

PHYSICS

中国科学技术大学 主编
物理辅导班
全怀城等 审校

美国物理
试题与解答

4

原子物理学
核与粒子物理学

中国科学技术大学出版社

内 容 提 要

《美国物理试题与解答》丛书按学科范畴分为七卷。该丛书收集了美国加利福尼亚大学伯克利分校、纽约州立大学布法罗分校、芝加哥大学、哥伦比亚大学、麻省理工学院、普林斯顿大学和威斯康星大学的研究生入学试题，以及丁肇中博士招收的高能实验物理博士研究生试题 2550 道，同时收集了 1980—1985 年中国赴美物理硕士、博士入学资格考试（CUSPEA）物理试题 100 道，并逐一作了解答。这些试题面广义新，思路灵活，所用的数学工具虽不繁难，但却十分注重物理思想和实际应用，其方法和结论往往较为简单和实用。在一定程度上反映了美国物理教学的精华，对我国的物理教学也有借鉴和启迪作用。

本卷收集原子物理学、核与粒子物理学试题 483 道，可供我国大学物理系师生使用，对于准备攻读硕士、博士学位的研究生和留学生，更是一本难得的参考书，对于中学物理教师的进修，也有一定的参考价值。

美国物理试题与解答

第四卷 原子物理学、核与粒子物理学

中国科学技术大学物理辅导班 主编

金怀城 杨保忠 范扬眉 审校

责任编辑：叶云棠 封面设计：何燕明

※

中国科学技术大学出版社出版

（安徽省合肥市金寨路 96 号）

中国科学院开封印刷厂印刷

安徽省新华书店发行

※

开本：787×1092/32 印张：20.5 字数：455 千

1989 年 6 月第 1 版 1989 年 6 月第 1 次印刷

印数：1—5000 册

ISBN 7-312-00031-2/O·4 定价：5.70 元

GF57/10

序

这套习题集，是从美国各大学物理系的教学及考试材料中筛选而来的。编辑它的目的是为了给从事物理教学的老师以及学习物理的学生提供一份较完整的美囯物理习题素材。所谓完整，有两方面的含义：一是包含基础物理的各门课程的习题；一是较全面地整理了美国物理教学的用题。因此，这套集子可以直接用于教学，也可以用来研究美国的物理教学内容更新的趋势。无疑，这两种功效，都有助于我们的物理教学跟上物理前沿的发展。

在各种科学著作中，习题集的地位可能是“最低”的了。因为，它不是教科书，不是论文集，更不是专著。几乎没有因编习题集而出名的作者。这本习题集的原始材料尽管来自美国，但编辑、整理、作解答等工作仍是十分繁重的。中国科学技术大学许多物理教师为此付出了大量的劳动。这些劳动苦而无“名”，但却是很有价值的。

作习题是学习过程中的一环，对于学习数学、物理来说，更是必不可少的一环。许多科学大师都曾津津乐道于他们早年在习题中的受益。虽然作习题本身不是科学研究，但它对研究能力的养成，却有重要作用。索末菲曾写信给他的学生海森堡，告诫他：

要勤奋地去做练习，只有这样，你才会发现，

哪些你理解了，哪些你还没有理解。

杨振宁也曾如下回忆他的大学学习：

西南联大教学风气是非常认真的，我们那时所念的课，一般老师准备得很好，学生习题做得很多。的确，“勤奋地去做练习”、“习题做得很多”，往往是达到成功的一个阶梯。正是由于这一点，许多教师愿意将自己的精力和心血用在这似乎是“最低”的工作上。

第一个教师节刚刚过去。我想，对于一题一题地编辑和整理的教师来说，他们所在意的不是目前的“最低”或“最高”，只要用过这本习题集的学生，以后也有类似于上述那样的回忆，那么，编辑习题的劳动，就算有了最大的慰藉。

方励之

1985年9月18日

前 言

习题是锻炼思维的体操,而试题又往往是习题中的精粹。解答物理题是物理课程学习中必要而又重要的环节。

这套“美国物理试题与解答”是一部丛书,分七卷。各卷名称及审校人如下:第一卷,力学(强元荣、顾恩普、程稼夫、李泽华、杨德田);第二卷,电磁学(赵叔平、尤峻汉、朱俊杰);第三卷,光学(白贵儒、郭光灿);第四卷,原子物理学、核与粒子物理学(金怀城、杨保忠、范扬眉);第五卷,热力学与统计物理学(郑久仁);第六卷,量子力学(张永德、朱棟培、范洪义);第七卷,相对论、固体物理及其它(张家铝、周又元、章世玲)。它们大致包括了大学物理课程的全部内容。

丛书从美国七所大学近十年来研究生入学试题以及各类试题共 3100 道中,筛选了 2550 道,除个别题外均给予了解答。试题来源及其代号是:哥伦比亚大学(Col);加利福尼亚大学伯克利分校(Ber);麻省理工学院(MIT);威斯康星大学(Wis);芝加哥大学(Chi);普林斯顿大学(Pri);纽约州立大学布法罗分校(Buf);中美联合招收赴美攻读物理博士生考试试题(CUSPEA);丁肇中招收实验高能物理博士生试题(CCT)。

一般地说,美国的物理试题,涉及的数学并不繁难,但却或多或少具有以下三方面的特色:内容新颖,富于“当代感”;思路灵活,涉及面宽阔;方法和结论往往简单而实用。一些题分别涉及了不少新兴课题和边沿交叉区域;也有不少

题是拟题者直接从科研工作中摘取的；再有不少题本身似乎显得粗糙，但却抓住了物理本质，显得“物理味”很足。纵观这些，我们深切地感到，这些题目的集合在一定程度上体现了美国科学文化的个性及其思维方式上的特色。

惟其如此，我们认为，不惮繁重，集近百人的努力，将它们收集后一一解答是值得的。它们也许会对我国大学和研究生物理学科的教学和赴美考试起到一定的参考作用，对推动我国大学物理教学更新起到一点促进作用。

参加这套丛书解题的确切人数难以统计，其中主要的共70余人，参加各卷审校的共20名。为向读者负责，每道题后均注明了解题人的姓名。

编审中，我们仅仅删去了部份很常见、很平淡的题以及一些没有什么意义的题（后者比如，纽约年平均气温是多少等等）。同时，为了节省篇幅，不得不放弃了英文原题。

由于丛书篇幅大、涉及面广、参加解答和审校的人多、工作时间短，加之我们水平有限，因此，错误或不当之外在所难免，请读者批评指正。

本卷收集试题483道。分为原子物理学(第一篇)和亚原子物理学(第二篇—第四篇)两大部分，各篇名称见目录。第一篇试题142道，第二篇试题120道，第三篇试题90道，第四篇试题131道。

本卷大部分内容与我国理科大学的原子物理学、原子核物理、粒子物理教材相一致，但也有一部分试题相当深难，在深度和广度上大大超出常用的习题内容，尤其是试题引用了这一物理学领域中的科研内容，因而本卷试题不仅有利加深掌握原子和亚原子物理中基本概念，提高读者分析问题能力和熟练解题技巧，而且能开阔思路，活跃学术气氛，有利

于促进教学和科研相结合。

由于亚原子物理学的特殊性，本卷部分试题使用了自然单位制。

承担本卷解题的有任勇，何小东，黄晓舟，钱剑明，林辰，王力军，杨永安，吴为民，管怀群，周平，马骥，唐子渊，胡平，叶坚，章俭等十几位同学。原子物理部分的审校由金怀诚负责，亚原子物理部分的审校由杨保忠、王韶舜、范扬眉负责。

编审者谨识

1987年11月

目 录

序	方励之	(i)
前言		(iii)
第一篇 原子、分子物理		(1)
§ 1 原子物理 (1001—1122)		(1)
§ 2 分子物理 (1123—1142)		(155)
第二篇 原子核物理		(182)
§ 1 原子核的基本性质 (2001—2023)		(182)
§ 2 原子核结合能、裂变和聚变 (2024—2047)		(216)
§ 3 氘核 (2048—2058)		(243)
§ 4 核模型 (2059—2075)		(261)
§ 5 原子核的衰变 (2076—2107)		(295)
§ 6 核反应 (2108—2120)		(358)
第三编 粒子物理		(373)
§ 1 相互作用和对称性 (3001—3037)		(373)
§ 2 弱作用、弱电统一和大统一理论 (3038— 3071)		(427)
§ 3 强子结构和夸克模型 (3072—3090)		(490)
第四篇 工具、实验方法及其它		(529)
§ 1 高速粒子运动学 (4001—4061)		(529)
§ 2 射线与物质相互作用 (4062—4085)		(597)
§ 3 探测技术和实验方法 (4086—4105)		(612)
§ 4 误差和统计 (4106—4118)		(624)
§ 5 粒子束和加速器 (4119—4131)		(634)

第一篇 原子、分子物理

§ 1 原子物理(1001—1122)

1001 (Col, 1982)

假如有人宣布利用一种奇妙的方法能把一个物理图书馆的内容“存贮”到一张非常平滑的明信片上，那么利用电子显微镜可以阅读吗？为什么？

解：作为估计，假设这个图书馆有 10^6 册书，每本书有 500 页，一页书约有两张明信片大小，故需要有 $2 \times 500 \times 10^6 \sim 10^9$ 平面放大倍数，相当于线放大倍数约 $10^{4.5}$ 。若电子显微镜的放大倍数为 80 万倍，其面放大倍数高达近 10^{11} 。

(王力军)

1002 (Col, 1975)

在 10^{10} K，黑体辐射每立方厘米重：1 吨，1 克， 10^{-1} 克， 10^{-16} 克。

解：答案为 1 吨/厘米³。辐射能量密度 $u = 4\sigma T^4/c$ ，其中 $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ 为 Stefan-Boltzmann 常数。根据爱因斯坦质能公式不难得到单位体积黑体辐射量为

$$\begin{aligned} 4\sigma T^4/c^3 &= 4 \times 5.67 \times 10^{-8} \times 10^{40} / (3 \times 10^8)^3 \\ &\approx 10^8 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}. \end{aligned}$$

(王力军)

1003 (CCT, 1983)

与电子的康普顿波长比较, 氢原子的玻尔半径大约是它的: (a)100 倍, (b)1000倍, (c)大约相等.

解: 氢原子的玻尔半径为 $5.3 \times 10^{-11} \text{ m}$. 康普顿波长 $\lambda_c = 2.4 \times 10^{-12} \text{ m}$, 约化康普顿波长 $\lambda_c = \frac{\lambda_c}{2\pi} = 3.86 \times 10^{-13} \text{ m}$.

因此, 答案应选(a). (唐子洲)

1004 (Col, 1982)

试估计大约在电子绕原子核运动一周的时间内将电子拉离原子所需的电场.

解: 电子的束缚能近似为 $Z^2 \times 13.6 \text{ eV}$ (类氢原子), 其中 Z 为核电荷数. 电子在一周内所走过的路程约 $\frac{1}{Z} \text{ \AA}$, 因此将电子拉离原子所需的电场

$$E \approx \frac{Z^2 \times 13.6 \text{ eV}}{1/Z \text{ \AA}} \approx 1.4 \times 10^8 Z^3 (\text{V/cm}).$$

(马 骥)

1005 (CCT, 1983)

当你从原子中心向外看时, 电子云密度: (a) 像高斯分布一样减弱, (b) 按指数分布减弱, (c) 振荡并逐步减弱.

解: 答案为(c). (马 骥)

1006 (Wis, 1980)

^{12}C 离子的一个电子跃迁导致 $\lambda = 500 \text{ nm}$ ($h\nu = 2.5 \text{ eV}$) 左右的光子发射. 离子处于热平衡, 温度 $kT = 20 \text{ eV}$, 密度

$n = 10^{24}/\text{m}^3$, 并处于一个非均匀磁场中, 场强变化可达 $B = 1\text{T}$. 简要讨论展宽机制. 这些机制使观测到的跃迁宽度 $\Delta\lambda$ 大于 T, n 和 B 很小时获得的结果.

解: (a) 热运动的多普勒展宽. 半宽公式:

$$\Gamma = (2kT \ln 2 / Mc^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\omega_0}{c}$$

$$= 3.58 \times 10^{-7} \omega_0 \left(\frac{T}{A} \right)^{\frac{1}{2}},$$

式中: ω_0 为谱线中心圆频率, A 为原子量, M 为原子质量, c 为光速. 线宽 $\Delta\omega = 2\Gamma = 7.16 \times 10^{-7} \omega_0 \left(\frac{T}{A} \right)^{\frac{1}{2}}$.

根据题设: $A = 12, T = \frac{20}{8.6 \times 10^{-5}} = 2.31 \times 10^5 \text{K}$,

$$\text{所以 } \Delta\omega = 7.16 \times 10^{-7} \times 2\pi \times 6 \times 10^{14} \times \left(\frac{2.31 \times 10^5}{12} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 3.76 \times 10^{11} \text{s}^{-1} \approx 2 \text{cm}^{-1}.$$

(b) 磁场引起的加宽. 因磁场的非均匀, 引起谱线弥散, 其量级估算如下:

$$\Delta\omega \approx \frac{\mu_B B}{\hbar} = \frac{9.3 \times 10^{-24}}{1.05 \times 10^{-34}} \approx 9 \times 10^{10} \text{s}^{-1} \approx 0.48 \text{cm}^{-1}.$$

(c) 若考虑共振偶极作用, 则有

$$\Delta\omega = 4\pi n \left(\frac{2e^2 f_{ik}}{4\pi\epsilon_0 M\omega_0} \right),$$

式中: n 为离子数密度, ϵ_0 为真空介电常数, f_{ik} 为 $i \rightarrow k$ 能级跃迁 f 值. 取 $f_{ik} \approx 10^{-1}$, 则

$$\Delta\omega = 10^{24} \times \left(\frac{2 \times 1.6^2 \times 10^{-38} \times 10^{-1}}{8.85 \times 10^{-12} \times 1.36 \times 10^{-28} \times 12 \times 3.8 \times 10^{14}} \right)$$

$$\approx 10^8 \text{ s}^{-1} \approx 10^{-2} \text{ cm}^{-1}.$$

其中, f_{ij} 是振子强度, 表征由 i 态至 k 态的跃迁几率。

(钱剑明)

1007 (Buf, 1980)

元素周期表中前三个元素的电离能 E_i 如下:

原子序数 Z	元素	电离能 E_i
1	H	13.6 eV
2	He	24.6 eV
3	Li	5.4 eV

(a) 定性解释从 H, He 到 Li 电离能 E_i 的变化。

(b) 试求 He 原子的第二电离能, 即在一个电子被移走之后, 余下的一个电子的电离能。

(c) 忽略自旋, 钠的价电子中 $n=3$ 的态的能级如图1.1.

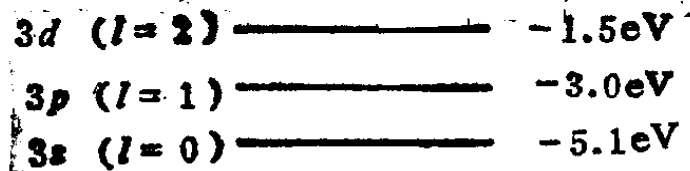


图 1.1

为什么能级与量子数 l 有关?

解: (a) 从表中可以看出 He 的电离能比 H 原子大得多, 这主要是核电荷增大的结果, 电子的势能更低了. 而 Li 的电离能小的原因在于内壳层电子对核的屏蔽效应, 对最外层电子而言, 有效核电荷减小, 势能增大, 所以电离能减小。

(b) 根据类氢原子能级公式:

$$E_n = -\frac{Z^2}{n^2} \times 13.6 \text{ eV}$$

得到 $E_l = 4 \times 13.6 = 54.4 \text{ eV}$ 。

(c) 价电子的 l 越小, 说明其运动轨道偏心率越大, 而使内部的原子实极化, 轨道贯穿效应也增大, 从而使电子的势能降低。因此 l 不同的态, 能量也不同。 (马 骥)

1008 (Wis, 1972)

简要描述下列效应, 如果是某一定则, 则叙述该定则:
(a) 俄歇效应; (b) 反常塞曼效应; (c) 拉姆移动; (d) 朗德间隔定则; (e) 原子能级的洪德法则。

解: (a) 当原子的内壳层(例如 K 壳层)上的一个电子被电离后, 能量较高壳层(例如 L 壳层)上的电子向电离电子留下的空位跃迁, 与此同时并不发射 X 射线, 而是引起能量较高壳层上的电子(例如 L 电子)的电离, 这就是俄歇效应。由俄歇效应产生的电子称为俄歇电子, 俄歇电子的能量仅仅与原子有关(忽略化学位移)。

(b) 反常塞曼效应是指原子在弱磁场中多重态之间跃迁光谱线的分裂, 分裂数一般大于正常塞曼效应中的分裂数 3。

(c) 在考虑精细结构后, 氢原子的能级对轨道角动量量子数 l 是简并的, 而仅仅取决于总角动量量子数 j 。但拉姆在实验中证明氢的 $2^2 S_{1/2}$ 比 $2^2 P_{1/2}$ 高出 0.033 cm^{-1} , 这就是所谓的拉姆移动, 它是由电子与辐射场之间的相互作用引起的。

(d) 朗德间隔定则是指多重态一对相邻能级间的能量间隔正比于表征这对能级的总角动量量子数中较大的一个(仅适用于 LS 耦合)。

(e) 洪德定则：(1) 一个电子组态有不只一个光谱项时，以总自旋角动量 S 最大的谱项能量最低；(2) 若相应于最大 S 的谱项不止一个，则以其中 L 最大的谱项能量最低；(3) 当壳层不足半满时，上述最低能量谱项中以总角动量 J 最小的能量最低，超过半满时，以 J 最大者能量最低。该定则仅适用于 LS 耦合。 (杨永安)

1009 (Col, 1977)

以 e, \hbar, c, k, m_e 和 m_p 表述下列各量：(a) 氢原子的电离能；(b) 氢原子和氘原子赖曼系的 α 线频率之差；(c) 电子的磁矩；(d) π^0 质量测量的分散性，已知 π^0 的寿命为 τ ；(e) 温度为 T 时，自由质子在某一自旋方向形成 10^{-4} 额外数目的取向所需要的磁场强度 B ；(f) 氢原子 $n=2$ 态的结构分裂。

解：(a) $E_I = \frac{m_e e^4}{2\hbar^2}$

(b) 此频率之差由里德堡常数随原子核质量变化引起。氢原子 α 线的波数为

$$\nu_H = R_H \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} R_H.$$

氘原子 α 线波数为

$$\nu_{2H} = \frac{3}{4} R_{2H}.$$

故 $\Delta\nu = c\Delta\nu = \frac{3}{4} c(R_{2H} - R_H)$

$$= \frac{3}{4} cR_\infty \left(\frac{1}{1 + \frac{m_e}{2m_p}} - \frac{1}{1 + \frac{m_e}{m_p}} \right)$$

$$\approx \frac{3}{4} cR_{\infty} \frac{m_e}{2m_p} = \frac{3}{4} \frac{m_e^2 e^4 \pi^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^3 m_p}$$

(c) 电子的自旋磁矩为

$$\mu_s = \sqrt{3} \frac{\hbar e}{4\pi m_e} = \sqrt{3} \mu_B.$$

(d) 能量宽度即质量峰宽为 \hbar/τ .

$$(e) \frac{\exp\left(-\frac{\mu_p B}{kT}\right)}{\exp\left(\frac{\mu_p B}{kT}\right) + \exp\left(-\frac{\mu_p B}{kT}\right)} = 10^{-4},$$

所以 $\exp\left(-\frac{2\mu_p B}{kT}\right) = 10^{-4},$

即 $B = \frac{4kT \ln 10}{2\mu_p} = 4.6 kT / \mu_p.$

其中: $\mu_p = \hbar e / 2m_p.$

(f) $n=2$ 态的量子数为: $n=2, l=1, j_1 = \frac{3}{2}, j_2 = \frac{1}{2}.$

($l=0$ 态无结构分裂, 故不予考虑.) 由氢原子的精细结构能级公式得到 $n=2$ 态的能级分裂为

$$\begin{aligned} \Delta E &= -\frac{Rhc\alpha^2}{n^3} \left(\frac{1}{j_1 + \frac{1}{2}} - \frac{1}{j_2 + \frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{Rhc\alpha^2}{16}, \end{aligned}$$

其中: $\alpha = e^2/\hbar c, R = m_e e^4 / 2\hbar^3 c.$

(叶 坚)

如图1-2.光照在钠原子上,估计原子从基态激发到第一激发态(对应于熟知的黄线)的共振截面,同时估计共振的宽度.若记得适当的启发性的证据的话,可不必从基本原理推起.

