减小到多少与水深有关. 算出等效物距就可算出第 2) 问中的像距. 当注入的水足够多, 使得等效物距变成小于透镜焦距后, 将在透镜下方成虚像, 根据给定的数据可求得虚像位置. 因为光源的大小已求出, 所以也可求出虚像的大小.

1) 设  $u, v, f$  分别为物距、像距和焦距, 由成像公式  $1/u + 1/v = 1/f$ , 得

$$v = \frac{uf}{(u-f)}$$

代入  $u=100 \text{ mm}, f=90 \text{ mm}$ , 得

$$v = 900 \text{ mm}$$

即此实像在透镜上方 900 mm 处.

从放大率公式可求得  $a$  的数值.

$$a = \frac{ub}{v} = 5 \text{ mm}$$

2) 注进水后, 当水面高于光源  $h$  时, 由于水面的折射作用, 使光源等效于上浮一段距离, 等效光源在距水面  $h'$  处. 设  $i, r$  分别为入射角和折射角, 则  $h'/h = \cot r / \cot i$  (图 7-30). 对傍轴光线

$$\frac{h'}{h} = \frac{\tan i}{\tan r} \approx \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{1}{n_k} = \frac{3}{4}$$

从上式可看出,  $h'$  与  $h$  的比值与  $i$  无关. 这表示所有傍轴光线的折射线的反向延长线都交于一点, 该点即为物点的像. 它与折射平面的距离为

$$h' = \frac{h}{n} = \frac{3}{4}h$$

对于与水面平行的物体来说,每一个物点的像都在该物点的正上方,所有像点的高度都一样,所以像的大小及形状都与物体相同,只是位置有所变动.原来物体与透镜的距离为  $u$ .注水后,对透镜来说,物距变为  $u'$ ,

$$u' = u - h + h' = u - \frac{h}{4}$$

于是像距变为

$$v' = \frac{u'f}{u' - f} = \frac{u - \frac{1}{4}h}{u - \frac{1}{4}h - f}$$

以  $h=10\text{ mm}$ ,  $u=100\text{ mm}$  代入,得

$$v' = 1170\text{ mm}$$

即最后所成实像在透镜上方 1170 mm 处.

3) 当水注满又恰好不碰上透镜时,仍可使用上面的公式,但此时  $h=100\text{ mm}$ ,物距  $u'$  变为  $u'' = u - \frac{h}{4} = 75\text{ mm}$ ,  $u''$  已小于透镜的焦距.故经透镜后将形成位于透镜下方的虚像.

因经水面折射后所成像的半径仍为  $a$ ,由透镜放大率公式可知,经透镜后所成虚像的半径(用  $b''$  表示)为

$$b'' = a \left| \frac{v''}{u''} \right| = \frac{af}{|u'' - f|} = 30\text{ mm}$$

此时所成像是个半径为 30 mm 的正立虚像,位于透镜的下方.

此题中“恰好不碰上透镜”这个条件非常重要.如果水与透镜表面完全接触,则光从水直接经过球面上的折射进入透镜而不是现在的“从水经平面折射进入空气,然后由空气经球面折射进入透镜”.成像情况完全不同了.也可以换一个角度分析,如果水与透镜表面从“恰好不碰上透镜”变为“完全接触”等于增加了一个水透镜.如果透镜表面为凸球面,增加的水透镜是平凹透镜;如果透镜表面为凹球面,增加的水透镜是平凸透镜.如果原来透镜的表面是平面,则“恰不碰上”与“完全接触”没有差别了,因为极薄的平行平面空气层或水层对光线的传播都没有影响.

此题也可直接采用视深公式处理.如果学生没有学过视深公式,则可以采取上面的方法,用折射定律和傍轴条件进行处理,实际上就是进行了视深公式的推导.

13. 有一薄平凸透镜,凸球面半径  $R=30\text{ cm}$ . 已知在利用傍轴光线成像时:  
(A) 若将此透镜的平面镀银,其作用等同于一个焦距是 30 cm 的凹面镜; (B) 若将此透镜

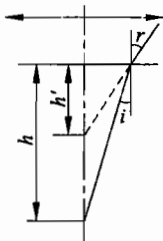


图 7-30

的凸面镀银,其作用也等同于一个凹面镜.求在(B)情况下的等效凹面镜的焦距.

### 解析

1) 利用(A)情况下已知的条件可求出透镜材料的折射率  $n$ .

在(A)的情况下,透镜的情况如图 7-31 所示.为便于作图,图中透镜的厚度被夸大了.凹面镜有三个位于主光轴上的决定其光学特性的点:球心  $C$ ,焦点  $F$  和顶点  $A$ , $C$ 、 $F$  之间和  $F$ 、 $A$  之间的距离都等于其焦距  $f$ .此三点的特性是:入射线平行于主光轴时,出射线通过  $F$ ;入射线通过  $C$  时,出射线循原路返回,再次通过  $C$ ;入射线射向  $A$  点时,出射线也通过  $A$  点,二者分列主光轴两侧且相互对称.下面就根据这些特性求解.

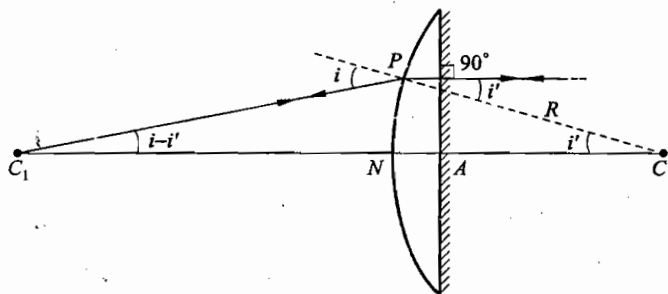


图 7-31

设  $C_1$  为等效凹面镜的球心,则由  $C_1$  射向透镜的光线  $C_1P$ ,经球面折射后一定垂直于平面镜,才能原路返回.光路如图 7-31 所示.令  $i$ 、 $i'$  分别表示球面折射时的入射角和折射角,对  $\triangle C_1PC$  由几何关系和正弦定理得

$$\frac{\overline{CC_1}}{\sin i} = \frac{R}{\sin(i-i')}$$

由折射定律,得

$$\sin i = n \sin i'$$

在傍轴条件下,  $\sin i \approx i$ ,  $\sin(i-i') \approx i-i'$ ,  $i = ni'$ , 因而得

$$\overline{CC_1} = \frac{Ri}{i-i'} = \frac{n}{n-1}R$$

$$\overline{C_1N} = \overline{CC_1} - R = \frac{1}{n-1}R \quad (1)$$

透镜很薄时,  $N$ 、 $A$  近似重合,在主光轴附近,薄透镜近似于一平面镜,射向  $N(A)$  点的光线的入射角就是它与主光轴的夹角,入射线和反射线对主光轴是对称的,所以  $N(A)$  就是等效凹面镜的顶点,用  $f$  表示等效凹面镜的焦距,则有

$$\overline{C_1N} = 2f \quad (2)$$

已知  $R=30 \text{ cm}$ ,  $f=30 \text{ cm}$ ,代入(1)、(2)式可求得

$$n = 1.5 \quad (3)$$

2) 在(B)的情况下,透镜的情况如图 7-32 所示,  $c$  为镀银球面的球心. 和前面的情况类似  $N$ (或  $A$ ) 应为等效凹面镜的顶点. 只要找到  $F$  就可求得其焦距  $f'$ .

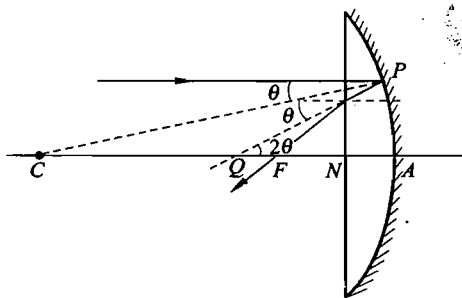


图 7-32

作一平行于主光轴的人射线,它将直接射到镀银的球面上,在  $P$  点发生反射,与主光轴交  $Q$  点,在  $\triangle CPQ$  中,由正弦定律得

$$\frac{\overline{CQ}}{\sin \theta} = \frac{R}{\sin 2\theta}$$

在傍轴条件下,采取近似得

$$\overline{CQ} = \frac{1}{2}R \quad (4)$$

射向  $Q$  的光线经平面折射又会聚到主光轴上的  $F$  点,  $F$  就是等效凹面镜的焦点.  $Q$  和  $F$ , 对平面折射来说,是物和像的关系,由视深公式可得

$$\overline{FN} = \frac{1}{n} \overline{QN} = \frac{1}{n} (\overline{CN} - \overline{CQ})$$

忽略透镜的厚度,  $\overline{CN} = \overline{CA} = R$ , 故有

$$\overline{FN} = \frac{R}{2n}$$

以  $R=30 \text{ cm}$ ,  $n=1.5$  代入,得到等效凹面镜的焦距

$$f = \overline{FN} = 10 \text{ cm}$$

14. 一个焦距为  $f$  的会聚透镜,在其左侧的主光轴上离透镜  $2f$  处有一小光源,在右侧屏上观察到此光源的清晰的像. 现在光源与透镜的位置保持不变而在光路中插入一厚度为  $d$  ( $d < f$ ) 的玻璃平板(平板与光轴垂直),若还要在屏上得到光源清晰的像,则当玻璃板放在光源与透镜之间时,屏应向\_\_\_\_\_移动;当玻璃板放在透镜与屏之间时,屏应向\_\_\_\_\_移动.

**解析**

右;右.

在题给光路中插入厚玻璃平板前,屏的位置在透镜右侧离透镜  $2f$  处.

当厚玻璃板放在光源与透镜之间时,玻璃板折射光线的作用(图 7-33)相当于把光源  $S$  向透镜移近到  $S_1$ .  $\overline{SS_1} = d\left(1 - \frac{1}{n}\right)$  (参阅本书第 96 页第 6 题)在玻璃板厚度  $d < f$  的条件下,移近的距离也小于  $f$ ,  $S_1$  在透镜左方焦点之外,故在透镜右侧仍能形成光源的实像,但像距增大,屏应向右移动才可接收到光源的清晰的像.

当厚玻璃板放在透镜与屏之间时,由于厚玻璃板折射光线的作用,透镜右方光线的会聚点  $S'$  将向右移到  $S'_1$  (图 7-34),故屏也应向右移.

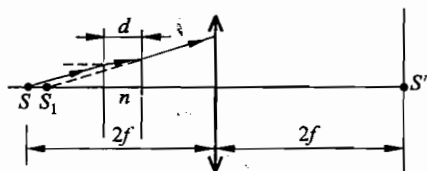


图 7-33

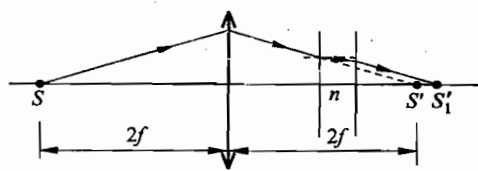


图 7-34

15. 照相机镜头  $L$  前  $2.28\text{ m}$  处的物体被清晰地成像在镜头后面  $12.00\text{ cm}$  处的照相胶片  $P$  上. 今将一折射率为  $1.50$ 、厚  $AB=0.90\text{ cm}$ 、两面平行的玻璃平板插入镜头与胶片之间,与光轴垂直,位置如图 7-35 所示. 设照相机镜头可看做一个简单薄凸透镜,光线为傍轴光线.

1) 求插入玻璃板后,像的新位置.

2) 如果保持镜头、玻璃板、胶片三者间距离不变,并要求物体仍然清晰地成像于胶片上,则物体应放在何处?

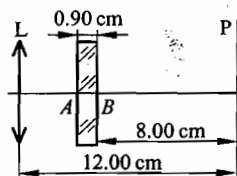


图 7-35

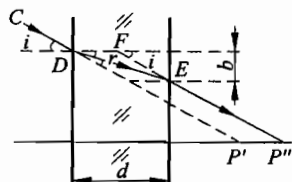


图 7-36



**解析**

1) 折射率为  $n$ , 厚度为  $d$  的两面平行的玻璃板, 对于会聚在像点  $P'$  的傍轴光束的折射作用可如下求出: 如图 7-36, 取任一指向  $P'$  点的傍轴光线  $CP'$ , 此光线经平行玻璃板折射的光路为  $CDEP''$ , 在平板第一面的入射角  $i$  与折射角  $r$  均为小角度. 反向延长  $EP''$  交  $D$  点处的法线于  $F$ . 容易看出  $DFP''P'$  为平行四边形.

$$\overline{P'P''} = \overline{DF} = \frac{b}{\tan r} - \frac{b}{\tan i}$$

平行板厚度  $d$  为:  $d = b / \tan r$ , 故

$$\overline{P'P''} = d \left( 1 - \frac{\tan r}{\tan i} \right)$$

因为  $i$  与  $r$  都很小, 所以

$$\frac{\tan r}{\tan i} \approx \frac{\sin r}{\sin i} \approx \frac{1}{n}$$

$$\overline{P'P''} = d \left( 1 - \frac{1}{n} \right)$$

由上式可知,  $\overline{P'P''}$  与  $i$  无关, 这表明此式对任何会聚于  $P'$  点的傍轴光线均成立,  $P''$  是  $P'$  经平行板折射后所成的像. 同时,  $\overline{P'P''}$  与  $P'$  到平行板的距离无关, 所以任何位于平行板右方的像点, 由于平行板上的折射, 都沿平行板法线方向向右平移了一段距离  $s = d \left( 1 - \frac{1}{n} \right)$ . 本题中  $d = 0.90 \text{ cm}$ ,  $n = 1.50$ , 故有

$$s = 0.90 \left( 1 - \frac{1}{1.50} \right) = 0.30 \text{ cm}$$

即最后所成像  $P''$  不在胶片上而在胶片后面  $0.30 \text{ cm}$  处.

2) 如果保持镜头、玻璃板、胶片三者间距离不变, 要使  $P''$  落在胶片上, 则物体经透镜折射后所成的像  $P'$  必须前移  $0.30 \text{ cm}$ , 即  $P'$  与透镜的距离应为

$$v = 11.70 \text{ cm}$$

设照相机镜头焦距为  $f$ , 物距为  $u$ , 像距为  $v$ , 透镜成像公式为

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$$

不放平行板时,

$$\frac{1}{228 \text{ cm}} + \frac{1}{12.00 \text{ cm}} = \frac{1}{f}$$

设放平行板后, 物距为  $x$  时最后所成像落在胶片上, 则有

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{11.70 \text{ cm}} = \frac{1}{f}$$

由此可解得

$$x = 4.45 \text{ m}$$

本题可直接引用视深公式求出  $P'$  的位置. 如果学生没有学过视深公式, 只要知道折射定律就可照上述方法求解. 本题解前一部分就是视深公式的推导. 本题中的  $P'$  的位置在平行板的右方, 如果  $P'$  的位置在平行板的左方或在平行板中,  $P'$  仍在  $P'$  之右  $(1 - \frac{1}{n})d$  处, 读者可自行验证.

16. 在焦距为 20.00 cm 的薄凸透镜的主光轴上离透镜中心 30.00 cm 处有一小发光点 S, 一个厚度可以忽略的光楔 C (顶角  $\alpha$  很小的三棱镜) 放在发光点与透镜之间, 垂直于主光轴, 与透镜的距离为 2.00 cm, 如图 7-37 所示, 设光楔的折射率  $n = 1.5$ , 楔角  $\alpha = 0.028 \text{ rad}$ . 在透镜另一侧离透镜中心 46.25 cm 处放一平面镜 M, 其反射面向着透镜并垂直于主光轴. 问最后形成的发光点的像相对发光点的位置在何处 (只讨论傍轴光线, 小角度近似适用. 在分析计算过程中应作出必要的光路图).

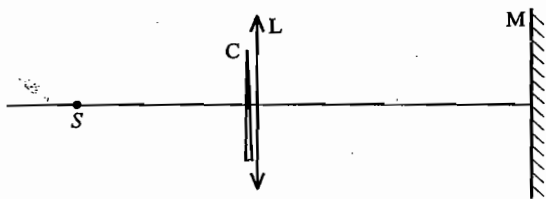


图 7-37

### 解析

共有 5 次成像过程.

1) 光楔使入射光线偏折, 其偏向角 (出射光线与入射光线方向的夹角) 用  $\delta$  表示. 由图 7-38 可知

$$\sin i_1 = n \sin i'_1, \quad n \sin i_2 = \sin i'_2, \quad i'_1 + i_2 = \alpha$$

对傍轴光线,  $i_1$  很小, 有  $i_1 = n i'_1$ , 因此  $i'_1$  很小. 已知  $\alpha$  也很小, 所以  $i_2$  很小, 同样有  $i'_2 = n i_2$ . 故有

$$\delta = (i_1 - i'_1) + (i'_2 - i_2) = i_1 + i'_2 - \alpha = (n - 1)\alpha \quad (1)$$

代入数值, 得

$$\delta = (1.5 - 1) \times 0.028 \text{ rad} = 0.014 \text{ rad}$$

因  $\delta$  与入射角大小无关, 由傍轴光线组成的细光束整体偏折同样角度  $\delta$ ; 因光楔厚度可忽略, 由于平面折射而产生的像点与平面的距离的变化也可忽略不计. 做光路图时将薄光楔画成一使光线产生偏折角  $\delta$  的薄平板. 见图 7-39.

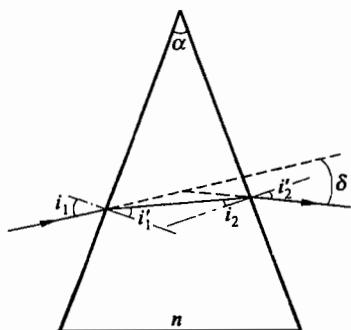


图 7-38

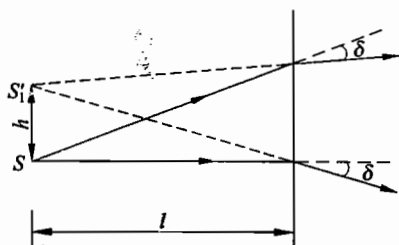


图 7-39

光点  $S$  经光楔成一虚像点  $S_1'$ 。对傍轴光线,  $S_1'$  几乎在  $S$  正上方, 到  $S$  的距离为  $h$ , 离光楔距离  $l=28.00\text{ cm}$ ,

$$h = \delta l = (n-1)\alpha l \quad (2)$$

代入数据, 得

$$h = 0.39\text{ cm} \quad (3)$$

2)  $S_1'$  为透镜  $L$  的实物, 像点  $S_2'$  的位置可由下式求出

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f} \quad (4)$$

以  $u=30.00\text{ cm}$ ,  $f=20.00\text{ cm}$  代入, 得

$$v = 60.00\text{ cm} \quad (5)$$

将  $SS_1'$  视为与主光轴垂直的小物, 由透镜的放大率公式

$$m_1 = \frac{v}{u} \quad (6)$$

可求得  $S_2'$  与主光轴的距离

$$h'_2 = m_1 h = 0.78\text{ cm} \quad (7)$$

即像点  $S_2'$  在主光轴下方与主光轴的距离为  $0.78\text{ cm}$ , 与透镜中心的距离为  $60.00\text{ cm}$  处。见图 7-40。

3)  $S_2'$  在平面镜之后, 对平面镜是虚物, 经平面镜成实像, 像点  $S_3'$  与  $S_2'$  对称于平面镜 (见图 7-40)。

$$d = 13.75\text{ cm} \quad (8)$$

$$h'_3 = h'_2 = 0.78\text{ cm} \quad (9)$$

4)  $S_3'$  作为透镜的实物, 经透镜折射后再次成像, 设像点为  $S_2''$ ,  $S_2''$  及  $S_3'$  与  $L$  的距离分别为  $v'$  和  $u'$ , 则

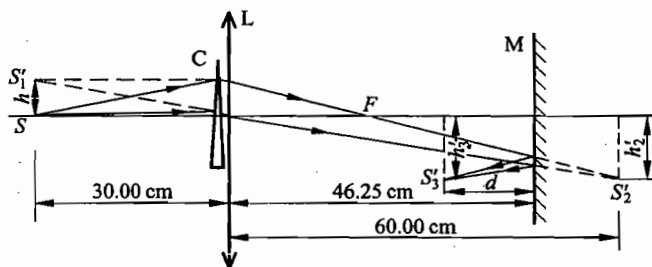


图 7-40

$$u' = 32.50 \text{ cm}, \quad v' = \frac{fu'}{u' - f} = 52.00 \text{ cm} \quad (10)$$

$S_2''$ 在透镜左侧,主光轴上方,见图 7-41.

$$h_2'' = \frac{v'}{u'} h_2 = 1.25 \text{ cm} \quad (11)$$

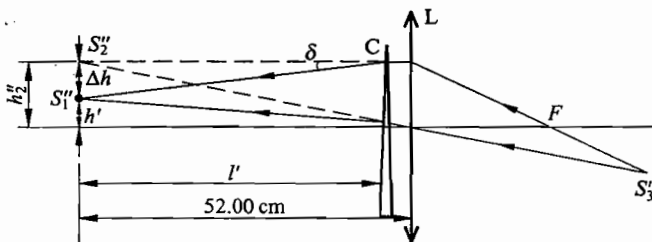


图 7-41

5) 第二次经透镜折射后成像的光线还要经光楔折射,发生偏折,成像于  $S_1''$ .  $S_1''$ 在  $S_2''$ 的正下方,离光楔距离为  $l' = 50 \text{ cm}$ ,

$$S_1'' S_2'' = \delta l' = 0.70 \text{ cm} \quad (12)$$

$S_1''$ 离透镜主光轴的距离为  $h'$ (见图 7-41).

$$h' = h_2'' - \Delta h = 0.55 \text{ cm} \quad (13)$$

像点  $S_1''$ 在透镜主光轴上的垂足与  $S$  的距离为

$$\Delta s = l' - l = 22.00 \text{ cm} \quad (14)$$

即最后的像点  $S_1''$ 在发光点  $S$  的左侧上方,到透镜主光轴的距离为  $0.55 \text{ cm}$ ,其在透镜主光轴上的垂足到  $S$  的距离为  $22.00 \text{ cm}$ .

17. 图 7-42 中  $L$  为凸透镜,焦距  $f = 30\sqrt{3} \text{ cm}$ . 有一单色平行光束,其方向与透镜的主光轴平行. 现于透镜前方放一正三棱镜,如图 7-42 所示. 缓缓转动三棱镜,当入射光的

入射角和出射光的出射角相等时,在透镜的焦面上距焦点  $y=30\text{ cm}$  处形成一像点.据此求三棱镜材料对此单色光的折射率  $n$  之值.

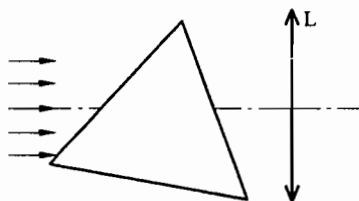


图 7-42

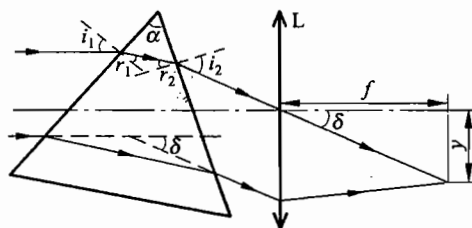


图 7-43

### 解析

如图 7-43 所示,选择入射平行光中经过棱镜折射后通过透镜光心的光线作图,该光线与焦平面的交点就是像点.由折射定律知

$$\sin i_1 / \sin r_1 = n,$$

$$\sin i_2 / \sin r_2 = n$$

已知  $i_1 = i_2$ , 故有  $r_1 = r_2$ , 由几何关系可知  $r_1 + r_2 = \alpha = 60^\circ$

所以

$$r_1 = r_2 = 30^\circ$$

由几何关系可知,光线经三棱镜折射后,其光线与原方向偏折角度是

$$\delta = i_1 + i_2 - (r_1 + r_2) = i_1 + i_2 - \alpha = 2i_1 - 60^\circ$$

由几何关系得

$$\tan \delta = \frac{y}{f} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \delta = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30^\circ$$

所以

$$2i_1 = 90^\circ, \quad i_1 = 45^\circ$$

得到

$$n = \frac{\sin i_1}{\sin r_1} = \sqrt{2} \approx 1.414$$

入射线与出射线的夹角(称为偏向角) $\delta$ ,当  $i_1 = i_2$  时达极小值,称为最小偏向角,用  $\delta_{\min}$  表示.此时,即使三棱镜有微小的转动,出射线方向基本不变,因此  $\delta_{\min}$  的数值可测得比较准确.由  $\delta_{\min}$  和顶角  $\alpha$  的值可按下式计算出棱镜的折射率:

$$n = \frac{\sin \frac{\delta_{\min} + \alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

由此得出  $n$  值精确度较高.不过  $\delta_{\min}$  必须用分光计上的望远镜分别对准入射线和出射线测出,不是测  $y$  的数值,后者的测量精确度太低.

18. 图 7-44 中,三棱镜的顶角  $\alpha$  为  $60^\circ$ ,在三棱镜两侧对称位置上放置焦距均为  $f=30.0\text{ cm}$  的两个完全相同的凸透镜  $L_1$  和  $L_2$ . 若在  $L_1$  的前焦面上距主光轴下方  $y=14.3\text{ cm}$  处放一单色点光源  $S$ , 已知其像  $S'$  和  $S$  对该光学系统是左右对称的. 试求该三棱镜的折射率.

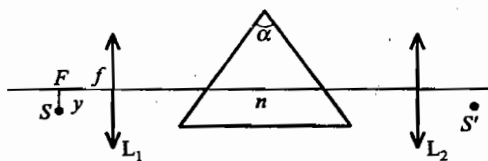


图 7-44

### 解析

由于光学系统是左右对称的,物、像又是左右对称的,光路一定是左右对称的,该光线在棱镜中的部分一定与光轴平行.由  $S$  射向  $L_1$  光心的光线的光路图如图 7-45 所示. 由对称性可知:

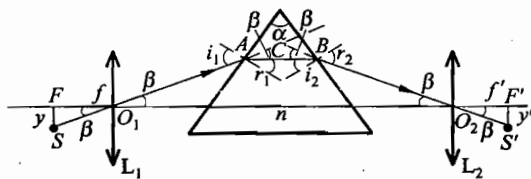


图 7-45

$$i_1 = r_2 \quad (1)$$

$$i_2 = r_1 \quad (2)$$

由几何关系得

$$r_1 + i_2 = \alpha = 60^\circ \quad (3)$$

由图可见

$$i_1 = \beta + r_1 \quad (4)$$

又从  $\triangle FSO_1$  的边角关系得

$$\tan \beta = \frac{y}{f} \quad (5)$$

代入数值得

$$\beta = \arctan\left(\frac{14.3}{30.0}\right) = 25.49^\circ \quad (6)$$

由(2)、(3)、(4)与(6)式得  $r_1 = 30^\circ, i_1 = 55.49^\circ$

根据折射定律,求得

$$n = \frac{\sin i_1}{\sin r_1} = 1.65 \quad (7)$$

19. 两个光学元件共轴放置,位置固定不动,每个光学元件都可能是薄透镜或平面反射镜.一小物垂直于主光轴.已知当小物位于两元件之间的任何位置时,由此光学系统成的像是有限多个,且两个最后的像大小相同.试通过对各种可能情况的分析,论证什么样的光学系统能满足上面的要求,什么样的光学系统不能满足上面的要求.

### 解析

分别考虑以下各种情况:

1) 两平面反射镜,相向放置.这情形,对于两平面反射镜之间的实物,系统能成无限多个像,不符合题意.

2) 焦距为  $f$  的薄透镜 L 和平面反射镜 M 如图 7-46 放置.

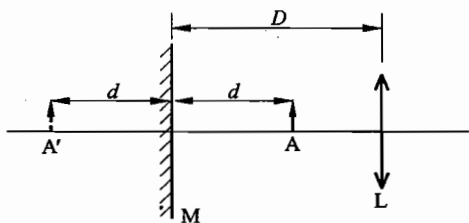


图 7-46

由物 A 发出的向右光线经 L 成的像,由成像公式  $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$  可得光学系统所成的第一个最后像的位置  $v_1$ :

$$u_1 = D - d, \quad v_1 = \frac{(D - d)f}{D - d - f}$$

式中  $v_1$  表示从 L 向右的距离(如果  $v_1 > 0$ , 表示像在 L 的右方).

由物 A 发出的向左光线先经反射镜 M 成像在  $A'$ , 反射光线再向右经 L 成像, 这就是光学系统所成的第二个最后像, 设它在 L 右方距 L  $v_2$  处. 由透镜公式可求得:

$$u_2 = D + d, \quad v_2 = \frac{(D + d)f}{D + d - f}$$

两个像的放大率分别为  $\frac{v_1}{u_1}$  和  $\frac{v_2}{u_2}$ , 按题给条件, 两像大小相等, 应有

$$\frac{v_1}{u_1} = \pm \frac{v_2}{u_2}$$

即

$$D - d - f = \pm (D + d - f) \quad (1)$$

若(1)式中取(+)号, 则  $2d=0$ , 即  $d=0, u_1=D$ . 这要求物处于一特殊位置, 不能满足题目要求.

若(1)式中取(-)号, 则  $D-d-f=-D-d+f$ , 即  $2D=2f, D=f$ , 此式表明, 两元件间距离等于透镜焦距. 两个元件之间的距离  $D$  一定大于0, 故满足要求的透镜的焦距  $f$  也应大于0, 即此透镜必须是凸透镜. 此结果与  $d$  的取值无关. 因此, 两个元件为一个薄凸透镜, 一个平面反射镜, 两者距离等于透镜焦距, 则不论物放在何处, 两个最后像的大小都相等.

3) 焦距分别为  $f_1$  和  $f_2$  的两个薄透镜  $L_1$  和  $L_2$ , 如图 7-47 所示. 由物 A 发出的向右光线经  $L_1$  成第一个最后像

$$v_1 = \frac{u_1 f_1}{u_1 - f_1}$$

式中  $v_1$  表示从  $L_1$  向右的距离 ( $v_1 > 0$  表示像在  $L_1$  的右方).

由物 A 发出的向左光线经  $L_2$  成第二个最后像

$$v_2 = D' - u_1, \quad v_2 = \frac{(D' - u_1) f_2}{D' - u_1 - f_2}$$

$v_2$  表示从  $L_2$  向左的距离 ( $v_2 < 0$  时表示像在  $L_2$  右方). 两个像大小相等, 则应有

$$\frac{v_1}{u_1} = \pm \frac{v_2}{u_2}$$

$$\frac{f_1}{u_1 - f_1} = \pm \frac{f_2}{D' - u_1 - f_2} \quad (2)$$

若(2)式中取(+)号

$$f_1(D' - u_1 - f_2) = f_2(u_1 - f_1)$$

$$f_1(D' - u_1) = f_2 u_1$$

$$D' = \frac{f_1 + f_2}{f_1} u_1$$

这表示  $u_1$  必须满足上式才能得到两个等大的像, 与题目要求不一致, 即这种组合与配置不符合要求.

若(2)式中取(-)号

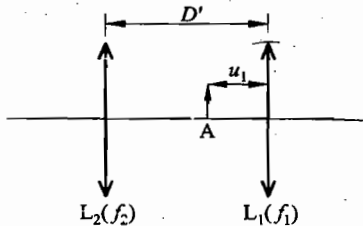


图 7-47



$$\frac{f_1}{u_1 - f_1} = -\frac{f_2}{D' - u_1 - f_2}$$

$$f_1(D' - u_1 - f_2) = -f_2(u_1 - f_1)$$

$$f_1 D' = (f_1 - f_2)u_1 + 2f_1 f_2$$

$$D' = \frac{f_1 - f_2}{f_1} u_1 + 2f_2$$

按题意,上式应对所有的  $u_1$  值均成立,故要求  $f_1 = f_2$ ,从而  $D' = 2f_2 = 2f_1$ ,且由  $D' > 0$  可知

$$f_1 = f_2 > 0$$

透镜应为凸透镜.因此,两个元件也可以是两个焦距相等的薄凸透镜,两者距离等于其焦距的 2 倍时,物放在两元件间任何位置,均能满足两个最后像的大小都相等的要求.

20. 显微镜物镜组中常配有一如图 7-48 所示的透镜,它的表面是球面,左表面  $S_1$  的球心为  $C_1$ 、半径为  $R_1$ ,右表面  $S_2$  的球心为  $C_2$ 、半径为  $R_2$ ,透镜玻璃对于空气的折射率为  $n$ ,两球心间的距离  $\overline{C_1 C_2} = \frac{R_2}{n}$ .

在使用时被观察的物体位于  $C_1$  处.试证明:

从物体射向此透镜的光束,经透镜折射后,所有出射光线均相交于一点  $Q$ ,且  $\overline{QC_2} = nR_2$ .