解:截面的定义: $\sigma_A = P_\omega / I_\omega$, 其中 $P_\omega d\omega$ 是原子在单位时间内由频率间隔 $d\omega$ 吸收的能量, $I_\omega d\omega$ 是单位时间内由频率间隔 $d\omega$ 射入单位面积的能量.总的能量吸收为

$$P = \int P_\omega d\omega = \hbar\omega B_{12} N_\omega,$$

其中 B_{12} 为爱因斯坦系数, $N_\omega d\omega$ 代表单位体积内处于频率间隔 $d\omega$ 中的能量. N_ω 和 I_ω 之间有如下关系:

$$I_\omega = cN_\omega (c: \text{光速}).$$

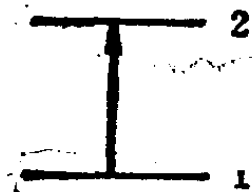


图1.2

根据爱因斯坦关系可得:

$$\begin{aligned} B_{12} &= \frac{\pi^2 c^3}{\hbar\omega^3} \cdot \frac{g_1}{g_2} A_{21} \quad (g_1, g_2: \text{状态 } 1, 2 \text{ 的简并度}) \\ &= \frac{\pi^2 c^3}{\hbar\omega^3} \cdot \frac{g_1}{g_2} \cdot \frac{1}{\tau} = \frac{\pi^2 c^3}{\hbar^2 \omega^3} \cdot \frac{g_1}{g_2} \Gamma. \end{aligned}$$

其中: τ 为激发态 2 的寿命, Γ 为该能级的自然展宽, 上面已利用了 $A_{12} = 1/\tau$ 和测不准关系 $\Gamma \cdot \tau = \hbar$. 最后得到

$$P = \frac{\pi^2 c^2}{\hbar\omega^2} \cdot \frac{g_1}{g_2} \Gamma I_\omega.$$

若引入线型函数 $g(\omega)$, 则有

$$P_\omega = \frac{\pi^2 c^2}{\hbar\omega^2} \cdot \frac{g_1}{g_2} \Gamma I_\omega g(\omega).$$

这里把 ω 和 I_ω 理解为在 $g(\omega)$ 的带宽内的平均值. 我们取 Lorentz 线型:

$$g(\omega) = \frac{\hbar}{2\pi} \frac{\Gamma}{(E_2 - E_1 - \hbar\omega)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$$

共振时 $E_2 - E_1 = \hbar\omega$, 所以 $g\left(\omega = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}\right) = \frac{2\hbar}{\pi\Gamma}$, 于是:

$$\sigma_A = \frac{\pi^2 c^2}{\hbar\omega^2} \cdot \frac{g_1}{g_2} \cdot \frac{2\hbar}{\pi} = \frac{2\pi c^2}{\omega^2} \cdot \frac{g_1}{g_2}$$

对于钠黄线(D线), 得:

$$\begin{aligned} \sigma_A(D) &= \frac{2}{6} \cdot \frac{2\pi c^2}{\omega^2} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{1}{(2\pi)^2 \nu^2} \\ &= \frac{1}{6\pi \cdot (1.7 \times 10^4)^2} = 1.8 \times 10^{-10} \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

半宽高度可利用线型函数求得: $\Delta\omega_{1/2} = \Gamma$. 对于D线, $\tau \approx 10^{-8} \text{ s}$, $\Gamma \approx \hbar/\tau \approx 5.5 \times 10^{-8} \text{ cm}^{-1}$, 故 $\Delta\omega_{1/2} \approx 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$.

(叶 坚)

1011 (Wis, 1974)

某原子A能级电子的碰撞激发截面 $\sigma_A = 1.4 \times 10^{-20} \text{ cm}^2$, 如图1.3能级的寿命 $\tau = 2 \times 10^{-8} \text{ s}$, 其中10%的时间是 $A \rightarrow B$, 90%的时间是 $A \rightarrow C$.

(a) 计算 5 mA/cm^2 的电子束通过压强为 0.05 Torr 的这种原子气体时, 每 cm^3 中原子处于能级A的平衡布居数.

(b) 计算每 cm^3 气体在 $A \rightarrow B$ 跃迁中发出的光强度, 以 W/sr 为单位表示.

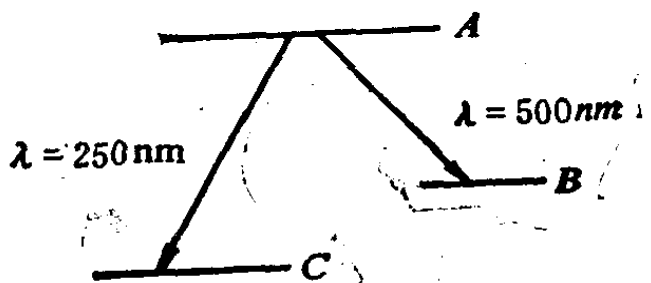


图1.3

解: (a) 仿照爱因斯坦关系, 可知单位时间内 $B, C \rightarrow A$ 的原子数(产生率)为

$$\frac{dN_{BC \rightarrow A}}{dt} = n_0 \sigma_A N_{BC}, \quad (1)$$

单位时间内 $A \rightarrow B, C$ 的原子数(衰变率)为

$$\frac{dN_{A \rightarrow BC}}{dt} = \left(\frac{1}{\tau} + n_0 \sigma_A \right) N_A, \quad (2)$$

以上两式中 N_{BC} 和 N_A 分别表示占据 B, C 和 A 能级的原子数, n_0 是单位时间内通过单位面积的电子数. 达到平衡时,

$$\frac{dN_{BC \rightarrow A}}{dt} = \frac{dN_{A \rightarrow BC}}{dt}, \text{ 于是}$$

$$N_A = \frac{n_0 \sigma_A N}{\frac{1}{\tau} + 2n_0 \sigma_A} \approx n_0 \sigma_A N \tau, \quad (N = N_A + N_{BC}),$$

故单位体积中处于能级 A 的原子数为

$$\begin{aligned} n &= N_A/V = \tau n_0 \sigma_A N/V = \tau n_0 \sigma_A p/kT \\ &= 2 \times 10^{-8} \times \frac{5 \times 10^{-8}}{1.6 \times 10^{-19}} \times 1.4 \times 10^{-20} \\ &\quad \times \frac{0.05 \times 1.333 \times 10^4}{1.38 \times 10^{-16} \times 300} \\ &= 1.4 \times 10^5 \text{ cm}^{-3}. \end{aligned}$$

其中 T 已取室温 300K.

(b) 原子 $A \rightarrow B$ 的衰变率为

$$\lambda_1 = \frac{1}{10\tau}.$$

于是

$$4\pi I = \frac{nhc}{10\tau\lambda_B},$$

其中 I 为所求的光强度, λ_B 为 $A \rightarrow B$ 的跃迁辐射波长, 已知 $\lambda_B = 500 \text{ nm}$, 故

$$I = \frac{nhc}{40\pi r \lambda_B} = \frac{1.4 \times 10^5 \times 6.63 \times 10^{-27} \times 3 \times 10^{10}}{40 \times 3.14 \times 2 \times 10^{-8} \times 500 \times 10^{-7}}$$

$$= 0.22 \text{ erg}/(\text{s} \cdot \text{sr}) = 2.2 \times 10^{-8} \text{ W}/\text{sr}. \quad (\text{叶 坚})$$

1012 (Pri, 1979)

在分子或晶体中的原子受到周围电场的作用, 这电场对原子基态性质有显著的影响. 一个有趣的例子是铁原子中角动量的猝灭现象, 此铁原子在人体血红蛋白的血红素球中. 但铁和血红蛋白太复杂了, 不妨考虑这样一个原子, 它带有一个在中心原子势场中运动的价电子, 位于 $l=1$ 轨道. 忽略自旋, 问电子受到原子周围外力作用时发生什么变化. 外势为

$$V_{\text{pert}} = Ax^2 + By^2 - (A+B)z^2$$

(原子核在坐标原点).

(a) $l=1$ 分裂为三个能级, 你可以证明 (像我们所提示的那样), 每一能级有一波函数:

$$\Psi = (\alpha x + \beta y + \gamma z)f(r),$$

其中: $f(r)$ 是通常的有心函数, 每一能级有自己的一组需要决定的常数 (α, β, γ) . 简略画出能级图, 根据参数 A, B 标出相对变化 ΔE (即计算这三个能级的变化直到一共同因子为止).

(b) 更有趣的是, 对每个能级计算角动量 z 分量 L_z 的期待值.

解: (a) 将外势 V 改写为

$$V = \frac{1}{2}(A+B)r^2 - \frac{3}{2}(A+B)z^2 + \frac{1}{2}(A-B)(x^2 - y^2),$$

无外势扰动时, $l=1$ 态是三度简并的, 其波函数分别为

$$\Psi_{210} = \left(\frac{1}{32\pi Q^3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{r}{a} \cos\theta \cdot \exp\left(-\frac{r}{2a}\right),$$

$$\Psi_{21\pm 1} = \mp \left(\frac{1}{64\pi Q^3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{r}{a} \sin\theta \cdot \exp\left(-\frac{r}{2a}\right) \exp(\pm i\varphi),$$

受外势 V 作用后, 设波函数变为

$$\Psi = a_1 \Psi_{211} + a_2 \Psi_{21-1} + a_3 \Psi_{210},$$

这样可以得到:

$$\begin{pmatrix} C + A' - E & B' & 0 \\ B' & C + A' - E & 0 \\ 0 & 0 & C + 3A' - E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\text{其中: } C = \langle \Psi_{211} | \frac{1}{2} (A + B) r^2 | \Psi_{211} \rangle$$

$$= \langle \Psi_{21-1} | \frac{1}{2} (A + B) r^2 | \Psi_{21-1} \rangle$$

$$= \langle \Psi_{210} | \frac{1}{2} (A + B) r^2 | \Psi_{210} \rangle$$

$$= \langle \Psi_{210} | \frac{1}{2} (A + B) r^2 | \Psi_{210} \rangle$$

$$= 15a^2(A + B),$$

$$A' = - \langle \Psi_{211} | \frac{3}{2} (A + B) z^2 | \Psi_{211} \rangle$$

$$= - \langle \Psi_{21-1} | \frac{3}{2} (A + B) z^2 | \Psi_{21-1} \rangle$$

$$= - \frac{1}{3} \langle \Psi_{210} | \frac{3}{2} (A + B) z^2 | \Psi_{210} \rangle$$

$$= -9a^2(A + B),$$

$$B' = \langle \Psi_{211} | \frac{1}{2} (A - B) (x^2 - y^2) | \Psi_{21-1} \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle \Psi_{21-1} | -\frac{1}{2}(A-B)(x^2 - y^2) | \Psi_{211} \rangle \\
&= -\frac{3}{2}a^2(A-B).
\end{aligned}$$

由系数行列式等于零，得到能量修正值：

$$E = C + 3A', \quad C + A' \pm B'.$$

对 $E = C + 3A'$ ，得波函数：

$$\begin{aligned}
\Psi_1 = \Psi_{210} &= \left(\frac{1}{32\pi a^3} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{r}{a} \cos\theta \exp\left(-\frac{r}{2a}\right) \\
&= f(r)z. \quad (\text{对应于 } \alpha = \beta = 0, \gamma = 1)
\end{aligned}$$

式中：
$$f(r) = \left(\frac{1}{32\pi a^3} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{r}{2a}\right).$$

对 $E = C + A' + B'$ ，有：

$$\begin{aligned}
\Psi_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{211} + \Psi_{21-1}) \\
&= -i \left(\frac{1}{32\pi a^3} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{r}{a} \sin\theta \sin\varphi \exp\left(-\frac{r}{2a}\right) \\
&= -if(r)y. \quad (\alpha = \gamma = 0, \beta = -i)
\end{aligned}$$

对 $E = C + A' - B'$ ，有：

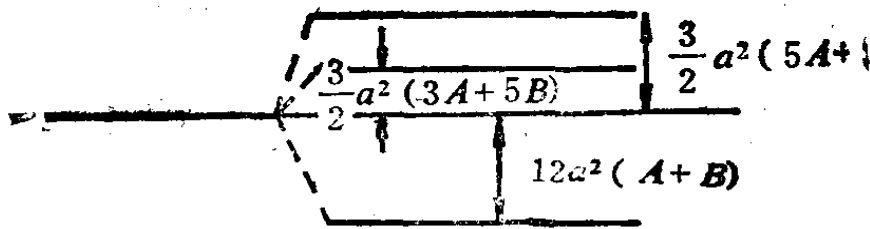
$$\begin{aligned}
\Psi_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{211} - \Psi_{21-1}) \\
&= -f(r)x. \quad (\alpha = -1, \beta = \gamma = 0)
\end{aligned}$$

根据以上计算结果，可得到外势 V 作用下的能级如图 1.4 所示。

(b) 由上面得到的波函数 Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 不难知道：

$$\langle \Psi_1 | l_z | \Psi_1 \rangle = \langle \Psi_2 | l_z | \Psi_2 \rangle = \langle \Psi_3 | l_z | \Psi_3 \rangle = 0,$$

即对三个能级，角动量 z 分量的期待值为零。 (幸 俭)



无微扰, 有外势 V

图1.4

1013 (Pri, 1977)

利用托马斯-费米近似可描述原子内的电荷分布密度 $\rho(x)$. 单电子可看成在由 $\rho(x)$ 和核电荷 Ze 共同产生的电势场中运动. 试由下列步骤导出静电势.

(a) 设电子在费米球面上总能量为零, 求出静电势 Φ 和费米动量 p_f 之间的关系.

(b) 利用(a)的结果导出 $\rho(x)$ 和 $\Phi(x)$ 之间的代数关系.

(c) 将(b)中结果代入泊松方程, 求出 Φ 满足的非线性偏微分方程.

解: (a) 我们讨论的是束缚电子, 因此电子能量 $E = \frac{p^2}{2m}$

$-e\Phi(x)$ 必小于在费米面上的能量, 于是有:

$$\frac{p_{\max}^2}{2m} - e\Phi(x) = 0, \quad (\text{其中 } p_{\max} = p_f)$$

故 $p_f^2 = 2me\Phi(x)$, p_f 为费米动量.

$$(b) \rho(x) = \frac{e p_f^3}{3\pi^2 \hbar^3} \quad (\text{根据自由电子论})$$

$$= \frac{e}{3\pi^2\hbar^3} [2me\Phi(\mathbf{x})]^{3/2}.$$

(c) 泊松方程为

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi\rho(\mathbf{x})$$

于是得到:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi(\mathbf{x}) = \frac{4e}{3\pi\hbar^3} [2me\Phi(\mathbf{x})]^{3/2}.$$

若 Φ 是球对称的, 则方程可写为

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r\Phi(r)) = \frac{4e}{3\pi\hbar^3} [2me\Phi(r)]^{3/2}. \quad (\text{戴铁生})$$

1014 (Buf, 1981)

在一个比较粗糙的图象中, 金属被看作是自由电子束缚在一个深度为 V_0 的势阱中的系统(图1.5)。由于热激发, 具有足够大能量的电子将逃出势阱, 计算并讨论从金属上发射的电流密度。

解: 动量空间体元 $dp_x dp_y dp_z$ 中的状态数为

$$dN = \frac{2}{h^3} dp_x dp_y dp_z, \quad \text{简并度}$$

为 $\exp\left(-\frac{\varepsilon - \mu}{kT}\right)$, 其中 ε 为电子能量, μ 为费米能. 显而易见,

只有那些满足条件 $p_x > (2mV_0)^{1/2}$ 的电子才可以逃逸 (取 z 方向垂直金属表面向外). 对于上述动量空间体元中的电子, 在 dt 时间内离开金属的数目为

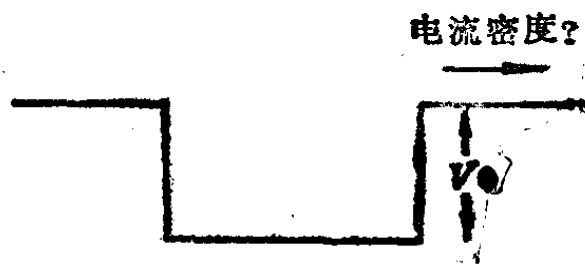


图1.5

$$dN' = A v_z dt \frac{2}{h^3} dp_x dp_y dp_z \exp\left(-\frac{\varepsilon - \mu}{kT}\right),$$

式中： v_z 代表电子速度的 z 方向分量，满足条件 $mv_z > (2mV_0)^{\frac{1}{2}}$ ， A 为金属表面面积。于是单位时间从单位金属表面上发射的电子数为

$$\begin{aligned} R &= \int_{p_z = (2mV_0)^{\frac{1}{2}}}^{+\infty} \int_{p_y = -\infty}^{+\infty} \int_{p_x = -\infty}^{+\infty} \frac{2v_z}{h^3} \exp\left(-\frac{\varepsilon - \mu}{kT}\right) dp_x dp_y dp_z \\ &= \frac{2}{mh^3} \exp\left(\frac{\mu}{kT}\right) \int_{(2mV_0)^{\frac{1}{2}}}^{+\infty} p_z \exp\left(-\frac{p_z^2}{2mkT}\right) dp_z \\ &\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{p_y^2}{2mkT}\right) dp_y \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{p_x^2}{2mkT}\right) dp_x \\ &= \frac{4\pi mk^2 T^2}{h^3} \exp\left(\frac{\mu - V_0}{kT}\right). \end{aligned}$$

因此，由热电子发射引起的电流密度为

$$J = -eR = -\frac{4\pi me k^2 T^2}{h^3} \exp\left(\frac{\mu - V_0}{kT}\right).$$

这就是著名的理查逊公式。

(马 晓)

1015 (Col, 1979)

一窄束自旋为 $\frac{1}{2}$ ，磁矩为 μ 的中性粒子沿 x 方向通过斯

忒恩-盖拉赫装置，结果该中性粒子束按粒子的 μ_x 不同而分裂。斯忒恩-盖拉赫装置主要由一个产生非均匀磁场 $B_z(x)$ 的磁铁构成。磁场作用于粒子磁矩的力引起正比于 $\mu_x B_z$ 的位移。

(a) 就下列情形描述劈裂的图形：

(i) 沿 $+z$ 方向极化的粒子束；(ii) 沿 $+x$ 方向极化的粒

子束;(iii) 沿 $+y$ 方向极化的粒子束;(iv) 未极化的粒子束.

(b) 对于那些区别不开的情形, 如何进一步利用斯忒恩-盖拉赫装置和某种可能的附加仪器进行实验, 从而把它们区分开?

解: (a) (i) 沿 $+z$ 方向极化的粒子束不产生分裂, 但有一定程度的偏转.

(ii) 沿 $+x$ 方向极化的粒子束分裂为两束, 分别偏向 $+z$ 和 $-z$ 方向.

(iii) 同(ii).

(iv) 未极化的粒子束通过磁场后, 也分裂为两束, 分别偏向 $+z$ 和 $-z$ 方向.

(b) 上述(ii), (iii), (iv)中的粒子束尚无法区分, 按以下步骤可进一步区分这三种情况:

(1) 将斯忒恩-盖拉赫装置中的磁场转到 y 方向, 此时情形(iii)的粒子将不产生分裂, 不过仍有一定的偏转. (ii), (iv)的粒子束仍分裂为两束.

(2) 在原装置前加一反射镜, 相应改变源与斯忒恩-盖拉赫装置间的相对位置 (如图 1.6), 则情形(ii)的粒子束通过磁场后不产生分裂 (但有一定

偏转), 而情形(iv)的粒子束仍然分裂为两束. (管怀群)

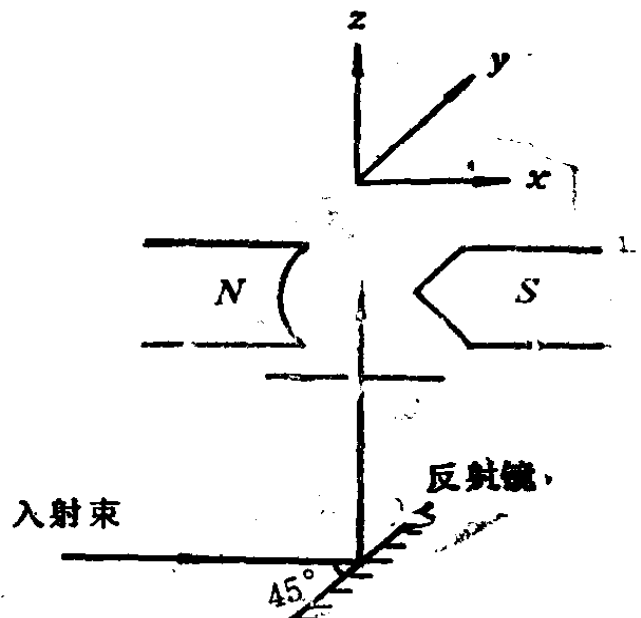


图 1.6

1016 (MIT, 1981)

两个氢原子之间的相互作用力程近似为 4 \AA ，对于处在热平衡的气体，从数值上估计在何温度以下，原子-原子散射基本上是 s 波。

解：散射基本上是 s 波的条件为 $ka \leq 1$ ，其中 a 为氢原子间相互作用力程， k 代表原子的德布罗意波数。

$$k = \frac{p}{\hbar} = \frac{\sqrt{2mE_k}}{\hbar} = \sqrt{2m \cdot \frac{3}{2} k_B T} / \hbar$$

$$= \sqrt{3mk_B T} / \hbar.$$

其中： p 为原子动量， E_k 为动能， k_B 为玻尔兹曼常数， m 为氢原子质量 (\approx 质子质量 $1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$)。由

$$\sqrt{3mk_B T} \cdot \frac{a}{\hbar} \leq 1,$$

得 $T \leq \hbar^2 / 3mk_B a^2$

$$= \frac{(1.06 \times 10^{-34})^2}{3 \times 1.67 \times 10^{-27} \times 1.38 \times 10^{-23} \times (4 \times 10^{-10})^2}$$

$$\approx 1 \text{ (K)}. \quad (\text{任 勇})$$

1017 (Ber, 1977)

(a) 如果你记得，请写下以 cm^2/sr 为单位的卢瑟福散射的微分散射截面公式。如果记不得，请写出最好的猜测，确定对 Z 的依赖关系及对能量、角动量的依赖关系，并要有合理的量纲。利用你给出的表达式，不论是准确的还是最好的估计，计算下面 (b) ~ (e) 中的问题。

一个加速器提供动量为 $200 \text{ MeV}/c$ 和每秒 10^{12} 个粒子

的质子束, 这束粒子穿过 0.01 cm 厚的铝片 (铝的密度 $\rho = 2.7 \text{ g/cm}^3$, 铝的辐射长度 $x_0 = 24 \text{ g/cm}^2$, $Z = 13$, $A = 27$).

(b) 对于上述粒子束计算在铝中卢瑟福微分散射截面. 已知散射角 $\theta = 30^\circ$.

(c) 在 1 秒时间内有多少粒子进入一个与粒子束方向成 30° 角、位于 2 m 远处半径为 1 cm 的圆形计数器中?

(d) 计算散射角 $> 5^\circ$ 的卢瑟福积分散射截面. 提示:

$$\sin \theta d\theta = 4 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} d \frac{\theta}{2}.$$

(e) 每秒有多少粒子被散射到离开原粒子束 5° 以外?

(f) 计算上面的粒子束通过铝片时的多次库仑散射的均方根投影散射角, 在多次库仑散射的表达式中的常数取为 $15 \text{ MeV}/c$.

解: (a) 卢瑟福散射的微分截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{zZe^2}{2mv^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}.$$

注意 $d\sigma/d\Omega$ 的量纲为面积, zZe^2 , $2mv^2$ 都当作一个整体量, 则可以从量纲分析中得出上式, 但对于角度的依赖关系 $1/\sin^4 \frac{\theta}{2}$ 必须记住.

$$\begin{aligned} (b) \quad \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\theta=30^\circ} &= \left[\frac{13 \times (4.8 \times 10^{-10})^2}{2 \times \frac{200^2}{938} \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 10^7} \right]^2 \\ &\quad \times \frac{1}{\sin^4 \frac{30^\circ}{2}} \\ &= 1.07 \times 10^{-25} \text{ cm}^2/\text{sr}. \end{aligned}$$

$$(c) \Delta\Omega = \pi r^2 / R^2 \quad (\text{其中 } r = 1 \text{ cm}, R = 2 \text{ m})$$

$$= 7.85 \times 10^{-5}, \quad (\text{立体角弧度})$$

故
$$\Delta n = nNt\Delta\sigma = nNt \frac{d\sigma}{d\Omega} \Delta\Omega = 10^{12} \times \frac{2.7}{27 \times 1.67 \times 10^{-24}}$$

$$\times 0.01 \times 1.07 \times 10^{-25} \times 7.85 \times 10^{-5}$$

$$= 5.03 \times 10^8 \text{ s}^{-1}.$$

式中: N 为铝原子的数密度, t 为铝箔厚度.

$$(d) \sigma_I = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

$$= 2\pi \int_0^{180^\circ} \left(\frac{Ze^2}{2mv^2} \right)^2 \frac{\sin\theta}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} d\theta = 3.17 \times 10^{-24} \text{ cm}^2.$$

$$(e) \Delta n_I = nNt\sigma_I = nNt \frac{d\sigma}{d\Omega} \Delta\Omega \cdot \frac{\sigma_I}{\frac{d\sigma}{d\Omega} \Delta\Omega}$$

$$= 5.03 \times 10^8 \times \frac{3.17 \times 10^{-24}}{1.07 \times 10^{-25} \times 7.85 \times 10^{-5}}$$

$$= 2.00 \times 10^9 \text{ s}^{-1}.$$

$$(f) \theta_{\text{rms}} = \frac{15 \text{ MeV}/c}{\sqrt{2} \beta p} Z \sqrt{\frac{t}{x_0}} \left(1 + \frac{1}{9} \lg \left(\frac{t}{x_0} \right) \right)$$

$$= \frac{15 \text{ MeV}/c}{\sqrt{2} \times \frac{200}{\sqrt{200^2 + 938^2}} \times 200} \times 1 \times \sqrt{\frac{0.01}{\frac{24}{2.7}}}$$

$$\times \left[1 + \frac{1}{9} \lg \left(\frac{0.01}{\frac{24}{2.7}} \right) \right]$$

$$5.74 \times 10^{-3} \text{ rad}.$$

(杨仲侠 肖旭东)

1018 (Col, 1975)

激发态原子的典型寿命为： 10^{-1} , 10^{-8} , 10^{-18} , 10^{-28} s.

解： 10^{-8} s. (周 平)

1019 (Wis, 1972)

一个原子可存在两种状态：质量为 M 的基态和质量为 $M + \Delta$ 的激发态。假如从基态到激发态的跃迁是通过吸收一个光子进行的，原子起初静止，则实验室坐标系中光子频率应为多少？

解：设光子频率为 ν ，激发态原子动量为 p ，由能量、动量守恒，得：

$$\text{能量} \quad Mc^2 + h\nu = [(M + \Delta)^2 c^4 + p^2 c^2]^{1/2}, \quad (1)$$

$$\text{动量} \quad \frac{h\nu}{c} = p, \quad (2)$$

由(2)得 $h\nu = pc$ ，代入(1)后，平方得：

$$M^2 c^4 + (h\nu)^2 + 2Mc^2 h\nu = M^2 c^4 + \Delta^2 c^4 + 2M\Delta c^4 + (h\nu)^2,$$

$$\text{于是} \quad \nu = \frac{\Delta c^2}{h} \left(1 + \frac{\Delta}{2M}\right). \quad (\text{杨永安})$$

1020 (CCT, 1983)

对一总自旋为零的状态，交换两个电子的空间坐标：
(a) 波函数变号，(b) 波函数不变，(c) 波函数变成了完全不同的另一种函数。

解：答案为(b)。总自旋为零的态是偶宇称态，即为空间对称的态。因此交换空间坐标后波函数不变。(唐子洲)

1021 (Col, 1975)

火焰中的原子的光谱线的多普勒展宽为： 10^6 ， 10^9 ， 10^{13} ， 10^{16} Hz.

解： 10^9 Hz. 利用公式 $\frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} kT$ ，可估算出：
 $\approx 10^{-4}c$ ，而可见光频率 $\nu_0 \approx 10^{14}$ Hz，于是多普勒展宽为

$$\Delta \nu = \nu_0 \frac{v}{c} \approx 10^{10} \text{ Hz.} \quad (\text{周 平})$$

1022 (Col, 1981)

估计氩 ($A = 40, Z = 18$) 在 $T = 300$ K 时发射的 $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ 光谱线的多普勒增宽的量级.

解：根据能量均分定理有

$$\frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} kT$$

于是
$$v \approx \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} .$$

将 $m \approx 40 \times 938 \text{ MeV}/c^2$ ， $kT \approx 0.0258 \text{ eV}$ 代入上式，得到
 $v \approx 431 \text{ m/s}$ ，故谱线的多普勒增宽为

$$\Delta \lambda = \frac{2v}{c} \lambda = \frac{2 \times 431}{3 \times 10^8} \times 5000 \approx 10^{-2} \text{ \AA.} \quad (\text{马 骥})$$

1023 (Col, 1975)

低能电子-原子散射截面为： 10^{-16} ， 10^{-24} ， 10^{-32} ， 10^{-40} cm^2 .

解：为 10^{-16} cm^2 . 因为原子的大小 $\approx 10^{-8} \text{ cm}$ ，所以此

散射截面为 $(10^{-8})^2 \approx 10^{-16} \text{ cm}^2$.

(周 平)

1024 (MIT, 1982)

零点压强. 一个电子被禁闭在具有不可穿透壁的、半径为 R 的球形空腔内部, 求出电子在基态时施加在空腔壁上的压强.

解: 从能量上考虑, 设想空腔壁的半径增加了 δR , 则电子由于对空腔壁做了 $4\pi R^2 \delta R \cdot P$ 的功, 引起能量降低 δE .

对电子基态, 角动量为零, 设波函数 $\psi = \frac{\chi(r)}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$,

则由薛定谔方程得到 $\chi(r)$ 满足的方程为

$$\chi''(r) + k^2 \chi(r) = 0, \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}.$$

考虑到 $\chi(r)$ 在 $r=0$ 处必须为零, 以便波函数处处有限, 得 $\chi(r) = A \sin kr$. 又由于壁是不可穿透的, 即 $\chi(r=R)$

$= 0$, 于是 $k = \pi/R$. 因此电子基态能量为 $E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mR^2}$, 压强为

$$p = -\frac{1}{4\pi R^2} \frac{\partial E}{\partial R} = \frac{\pi \hbar^2}{4mR^5}. \quad (\text{任 勇})$$

1025 (Col, 1976)

自旋 $s = \frac{1}{2}$ 的粒子有磁矩 $\mu = \mu_0 \mathbf{s}$, 置于沿 x 方向的

恒磁场 B 中. $t=0$ 时刻, 粒子处于 $s_x = \frac{1}{2}$ 态, 求此后发现粒

子处在 $s_y = \pm \frac{1}{2}$ 态的几率.

解: 取 (s^2, s_x) 表象, 则粒子磁矩与磁场 B 相互作用的哈密顿为

$$H = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = -\frac{\mu_0 B}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

于是得到薛定谔方程:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = -\frac{\mu_0 B}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix},$$

式中: $\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$ 表示 t 时刻粒子的波函数, 由题给条件, 易知

$$\begin{pmatrix} a(0) \\ b(0) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \text{ 故薛定谔方程的解为}$$

$$\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \exp\left(i \frac{\mu_0 B t}{2\hbar}\right) \\ i \exp\left(-i \frac{\mu_0 B t}{2\hbar}\right) \end{pmatrix}.$$

因此 t 时刻粒子处于 $s_y = +\frac{1}{2}$ 态的几率为

$$\begin{aligned} \left| (1, 1) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} \right|^2 &= \frac{1}{4} \left| \exp\left(i \frac{\mu_0 B t}{2\hbar}\right) + i \exp\left(-i \frac{\mu_0 B t}{2\hbar}\right) \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \sin \frac{\mu_0 B t}{\hbar} \right), \end{aligned}$$

同理, 粒子处于 $s_y = -\frac{1}{2}$ 态的几率是 $\frac{1}{2} \left(1 - \sin \frac{\mu_0 B t}{\hbar} \right)$.

(王力军)

1026 (CUS, 1981)

真实氦原子的基态当然是非简并的，但不妨考虑一个假想的氦原子，其中两个电子为两个全同的，自旋为1的带单位负电荷的粒子所取代。忽略与自旋有关的力，那么对这个假想的原子，基态的简并度是多少？给出理由。

解：对玻色子，总波函数必须是交换对称的，由于基态的空间波函数是对称的，所以要求自旋波函数也对称。

对于两个自旋为1的粒子，总自旋为2，1或0。显然，总自旋为2或0的自旋波函数是对称的，而总自旋为1的自旋态是反对称的。由此可见，基态的简并度为

$$(2 \times 2 + 1) + (2 \times 0 + 1) = 6. \quad (\text{杨永安})$$

1027 (Pri, 1980)

如图 1.7, B, D 是分束器, A, C 为反射镜, E 是中子探测器, 图中所有拐角均为直角, 分束器和反射镜对中子自旋无影响. 一束中子(质量 m) 以非相对论速度 v 入射, 在 B 处分束, 于 D 处干涉会合.