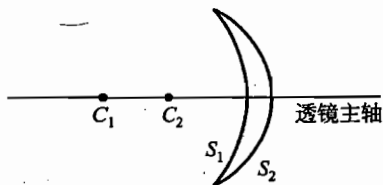


图 7-48

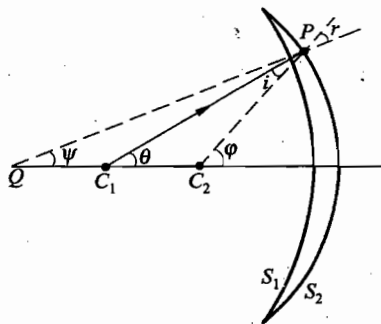


图 7-49

### 解析

从位于  $C_1$  处的物发出的光线射向透镜后将遇到两个折射面  $S_1$  和  $S_2$ . 由于  $C_1$  为  $S_1$  的球心,从  $C_1$  射向  $S_1$  的所有光线将无折射地通过  $S_1$ ,直接射向  $S_2$ . 现在考虑  $S_2$  面上的折射. 任选一条与主光轴夹角为  $\theta$  的入射线  $C_1 P$ , 设其入射角为  $i$ , 折射角为  $r$ , 如图 7-49 所示, 根据折射定律有

$$n \sin i = \sin r \quad (1)$$

在 $\triangle C_1 P C_2$ 中应用正弦定理,可得

$$\overline{C_2 P} / \sin \theta = \overline{C_1 C_2} / \sin i$$

已知 $\overline{C_2 P} = R_2$ ,  $\overline{C_1 C_2} = R_2 / n$ , 代入上式,得

$$\frac{R_2}{\sin \theta} = \frac{R_2}{n \sin i}$$

即

$$n \sin i = \sin \theta \quad (2)$$

比较式(1)和(2)式,得

$$r = \theta$$

设 $\overline{C_2 P}$ 与主光轴夹角为 $\varphi$ ,则有

$$\varphi = \theta + i = r + i \quad (3)$$

由式(3)可知,  $i \neq 0$  时,  $r < \varphi$ . 所以折射光线的延长线将与主轴相交, 设交点为  $Q$ , 并令  $\angle P Q C_2 = \psi$ . 则有

$$\psi = \varphi - \angle Q P C_2 = \varphi - r = i$$

在 $\triangle P Q C_2$ 中应用正弦定理,可得

$$\frac{\overline{Q C_2}}{\sin r} = \frac{\overline{C_2 P}}{\sin \psi}$$

从而求得

$$\overline{Q C_2} = \frac{\overline{C_2 P} \sin r}{\sin \psi} = n R_2$$

因为我们所选的入射光线是任意的, 而所求得的 $\overline{Q C_2}$ 的值与人射角 $\theta$ 无关, 这说明所有入射到 $S_2$ 上的光线的折射线都交于一点 $Q$ , 它与 $C_2$ 的距离为 $n R_2$ .

本题粗看起来是一道薄透镜的题, 实际上不是薄透镜, 透镜的厚度 $d = (1 + \frac{1}{n}) R_2 - R_1$ 不一定很小. 套用透镜成像公式也不能解答本题, 透镜成像公式只适用于傍轴光线成像, 而本题要求全部入射光线,  $\theta$ 角可能很大, 经过两个球面后的出射线都交于一点. 因此只能任选一条与主光轴夹角为 $\theta$ 的入射光线, 利用折射定律和三角公式计算出射线与透镜主光轴的交点, 然后检查一下此交点是否与 $\theta$ 有关, 就可作出结论.

21. 两个薄透镜  $L_1$  和  $L_2$  共轴放置, 如图 7-50 所示. 已知  $L_1$  的焦距  $f_1 = f$ ,  $L_2$  的焦距  $f_2 = -f$ , 两透镜间距离也是  $f$ . 小物体位于物面  $P$  上, 物距  $u_1 = 3f$ .

1) 小物体经这两个透镜所成的像在  $L_2$  的 \_\_\_\_\_ 边, 到  $L_2$  的距离为 \_\_\_\_\_, 是 \_\_\_\_\_ 像 (虚或实)、

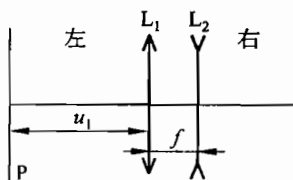


图 7-50

\_\_\_\_\_像(正或倒),放大率为\_\_\_\_\_.

2) 现在把两透镜位置调换,若还要使给定的原物体在原像处成像,两透镜作为整体应沿光轴向\_\_\_\_\_边移动距离\_\_\_\_\_. 这个新的像是\_\_\_\_\_像(虚或实)、\_\_\_\_\_像(正或倒),放大率为\_\_\_\_\_.

### 解析

1) 右; $f$ ;实;倒;1.

2) 左; $2f$ ;实;倒;1.

1) 通过作图法(见图 7-51),即可得出上面的答案.

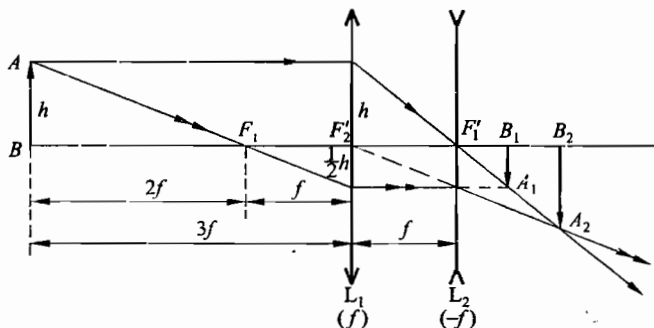


图 7-51

2) 物、像位置保持不变,凸透镜与凹透镜位置对调则只要物距(即物体离开凹透镜的距离)等于 $f$ ,像距等于 $3f$ ,就可以达到要求,故位置对调后的透镜组应向左移动 $2f$ . 成像情况如图 7-52 所示.

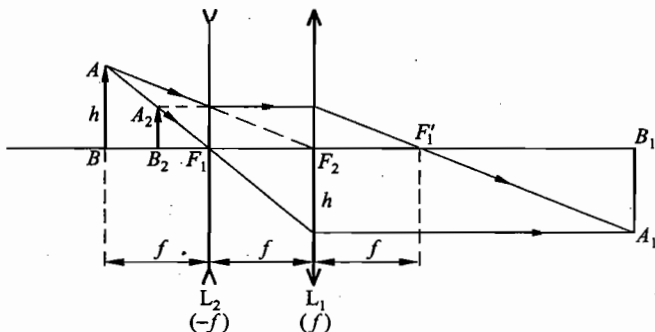


图 7-52

此题也可利用透镜的成像公式和放大率公式得出所需结果.

$$\text{成像公式} \quad \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f} \quad (1)$$

$$\text{放大率公式} \quad m = -\frac{v}{u} \quad (2)$$

运用上列二式时必须注意各物理量的符号规则：会聚透镜  $f > 0$ ，发散透镜  $f < 0$ 。

实物  $u > 0$ ，虚物  $u < 0$

实像  $v > 0$ ，虚像  $v < 0$

正立像  $m > 0$ ，倒立像  $m < 0$

如果用(1)式求得的  $v$  值为负数，则表示此像为虚像，它与透镜的距离为  $|v|$ ；如果  $m < 0$ ，则表示像是倒立的。例如实物通过凸透镜成实像， $v, u$  均大于 0，此时是倒立像。(1)式、(2)式对平面镜成像也适用，平面镜的  $f \rightarrow \infty, u = -v, m = +1$ 。

22. 焦距  $f$  的数值均相同的三个薄透镜  $L_1, L_2$  与  $L_3$ ，依次为凸透镜、凹透镜与凸透镜，它们构成一个共轴光学系统，相邻透镜间的距离均为  $d$ ，各透镜的光心分别为  $O_1, O_2, O_3$ ，如图 7-53 所示。在透镜  $L_1$  左方，位于主光轴上的物点  $P$ ，经过此光学系统最终成像于透镜  $L_3$  右方的  $Q$  点。若距离  $PO_2 = O_2Q$ ，则物点  $P$  与透镜  $L_1$  的距离应为多少？

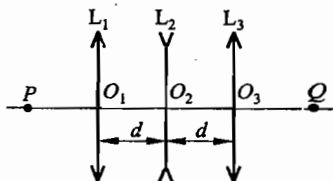


图 7-53

### 解析

该系统对凹透镜  $L_2$  而言是一左右对称的光学系统。依题意，物点  $P$  与像点  $Q$  处于对称的位置上，即对凹透镜  $L_2$  而言，物点及经它成像后的像点应分居  $O_2$  的两侧，且物距  $u_2$  与像距  $v_2$  相等。即

$$u_2 = v_2 \quad (1)$$

当  $u_2 = v_2 \neq 0$  时，由凹透镜  $L_2$  的物像公式

$$\frac{1}{u_2} + \frac{1}{v_2} = -\frac{1}{f} \quad (2)$$

解得

$$u_2 = v_2 = -2f < 0 \quad (3)$$

物距与像距均为负值表明：物点  $P$  经透镜  $L_1$  成像后，作为凹透镜  $L_2$  的物点  $P_2$  位于它的右侧，因而是虚物，经凹透镜  $L_2$  成像于它的左侧，为一虚像，虚物点  $P_2$  与虚像点  $Q_2$  对凹透镜  $L_2$  位于对称位置(图 7-54)。

考虑(3)式，参照图 7-54，对透镜  $L_1$  而言，其像距  $v_1$  可表示为

$$v_1 = 2f + d \quad (4)$$

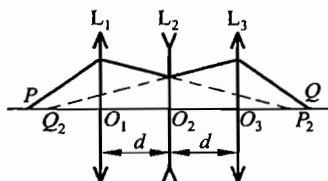


图 7-54

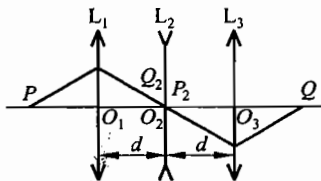


图 7-55

代入凸透镜  $L_1$  的物像公式

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{v_1} = \frac{1}{f} \quad (5)$$

解出

$$u_1 = \frac{f(2f+d)}{f+d} \quad (6)$$

若  $u_2 = v_2 = 0$ , 即  $P$  经  $L_1$  折射后成像于  $O_2$  (图 7-55), 则

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f}$$

故有

$$u_1 = \frac{fd}{d-f}$$

$O_2$  经  $L_2$  折射后成像于  $Q$ . 由于实物的  $u_1 > 0$ , 所以这种情形只有  $d > f$  时才能发生, 并且一定会发生. 当  $d \rightarrow f$  时,  $u_1 \rightarrow \infty$ . 所以本题的正确答案是:

1)  $d < f$  时,  $u_1 = \frac{f(2f+d)}{d+f}$

2)  $d \geq f$  时, 则实物有两种可能的位置:

i)  $u_1 = \frac{f(2f+d)}{d+f}$

ii)  $u_1 = \frac{fd}{d-f}$

物体位于这两种位置时, 它的像都位于对称位置  $Q$ .

本题中容易忽略  $d \geq f$  时,  $u_2 = v_2 = 0$  这个解. 利用透镜公式进行运算时要注意这一点. 解联立方程 (1)、(2) 时, (3) 式是一个解,  $u_2 = v_2 = 0$  也是一个解, 因为那时  $1/f$  完全可以忽略不计.

本题也可以对三个透镜逐一系列出成像公式:

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{v_1} = \frac{1}{f} \quad (1')$$

$$\frac{1}{d-v_1} + \frac{1}{v_2} = -\frac{1}{f} \quad (2')$$

$$\frac{1}{d-v_2} + \frac{1}{u_1} = \frac{1}{f} \quad (3')$$

比较(1')、(3')式,可得

$$d-v_2 = v_1 \quad \text{或} \quad d-v_1 = v_2$$

代入(2')式得

$$\frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_2} = -\frac{1}{f}$$

故有

$$v_2 = -2f$$

$$v_1 = d - v_2 = d + 2f$$

$$u_1 = \frac{fv_1}{v_1 - f} = \frac{f(d+2f)}{d+f}$$

在上述推导中也漏掉了  $u_2 = v_2 = 0$  这个解. 因为用凹透镜公式  $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = -\frac{1}{f}$  运算时很容易忽略  $u = v = 0$  这个特殊的解. 其实根据对称性可以直观地得出:  $d > f$  时物体可能经  $L_1$  所成像位于凹透镜中心, 这一定是一个解.

23. 有两个焦距分别为  $f_1$  和  $f_2$  的凸透镜  $L_1$  和  $L_2$ . 如果把这两个透镜作适当的配置, 则可使一垂直于光轴的小物体在原位置成一等大、倒立的像, 如图 7-56 所示. 试求出满足上述要求的配置方案中各透镜的位置.

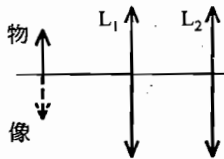


图 7-56

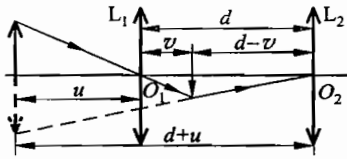


图 7-57

### 解析

设光线由左向右, 先后经过两个凸透镜而成像于题目所要求的位置. 光线经过  $L_2$  后将继续向右传播, 所以最后成的像必为虚像才能满足题设要求. 由此判定, 作为  $L_2$  的“物”必在其左侧, 物距  $u_2$  小于  $L_2$  的焦距  $f_2$ , 并且是倒立的. 再考虑到  $L_2$  的“物”应该是  $L_1$  对给定的傍轴物体所成的像(中间像), 它只能是给定物的倒立实像, 必然成像在  $L_1$  的右侧. (由于最后的像与原物同样大小, 还可以肯定中间像一定是缩小的.) 以上分析表明, 光学系统的配置应如图 7-57 所示.

根据图上标明的两透镜位置和物距、像距, 有

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f_1} \quad (1)$$

且最后像为虚像,故有

$$\frac{1}{(d-v)} - \frac{1}{(d+u)} = \frac{1}{f_2} \quad (2)$$

又因物、像大小相等,由几何关系得

$$\frac{u}{v} = \frac{u+d}{(d-v)} \quad (3)$$

整理后得

$$v = \frac{ud}{2u+d}$$

代入(1)、(2)式并经过化简可得

$$d = 2\sqrt{f_1 f_2}, \quad u = \frac{2f_1 \sqrt{f_2}}{\sqrt{f_2} - \sqrt{f_1}} \quad (4)$$

因题图中要求  $u > 0$ , 故要求  $f_2 > f_1$ . 由以上分析可知, 只要把焦距较小的透镜作透镜  $L_1$ , 而把焦距较大的透镜作为透镜  $L_2$  放在透镜  $L_1$  右方, 并且令二者的距离  $d$  和  $L_1$  与物体的距离  $u$  满足(4)式的要求, 就是本题所要求的配置方案.

24. 一光学系统的结构如图 7-58 所示, 薄透镜  $L_1$  为会聚透镜, 焦距为  $f_1$ ; 薄透镜  $L_2$  为发散透镜, 焦距为  $-f_2$ . 成像面  $P$  处放有照相底片,  $L_1$  和  $P$  的位置固定不动, 现给定  $f_1 = 3.00 \text{ cm}$ ,  $P$  与  $L_1$  之间距离  $l = 4.50 \text{ cm}$ .  $L_1$  与  $L_2$  之间的距离  $d$  是可调的. 要求通过调节  $d$  使无穷远处的物或近处的物都能在底片上成实像. 问:

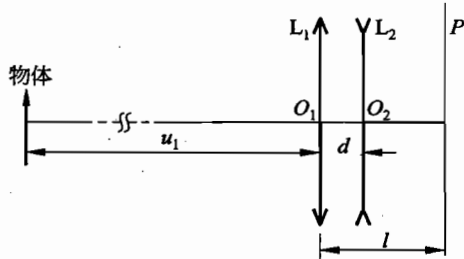


图 7-58

1) 如果  $f_2 = 3.00 \text{ cm}$ , 物体从无穷远处移到  $u_1 = 100.0 \text{ cm}$  处, 则  $L_2$  移动的距离应为多少?

2) 是否只要  $f_2$  和  $d$  取值适当, 不管物体在什么地方都能在  $P$  上成实像? 如不能, 则对物距有何限制?

3) 如果要求采用一个焦距确定的  $L_2$ , 通过调节  $d$  的数值使物距满足上面第 2) 问要求的物体都能在  $P$  上成实像, 则  $L_2$  的焦距  $f_2$  应满足的条件及相应的  $d$  的调节范围.

**解析**

1) 设物体经  $L_1$  后所成像的像距为  $v_1$ , 最后成像于  $P$  时  $L_1$ 、 $L_2$  之间的距离为  $d$ , 则由透镜成像公式有

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{v_1} = \frac{1}{f_1} \quad (1)$$

$$\frac{1}{d - v_1} + \frac{1}{l - d} = -\frac{1}{f_2} \quad (2)$$

当物体在无穷远处时,  $u_1 \rightarrow \infty$ , 由(1)式得

$$v_1 = f_1 \quad (3)$$

代入(2)式, 得

$$\frac{1}{d - f_1} + \frac{1}{l - d} = -\frac{1}{f_2}$$

以  $f_1 = f_2 = 3.00 \text{ cm}$ ,  $l = 4.50 \text{ cm}$  代入上式, 则  $d$  (1/cm) 应满足下式:

$$d^2 - 7.5d + 9 = 0$$

$$d = \frac{7.5 \pm 4.5}{2} \text{ cm}$$

由此系统结构可知,  $d < l = 4.50 \text{ cm}$ , 取合理解, 得

$$d = 1.50 \text{ cm} \quad (4)$$

设  $u_1 = 100.0 \text{ cm}$  时像距为  $v_1'$ , 并设  $d = d'$  时能在  $P$  上成像, 则  $v_1'$  (1/cm) 和  $d'$  (1/cm) 应满足下列二式

$$\frac{1}{100} + \frac{1}{v_1'} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{d' - v_1'} + \frac{1}{4.5 - d'} = -\frac{1}{3}$$

解此方程组, 得

$$d'^2 - 7.59d' + 9.68 = 0$$

$$d' = \frac{7.59 \pm \sqrt{7.59^2 - 4 \times 9.68}}{2} \text{ cm} = \frac{7.59 \pm 4.35}{2} \text{ cm}$$

取合理解, 得

$$d' = 1.62 \text{ cm} \quad (5)$$

当此物体从无穷远处移到  $u_1 = 100.0 \text{ cm}$  处时,  $L_2$  应向  $P$  移动, 移动的距离为

$$\Delta d = d' - d = 0.12 \text{ cm} \quad (6)$$

2) 首先讨论能在  $P$  上成像的条件.

因  $L_2$  是凹透镜, 在物距为  $u_2$ , 像距为  $v_2$  时有

$$\frac{1}{u_2} + \frac{1}{v_2} = -\frac{1}{f_2} \quad (f_2 \text{ 为焦距的绝对值})$$



或 
$$\frac{1}{v_2} = -\frac{1}{u_2} - \frac{1}{f_2}$$

现要求经  $L_2$  后成实像,即要求  $v_2 > 0$ ,因而必须有

$$u_2 < 0 \quad (7)$$

且 
$$-\frac{1}{u_2} > \frac{1}{f_2}$$

即 
$$|u_2| < f_2 \quad (8)$$

$u_2 < 0$  表明,实物经  $L_1$  所成的像(也就是  $L_2$  的物)必须位于  $L_2$  的右侧.因为  $L_2$  位于  $L_1$  的右侧,所以经  $L_1$  所成的像一定在  $L_1$  的右侧,应为倒立实像.由  $|u_2| < f_2$  可知,此像必须位于  $L_2$  的中心和焦点之间.  $L_2$  的成像光路图如图 7-59 所示.由图 7-59 可看出,  $L_1$  所成的像必须在  $P$  的左侧.综合以上分析可得出结论:要在  $P$  上成实像,  $L_1$  所成像必须在  $L_1$  和  $P$  之间,若用  $v_1$  表示  $L_1$  的像距,则要求满足下列不等式

$$0 < v_1 < l = 4.50 \text{ cm} \quad (9)$$

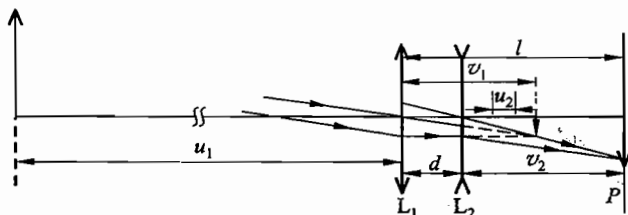


图 7-59

只要满足这一条件,就可在  $L_1$  和  $L_2$  的像之间放  $L_2$  ( $d < v_1$ ),并适当选择  $f_2$ ,即可实现在  $P$  上成实像的目的.  $f_2$  的数值可利用图 7-59 的光路图或相应的公式求出.

$v_1$  是由  $u_1$  决定的,对  $v_1$  的限制也就是对  $u_1$  的限制.  $u_1$  和  $v_1$  之间的关系式为

$$v_1 = \frac{f_1}{1 - f_1/u_1} \quad \text{或} \quad u_1 = \frac{f_1}{1 - f_1/v_1}$$

当  $u_1 \rightarrow \infty$  时,  $v_1 = 3.00 \text{ cm} < 4.50 \text{ cm}$ ,符合(9)式的要求,可以成像.当  $u_1$  从  $\infty$  逐渐减小时,上式分母  $1 - (f_1/u_1)$  逐渐减小,因而  $v_1$  逐渐增大,由  $v_1 < l$  可求得对  $u_1$  的限制为

$$u_1 > u_c = \frac{f_1}{1 - f_1/l} = 9.00 \text{ cm} \quad (10)$$

即物距  $u_1$  必须大于  $u_c$ ,满足此条件的所有物体都可以通过适当选择  $f_2$  和  $d$  使之成像于  $P$  上.

3) 在物距满足  $u_1 > u_c$ ,即  $0 < v_1 < l$  的条件下,由图 7-59 及  $L_2$  的成像公式可知,  $f_2$ 、 $v_1$  和  $d$  之间有下列关系:

$$-\frac{1}{v_1 - d} + \frac{1}{l - d} = -\frac{1}{f_2}$$

即 
$$d^2 - (v_1 + l)d - f_2(l - v_1) + lv_1 = 0 \quad (11)$$

现在的问题是：要求对每一个满足条件的  $v_1$  都能找到一个合理的  $d$ ，即

$$0 < d < v_1 \quad (12)$$

为此  $f_2$  应满足什么条件？由(11)式可解得

$$d = \frac{v_1 + l}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(v_1 + l)^2 - 4[lv_1 - f_2(l - v_1)]} \quad (13)$$

因  $l > v_1$ ,  $\frac{v_1 + l}{2} > v_1$ ，所以(13)式中的“+”号不符合  $d < v_1$  的要求，合理解为

$$d = \frac{v_1 + l}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(v_1 + l)^2 - 4[lv_1 - f_2(l - v_1)]} \quad (14)$$

因为要求  $d > 0$ ，因而要求

$$(v_1 + l)^2 - 4[lv_1 - f_2(l - v_1)] < (v_1 + l)^2$$

即

$$lv_1 - f_2(l - v_1) > 0$$

$$f_2 < \frac{lv_1}{l - v_1} = \frac{l}{\left(\frac{l}{v_1}\right) - 1} \quad (15)$$

上式必须对所有可能的  $v_1$  都能得到满足，上式的最小值与  $v_1$  的最小值相对应，已知  $v_1$  的最小值为 3.00 cm，所以  $f_2$  应满足的条件为

$$f_2 < \frac{4.5}{1.5 - 1} \text{ cm} = 9 \text{ cm} \quad (16)$$

只要  $f_2$  满足(16)式，就可以由(14)式求得与任一  $v_1$  相应的  $d$  以实现在  $P$  上成实像。

问题 2) 还可采用另一种论证步骤求解。

$L_1$  的成像公式 
$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{v_1} = \frac{1}{f_1} \quad (1')$$

有一个  $u_1$  值，就可求出相应的  $v_1$  值。如果最后能经  $L_2$  成像于  $P$  上，则  $d$  和  $f_2$  必须符合下式

$$\frac{1}{d - v_1} + \frac{1}{l - d} = -\frac{1}{f_2} \quad (2')$$

已知  $l = 4.5 \text{ cm}$ ,  $d \leq l$ 。上式右侧数值小于 0，因此左侧必须小于 0；只要左侧数值小于 0，上式一定有解，也就是说，一定能找到符合条件的  $d$  和  $f_2$ 。由此，能在  $P$  上成像的充要条件是

$$\frac{1}{l - d} < \frac{1}{v_1 - d}$$

已知  $l - d > 0$ ，上式要求  $v_1 - d > 0$ ，即  $v_1 > d$ 。此时，两侧取倒数，不等号反向，得

$$v_1 - d < l - d, \text{ 即 } v_1 < l, \frac{1}{v_1} > \frac{1}{l}$$

代入(1')式，得

$$\frac{1}{u_1} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{v_1} < \frac{1}{f_1} - \frac{1}{l} = \frac{1}{9 \text{ cm}}$$

故要使像落在  $P$  屏上, 物距应满足的充要条件是

$$u_1 > 9 \text{ cm}$$

25. 长度为  $4 \text{ mm}$  的物体  $AB$  由图 7-60 所示的光学系统成像. 光学系统由一个直角棱镜、一个会聚透镜和一个发散透镜组成, 各有关参数和几何尺寸均标示于图上, 求:

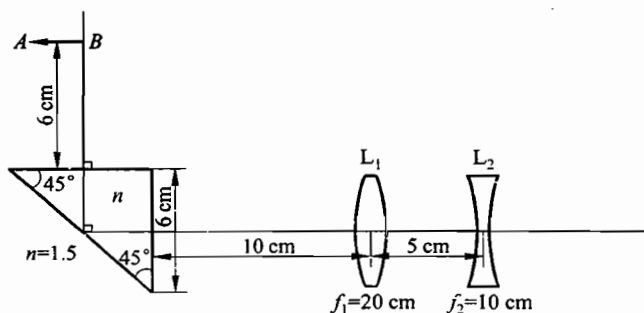


图 7-60

- 1) 像的位置.
- 2) 像的大小, 并作图说明是实像还是虚像, 是正立还是倒立的.

### 解析

物体  $AB$  发出的光经棱镜直角面  $PQ$  折射后, 射至棱镜斜面  $PR$  上, 被反射后又经  $QR$  面然后进入由  $L_1$ 、 $L_2$  组成的透镜组, 经  $L_1$ 、 $L_2$  后形成最后的像. 下面即分段研究成像过程(参阅图 7-61).

- 1)  $AB$  经  $PQ$  面上的折射成像  $A_1B_1$ , 用视深公式可得

$$\overline{B_1C_1} = n \overline{BC_1} = 9 \text{ cm}$$

$A_1B_1$  与  $AB$  大小相等.

- 2)  $A_1B_1$  经  $PR$  面反射成像  $A_2B_2$ ,  $A_2B_2$  与  $AB$  等大,

$$\overline{B_2C_2} = \overline{B_1C_2} = 12 \text{ cm}$$

- 3)  $A_2B_2$  经  $QR$  面折射成像  $A_3B_3$ ,  $A_3B_3$  与  $AB$  等大, 由视深公式得

$$\overline{B_3C_3} = \frac{1}{n} \overline{B_2C_3} = \frac{15}{1.5} \text{ cm} = 10 \text{ cm}$$

- 4)  $A_3B_3$  是透镜  $L_1$  的物, 物距  $\overline{B_3O_1} = 20 \text{ cm} = f_1$ , 因而经  $L_1$  后所成像在无穷远处. 入射线  $A_3O_1$  经  $L_1$  时方向不变, 从  $A_3$  来的其他光线经  $L_1$  后的出射线都与  $A_3O_1$  平行, 成为平行光束.

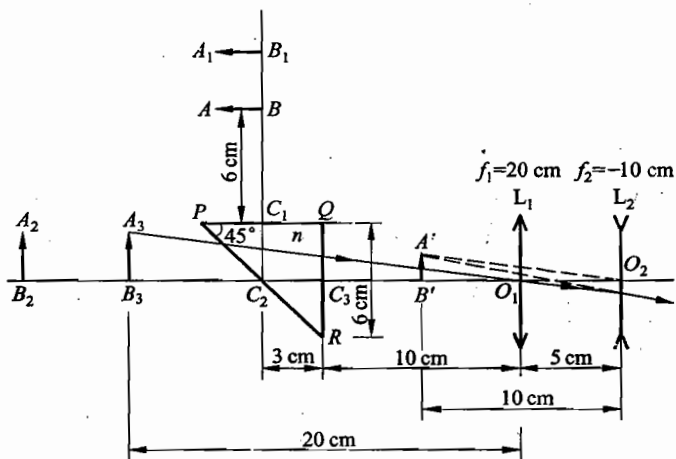


图 7-61

注：上图中，为了作图方便，物体的大小是夸大的了，其他距离都按比例绘制。

5) 上述平行光束投射到  $L_2$ ，经凹透镜折射后成像于  $L_2$  的焦平面上，这就是图 7-61 中的  $A'B'$ ， $A'B'$  为物体  $AB$  经过整个光学系统后所成的像，它位于  $L_2$  左方 10 cm 处，是虚像，迎着出射光观察，像的箭头向右。如果撤去棱镜和透镜，直接观察  $AB$ ，则像的箭头向左。所以相对于  $AB$ ， $A'B'$  可算作倒立；相对于  $A_2B_2$ ，则  $A'B'$  为正立。

在本题的解答中充分利用了傍轴光线经平面折射后成像的视深公式。在傍轴的条件下，像与物等大，物距  $u$  和像距  $v$  之间的关系式为

$$n_1 v = n_2 u$$

$n_1$  为物体所在处，即入射光线所在处介质的折射率， $n_2$  为出射光线所在处介质的折射率。要注意的是，如果入射光线从左方射向折射平面，但入射光束会聚于平面右方的一点，这一点是虚物， $n_1$  应为入射光线所在的左方介质的折射率，不是虚物所在的平面右方介质的折射率。如果不满足傍轴条件，即入射光线与平面的法线的交角不是很小，就不能很好成像，在入射光束很细的情况下可以近似地交于一点，但视深公式不再适用。

本题中，因为在棱镜内斜面上发生反射时，临界角  $i_c = \arcsin \frac{2}{3} = 41.81^\circ$ ，而从  $A_1B_1$  射来的傍轴光线的入射角都在  $45^\circ$  左右，因此在  $PR$  面发生的反射是全反射，在反射过程中没有光能损失。

26. 如图 7-62 所示， $L_1$  和  $L_2$  为两个共轴的薄凸透镜， $OO'$  为其主光轴。 $L_1$  的焦距  $f_1 = 10$  cm，口径（直径）为  $d_1 = 4.0$  cm， $L_2$  的焦距  $f_2 = 5.0$  cm，口径（直径）为  $d_2 =$

2.0 cm. 两镜相距  $a=30$  cm.  $AB$  为一与透镜共轴的直径为  $d=2.0$  cm 的均匀发光圆盘, 它有清晰的边缘, 把它放在  $L_1$  左侧  $u_1=20$  cm 处, 它在  $L_2$  右侧垂直于  $OO'$  的光屏  $P$  上清晰成像.

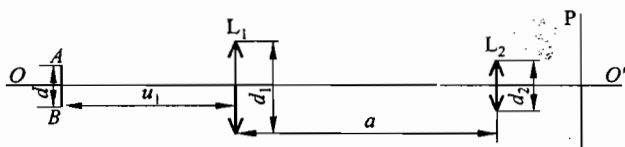


图 7-62

1) 求光屏应放在何处.

2) 现发现光屏上的像的中间部分较亮, 边缘部分较暗. 为了使像的边缘部分也能和中间部分一样亮, 但又不改变像的位置和大小, 可以在  $OO'$  上插放一个共轴的薄凸透镜  $L_3$ . 求  $L_3$  应放在何处;  $L_2$  的口径(直径)至少要多大; 焦距应是多少.