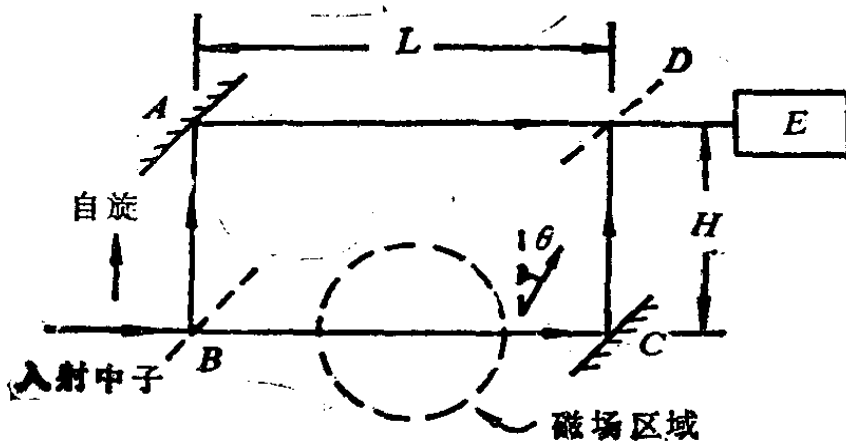


图 1.7

(a) 在这个问题中, 假设系统位于垂直面 (即重力平行于 AB 和 DC), 求探测器探测到的强度 I_θ . 已知系统水平放置时强度为 I_0 .

(b) 假定系统水平放置, 并且在 BC 间虚线包围着的区域有一均匀磁场, 磁场方向垂直纸面向外, 入射中子自旋沿 BA 方向极化 (如图 1.7 所示), 中子经过磁场其自旋将产生进动, 大小依赖于场强. 设进动转过的角度为 θ , 探测器得到的强度为 $I(\theta)$, 试求出 $I(\theta)$ 的表达式. 已知 $I(\theta=0) = I_0$.

解: (a) 假设到达 D 处的两束中子强度相同, 这样每束中子波的振幅均为 $\sqrt{I_0}/2$. BA 和 CD 在问题中等效, 可不考虑.

中子在 AD 段的速度 v_1 及在 BC 段的速度 v 有以下关系:

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mv_1^2 + mgH,$$

即
$$v_1 = \sqrt{v^2 - 2gH}.$$

在 D 处两束中子合成, 振幅为

$$\begin{aligned} \psi = & \left[\frac{\sqrt{I_0}}{2} \exp\left(i \frac{mv_1}{\hbar} L\right) + \frac{\sqrt{I_0}}{2} \exp\left(i \frac{mv}{\hbar} L\right) \right] \\ & \times \exp\left(-i \frac{Et}{\hbar}\right) \exp(i\delta), \end{aligned}$$

强度
$$I_\theta = |\psi|^2 = \frac{I_0}{2} + \frac{I_0}{2} \cos \left[\frac{mL(v - v_1)}{\hbar} \right]$$

$$= I_0 \cos^2 \left[\frac{mL(v - v_1)}{2\hbar} \right].$$

如果 $\frac{1}{2}mv^2 \gg mgH$, 则 $v_1 = v - \frac{gH}{v}$, 于是有

$$I_\theta \approx I_0 \cos^2 \left[\frac{mgHL}{2\hbar v} \right].$$

(b) 取 BA 方向为 z 方向, 下面的计算 (s^2, s_z) 在表象中进行. 沿 BAD 路径的中子的自旋态为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 而沿 BCD 路

径到达 D 处的中子的自旋态为 $\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$, 于是 D 处的合成

振幅为

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{\sqrt{I_0}}{2} \exp\left(-i \frac{Et}{\hbar} \exp(i\delta)\right) \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{\sqrt{I_0}}{2} \exp\left(-i \frac{Et}{\hbar}\right) \exp(i\delta) \begin{pmatrix} 1 + \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

故
$$I(\theta) = |\psi|^2 = \frac{I_0}{4} \left[\left(1 + \cos \frac{\theta}{2}\right)^2 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

$$= I_0 \cos^2 \frac{\theta}{4}.$$

(戴铁生)

1028 (CCT, 1983)

原子光谱线的精细结构是由什么引起的? (a) 电子的自

旋-轨道耦合, (b) 电子与核的相互作用, (c) 核自旋.

解: 答案为(a). (唐子洲)

1029 (Col, 1975)

氢原子基态的超精细分裂为: 10^{-7} , 10^{-5} , 10^{-3} , 10^{-1} eV.

解: 答案为 10^{-5} eV.

$$\begin{aligned}\Delta E &= h\nu_{hfs} = 6.63 \times 10^{-34} \times 1.42 \times 10^9 \\ &= 6 \times 10^{-6} \text{ eV.}\end{aligned}$$

(周平)

1030 (CCT, 1983)

氢的超精细结构: (a) 太小所以探测不到, (b) 是由核自旋引起的, (c) 是由核的有限大小引起的.

解: 答案为(b). (唐子洲)

1031 (Col, 1975)

氢原子 $2p$ 态的自旋-轨道分裂为: 10^{-6} , 10^{-4} , 10^{-2} , 10^0 eV.

解: 为 10^{-4} eV. 对于氢原子 $2p$ 态, $n=2$, $l=1$, $s=\frac{1}{2}$.

$j_1 = \frac{3}{2}$, $j_2 = \frac{1}{2}$. 由自旋-轨道耦合引起的能级分裂为

$$\begin{aligned}\Delta E_{l_s} &= \frac{hcR\alpha^2}{n^3 l \left(1 + \frac{1}{2}\right) (l+1)} \left(\frac{j_1(j_1+1) - j_2(j_2+1)}{2} \right) \\ &= \frac{13.6 \times 5.3 \times 10^{-5}}{8 \times \frac{3}{2} \times 2} \times \frac{\frac{15}{4} - \frac{3}{4}}{2} = 4.5 \times 10^{-5} \text{ (eV)}\end{aligned}$$

$\approx 10^{-4} \text{ (eV)}$.

(周 平)

1032 (CCT, 1983)

拉姆移动是：(a)氢原子 $1s$ 和 $2s$ 能级之间的劈裂，(b)由于电磁场的真空涨落引起的，(c)由于托马斯进动引起的。

解：答案为(b)。

(唐子洲)

1033 (CCT, 1983)

原子序数为 Z 的原子中，第一玻尔轨道上电子的平均速度为(以光速为单位)：(a) $Z^{1/2}$ ，(b) Z ，(c) $Z/137$ 。

解：答案为(c)。根据量纲分析，由原子本身的固有量 m, e, Z 和基本常数 \hbar 构成的速度量纲的表达式为

$$Ze^2/\hbar = Zc \frac{e^2}{\hbar c} = Zc/137 . \quad (\text{唐子洲})$$

1034 (Wis, 1972)

下列实验对量子理论的发展有着重大作用，选择其中两个，简要描述实验并说明其对理论发展的贡献，给出实验的大致数据。(a)斯忒恩-盖拉赫实验，(b)康普顿效应，(c)夫兰克-赫兹实验，(d)拉姆-李瑟福实验。

解：(a)斯忒恩-盖拉赫实验。斯忒恩和盖拉赫于1921年完成这个实验，当时被测的是银原子。如图1.8，从高温炉中蒸发出来的银原子经过准直形成细束

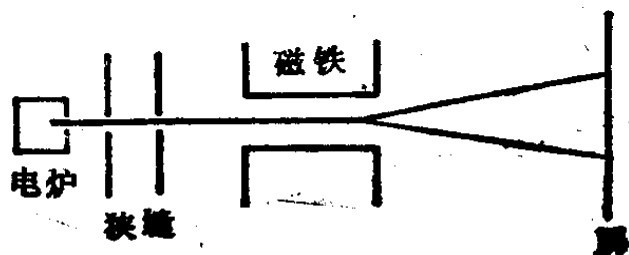


图 1.8

(速度约为 500 m/s)，然后通过一不均匀的磁场区域(磁场方向垂直于原子射束,梯度约为 10^3T/m ,纵向范围约为 4cm),出磁场后约飞行 10cm,最后打在照相底片上.在显影后的相片上发现两条黑斑,这表明银原子经过不均匀磁场后已分为两束.实验结果证实了原子角动量的空间取向的量子化.

(b) 康普顿效应.康普顿的实验装置如图 1.9 所示.从 X 射线管发出的 X 射线被石墨散射后,经过准直狭缝系统,到达测量器的晶体上,通过测定布喇格衍射角可以得到散射后 X 射线的波长.实验结果表明,散射后的 X 射线中除波长不变的部分外,还有波长变长的部分出现,并且这两个波长

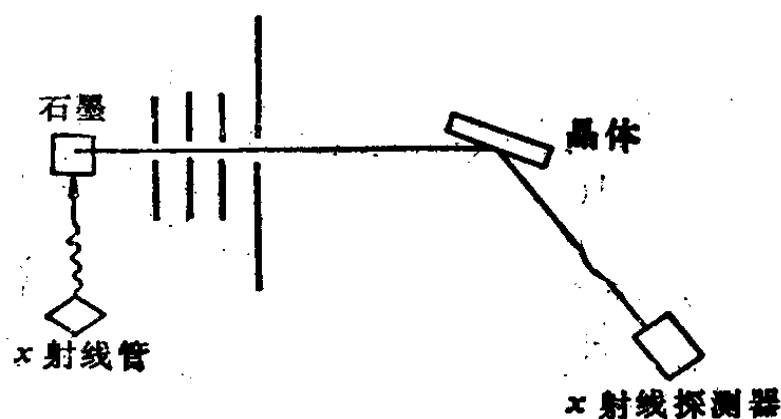


图 1.9

之差 $\Delta\lambda$ ($0 \sim 0.05 \text{ \AA}$) 随散射角 θ 不同而变化.1923 年康普顿首先对此观察结果提出解释,他利用爱因斯坦的光量子假说,将能量与动量守恒律同时应用于光量子与电子间的碰撞,得到 $\Delta\lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos\theta)$,该式与观测到的实验结果符合得极好.由此,康普顿效应首次直接证实了光即电磁波的粒子性.

(c) 夫兰克-赫兹实验. 1914年夫兰克和赫兹所做的这一实验, 直接证实了玻尔的原子能态量子化理论, 同时还提供了一种量度原子量子态能量差的重要方法. 实验装置如图 1.10 所示, 在玻璃容器中充满汞蒸汽 (通常用电炉加热到 200°C 左右, 使汞蒸发), 由阴极 K 发射的热电子受到 KG 间电场的作用加速向栅极 G 运动,

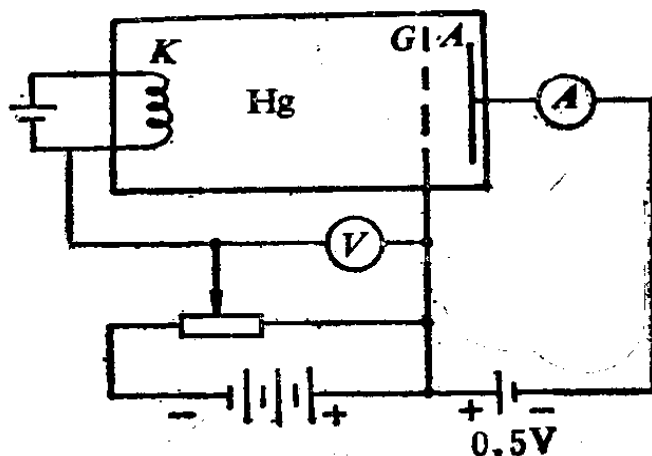


图 1.10

在 G 和接收极 A 之间有一很小的减速电场, 用以阻止小能量电子到达接收极. 从实验结果发现, 开始时接收极上的电流随着加速电压 V 增加而增加, 当电压达到 4.1 伏时, 电流突然下降, 不久又上升. 以后在 9.0 伏, 13.9 伏处又观察到类似的现象, 也就是说加速电压每增加 4.9 伏时, 电流突然下降 (第一次 4.1 伏是由仪器上的接触电势差引起的). 这反映出 4.9 伏是汞原子的第一激发电势, 当电子能量是 4.9eV 倍数时, 它与汞原子可经历一次或多次非弹性碰撞, 失去的能量使之无法克服 GA 间的减速电场, 从而导致电流大幅度下降. 以后, 夫兰克和赫兹将仪器作了一些改进, 观察到了原子的较高的激发电势.

(d) 拉姆-李瑟福实验. 拉姆和李瑟福于 1947 年在用射频方法精密测量氢原子光谱时发现, 属于同一 (nj) 的能级实际上还有微小的分裂. 这与狄拉克的理论显然有出入 (按照狄拉克理论, 属于同一 (nj) 的各个态是简并的). 后来在量子电动力学中计入了电子和它自己发出的辐射场之间的相互

作用以及真空极化等，实验结果才得以完美的解释。所以说拉姆-李瑟福实验是对量子电动力学的有力验证。

实验装置如图 1.11 所示。将氢气输入温度约 2500 K 的炉子中，大约有 64% 的分子被离解，出射的氢气的平均速

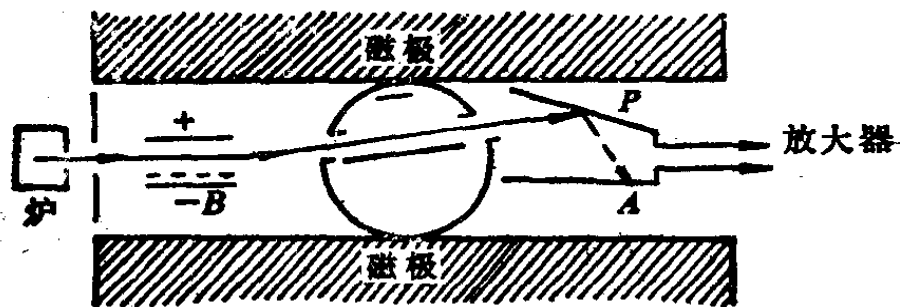


图 1.11

度为 $8 \times 10^3 \text{ m/s}$ 。原子在 B 处受到能量略高于 10.2 eV 的横向电子束的撞击，从而被激发到 $2^2S_{1/2}$, $2^2P_{1/2}$, $2^2P_{3/2}$ 态。 P 态原子很快自发跃迁到基态 $1^2S_{1/2}$ ，而 $2^2S_{1/2}$ 是一个亚稳态，不能自发跃迁到基态，所以不久只剩下 $2^2S_{1/2}$ 和 $1^2S_{1/2}$ 态原子一起前进，最后撞在钨板 P 上。钨的脱出功小于 10.2 eV ，所以 $2^2S_{1/2}$ 态氢原子将导致电子从钨板中逸出到达金属板 A ，在 PA 之间产生电流，这个电流经放大后可以测出。电流强度代表着 $2^2S_{1/2}$ 态原子的数量。

若在 $2^2S_{1/2}$ 态原子生成后再用一射频电磁波激发，使其跃迁到 P 态，然退激发到基态，则 PA 之间的电流将因 $2^2S_{1/2}$ 态原子的减小而减小，电流最小时的射频电磁波能量即为 $2^2S_{1/2}$ 态和 $2^2P_{1/2}$ 态之间的能量差。实验测得的频率为 $1057.77 \pm 0.10 \text{ MHz}$ 。 (叶 坚)

1035 (Wis, 1971)

(a) 由库仑定律和简单的角动量量子化，导出氢原子诸

能级；(b) 钠光谱为何会有双线结构。

解：(a) 电子与氢原子核之间的库仑引力为

$$F = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

取最简模型：电子围绕原子核作圆周运动，轨道半径为 r ，速度为 v ，轨道角动量为 p_ϕ 。按角动量量子化条件

$$p_\phi = mvr = n\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

及电子作圆周运动所满足的方程

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

解得

$$v = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 n\hbar}.$$

量子化的能量为

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{1}{2} m v^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{1}{2} m v^2 \\ &= -\frac{1}{2} \frac{m e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2 n^2}. \end{aligned}$$

(b) 钠原子可见光谱线的双线结构是由钠原子价电子的轨道自旋耦合引起的。 (钱剑明)

1036 (Chi, 1980)

通过代换 $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - \frac{e\mathbf{A}}{c}$ ，我们可以推广半经典的玻尔-索

末菲关系 $\oint \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r} = \left(n + \frac{1}{2}\right) 2\pi\hbar$ (其中积分是沿着一封闭

轨道)，使其适用于电磁场存在的情况。用它和有关线动量 \mathbf{p} 的方程导出半经典电子在磁场 B 中沿任意轨道运动的磁通

量量子化条件。对于固体中的电子，该条件可以用 k 空间中轨道面积大小 S 重新表述，试求出 S 依赖于 B 的量子化条件（忽略自旋效应）。

$$\text{解: } \oint \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \cdot d\mathbf{r} = \oint \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r} - \frac{e}{c} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r},$$

由运动方程:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{e}{c} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B}$$

$$\begin{aligned} \text{得} \quad \oint \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r} &= -\frac{e}{c} \oint (\mathbf{r} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \frac{e}{c} \mathbf{B} \cdot \oint \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = \frac{2e}{c} \Phi, \end{aligned}$$

式中: Φ 为磁通量。

$$\begin{aligned} \text{又} \quad -\frac{e}{c} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= -\frac{e}{c} \iiint (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} \\ &= -\frac{e}{c} \iiint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{e}{c} \Phi, \end{aligned}$$

$$\text{故} \quad \oint \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \cdot d\mathbf{r} = \frac{2e}{c} \Phi - \frac{e}{c} \Phi = \frac{e}{c} \Phi.$$

由推广的玻尔-索末菲关系, 得

$$\frac{e}{c} \Phi = \left(n + \frac{1}{2} \right) 2\pi\hbar,$$

$$\text{即} \quad \Phi = \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{2\pi\hbar c}{e}.$$

这就是所要求的磁通量量子化条件。

从运动方程得知, 在垂直于 \mathbf{B} 的平面内线元 Δr 与 Δk 的

关系为 $\Delta r = \frac{\hbar c}{eB} \Delta k$, 所以 k 空间中的面积 S 与 r 空间中的轨道面积 A 之间有如下关系:

$$A = \left(\frac{\hbar c}{eB} \right)^2 S.$$

根据前面已经得到的磁通量子化条件, 有

$$A = \frac{\Phi}{B} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{2\pi\hbar c}{eB},$$

即
$$\left(\frac{\hbar c}{eB} \right)^2 S = \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{2\pi\hbar c}{eB}.$$

最后得到 k 空间中轨道面积 S 满足的量子化条件:

$$S = \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{2\pi e}{\hbar c} B. \quad (\text{林 辰})$$

1037 (CUS, 1985)

一个很小的均匀带电球体处于一静电势场 $V(\mathbf{r})$ 中, 其势能为

$$U(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}) + \frac{r_0^2}{6} \nabla^2 V(\mathbf{r}) + \dots$$

这里 \mathbf{r} 是带电球球心位置, r_0 是其很小的半径.