### 解析

如图 7-63 所示, 发光圆盘经  $L_1$  折射后成像  $A'B'$  在  $L_1$  右侧, 根据透镜成像公式, 有

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{v_1} = \frac{1}{f_1}$$

以  $u_1=20$  cm,  $f_1=10$  cm 代入, 得

$$v_1 = 20 \text{ cm}$$

像的直径为

$$d' = d \frac{v_1}{u_1} = 2.0 \text{ cm}$$

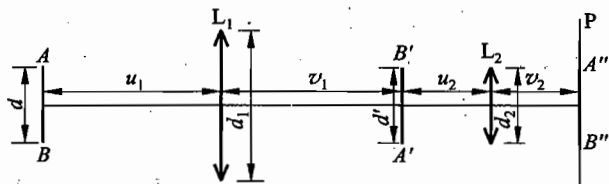


图 7-63

$A'B'$  通过  $L_2$  成像  $A''B''$  在光屏  $P$  上, 根据透镜成像公式, 有

$$\frac{1}{u_2} + \frac{1}{v_2} = \frac{1}{f_2}$$

由  $u_2=a-v_1=10$  cm,  $f_2=5.0$  cm, 求得像距

$$v_2 = 10 \text{ cm}$$

所以光屏应放在  $L_2$  右侧 10 cm 处。

像的明暗程度由投射到光屏上像点的光束大小决定。用作图法可知，由圆盘中心发出、通过  $L_1$  的光束正好能全部进入  $L_2$ ，如图 7-64(a) 所示；而从边缘部分发出，通过  $L_1$  的光束则只有一部分进入  $L_2$ ，如图 7-64(b) 所示。因而像  $A''B''$  的边缘部分较中心部分暗。

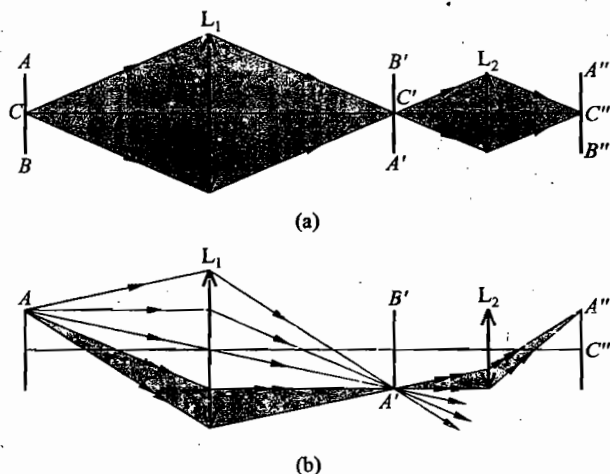


图 7-64

如果要使从  $A$  点发出经  $L_1$  折射后到达  $A'$  点的全部光线都进入  $L_2$ ，必须在光路中插入一个凸透镜，使通过  $A'$  的光束向主光轴方向偏折。按题意，要求插入此凸透镜后像  $A''B''$  的位置和大小都不变，则此透镜  $L_3$  必须放在中间像  $A'B'$  处，这样对  $L_3$  来说，物距等于零，像距也等于零，即  $A'B'$  的位置和大小都不因光束通过  $L_3$  而改变。 $L_3$  的直径  $d_3$  则必须大于或等于  $A'B'$ ，即  $d_3 \geq d' = 2.0 \text{ cm}$ 。

至于插入透镜的焦距  $f_3$  多大时才能使所有通过  $L_1$  的光线都能进入  $L_2$  的问题，现分析讨论如下(参见图 7-65)。如果  $L_3$  能使  $L_1$  成像于  $L_2$  处，且其像的大小小于或等于  $L_2$  的大小，则  $L_1$  上每一点的共轭点都应在  $L_2$  的表面上，因此从  $L_1$  上每一点通过的全部光线都到达其共轭点，从而都能进入  $L_2$  而毫无损失。这样，从  $AB$  上每一点射向  $L_1$  的全部光线都能通过  $L_2$  到达  $A''B''$  上相应的像点，各点明亮程度将会都一样。按此要求，对  $L_3$  来说，物距 = 20 cm，像距 = 10 cm，放大率  $m = \frac{1}{2}$ ，其焦距  $f_3$  应满足下式

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{10} = \frac{1}{f_3}$$

由此可求得

$$f_3 = \frac{20}{3} \text{ cm}$$

由于  $L_2$  的直径正好为  $L_1$  直径的一半,这也符合前述对  $L_2$  大小的要求.

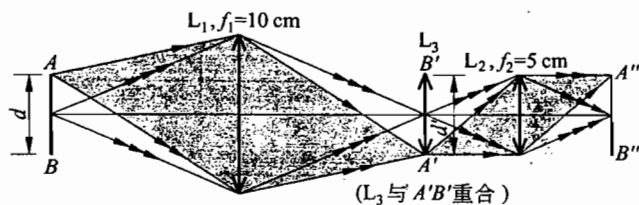


图 7-65

27. 在如图 7-66 所示的光学系统中,会聚透镜  $L_1$  和  $L_2$  共轴,其焦距分别为  $f_1$  和  $f_2$ ,直径分别为  $D$  和  $D/2$ ,彼此相距  $2(f_1 + f_2)$ . 物  $AA'$  与主轴垂直,长度为  $D$ ,其中心  $O_A$  位于主轴上,离  $L_1$  的距离为  $2f_1$ ,屏  $P$  垂直于主轴,置于  $L_2$  右侧, $O_P$  是  $O_A$  经  $L_1$  和  $L_2$  所成的像点. 这时在屏上只出现物  $AA'$  中央部分的像.

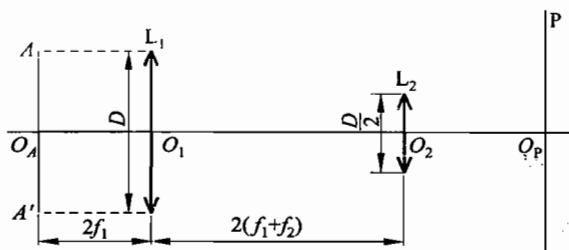


图 7-66

1) 画出此情况的光路图,用它来解释此现象.

2) 如果不改变  $AA'$ ,  $L_1$ ,  $L_2$  和屏  $P$  的位置,能否在此光学系统中加一个会聚透镜  $L$ ,使得  $AA'$  全物都在  $P$  上成像? 如不能,请说明理由;如能,请说明  $L$  应放在何处,其直径至少要有多大? 其焦距  $f$  应如何选定?

### 解析

1) 根据透镜成像公式可算出  $AA'$  经  $L_1$  所成的像是在右方像距为  $2f_1$  处,大小与  $AA'$  相同的倒立实像  $BB'$ . 对于  $L_2$  来说,  $BB'$  就是物距为  $2f_2$  的物,经  $L_2$  所成的像在  $L_2$  右方像距为  $2f_2$  处. 所以屏  $P$  与  $L_2$  的距离应是  $2f_2$ ,但从图 7-67 所示  $A$  点成像于  $B$  的光束来看,这光束在  $B$  点会聚后继续向右下方前进,不能进入  $L_2$ .

因此  $A$  点发出的经过  $L_1$  折射后的光根本就不能进入  $L_2$ ,这样,屏上就不会有  $A$  点的像. 同样道理,在  $A$  点附近的一些物点所发出的光束也不能进入  $L_2$  并在  $P$  成像. 由对称关系可知,  $A'$  点及其附近的点情况也相同. 但是  $O_A$  点或其附近的点发出的光束,经过

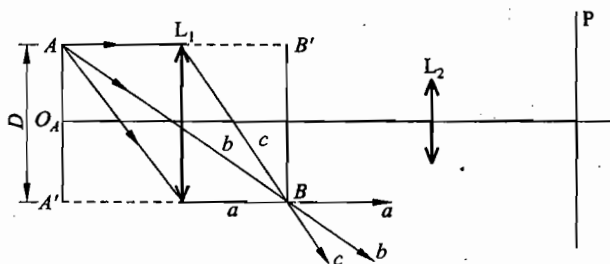


图 7-67

$L_1$ 、 $L_2$  折射后能成像于屏  $P$  上. 这就是  $P$  上只能出现物  $AA'$  中间部分的像的道理.

2) 在不改变  $AA'$ 、 $L_1$ 、 $L_2$  和  $P$  位置的条件下, 要使通过  $B$  点的光线至少能有一部分进入  $L_2$ , 才能在  $P$  上看到  $A$  点的像. 为此应在  $L_1$ 、 $L_2$  之间添加一个会聚透镜  $L$ , 使这些光线经  $L$  折射后向主光轴方向偏折, 但由于  $BB'$  经  $L$  折射后所成的像必须仍留在原地 (即与  $BB'$  重合), 才能使它经过  $L_2$  所成的像依然在  $P$  上, 这就要求  $L$  必须放在  $BB'$  处.

为使由  $BB'$  向右传播的光束能全部通过  $L$ ,  $L$  的直径至少应当等于  $BB'$  的长度  $D$ .

为了选定透镜  $L$  的焦距  $f$ , 可作如下分析. 透镜  $L$  的作用是使通过它折射后的光束向主光轴方向偏折. 从透镜性质可知, 一般地说, 焦距  $f$  大, 光线的偏折就小; 焦距小, 光线的偏折就大. 如果选用的透镜  $L$  的焦距  $f$  过大, 可能由  $A$  点发出会聚于  $B$  点的光束经过  $L$  后的偏折不够大, 仍不能进入透镜  $L_2$ . 随着  $f$  的减小可达到一种边缘情况, 如图 7-68 所示, 图中  $a'$ 、 $b'$ 、 $c'$  分别表示由  $L_1$  射来的光线  $a$ 、 $b$ 、 $c$  经  $L$  折射后的出射光线.  $a'$  刚刚能进入  $L_2$ ,  $P$  上才能收到  $A$  点发出的光而形成  $A$  点的像, 利用光线  $a$  与  $a'$  可求出这种情况下  $L$  的焦距为  $f_k = 4f_2$ , 故  $L$  的焦距  $f_L$  应小于  $4f_2$ . 继续减小  $f$ , 折射光束即可进入透镜  $L_2$  而在  $P$  上成  $A$  点的像. 另一方面, 如果  $f$  过小, 可能使折射后光束完全在  $L_2$  上方通过, 也不进入  $L_2$  在  $P$  上成像. 这种边缘情况如图 7-69 所示,  $c'$  刚刚能进入  $L_2$ ,  $P$  上才能有  $A$  点的像. 此时  $f'_k = \frac{4f_1f_2}{3f_1+4f_2}$ , 故  $L$  的焦距  $f_L$  必须大于  $\frac{4f_1f_2}{3f_1+4f_2}$ . 因此, 单就能使物点  $A$  (物

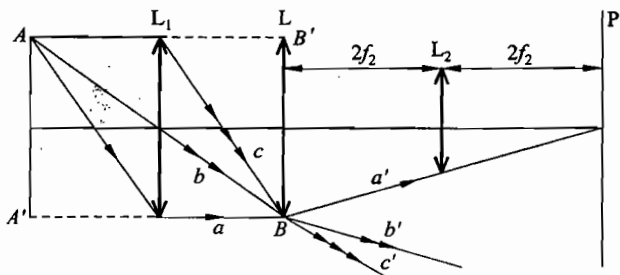


图 7-68



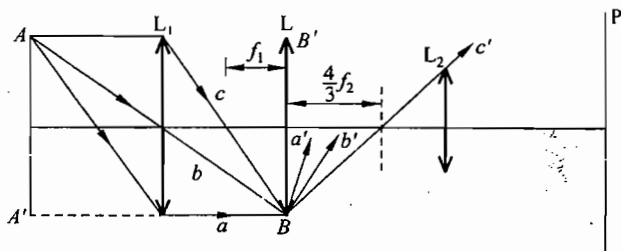


图 7-69

与  $A'$  同此)在  $P$  上成像(不计像点的亮暗)而言,透镜  $L$  的焦距应选定在一个范围内,即

$$4f_2 > f > \frac{4f_1 f_2}{3f_1 + 4f_2}$$

然而通过以上分析很容易看出,焦距  $f$  的最佳选择应是使物边缘点  $A$  ( $A'$ ) 的光束尽可能多的通过  $L_2$ , 并且尽量利用  $L_2$  的中央部分成像. 这就应使成像光束的中心光线, 也从  $A$  点发出通过  $L_1$  的中心的光线  $b$ , 经  $L$  折射后恰通过  $L_2$  的中心, 如图 7-70 所示.

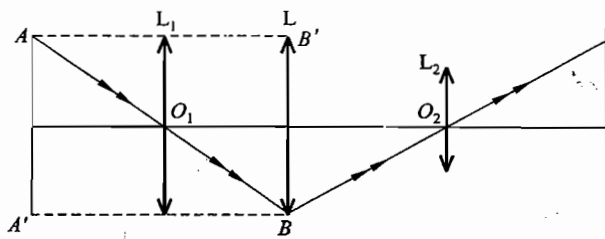


图 7-70

这种情况透镜  $L_1$ 、 $L_2$  的中心  $O_1$ 、 $O_2$  对  $L$  而言恰是一对物像点, 由此可写出  $f$  应满足的关系为

$$\frac{1}{2f_1} + \frac{1}{2f_2} = \frac{1}{f}, \quad \text{即} \quad f = \frac{2f_1 f_2}{f_1 + f_2}$$

这就是应选定的透镜  $L$  的焦距值.

本题不仅涉及透镜的物像关系, 还涉及视场问题, 即使从物像关系来说,  $AA'$  可以在  $P$  上成像, 实际上由于  $L_2$  的口径太小, 使得物体的某些部分所发出的光线完全不能到达屏上, 屏上当然不可能出现它们的像. 这是一个在中学教学中没有的内容. 题中提出这个现象, 要求学生进行分析, 这本来是比较难的, 但提出画光路图等于指出了一条解决途径. 要求不改变物、像和透镜的位置而采取增加一个透镜的办法来使  $P$  上呈现全部物体的象, 这对学生能力的要求是比较高的. 后面关于所加透镜焦距的讨论也要求严密的论证和判断.

本题的内容与上一题的内容有相似之处. 但上题中  $L_1$  和  $L_2$  对于  $L_3$  正好是一对共轭点,  $L_2$  的大小刚好符合“全部通过  $L_1$  的光线都能进入  $L_2$ ”的要求. 现在,  $f = \frac{2f_2 f_1}{f_1 + f_2}$  时,  $L_1$  和  $L_2$  对于  $L$  也正好是一对共轭点, 但此时放大率  $m = f_2 / f_1$ , 而  $L_2$  与  $L_1$  的直径比是  $\frac{1}{2}$ . 因此  $f_2 / f_1 \leq \frac{1}{2}$  时, 不仅可在屏上观察全部物体的像, 而且像的明暗程度不会与像  $BB'$  有所不同.  $f_2 / f_1 > \frac{1}{2}$  时, 像的边缘部分虽能在屏  $P$  上观察到, 明亮程度将有所削弱. 本题讨论的“刚能观察到全部物体的像”的问题则在上一题中未曾涉及, 因为那里  $f_1$ 、 $f_2$  都已给定, 不会产生这个问题, 这里对  $f_1$ 、 $f_2$  未给出其比值, 必须进行普遍的比较讨论.

28. 两个焦距分别是  $f_1$  和  $f_2$  的薄凸透镜  $L_1$  和  $L_2$ , 相距为  $d$ , 被共轴地安置在光具座上.

- 1) 若要求入射光线和与之对应的出射光线相互平行, 问该入射光线应满足什么条件?
- 2) 根据所得结果, 分别画出各种可能情况下的光路示意图.

### 解析

1) 在所示的光路图(图 7-71)中, 入射光  $AB$  经透镜  $L_1$  折射后沿  $BC$  射向  $L_2$ , 经  $L_2$  折射后沿  $CD$  出射.  $AB$ 、 $BC$ 、 $CD$  与透镜主光轴的交点分别为  $P$ 、 $P'$  和  $P''$ , 如果  $P$  为物点, 因由  $P$  沿主光轴向  $O_1$  的光线方向不变, 由透镜性质可知,  $P'$  为  $P$  经过  $L_1$  所成的像,  $P''$  为  $P'$  经  $L_2$  所成的像, 因而图中所示的  $u_1$ 、 $v_1$ 、 $u_2$ 、 $v_2$  之间有下列关系:

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{v_1} = \frac{1}{f_1} \quad (1)$$

$$\frac{1}{u_2} + \frac{1}{v_2} = \frac{1}{f_2} \quad (2)$$

$$d = u_2 + v_1 \quad (3)$$

当入射光线  $PB$  与出射光线平行时, 图中的  $\alpha = \alpha'$ , 利用相似三角形关系可求得

$$\frac{h'}{h} = \frac{v_2}{u_1}, \quad \frac{h'}{h} = \frac{u_2}{v_1}$$

从而求得

$$\frac{v_2}{u_1} = \frac{u_2}{v_1} \quad (4)$$

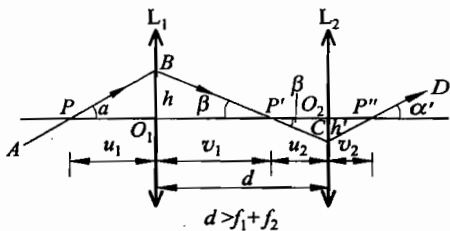


图 7-71

联立方程式(1)、(2)、(3)、(4),消去  $v_1$ 、 $u_2$  和  $v_2$ ,可得

$$u_1 = \frac{f_1 d}{d - (f_1 + f_2)} \quad (5)$$

由于  $d$ 、 $f_1$ 、 $f_2$  均已给定,所以  $u_1$  为一确定值,这表明:如果入射光线与出射光线平行,则此入射光线必须通过主光轴上一个确定的点(图中的  $P$ ),它在  $L_1$  的左方与  $L_1$  相距

$u_1 = \frac{f_1 d}{d - (f_1 + f_2)}$  处.又由于  $u_1$  与  $\alpha$  无关,凡是通过  $P$  点射向  $L_1$  的入射光线都和相应的

通过  $P$  的共轭点  $P''$  的出射光线相互平行.  $P''$  点与  $O_2$  的距离  $v_2$  为

$$v_2 = \frac{f_2 d}{d - (f_1 + f_2)}$$

2) 由所得结果(5)式可以看出,当  $d > f_1 + f_2$  时,  $u_1 > 0$ , 此情况下的光路图就是图 7-71.

当  $d = f_1 + f_2$  时,  $u_1 \rightarrow \infty$ ,  $\alpha = 0$ , 此时入射光线和出射光线均平行于主光轴,光路如图 7-72 所示.

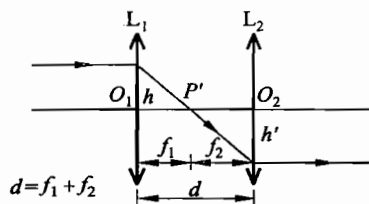


图 7-71

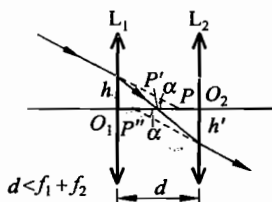


图 7-73

当  $d < f_1 + f_2$  时,  $u_1 < 0$ , 这表明  $P$  点在  $L_1$  的右方,对  $L_1$  来说,它是虚物.由(1)式可知,此时  $v_1 > 0$ ,由  $u_2 = \frac{f_2}{f_1} v_1$  可知,  $u_2 > 0$ ,又由  $\frac{u_2}{v_2} = \frac{v_1}{u_1} < 0$  可知,  $v_2 < 0$ ,所以此时的光路图如图 7-73 所示.

$P$  和  $P''$  是由  $L_1$ 、 $L_2$  组成的光学系统的一对特殊的共轭点,称为节点.通过一个节点的入射光线经过光学系统后,其出射光线一定通过另一节点,且与入射光线平行.对任何共轴的光学元件组成的光学系统都可以找到这样一对节点.读者如有兴趣不妨一试.

29. 有两个薄凸透镜,最后在物体所在处形成一个与物体大小相等的倒立的虚像.已知靠近物体那个透镜的焦距为  $f_1$ ,物体与此透镜的距离为  $u_1$ .试求第二个透镜的焦距  $f_2$  及它与第一个透镜间的距离  $L$ .

### 解析

根据凸透镜成像的规律,如果第一次成像为虚像,此虚像必为放大正立虚像,位于物体之后,它就是第二透镜之物,如再成虚像,必为进一步放大的正立虚像;这与题设不符.如果第一次成像为放大的实像,则经过第二透镜所成同侧虚像必为进一步放大的虚像,不可能与物体大小相等,亦与题设不符.所以第一次成像必为缩小的实像,即  $u_1 > 2f_1$ ,如图 7-74 所示.

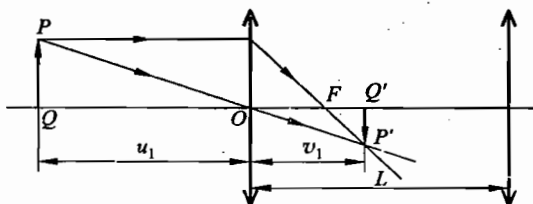


图 7-74

由透镜成像的规律可知

$$v_1 = \frac{f_1 u_1}{u_1 - f_1} \quad (1)$$

$$\frac{P'Q'}{PQ} = \frac{v_1}{u_1} = \frac{f_1}{u_1 - f_1} \quad (2)$$

要使最后在  $PQ$  所在处形成与物等大的虚像,  $P'Q'$  与第二透镜的距离应小于第二透镜的焦距  $f_2$ , 且两透镜间的距离  $L$  与  $u_1$ 、 $f_2$  应满足下列两个条件:

$$\frac{f_1}{u_1 - f_1} \cdot \frac{u_1 + L}{L - \frac{f_1 u_1}{u_1 - f_1}} = \frac{f_1 (u_1 + L)}{(u_1 - f_1)L - f_1 u_1} = 1 \quad (3)$$

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{L - \frac{f_1 u_1}{u_1 - f_1}} - \frac{1}{u_1 + L} \quad (4)$$

由(3)式可求得

$$L = \frac{2f_1 u_1}{u_1 - 2f_1} \quad (5)$$

将(5)式代入(4)式,可求得

$$f_2 = \left( \frac{u_1}{u_1 - 2f_1} \right)^2 f_1 \quad (6)$$

30. 薄凸透镜放在空气中时,两侧焦点与透镜中心的距离相等. 如果此薄透镜两侧的介质不同,其折射率分别为  $n_1$  和  $n_2$ , 则透镜两侧各有一焦点(设为  $F_1$  和  $F_2$ ), 但  $F_1$ 、 $F_2$

和透镜中心的距离不相等,其值分别为  $f_1$  和  $f_2$ . 现有一薄凸透镜  $L$ , 已知此凸透镜对平行光束起会聚作用, 在其左右两侧介质的折射率及焦点的位置如图 7-75 所示.

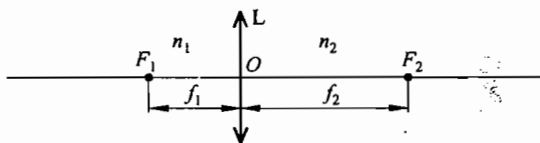


图 7-75

- 1) 试求出此时物距  $u$ , 像距  $v$ , 焦距  $f_1, f_2$  四者之间的关系式.
- 2) 若有一傍轴光线射向透镜中心, 已知它与透镜主光轴的夹角为  $\theta_1$ , 则与之相应的出射光线与主光轴的夹角  $\theta_2$  多大?
- 3)  $f_1, f_2, n_1, n_2$  四者之间有何关系?

### 解析

利用焦点的性质, 用作图法可求得物  $PQ$  的像  $P'Q'$ , 如图 7-76 所示.

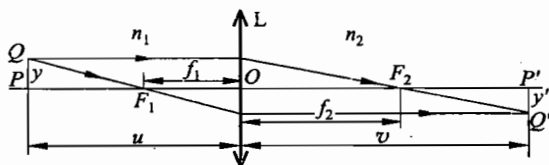


图 7-76

- 1) 用  $y$  和  $y'$  分别表示物和像的大小, 则由图中的几何关系可得

$$\frac{y}{y'} = \frac{u - f_1}{f_1} = \frac{f_2}{v - f_2} \quad (1)$$

$$(u - f_1)(v - f_2) = f_1 f_2$$

简化后即得物像距公式, 即  $u, v, f_1, f_2$  之间的关系式

$$\frac{f_1}{u} + \frac{f_2}{v} = 1 \quad (2)$$

2) 薄透镜中心附近可视为薄平行板, 入射光线经过两次折射后射出, 其光路的示意图如图 7-77 所示. 图中  $\theta_1$  为入射角,  $\theta_2$  为与之相应的出射角,  $\gamma$  为平行板中的光线与法线的夹角. 设透镜的折射率为  $n$ , 则由折射定律得

$$n_1 \sin \theta_1 = n \sin \gamma = n_2 \sin \theta_2 \quad (3)$$

对傍轴光线,  $\theta_1, \theta_2 \ll 1$ , 得  $\sin \theta_1 \approx \theta_1, \sin \theta_2 \approx \theta_2$ , 因而得

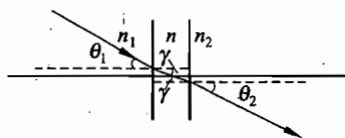


图 7-77

$$\theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \theta_1 \quad (4)$$

3) 由物点  $Q$  射向中心  $O$  的人射线, 以  $L$  折射后, 出射线应射向  $Q'$ , 如图 7-78 所示.

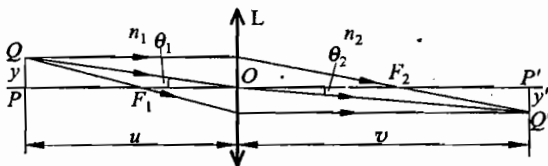


图 7-78

在傍轴的条件下, 有

$$\frac{y}{u} = \tan \theta_1 \approx \theta_1 \quad \frac{y'}{v} = \tan \theta_2 \approx \theta_2 \quad (5)$$

二式相除并利用(4)式, 得

$$\frac{y' u}{y v} = \frac{n_1}{n_2} \quad (6)$$

用(1)式的  $y'/y = f_1/(u - f_1)$  代入(6)式, 得

$$\frac{f_1 u}{(u - f_1) v} = \frac{n_1}{n_2} \quad \text{即} \quad f_1 = \frac{n_1 u v}{n_2 u + n_1 v} \quad (7)$$

用(1)式的  $y'/y = (v - f_2)/f_2$  代入(6)式, 得

$$\frac{(v - f_2) u}{f_2 v} = \frac{n_1}{n_2} \quad \text{即} \quad f_2 = \frac{n_2 u v}{n_2 u + n_1 v} \quad (8)$$

从而得  $f_1, f_2, n_1, n_2$  之间关系式

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{n_2}{n_1} \quad (9)$$

中学教材中讨论的薄透镜, 都是放在空气中或浸没于液体中, 透镜两侧的介质是同一种介质, 因此两侧的焦点对于透镜是处于对称位置, 二者与透镜的距离都是  $f$ . 如果两侧介质的性质不同, 这种对称性就没有了. 平行于主光轴的平行光束, 经透镜折射后交于一点, 这仍被称为焦点, 但改名为像方焦点, 它与薄透镜的距离称为像方焦距. 如果从某一物点发出的光束经透镜折射后成为平行于主光轴的平行光束, 则该点称为该透镜的物方焦点, 它与薄透镜的距离称为物方焦距. 只要知道薄透镜的物方焦点和像方焦点的位置, 我们仍可利用这两个焦点的性质做光路图, 以求得像点的位置. 作图法中常用的“射向薄透镜中心的光线通过透镜后方向不变”这一论断在这里也不能再用. 原来这个论断是这样推出来的: 透镜中心附近, 在很小范围内时, 透镜两个表面都可看作垂直于主光轴的平面, 因此光线通过透镜中心时, 相当于通过一个很薄的平行平板, 两侧介质一样, 因此入射

光线与出射光线平行;由于透镜很薄,它们几乎位于同一直线上.现在透镜中心附近仍可视作平行平面薄板,但透镜左侧介质和右侧介质的折射率不同,根据折射定律有

$$n_1 \sin \theta_1 = n \sin \gamma = n_2 \sin \theta_2$$

$n_1, n, n_2$  分别为左侧介质、透镜材料和右侧介质的折射率,  $\theta_1, \gamma, \theta_2$  为各光线与法线的夹角. 因为  $n_1 \neq n_2, \theta_1 \neq \theta_2$ , 入射到透镜中心的光线就不再与相应的出射光线平行. 对于傍轴光线有  $\theta_2/\theta_1 = n_1/n_2$ . 利用这一关系式可推导出: 两侧焦距之比  $f_2/f_1 = n_2/n_1$ .

31. 凸透镜  $L_1$  与凹透镜  $L_2$  共轴放置,  $L_1$  左侧介质的折射率为  $n$ ,  $L_2$  右侧介质的折射率也是  $n$ , 两透镜之间媒质的折射率为  $n_0$ , 且  $n < n_0$ .  $F_1$  是  $L_1$  的物方焦点,  $F_2'$  是  $L_2$  的像方焦点. 有一物点  $S$  位于  $L_1$  的物方焦平面上, 如图 7-79 所示.

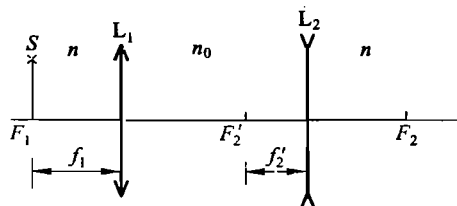


图 7-79

- 1) 画出傍轴光束成像光路示意图, 求出像点  $S'$  的位置. 简述作图的依据.
- 2) 若  $L_1$  的物方焦距  $f_1 = 20$  cm,  $L_2$  的像方焦距  $f_2' = 10$  cm, 物点  $S$  离主光轴的距离为 2 cm, 问像点  $S'$  离主光轴的距离为多少?

### 解析

- 1) 成像光路示意图如图 7-80 所示.

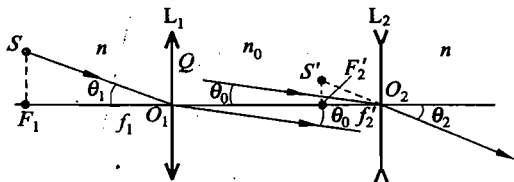


图 7-80

作图的步骤和依据. 本题中透镜  $L_1, L_2$  两侧介质的折射率不同, 因而不能采用通常的透镜作图法, 但可根据上题的解析中的方法进行作图, 其步骤与依据如下.

i) 从  $S$  引射向  $L_1$  中心的人射线  $S_1O_1$ , 它与主光轴的夹角为  $\theta_1$ , 由于  $O_1$  点附近的透镜可视作做很薄的平行玻璃板, 其出射光线与主光轴的夹角  $\theta_0$  与  $\theta_1$  有下列关系:

$$n \sin \theta_1 = n_0 \sin \theta_0$$

对傍轴光线,有

$$n \theta_1 = n_0 \theta_0$$

已知  $n_0 > n$ , 故图中  $\theta_0 < \theta_1$ . 此出射光线到达  $L_2$  上的  $P$  点.

ii) 由于  $S$  位于  $L_1$  的物方焦平面上, 从  $S_1$  发出的光束经  $L_1$  折射后应为平行光束. 作通过  $L_2$  的中心  $O_2$ 、与主光轴夹角也为  $\theta_0$  的直线  $O_2Q$ , 连接  $SQ$ , 入射光线  $SQ$  经  $L_1$  折射后射向  $L_2$  的中心, 入射角为  $\theta_0$ , 它的出射线与主光轴的夹角  $\theta_2$  与  $\theta_0$  的关系式为

$$n_0 \theta_0 = n \theta_2$$

因而  $\theta_2 = \theta_1$ , 即此出射光线应与入射光线平行.

iii) 过  $O_2$  作与  $SO_1$  平行的出射光线. 将此出射光线反向延长, 找出它与位于  $F'_2$  的像方焦平面相交的  $S'$  点. 因为平行光束经透镜折射后应成像于像方焦平面上, 所以  $S'$  就是出射光束形成的像, 即  $S$  的像.

2) 用  $h$  表示  $S$  与主光轴的距离,  $h'$  表示  $S'$  与主光轴的距离, 由几何关系可得

$$\frac{h}{f_1} = \tan \theta_1 = \tan \theta_2 = \frac{h'}{f'_2}$$

以  $h = 2 \text{ cm}$ 、 $f_1 = 20 \text{ cm}$ 、 $f'_2 = 10 \text{ cm}$  代入上式, 得

$$h' = 1 \text{ cm}$$

32. 焦距都为  $f$  的两个凸透镜  $L_1$ 、 $L_2$  与两个圆形平面反射镜  $M_1$ 、 $M_2$  放置如图 7-81 所示. 两透镜共轴, 透镜的主光轴与两平面镜垂直, 并通过两平面镜的中心, 四镜的直径相同. 在主光轴上有一点光源  $O$ .

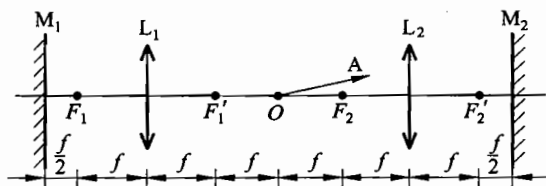


图 7-81

- 1) 画出由光源向右的一条光线  $OA$  (如图 7-81 所示) 在此光学系统中的光路.
- 2) 分别说出由光源向右发出的光线和由光源向左发出的光线各在哪些位置 ( $O$  点除外) 形成光源  $O$  的能看到的像. 哪些是实像? 哪些是虚像?
- 3) 现在用不透明板把  $L_1$  和  $L_2$  的下半部 (包括透镜中心) 都遮住, 说出这时像有什么变化.



**解析**

1) 光线  $OA$  的第一次往返光路如图 7-82 所示. 当光线由图中左方返回经过  $O$  点后, 将继续向右下方行进, 作第二次往返. 第二次往返的光路在图中未画出, 可按图上光路对称于主光轴画出. 第二次往返后由  $L_1$  射向  $O$  的光线与开始时由  $O$  射向  $L_2$  的光线在一条直线上. 以后, 光线重复以上两种往返光路.