“拉姆移动”可以认为是对氢原子能级的极小修正, 因为物理电子确实具有这种性质. 如果与库仑势 $V(\mathbf{r}) = -e^2/r$ 比较, 势能 U 中的 r_0^2 项可作为一个很小的微扰, 则氢原子 $1s$ 和 $2p$ 能级的拉姆移动分别是多大? 将结果用 r_0 及一些基本常数表示. 未经微扰的波函数为

$$\psi_{1s}(\mathbf{r}) = 2a_B^{-3/2} \exp(-r/a_B) Y_0^0,$$

$$\psi_{2pm}(\mathbf{r}) = a_B^{-5/2} r \exp(-r/2a_B) Y_1^m / \sqrt{24},$$

其中, $a_0 = \hbar^2/m_e e^2$.

$$\text{解: } \nabla^2 V(r) = -e^2 \nabla^2 \frac{1}{r} = 4\pi e^2 \delta(r)$$

其中已利用了关系式:

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi \delta(r),$$

于是 $\int \psi^* \nabla^2 V(r) \psi d^3 r = 4\pi e^2 \psi^*(0) \psi(0)$,

$$\begin{aligned} \text{从而 } \Delta E_{1s} &= \frac{r_0^2}{6} \cdot 4\pi e^2 \psi_{1s}^*(0) \psi_{1s}(0) \\ &= \frac{r_0^2}{6} \cdot 4\pi e^2 \cdot 4a_B^{-3} = \frac{8\pi e^2 r_0^2}{3} a_B^{-3}, \end{aligned}$$

$$\Delta E_{2s} = \frac{r_0^2}{6} \cdot 4\pi e^2 \psi_{2s}^*(0) \psi_{2s}(0) = 0. \quad (\text{杨永安})$$

1038 (Ber, 1978)

(a) 一受激原子的电子在下列自发辐射中放出光子, 请指出这些跃迁的主要极次 [如 E_1 (电偶极), E_2, E_3, \dots , M_1, M_2, M_3, \dots]: $2p_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2}$, $2s_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2}$, $3d_{3/2} \rightarrow 2s_{1/2}$, $2p_{3/2} \rightarrow 2p_{1/2}$, $3d_{3/2} \rightarrow 2p_{1/2}$.

(b) 估计上述第一个跃迁的速率, 以光子频率 ω , 原子半径 a 及其它必要的物理常数表示之, 并就典型原子粗略估计这种跃迁速率的数值.

(c) 估计 (a) 中的其它跃迁的速率与第一个跃迁的速率的比值, 表达式中所用的参量与 (b) 中的相同.

解: (a) $2p_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2}$: $\Delta L=1, \Delta J=0$, 是 E_1 跃迁.

$2s_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2}$: $\Delta L=0, \Delta J=0$, 是双光子偶极跃迁.

$3d_{3/2} \rightarrow 2s_{1/2}$: $\Delta L=2, \Delta J=1$, 是 E_2 跃迁.

$2p_{3/2} \rightarrow 2p_{1/2}$: $\Delta L = 0$, $\Delta J = 1$, 是 M_1 或 E_1 跃迁.

$3d_{3/2} \rightarrow 2p_{1/2}$: $\Delta L = 1$, $\Delta J = 1$. 是 E_1 跃迁.

(b) 从 $2p_{1/2}$ (1 态) 到 $1s_{1/2}$ (2 态) 的自发跃迁速率为

$$A = \frac{4e^2 \omega^3}{3\hbar c^3} |\langle r_{12} \rangle|^2 = \frac{4}{3} \alpha \omega^3 \left(\frac{|\langle r_{12} \rangle|}{c} \right)^2,$$

式中: $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$ 为精细结构常数, ω 为光子频率.

由于 $|\langle r_{12} \rangle| \approx a$ (a 为原子半径), 所以

$$A \approx \frac{4}{3} \alpha \omega^3 \left(\frac{a}{c} \right)^2,$$

若取 $a \approx 10^{-10} \text{m}$, $\omega \approx 10^{16} \text{s}^{-1}$, 则有 $A \approx 10^6 \text{s}^{-1}$.

$$(c) \quad \frac{A(2^2s_{1/2} \rightarrow 1^2s_{1/2})}{A_{E_1}} \approx 10 \left(\frac{\hbar}{mca} \right),$$

其中 $k = \omega/c$ 为光子波数.

$$\frac{A(3d_{1/2} \rightarrow 2s_{1/2})}{A_{E_1}} \approx (ka)^2,$$

$$\frac{A(3d_{3/2} \rightarrow 2p_{1/2})}{A_{E_1}} \approx \left(\frac{\omega(3d_{3/2} \rightarrow 2p_{1/2})}{\omega(2p_{1/2} \rightarrow 2s_{1/2})} \right)^2.$$

(胡 平 范扬眉)

1039 (Ber, 1983)

(a) 经典的 β 衰变中, 中微子能量的量级是多少? (b) 在 H, He⁺, Li[#] 等类氦原子中 $2p$ 态自发衰变的平均寿命与原子序数 Z 的关系是什么? (c) 氧原子基态的电子结构, 虽自旋 $1S^1$, 点轨道角动量 L , 点角动量 Y 是什么?

解: (a) 中微子的能量 $E_\nu \approx 1 \text{MeV}$.

(b) 令寿命为 τ , 则 $1/\tau \approx |\langle s | r | 2p \rangle|^2 \sigma^3 |s(r)\rangle$ 和 $|p(r)\rangle$ 为 $1s$ 和 $2p$ 态的径向波函数. σ 为相应于两个能级间

隔的波数。当 $z > 1$ 时，则上述态函数变为 $|1s(zr)\rangle$ 和 $|2p(zr)\rangle$

$$|\langle 1s(zr) | zr | 2p(zr) \rangle|^2 - z^{-2} |\langle 1s(r) | r | 2p(r) \rangle|^2,$$

$$\sigma \propto z^2;$$

所以 $1/\tau \propto z^4$, $\tau \propto z^{-4}$.

(c) 氧原子的电子结构 $1s^2 2s^2 2p^4$;

基态为 3p_2 , $S = 1$, $J = 2$. (任 勇)

1040 (Wis, 1978)

假设由于小的宇称破坏力，氢原子的 $2^2s_{1/2}$ 能级有少量 p 波混杂：

$$\psi(n=2, j=1/2) = \psi_s(n=2, j=1/2, l=0)$$

$$+ \varepsilon \psi_p(n=2, j=1/2, l=1).$$

什么样的第一级辐射衰变将使此态去激发？衰变矩阵元的形式如何？当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时会怎样，为什么？

解：电偶极辐射 $\psi_p(n=2, j=1/2, l=1) \rightarrow \psi_s(n=1, j=1/2, l=0)$ 使此混合态的 p 波部分去激发，而 $\psi_s(n=2, j=1/2, l=0)$ 作为亚稳态将不发生衰变。衰变矩阵或 T 矩阵为

$$\langle \psi_f | T | \psi_i \rangle = \int \psi_f^* V(\mathbf{r}) \psi_i d^3r.$$

对电偶极辐射，有：

$$V(\mathbf{r}) = -(-e\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E} = ezE.$$

上面已假设电场在 z 方向偏振。

$$\langle \psi_f | T | \psi_i \rangle = \varepsilon e E \int R_{10} R_{21} Y_{00} Y_{10} z d^3r$$

$$= \frac{32}{27\sqrt{6}} \varepsilon e a E \int_0^\pi Y_{00} Y_{10} \cos\theta d\Omega,$$

由 $\cos\theta Y_{10} = \sqrt{\frac{4}{15}} Y_{20} + \sqrt{\frac{1}{3}} Y_{00}$

得 $\langle \psi_r | T | \psi_i \rangle = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \sqrt{2} \varepsilon \alpha E$.

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 偶极跃迁矩阵元 $\langle \psi_r | T | \psi_i \rangle \rightarrow 0$, 此时激发态仅为 $\psi_r (n=2, j=1/2, l=0)$ 亚稳态, 它既不能通过电偶极跃迁到基态 (因 $\Delta l = \pm 1$ 不满足), 也不能通过磁偶极 ($\Delta n = 0$ 不满足) 或电四极 ($1/2 \leftrightarrow 1/2$) 跃迁来退激发, 只允许 $2^2s_{1/2} \rightarrow 1^2s_{1/2}$ 的双光子跃迁, 其几率是很小的. (杨永安)

1041 (Chi, 1979)

(a) 由于超精细相互作用, 造成了氢原子基态分裂, 试给出能级图并根据基本原理说明哪一个态能量较高. (b) 氢分子的基态分裂成总核自旋的单态和三态, 根据基本原理说明哪个态能量较高.

解: (a) 氢原子中的超精细相互作用是质子和电子的内禀磁矩间的磁相互作用:

$$H_{int} = -\mu_p \cdot B$$

其中 B 为价电子内禀磁矩所产生的磁场, μ_p 为质子的内禀磁矩. 考虑超精细相互作用后, 氢原子基态能级如图 1.12 所示.



图 1.12

电子磁矩 μ_e 与自旋的方向反平行, 而质子的自旋 s_p 与磁矩 μ_p 方向一致. 对于能量较低的

态, 有 $\langle \mu_p \cdot \mu_e \rangle > 0$, $\langle s_p \cdot s_e \rangle < 0$, 故 $F=0$ (单态). 对于能量较高的态, 则有 $F=1$ (三态).

(b) 由于氢分子是同核双原子分子, 质子的自旋 $s_p = 1/2$, 所以核系统的态必定是反对称的. 单态对应着核自

旋反对称态，故核转动态必须是对称态，即 $J=0, 2, 4, \dots$ ，其中基态为 $J=0$ 。三态对应核自旋对称态，对于核转动基态有 $J=1$ 。显然，单态的基态要比三态基态的能量低。

(林 辰)

1042 (Wis, 1978)

(a) 玻尔的原始氢原子理论(圆轨道)中，利用了哪个假设来选择容许能级？(b) 后来，德布罗意指出玻尔假设与电子的德布罗意波长之间的一个很有意思的关系，叙述并推导这个关系。

解：(a) 玻尔的原始量子化条件是：

$$mvr = n\hbar,$$

其中： m 为电子质量， v 为电子速度， r 为轨道半径。在玻尔的氢原子理论中，就是利用这个量子化条件来选择容许能级的。

(b) 德布罗意发现玻尔提出的圆轨道刚好能容纳整数个电子的德布罗意波长。因为 $\hbar = h/2\pi$ ，所以有

$$2\pi r \cdot mv = nh,$$

即
$$2\pi r = \frac{nh}{mv} = n \frac{h}{p} = n\lambda,$$

其中： λ 是电子的德布罗意波长。

(钱剑明)

1043 (Wis, 1978)

在射电天文学中观察到氢原子高激发态之间的跃迁，例如从 $n=109$ 到 $n=108$ 的跃迁。(a) 试求出这种跃迁辐射的波长及频率。(b) 激发态的氢原子亦有这样的跃迁，估算氢原子与氦原子这种跃迁的波长比。(c) 为什么在实验室难以观察到这种跃迁。

解: (a) 氢原子能级 $E_n = -\frac{13.6}{n^2} \text{ eV}$. 对于高激发态 $n = 109$ 及 $n = 108$ 之间的跃迁, 有

$$h\nu = -\frac{13.6}{109^2} + \frac{13.6}{108^2},$$

于是

$$\nu = 5.15 \times 10^9 \text{ Hz},$$

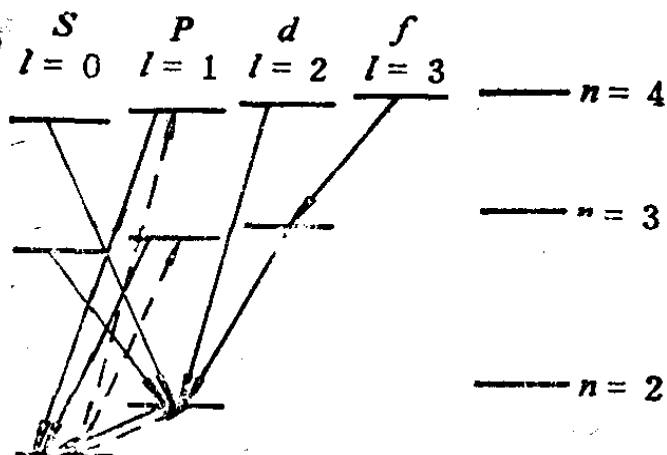
$$\lambda = c/\nu = 0.058 \text{ m} = 5.8 \text{ cm}.$$

(b) 对氢原子, 就如此高的激发态来说, 轨道上的电子所感受到的有效核电荷近似为一个质子电荷, 所以氢原子跃迁辐射波长近似等于氢原子同一跃迁辐射的波长.

(c) 处于这么高激发态的电子, 极易与其它原子碰撞而电离, 同时电子在高激发态间跃迁的几率也非常小. 在实验室中难以创造条件既使得碰撞电离的可能性很小, 同时又有足够多的高激发态原子, 从而产生强的辐射强度 (但是强激光条件建立后, 利用多光子激发, 可以实现高激发态原子即黎德堡原子). (钱剑明)

1044 (Wis, 1970)

画出锂原子 $n = 2, 3, 4$ 的能级图, 在图上标出可以看到



锂原子能级图 ($n = 2, 3, 4$) 氢原子

图1.13

的吸收跃迁与辐射跃迁，并在同一图上画出氢原子 $n = 2, 3, 4$ 的能级。

解：由于原子一般都处在基态，故吸收谱线由 $2s$ 态电子跃迁到 np 态引起 ($n = 2, 3, 4$)。能级图如图 1.13 所示 (见第 41 页)，图中虚线表示吸收跃迁，实线表示辐射跃迁。(钱剑明)

1045 (Wis, 1971)

在早期原子理论中，J. J. Thomson 提出的“葡萄干布丁”原子模型，是一个半径为 a ，总电荷为 Ze 的正电荷球体，这里 Z 为整数， e 是基本电荷单位。带负电 $-e$ 的电子被看成点电荷镶嵌于正电荷球体中。(a) 试求氢原子中距球心 r 处的电子所受到的力；(b) 电子将作何种运动？(c) 给出电子运动频率的表示式。

解：(a) 对氢原子 ($Z = 1$)，正电荷密度为

$$\rho = \frac{e}{\frac{3}{4}\pi a^3} = \frac{3e}{4\pi a^3},$$

当电子距离球心为 r 时，只有半径为 r 的球体内的正电荷对电子有作用，所以电子所受之力为

$$F(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot e \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} r,$$

负号表示力的方向指向球心。

(b) 从电子所受作用力 $F(r)$ 的形式不难知道，电子将作简谐振动。

(c) 将 $F(r)$ 写成如下形式：

$$F(r) = -kr,$$

其中 $k = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3}$ 。这样，可得简谐振动的角频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3 m}},$$

其中： m 为电子质量。

(钱剑明)

1046 (Wis, 1981)

氢原子的赖曼 α 谱线 ($n=2$ 到 $n=1$ 跃迁) 波长为 1215 \AA ，试求：(a) 光致电离基态氢原子 ($n=1$) 的光波长范围；(b) 光致电离第一激发态氢原子 ($n=2$) 的光波长范围；(c) 光致电离基态 He^+ ($n=1$) 的光波长范围；(d) 光致电离第一激发态 He^+ ($n=2$) 的光波长范围。

解：(a) 对氢原子赖曼线系，有

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R \left(1 - \frac{1}{n^2} \right).$$

氢原子基态电离能即为该系系限，相应的波数为

$$\tilde{\nu}_0 = \frac{1}{\lambda_0} = R.$$

而对赖曼 α 线，有

$$\tilde{\nu}_\alpha = \frac{1}{\lambda_\alpha} = \frac{3}{4} R,$$

已知 $\lambda_\alpha = 1215 \text{ \AA}$ ，故 $\lambda_0 = \frac{3}{4} \lambda_\alpha = 911 \text{ \AA}$ ，因此能电离基态氢

原子的光波长小于 911 \AA 。

(b) 所求波长应小于巴尔末系的系限波长。巴尔末系系限波数为

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{R}{4} = \frac{1}{4\lambda_0}, (\lambda_0 = 1/R),$$

所以光波长应小于 $4\lambda_0 = 4860 \text{ \AA}$.

(c) 对 He^+ , 因 $Z=2$, 故赖曼系系限波数为

$$\nu = \frac{1}{\lambda} = 4R.$$

电离基态 He^+ 的光波长应小于 $1/4R = \lambda_0/4 = 228 \text{ \AA}$.

(d) 所求波长应该小于 $1/R = \lambda_0 = 1215 \text{ \AA}$. (钱剑明)

1047 (Ber, 1981)

一个基态氦原子通过 β 衰变成为 He^+ . (a) 衰变后瞬间, He^+ 处在基态的几率是多少? (b) 在 $2s$ 态呢? (c) 在 $2p$ 态呢? (忽略自旋)

解: 根据波函数的连续性, 在衰变瞬间有

$$|1s\rangle_{\text{H}} = a_1|1s\rangle_{\text{He}^+} + a_2|2s\rangle_{\text{He}^+} + a_3|2p\rangle_{\text{He}^+} + \dots$$

$$(a) a_1 = {}_{\text{He}^+}\langle 1s|1s\rangle_{\text{H}}$$

$$= \int_0^\infty \frac{2}{a^{3/2}} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \cdot 2\left(\frac{2}{a}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) \cdot r^2 dr$$

$$\int Y_{00}^2 d\Omega = \frac{16\sqrt{2}}{27},$$

于是 He^+ 处在基态的几率为 $W(1s) = |a_1|^2 = \frac{512}{729}$.

$$(b) a_2 = {}_{\text{He}^+}\langle 2s|1s\rangle_{\text{H}}$$

$$= \int_0^\infty \frac{2}{a^{3/2}} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{a}\right)^{3/2} \left(1 - \frac{r}{a}\right)$$

$$\exp\left(-\frac{r}{a}\right) \cdot r^2 dr \int Y_{00}^2 d\Omega = -\frac{1}{2}.$$

故 He^+ 处于 $2s$ 态的几率为 $W(2s) = |a_2|^2 = \frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned}
 (c) \quad a_3 &= \langle 2p | 1s \rangle_H \\
 &= \int_0^\infty \frac{2}{a^{3/2}} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{6}} \left(\frac{2}{a}\right)^{3/2} \cdot \frac{2r}{a} \\
 &\quad \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \cdot r^2 dr \int Y_{10}^* Y_{00} d\Omega = 0,
 \end{aligned}$$

所以 $W(2p) = |a_3|^2 = 0$. (胡平)

1048 (Wis, 1975)

试考虑氢原子基态和 $n=2$ 的激发态 (图 1.14). 在图上标出四个能级的完整光谱符号. 为了解释各种观察到的能级分裂, 必须计及四种修正: (a) 拉姆移动, (b) 精细结构,

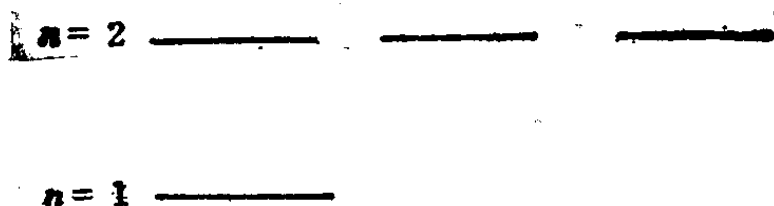


图1.14

(c) 超精细结构, (d) 相对论效应.

(1) $n=1$ 的态要计及上述哪种修正?

(2) $n=2, l=0$ 的态要计及哪几种修正? $n=2, l=1$ 的态呢?

(3) 根据这些修正的大小, 从小到大重新排列, 若有同量级修正, 请指出.

(4) 简述超精细结构的起因 (讨论中应包括费米接触势).

解: 氢原子基态及第一激发态的光谱学记号见图 1.15.

氢原子的精细结构包括三个来源:

$$E_f = E_m + E_D + E_{s_0}$$

其中： E_m 表示相对论效应引起的质量随速度的变化。 E_D 称为达尔文项，是由电子的相对论非局域性引起的， E_{s_0} 则是电子有自旋轨道耦合引起的。

$$n=2 \quad \frac{(2s)^2 S_{1/2}}{\quad} \quad \frac{(2p)^2 P_{3/2}}{\quad} \quad \frac{(2p)^2 P_{1/2}}{\quad}$$

$$n=1 \quad \frac{(1s)^2 S_{1/2}}{\quad}$$

图1.15

$$E_m = -\frac{\alpha^2 Z^4}{4n^4} \left(\frac{4n}{l + \frac{1}{2}} - 3 \right) \times 13.6 \text{ eV},$$

$$E_D = \frac{\alpha^2 Z^4}{n^3} \delta_{l_0} \times 13.6 \text{ eV},$$

$$E_{s_0} = \begin{cases} (1 - \delta_{l_0}) \frac{\alpha^2 Z^4 l}{n^3 l(l+1)(2l+1)} \times 13.6 \text{ eV}, & \left(j = l + \frac{1}{2} \right), \\ - (1 - \delta_{l_0}) \frac{\alpha^2 Z^4 (l+1)}{n^3 l(l+1)(2l+1)} \times 13.6 \text{ eV}, & \left(j = l - \frac{1}{2} \right). \end{cases}$$

其中： $\delta_{l_0} = \begin{cases} 1 & (l=0) \\ 0 & (l \neq 0) \end{cases}$ 。

拉姆移动是由于电子和辐射场的相互作用引起的，将修正按 Z_0 展开，其首项为

$$E_L = k(l) \frac{\alpha (Z\alpha)^4 m c^2}{2\pi n^3}$$

$$= k(l) \frac{\alpha^3 Z^4}{\pi n^3} \times 13.6 \text{ eV},$$

其中 $k(l)$ 为与 l 有关的常数。

超精细结构是由电子的总角动量和核自旋之间的耦合引起的。

(1) 对 $n=1$ 能级来说, E_m, E_D, E_L 只能引起能级的整体移动. 又 $E_{s_0} = 0$, 精细结构对能级劈裂无贡献, 而超精细结构有作用(如图 1.16).

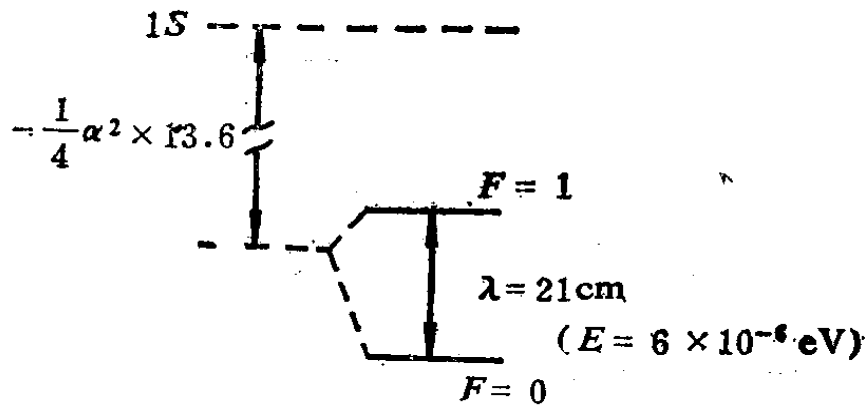


图 1.16

(2) 对 $n=2$ 能级, 精细结构引起的劈裂最大, 超精细结构也有贡献(见图 1.17)

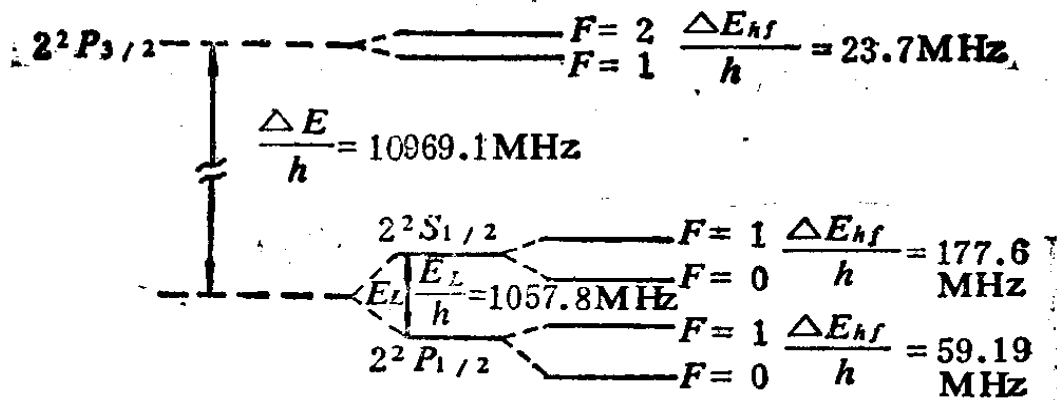


图 1.17

(3) E_m, E_D, E_{s_0} 同量级 $>$ 拉姆移动 \approx 超精细结构.

(4) 超精细结构分为三项:

(a) 电子轨道运动在质子处产生的磁场和核磁矩的作用。

(b) 电子和核磁矩的偶极-偶极相互作用。

(c) 费米接触项，描写电子自旋磁矩和质子内部磁场的相互作用。

(钱剑明)

1049 (Wis, 1978)

利用玻尔原子模型，(a) 导出 He^+ 的能量表达式。(b) 计算 $l=1$ 态在磁场中的能量(忽略电子自旋)。

解：(a) 设电子的轨道半径为 r ，角动量大小为 p_ϕ ，电子速率为 v ，则

$$p_\phi = mvr = n\hbar, \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (1)$$

电子作圆周运动满足的方程为

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (2)$$

由(1)和(2)得 He^+ 能量为

$$E_n = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{1}{2} mv^2 = -\frac{2m\epsilon^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 n^2 \hbar^2}.$$

(b) 电子轨道面积为

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{r}{2} \cdot r d\phi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 \omega d\omega = \frac{p_\phi}{2m} T,$$

其中： T 为运动周期。对 $l=1$ 的态来说， $p_\phi = \hbar$ ，所以电子运动的轨道磁矩值为

$$\mu = iA = -\frac{e}{T} A = -\frac{e\hbar}{2m}.$$

其中： i 为电子轨道运动产生的电流，式中负号表示磁矩方向

与轨道运动旋向成左手系。所以， $l=1$ 态与磁场 B 的作用能为：

$$\Delta E = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = \begin{cases} \frac{e\hbar}{2m} B, & (\boldsymbol{\mu} \parallel \mathbf{B}), \\ 0, & (\boldsymbol{\mu} \perp \mathbf{B}), \\ -\frac{e\hbar}{2m} B, & (\boldsymbol{\mu} \parallel (-\mathbf{B})). \end{cases} \quad (\text{钱剑明})$$

1050 (Wis, 1974)

一个原子由电荷为 Z 的核及一个电子组成，核半径为 R 。在核中，电荷(质子)是均匀分布的，试研究核的有限体积对电子能级的影响。(a) 计算考虑核的有限体积时的势能；(b) 用微扰论计算由于核的有限体积给 Pb^{208} 的 $1s$ 态造成的能级移动(假定 R 远小于玻尔半径，波函数也作相应近似)；(c) 给出(b)的数值答案(用 cm^{-1} 为单位，假定 $R = r_0 A^{\frac{1}{3}}$ ， $r_0 = 1.2$ 费米)。

解：(a)

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}, & (r \geq R), \\ -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Ze^2}{2R^3} \cdot (R^3 - r^3) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Ze^2}{R}, & (r < R). \end{cases}$$

(b) 哈密顿微扰项为

$$H' = \begin{cases} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{R^2 - r^2}{2R^3} + \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right), & (r < R), \\ 0, & (r > R), \end{cases}$$

Pb^{208} 的 $1s$ 态波函数 $|1s\rangle = 2 \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ ，其

中 $Z=82$, a_0 为玻尔半径. 能级移动 $\Delta E = \langle 1s | H' | 1s \rangle$, 当 $r \ll a_0$ 时, $\exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right) \approx 1$, 此时

$$\begin{aligned} \Delta E &= -\frac{4Z^4 e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0^3} \int_0^R \left(\frac{3}{2R} - \frac{r^2}{2R^3} - \frac{1}{r} \right) r^2 dr \\ &= \frac{4}{5} Z^2 |E_0| \left(\frac{R}{a_0} \right)^2. \end{aligned}$$

其中 E_0 是类氢原子基态能量.

$$(c) \quad \Delta E = \frac{4}{5} \times 82^2 \times (82^2 \times 13.6)$$

$$\times \frac{1.2 \times 10^{-10} \times \sqrt[3]{208}}{5.29 \times 10^{-9}} \text{ eV} = 8.886 \text{ eV}$$

$$\approx 7.2 \times 10^4 \text{ cm}^{-1}. \quad (\text{胡平章 俭})$$

1051 (Wis, 1976)

如果质子近似为一均匀带电的半径为 R 的球, 证明氢原子中 S 波能级相对于以质子为点粒子时的能量移动近似为

$$\Delta E_{n_s} \approx \frac{2\pi}{5} e^2 |\Psi_{n_s}(0)|^2 R^2.$$

其中利用了质子半径远小于玻尔半径的事实. 试问, 为什么非 S 态的上述移动小得多?

氢 $2s$ 态的波函数是

$$(2a_0)^{-\frac{3}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{r}{2a_0} \right) \exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right),$$

$2s$ 和 $2p$ 能级间由此引起的裂距近似为多少?

(对于 H , $a_0 = 5 \times 10^{-9} \text{ cm}$, $R \approx 10^{-13} \text{ cm}$).

解: 由于质子有限体积而引起的微扰为

$$H' = \begin{cases} 0, & (r \geq R), \\ \frac{e^2}{r} - \frac{e^2}{R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right), & (r < R), \end{cases}$$

而 $\Psi_{ns} = N_{no} \exp\left(-\frac{r}{na}\right) F\left(-n+1, 2, \frac{2r}{na}\right) \cdot Y_{00}$,

其中: $N_{no} = \frac{2}{a_2^3 \cdot n^2} \sqrt{\frac{n!}{(n-1)!}} = \frac{2}{(na)^{3/2}}$,

$$F\left(-n+1, 2, \frac{2r}{na}\right) = 1 - \frac{n-1}{2} \cdot \frac{2r}{na} + \frac{(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} \\ \cdot \frac{1}{2!} \left(\frac{2r}{na}\right)^2 + \dots,$$

当 $r \ll a$ 时, $F\left(-n+1, 2, \frac{2r}{na}\right) \approx 1$, $\exp\left(-\frac{r}{na}\right) \approx 1$, 此时

有

$$\Psi_{ns} = N_{no} Y_{00} = \frac{2}{(na)^{3/2}} Y_{00},$$

$$\Delta E_{ns} = \int_0^R \left[\frac{e^2}{r} - \frac{e^2}{R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right) \right] \Psi_{ns}^* \Psi_{ns} r^2 dr d\Omega \\ = \frac{2\pi}{5} e^2 \frac{1}{\pi (na)^3} R^2,$$

因 $\Psi_{ns}(0) = \frac{2}{(na)^{3/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi} (na)^{3/2}}$,

故 $\Delta E_{ns} = \frac{2\pi}{5} e^2 |\Psi_{ns}(0)|^2 R^2$.

非 s 态的波函数在核内的部分比 s 态小得多, 受到的影响小, 因而能级移动小.

对氢原子, 由于 $\Delta E_{2p} \ll \Delta E_{2s}$, 故

$$\Delta E_{p_s} = \Delta E_{2s} - \Delta E_{2p} \approx \Delta E_{2s}$$

$$= \frac{2\pi}{5} e^2 |\Psi_{2s}(0)|^2 R,$$

而 $\Psi_{2s}(0) = (2a_0)^{-\frac{3}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}},$

故 $\Delta E_{p_s} = \frac{2\pi}{5} e^2 [(2a_0)^{-\frac{3}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}}]^2 R^2$

$$= \frac{e^2 R^2}{20 a_0^3} \approx 5.76 \times 10^{-10} \text{eV}, \quad (\text{胡 平})$$

1052 (Col, 1984)

氢原子的基态是 $1s$, 当仔细检查时, 发现它分裂成两条谱线. (a) 解释这种分裂的原因; (b) 估算这两个能级之间的能量差值.

解: (a) 在氢原子的精细结构谱线中, 基态 $1s$ 不分裂, 因此这种分裂只能来自核磁矩与电子磁矩的相互作用.

因 $\hat{P} = \hat{I} + \hat{J}$, $I = \frac{1}{2}$, $J = \frac{1}{2}$, 合成的总角动量 $F = 1$ 及

$F = 0$, 从而形成了两个分裂的能级.