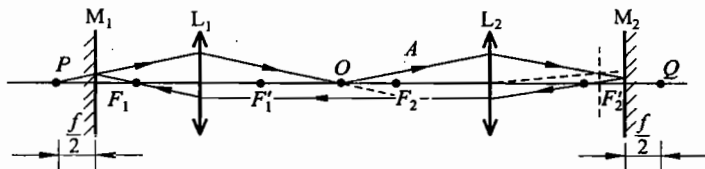


图 7-82

2) 向右发出的光线:  $F_2'$  处成实像, 右方无限远处成虚像;  $F_1$  处成实像;  $P$  处 ( $M_1$  左方  $\frac{f}{2}$  处主光轴上) 成虚像.

向左发出的光线:  $F_1$  处成实像; 左方无限远处成虚像;  $F_2'$  处成实像;  $Q$  处 ( $M_2$  右方  $\frac{f}{2}$  处主光轴上) 成虚像.

3) 向右发出的光线只在  $F_2'$  处成实像. 向左发出的光线只在  $F_1$  处成实像. 两像均比未遮住时暗.

本题是一道多次、反复成像的题目. 由于所给条件的简单和对称, 因而并不需要通过计算也不需要画出其他的辅助光线, 只要物理基本概念十分清楚, 就可做出正确的答案.

学生最易发生的错误有二: 一是漏掉了解析 2) 中的两个虚像; 二是错误地认为和没遮住时一样成所有的像, 只是比原来暗, 即没弄清楚把  $L_1$  和  $L_2$  下半部 (包括透镜中心) 遮住后, 是挡住了第一次由反射镜反射回来的全部光线, 使不再有第二次通过透镜的入射线, 所以只剩下  $F_1$  和  $F_2'$  处所成的比原来暗的实像.

33. 在焦距为  $f$  的会聚薄透镜  $L$  的主光轴上放置一发光圆锥面 (如图 7-83 所示), 圆锥的中心轴线与主光轴重合, 锥的顶点位于焦点  $F$ , 锥高等于  $2f$ , 锥的母线与其中心轴线的夹角等于  $\alpha$ . 求圆锥面的像.

**解析**

对于圆锥面上任一点  $P$  均可作一光线沿圆锥面通过  $F$ , 这光线经过透镜后成为平行

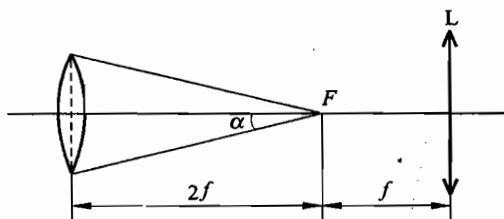


图 7-83

于主光轴的光线.  $P$  点的像应位于此光线上. 因此, 圆锥面的像应位于一半径为

$$R = f \tan \alpha \quad (1)$$

的圆柱面上(如图 7-84 所示). 锥顶的像位于无穷远处, 锥底上任一点  $Q$  的像  $Q'$  的像距可

由成像公式求得. 以  $u = 3f$ , 代入  $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$  可得像距

$$v = \frac{3f}{2} \quad (2)$$

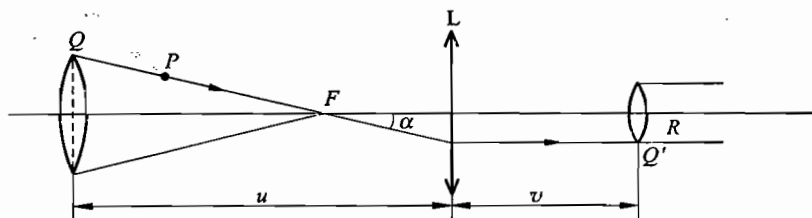


图 7-84

从  $Q$  到  $F$  各发光点的像点的像距从  $v$  逐渐增大直至  $\infty$ . 所以圆锥面的像是一个一端在透镜右方距透镜  $3f/2$  处、另一端位于无穷远处的半径为  $R = f \tan \alpha$  的圆柱面, 为实像, 如图 7-84 所示.

此题考查学生在分析透镜成像问题上的熟练与灵活运用能力. 空间物通过透镜的成像一般会出现物、像不相似的结果, 这对于许多学生来说可能是出乎意料的事. 此题是一个不需繁复计算的特例, 有助于开阔学生思路. 圆锥面上任一点的像一定在  $PF$  光线经过透镜折射而成的平行于主光轴的光线上, 这个结论许多学生可能就想不到.

34. 有一薄透镜如图 7-85,  $S_1$  面是旋转椭球面(椭圆绕长轴旋转而成的曲面), 其焦点为  $F_1$  和  $F_2$ ;  $S_2$  面是球面, 其球心  $C$  与  $F_2$  重合. 已知此透镜放在空气中时能使从无穷远处位于椭球长轴的物点射来的全部入

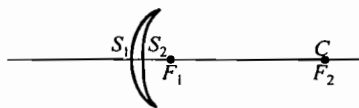


图 7-85

射光线(不限于傍轴光线)会聚于一个像点上,椭圆的偏心率为  $e$ .

1) 求此透镜材料的折射率  $n$ (要论证).

2) 如果将此透镜置于折射率为  $n'$  的介质中,并能达到上述的同样的要求,椭圆应满足什么条件?

### 解析

1) 根据题设所有平行于旋转椭球长轴的人射光线经旋转椭球面和球面两次折射后全部都能会聚于同一像点,可作出如下论证:因为球面上发生折射时,只有通过球心的光线折射后仍交于一点,所以经椭球面折射后射向球面的光线都必须射向球心  $C$ ,即射向旋转椭球面的第二焦点  $F_2$ ,光路图如图 7-86 所示:  $PA$  为人射光线,  $AC$  为经椭球面折射后的折射光线,  $BN$  为  $A$  点处椭球面的法线,  $i$  为入射角,  $r$  为折射角. 根据椭圆的性质,椭圆上任意点处的法线  $BN$  平分  $\angle F_1AF_2$ ,故  $AF_1$  与法线的夹角也是  $r$ ,由正弦定理可得

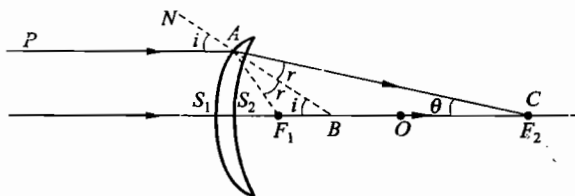


图 7-86

$$\frac{F_1A}{F_1B} = \frac{\sin i}{\sin r}, \quad \frac{F_2A}{F_2B} = \frac{\sin i}{\sin r}$$

现在要求  $PA$  和  $AC$  正好是人射光线和折射光线的关系,即要求对任意入射点下式都能成立:

$$\frac{F_1A}{F_1B} = \frac{F_2A}{F_2B} = \frac{\sin i}{\sin r} = n$$

由代数运算和椭圆的性质,有

$$\frac{F_1A}{F_1B} = \frac{F_2A}{F_2B} = \frac{F_1A + F_2A}{F_1B + F_2B} = \frac{2a}{2c} = \frac{1}{e}$$

上式中  $2a$  为长轴的长度,  $2c$  为焦点间的距离,  $e$  为椭圆的偏心率. 因此,要使折射光线全部交于  $F_2$  点,  $e$  的值必须满足:

$$e = \frac{1}{n}$$

这一条件与  $A$  的位置无关,这表明任何一条平行于椭圆长轴的人射光线经旋转椭球面折射后的折射光线都能通过  $C$  点.

2) 如果透镜置于折射率为  $n'$  的介质中, 则要求

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n}{n'} = \frac{1}{e}$$

即椭圆的偏心率  $e$  应满足:  $e = \frac{n'}{n}$ .

由于椭圆的  $e < 1$ , 如果  $n' > n$  就无解. 只要  $n' < n$ , 总可以找到一个椭球面能满足要求.

由于椭圆本身具有某种特性, 常在光学元件中使用旋转椭球面, 如旋转椭球面的反射镜可使从一个焦点发出的任何光线被反射后都通过另一焦点. 本题中的旋转椭球面则使平行于长轴的所有光线被折射后都交于一点, 不受傍轴条件的限制. 在解题过程中要很好利用解析几何中学过的椭圆的特性.

但要注意的是, 这些性质只适合于某些特定点, 物体在其他点时并不能很好成像. 反射球面和折射球面则只要满足傍轴条件都能成像, 对物体的位置没有其他限制.

35. 有一放在空气中的玻璃棒, 折射率  $n=1.5$ , 中心轴线长  $L=45$  cm, 一端是半径为  $R_1=10$  cm 的凸球面.

1) 要使玻璃棒的作用相当于一架理想的天文望远镜(使主光轴上无限远处物成像于主光轴上无限远处的望远系统), 取中心轴线为主光轴, 玻璃棒另一端应磨成什么样的球面?

2) 对于这个玻璃棒, 由无限远物点射来的平行入射光束与玻璃棒的主光轴成小角度  $\varphi_1$  时, 从棒射出的平行光束与主光轴成小角度  $\varphi_2$ . 求  $\varphi_2/\varphi_1$  (此比值等于此玻璃棒作为望远系统使用时的视角放大率).

### 解析

对于一个望远系统来说, 从主光轴上无限远处的物点发出的人射光为平行于主光轴的光线, 它经过系统后的出射光线也应与主光轴平行, 即像点也在主光轴上无限远处, 如图 7-87 所示, 图中  $C_1$  为左端球面的球心.

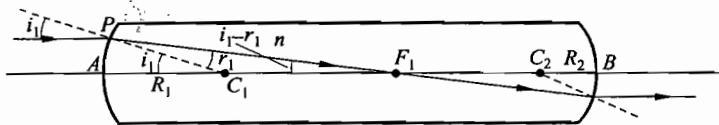


图 7-87

由正弦定理、折射定律和小角度近似得

$$\frac{\overline{AF_1} - R_1}{R_1} = \frac{\sin r_1}{\sin(i_1 - r_1)} \approx \frac{r_1}{i_1 - r_1} = \frac{1}{(i_1/r_1) - 1} \approx \frac{1}{n-1} \quad (1)$$

即

$$\frac{\overline{AF_1}}{R_1} - 1 = \frac{1}{n-1} \quad (2)$$

光线  $PF_1$  射至另一端面时,其折射光线为平行于主光轴的光线,由此可知该端面的球心  $C_2$  一定在端面顶点  $B$  的左方,  $C_2B$  等于球面的半径  $R_2$ ,如图 7-87 所示.

仿照上面对左端球面上折射的关系可得

$$\frac{\overline{BF_1}}{R_2} - 1 = \frac{1}{n-1} \quad (3)$$

又有

$$\overline{BF_1} = L - \overline{AF_1} \quad (4)$$

由(2)、(3)、(4)式并代入数值可得

$$R_2 = 5 \text{ cm} \quad (5)$$

即右端应为半径等于 5 cm 的向外凸的球面.

图 7-88 所示为从无限远处物点射来的、与主光轴之间的夹角为  $\varphi_1$  的平行光束,此光束中的光线①过  $C_1$ ,它经过球面时方向不变,光线②射向  $A$  点,折射后其方向与主光轴夹角为  $\varphi'_1$ ,光线①、②进入玻璃棒后相交于  $M$  点,  $M$  即为左端球面对此无限远物点成的像点. 现在求  $M$  点的位置. 在  $\triangle AC_1M$  中

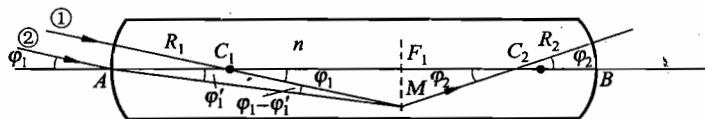


图 7-88

$$\frac{\overline{AM}}{\sin(\pi - \varphi_1)} = \frac{\overline{AM}}{\sin \varphi_1} = \frac{R_1}{\sin(\varphi_1 - \varphi'_1)} \quad (6)$$

又

$$n \sin \varphi'_1 = \sin \varphi_1 \quad (7)$$

已知  $\varphi_1, \varphi'_1$  均为小角度,则有

$$\frac{\overline{AM}}{\varphi_1} \approx \frac{R_1}{\varphi_1 \left(1 - \frac{1}{n}\right)} \quad (8)$$

与(2)式比较可知,  $\overline{AM} \approx \overline{AF_1}$ , 即  $M$  位于过  $F_1$  垂直于主光轴的平面上. 上面已知, 玻璃棒为天文望远系统, 则凡是过  $M$  点的傍轴光线从棒的右端面射出时都将是相互平行的光线. 容易看出, 从  $M$  射向  $C_2$  的光线将沿原方向射出, 这也就是过  $M$  点的任意光线(包括光线①、②)从玻璃棒射出的平行光线的方向. 此方向与主光轴的夹角即为  $\varphi_2$ , 由图 7-88

可得

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{C_1 F_1}{C_2 F_1} = \frac{AF_1 - R_1}{BF_1 - R_2} \quad (9)$$

由(2)、(3)式可得

$$\frac{AF_1 - R_1}{BF_1 - R_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

则

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{R_1}{R_2} = 2 \quad (10)$$

## 八、物理光学

1. 用单色光作如图 8-1 所示的双缝干涉实验时,位置的调节很难作得完全精确.

1) 如果光源前狭缝  $S$  (看做线光源) 的位置向中线  $OO'$  的一侧偏离了一个小距离, 则与调节精确时相比, 观察屏  $E$  上条纹间距\_\_\_\_\_。(回答变大、变小或不变.)

2) 如果观察屏  $E$  (垂直于图面) 与它的正确位置成一个小角度, 则与调节精确时相比, 屏上条纹间距\_\_\_\_\_。(回答变大、变小或不变.)

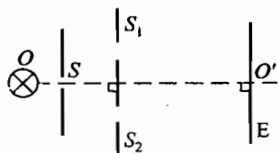


图 8-1

### 解析

1) 不变. 因为两个相干光源  $S_1$ 、 $S_2$  之间的距离未变, 光源与屏的距离也未变. 但此时  $S_1$ 、 $S_2$  的光振动相位差有所改变, 所以条纹的位置会有一整体的侧向平移.

2) 变大. 如果屏有一很小角度  $\alpha$  的偏差, 则干涉条件间距  $\Delta x \propto \frac{1}{\cos \alpha}$ , 所以间距变大. 但实际上, 当  $\alpha \approx 0$  时,  $\cos \alpha \approx 1$ , 因而这微小的增大可忽略不计.

2. 如图 8-2 所示, 薄透镜的焦距  $f=10$  cm, 其光心为  $O$ , 主轴为  $MN$ . 现将透镜对半切开, 剖面通过主光轴并与纸面垂直.

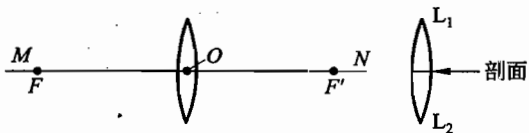


图 8-2

1) 将切开的两半透镜各沿垂直于剖面的方向拉开, 使剖面与  $MN$  的距离均为  $0.1$  mm, 移开后的空隙用不透光的物质填充组成干涉装置, 如图 8-3 所示, 其中  $P$  为单色点光源 ( $\lambda=550$  nm),  $PO=20$  cm,  $E$  为垂直于  $MN$  的屏, 屏与光心的距离

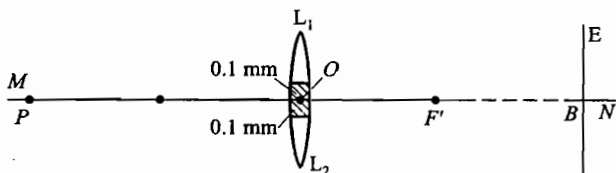


图 8-3

$\overline{OE} = 40 \text{ cm}$ .

- i) 用作图法画出干涉光路图.
- ii) 算出屏 E 上呈现的干涉条纹的间距.
- iii) 如屏 E 向右移动, 干涉条纹的间距将怎样变化?

2) 将切开的两半透镜沿主轴 MN 方向移开一小段距离, 构成干涉装置, 如图 8-4 所示. P 为单色光源, 位于半透镜  $L_1$  的焦点  $F_1$  外.

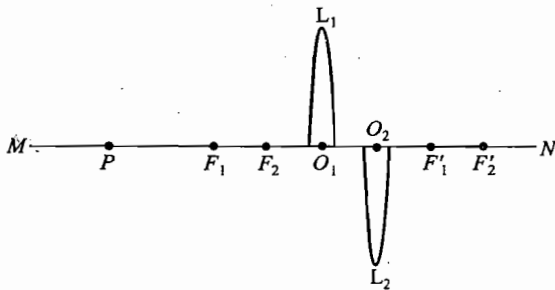


图 8-4

- i) 用作图法画出干涉光路图.
- ii) 用斜线标出相干光束交叠区.
- iii) 在交叠区放一观察屏 E, 该屏与 MN 垂直, 画出屏上呈现出的干涉条纹的形状.

3) 在本题第 2) 问中的情况下, 使点光源 P 沿主轴移到半透镜  $L_1$  的焦点  $F_1$  处, 如图 8-5 所示, 试回答第 2) 问中各题.

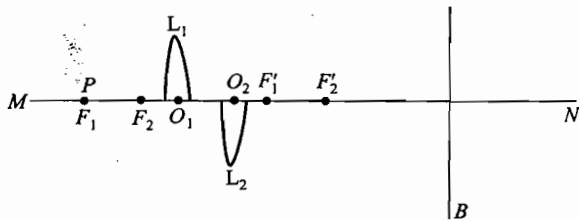


图 8-5



**解析**

1) i) 如图 8-6, 从点光源  $P$  引  $PO_1$  和  $PC_1$  两条光线,  $PO_1$  过  $L_1$  光心  $O_1$  后沿原方向传播.  $PC_1$  过  $L_1$  的边缘. 引  $PO$  辅助光线, 该光线与  $L_1$  的主光轴 (与  $O_1F_1'$  在同一条直线上) 平行, 经  $L_1$  折射后必通过焦点  $F_1'$ , 沿  $OF_1'$  方向传播, 与  $PO_1$  相交于  $S_1$  点,  $S_1$  为  $P$  经上半透镜  $L_1$  成像得到的实像点. 同理,  $S_2$  是  $P$  经下半透镜  $L_2$  所成的实像点, 连接  $C_1S_1$  和  $C_2S_2$ , 可得  $P$  点发出的光束经两半透镜折射后的光束的范围.  $S_1$  和  $S_2$  是由同一光源  $P$  形成的, 是两个相干的实的点光源, 斜线所标的范围为相干光束交叠区.

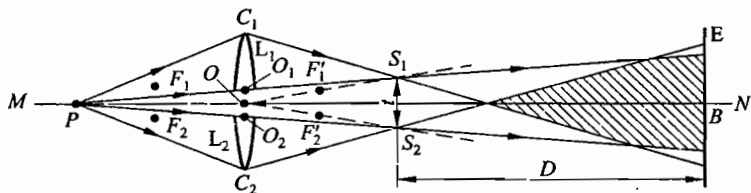


图 8-6

图 8-6 中,  $L_1$  的焦距  $f_1 = 10$  cm,  $\overline{OO_1} = 0.1$  mm,  $\overline{PO} = 20$  cm  $\approx 2f$ , 故  $P$  的像  $S_1$  与透镜的距离也是 20 cm.  $\overline{S_1S_2} = 2\overline{OO'} = 0.4$  mm,  $D = \overline{OB} - \overline{OS_1} = 20$  cm.

ii) 在交叠区放一与主光轴垂直的接收屏, 屏上呈现出与纸面垂直的明暗相间的条纹, 其条纹间距为

$$\Delta x = \frac{\lambda D}{S_1 S_2} = \frac{550 \times 10^{-9} \times 0.2}{4 \times 10^{-4}} \text{ m} = 2.75 \times 10^{-8} \text{ m}$$

iii) 屏  $E$  向右移动时,  $D$  增大, 条纹间距增大.

2) i) 如图 8-7(a), 从点光源  $P$  引  $PC_1$ 、 $PO_1$  和  $PC_2$  三条光线,  $PO_1$  过光心  $O_1$  和  $O_2$  沿直线方向传播. 过  $O_1$  引平行于  $PC_1$  的辅助光线经  $L_1$  不发生折射沿原方向传播, 与过  $F_1'$  的焦面交于  $A_1$  点, 连接  $C_1A_1$  直线与主轴交于  $S_1$  点, 该点即为  $P$  经上半透镜  $L_1$  成像所得的实像点; 同理可得  $P$  经下半透镜  $L_2$  所成的实像点  $S_2$ , 此二实像点沿主光轴方向移开.

ii) 图 8-7(a) 中斜线标出的范围为经  $L_1$  射来的和经  $L_2$  射来的两个与相干光束交叠区, 全部位于主光轴的下方.

iii) 由于两个光束在主光轴下方的区域均具有轴对称性, 在观察屏  $E$  上的干涉条纹为以主光轴为中心的一簇明暗相间的同心半圆环, 位于主光轴下方, 如图 8-7(b) 所示.

3) i) 如图 8-8(a), 点光源  $P$  移到  $F_1$ ,  $PO_1$ 、 $PO_2$  光线经过透镜后方向仍不变, 而  $PC_1$  光线经上半透镜  $L_1$  折射后变成与主光轴平行的光线,  $PC_2$  光线经下半透镜  $L_2$  折射后与  $PO_2$  交于  $S_2$  点,  $S_2$  为  $P$  经下半透镜  $L_2$  所成的实像点.

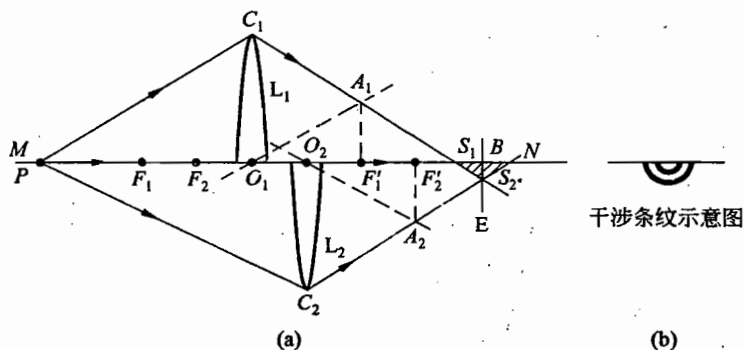


图 8-7

ii) 图 8-8(a) 中斜线所标出的范围为这种情况下的相干光束重叠区域。

iii) 这种情况在观察屏 E 上呈现出的干涉条纹也是以主轴为中心的一簇明暗相间的同心半圆环, 但位于主光轴上方, 如图 8-8(b) 所示。

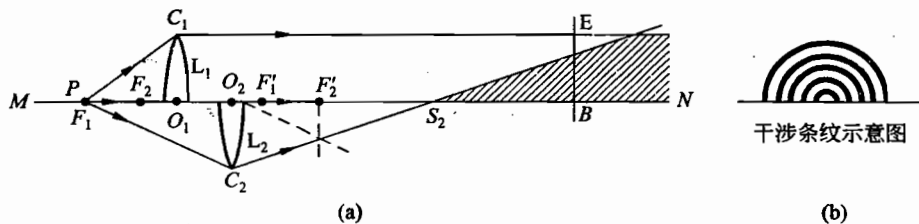


图 8-8

3. 将焦距  $f=20\text{ cm}$  的薄凸透镜从正中切去宽度为  $a$  的小部分, 见图 8-9(a). 再将剩下两半粘接在一起, 构成一个“粘合透镜”, 见图 8-9(b), 图中  $D=2\text{ cm}$ . 在粘合透镜一侧的中心轴线上距镜  $20\text{ cm}$  处, 置一波长  $\lambda=500\text{ nm}$  的单色点光源  $S$ , 另一侧, 垂直于中心轴线放置屏幕, 见图 8-9(c). 屏幕上出现干涉条纹, 条纹间距  $\Delta x=0.2\text{ mm}$ . 试问:

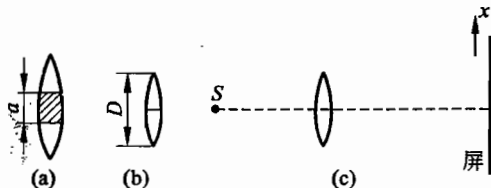


图 8-9

- 1) 切去部分的宽度  $a$  是多少?
- 2) 为获得最多的干涉条纹, 屏幕应离透镜多远?

### 解析

1) 首先讨论黏合透镜的上半个透镜的成像. 在图 8-10 中  $OO$  是粘合透镜的中心轴线, 在  $OO$  上方用实线画出了上半个透镜, 在  $OO$  下方未画下半个透镜, 而是补足了未切割前整个透镜的其余部分, 用虚线表示. 整个透镜的主光轴为  $O'O'$ ,  $C$  为整个透镜的光心.

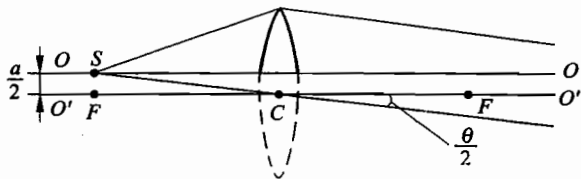


图 8-10

半个透镜的成像规律应与完整的透镜相同. 现在, 物点(即光源) $S$  在粘合透镜的中心轴线上, 即在图中透镜的主光轴上方  $a/2$  处. 离透镜光心的水平距离正好是透镜的焦距. 根据几何光学, 光源  $S$  发出的光线, 经透镜折射后成为一束平行光束, 其传播方向与  $SC$  平行. 设此方向与主光轴  $O'O'$  (对  $OO$  也是一样) 夹角为  $\frac{\theta}{2}$ , 由几何关系可知,  $\frac{\theta}{2} = \frac{a}{2f}$ . 根据题意,  $a \ll f, \theta \ll 1$ , 此光束的宽度为  $\frac{1}{2}D \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) \approx \frac{1}{2}D$ .

同理,  $S$  所发的光, 经下半个透镜折射后, 形成与  $O'O'$  轴夹角为  $\frac{\theta}{2}$ 、宽度也是  $\frac{D}{2}$ 、由左下方射向右上的平行光束.

于是, 在透镜右侧, 来自同一光源的两束夹角为  $\theta$  的相干的平行光束在右侧发生干涉 (见图 8-11), 图中两平行光束的重叠区(用阴影表示)即为干涉区. 为作图清楚起见, 图 8-10, 特别是图 8-11 中的  $\theta$  角, 均远较实际角度为大.

图 8-12 表示的是两束平行光的干涉情况, 其中  $\theta$  是和图 8-11 中的  $\theta$  相对应的. 图 8-12 中实线和虚线分别表示某一时刻的波峰平面和波谷平面, 在垂直于中心轴线的屏幕上,  $A, B, C$  表示相长干涉的亮纹位置,  $D, E$  表示相消干涉的暗纹位置, 相邻波峰平面之间的垂直距离是波长  $\lambda$ , 故干涉条纹间距  $\Delta x$  满足

$$2\Delta x \sin(\theta/2) = \lambda$$

在  $\theta$  很小的情况下, 上式成为  $\Delta x \theta = \lambda$ . 所以透镜切去的宽度

$$a = f\theta = f\lambda/\Delta x = \frac{(0.2 \text{ m}) \times (0.5 \times 10^{-6} \text{ m})}{0.2 \times 10^{-3} \text{ m}} = 0.5 \text{ mm}$$

$$\theta = \frac{a}{f} = \frac{0.5}{200} \text{ rad}$$

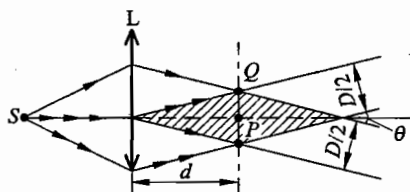


图 8-11

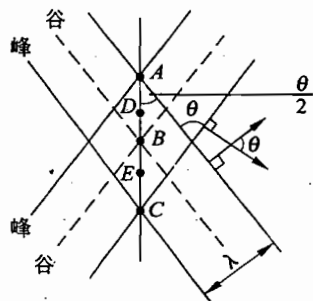


图 8-12

2) 由以上的求解过程可知,干涉条纹间距  $\Delta x$  与屏幕离透镜  $L$  的距离无关,这正是两束平行光干涉的特点.但屏幕必须位于两束光的相干叠加区才行.图 8-11 中以阴影菱形部分表示这一相干叠加区.因为由上述已知条纹是等距的,显然当屏幕位于  $PQ$  处可获得最多的干涉条纹;而  $PQ$  平面到透镜  $L$  的距离

$$\bar{d} = \frac{D/2}{\theta} = (10^{-2} \text{ m}) / (0.5/200) = 4 \text{ m}$$

本题涉及几何光学和光的干涉两部分内容.必须将粘合透镜的中心轴线和切割的半透镜的主光轴区分开,才能正确地分析这种粘合透镜的作用.平行光的干涉不能套用两个点光源的干涉,需要利用振动叠加这一根本原理进行分析.

4. 由阴极  $K$  发射的电子(质量为  $m$ , 电荷量为  $e$ , 设其初速度为零)经加速极  $A$  加速后垂直射向一开有两条平行狭缝的屏,电子自狭缝出射后打到一荧光屏上,如图 8-13 所示.由于电子具有波动性,荧光屏将出现明暗相间的条纹.设加速极  $A$  与阴极  $K$  之间的电压为  $U$ , 两平行狭缝间的距离为  $d$ , 试问:

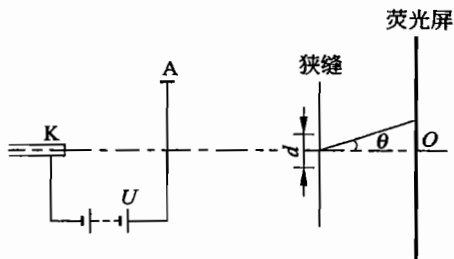


图 8-13

1) 在整个装置的轴线与荧光屏的交点  $O$  处,将出现暗条纹还是亮条纹?

2) 设位于轴线外侧的第一条亮条纹出现在  $\theta$  角处,写出  $\theta$  的表示式(以  $m, e, d, U$  及其他有关常量表示).

### 解析

1) 中央( $O$ 点处)出现亮条纹.

2) 以  $\lambda$  表示电子的波长,  $p$  表示电子的动量,则有

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad p = \sqrt{2meU}$$

故

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU}}$$

单缝衍射的公式为

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{d}$$

因  $\lambda \ll d$ ,  $\sin \theta \approx \theta$ , 因而得

$$\theta = \frac{h}{d\sqrt{2meU}}$$

5. 有些照相机和测量仪的镜头看上去是紫红(或蓝紫)色的,这是因为镜头表面镀有一层透明物质的薄膜,它的作用是\_\_\_\_\_.

### 解析

增透黄绿色光.

光束照射到两个介质的界面时,部分光将被反射回原介质,因而进入第二介质的光强变弱.如果光束垂直入射,第一介质的折射率为  $n_1$ ,第二介质的折射率为  $n_2$ ,由光的电磁理论得出的反射光强  $I$  与入射光强  $I_0$  的比值为

$$\frac{I}{I_0} = \left( \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2$$

如果在透镜表面上镀一层折射率为  $n'$  的透明薄膜,且  $n'$  小于透镜材料的折射率  $n$ ,则反射光强将会减小,透射光将增强,这个薄膜有增透作用.读者可通过试算证明这一结论.

另外,在薄膜的第一个表面反射的光和第二个表面反射的光会发生干涉,如果薄膜厚度适当,某一波长的光的两个反射光的相位差正好为  $\pi$ ,则二者相消,反射光将很弱,该波长的光基本上能透过.波长在其附近的光,虽然相位差不是  $\pi$ ,但在  $\pi$  附近,也能相互抵消一部分,透射光也能有所增加.如果我们选择薄膜的厚度使可见光谱中央部分的某个波长(例如 550 nm)的两个反射光相位差为  $\pi$ ,则在反射光中黄绿色光的成分将大为减少,而波长比较短的蓝紫光部分和波长比较长的红橙光部分受影响很少,故反射光呈紫红色.

6. 一位近视眼朋友不戴眼镜时,能看清的物体都在距眼睛  $a=20$  cm 以内.他发现,如果在眼前靠近眼睛处放一个有小圆孔的卡片,通过小圆孔不戴眼镜看远处的物体时也能看得清晰些.

1) 若小圆孔直径为  $D$ ,试根据几何光学原理求出当近视眼直视远处的一个点物时,

眼的视网膜上产生的光斑的直径.

2) 再考虑小圆孔的衍射效应, 求小圆孔直径最恰当的大小. 计算时可取可见光的平均波长为 600 nm.

[提示]

1) 人眼是一个结构比较复杂的光学系统, 在本题中, 可将人眼简化成一个焦距  $f$  可调的薄透镜和一个可成像的视网膜, 透镜的边缘为瞳孔, 两侧介质均为空气, 视网膜与透镜的距离为  $b$ .