(b) 核磁矩 $\mathbf{B} = B \boldsymbol{\sigma}_N$, $\boldsymbol{\sigma}_N$ 为作用于核波函数的泡利矩

阵, 它建立一磁场 \hat{H}_n , $\hat{H}_n = \text{rot rot} \left(\frac{B \boldsymbol{\sigma}_N}{r} \right)$, \hat{H}_n 作用在

电子磁矩 $\boldsymbol{\mu}_e = -\mu_B \boldsymbol{\sigma}_e$ 上, 于是有: 哈密顿 $\hat{H} = -\boldsymbol{\mu}_e \cdot \hat{H}_n$

$= \mu_B B \left(\boldsymbol{\sigma}_e \cdot \text{rot rot} \frac{\boldsymbol{\sigma}_N}{r} \right)$. 经过计算可得到超精细结构能级

分裂 $\Delta E = A' \mathbf{I} \cdot \mathbf{J}$ 其中 $A' \approx \mu_p \mu_B / a_0^3 \approx 10^{-6} \text{eV}$. (叶 坚)

导出原子能级中由于超精细作用而引起的分裂，请把结论用有关的角动量量子数表示出来。

解：超精细结构是由于电子轨道运动及其自旋所产生的磁场与原子核磁矩 m_N 间的相互作用而引起的。取原子核所在点为坐标原点，则电子轨道运动在原点产生的磁场为

$$B_e(0) = \frac{\mu_0 e}{4\pi} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3} = -\frac{2\mu_0 \mu_B}{4\pi \hbar} \frac{\mathbf{l}}{r^3},$$

式中： \mathbf{v} 为电子轨道运动线速度， \mathbf{l} 为轨道角动量， μ_B 为玻尔磁子。

核磁矩 m_N 与 $B_e(0)$ 相互作用的哈密顿为

$$H_{H,0} = -m_N \cdot B_e(0) = \frac{2g_N \mu_0 \mu_B \mu_N}{4\pi \hbar^2} \mathbf{l} \cdot \mathbf{I}. \quad (1)$$

式中： \mathbf{I} 为核自旋， μ_N 为核磁子， g_N 为原子核的朗德因子。

在 $\mathbf{r} + \mathbf{r}'$ 处，电子自旋磁矩 m_s 产生的矢势为

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} m_s \times \frac{\mathbf{r}'}{r'^3}, \quad (\mathbf{r}' \text{ 为从电子所在点 } \mathbf{r} \text{ 到场点的坐标矢量})$$

标矢量)

磁场 $\mathbf{B}_s = \nabla \times \mathbf{A}$

$$\begin{aligned} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(m_s \times \frac{\mathbf{r}'}{r'^3} \right) \\ &= -\frac{2\mu_0 \mu_B}{4\pi \hbar} \nabla \times \left(\mathbf{s} \times \frac{\mathbf{r}'}{r'^3} \right) \\ &= -\frac{2\mu_0 \mu_B}{4\pi \hbar} \left[4\pi \mathbf{s} \delta(\mathbf{r}') + (\mathbf{s} \cdot \nabla) \nabla \frac{1}{r'} \right], \end{aligned}$$

上式 ∇ 作用于 \mathbf{r}' 之上。令 $\mathbf{r}' = -\mathbf{r}$ ，便得到原点处由 m_s 引起

的磁场:

$$\mathbf{B}_s(0) = -\frac{2\mu_0\mu_B}{4\pi\hbar} \left[4\pi\mathbf{s}\delta(\mathbf{r}) + (\mathbf{s}\cdot\nabla)\nabla\frac{1}{r} \right],$$

于是, \mathbf{m}_N 与 $\mathbf{B}_s(0)$ 相互作用的哈密顿为

$$\begin{aligned} H_{hf} &= -\mathbf{m}_N \cdot \mathbf{B}_s(0) \\ &= \frac{2g_N\mu_0\mu_B\mu_N}{4\pi\hbar^2} \left[4\pi\mathbf{I}\cdot\mathbf{s}\delta(\mathbf{r}) + (\mathbf{s}\cdot\nabla) \right. \\ &\quad \left. (\mathbf{I}\cdot\nabla)\frac{1}{r} \right], \end{aligned} \quad (2)$$

(1), (2) 两式相加得到总的相互作用哈密顿:

$$\begin{aligned} H_{hf} &= H_{hfe} + H_{hfs} \\ &= \frac{2g_N\mu_0\mu_B\mu_N}{4\pi\hbar^2} \left[\frac{\mathbf{l}\cdot\mathbf{I}}{r^3} + 4\pi\mathbf{s}\cdot\mathbf{I}\delta(\mathbf{r}) \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{s}\cdot\nabla)(\mathbf{I}\cdot\nabla)\frac{1}{r} \right]. \end{aligned}$$

记零级近似波函数为 $|lsjIFM_F\rangle$, 其中 l, s, j 分别是电子轨道、自旋和总角动量量子数, I 为核自旋量子数, F 为原子总角动量量子数, 而 M_F 是相应的投影量子数. 如果只考虑一级近似, 则由 H_{hf} 引起的能量改变为

$$\Delta E = \langle lsjIFM_F | H_{hf} | lsjIFM_F \rangle$$

$l \neq 0$ 时, 电子波函数在原点处等于零, 此时对 H_{hf} 只需考虑 $r \neq 0$ 的情形, 于是:

$$\begin{aligned} H_{hf} &= \frac{2g_N\mu_0\mu_B\mu_N}{4\pi\hbar^2} \left[\frac{\mathbf{I}\cdot\mathbf{l}}{r^3} + (\mathbf{s}\cdot\nabla)(\mathbf{I}\cdot\nabla)\frac{1}{r} \right] \\ &= \frac{2g_N\mu_0\mu_B\mu_N}{4\pi\hbar^2 r^3} \mathbf{G}\cdot\mathbf{I}, \end{aligned}$$

其中：
$$\mathbf{G} = \mathbf{l} - \mathbf{S} + 3 \frac{(\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^2},$$

故

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{2g_N \mu_o \mu_B \mu_N}{4\pi \hbar^2} \left\langle \frac{1}{r^3} \mathbf{G} \cdot \mathbf{I} \right\rangle \\ &= \frac{g_N \mu_o \mu_B \mu_N}{4\pi} \cdot \frac{l(l+1)}{j(j+1)} \cdot [F(F+1) \\ &\quad - I(I+1) - j(j+1)] \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle \\ &= \frac{g_N \mu_o \mu_B \mu_N}{4\pi} \cdot \frac{Z^3}{a_0^3 n^3 \left(l + \frac{1}{2}\right) j(j+1)} \\ &\quad \cdot [F(F+1) - I(I+1) - j(j+1)], \end{aligned}$$

其中： a_0 为玻尔半径， Z 为原子序数。

对于 $l=0$ ，波函数是球对称的，此时：

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{2g_N \mu_o \mu_B \mu_N}{4\pi \hbar^2} [4\pi \langle \mathbf{s} \cdot \mathbf{I} \delta(\mathbf{r}) \rangle \\ &\quad + \langle (\mathbf{s} \cdot \nabla) (\mathbf{I} \cdot \nabla) \frac{1}{r} \rangle], \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \langle (\mathbf{s} \cdot \nabla) (\mathbf{I} \cdot \nabla) \frac{1}{r} \rangle &= \left\langle \sum_{i,j=1}^3 S_i I_j \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} \left(\frac{1}{r} \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^3 S_i I_j \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left(\frac{1}{r} \right) \right\rangle + \left\langle \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 S_i I_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{1}{r} \right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{3} \langle \mathbf{s} \cdot \mathbf{I} \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) \rangle = -\frac{4\pi}{3} \langle \mathbf{s} \cdot \mathbf{I} \delta(\mathbf{r}) \rangle, \end{aligned}$$

故

$$\Delta E = \frac{2g_N \mu_o \mu_B \mu_N}{4\pi \hbar^2} \cdot \frac{8\pi}{3} \langle \mathbf{s} \cdot \mathbf{I} \delta(\mathbf{r}) \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{g_N \mu_0 \mu_B \mu_N}{4\pi} [F(F+1) - I(I+1) - S(S+1)] \\
&\quad \cdot \frac{8\pi}{3} \langle 8(r) \rangle \\
&= \frac{2g_N \mu_0 \mu_B \mu_N}{3\pi} \cdot \frac{Z^3}{a_0^3 n^3} \cdot [F(F+1) - I(I+1) \\
&\quad - S(S+1)]. \qquad \qquad \qquad (\text{何晓东})
\end{aligned}$$

1054 (Pri, 1977)

什么是光谱的精细结构和超精细结构？讨论它们的物理起因。给出例子，估计这两种效应的量级。简略地讨论这两种效应之一的理论。

解：(a) 精细结构：原来取决于主量子数 n 和轨道量子数 l 的谱项，由于电子自旋 s 和轨道 l 的相互作用而发生劈裂，于是原来能级间的跃迁辐射谱线也因此发生劈裂，例如钠原子的 $3p \rightarrow 3s$ 跃迁所产生的谱线呈双线结构，对应于 D_1 (5896 Å), D_2 (5890 Å) 两条相距很近的钠黄线，这就是原子光谱中的精细结构。

作为例子，下面估算氢原子精细结构分裂的量级。由于轨道运动，电子感受到的磁场强度为 $B = \frac{\mu_0 e v}{4\pi r^2}$ ，其中

$v = \alpha \frac{c}{n} \approx \alpha c$ 是电子运动速度， r 为电子轨道半径， α 为精细

结构常数。于是得到电子磁矩 μ_e 与磁场 B 的相互作用能，即精细结构分裂为

$$\Delta E \approx \mu_e B \approx \frac{\mu_0 \mu_B \alpha e c}{4\pi r^2},$$

式中 μ_B 为玻尔磁子。取 $r \approx 10^{-10} \text{m}$ ，则有

$$\begin{aligned} \Delta E &\approx 10^{-7} \times 10^{-23} \times 10^{-2} \times 10^{-19} \times 10^8 / 10^{-20} \text{ (J)} \\ &\approx 10^{-23} \text{ (J)} \approx 10^{-4} \text{ (eV)}. \end{aligned}$$

实际上，按照上面的思路通过严格计算可以得到，在中心力场 $V(r)$ 中运动的电子，其自旋轨道相互作用的哈密顿为

$$H' = \frac{1}{2m^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{l}),$$

将 H' 作为微扰，并取 $V(r) = -\frac{Ze^2}{r}$ ，在一级近似下能够得到能量修正为

$$\begin{aligned} \Delta E_{n,l,j} = \langle H' \rangle &= \frac{Rhc \alpha^2 Z^4}{2n^3 l \left(l + \frac{1}{2} \right) (l+1)} \\ &\quad \times \left[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right]. \end{aligned}$$

式中： R 为里德伯常数， j 为电子总角动量量子数。

从上式可以看到， j 值不同的态， $\Delta E_{n,l,j}$ 也不同，因此原来取决于 n, l 的能级由于 j 的两种不同取值： $j = l + \frac{1}{2}$ 和

$j = l - \frac{1}{2}$ 而一分为二，两能级间的裂距也可从上式求得。

(b) 超精细结构：进一步考虑核自旋 I 与电子总角动量 j 之间的耦合，可使取决于 j 的能级再次分裂，因而相应的谱线也随之进一步分裂。比如采用高分辨率的仪器可以观察到钠原子的 D_1 线由相距为 0.023 \AA 的双线组成， D_2 线由相距为 0.021 \AA 的两条线组成。这就是所谓的超精细结构。

就基态氢原子而言，电子在原子核处所产生的磁场强度为 $B = \frac{\mu_0 e v}{4\pi a^2}$ ，其中 a 为玻尔半径。核磁矩 μ_N 与 B 相互作用能量，也即超精细结构裂距为

$$\begin{aligned}\Delta E &\approx \mu_N B \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu_N e a c}{a^2} \\ &\approx 10^{-7} \times \frac{5 \times 10^{-27} \times 1.6 \times 10^{-19} \times 3 \times 10^8}{137 \times (0.53 \times 10^{-10})^2} \text{ (J)} \\ &\approx 10^{-7} \text{ (eV)}.\end{aligned}$$

关于超精细结构的理论分析，可参见 1053 题。（李 俊）

1055 (Pri, 1977)

一个 μ 介子和一个铯核 ($Z = 38$) 形成奇异原子，试就其中的 $2p \rightarrow 1s$ 电磁跃迁估算下列特性的量级。(a) 精细结构分裂；(b) 谱线的自然宽度(注：氢的 $2p$ 态寿命为 10^{-9} s.)。

解：(a) 考虑精细结构后，类氢原子的能级为

$$\begin{aligned}E &= E_0 + \Delta E_r + \Delta E_l, \\ &= \begin{cases} -\frac{Rhc Z^2}{n^2} - \frac{Rhc \alpha^2 Z^4}{n^3} \left(\frac{1}{l} - \frac{3}{4n} \right), & \left(j = l - \frac{1}{2} \right), \\ -\frac{Rhc Z^2}{n^2} - \frac{Rhc \alpha^2 Z^4}{n^3} \left(\frac{1}{l+1} - \frac{3}{4n} \right), & \left(j = l + \frac{1}{2} \right), \end{cases}\end{aligned}$$

$1s$ 态不分裂，而 $2p$ 态分为两个次能级，对应于 $j = \frac{1}{2}$ 和

$j = \frac{3}{2}$ ，两条 $2p \rightarrow 1s$ 谱线的能量差为

$$\Delta E = \frac{Rhc \alpha^2 Z^4}{n^3} \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l+1} \right),$$

其中 $Z = 38$, $n = 2$, $l = 1$, 而 $R \approx \frac{m_\mu}{m_e} R_H \approx 200 R_H$, 于是:

$$\Delta E \approx 10^3 R_H hc \approx 10^4 \text{ eV}.$$

(b) 该奇异原子的 $2p$ 态寿命为

$$\tau_\mu = \frac{1}{Z^4} \cdot \frac{m_e}{m_\mu} \tau_H \approx 10^{-18} \text{ s}.$$

由测不准关系, 即可得到能级的自然宽度为

$$\Gamma \approx \hbar / \tau_\mu \approx 10^3 \text{ eV}. \quad (\text{章 俭})$$

1056 (Pri, 1977)

电中性碱金属原子从最低能级受激跃迁到 p 态:

$ns \rightarrow (n+1)p$, 光谱呈双线结构. 对于轻碱金属原子, 双线强度之比是 2, 但随核电荷数 Z 的增大, 双线强度比变大, 例如铯原子的 $6s \rightarrow 7p$ 双线强度比是 3.85.

(a) 试写出自旋轨道耦合项 $N(r)$.

(b) 在氢原子中, 对主量子数 n 而言, $N(r)$ 是不是对角阵? 对总角动量 J 而言呢?

(c) 利用下列数据, 对铯原子双线估计强度比的最低级修正.

E_n : np 态能量 (cm^{-1}),

I_n : $6s \rightarrow np$ 谱线强度.

$$\frac{I_6}{I_7} = 125, \quad \frac{I_8}{I_7} = 0.5,$$

Δ_n : 自旋轨道耦合引起的 np 态能级分裂 (cm^{-1}).

$$\Delta_6 = 554, \quad E_6 = -19950,$$

$$\Delta_7 = 181, \quad E_7 = -9550,$$

$$\Delta_8 = 80, \quad E_8 = -5660.$$

在估计修正中的各项时，可认为电子态与氢原子的电子态相同。

提示：对于 r 较小的值而言，氢原子的各径向波函数成比例： $f_m(r) = R_{m,n} f_n(r)$ 。因此，下式是好的近似：

$$\langle 6p|N(r)|6p\rangle = R_{67} \langle 7p|N(r)|6p\rangle = R_{67}^2 \langle 7p|N(r)|7p\rangle.$$

$$\begin{aligned} \text{解：(a) } N(r) &= \frac{1}{2\mu^2 c^2 r} \frac{dv}{dr} \hat{S} \cdot \hat{l} \\ &= \frac{1}{4\mu^2 c^2 r} \frac{dv}{dr} (\hat{j}^2 - \hat{l}^2 - \hat{S}^2). \end{aligned}$$

(b) 哈密顿量 $H = H_0 + N(r)$ ，在氢原子中，因 $[H_0, N(r)] \neq 0$ ，所以对主量子数 n 而言， $N(r)$ 不是对角化的。显然，一般情况下：

$$\langle nlm|N(r)|klm\rangle \neq 0.$$

对总角动量而言（此时 n 为一定值），因为 $[N(r), \hat{j}^2] = 0$ ，故 $N(r)$ 是对角化的。

$$(c) \text{ 受激跃迁速率 } W_{k,k} = \frac{4\pi^2 e^2}{3\hbar^2} |\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_k|^2 \rho(\omega_{k,k}), \text{ 谱线强}$$

$$\text{度 } I(\omega_{k,k}) \propto \hbar \omega_{k,k} W_{k,k}.$$

考虑电子自旋轨道耦合后，碱金属原子的 np 能级分裂成为两个次能级，对应于电子总角动量 $j = \frac{3}{2}$ 和 $j = \frac{1}{2}$ 。而 s 态不分裂，所以 $ns \rightarrow (n+1)p$ 光谱呈双线结构。由于 np 能级的劈裂很小， $ns \rightarrow (n+1)p$ 双线频率近似相等，所以有 $I \propto |\mathbf{r}_{k,k}|^2$ 。

$$j = \frac{3}{2} \text{ 态是 4 度简并的，对应于 } j_z = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2},$$

$-\frac{3}{2}$. 而 $j = \frac{1}{2}$ 态的简并度为 2, 对应于 $j_z = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$.

零级近似下, 可得双线强度比为

$$\frac{I\left(j = \frac{3}{2}\right)}{I\left(j = \frac{1}{2}\right)} = \frac{\sum_{j_z} |\langle (n+1)p_{3/2} | r | ns \rangle|^2}{\sum_{j_z} |\langle (n+1)p_{1/2} | r | ns \rangle|^2} = 2,$$

其中 $|(n+1)p_{\frac{1}{2}}\rangle, |(n+1)p_{\frac{3}{2}}\rangle$ 分别表示 $(n+1)p$ 能级

$j = \frac{1}{2}$ 和 $j = \frac{3}{2}$ 态零级近似波函数.

下面计算铯原子 $6s \rightarrow 7p$ 双线强度在一级近似下的比值.

将旋轨道耦合项 $N(r)$ 当作微扰, 容易求得 $j = \frac{3}{2}$ 态的一

级近似波函数为

$$\Psi_{\frac{3}{2}} = | \rangle p_{\frac{3}{2}} \rangle + \sum_{n=6}^{\infty} \frac{\langle np_{\frac{3}{2}} | N(r) | 7p_{\frac{3}{2}} \rangle}{E_7 - E_n} | np_{\frac{3}{2}} \rangle$$

$j = \frac{1}{2}$ 态的一级近似波函数为

$$\Psi_{\frac{1}{2}} = | \rangle p_{\frac{1}{2}} \rangle + \sum_{n=6}^{\infty} \frac{\langle np_{\frac{1}{2}} | N(r) | 7p_{\frac{1}{2}} \rangle}{E_7 - E_n} | np_{\frac{1}{2}} \rangle.$$

于是

$$|\langle \Psi_{\frac{3}{2}} | r | 6s \rangle|^2 = |\langle 7p_{\frac{3}{2}} | r | 6s \rangle|^2 + \sum_{n=6}^{\infty} \frac{\langle np_{\frac{3}{2}} | N(r) | 7p_{\frac{3}{2}} \rangle}{E_7 - E_n}$$

$$\begin{aligned} & \langle np \frac{3}{2} | r | 6s \rangle^2 \\ & \approx |\langle 7p \frac{3}{2} | r | 6s \rangle|^2 |1| \\ & + \sum_{n=6}^{\infty} \left| \frac{\langle np \frac{3}{2} | N(r) | 7p \frac{3}{2} \rangle}{E_7 - E_n} \sqrt{\frac{I_n}{I_7}} \right|^2, \end{aligned}$$

$$|\langle \Psi_{\frac{1}{2}} | r | 6s \rangle|^2 = |\langle 7p \frac{1}{2} | r | 6s \rangle|^2 |1|$$

$$+ \sum_{n=6}^{\infty} \left| \frac{\langle np \frac{1}{2} | N(r) | 7p \frac{1}{2} \rangle}{E_7 - E_n} \sqrt{\frac{I_n}{I_7}} \right|^2,$$

由于
$$N(r) = \frac{1}{4\mu^2 c^2 r} \frac{dv}{dr} (\hat{j}^2 - \hat{l}^2 - \hat{s}^2)$$

$$= F(r) (\hat{j}^2 - \hat{l}^2 - \hat{s}^2),$$

其中
$$F(r) \equiv \frac{1}{4\mu^2 c^2 r} \frac{dv}{dr}.$$

故
$$\langle np \frac{3}{2} | N(r) | 7p \frac{3}{2} \rangle = \langle np \frac{3}{2} | F(r) (\hat{j}^2 - \hat{l}^2 - \hat{s}^2) | 7p \frac{3}{2} \rangle$$

$$| 7p \frac{3}{2} \rangle$$

$$= \left[\frac{3}{2} \times \left(\frac{3}{2} + 1 \right) - 1 \times (1 + 1) - \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \right] \hbar^2$$

$$\langle np | F(r) | 7p \rangle = \hbar^2 \langle np | F(r) | 7p \rangle,$$

$$\langle np \frac{1}{2} | N(r) | 7p \frac{1}{2} \rangle = -2\hbar^2 \langle np | F(r) | 7p \rangle$$

$n=7$ 时, 由于

$$\begin{aligned}\Delta_7 &= \langle 7p \frac{3}{2} | N(r) | 7p \frac{3}{2} \rangle - \langle 7p \frac{1}{2} | N(r) | 7p \frac{1}{2} \rangle \\ &= 3\hbar^2 \langle 7p | F(r) | 7p \rangle.\end{aligned}$$

所以 $\langle 7p | F(r) | 7p \rangle = \frac{\Delta_7}{3\hbar^2}$.