2) 小圆孔的存在对透镜成像的影响介绍如下: 在几何光学中, 从远处物点射向透镜的、平行于光轴的平行光束将会聚于透镜的焦点上, 这就是像. 如果在透镜前放一直径为  $D$  的小圆孔, 则将发生光的衍射, 在焦点处像屏上将出现如图 8-14 所示的衍射图样, 其中央是一个明亮的圆斑, 圆斑外周是一组亮度逐渐减弱的亮暗相间的同心圆环, 由于这些圆环亮度比中央圆斑弱得多, 观察时可以不予考虑. 中央圆斑的半径对薄透镜中心的张角  $\Delta\theta$  的大小与  $D$  有关. 理论计算得到

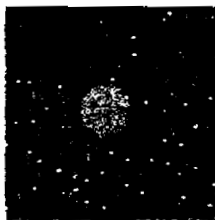


图 8-14

$$\Delta\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

式中  $\lambda$  是所用光的波长, 此圆斑就是有小圆孔时观察到的物点的“像”, 如图 8-15 所示. 由上式可见,  $D$  越大, 像斑就越小, 点物的像就越接近一个点, 物体的像越清晰; 反之,  $D$  越小, 点物的衍射像斑就越大, 物体的像就越不清晰. 如果观察屏不在焦点处而在焦点附近, 屏上将出现类似的衍射图样, 其中央亮斑对透镜中心的张角  $\Delta\theta$  可近似地用上式计算.

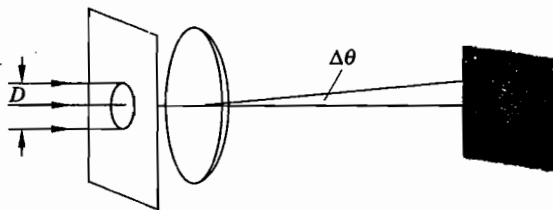


图 8-15

### 解析

1) 图 8-16 是近视眼观察能看清的最远的物时的成像光路图. 对近视眼, 通过眼睛调节, 能看清的物到眼睛的最大距离为  $a$ , 位于光轴上的物点, 将成像在视网膜上; 离眼睛无限远, 位于光轴上的物点, 只能成像在焦点  $F$ , 在视网膜上是一个光斑, 此光斑就是物点在视网膜上的模糊的“像”. 如果在眼前靠近眼睛处放一个有小圆孔的卡片, 小孔使视网膜上

的光斑变小,如图 8-17 所示.光斑越小,即模糊像点越小,眼睛感觉到的像越清晰.因此,在靠近眼睛处放一个小于瞳孔的小圆孔会使模糊像斑比由瞳孔决定的模糊像斑小,能看得清晰些.

下面计算视网膜上光斑的直径.由图 8-16,根据透镜公式

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (1)$$

可求得此时的焦距为

$$f = \frac{ab}{a+b} \quad (2)$$

当眼睛处于图 8-17 状态观察远物时,从光轴上一物点射来的平行光,经过直径为  $D$  的小孔后将会聚于焦点  $F$ ,在网膜上出现直径为  $D'$  的光斑,如图 8-17 所示.

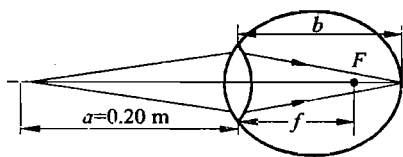


图 8-16

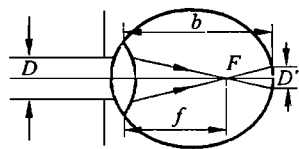


图 8-17

由几何关系和式(2),可得光斑的直径  $D'$

$$D' = \frac{b-f}{f}D = \frac{b}{a}D \quad (3)$$

由式(3)可知,从几何光学的角度考虑, $D$  越小, $D'$  越小.

2) 现在考虑衍射问题.入射的平行光束经小孔后在透镜后的网膜上产生衍射圆斑,设其直径为  $D''$ ,则根据题给公式的近似,可得

$$D'' = 2b\Delta\theta = 2.44 \frac{\lambda b}{D} \quad (4)$$

由式(4)可知, $D$  越小, $D''$  越大.将使“像点”变得更为模糊.所以不能用太小的圆孔.最恰当的圆孔直径  $D$  的大小应使视网膜上几何光学模糊光斑和衍射光斑一样大,即

$$D' = D'' \quad (5)$$

此时“像”最为清晰.设此时小孔的直径为  $D_0$ ,则有

$$\frac{b}{a}D_0 = 2.44 \frac{\lambda b}{D_0} \quad (6)$$

$$D_0 = \sqrt{2.44\lambda a} \quad (7)$$

以  $\lambda = 600 \times 10^{-9} \text{ m}$ ,  $a = 0.20 \text{ m}$  代入得

$$D_0 = 0.54 \times 10^{-3} \text{ m} \quad (8)$$

眼睛是一个构造比较复杂的光学系统.入射光线要经过角膜表面上的折射和晶体前后表面上的多次折射.眼睛角膜外的介质是空气,角膜与晶体之间和晶体与视网膜之间都充满了折射率为1.336的液体.本题为了使学生能进行分析计算,提出了一个简化模型,眼球的折射作用简化为一个凸透镜,且透镜两侧的介质都是空气,这些都与实际情况不同.此外,眼睛的焦距是可以调节的,观察者观察远处物体时,眼睛会自动地调节到能看清楚的最远处,即物距为 $a$ 处,所以解答中的眼睛系统就处于 $a$ 处物体在视网膜上成像的状态.

### 7. 电子显微镜比普通显微镜更能分辨物体的细节,这是什么原因?

#### 解析

由于波动有衍射现象.一个物点发出的光束经过光学系统后形成的像不是一个点,而是一个圆形光斑.因而邻近物点的圆形光斑将相互交叠而不能分辨.圆形光斑的大小与光波的波长成反比,波长越短,光斑越小,物体的细节能分辨得更好.运动电子也具有波动性的特点,它们经过电磁透镜后能成像,也有衍射现象.由于电子的波长比可见光的波长短很多倍,因而用电子显微镜观察物体时能分辨出物体形状的更小的细节.

### 8. 列举激光的两个特性:

1) \_\_\_\_\_;

2) \_\_\_\_\_.

举出激光的两种用途:

1) \_\_\_\_\_;

2) \_\_\_\_\_.

#### 解析

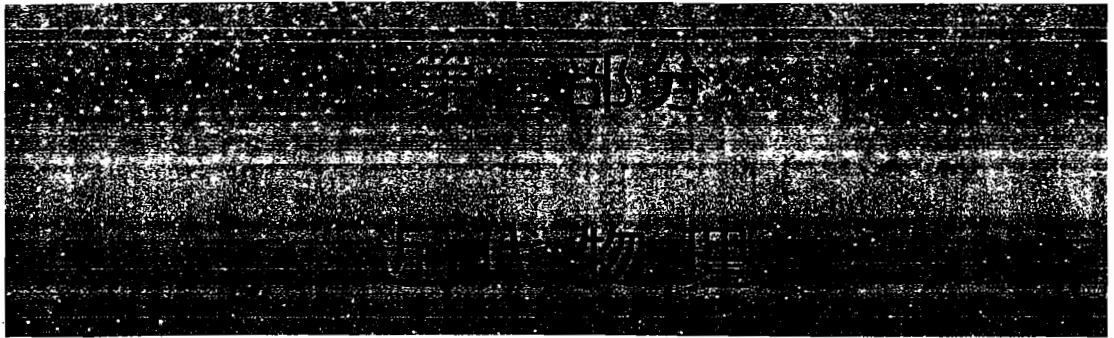
特性有极好的方向性;极好的单色性;高亮度等.用途有激光测距;激光通信;激光切割;激光焊接;全息照相;激光定向等.(列举激光其他特性和用途的,同样算正确.)

9. 全息照相底片和普通照相底片在摄影冲洗后其底片上图像的不同点是\_\_\_\_\_.

#### 解析

普通照相底片上的图像是被照物体的像,而全息照相底片上的图像是被照物体散射的光束和参考光束相互干涉后形成的干涉条纹.







## 九、原子结构

1. 氢原子基态电子云分布的正确图形是图 9-1 中四个图中的\_\_\_\_\_图.

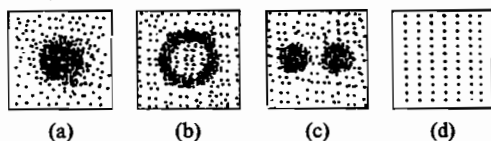


图 9-1

### 解析

(a).

根据量子力学,氢原子基态(即 1s 态)的波函数是

$$\Psi_{1,0,0}(r, \theta, \varphi) = R_{1,0}(r) \times Y_{0,0}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \times 2 \left( \frac{1}{a} \right)^{3/2} e^{-r/a}$$

$\Psi_{1,0,0}$  的平方在空间各点的分布即是电子云密度的分布,用黑点的疏密表示即为电子云图.正确的图形是中间最密,向外逐渐变疏的球对称图形,即(a)图①②.

有的中学物理教材中画成上面(b)图,这是不对的.有的中学物理教材中虽画的是(a)图,但在解说中却没有把它与电子轨道半径的关系说清楚.其实,氢原子基态电子云分布的正确图像应是(a),即为中间最密,向外逐渐变疏的球形对称图.也就是说,若取相同的小体积来比较,则电子在中间出现的概率最大,越往外越小.但是如果取同样厚(即  $\Delta r$  相同)的球壳来比较则可证在  $r=a=0.53 \times 10^{-10}$  m 处电子出现的概率最大.有的中学教材把这一点与电子云的分布图混淆起来了.

2. 已知氢原子  $n=1$  能级的能量为  $-13.6$  eV. 氢原子从  $n=3$  的能级跃迁到  $n=2$  的能级时所发射的光为\_\_\_\_\_色.

① 《高级中学物理课本(乙种本)》下册 325 页图 10-7.

② 杨福家:《原子物理学》第二版 355,356,362 页或其他原子物理学.

**解析**

红色.

氢原子  $n=3$  和  $n=2$  的能级的能量分别为

$$E_3 = -\frac{13.6}{3^2} \text{ eV} = -1.51 \text{ eV}$$

$$E_2 = -\frac{13.6}{2^2} \text{ eV} = -3.40 \text{ eV}$$

当氢原子从  $n=3$  的能级跃迁到  $n=2$  的能级时,所发射的光谱线的波长应为

$$\lambda = \frac{hc}{E_3 - E_2} = 658 \text{ nm}$$

为红色.

3. 氢原子光谱中,赖曼系(由各激发态跃迁到基态所发射的各谱线组成的谱线系)、巴耳末系及帕邢系各系的最短波长的谱线所对应的光子能量是多少?(氢原子的电离能是  $13.6 \text{ eV}$ )

答: 赖曼系最短波长的谱线所对应的光子能量是  $\underline{\hspace{2cm}}$  eV;

巴耳末系最短波长的谱线所对应的光子能量是  $\underline{\hspace{2cm}}$  eV;

帕邢系最短波长的谱线所对应的光子能量是  $\underline{\hspace{2cm}}$  eV.

**解析**

$13.6; 3.4; 1.51$ .

解答本题首先要明确电离能是指从基态能级  $E_1$  跃迁到使原子电离(即  $E_\infty = 0$ )所需的能量. 由此可知,

$$E_\infty - E_1 = 13.6 \text{ eV}$$

得到基态能量  $E_1 = -13.6 \text{ eV}$ .

其次要明确赖曼系最短波长的谱线是从  $n=\infty$  跃迁到  $n=1$  时发出的光,对应的光子能量为  $E_\infty - E_1$ ; 巴耳末系最短波长的谱线对应的光子能量为  $E_\infty - E_2$ ; 帕邢系最短波长的谱线对应的光子能量为  $E_\infty - E_3$ .

最后,还要用到计算氢原子能级  $E_n$  的能量公式  $E_n = \frac{1}{n^2} E_1$ , 由此计算出

$$E_2 = \frac{1}{4} E_1 = \frac{1}{4} \times (-13.6) \text{ eV} = -3.4 \text{ eV}$$

$$E_3 = \frac{1}{9} E_1 = \frac{1}{9} \times (-13.6) \text{ eV} = -1.51 \text{ eV}$$

从而得到

$$E_{\infty} - E_2 = 0 - (-3.4)\text{eV} = 3.4\text{eV}$$

$$E_{\infty} - E_3 = 0 - (-1.51)\text{eV} = 1.51\text{eV}$$

4. 一个氢放电管发光,在其光谱中测得一条谱线的波长为  $4.86 \times 10^{-7}\text{m}$ . 试计算这是氢原子中电子从哪一个能级向哪一个能级(用量子数  $n$  表示)跃迁时发出的? 已知氢原子基态( $n=1$ )的能量为  $E_1 = -13.6\text{eV} = -2.18 \times 10^{-18}\text{J}$ , 普朗克常量为  $h = 6.63 \times 10^{-34}\text{J} \cdot \text{s}$ .

### 解析

波长  $\lambda$  与频率  $\nu$  的关系为

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \quad (1)$$

$c$  为真空中的光速. 光子的能量为

$$E_{\nu} = h\nu \quad (2)$$

由式(1)、(2)可求得产生波长  $\lambda = 4.86 \times 10^{-7}\text{m}$  谱线的光子的能量

$$E_{\nu} = 4.09 \times 10^{-19}\text{J} \quad (3)$$

氢原子的能级能量为负值并与电子数  $n$  的平方成反比.

$$E_n = -k \frac{1}{n^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

式中  $k$  为正的比例常数. 氢原子基态的量子数  $n=1$ , 基态能量  $E_1$  已知, 由式(4)可得出

$$k = -E_1 \quad (5)$$

把(5)式代入(4)式, 便可求得氢原子的  $n=2, 3, 4, 5, \dots$  各能级的能量, 它们是

$$E_2 = -\frac{1}{2^2}k = -5.45 \times 10^{-19}\text{J}$$

$$E_3 = -\frac{1}{3^2}k = -2.42 \times 10^{-19}\text{J}$$

$$E_4 = -\frac{1}{4^2}k = -1.36 \times 10^{-19}\text{J}$$

$$E_5 = -\frac{1}{5^2}k = -8.72 \times 10^{-20}\text{J}$$

比较以上数据, 发现

$$E_{\nu} = E_4 - E_2 = 4.09 \times 10^{-19}\text{J}$$

所以, 这条谱线是电子从  $n=4$  的能级跃迁到  $n=2$  的能级时发出的.

5. 1884年巴耳末研究了基本位于可见光区的氢原子光谱线系(后来称为巴耳末系), 该线系从长波端开始的四条谱线波长  $\lambda$  和谱线系短波极限波长  $\lambda_0$  的实验值如下:

656.210 nm, 486.074 nm, 434.010 nm, 410.120 nm, ..., 364.561 nm.

巴耳末发现该线系波长  $\lambda$  若用线系极限波长  $\lambda_0$  去除, 至少可在五位有效数字准确度内写成下列有理数:

$$\frac{656.210}{364.561} = \frac{9}{5}, \frac{486.074}{364.561} = \frac{4}{3}, \frac{434.010}{364.561} = \frac{25}{21}, \frac{410.120}{364.561} = \frac{9}{8}, \dots$$

试据此引出反映此实验结果的经验公式, 即线系波长的巴耳末公式, 并求出里德伯常量的实验值.

### 解析

谱线实验值  $\frac{\lambda}{\lambda_0}$  为:  $\frac{9}{5}, \frac{4}{3}, \frac{25}{21}, \frac{9}{8}, \dots$

将第二项、第四项分子分母同乘以 4, 得:  $\frac{9}{5}, \frac{16}{12}, \frac{25}{21}, \frac{36}{32}, \dots$

上述数列进一步可写为:  $\frac{9}{9-4}, \frac{16}{16-4}, \frac{25}{25-4}, \frac{36}{36-4}, \dots$

或  $\frac{3^2}{3^2-2^2}, \frac{4^2}{4^2-2^2}, \frac{5^2}{5^2-2^2}, \frac{6^2}{6^2-2^2}, \dots$

即  $\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{n^2}{n^2-2^2}, n=3, 4, 5, \dots$

所以  $\lambda = \lambda_0 \frac{n^2}{n^2-2^2}$

用波长倒数, 可将上述巴耳末公式写成更简单形式:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_0} \frac{n^2-2^2}{n^2} = \left(\frac{2^2}{\lambda_0}\right) \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

即

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

其中

$$\begin{aligned} R &= \frac{2^2}{\lambda_0} = \frac{4}{364.561} \text{ nm}^{-1} \\ &= 1.0972 \times 10^{-2} \text{ nm}^{-1} = 1.0972 \times 10^7 \text{ m}^{-1} \end{aligned}$$

6. 有两个处于基态的氢原子 A、B, A 静止, B 以速度  $v_0$  与之发生碰撞. 已知: 碰撞后二者的速度  $v_A$  和  $v_B$  在一条直线上, 碰撞过程中部分动能有可能被某一氢原子吸收, 从而该原子由基态跃迁到激发态, 然后, 此原子向低能态跃迁, 并发出光子. 如欲使碰后发出一个光子, 试论证: 速度  $v_0$  至少需要多大 (以  $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$  表示)? 已知电子电荷量为  $e=1.602 \times$

$10^{-19}\text{C}$ , 质子质量为  $m_p = 1.673 \times 10^{-27}\text{kg}$ , 电子质量为  $m_e = 9.11 \times 10^{-31}\text{kg}$ . 氢原子的基态能量为  $E_1 = -13.58\text{eV}$ .

### 解析

为使氢原子从基态跃迁到激发态, 需要能量最小的激发态是  $n=2$  的第一激发态. 已知氢原子的能量与其主量子数的平方成反比. 即有

$$E_n = k \frac{1}{n^2} \quad (1)$$

又知基态( $n=1$ )的能量为  $-13.58\text{eV}$ , 即

$$E_1 = k \frac{1}{1^2} = -13.58\text{eV}$$

所以

$$k = -13.58\text{eV}$$

$n=2$  的第一激发态的能量为

$$E_2 = k \frac{1}{2^2} = -13.58 \times \frac{1}{4}\text{eV} = -3.39\text{eV} \quad (2)$$

为使基态的氢原子激发到第一激发态所需能量为

$$E_{\text{内}} = E_2 - E_1 = (-3.39 + 13.58)\text{eV} = 10.19\text{eV} \quad (3)$$

这就是氢原子从第一激发态跃迁到基态时发出的光子的能量, 即

$$h\nu = E_{\text{内}} = 10.19\text{eV} = 10.19 \times 1.602 \times 10^{-19}\text{J} = 1.632 \times 10^{-18}\text{J} \quad (4)$$

式中  $\nu$  为光子的频率. 从开始碰撞到发射出光子, 根据动量和能量守恒定律有

$$mv_0 = mv_A + mv_B + \text{光子的动量} \quad (5)$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m(v_A^2 + v_B^2) + h\nu \quad (6)$$

光子的动量  $p_\nu = \frac{h\nu}{c}$ . 由(6)式可推得  $mv_0 > \frac{2h\nu}{v_0}$ , 因为  $v_0 \ll c$ , 所以  $mv_0 \gg \frac{h\nu}{c}$ , 故(5)式中光子的动量与  $mv_0$  相比较可忽略不计, (5)式变为

$$mv_0 = mv_A + mv_B = m(v_A + v_B) \quad (7)$$

符合(6)、(7)两式的  $v_0$  的最小值可推求如下: 由(6)式及(7)式可推得

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m(v_A + v_B)^2 - mv_A v_B + h\nu$$

$$= \frac{1}{2}mv_0^2 - mv_A(v_0 - v_A) + h\nu$$

$$mv_A^2 - mv_A v_0 + h\nu = 0$$

经配方得

$$m\left(v_A - \frac{1}{2}v_0\right)^2 - \frac{1}{4}mv_0^2 + h\nu = 0.$$

$$\frac{1}{4}mv_0^2 = h\nu + m\left(v_A - \frac{1}{2}v_0\right)^2 \quad (8)$$

由(8)式可看出,当  $v_A = \frac{1}{2}v_0$  时,  $v_0$  达到最小值  $v_{0\min}$ , 此时

$$v_A = v_B \quad (9)$$

$$v_{0\min} = 2\sqrt{\frac{h\nu}{m}} \quad (10)$$

代入有关数值,得

$$v_{0\min} = 6.25 \times 10^4 \text{ m/s} \quad (11)$$

答: B 原子的速度至少应为  $6.25 \times 10^4 \text{ m/s}$ .

7. 质量为  $m$  的静止原子, 由于内部能级变化 ( $E_2 \rightarrow E_1$ ) 而发射出一个光子. 已知  $mc^2 \gg (E_2 - E_1)$ , 求原子的反冲(后退)动能  $T$  与光子能量  $E$  的比值. (注意, 能量为  $E$  的光子, 其动量为  $E/c$ ,  $c$  为光速.)

### 解析

根据动量守恒定律可知, 原子的反冲动量的大小等于光子动量的大小, 即  $p = \frac{E}{c}$ , 所以反冲动能

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{E^2}{2mc^2}$$

因此原子的反冲动能与光子能量的比值为

$$\frac{p^2/(2m)}{E} = \frac{E}{2mc^2}$$

8. 原子核俘获一个  $\mu^-$  子 ( $\mu^-$  子质量是电子质量的 207 倍, 电荷与电子相同) 形成  $\mu$  原子, 假设原子核静止, 试求:

1)  $\mu^-$  子的第一轨道半径. 已知原子核的质量数为  $A$ , 且中子数  $N$  等于质子数  $Z$ , 氢原子的第一玻尔轨道半径  $a_0 = 0.529 \times 10^{-10} \text{ m}$ .

2) 当  $A$  大于什么值时,  $\mu^-$  子轨道将进入原子核内. 已知原子核半径的公式为  $R = 1.2 \times 10^{-15} A^{\frac{1}{3}} \text{ m}$ .

### 解析

1) 用  $m_{\mu^-}$ 、 $a$  和  $v$  分别表示  $\mu^-$  子的质量、第一轨道半径和速度, 根据库仑定律和牛顿



定律,可列出第一轨道上的运动方程:

$$k \frac{\frac{1}{2} A e^2}{a^2} = m_{\mu^-} \frac{v^2}{a}$$

根据量子化条件,对第一轨道有

$$m_{\mu^-} v a = \frac{h}{2\pi}$$

同理,对氢原子可得下式

$$k \frac{e^2}{a_0^2} = m_e \frac{v_0^2}{a_0}$$

$$m_e v_0 a_0 = \frac{h}{2\pi}$$

式中  $m_e$ 、 $a_0$  和  $v_0$  分别表示电子的质量、第一轨道半径和速度.由以上四式,可解得

$$a = \frac{2a_0}{A} \cdot \frac{m_e}{m_{\mu^-}}$$

代入数值,经计算可得

$$a = \frac{5.11 \times 10^{-13}}{A} \text{ m}$$

2) 由上面已知  $a = \frac{2a_0}{A} \cdot \frac{m_e}{m_{\mu^-}}$ ,要使  $\mu^-$  子轨道进入原子核内,则要满足下式

$$\frac{2a_0}{A} \cdot \frac{m_e}{m_{\mu^-}} < R$$

将题中已知的各量代入,可解得

$$A > 94$$

9. 已知基态  $\text{He}^+$  的电离能为  $E=54.4 \text{ eV}$ .

1) 为使处于基态的  $\text{He}^+$  进入激发态,入射光子所需的最小能量应为多少?

2)  $\text{He}^+$  从上述最低激发态跃迁返回基态时,如考虑到该离子的反冲,则与不考虑反冲相比,它所发射的光子波长的百分变化有多大?(离子  $\text{He}^+$  的能级  $E_n$  与  $n$  的关系和氢原子能级公式类似.电子电荷取  $1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$ ,质子和中子质量均取  $1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ .在计算中,可采用合理的近似).

### 解析

1) 电离能表示  $\text{He}^+$  的核外电子脱离氦核的束缚所需要的能量,而题问最小能量对应于核外电子由基态能级跃迁到第一激发态,所以

$$E_{\text{最小}} = E \cdot \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = 54.4 \times \left( 1 - \frac{1}{4} \right) = 40.8 \text{ eV} \quad (1)$$

2) 解法 I 如果不考虑离子的反冲,由第一激发态跃迁回基态发射的光子有关系式:

$$E_{\text{最小}} = h\nu_0 \quad (2)$$

现在考虑离子的反冲,光子的频率将不是  $\nu_0$  而是  $\nu$ ,  $(1/2)m\nu^2$  为反冲离子的动能,则由能量守恒得

$$E_{\text{最小}} = h\nu + m\nu^2/2 \quad (3)$$

又由动量守恒得

$$m\nu = h\nu/c \quad (4)$$

式中  $m\nu$  是反冲离子动量的大小,而  $h\nu/c$  是发射光子的动量的大小.于是,波长的相对变化

$$\frac{|\Delta\lambda|}{\lambda_0} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\nu_0 - \nu}{\nu} = \frac{h\nu_0 - h\nu}{h\nu} \quad (5)$$

由(2)、(3)、(4)式可得

$$\frac{|\Delta\lambda|}{\lambda_0} = \frac{m\nu^2/2}{m\nu c} = \frac{m\nu c}{2mc^2} = \frac{h\nu}{2mc^2}$$

由于  $mc^2 \gg h\nu \gg h(\nu - \nu_0)$

$$\text{所以} \quad \frac{|\Delta\lambda|}{\lambda_0} = \frac{h\nu_0}{2mc^2} - \frac{h(\nu - \nu_0)}{2mc^2} \approx \frac{h\nu_0}{2mc^2}$$

代入数据

$$\frac{|\Delta\lambda|}{\lambda_0} = \frac{40.8 \times 1.60 \times 10^{-19}}{2 \times 4 \times 1.67 \times 10^{-27} \times (3 \times 10^8)^2} = 5.4 \times 10^{-9}$$

即百分变化为 0.000 000 54%.

解法 II 在不计反冲时,所发射光子频率为  $\nu_0 = E_{\text{最小}}/h$  对应的波长是

$$\lambda_0 = c/\nu_0 \quad (2')$$

在计及反冲时,光子的频率设为  $\nu$ ,  $\text{He}^+$  的反冲速度为  $v$ ,则由能量守恒和动量守恒分别得到

$$h\nu + m\nu^2/2 = h\nu_0 \quad (3')$$

$$h\nu/c = mv \quad (4')$$

(3')式和(4')式联立可得

$$h\nu + (h\nu/c)^2/(2m) = h\nu_0 \quad (5')$$

利用(2')式和  $\nu = c/\lambda$ ,上式化为

$$\lambda^2 - \lambda_0\lambda + h\lambda_0/(2mc) = 0 \quad (6')$$

把(6')式视为关于  $\lambda$  的一元二次方程,其解是

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda_0/2 \pm \sqrt{\lambda_0^2 + 4h\nu_0/(2mc)} / 2 \\ &= [\lambda_0 \pm \lambda_0 \sqrt{1 + 2h\nu_0/(mc^2)}] / 2\end{aligned}$$

显然,  $\lambda$  为正值要求舍去上式中取负号的解, 由于  $2h\nu_0/(mc^2) \ll 1$ , 按公式  $(1+x)^{1/2} = 1+x/2+\dots$ , 取一级近似, 即保留到展开公式的  $x$  一次项, 我们有

$$\lambda = [\lambda_0 + \lambda_0(1 + h\nu_0/mc^2)]/2 = \lambda_0 + \lambda_0 h\nu_0/(2mc^2)$$

于是

$$(\lambda - \lambda_0)/\lambda_0 = h\nu_0/(2mc^2)$$

代入数值, 得  $(\lambda - \lambda_0)/\lambda_0 = 5.4 \times 10^{-9}$ , 即 0.000 000 54%。

10. 考虑一个原子序数为  $Z$  的经典原子模型, 忽略电子间的相互作用. 设原子中某一个电子  $e_1$  在离核  $r_0$  处做平面匀速圆周运动. 突然, 由于某个过程, 外面的另一个电子被俘获进原子核. 假定这俘获过程进行得如此之快以至电子  $e_1$  的速度未受任何影响, 而仍然留在原子系统中. 试把描述电子  $e_1$  在这种情况下运动的量(能量、轨道参数、周期)都用  $r_0$ 、电子质量  $m$ 、电子电荷绝对值  $e$ 、原子序数  $Z$  表达出来, 并与原来的运动作比较.

### 解析

电子与核之间的作用力是库仑力, 它与距离的关系也是平方反比关系, 所以在本题中可以用引力的规律进行处理.

在发生俘获前电子绕核做圆周运动, 设其速度为  $v_0$ , 则有

$$kZe^2/r_0^2 = mv_0^2/r_0$$

式中  $k$  为一常量. 由此可求得  $v_0$  和动能  $E_k$  分别为

$$v_0 = \sqrt{\frac{kZe^2}{mr_0}}, \quad E_k = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{kZe^2}{2r_0}$$

此时电子的电势能为

$$E_p = -kZe^2/r_0$$

故电子的总能量为

$$E = E_k + E_p = -kZe^2/(2r_0)$$

电子运动周期为

$$T = \frac{2\pi r_0}{v_0} = 2\pi(r_0)^{3/2} \sqrt{\frac{m}{kZe^2}}$$

设在  $e_1$  位于  $A$  点时另一个电子被俘获, 以后  $e_1$  将如何运动呢? 根据题设, 俘获结束时  $e_1$  的速度  $v_A' = v_0$ , 动能

$$E'_{kA} = mv_A'^2/2 = E_k$$

但由于核上的电荷由  $Ze$  变为  $(Z-1)e$ , 电势能变为

$$E_p'(r_0) = -k(Z-1)e^2/r_0$$

因而总能量变为

$$E' = E'_{kA} + E'_p(r_0) = \frac{kZe^2}{2r_0} - \frac{k(Z-1)e^2}{r_0} = -\frac{k(Z-2)e^2}{2r_0} > E$$

由上式可知,  $Z$  一定大于 2, 因为若  $Z \leq 2, E' \geq 0$ , 电子  $e_1$  将运动到无穷远处而脱离原子, 与题设矛盾. 由上式还可以看出, 此时库仑力小于维持圆周运动所需的向心力, 故电子  $e_1$  将做椭圆运动, 而  $A$  应位于长轴上的近日点或远日点, 因为  $e_1$  在此处的速度垂直于电子与核的连线. 假设长轴上的另一端点为  $B$ , 与核的距离为  $r_B$ ,  $e_1$  在  $B$  点处的速度为  $v_B$ , 则根据面积速度守恒及能量守恒有:

$$\text{面积速度:} \quad S = \frac{1}{2} r_B v_B = \frac{1}{2} r_0 v_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{kZe^2 r_0}{m}}$$

$$\text{能量:} \quad \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{k(Z-1)e^2}{r_B} = -\frac{k(Z-2)e^2}{2r_0}$$

由此二式可得  $r_B$  的方程式

$$\frac{(Z-2)r_B^2}{Z} - \frac{2(Z-1)r_B}{Z} + 1 = 0$$

解出  $r_B = r_0$  和  $r_B = Zr_0/(Z-2)$ . 第一个解即为  $A$  点, 第二个解为  $B$  点. 由于  $r_B = Zr_0/(Z-2) > r_0$ , 可知  $A$  点为近日点,  $B$  为远日点. 设  $a, b, c$  为此椭圆轨道的半长轴、半短轴和半焦距, 则有

$$r_0 = a - c$$

$$Zr_0/(Z-2) = a + c$$

由此可求出此椭圆的轨道参数:

$$a = \frac{Z-1}{Z-2} r_0, \quad c = \frac{1}{Z-2} r_0, \quad b = \sqrt{\frac{Z}{Z-2}} r_0$$

和  $e_1$  的运动周期

$$T' = \frac{\pi ab}{S} = \frac{2\pi(r_0)^{3/2}}{e} \frac{Z-1}{Z-2} \sqrt{\frac{m}{Z-2}} > T = \frac{2\pi(r_0)^{3/2}}{e} \sqrt{\frac{m}{Z}}$$

当电子绕核做圆轨道运动时, 它所受的核对其的库仑力即向心力和加速度  $\frac{v^2}{r}$  之间满足牛顿定律. 此时, 如果电子的速度的大小或方向突然变化而向心力不变, 或者向心力的大小突然变化而速度的大小和方向不变, 则此后的运动就不能再继续维持原来的圆周运动, 其轨迹将变为椭圆或抛物线. 在本题所给的条件是变为椭圆.

在本题中, 如果过程反过来, 即若原子核放出电子, 这时核的电荷变为  $(Z+1)e$ , 引力势能就变得更小, 电子  $e_1$  的动能和引力势能相比, 相对变小, 此后电子  $e_1$  也将变为椭圆轨迹. 或者说, 此时由于引力变大即向心力变大, 而动能不变, 从而速度不变, 这样电子  $e_1$  此后的运动也不能再继续维持圆周运动, 而要在向心力作用下向里偏, 运动轨道就变为椭圆. 此时所在点为椭圆轨道的远日点, 运动周期将变短.

## 十、原子核和粒子

1. 用放射源钋(Po)发射的 $\alpha$ 粒子打在铍核( ${}^9_4\text{Be}$ )上,产生一种新的粒子和另一生成物.这些新粒子组成的粒子流有以下特点:

1) 在任意方向的磁场中都不偏转.

2) 让它与含氢物质中的静止氢核相碰撞,可把氢核击出,被击出氢核的能量为 $E_{\text{H}}=4.7\text{ MeV}$ .让它与含氮物质中的静止氮核相碰撞,也可把氮核击出,被击出氮核的能量为 $E_{\text{N}}=1.2\text{ MeV}$ .碰撞可视为对心完全弹性碰撞,且已知氢核与氮核的质量比为 $1:14$ .

试根据以上数据求出新粒子质量与氢核质量之比,对此新粒子是什么粒子作出判断,并写出 $\alpha$ 粒子轰击 ${}^9_4\text{Be}$ 的核反应方程式.

### 解析

设 $m_{\text{H}}$ 、 $m_{\text{N}}$ 分别表示氢核与氮核的质量, $v_{\text{H}}$ 、 $v_{\text{N}}$ 分别表示氢核、氮核被未知粒子碰撞后的速度. $m$ 表示未知粒子的质量, $v$ 表示未知粒子碰撞前的速度, $v_1$ 、 $v_2$ 分别表示未知粒子与氢核、氮核碰撞后的速度.

完全弹性碰撞过程中,系统的动量和机械能守恒,所以有

$$mv = mv_1 + m_{\text{H}}v_{\text{H}} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}m_{\text{H}}v_{\text{H}}^2 \quad (2)$$

$$mv = mv_2 + m_{\text{N}}v_{\text{N}} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}m_{\text{N}}v_{\text{N}}^2 \quad (4)$$

$$\text{由(1)式得} \quad m(v - v_1) = m_{\text{H}}v_{\text{H}} \quad (5)$$

$$\text{由(2)式得} \quad m(v^2 - v_1^2) = m_{\text{H}}v_{\text{H}}^2 \quad (6)$$

$$(6)\text{式} \div (5)\text{式得} \quad v_{\text{H}} = v + v_1 \quad (7)$$

由(1)式、(7)式解得

$$v_{\text{H}} = \frac{2m}{m + m_{\text{H}}}v \quad (8)$$

类似地,由(3)、(4)式可得

$$v_N = \frac{2m}{m + m_N}v \quad (9)$$

由于  $E_H = \frac{1}{2}m_H v_H^2$ ,  $E_N = \frac{1}{2}m_N v_N^2$ , 将(8)式、(9)式代入整理可得

$$\frac{E_H}{E_N} = \frac{m_H(m + m_N)^2}{m_N(m + m_H)^2} \quad (10)$$

代入数据,解得

$$\frac{m}{m_H} = 1.03 \quad (11)$$

另外,由于该种粒子在任意方向的磁场中都不偏转,可知它不带电.所以该粒子为质量与质子的质量十分相近但不带电的粒子,应为中子.

$\alpha$  粒子轰击  ${}^9_4\text{Be}$  的核反应方程式为



2. 在用铀-235作燃料的核反应堆中,铀-235核吸收一个动能约为0.025 eV的热中子(慢中子)后,可发生裂变反应,放出能量和2~3个快中子,而快中子不利于铀-235的裂变.为了能使裂变反应继续下去,需要将反应堆中的快中子减速.有一种减速的方法是使用石墨(碳-12)作减速剂.设中子与碳原子的碰撞是对心弹性碰撞,问一个动能为  $E_0 = 1.75 \text{ MeV}$  的快中子需要与静止的碳原子碰撞多少次,才能减速成为0.025 eV的热中子?

### 解析

设中子和碳核的质量分别为  $m_n$  和  $m_C$ ,碰撞前中子的速度为  $v_0$ ,碰撞后中子和碳核的速度分别为  $v_n$  和  $v_C$ ,因为碰撞是弹性碰撞,所以在碰撞前后,动量和机械能均守恒,又因  $v_0$ 、 $v$  和  $v_C$  沿同一直线,故有

$$m_n v_0 = m_n v_n + m_C v_C \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}m_n v_0^2 = \frac{1}{2}m_n v_n^2 + \frac{1}{2}m_C v_C^2 \quad (2)$$

解上两式得

$$v_n = \frac{m_n - m_C}{m_n + m_C}v_0 \quad (3)$$

将  $m_C = 12m_n$  代入(3)式得

$$v_n = -\frac{11}{13}v_0 \quad (4)$$

负号表示  $v_n$  的方向与  $v_0$  方向相反,即与碳核碰撞后中子被反弹.因此,经过一次碰撞后

中子的能量为

$$E_1 = \frac{1}{2} m_n v_n^2 = \frac{1}{2} m_n \left(-\frac{11}{13}\right)^2 v_0^2$$

于是

$$E_1 = \left(\frac{11}{13}\right)^2 E_0 \quad (5)$$

经过 2, 3, ..., n 次碰撞后, 中子的能量依次为  $E_2, E_3, \dots, E_n$ , 有

$$E_2 = \left(\frac{11}{13}\right)^2 E_1 = \left(\frac{11}{13}\right)^4 E_0$$

$$E_3 = \left(\frac{11}{13}\right)^6 E_0$$

⋮

$$E_n = \left(\frac{E_1}{E_0}\right)^n E_0 = \left(\frac{11}{13}\right)^{2n} E_0 \quad (6)$$

因此

$$n = \frac{1}{2} \frac{\lg(E_n/E_0)}{\lg(11/13)} \quad (7)$$

已知

$$\frac{E_n}{E_0} = \frac{0.025}{1.75 \times 10^6} = \frac{1}{7} \times 10^{-7}$$

代入(7)式即得

$$n = \frac{\lg\left(\frac{1}{7} \times 10^{-7}\right)}{2\lg\left(\frac{11}{13}\right)} = \frac{-7 - \lg 7}{2(-0.07255)} = \frac{7.8451}{0.1451} \approx 54 \quad (8)$$

故初能量  $E_0 = 1.75 \text{ MeV}$  的快中子经过约 54 次碰撞后, 才成为能量为 0.025 eV 的热中子。

3. 镭-226 的半衰期是 1600 a, 如已知现在地球上镭-226 的总量, 能否据此确定 4800 a 前地球上镭-226 的总量? 为什么?

### 解析

不能确定. 现在镭-226 的量来自两部分:

- 1) 4800 a 前的镭-226 中至今尚未衰变的部分.
- 2) 在此 4800 a 期间由其他放射性元素衰变而生成的镭-226 中至今尚未衰变的部分. 这第 2) 部分无法确定.

4. 在大气和有生命的植物中, 大约每  $10^{12}$  个碳原子中有一个  $^{14}\text{C}$  原子, 其半衰期为

$\tau=5700$  a,其余的均为稳定的 $^{12}\text{C}$ 原子.在考古工作中,常常通过测定古物中 $^{14}\text{C}$ 的含量来推算这一古物的年代.如果在实验室中测出:有一古炭样品,在 $m$  g的碳原子中,在 $\Delta t$ (年)时间内有 $\Delta n$ 个 $^{14}\text{C}$ 原子发生衰变.设烧成木炭的树是在 $T$ 年前死亡的,试列出能求出 $T$ 的有关方程式(不要求解方程).

### 解析

$m$  g 碳中原有的 $^{14}\text{C}$ 原子数为  $n_0 = \frac{m}{12} \times N_A \times \frac{1}{10^{12}}$ , 式中  $N_A$  为阿伏加德罗常量. 经过  $T$  年, 现存 $^{14}\text{C}$ 原子数为

$$n = n_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{T/\tau} = \frac{mN_A}{12 \times 10^{12}} \left(\frac{1}{2}\right)^{T/\tau} \quad (1)$$

在  $\Delta t$  内衰变的 $^{14}\text{C}$ 原子数为

$$\Delta n = n - n \left(\frac{1}{2}\right)^{\Delta t/\tau} = n \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\Delta t/\tau}\right] \quad (2)$$

在(1)、(2)两式中, $m$ 、 $N_A$ 、 $\tau$ 、 $\Delta n$ 和 $\Delta t$ 都是已知的,只有 $n$ 和 $T$ 为未知的,因此可由此二式求出 $T$ .

5. 在一个密闭的容器中装有放射性同位素氪( $^{85}\text{Kr}$ )气,在温度为 $20^\circ\text{C}$ 时,其压强为 $p_0 = 1.01 \times 10^5$  Pa. 将容器埋入地下深处,经过22 a后取出.在此期间有些氪经 $\beta$ 衰变为铷( $^{85}\text{Rb}$ ),铷最后是固体状态.现在,在温度仍是 $20^\circ\text{C}$ 时测得容器中的压强为 $0.25 p_0$ ,并测得容器中有固体铷 $0.75 \times 10^{-3}$  mol,铷的体积与容器体积比较可以忽略不计.试计算埋入时氪的质量以及氪的半衰期.

### 解析

氪埋入时和取出时都是气体状态.设 $n_0$ 为埋入时氪的物质的量,则埋入时氪的气态方程是

$$p_0 V = n_0 RT$$

已知衰变成的铷是 $0.75 \times 10^{-3}$  mol,所以取出时剩下的氪的气态方程是

$$0.25 p_0 V = (n_0 - 0.75 \times 10^{-3}) RT$$

上式中 $p_0$ 是一个大气压, $V$ 是容器的容积, $T$ 是气体的热力学温度, $R$ 是摩尔气体常量,由以上两式可求出 $n_0$ 的值

$$n_0 = 1.00 \times 10^{-3} \text{ mol}$$

因为氪的相对原子质量是85,所以埋入时氪的质量为

$$m = 8.5 \times 10^{-2} \text{ kg}$$



取出后容器中氦气只剩下

$$n = n_0 - 0.75 \times 10^{-3} \text{ mol} = 0.25 \times 10^{-3} \text{ mol}$$

设氦的半衰期为  $\tau$ , 则根据半衰期的定义可得

$$\frac{n}{n_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2t}{\tau}}$$

代入  $n$  与  $n_0$  的值可得

$$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2t}{\tau}}$$

所以  $\tau = 11 \text{ a}$ .

6. 一个由日本和印度物理学家组成的工作小组做了如下实验: 将  $6 \times 10^4 \text{ kg}$  铁放在很深的矿井中, 以完全隔断宇宙射线的影响, 在铁旁有很多探测器, 只要铁核中有核子(质子和中子)发生衰变, 这个事件总能被记录下来.

实验从 1980 年冬开始到 1982 年夏结束, 历时 1.5 a, 一共记录了 3 个核子衰变的事例.

已知  $N_0$  个平均寿命为  $\tau$  的粒子经过  $t$  时间后的数目为  $N = N_0 e^{-t/\tau}$  个, 根据以上事实, 试估算出核子的平均寿命.

(已知核子的质量  $m = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$ , 当  $0 < x \ll 1$  时,  $e^{-x} \approx 1 - x$ )

### 解析

从  $t=0$  开始做实验, 总核子数为  $N_0$ , 到  $t$  时刻核子数为  $N$ , 设核子的平均寿命为  $\tau$ , 则

$$N = N_0 e^{-t/\tau}$$

因

$$\frac{t}{\tau} \ll 1, \text{ 得 } N \approx N_0 \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)$$

$$N_0 = \frac{6 \times 10^4}{1.66 \times 10^{-27}} = 3.6 \times 10^{31}$$

得

$$\tau = \frac{N_0}{N_0 - N} t = 1.8 \times 10^{31} \text{ a}$$

7. 太阳中能量来源的一种途径是 4 个质子和 2 个电子结合成一个  $\alpha$  粒子, 并释放能量. 若质子质量  $m_p = 1.007277 \text{ u}$  (u 为原子质量单位), 电子质量  $m_e = 0.000549 \text{ u}$ ,  $\alpha$  粒子的质量  $m_\alpha = 4.00150 \text{ u}$ , 则上述核反应所释放的能量为多少 eV? (已知  $1 \text{ u} = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$ )

**解析**

核反应前的质量是  $4m_p + 2m_e$ , 核反应后的质量是  $m_\alpha$ , 质量亏损为

$$\Delta m = (4m_p + 2m_e) - m_\alpha$$

释放的能量为

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2$$

代入数值, 可得

$$\Delta E = 0.02871 \times 1.66 \times 10^{-27} \times 9 \times 10^{16} / (1.60 \times 10^{-19}) \text{ eV}$$

$$\Delta E = 2.68 \times 10^7 \text{ eV}$$

8. 已知太阳每秒辐射出  $3.8 \times 10^{26} \text{ J}$  的能量. 问:

1) 太阳每秒钟损失多少吨质量?

2) 假设太阳放射出的能量是由于“燃烧氢”的核反应  $4 {}_1^1\text{H} \rightarrow {}_2^4\text{He} + 2e^+ + 2\nu$  提供, 这一核反应放出  $28 \text{ MeV}$  的能量. 式中  $e^+$  为正电子,  $\nu$  为中微子. 中微子是一种质量远小于电子质量、穿透力极强的中性粒子. 试计算地球上在与太阳光垂直的每平方米面积上每秒钟有多少中微子( $\nu$ )到达.

3) 假设原始的太阳全部由  ${}_1^1\text{H}$  和电子组成, 且仅有  $10\%$  的  ${}_1^1\text{H}$  可供“燃烧”, 试估算太阳的寿命.

已知: 太阳质量  $m_s = 2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$ ; 日地距离  $R = 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$ ; 电子电量  $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ; 质子质量  $m_p = 1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$ .

**解析**

1) 由于太阳的辐射功率  $L_s = 3.8 \times 10^{26} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$ , 得

$$\begin{aligned} \Delta m / \Delta t &= L_s / c^2 = [3.8 \times 10^{26} / (3 \times 10^8)^2] \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1} \\ &= 4.2 \times 10^9 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1} = 4.2 \times 10^6 \text{ t} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

2) 由题意知, 太阳每辐射出  $14 \text{ MeV}$  能量放出一个中微子. 故太阳每秒放出的中微子数目为  $n = L_s / 14 \text{ MeV}$ , 日地距离为  $R = 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$ , 故到达地面上的中微子通量为

$$\begin{aligned} \Phi &= n / 4\pi R^2 = \{L_s / [14 \times 1.6 \times 10^{-13} \times 4\pi \times (1.5 \times 10^{11})^2]\} \text{ 个} (\text{m}^2 \cdot \text{s})^{-1} \\ &= 6 \times 10^{14} \text{ 个} (\text{m}^2 \cdot \text{s})^{-1} \end{aligned}$$

3) 太阳“一生”可放出能量

$$E = [(m_s / m_p) \times 10\% \times 28 / 4] \text{ MeV} = 8.2 \times 10^{56} \text{ MeV}$$

太阳寿命  $T \approx E / L_s = [8.2 \times 10^{56} \times 1.6 \times 10^{-13} / (3.8 \times 10^{26})] \text{ s}$

$$= 3.5 \times 10^{17} \text{ s} = 1.1 \times 10^{10} \text{ a}$$

9. 1995年,美国费米国家实验室CDF实验组和DO实验组在质子-反质子对撞机TEVATRON的实验中,观察到了顶夸克,测得它的静止质量  $m_t = 1.75 \times 10^{11} \text{ eV}/c^2 = 3.1 \times 10^{-25} \text{ kg}$ ,寿命  $\tau = 0.4 \times 10^{-24} \text{ s}$ ,这是近十几年来粒子物理研究最重要的实验进展之一。

1) 正反顶夸克之间的强相互作用势能可写为  $V(r) = -k \frac{4a_s}{3r}$ , 式中  $r$  是正反顶夸克之间的距离,  $a_s = 0.12$  是强相互作用耦合常数,  $k$  是与单位制有关的常量,在国际单位制中  $k = 0.319 \times 10^{-25} \text{ J} \cdot \text{m}$ . 为估算正反顶夸克能否构成一个处在束缚状态的系统,可把束缚状态设想为正反顶夸克在彼此间的吸引力作用下绕它们连线的中点做匀速圆周运动. 如能构成束缚态,试用玻尔理论确定系统处于基态中正反顶夸克之间的距离  $r_0$ . 已知处于束缚态的正反夸克粒子满足量子化条件

$$2mv \left( \frac{r_0}{2} \right) = n \frac{h}{2\pi} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

式中  $mv \left( \frac{r_0}{2} \right)$  为一个粒子的动量  $mv$  与其轨道半径  $\frac{r_0}{2}$  的乘积,  $n$  为量子数,  $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  为普朗克常量.

2) 试求正反顶夸克在上述设想的基态中做匀速圆周运动的周期  $T$ . 你认为正反顶夸克的这种束缚态能存在吗?

### 解析

1) 相距为  $r$  的电量为  $Q_1$  与  $Q_2$  的两点电荷之间的库仑力  $F_Q$  与库仑势能  $V_Q$  分别为

$$F_Q = k_Q \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad V_Q = -k_Q \frac{Q_1 Q_2}{r} \quad (1)$$

现在已知正反顶夸克之间的强相互作用势能为

$$V(r) = -k \frac{4a_s}{3r}$$

根据直接类比可知,正反顶夸克之间的强相互作用力为

$$F(r) = -k \frac{4a_s}{3r^2} \quad (2)$$

设正反顶夸克绕其连线的中点做匀速圆周运动的速率为  $v$ , 因二者相距  $r_0$ , 二者所受的向心力均为  $F(r_0)$ , 二者的运动方程均为

$$\frac{m_t v^2}{r_0/2} = k \frac{4a_s}{3r_0^2} \quad (3)$$

由题给的量子化条件, 粒子处于基态时, 取量子数  $n=1$ , 得

$$2m_t v \left( \frac{r_0}{2} \right) = \frac{h}{2\pi} \quad (4)$$

由(3)式、(4)式解得

$$r_0 = \frac{3h^2}{8\pi^2 m_t a_s k} \quad (5)$$

代入数值得

$$r_0 = 1.4 \times 10^{-17} \text{ m} \quad (6)$$

2) 由(3)式、(4)式,得

$$v = \frac{\pi}{h} \left( k \frac{4a_s}{3} \right) \quad (7)$$

由  $v$  和  $r_0$  可算出正反顶夸克做匀速圆周运动的周期  $T$  :

$$T = \frac{2\pi(r_0/2)}{v} = \frac{h^3}{2\pi^2 m_t (k4a_s/3)^2} \quad (8)$$

代入数值得

$$T = 1.8 \times 10^{-24} \text{ s} \quad (9)$$

由此可知

$$\tau/T = 0.2 \quad (10)$$

因正反顶夸克的寿命只有它们组成的束缚系统的周期的  $1/5$ ,故正反顶夸克的束缚态通常是不存在的.

本题取材于近年来粒子物理研究的科学前沿,密切联系实际,富有创造性.解答本题需要用到科学研究中常用的类比法,能够使学生体会科学研究中,探索未知领域的规律时,常常将实验得到的点滴线索去和已知的物理规律作类比,从而推测出未知领域可能存在的规律.尔后,再通过实验进行检验,以确定类比得到的结论是否正确.

在本题中,最难的是学生对强相互作用力的规律一无所知.题目只提示了“正反顶夸克之间的强相互作用势能”,给出了势能的表达式.要求学生自己确定强相互作用力的表示式.对于没有普通物理知识的中学生,在不知道静电场力与电势梯度关系的情况下,题目提示了“可把束缚状态设想为正反顶夸克在彼此间的吸引力作用下绕它们连线的中点做匀速圆周运动”.学生可以从这里得到启发,将两个夸克间的相互作用与静电学中两个带电粒子的库仑作用作类比,从库仑力与库仑势能的表示式(1),大胆作出假设,直接写出式(2).这种解题方法完全不同于中学生所习惯的通过计算或逻辑推理,可以说(2)式完全是凭类比由直觉得到的.这种类比的方法在科学研究中经常使用,但在中学物理教学中从来没有应用在解答物理习题方面,在物理竞赛中也很少出现.所以从这点来说,本题对物理方法的要求是很高的.

另外,本题第2)问通过顶夸克的寿命  $\tau$  与设想的基态做匀速圆周运动的周期  $T$  之比只有  $0.2$ ,从而判断这种束缚态通常是不存在的.这对中学生来说又是一种全新的判断方法.

10. 1) 质量不为零的  $\omega$  介子静止时衰变为三个质量相同的  $\pi$  介子, 即  $\omega \rightarrow 3\pi$ . 试讨论每次衰变产生的三个  $\pi$  介子的动能  $T_1, T_2, T_3$  可能取的全部值. 通常表示每一组动能值  $(T_1, T_2, T_3)$  的方法如下: 作一个等边三角形  $A_1A_2A_3$ , 取其高  $Q$  为三个  $\pi$  介子的动能之和  $Q = T_1 + T_2 + T_3$ . 在三角形内取一点  $P$ , 令  $P$  点到顶点  $A_i$  的对边的距离为  $T_i$  ( $i=1, 2, 3$ ), 则每一点对应一组动能值  $(T_1, T_2, T_3)$ . 衰变时可以实现的全部  $(T_1, T_2, T_3)$  的可能取值, 可以用  $P$  点的可能存在的区域来表示. 这个区域称为运动学允许区. 试在  $\triangle A_1A_2A_3$  中找出  $\omega \rightarrow 3\pi$  的运动学允许区 (设衰变后  $\pi$  介子的速度比光速小得多).

2) 正电子偶素是由一个电子与一个正电子组成的束缚态粒子, 记为  $P_s$ . 它在静止时可以衰变为三个  $\gamma$  光子, 即  $P_s \rightarrow 3\gamma$ . 试在  $\triangle A_1A_2A_3$  中找出三个  $\gamma$  光子的运动学允许区.

### 解析

1) 设衰变产生的 3 个  $\pi$  介子的动量为  $p_1, p_2, p_3$ , 相应的动能为  $T_1, T_2, T_3$ , 则它们必须满足下列条件:

能量守恒

$$T_1 + T_2 + T_3 = m_0c^2 - 3m_\pi c^2 = Q \quad (1)$$

动量守恒

$$p_1 + p_2 + p_3 = 0 \quad (2)$$

三角形  $A_1A_2A_3$  内部任一点均已满足(1)式, 现只需求满足(2)式的  $P$  点的位置范围.

由(2)式可知

$$p_3^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2 \cos \theta_{12} \quad (3)$$

式中  $p_i = |p_i|$ , 于是有

$$\cos \theta_{12} = \frac{p_3^2 - p_1^2 - p_2^2}{2p_1p_2} \quad (4)$$

因  $|\cos \theta_{12}| \leq 1$ , 于是条件(2)成为

$$\left( \frac{p_3^2 - p_1^2 - p_2^2}{2p_1p_2} \right)^2 \leq 1 \quad (5)$$

由题意知, 可以使用非相对论的关系

$$T = \frac{p^2}{2m} \quad (6)$$

上式成为

$$\frac{(T_3 - T_1 - T_2)^2}{4T_1T_2} \leq 1$$

即

$$(T_3 - T_1 - T_2)^2 \leq 4T_1T_2 \quad (7)$$

现在  $\triangle A_1A_2A_3$  中取一点  $P$ , 表示其位置以用极坐标系  $(\rho, \varphi)$  比较方便, 取三角形的

垂心  $O$  为极坐标系的原点,  $OA_1$  为极轴的正方向,  $\overline{OA_1} = \frac{2}{3}Q$ , 则由图 10-1 知

$$T_3 = \frac{Q}{3} + \rho \cos \varphi \quad (8)$$

而 
$$T_1 = \frac{Q}{3} - \rho \cos(60^\circ - \varphi) \quad (9)$$

$$T_2 = \frac{Q}{3} - \rho \cos(\varphi + 60^\circ) \quad (10)$$

将(8)、(9)、(10)式, 代入(7)式, 得

$$(7) \text{式左边} = \left(-\frac{Q}{3} + 2\rho \cos \varphi\right)^2 \quad (11)$$

$$(7) \text{式右边} = -\frac{4Q^2}{9} - \frac{4}{3}Q\rho \cos \varphi - 4\rho^2 \cos^2 \varphi - 3\rho^2 \quad (12)$$

于是得 
$$0 \leq \frac{1}{3}Q^2 - 3\rho^2$$

即 
$$\rho \leq \frac{Q}{3} \quad (13)$$

于是得 3 个  $\pi$  介子的运动学允许区为  $\triangle A_1 A_2 A_3$  的内切圆的圆周及圆内, 如图 10-2 所示.

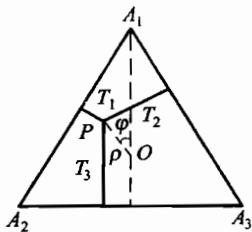


图 10-1

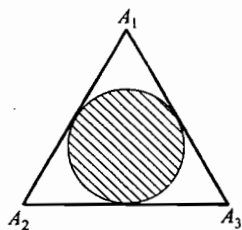


图 10-2

2) 对于电子偶衰变为三个  $\gamma$  光子的情况, 上面的(1)~(5)式同样适用. 但光子的速度为  $c$ , 其能量和动量必须用相对论的关系来计算. 因光子没有静止质量, 故其动能  $T$  应理解为光子的能量  $E$ . 而  $E = h\nu$ ,  $p = h\nu/c$ , 因此

$$T = E = cp \quad (14)$$

式中  $h$  为普朗克常量,  $c$  为光速. 因此(5)式成为

$$\left| \frac{T_3^2 - T_1^2 - T_2^2}{2T_1 T_2} \right| \leq 1$$

即 
$$T_3^2 - T_1^2 - T_2^2 \leq 2T_1 T_2$$

或 
$$T_3^2 \leq (T_1 + T_2)^2$$

此即

$$T_3 \leq \pm (T_1 + T_2) \quad (15)$$

同理有

$$T_1 \leq \pm (T_2 + T_3) \quad (16)$$

$$T_2 \leq \pm (T_3 + T_1) \quad (17)$$

(15)式有两个解:

$$T_3 \leq T_1 + T_2 \quad (18)$$

$$T_3 + T_1 + T_2 \leq 0 \quad (19)$$

(19)式不合理,应该舍弃.(18)式又可写成

$$2T_3 \leq T_1 + T_2 + T_3 = Q$$

所以

$$T_3 \leq \frac{Q}{2} \quad (20)$$

同理,由(16)、(17)二式可得

$$T_2 \leq \frac{Q}{2} \quad (21)$$

$$T_1 \leq \frac{Q}{2} \quad (22)$$

(20)、(21)、(22)三式即是  $P$  点所应满足的条件. 由图 10-3 可知,同时满足上述三条条件的  $P$  点在图中阴影区中,它是连接  $\triangle A_1A_2A_3$  各边中点的三角形的内部及三边,此即是 3 个  $\gamma$  光子的运动学允许区.

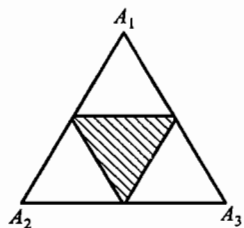
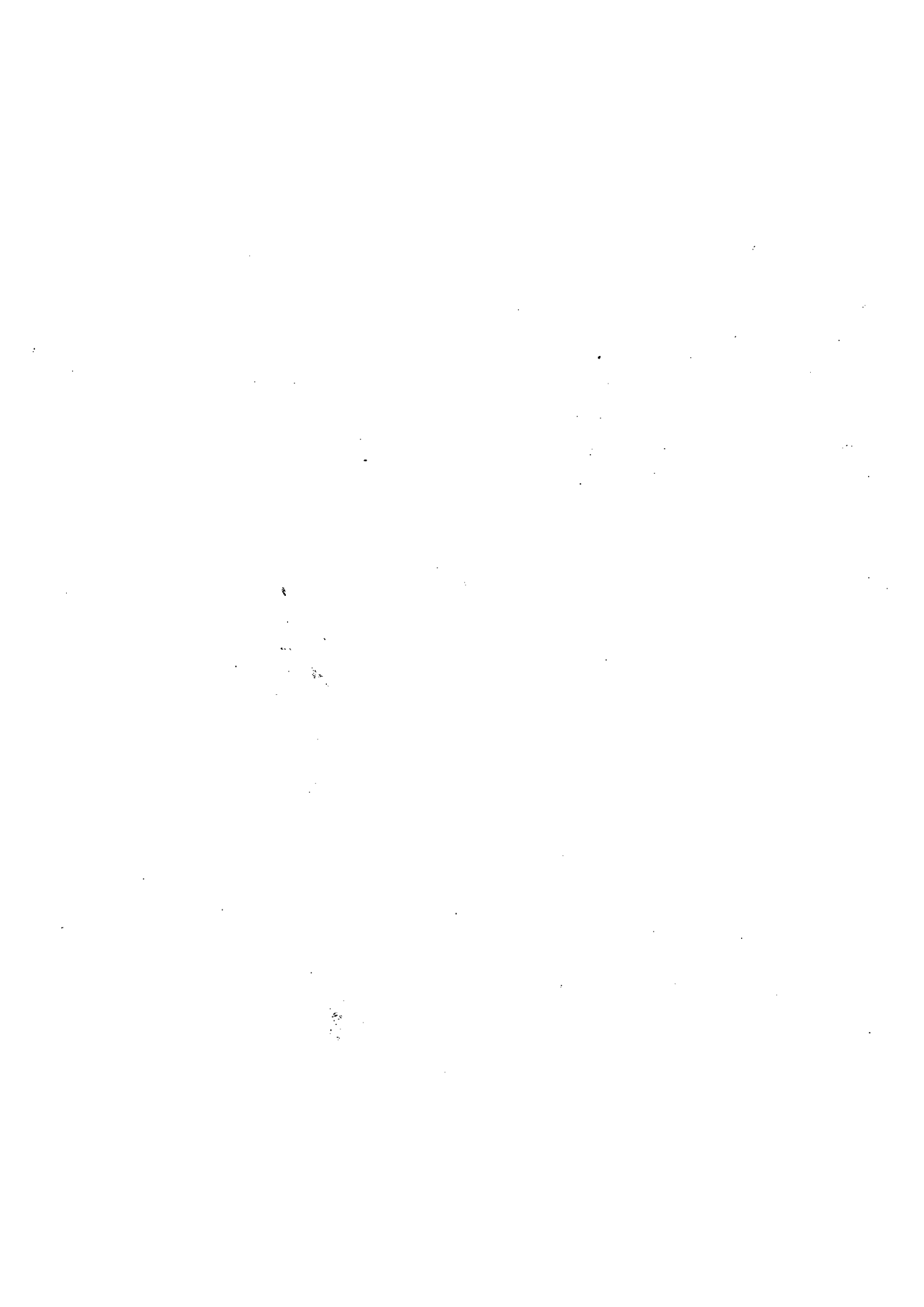


图 10-3





## 十一、相对论与量子论

1. 正电子与负电子相碰湮没时,放出的能量约为多少?

**解析**

根据狭义相对论,质量与能量的关系为  $E=mc^2$ . 已知电子的静质量为  $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ . 故正、负电子相碰湮没时,放出的能量约为

$$2m_e c^2 = 2 \times 9.1 \times 10^{-31} \times (3 \times 10^8)^2 \text{ J} = 1.6 \times 10^{-13} \text{ J}$$

2. 在热力学温度  $T$  时,电磁场的光子平均能量约为  $3RT/N_A$ ,  $R$  为摩尔气体常量,  $N_A$  为阿伏加德罗常量. 假设在宇宙发展的初期,光子间的碰撞能够产生质子、反质子(即一对光子经过碰撞而转变成一个质子和一个反质子). 试估算当时温度的数量级(保留两位有效数字).

**解析**

光子的能量已知为  $E \approx 3RT/N_A$ , 用  $m_p$  表示质子的质量,  $c$  表示光速, 则质子的能量为  $m_p c^2$ . 因为一对光子转变成一个质子和一个反质子, 根据能量守恒可知

$$3RT/N_A = m_p c^2$$

得

$$T = \frac{N_A m_p c^2}{3R} \approx 3.7 \times 10^{12} \text{ K}$$

3. 一根长为  $l_0$  横截面积为  $S$  的匀质圆柱体, 在地面上静止时测得其密度为  $\rho_0$ . 当圆柱体沿轴线方向以速度  $v=0.9c$  相对于地面做匀速运动时, 地面上的观察者测得其密度  $\rho$  等于多少? ( $c$  为光速)

**解析**

对于地面上的观察者, 圆柱体沿运动方向上的长度为

$$l = l_0 \sqrt{1 - (v/c)^2}$$

圆柱体的质量为

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

圆柱体的密度

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m_0}{V \sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

式中  $V$  为圆柱体的体积. 垂直于运动方向的横截面积  $S$ , 在运动过程中不发生改变, 有

$$V = Sl = S l_0 \sqrt{1 - (v/c)^2}$$

所以

$$\rho = \frac{m_0}{S l_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right]^2 = \frac{\rho_0}{1 - (v/c)^2} = 5.26 \rho_0$$

4. 在相对于实验室静止的平面直角坐标系  $S$  中, 有一个光子, 沿  $x$  轴正方向射向一个静止于坐标原点  $O$  的电子. 在  $y$  轴方向探测到一个散射光子. 已知电子的静止质量为  $m_0$ , 光速为  $c$ , 入射光子的能量与散射光子的能量之差等于电子静止能量的  $1/10$ .

1) 试求电子运动速度的大小  $v$ ; 电子运动的方向与  $x$  轴的夹角  $\theta$ ; 电子运动到离原点距离为  $L_0$  (作为已知量) 的  $A$  点所经历的时间  $\Delta t$ .

2) 在电子以 1) 中的速度  $v$  开始运动时, 一观察者  $S'$  相对于坐标系  $S$  也以速度  $v$  沿  $S$  中电子运动的方向运动 (即  $S'$  相对于电子静止), 试求  $S'$  测出的  $OA$  的长度.

### 解析

1) 由能量与速度关系及题给条件可知运动电子的能量为

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = 1.10 m_0 c^2 \quad (1)$$

由此可解得

$$v = \frac{\sqrt{0.21}}{1.10} c = 0.417c \approx 0.42c \quad (2)$$

入射光子和散射光子的动量分别为  $p = \frac{h\nu}{c}$  和  $p' = \frac{h\nu'}{c}$ , 方向如图 11-1 所示, 电子的动量为  $mv$ ,  $m$  为运动电子的相对论质量. 由动量守恒定律可得

$$\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \cos \theta = \frac{h\nu}{c} \quad (3)$$

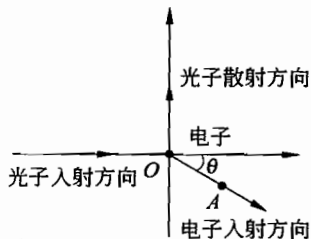


图 11-1

$$\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \sin \theta = \frac{h\nu'}{c} \quad (4)$$

已知

$$h\nu - h\nu' = 0.10m_0c^2 \quad (5)$$

由(2)、(3)、(4)、(5)式可解得

$$\nu = 0.37m_0c^2/h \quad (6)$$

$$\nu' = 0.27m_0c^2/h$$

$$\theta = \arctan \frac{\nu'}{\nu} = \arctan \left( \frac{27}{37} \right) = 36.1^\circ$$

电子从O点运动到A所需时间为

$$\Delta t = \frac{L_0}{v} = 2.4L_0/c$$

2) 当观察者相对于S沿OA方向以速度 $v$ 运动时,由狭义相对论的长度收缩效应得OA的长度为

$$L = L_0 \sqrt{1 - (v^2/c^2)}$$

$$L = 0.91L_0$$

5. 设地球是一个半径为6370 km的球体.在赤道上空离地面1千多公里处和赤道共面的圆与赤道形成的环形区域内,地磁场可看做是均匀的,其磁感强度为 $B = 3.20 \times 10^{-6}$  T.某种带电宇宙射线粒子,其静质量为 $m_0 = 6.68 \times 10^{-27}$  kg,其电荷量为 $q = 3.20 \times 10^{-19}$  C,在地球赤道上空的均匀地磁场中围绕地心做半径为 $R = 7370$  km的圆周运动.

已知在相对论中只要作用于粒子的力 $F$ 的方向始终与粒子运动的速度 $v$ 的方向垂直,则运动粒子的质量 $m$ 和加速度 $a$ 与力 $F$ 的关系仍为 $F = ma$ ,但式中的质量 $m$ 为粒子的相对论质量.问:

1) 该粒子的动能为多大?

2) 该粒子在圆形轨道上运动时与一个不带电的静质量为 $m_2 = 4m_0$ 的静止粒子发生碰撞,并被其吸收形成一个复合粒子,试求复合粒子的静质量 $m_1$ .

### 解析

1) 设带电宇宙射线粒子速度为 $v$ ,在地磁场的洛伦兹力作用下做圆周运动,其运动方程为

$$qvB = m \frac{v^2}{R} \quad (1)$$

式中 $m$ 为运动粒子的相对论质量,与静止质量的关系为

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (2)$$

该粒子的动能

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 \quad (3)$$

由(1)式可求得

$$v = \frac{qBRc}{\sqrt{q^2B^2R^2 + m_0^2c^2}} \quad (4)$$

代入数据得

$$v = 2.90 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (5)$$

由(2)、(3)式得

$$E_k = m_0c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) \quad (6)$$

代入数据,注意到(5)式,得

$$E_k = 1.74 \times 10^{-9} \text{ J} \quad (7)$$

2) 用  $p$ 、 $E$  分别表示宇宙射线粒子的动量和能量,有

$$p = \frac{m_0v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (8)$$

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (9)$$

设复合粒子的速度为  $v_1$ , 动量和能量分别为  $p_1$  和  $E_1$ , 有

$$p_1 = \frac{m_1v_1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} \quad (10)$$

$$E_1 = \frac{m_1c^2}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} \quad (11)$$

粒子复合过程中动量、能量守恒,有

$$p_1 = p \quad (12)$$

$$E_1 = E + m_2c^2 \quad (13)$$

由以上各式及已知条件  $m_2 = 4m_0$ , 得

$$v_1 = \frac{v}{1 + 4\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (14)$$

把(5)式代入(14)式,得

$$v_1 = 1.43 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (15)$$

由(9)、(11)和(13)式得

$$m_1 = \frac{m_0\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + m_2\sqrt{1 - v_1^2/c^2}$$

由(5)式、(15)式和有关数据得

$$m_1 = 46.4 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

6. 1979年,7颗人造卫星同时接收到来自远方的中子星发射出的 $\gamma$ 射线,经分析确认,这些 $\gamma$ 光子是电子-正电子湮灭时放出的,即 $e + e^+ \rightarrow n\gamma$ ,其中 $n$ 表示光子数目.已知电子、正电子的静止质量 $m_0 = 8.2 \times 10^{-14} \text{ J}/c^2$ .静止质量为 $m_0$ 的粒子,其能量 $E$ 和动量 $p$ 满足 $E^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4$ ,式中 $c$ 表示光速.普朗克常量 $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$ .

1) 试证明 $n \neq 1$ .

2) 若电子、正电子的动量为零, $n=2$ ,求 $\gamma$ 光子的频率.

### 解析

1) 假设电子、正电子湮灭时只产生一个光子(即 $n=1$ ),设正电子和电子的动量分别为 $p_+$ 和 $p_-$ ,湮灭过程如图11-2所示.

根据动量守恒定律有

$$p_+ \cos \theta_1 - p_- \cos \theta_2 = 0 \quad (1)$$

$$p_+ \sin \theta_1 + p_- \sin \theta_2 = h\nu/c \quad (2)$$

根据能量守恒定律有

$$\sqrt{p_+^2 c^2 + m_0^2 c^4} + \sqrt{p_-^2 c^2 + m_0^2 c^4} = h\nu \quad (3)$$

由(2)、(3)两式可得

$$p_+ \sin \theta_1 + p_- \sin \theta_2 = \sqrt{p_+^2 + m_0^2 c^2} + \sqrt{p_-^2 + m_0^2 c^2} \quad (4)$$

将(1)式和(4)式各自平方后相加并化简得

$$-2p_+ p_- \cos(\theta_1 + \theta_2) = 2m_0^2 c^2 + 2\sqrt{p_+^2 + m_0^2 c^2} \cdot \sqrt{p_-^2 + m_0^2 c^2}$$

显然,这要求 $\theta_1 + \theta_2 > \pi/2$ ,设 $\theta_1 + \theta_2 = (\pi/2) + \varphi$ ,则有

$$2p_+ p_- \sin \varphi = 2m_0^2 c^2 + 2\sqrt{p_+^2 + m_0^2 c^2} \cdot \sqrt{p_-^2 + m_0^2 c^2}$$

此式右方显然大于 $2p_+ p_-$ ,因而要求 $\sin \varphi > 1$ ,这是不可能的.所以 $n$ 不能等于1,产生的光子不能只是一个.

2) 由题设 $p_+ = p_- = 0$ ,它们的总动量为零,因而产生的两个光子的动量必然是等值反向(从而使总动量为零),它们的能量也相同.根据能量守恒定律有

$$m_0 c^2 + m_0 c^2 = h\nu + h\nu$$

$$\nu = \frac{m_0 c^2}{h} = \frac{8.2 \times 10^{-14}}{6.63 \times 10^{-34}} \text{ Hz} = 1.24 \times 10^{20} \text{ Hz}$$

7. 1961年有人从高度 $H=22.5 \text{ m}$ 的大楼上向地面发射频率为 $\nu_0$ 的 $\gamma$ 光子,并在地

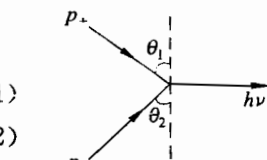


图 11-2

面测量接收到的  $\gamma$  光子的频率  $\nu$ , 测得的  $\nu$  与  $\nu_0$  不同, 与理论预计一致. 试从理论上求出  $\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0}$  的值.

### 解析

已知在地面测量接收到  $\gamma$  光子的频率为  $\nu$ , 则  $\gamma$  光子之能量  $E_1 = h\nu$ . 其中  $h$  为普朗克常量;  $\gamma$  光子在高度  $H$  处其频率为  $\nu_0$ , 则该处  $\gamma$  光子能量为  $E_2 = h\nu_0 + mgH$ . 根据相对论  $E = mc^2$ ,  $m = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu_0}{c^2}$ . 所以  $E_2 = h\nu_0 + \frac{h\nu_0}{c^2}gH$ . 光子应当满足能量定律, 所以  $E_1 = E_2$ , 即

$$h\nu = h\nu_0 + \frac{h\nu_0}{c^2}gH$$

$$\nu = \nu_0 + \frac{gH}{c^2}\nu_0 = \nu_0 \left( 1 + \frac{gH}{c^2} \right)$$

$$\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} = \frac{gH}{c^2} = \frac{10 \times 22.5}{9 \times 10^{16}} = 2.5 \times 10^{-15}$$

8. 爱因斯坦的“等效原理”指出, 在不十分大的空间范围和时间间隔内, 惯性系中引力作用下的物理规律与没有引力但有适当加速度的非惯性系中的物理规律是相同的. 现在研究以下问题.

1) 试从光量子的观点(即把光子看做能量为  $h\nu$  的粒子)出发, 讨论在地面附近的重力场中, 由地面向离地面的距离为  $L$  处的接收器发射频率为  $\nu_0$  的激光与接收器接收到的频率  $\nu$  之间的关系.

2) 假设地球对物体没有引力作用, 现在一以加速度  $a$  沿直线做匀加速运动的箱子中做一假想实验. 在箱尾和箱头处分别安装一适当的激光发射器和激光接收器, 两者间的距离为  $L$ . 现从发射器向接收器发射周期为  $T_0$  的激光. 试从地面参考系的观点出发, 求出位于箱头处的接收器所接收到的激光的周期  $T$ .

3) 要使上述两个问题所得到的结论是完全等价的, 则问题 2) 中的箱子的加速度的大小和方向应如何?

### 解析

1) 对于能量为  $h\nu_0$  的光子, 其质量  $m = \frac{h\nu_0}{c^2}$ , 在重力场中, 当该光子从地面到达接收器时, 增加的重力势能为  $mgL$ . 由能量守恒得

$$h\nu_0 = h\nu + mgL = h\nu + \frac{h\nu}{c^2}gL$$

得 
$$\nu_0 = \nu \left(1 + \frac{gL}{c^2}\right) \quad (1)$$

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 + \frac{gL}{c^2}} \approx \nu_0 \left(1 - \frac{gL}{c^2}\right) \quad (2)$$

2) 设  $t=0$  时刻, 箱子从静止开始加速, 同时, 激光光波的某一振动状态从发射器发出, 任一时刻  $t$ , 发射器和接收器的位置分别为

$$x = \frac{1}{2}at^2 \quad (3)$$

$$x = L + \frac{1}{2}at^2 \quad (4)$$

所考察的振动状态的位置和比该振动状态晚一个周期  $T_0$  的振动状态的位置分别为

$$x = ct \quad (5)$$

$$x = \frac{1}{2}aT_0^2 + c(t - T_0) \quad (6)$$

设所考察的振动状态在  $t_1$  时刻到达接收器, 则由(4)、(5)两式得

$$ct_1 = L + \frac{1}{2}at_1^2 \quad (7)$$

解得

$$t_1 = \frac{c}{a} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2aL}{c^2}}\right) \quad (8)$$

比所考察的振动状态晚一个周期  $T_0$  发出的振动状态到达接收器的时刻为  $t_2$ , 则由(4)、(6)两式得

$$\frac{1}{2}aT_0^2 + c(t_2 - T_0) = L + \frac{1}{2}at_2^2 \quad (9)$$

解得

$$t_2 = \frac{c}{a} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2aL}{c^2} - \frac{2aT_0}{c} + \frac{a^2T_0^2}{c^2}}\right) \quad (10)$$

接收器接收到的激光的周期为

$$\begin{aligned} T &= t_2 - t_1 \\ &= \frac{c}{a} \left( \sqrt{1 - \frac{2aL}{c^2}} - \sqrt{1 - \frac{2aL}{c^2} - \frac{2aT_0}{c} + \frac{a^2T_0^2}{c^2}} \right) \\ &\approx \frac{c}{a} \left( \sqrt{1 - \frac{2aL}{c^2}} - \sqrt{1 - \frac{2aL}{c^2} - \frac{2aT_0}{c}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{c}{a} \sqrt{1 - \frac{2aL}{c^2}} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{\frac{2aT_0}{c}}{1 - \frac{2aL}{c^2}}} \right] \\
&\approx \frac{c}{a} \left(1 - \frac{aL}{c^2}\right) \left[ 1 - \left(1 - \frac{aT_0}{c} \frac{1}{1 - \frac{2aL}{c^2}}\right) \right] \\
&\approx \frac{c}{a} \left(1 - \frac{aL}{c^2}\right) \left[ \frac{aT_0}{c} \left(1 + \frac{2aL}{c^2}\right) \right] \\
&= \frac{c}{a} \left(1 - \frac{aL}{c^2}\right) \left( \frac{aT_0}{c} + \frac{2a^2LT_0}{c^3} \right) \\
&= \frac{c}{a} \left( \frac{aT_0}{c} + \frac{2a^2LT_0}{c^3} - \frac{a^2LT_0}{c^3} - \frac{2a^3L^2T_0}{c^5} \right) \\
&\approx \frac{c}{a} \left( \frac{aT_0}{c} + \frac{a^2LT_0}{c^3} \right) \\
&= \frac{c}{a} \frac{aT_0}{c} \left( 1 + \frac{aL}{c^2} \right) \\
&= T_0 \left( 1 + \frac{aL}{c^2} \right) \tag{11}
\end{aligned}$$

3) 由(2)式得

$$T = T_0 \left( 1 + \frac{gL}{c^2} \right) \tag{12}$$

比较(11)与(12)两式,得

$$a = g \tag{13}$$

即“箱子”的加速度  $a=g$ , 方向竖直向上.

9. 有一个电子, 已知它的德布罗意波(物质波)是波长为  $\lambda$ 、向  $x$  的正方向传播的平面波. 它的动量  $p_x$  等于多少? 它的坐标  $x$  如何?

### 解析

根据德布罗意关系

$$p_x = \frac{h}{\lambda}$$

现  $\Delta p_x = 0$ , 根据不确定关系  $\Delta x \Delta p_x > h$ , 即电子的坐标  $x$  取各值都有可能, 坐标  $x$  值不确定.

10. 图 11-3 中纵坐标为光电效应实验中阳极和阴极间所加电压( $U$ ), 横坐标为光子



的频率( $\nu$ ),若作为阴极的某金属的极限频率为 $\nu_0$ ,普朗克常量为 $h$ ,电子电荷量为 $e$ ,试在图中画出能产生光电流的区域(用斜线表示).

### 解析

答案为图 11-4 所示,图中 BC 线的斜率的绝对值为  $h/e$ .

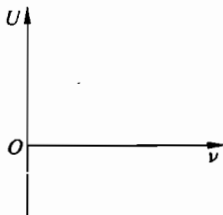


图 11-3

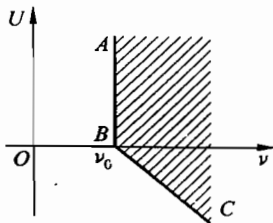


图 11-4

光电效应实验中,只要光的频率大于 $\nu_0$ ,都有光电子产生,在阳极和阴极间加一正电压,即可产生光电流.当 $\nu > \nu_0$ 时光电子具有一定的速度,因而具有一定的动能,其数值为

$$\frac{1}{2}mv^2 = h\nu - h\nu_0$$

式中 $m$ 为电子的质量, $v$ 为光电子的速度.在光电子具有一定动能的情况下,即使 $U$ 为负值,光电子有可能克服电场力做功而到达阳极,形成光电流.其条件是

$$\frac{1}{2}mv^2 \geq -eU$$

即

$$h\nu - h\nu_0 \geq -eU$$

作为有光电流区域边界的直线方程为

$$U = (h\nu_0 - h\nu)/e$$

其斜率为 $-h/e$ .

11. 一光电管阴极对于波长 $\lambda = 4.91 \times 10^{-7} \text{ m}$ 的人射光,发射光电子的遏止电压为 $0.71 \text{ V}$ ,当入射光的波长为多少时,其遏止电压变为 $1.43 \text{ V}$ ? (电子电荷量 $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ,普朗克常量 $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ )

### 解析

光电方程为 $U_a = (h\nu - A)/e$ ,式中 $U_a$ 为遏止电压, $A$ 为阴极材料的逸出功, $\nu$ 为入射光的频率.设所求人射光的波长为 $\lambda'$ ,将 $\lambda$ 和 $\lambda'$ 两次代入光电方程,消去逸出功 $A$ ,得

$$(0.71 - 1.43) \text{ V} = hc[(1/\lambda) - (1/\lambda')]/e$$

$c$ 为光速.代入数据得

$$\lambda' = 3.8 \times 10^{-7} \text{ m}$$

12. 一台二氧化碳气体激光器发出的激光功率为  $P=1000\text{ W}$ , 射出的光束截面积为  $A=1.00\text{ mm}^2$ , 试问:

1) 当该光束垂直入射到一物体平面上时, 可能产生的光压的最大值为多少?

2) 这束光垂直射到温度  $T$  为  $273\text{ K}$ , 厚度  $d=2.00\text{ cm}$  的铁板上, 如果有  $80\%$  的光能被激光所照射到的那一部分铁板所吸收, 并使其熔化, 从而生成一与光束等截面积的直圆柱孔, 这需要多少时间?

已知, 对于波长为  $\lambda$  的光束, 其每一个光子的动量为  $p=\frac{h}{\lambda}$ , 式中  $h$  为普朗克常量; 铁的摩尔热容  $C=26.6\text{ J}\cdot(\text{mol}\cdot\text{K})^{-1}$ , 密度  $\rho=7.90\times 10^3\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ , 熔点  $T_m=1798\text{ K}$ , 溶解热  $L_m=1.49\times 10^4\text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}$ , 摩尔质量  $M=56\times 10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{mol}^{-1}$ .

### 解析

1) 当光束垂直入射到一个平面上时, 如果光束被完全反射, 且反射光垂直于平面, 则光子的动量的改变量达最大值:

$$\Delta p = p - (-p) = 2p = 2\frac{h}{\lambda} \quad (1)$$

此时该光束对照射面的光压达最大值. 设每秒钟射到平面上的光子数为  $n$ , 每秒钟光子动量改变量的总和为  $n\Delta p$ , 这也就是每秒钟此光束对被照射面的冲量, 单位面积上每秒钟受到的冲量就是物体表面受到光压(强), 故有

$$\text{光压} \quad P_{\gamma} = \frac{2h}{\lambda} \cdot \frac{n}{A} \quad (2)$$

每个光子的能量为  $h\nu=hc/\lambda$ , 这里  $c$  为真空中的光速,  $\nu$  为光的频率, 因而

$$n = P/(h\nu) = P\lambda/(hc)$$

代入(2)式并代入  $P, c, A$  的数值, 得

$$P_{\gamma} = (2h/\lambda)(P\lambda/hc)/A = 2P/cA = 6.67\text{ Pa}$$

2) 设被熔化的那部分铁板的质量为  $m$ , 则有

$$m = \rho Ad$$

这部分铁板在被照射直至熔化的过程中所吸收的热量为

$$Q = \frac{\rho Ad}{M} [C(T_m - T) + L_m] = 0.80 Pt$$

其中  $t$  为所需的照射时间. 代入有关数据, 得

$$t = 0.192\text{ s.}$$

13. 如图 11-5 所示, 在真空中有一个折射率为  $n(n>n_0, n_0$  为真空的折射率)、半径

为  $r$  的质地均匀的小球. 频率为  $\nu$  的细激光束在真空中沿直线  $BC$  传播, 直线  $BC$  与小球球心  $O$  的距离为  $l$  ( $l < r$ ), 光束于小球体表面的  $C$  点经折射进入小球 (小球成为光传播的媒质), 并于小球表面的  $D$  点又经折射进入真空. 设激光束的频率在上述两次折射后保持不变. 求在两次折射过程中激光束中一个光子对小球作用的平均力的大小.

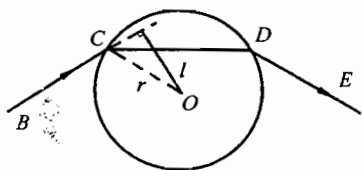


图 11-5

### 解析

在由直线  $BC$  与小球球心  $O$  所确定的平面中, 激光光束两次折射的光路  $BCDE$  如图 11-6 所示. 图中入射光线  $BC$  与出射光线  $DE$  的延长线交于  $G$  点. 按照光的折射定律有

$$n_0 \sin \alpha = n \sin \beta \quad (1)$$

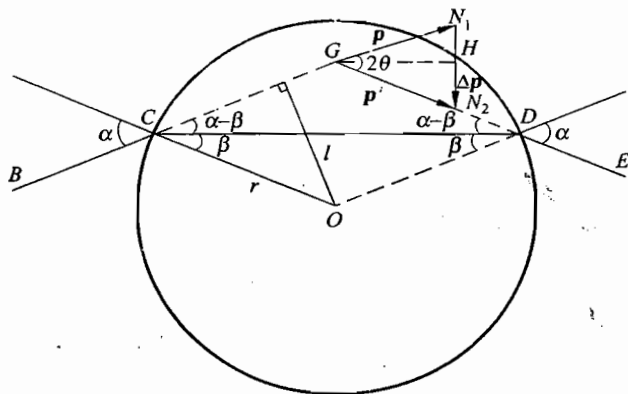


图 11-6

式中  $\alpha$  与  $\beta$  分别是相应的人射角和折射角, 由几何关系还可知

$$\sin \alpha = \frac{l}{r} \quad (2)$$

激光光束经两次折射, 其频率  $\nu$  保持不变, 故在两次折射前后, 光束中一个光子的动量的大小  $p$  和  $p'$  相等, 即

$$p = \frac{h\nu}{c} = p' \quad (3)$$

式中  $c$  为真空中的光速,  $h$  为普朗克常量. 因射入小球的光束中光子的动量  $p$  沿  $BC$  方向, 在小球中传播时其动量  $p''$  沿  $CD$  方向, 而射出小球的光束中光子的动量  $p'$  沿  $DE$  方向, 光子动量的方向由于折射发生了两次偏转, 每次偏转角为  $\alpha - \beta$ , 合起来偏转角为  $2\theta$ , 由

图中几何关系可知

$$2\theta = 2(\alpha - \beta) \quad (4)$$

若用矢量  $\vec{GN}_1$  表示射入前光子动量  $p$ , 用  $\vec{GN}_2$  表示出射光子动量  $p'$ , 则  $N_1N_2$  就是光子动量的改变量  $\Delta p$ . 由几何关系得

$$\Delta p = 2p \sin \theta = 2 \frac{h\nu}{c} \sin \theta \quad (5)$$

$\triangle GN_1N_2$  为等腰三角形, 其底边上的高  $GH$  与  $GN_2$  的夹角  $\theta = \alpha - \beta$ , 故与  $CD$  平行, 故光子动量的改变量  $\Delta p$  的方向沿垂直于  $CD$  的方向, 这就是光子给予小球的作用力的方向. 由于左右对称, 此力沿  $GO$  方向.

光子与小球作用过程的时间可认为是光束在小球内的传播时间, 即

$$\Delta t = \frac{2r \cos \beta}{cn_0/n} \quad (6)$$

式中  $cn_0/n$  是光在小球内的传播速率.

按照牛顿第二定律, 小球对光子的作用的平均力大小为

$$F' = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{n_0 h\nu \sin \theta}{nr \cos \beta} \quad (7)$$

按照牛顿第三定律, 光子对小球的作用的平均力大小  $F = F'$ , 即

$$F = \frac{n_0 h\nu \sin \theta}{nr \cos \beta} \quad (8)$$

力的方向由  $O$  指向  $G$ . 由(1)、(2)、(4)式和三角函数运算有

$$\sin \theta = \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

而

$$\sin \beta = \frac{n_0}{n} \sin \alpha = \frac{n_0}{n} \frac{l}{r}$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{n_0^2 l^2}{n^2 r^2}}$$

代入(8)式, 最后得

$$F = \frac{n_0 l h\nu}{nr^2} \left[ 1 - \sqrt{\frac{r^2 - l^2}{(nr/n_0)^2 - l^2}} \right] \quad (9)$$

14. 一理想的凸透镜, 它容许入射光完全透过, 此透镜直径  $D = 10$  cm, 焦距  $f = 15$  cm, 水平放置, 四束激光沿竖直方向对称地入射到透镜靠边缘处. 已知四束激光总功率为  $W = 1.2$  W, 求激光对透镜之作用力. 已知光子动量  $p = E/c$ , 其中  $E$  为光子能量,  $c$  为光速.

**解析**

激光通过透镜后聚焦,如图 11-7 所示. 由于通过透镜前后光子的能量不变,且光速为恒量,故光子的动量大小通过透镜前后不变,但方向改变,光子的动量是

$$p = E/c \quad (1)$$

在通过透镜前,其方向竖直向下. 通过透镜后,动量方向改变,其沿竖直方向和水平方向的分量分别是

$$p_{\text{直}} = p \cos \theta \quad (2)$$

$$p_{\text{平}} = p \sin \theta \quad (3)$$

$$\cos \theta = f / \sqrt{f^2 + (D/2)^2} \quad (4)$$

由此可知,光子在通过透镜前后,其动量沿竖直方向和水平方向的变化分别是

$$(\Delta p)_{\text{直}} = p(1 - \cos \theta) = (E/c)(1 - \cos \theta) \quad (5)$$

$$(\Delta p)_{\text{平}} = p \sin \theta = (E/c) \cdot \sin \theta$$

激光照射透镜  $\Delta t$  时间内通过透镜的光子数为

$$N = W\Delta t/E \quad (6)$$

这些光子分四束对称地通过透镜,它们的水平动量的变化相互抵消,因而水平方向总动量始终为零,其竖直方向动量的变化等于透镜对光子的冲量,在数值上,也就等于激光对透镜的作用力的冲量  $F\Delta t$ ,故有

$$F\Delta t = N(\Delta p)_{\text{直}} \quad (7)$$

由(4)、(5)、(6)和(7)式可得

$$F = (W/c)(1 - f / \sqrt{f^2 + (D/2)^2})$$

代入数值,得到  $F \approx 2.1 \times 10^{-10} \text{N}$ ,方向向下.

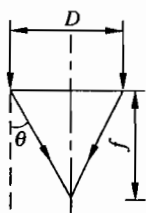


图 11-7



## 十二、天体和宇宙

1. 到1998年底为止,人类到达过的地球以外的星球有\_\_\_\_\_,由地球上发射的探测器到达过的地球以外的星球有\_\_\_\_\_.

### 解析

月球;月球和火星.

1969年7月16日,美国的“阿波罗”11号载人飞船发射升空.7月20日,登月舱离开绕环月轨道飞行的母船,向月球表面进发.登月舱进入月球背面后不久,发动机点火,登月舱脱离了环月轨道开始平稳地向月面下降.7月21日,在登月舱着陆几个小时之后,宇航员阿姆斯特朗钻出舱口,迈上月球表面.

由地球上发射的探测器到达过的地球以外的星球有月球和火星.1966年1月31日,苏联的“月球”9号无人自动航天器发射升空,2月3日21时45分,在月球表面实现了软着陆后,向地面指挥中心发回成功的信息.不久,地面指挥中心就收到了自月球表面发回的月面图像.

1976年7月和9月,美国“海盗”1号和2号飞船,先后在火星上降落并拍摄了火星表面的彩色照片.1996年12月2日,美国又发射了“探路者”号火星探测飞船,于1997年7月4日在火星表面安全着陆.一台命名为“火星漫游者”的智能登陆探测器(车上安装有多种高科技微型仪器),从“探路者”号飞船铺向火星表面的舷梯上缓缓滑下,在激光制导下,对火星表面进行了为期一周的考察.

2. 根据现代天文知识,恒星演化到最后可成为\_\_\_\_\_或\_\_\_\_\_或\_\_\_\_\_.

### 解析

白矮星;中子星(脉冲星);黑洞.

按照现代恒星演化理论的观点,恒星最后的归宿与其初始质量有关.

初始质量小于太阳质量8倍的恒星最终将成为白矮星.白矮星是一种颜色发

白,光很暗,尺度很小的天体,如天狼星的伴星.白矮星由致密的铁原子加电子组成“超固态”,平均密度高达  $10^{10} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

初始质量为太阳质量的 8~50 倍的恒星,在核燃料耗尽后,由于引力坍缩时温度骤然升高,会引起猛烈的爆发,在短短的几天之内,亮度陡增千万倍甚至上亿倍,称为超新星,爆发后留下的核几乎全部由中子紧紧堆成,形成中子星,密度高达  $3 \times 10^{17} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

初始质量超过太阳质量 50 倍以上的恒星,在核燃料耗尽后,在强大的引力作用下,甚至使中子星的压强也支持不住,于是这种大质量的恒星便一直坍缩下去,最终成为黑洞.

3. 1990年3月,紫金山天文台将1965年9月20日发现的第2752号小行星命名为吴健雄星,其直径为32 km.如果该小行星的密度和地球相同,则对该小行星来说,其上物体的第一宇宙速度约为 \_\_\_\_\_  $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ .吴健雄对物理学已经做出的最大贡献是 \_\_\_\_\_.

### 解析

20;用实验证实了李政道和杨振宁提出的弱作用下宇称不守恒的理论.

物体在小行星的引力作用下环绕小行星做匀速圆周运动时,应有

$$G \frac{mm'}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

式中  $r$  为小行星的半径;当物体在离小行星表面不太高处做匀速圆周运动时,  $r$  近似等于圆的半径.  $m'$  为小行星的质量,  $m$  为物体的质量,  $v$  为该小行星上的第一宇宙速度. 设小行星的密度为  $\rho$ , 则有  $m' = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$ , 代入上式, 化简后得

$$v = \sqrt{\frac{4\pi G \rho}{3}} r$$

可见在密度相同的情况下,第一宇宙速度与行星的半径成正比. 对于地球,第一宇宙速度为  $v_1 = \sqrt{gR} = 7.9 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $R = 6.4 \times 10^3 \text{ km}$  为地球半径,  $g = 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  为地球表面处的重力加速度. 由此得

$$\frac{v}{v_1} = \frac{r}{R} = \frac{32}{2 \times 6400} = \frac{1}{400}$$

故

$$v = \frac{1}{400} v_1 = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

吴健雄对物理学已经做出的最大贡献是:1956年通过实验证实了李政道和杨振宁提出的在弱相互作用下宇称不守恒的理论.

为了尽可能降低热运动的干扰,实验是在  $0.01 \text{ K}$  以下的极低温度下进行的. 中子在弱相互作用下发生  $\beta$  衰变,放出电子和反中微子,转变为质子. 在这一过程中,射出的电子



总是沿着其自旋的轴线方向. 在强磁场中, 几乎所有的钴原子都具有相同的取向, 即沿着磁场方向取向. 如果宇称守恒, 衰变产生的电子应以相同的概率向这两个方向射出, 即两个方向射出的电子数目相同. 实验结果表明, 几乎所有的电子都向同一方向射出, 证实了在弱相互作用下不对称, 宇称守恒定律失效.

4. 当质量为  $m$  的质点距一个质量为  $m_0$ 、半径为  $R$  的质量均匀分布的致密天体中心的距离为  $r$  ( $r \geq R$ ) 时, 其引力势能为  $E_p = -Gm_0m/r$ , 其中  $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$  为引力常量. 设致密天体是中子星, 其半径  $R = 10 \text{ km}$ , 质量  $m_0 = 1.5 m_\odot$  ( $1m_\odot = 2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$  为太阳的质量).

1)  $1 \text{ kg}$  的物质从无限远处被吸引到中子星的表面时所释放的引力势能为多少?

2) 在氢核聚变反应中, 若参加核反应的原料的质量为  $m$ , 则反应中的质量亏损为  $0.0072 m$ , 问  $1 \text{ kg}$  的原料通过核聚变提供的能量与第 1) 问中所释放的引力势能之比是多少?

3) 天文学家认为: 脉冲星是旋转的中子星, 中子星的电磁辐射是连续的, 沿其磁轴方向最强, 磁轴与中子星的自转轴方向有一夹角 (如图 12-1 所示), 在地球上的接收器所接收到的一连串周期出现的脉冲是脉冲星的电磁辐射. 试由上述看法估算地球上接收到的两个脉冲之间的时间间隔的下限.

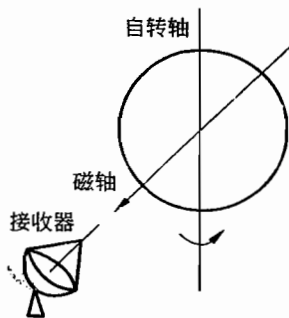


图 12-1

### 解析

1) 根据能量守恒定律, 质量为  $m$  的物质从无限远处被吸引到中子星的表面时所释放的引力势能  $\Delta E_1$  应等于对应始末位置的引力势能的变化, 故有

$$\frac{\Delta E_1}{m} = \frac{0 - \left(-\frac{Gm_0m}{R}\right)}{m} = \frac{Gm_0}{R} \quad (1)$$

代入有关数据, 得到

$$\frac{\Delta E_1}{m} \approx 2.0 \times 10^{16} \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \quad (2)$$

2) 在氢核聚变反应中, 每千克质量的核反应原料提供的能量为

$$\frac{\Delta E_2}{m} = 0.0072c^2 \quad (3)$$

所求能量比为

$$\frac{\Delta E_1/m}{\Delta E_2/m} \approx 31 \quad (4)$$

3) 根据题意, 可知接收到的两个脉冲之间的时间间隔即为中子星的自转周期, 中子

星做高速自转时,位于赤道处质量为  $\Delta m$  的中子星质元所需的向心力不能超过对应的万有引力,否则将会因不能保持匀速圆周运动而使中子星破裂,因此有

$$\Delta m \omega^2 R \leq \frac{G m_0 \Delta m}{R^2} \quad (5)$$

式中

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} \quad (6)$$

为中子星的自转角速度,  $\tau$  为中子星的自转周期. 由(5)、(6)式得到

$$\tau \geq 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{m_0 G}} \quad (7)$$

代入数据得到

$$\tau \geq 4.4 \times 10^{-4} \text{ s} \quad (8)$$

故时间间隔的下限为  $4.4 \times 10^{-4} \text{ s}$ .

5. 已知质量为  $m$  的质点和质量为  $m_0$ 、半径为  $R$  的星体中心相距为  $r$  ( $r \geq R$ ) 时,引力势能  $E_p = -G \frac{m_0 m}{r}$ . 有一些超高密度的星体,其巨大的引力使得光子也无法逃逸出来,即它所发出的任何电磁波都无法向外传播,这类星体叫黑洞. 若某黑洞的质量等于太阳质量  $m_s$ , 试估算该黑洞半径最多是多大?

### 解析

光子从质量  $m_0 = m_s$ 、半径为  $R$  的黑洞逃逸(即脱离黑洞引力的影响,可认为离黑洞为无穷远)时,克服黑洞引力所做的功  $W$  是以光子能量  $h\nu (= mc^2)$  的减少为代价的. 若  $W > mc^2$ , 则光子无论如何也无法从黑洞逃逸. 而  $W$  等于光子从黑洞表面逃逸到无穷远时,光子和黑洞这个体系引力势能的增量  $G \frac{m_s m}{R}$ . 故当

$$mc^2 < G \frac{m_s m}{R}$$

即

$$R < G \frac{m_s}{c^2}$$

时光子不能从黑洞逃逸. 代入数值

$$R < 6.7 \times 10^{-11} \times \frac{2.0 \times 10^{30}}{(3.0 \times 10^8)^2} \text{ m}$$

得

$$R < 1.5 \times 10^3 \text{ m}$$

即该黑洞质量  $m_0 = m_s$  时, 半径最多只能有 1.5 km. 我们知道, 太阳半径为  $7 \times 10^5$  km, 可以想像, 黑洞密度是多么高.

6. 1997年8月26日在日本举行的国际天文学大会上, 德国 Max Planck 学会的一个研究组宣布了他们的研究成果: 银河系的中心可能存在一个大黑洞. 他们的根据是用口径为 3.5 m 的天文望远镜对猎户座中位于银河系中心附近的星体进行近六年的观测所得到的数据. 他们发现, 距离银河系中心约  $6 \times 10^9$  km 的星体正以  $2000 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  的速度围绕银河系中心旋转. 根据上面的数据, 试在经典力学的范围内(见提示 2), 通过计算确认, 如果银河系中心确实存在黑洞的话, 其最大半径是多少. (引力常量  $G = 6.67 \times 10^{-20} \text{ km}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ )

[提示]

1) 黑洞是一种密度极大的天体, 其表面的引力是如此之强, 以至于包括光在内的所有物质都逃脱不了其引力作用.

2) 计算中可以采用拉普拉斯经典黑洞模型, 在这种模型中, 在黑洞表面上的所有物质, 即使初速度等于光速  $c$  也逃脱不了其引力的作用.

**解析**

首先求出一定质量的引力源成为黑洞应满足的条件. 按照黑洞的定义, 包括以光速运动的光子也不能脱离黑洞的吸引, 即不能逃离黑洞的表面. 而拉普拉斯经典黑洞模型则把光看做是以光速  $c$  运动的某种粒子. 我们知道, 物体在引力作用下的势能是负的, 物体恰能逃离引力作用, 表示物体运动到无限远的过程中, 其动能恰好全部用于克服引力做功. 物体在无限远处时, 动能和势能都等于零. 这意味着该物体处在引力源表面处时, 其动能与势能之和亦等于零. 物体不能逃离引力作用, 表示该物体尚未到达无限远处, 其动能已全部用于克服引力做功, 但引力势能仍是负的. 这意味着它在引力源表面处时, 其动能与势能之和小于零. 若某引力源的质量为  $m_B$ , 半径为  $r_B$ , 质量为  $m$  的粒子在引力源表面的速度等于光速, 但它仍不能逃离引力作用, 则按牛顿力学的观点应有下列关系:

$$\frac{1}{2}mc^2 - G \frac{m_B m}{r_B} < 0 \quad (1)$$

或

$$r_B < \frac{2Gm_B}{c^2} \quad (2)$$

这就是说, 对于质量为  $m_B$  的引力源, 只有其半径  $r_B$  (叫做黑洞的引力半径) 小于  $\frac{2Gm_B}{c^2}$  时才会在其表面产生足够强的引力, 使得包括光在内的所有物质都不能脱离其引力

作用. 对光而言, 人们将无法通过光学测量看到它, 这就是把它叫做黑洞的原因.

现在再来根据观测数据确定存在于银河系中心的大黑洞的半径. 设位于银河系中心的引力源的质量为  $m_B$ , 绕银河系中心旋转的星体的质量为  $m$ , 该星体做圆周运动时, 有下列关系:

$$m \frac{v^2}{r} = G \frac{mm_B}{r^2} \quad \text{即} \quad m_B = \frac{rv^2}{G} \quad (3)$$

$r$  为轨道半径. 若该引力源为黑洞, 则其质量分布球的半径应满足(2)式, 即

$$r_B < \frac{2G}{c^2} \frac{v^2 r}{G} = 2 \frac{v^2 r}{c^2} \quad (4)$$

根据观测数据,  $v = 2 \times 10^3 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} = 2 \times 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $r = 60 \times 10^8 \text{ km} = 6 \times 10^{12} \text{ m}$ , 而  $c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , 把这些数据代入(4)式, 得

$$r_B < 5.3 \times 10^8 \text{ m} = 5.3 \times 10^5 \text{ km} \quad (5)$$

这说明, 对质量由(3)式决定的引力源来说, 半径小于  $5.3 \times 10^5 \text{ km}$  时才是黑洞, 大于这个数值则不是黑洞. 所以如果银河系中心存在黑洞的话, 该黑洞的半径小于  $5.3 \times 10^5 \text{ km}$ .

## 十三、科学史和科普知识

1. 1985年,我国物理学界隆重集会,纪念一位世界著名的物理学家诞辰一百周年.他叫什么名字?他因什么成就而获得了诺贝尔奖金?

### 解析

1985年,我国物理学界曾隆重集会,纪念丹麦物理学家尼尔斯·玻尔(Niels Henrik David Bohr, 1885-1962).

1913年,玻尔发表了《论原子构造和分子构造》的长篇文章,提出了原子结构的量子论.他在自己的这一理论中,采用了当时已有的量子概念,提出了几条基本的“公设”以及原子定态、量子跃迁等概念,有力地冲击了经典理论,推动了量子力学的形成.

玻尔吸收了前人的研究成果,利用自己的对应原理,对各种元素的光谱和X射线谱、光谱线的(正常)塞曼效应和斯塔克效应、原子中电子的分组和元素周期表,甚至还有分子的形成,都提出了相对合理的理论诠释.由于这些辉煌的成绩,他获得了1922年诺贝尔物理学奖.

本题第2问只要求学生答出“提出了原子结构的量子论”.

2. 用连线连接起左边列出的科学家和右边列出的他所测定过的物理量或证实过的物理事实.

- |         |             |
|---------|-------------|
| A. 布朗   | a. 热功当量     |
| B. 卡文迪许 | b. 电磁波存在    |
| C. 焦耳   | c. 引力常量     |
| D. 赫兹   | d. 分子不断做热运动 |
| E. 法拉第  | e. 原子的有核结构  |
| F. 牛顿   | f. 电子电量     |

### 解析

布朗是英国植物学家.他于1827年用显微镜观察水中悬浮的花粉微粒,发现

这些花粉微粒在不停地做无规则的运动. 经过长时间多次观察发现, 固体小颗粒在液体甚至气体中都会发生这种运动, 而且与外界其他条件, 如季节、昼夜等因素无关, 只与液体本身的温度有关. 这种运动后来被称为布朗运动. 布朗运动反映了液体和气体分子在不断地做无规则的热运动. 因此, 应将“A. 布朗”与“d. 分子不断做热运动”之间连线.

卡文迪许(现译为卡文迪什)是英国物理学家. 他从1797年夏季开始, 利用扭秤完成了历史上第一个测定万有引力常量的实验. 实验于1798年完成. 因此, 应将“B. 卡文迪许”与“c. 引力常量”之间连线.

焦耳是英国物理学家. 他从1840年起, 持续几十年时间, 用电量热法和机械量热法做了大量实验, 得出结论: 热功当量是一个普适量, 同做功方式无关, 从而证明了机械能(功)和电能(功)与热量之间的转换关系, 为确认能量守恒定律的正确性打下了坚实的实验基础. 因此应在题目中的“C. 焦耳”与“a. 热功当量”之间连线.

赫兹是德国物理学家. 1886年, 他在做放电实验时, 发现近旁未闭合的线圈也出现火花. 由此开始直到1888年, 持续进行了关于电磁波的多次实验. 他用实验证实了电磁波的存在, 测得了电磁波的波长, 还根据这一数值和振荡器的频率计算出波的速度, 1887年末, 他测出电磁波的速度等于光速. 1888年, 他又进行了一系列关于电磁波与光波类比的实验. 因此本题中左边的“D. 赫兹”应与右边的“b. 电磁波存在”用线连接起来.

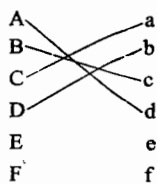


图 13-1.

本题的答案应如图 13-1 所示.

3. 第一个在理论上预言电磁波存在并指出光是一种电磁波的科学家是\_\_\_\_\_ ; 提出物质波假说的科学家是\_\_\_\_\_ ; 第一个提出量子概念的科学家是\_\_\_\_\_ .

### 解析

麦克斯韦; 德布罗意; 普朗克.

1864年12月8日, 英国物理学家麦克斯韦(James Clerk Maxwell, 1831-1879)在英国皇家学会的集会上宣读了题为《电磁场的动力学理论》的重要论文, 提出了他的电磁场理论. 电磁场的波动方程是麦克斯韦方程组的数学推论, 通过这样的理论途径, 麦克斯韦预见电磁波的存在. 按照麦克斯韦的理论, 电磁波在真空中的传播速度是仅仅通过电磁学的测量就能确定下来的一个恒量. 测量的结果表明这一恒量和真空中的光速十分接近. 在这种量值符合性的启发下, 麦克斯韦提出了光的电磁理论, 认为光是频率介于某一范围之内电磁波.

1924年, 法国物理学家德布罗意(Louis Victor De Broglie)在巴黎大学, 他的博士学

立论文《量子论研究》中首次提出了“物质波”假说。他的这一大胆而成功的假设成为建立波动力学的物理基础,从而使他获得了1929年诺贝尔物理学奖。

1900年,德国物理学家普朗克(Max Planck, 1858-1947)在研究黑体辐射问题时,首次引入了能量量子的概念。此后物理学的发展充分显示了量子概念的重要意义。由于普朗克的这一重大贡献,他获得了1918年诺贝尔物理学奖。

4. 提出原子的核式结构模型的物理学家是\_\_\_\_\_ ;发现中子的物理学家是\_\_\_\_\_ ;发现电子的物理学家是\_\_\_\_\_ ;指出弱相互作用下宇称不守恒的物理学家是\_\_\_\_\_ 和\_\_\_\_\_ ;在实验上证实此结论的物理学家是\_\_\_\_\_。

### 解析

卢瑟福;查德威克;汤姆孙;杨振宁、李政道;吴健雄。

1909年至1911年,卢瑟福(Ernest Rutherford, 1871-1937)和他的助手盖革(H. Geiger)、学生马斯登(E. Marsden),相继进行了用 $\alpha$ 粒子轰击金箔的实验,发现有 $1/8000$ 的 $\alpha$ 粒子散射角大于 $90^\circ$ ,用汤姆孙的原子模型无法解释。1911年,卢瑟福在《哲学研究》上发表了题为《物质对 $\alpha$ 、 $\beta$ 粒子的散射和原子构造》的论文,提出了原子的核式结构模型。

1930年,德国科学家博特(W. W. G. Bothe)等发现轻金属如铍等在 $\alpha$ 粒子轰击下能发出一种穿透性很强的射线,且不受电场和磁场的影响,当时称之为“铍辐射”。1932年初,约里奥-居里夫妇发现用这种“铍射线”轰击石蜡和其他含氢物质,能从石蜡中打出速度很大的质子流,他们误认为这种“铍辐射”是一种 $\gamma$ 射线。英国物理学家查德威克(Sir James Chadwick, 1891-1974)敏锐地觉察到这种“铍辐射”很可能是卢瑟福在1920年所预言的中子辐射,他通过一系列实验研究,最终证实了中子的存在,所谓“铍辐射”正是从铍中射出的中子组成的。1932年,他在《自然》上发表了《中子可能存在》的论文。由于这一重要的发现,查德威克因此获得了1935年诺贝尔物理学奖。

英国物理学家汤姆孙(Joseph John Thomson, 1856-1940)从1890年起,开始了对阴极射线的研究。他发现阴极射线是带负电的粒子流,并测出了这种粒子的比荷(又称荷质比)。进一步实验还发现这种带负电的粒子是组成一切原子的基本成员之一,后来又通过实验测得了这种粒子的电量,进而求出了质量。1897年4月30日,正式宣布了这一发现,后来人们把这种微粒命名为电子。汤姆孙为此获得了1906年诺贝尔物理学奖。

1956年,美籍华人物理学家杨振宁和李政道合作,深入研究了当时令人困惑的 $\theta$ - $\tau$ 之谜。他们通过分析认识到,很可能在弱相互作用中宇称不守恒。他们仔细检查了过去的所有实验,确认实验并未证明弱相互作用中宇称守恒,在此基础上,他们进一步提出了几种检验弱相互作用中宇称是不是守恒的实验途径。次年,这一理论预见得到另一位美籍华人物理学家吴健雄领导的小组的实验证实。因此,杨振宁与李政道的工作迅速得到了学术界

的承认,并因此获得了1957年诺贝尔物理学奖.

5. 爱因斯坦有哪些科学成就? 试举出其中两项:\_\_\_\_\_.

### 解析

爱因斯坦(Albert Einstein, 1879-1955)是20世纪最伟大的物理学家,他的科学成就非常丰富. 例如:

1905年3月,在《关于光的产生和转化的一个推测性的观点》的论文中,提出了光量子假说,推导出光电效应定律,并因此获得1921年诺贝尔物理学奖.

1905年4月、5月和12月,他先后发表3篇论文,用分子运动的观点和统计方法讨论了布朗运动. 1908年,爱因斯坦关于布朗运动的理论被法国物理学家佩兰以精密的实验所证实.

1905年6月,爱因斯坦发表了《论动体的电动力学》这篇开创物理学新纪元的长篇论文,完整地提出了狭义相对论.

从1905年以后,爱因斯坦不断发展光量子理论. 1912年,他把光量子概念应用于光化学,建立了光化学定律. 1916年,提出了关于辐射的吸收和发射过程的统计理论,其中有关受激发射的概念为激光技术提供了理论基础. 1924年,他把印度物理学家玻色关于光量子统计的理论同德布罗意的物质波理论结合起来,提出单原子气体的量子统计理论,即关于整数自旋粒子所服从的玻色-爱因斯坦统计.

1915年,爱因斯坦建立了广义相对论,并于1916年春天写了总结性的论文《广义相对论的基础》,预言了引力波的存在. 1917年,又用广义相对论的结果来研究整个宇宙的时空结构,为开创现代宇宙学作出了贡献.

本题的答案,除了上述成就外,列举了爱因斯坦其他成就的,同样算正确.

6. 到1998年底为止,获得诺贝尔物理学奖的华人共有\_\_\_\_\_人,他们的姓名是\_\_\_\_\_.

### 解析

5人;杨振宁、李政道、丁肇中、朱棣文和崔琦.

杨振宁和李政道合作,因发现弱相互作用中宇称不守恒而获得1957年诺贝尔物理学奖.

丁肇中领导的实验小组,在1974年发现了一个质量约为质子质量3倍的长寿命中性粒子,取名为J粒子. 与此同时,美国物理学家B. 里希特也发现了这种粒子,并取名为 $\psi$



粒子。为此,丁肇中和里希特共同获得 1976 年诺贝尔物理学奖,人们将这种粒子命名为  $J/\psi$  粒子。

朱棣文从 1983 年开始激光致冷捕捉的研究工作,并在 1985 年公布了有关这项研究的第一份学术研究报告。以后又不断改进激光冷却技术,使原子冷却温度达到  $40 \mu\text{K}$ 。1997 年,朱棣文因这项激光冷却及原子捕捉技术的重大突破,与另外两位物理学家共同获得诺贝尔物理学奖。

崔琦和另外两位物理学家,因完成分数量子霍尔效应实验而共同获得 1998 年诺贝尔物理学奖。他们发现了在极低温度和极强磁场下,在由半导体砷化镓构成的某种“三明治”结构中,电子会形成一种新的“量子流体”,观察到了“分数电荷”。

7. 德国物理学家冯·克利青因发现\_\_\_\_\_而荣获 1985 年诺贝尔物理学奖。

### 解析

量子霍尔效应。

1980 年,德国物理学家冯·克利青(Von Klitzing)等人,在低温(约几开)、强磁场(约  $1\sim 10 \text{ T}$ )下,研究了二维电子气的霍尔效应,他们发现霍尔电阻随磁场的增大作台阶状升高,台阶的高度为一个物理常数  $h/e^2$  除以整数  $i$ ,  $h$  为普朗克常量,  $e$  为电子电荷量。即霍尔电阻  $R_H = \frac{h}{ie^2}$ ,  $i=1, 2, 3, \dots$ , 且  $R_H$  与样品的种类、结构和尺寸都无关,这一现象被称为量子霍尔效应,对应的霍尔电阻称为量子霍尔电阻。量子霍尔效应是在低温、强磁场下载流子量子效应的表现,是宏观尺度上表现出的量子效应,由于这一重大发现,冯·克利青荣获了 1985 年诺贝尔物理学奖。

8. 19 世纪末到 20 世纪初,标志近代物理学诞生的两项最重要的科学成就是下列诸项中的\_\_\_\_\_和\_\_\_\_\_。

- A. 晶体管的发明
- B. 麦克斯韦电磁场理论的建立
- C. 狭义相对论的建立
- D. 原子的核式结构的确定
- E. 赫兹实验证实电磁波的存在
- F. 世界上第一台激光器研制成功
- G. 电子的发现
- H. 量子论的提出
- I. 放射性元素的发现

## J. 超导电性的发现

**解析**

C; H

近代物理学是以量子理论和相对论为基础发展起来的,所以通常把量子论的提出(1900年)和狭义相对论的建立(1905年)作为近代物理学诞生的标志.

9. 1988年10月,我国基本建成了对撞机.在此机中发生对撞的粒子是\_\_\_\_\_和\_\_\_\_\_.

**解析**

正电子;电子.

1988年10月,我国在北京中国科学院高能物理研究所建造了一台能量为  $2 \times 1.1 \text{ GeV}$  的正负电子对撞机,简称 BEPC. 以后,单束电子的能量将提高到  $2.8 \text{ GeV}$ . 这台对撞机的实验目标是在正负电子总能量为  $4 \sim 6 \text{ GeV}$  的区域中,研究  $J/\psi$  粒子族、 $\tau$  子、粲介子和粲重子等,将为我国高能物理实验提供一个良好的基地. 此外,它还可以专门提供同步辐射应用.

对撞机是高能物理实验的主要工具,包括质子-反质子对撞机、电子-质子对撞机、正负电子对撞机等. 当正电子和负电子相遇时,它们会共同转化为一对光子,这一过程叫做湮没,高能正负电子对撞湮没过程可以看成是分两步进行的. 第一步,正负电子湮没产生一个在非常短暂时间内存在的中间态,常称为“虚光子”态,它很像一个能量密度非常大的微观火球,其温度极高. 例如,用  $20 \text{ GeV}$  的电子与  $20 \text{ GeV}$  的正电子对撞,产生的微观火球温度可达  $4 \times 10^{14} \text{ K}$ , 约为太阳表面温度的 700 亿倍. 第二步,虚光子重新转化为其他各种粒子,可能是轻子对,也可能是一些强子(如  $\pi$  介子、K 介子、质子、反质子对等). 因此,正负电子对撞机是新粒子的源,是发现和研究新粒子的有效工具.

正负电子对撞的开创性工作是 20 世纪 60 年代在意大利进行的. 1974 年,丁肇中和里希特同时发现的  $J/\psi$  粒子,就是美国斯坦福电子直线加速器中心的正负电子对撞实验和美国布鲁克海文实验室的质子实验中实现的,近几十年来的许多重大发现,也是由正负电子对撞实验得到的.

10. 1991年11月9日在欧洲14国的欧洲联合环形装置上,成功地实现了一项有重大意义的试验,它是关于\_\_\_\_\_的试验.

**解析**

受控核聚变.

1991年11月9日,在英格兰牛津郡欧洲联合环形聚变装置上,成功地进行了一次受控核聚变试验.这次核聚变产生了大约1.7 MW的电力,持续时间为2 s,反应温度比太阳中心温度高20倍.这是人类实现受控核聚变的具有里程碑意义的一步,标志着核聚变燃料实际利用的开始.

受控核聚变研究是当代世界科技领域的主攻课题之一,要实现受控核聚变,必须具备三个必要条件:一是把氘和氚加热到几亿摄氏度的超高温,此时燃料处于等离子态;二是等离子体粒子密度达到 $10^{20}$ 个 $\cdot\text{m}^{-3}$ ;三是能量约束时间达到1 s以上.在1990年,欧洲联合环形聚变装置(托卡马克-JET)用纯氢等离子体工作,已把氢加热到3.28亿度以上,等离子体粒子密度达到 $4\times 10^{20}$ 个 $\cdot\text{m}^{-3}$ ,但保持能量约束时间只有十分之几秒,已接近点火条件.

11. 1998年6月3日,美国发射的航天飞机“发现者”号搭载了一台 $\alpha$ 磁谱仪,其中一个关键部件是由中国科学院电工研究所设计制造的直径1200 mm、高800 mm、中心磁感强度为0.1340 T的永久磁体.用这个 $\alpha$ 磁谱仪期望探测到宇宙空间中可能存在的\_\_\_\_\_.

**解析**

反物质.

12. 物质的四种相互作用是\_\_\_\_\_.

**解析**

电磁作用、引力作用、强相互作用、弱相互作用.

13. 将下列各量用国际单位制的主单位表示(取3位有效数字,第一横线填数字,第二横线填单位).

- 1) 1 光年 = \_\_\_\_\_.
- 2) 1 标准大气压 = \_\_\_\_\_.
- 3) 1 电子伏特 = \_\_\_\_\_.
- 4) 1 原子质量单位 = \_\_\_\_\_.

**解析**

- 1)  $9.47 \times 10^{15} \text{ m}$ .
- 2)  $1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ .
- 3)  $1.60 \times 10^{-19} \text{ J}$ .
- 4)  $1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$ .

14. 1) 到目前为止,人们发现物质运动的最大速度不能超过\_\_\_\_\_  $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ .
- 2) 1990年诺贝尔物理奖的授予项目是关于\_\_\_\_\_.
- (A) 热核反应的控制                      (B) 夸克存在的实验证据  
(C) 高温超导方面的成就                (D) 宇宙膨胀的理论

**解析**

$3 \times 10^8$ ; B

1) 根据狭义相对论,物体的质量  $m$  随着其运动速度  $v$  的增大而增大,当  $v$  趋近于光速  $c$  时,质量趋于无穷大,即

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

式中  $m_0$  是物体的静止质量. 因此,任何实物的速度都不可能超过光速.

2) 1990年诺贝尔物理学奖授予了三位物理学家,他们是美国麻省理工学院的杰罗姆·弗里德曼(Jerome I Friedman, 1930- )、亨利·肯德尔(Henry W Kendall, 1926- )和美国斯坦福直线加速器中心的理查德·泰勒(Richard E Taylor, 1929- , 加拿大人). 在他们的领导下,1967年,斯坦福直线加速器中心和麻省理工学院的联合实验小组,用当时最先进的 20 GeV 电子直线加速器,进行深度非弹性电子-质子散射实验,所得到的结果被认为是夸克存在的第一个实验证据. 这项工作为进一步研究物质的最内层结构铺平了道路.

## 附录 全国中学生物理竞赛内容提要

(2005年1月修订, 2006年实行)

**编者按:**按照中国物理学会全国中学生物理竞赛委员会第九次全体会议的建議,由中国物理学会全国中学生物理竞赛委员会常务委员会根据《全国中学生物理竞赛章程》中关于命题原则的规定,结合我国目前中学生的实际情况,制订了《全国中学生物理竞赛内容提要》,作为今后物理竞赛预赛、复赛和决赛命题的依据.它包括理论基础、实验、其他方面等部分.其中理论基础的绝大部分内容和国家教委制订的《全日制中学物理教学大纲》中的附录,即教育部1983年颁布的《高中物理教学纲要(草案)》的内容相同.主要差别有两点:一是少数地方做了几点增补;二是去掉了教学纲要中的说明部分.此外,在编排的次序上做了一些变动,内容表述上做了一些简化.1991年2月20日经全国中学生物理竞赛委员会常务委员会扩大会议讨论通过并开始试行.1991年9月11日在南宁由全国中学生物理竞赛委员会第十次全体会议正式通过,开始实施.

经2000年,第十九次竞委会原则同意对《全国中学生物理竞赛内容提要》作适当的调整和补充.考虑到适当控制预赛试题难度的精神,提要中新补充的内容将用“※”符号标出,作为复赛题和决赛题增补的内容,预赛试题仍沿用原规定的内容提要,不增加修改补充后的内容.新规定的《全国中学生物理竞赛内容提要》从2002年起实行.

2005年1月,常委会对《全国中学生物理竞赛内容提要》作了少量修改和补充,修改后的《全国中学生物理竞赛内容提要》将从2006年开始实行.

## 一、理论基础

### 力学

#### 1. 运动学

参照系 质点运动的位移和路程、速度、加速度 相对速度  
矢量和标量 矢量的合成和分解 ※矢量的标积和矢积  
匀速及匀变速直线运动及其图像 运动的合成 抛体运动 圆周运动  
刚体的平动和绕定轴的转动

#### 2. 牛顿运动定律 力学中常见的几种力

牛顿第一、二、三运动定律 惯性参照系的概念  
摩擦力  
弹性力 胡克定律  
万有引力定律 均匀球壳对壳内和壳外质点的引力公式(不要求导出) 开普勒定律  
行星和人造卫星运动  
※惯性力的概念

#### 3. 物体的平衡

共点力作用下物体的平衡  
力矩 刚体的平衡条件 重心  
物体平衡的种类

#### 4. 动量

冲量 动量 质点与质点组的动量定理 动量守恒定律 ※质心 ※质心运动定理  
反冲运动及火箭

#### 5. ※角动量

※冲量矩 ※角动量 ※质点和质点组的角动量定理(不引入转动惯量)  
※角动量守恒定律

#### 6. 机械能

功和功率  
动能和动能定理

重力势能 引力势能 质点及均匀球壳壳内和壳外的引力势能公式(不要求导出)  
弹簧的弹性势能  
功能原理 机械能守恒定律  
碰撞 恢复系数

## 7. 流体静力学

静止流体中的压强  
浮力

## 8. 振动

简谐振动 $[x=A\cos(\omega t+\alpha)]$  振幅 频率和周期 相位  
振动的图像  
参考圆 振动的速度  $v=-A\omega\sin(\omega t+\alpha)$   
由动力学方程确定简谐振动的频率 简谐振动的能量  
同方向同频率简谐振动的合成  
阻尼振动 受迫振动和共振(定性了解)

## 9. 波和声

横波和纵波 波长、频率和波速的关系 波的图像  
平面简谐波的表示式  $y=A\cos\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)$   
波的干涉和衍射(定性) ※驻波  
声波 声音的响度、音调和音品 声音的共鸣 乐音和噪声 ※多普勒效应

## 热 学

### 1. 分子动理论

原子和分子的量级  
分子的热运动 布朗运动 温度的微观意义  
分子力  
分子的动能和分子间的势能 物体的内能

### 2. 热力学第一定律

热力学第一定律

### 3. ※热力学第二定律

※热力学第二定律 ※可逆过程与不可逆过程

### 4. 气体的性质

热力学温标

理想气体状态方程 普适气体恒量

理想气体状态方程的微观解释(定性)

理想气体的内能

理想气体的等容、等压、等温和绝热过程(不要求用微积分运算)

### 5. 液体的性质

液体分子运动的特点

表面张力系数

浸润现象和毛细现象(定性)

### 6. 固体的性质

晶体和非晶体 空间点阵

固体分子运动的特点

### 7. 物态变化

熔解和凝固 熔点 熔解热

蒸发和凝结 饱和气压 沸腾和沸点 汽化热 临界温度

固体的升华

空气的湿度和湿度计 露点

### 8. 热传递的方式

传导、对流和辐射

### 9. 热膨胀

热膨胀和膨胀系数

## 电 学

### 1. 静电场

库仑定律 电荷守恒定律



电场强度 电场线 点电荷的场强 场强叠加原理 均匀带电球壳壳内的场强和壳外的场强公式(不要求导出) 匀强电场  
电场中的导体 静电屏蔽  
电势和电势差 等势面 点电荷电场的电势公式(不要求导出) 电势叠加原理  
均匀带电球壳壳内和壳外的电势公式(不要求导出)  
电容 电容器的连接 平行板电容器的电容公式(不要求导出)  
电容器充电后的电能  
电介质的极化 介电常数

## 2. 稳恒电流

欧姆定律 电阻率和温度的关系  
电功和电功率  
电阻的串、并联  
电动势 闭合电路的欧姆定律  
一段含源电路的欧姆定律 ※基尔霍夫定律  
电流表 电压表 欧姆表  
惠斯通电桥 补偿电路

## 3. 物质的导电性

金属中的电流 欧姆定律的微观解释  
液体中的电流 法拉第电解定律  
气体中的电流 被激放电和自激放电(定性)  
真空中的电流 示波器  
半导体的导电特性 P型半导体和N型半导体  
晶体二极管的单向导电性 三极管的放大作用(不要求机理)  
超导现象

## 4. 磁场

电流的磁场 磁感应强度 磁感线 匀强磁场 长直导线中的电流的磁场  
安培力 洛伦兹力 电子荷质比的测定 质谱仪 回旋加速器

## 5. 电磁感应

法拉第电磁感应定律  
楞次定律 ※感应电场(涡旋电场)

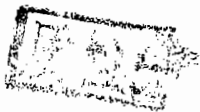
### 三、其他方面

物理竞赛的内容有一部分有较大的开阔性,主要包括以下三方面:

1. 物理知识在各方面的应用,对自然界、生产和日常生活中一些物理现象的解释.
2. 近代物理的一些重大成果和现代的一些重大信息.
3. 一些有重要贡献的物理学家的姓名和他们的主要贡献.

#### 参考资料

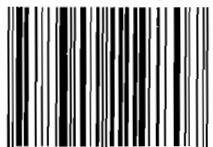
1. 全国中学生物理竞赛委员会办公室主编的历届《全国中学生物理竞赛参考资料》.
2. 《北京市高级中学实验课本 物理》,北京市教育委员会编,主编 沈克琦.





# 全国中学生物理竞赛 1~20届 试题解析

ISBN 978-7-302-11980-7



9 787302 119807 >

定价：22.80元