对 $n=6$, 有

$$\begin{aligned}\langle 6p \frac{3}{2} | N(r) | 7p \frac{3}{2} \rangle &= \hbar^2 \langle 6p | F(r) | 7p \rangle \\ &= \hbar^2 k_{67} \langle 7p | F(r) | 7p \rangle = \frac{k_{67}}{3} \Delta_7.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle 6p \frac{1}{2} | N(r) | 7p \frac{1}{2} \rangle &= -2\hbar^2 \langle 6p | F(r) | 7p \rangle \\ &= -2\hbar^2 k_{67} \langle 7p | F(r) | 7p \rangle = -\frac{2k_{67}}{3} \Delta_7.\end{aligned}$$

对 $n=8$, 有:

$$\langle 8p \frac{3}{2} | N(r) | 7p \frac{3}{2} \rangle = \frac{k_{87}}{3} \Delta_7,$$

$$\langle 8p \frac{1}{2} | N(r) | 7p \frac{1}{2} \rangle = -\frac{2k_{87}}{3} \Delta_7.$$

故 $|\langle \Psi_{\frac{3}{2}} | r | 6s \rangle|^2 \approx |\langle 7p \frac{3}{2} | r | 6s \rangle|^2 \left[1 + \frac{k_{87} \Delta_7}{3(E_7 - E_8)} \right]$

$$\cdot \left| \sqrt{\frac{I_6}{I_7}} + \frac{k_{87} \Delta_7}{3(E_7 - E_8)} \sqrt{\frac{I_8}{I_7}} \right|^2,$$

$$\begin{aligned}|\langle \Psi_{\frac{1}{2}} | r | 6s \rangle|^2 &\approx |\langle 7p \frac{1}{2} | r | 6s \rangle|^2 \left[1 - \frac{2k_{87} \Delta_7}{3(E_7 - E_8)} \sqrt{\frac{I_6}{I_7}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2k_{87} \Delta_7}{3(E_7 - E_8)} \sqrt{\frac{I_8}{I_7}} \right].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{又} \quad \Delta_6 &= \langle 6p \frac{3}{2} | N(r) | 6p \frac{3}{2} \rangle - \langle 6p \frac{1}{2} | N(r) | 6p \frac{1}{2} \rangle \\
 &= 3\hbar^2 \langle 6p | F(r) | 6p \rangle = 3\hbar^2 k_{67}^2 \langle 7p | F(r) | 7p \rangle \\
 &= k_{67}^2 \Delta_7.
 \end{aligned}$$

$$\text{所以} \quad k_{67} = \sqrt{\frac{\Delta_6}{\Delta_7}}$$

$$\text{同理} \quad k_{87} = \sqrt{\frac{\Delta_8}{\Delta_7}}$$

$$\text{于是} \quad \frac{I\left(j = \frac{3}{2}\right)}{I\left(j = \frac{1}{2}\right)} = \frac{\sum_{jz} |\langle \Psi_{\frac{3}{2}} | \mathbf{r} | 6s \rangle|^2}{\sum_{jz} |\langle \Psi_{\frac{1}{2}} | \mathbf{r} | 6s \rangle|^2}$$

$$\begin{aligned}
 &\approx 2 \cdot \left| \frac{1 + \frac{k_{67} \Delta_7}{3(E_7 - E_6)} \sqrt{\frac{I_6}{I_7}} + \frac{k_{87} \Delta_7}{3(E_7 - E_8)} \sqrt{\frac{I_8}{I_7}}}{1 - \frac{2k_{67} \Delta_7}{3(E_7 - E_6)} \sqrt{\frac{I_6}{I_7}} - \frac{2k_{87} \Delta_7}{3(E_7 - E_8)} \sqrt{\frac{I_8}{I_7}}} \right|^2 \\
 &\approx 2 \cdot \left| \frac{1 + \frac{\sqrt{\Delta_6 \Delta_7}}{3(E_7 - E_6)} \sqrt{\frac{I_6}{I_7}} + \frac{\sqrt{\Delta_8 \Delta_7}}{3(E_7 - E_8)} \sqrt{\frac{I_8}{I_7}}}{1 - \frac{2\sqrt{\Delta_6 \Delta_7}}{3(E_7 - E_6)} \sqrt{\frac{I_6}{I_7}} - \frac{2\sqrt{\Delta_8 \Delta_7}}{3(E_7 - E_8)} \sqrt{\frac{I_8}{I_7}}} \right|^2
 \end{aligned}$$

将题给数据代入上式，求得：

$$\frac{I\left(j = \frac{3}{2}\right)}{I\left(j = \frac{1}{2}\right)} \approx 3.94. \quad (\text{戴铁生})$$

1057 (Pri, 1978)

原子钟可以以氢原子的21cm基态超精细跃迁为基础。低

压原子态氢被限制在一个球形小瓶($r \ll \lambda = 21\text{cm}$)内, 瓶壁覆盖一层聚四氟乙烯. 由于器壁涂层的磁中性物质, 以及氢原子在壁上的停留时间很短, 因而使原子氢碰到壁时, 自旋态几乎没有受到扰动. 将外磁场屏蔽掉, 然后把瓶置于沿特定方向的均匀可控磁场中, 通过对 21 cm 射频的吸收率的测量, 或者将气体容器接受一辐射脉冲然后观察相干再发射能量, 可以得到气体的共振频率.

(a) 这些超精细态的塞曼效应是重要的. 画出能级图, 给出基态的超精细亚状态的量子数作为磁场强度的函数, 包括弱场和强场区域的塞曼效应形式.

(b) 如何将强场区域的能级分裂用来测量质子的 g 因子?

(c) 在弱场区域, 有一个能级的跳跃几乎不会受到磁场的影响, 指出是哪一个. 对最大的磁场强度作一估计, 使共振频率的移动 $\Delta\nu < 10^{-20}\nu$.

(d) 共振线没有出现多普勒加宽, 为什么?

解: (a) 在考虑了超精细结构及相应的塞曼效应时, 氢原子的哈密顿量增加了两项:

$$H_{h.f.} = A\mathbf{I} \cdot \mathbf{J}, \quad (A > 0),$$

$$H_B = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}.$$

对氢原子基态, $I = \frac{1}{2}$, $J = \frac{1}{2}$.

$$\boldsymbol{\mu} = -g_e \frac{e\hbar}{2m_e c} \frac{\mathbf{J}}{\hbar} + g_p \frac{e\hbar}{2m_p c} \frac{\mathbf{I}}{\hbar},$$

下面取 $\hbar = 1$, 记 $\frac{e\hbar}{2m_e c} = \mu_B$, $\frac{e\hbar}{2m_p c} = \mu_N$, 则

$$\boldsymbol{\mu} = -g_e \mu_B \mathbf{J} + g_p \mu_N \mathbf{I}.$$

(1) 在弱磁场中, $\langle H_{A,1} \rangle \gg \langle H_B \rangle$, 因此将 I, J 耦合成 $F = I + J$, 然后把 H_B 当成微扰项在 $\{\hat{F}^2, \hat{I}^2, \hat{J}^2, \hat{F}_z\}$ 表象中解出.

$$H_{A,1} = \frac{A}{2} [\hat{F}^2 - \hat{I}^2 - \hat{J}^2] = \frac{A}{2} \left[\hat{F}^2 - \frac{3}{2} \right].$$

于是

$$\Delta E_{A,1} = \begin{cases} -\frac{3}{4} A, & (F=0), \\ \frac{1}{4} A, & (F=1). \end{cases}$$

在 $\{\hat{F}^2, \hat{F}_z\}$ 子空间中, 由维格纳-埃伽定理, 得

$$\langle \mu \rangle = \frac{(-g_e \mu_B \mathbf{J} + g_p \mu_N \mathbf{I}) \cdot \mathbf{F}}{F^2} F.$$

$$\text{由 } \mathbf{J} \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{2} (\hat{F}^2 + \hat{J}^2 - \hat{I}^2) = \frac{1}{2} \hat{F}^2,$$

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{2} (\hat{F}^2 + \hat{I}^2 - \hat{J}^2) = \frac{1}{2} \hat{F}^2,$$

(利用 $I = J = \frac{1}{2}$).

$$\text{因此 } \langle \mu \rangle = -\frac{g_e \mu_B - g_p \mu_N}{2} F.$$

$$H_B = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = \frac{g_e \mu_B - g_p \mu_N}{2} B \hat{F}_z,$$

故

$$\Delta E_B = \begin{cases} E_1, & (F_z = 1), \\ 0, & (F_z = 0), \\ -E_1, & (F_z = -1). \end{cases}$$

其中
$$E_1 = \frac{g_e \mu_B - g_p \mu_N}{2} B.$$

(2) 强磁场中, $\langle H_{hf} \rangle \ll \langle H_B \rangle$, 因此将 H_B 当成主项而 H_{hf} 当作微扰. 力学量完全集取 $\{I^2, J^2, I_z, J_z\}$, 子空间的基为 $|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle$ (其中 $|++\rangle$ 表示

$$J = +\frac{1}{2}, I = +\frac{1}{2} \text{ 等等}).$$

$$\langle H_{hf} + H_B \rangle = \langle AI_z J_z \rangle + g_e \mu_B B \langle J_z \rangle - g_p \mu_N B \langle I_z \rangle$$

故

$$\Delta E = \begin{cases} E_1 + \frac{A}{4}, & \text{对 } |++\rangle, \\ E_2 - \frac{A}{4}, & \text{对 } |+-\rangle, \\ -E_2 - \frac{A}{4}, & \text{对 } |-+\rangle, \\ -E_1 + \frac{A}{4}, & \text{对 } |--\rangle. \end{cases}$$

其中:
$$E_1 = \frac{g_e \mu_B - g_p \mu_N}{2} B, \quad E_2 = \frac{g_e \mu_B + g_p \mu_N}{2} B.$$

由 (1), (2) 我们不难得到弱场及强场区域的能级图和量子数 (见图 1.18):

量子数: $(F, J, I, F_z), \quad (J, I, J_z, I_z),$

亚状态: $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right),$

$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$

$$\begin{aligned} & \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\ & \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

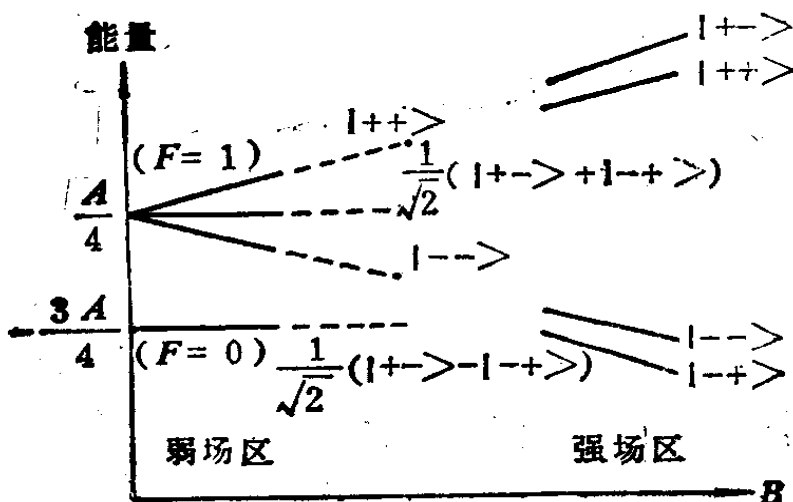


图 1.18

(b) 在强场区域, $|+-\rangle$ 态与 $|++\rangle$ 态能级随 B 变化的斜率是有如下关系比为

$$\frac{\frac{\Delta E_{|+,1\rangle}}{\Delta B} - \frac{\Delta E_{|+,2\rangle}}{\Delta B}}{\frac{\Delta E_{|+,1-\rangle}}{\Delta B} - \frac{\Delta E_{|+,2+\rangle}}{\Delta B}} = \frac{g_2}{g_1}$$

由于需要的量为能量随 B 变化的斜率, 测量能量的系统误差可以消除, 所以用此法可测出质子的 g 因子。

(c) 在弱场区, $|F=1, F_z=0\rangle$ 与 $|F=0, F_z=0\rangle$ 这两个态近似不受磁场影响, 因而这两态之间的跃迁亦不受影响。

上述结论是在弱场 ($A \gg E_1$) 情况下考虑一阶效应而得出的, 因而我们可以估计到, 磁场对这两个态的影响最多出现

在 $\frac{E_1}{A}$ 的二阶量上，故近似设这两能量对 B 的依赖为

$$\left(\frac{E_1}{A}\right)^2 \cdot A = \frac{E_1^2}{A}.$$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta E}{E} \approx \frac{\frac{E_1^2}{A}}{\frac{A}{4} - \left(-\frac{3A}{4}\right)} = \frac{E_1^2}{A^2}$$

$$\approx \left(\frac{g_e \mu_B B}{2A}\right)^2, \quad (\text{略去 } g_p \mu_N)$$

要求 $\frac{\Delta\nu}{\nu} < 10^{-20}$ ，近似取 $A = 5.8 \times 10^{-6} \text{eV}$ ，则 $B \approx 10^{-2} \text{Gs}$ 。

(d) 由于共振的能量很小，放出光子时，核的反冲带走的动能 ΔE 与光子能量 E 之比 $\frac{\Delta E}{E} \ll 1$ ，因而由于反冲造成的多普勒加宽可以忽略。 (王璜鑫)

1058 (Col, 1981)

考虑一个裸 Pb 核 ($Z = 82$) 束缚一个 Ω^- 粒子所形成的原子。

(a) 计算这个原子由于自旋-轨道相互作用引起的 $n=10, l=9$ 的能级分裂。 Ω^- 粒子的自旋是 $\frac{3}{2}$ ；假设磁矩 μ

$$= \frac{e\hbar}{2mc} g\mathbf{p}_s, \quad g=2, \quad m=1672 \text{ MeV}/c^2.$$

注：对于一个质量为 m 的粒子，束缚在电荷为 Z 的核的类氢轨道 (n, l) 时有

$$\langle \frac{1}{r^3} \rangle = \left(\frac{mc^2}{\hbar c} \right)^3 (\alpha Z)^3 \frac{1}{n^3 l \left(l + \frac{1}{2} \right) (l+1)}.$$

(b) 如果 Ω^- 有电四极矩 $Q \approx 10^{-26} \text{ cm}^2$, 那么由于这个电四极矩与库仑场梯度 $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ 相互作用而会产生一个能量移动, 估计它的数值. 与 (a) 的结果相比较. 并与这个原子的 $n=11$ 到 $n=10$ 态跃迁的总跃迁能量相比较.

解: (a) 自旋-轨道耦合能 ΔE_{l_s} 可以通过自旋磁矩 μ_s 和轨道磁矩 μ_l 的相互作用能的计算求得:

$$\Delta E_{l_s} = Z \mu_l \cdot \mu_s \langle \frac{1}{r^3} \rangle,$$

其中: $\mu_l = \frac{e\hbar}{2mc} \mathbf{p}_l$, (\mathbf{p}_l : 轨道角动量).

$\mu_s = \frac{e\hbar}{mc} \mathbf{p}_s$, (\mathbf{p}_s : 自旋角动量).

$$\begin{aligned} \text{于是 } \Delta E_{l_s} &= \frac{Ze^2 \hbar^2}{2m^2 c^2} \langle \frac{1}{r^3} \rangle \mathbf{p}_l \cdot \mathbf{p}_s \\ &= \frac{Ze^2 \hbar^2}{2m^2 c^2} \langle \frac{1}{r^3} \rangle \frac{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)}{2}, \end{aligned}$$

已知 $Z = 82$, $m = 1672 \text{ MeV}/c^2$, $s = \frac{3}{2}$. 当 $n=10$, $l=9$ 时,

利用题中所给的公式求出 $\langle \frac{1}{r^3} \rangle$, 从而可得到 ΔE_{l_s} . 计算结果如下:

j	$\Delta E_{l_s} \text{ (eV)}$	能级裂距 (eV)
$9 \frac{1}{2}$	375	1172

$8 \frac{1}{2}$	- 797	1078
$7 \frac{1}{2}$	- 1875	938
$6 \frac{1}{2}$	- 2813	

(b) 电四极矩 Q 与库仑场梯度 $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ 相互作用产生的能量移动约为

$$\Delta E_Q \approx Q \left\langle \frac{\partial E_z}{\partial z} \right\rangle. \quad (\text{采用原子单位})$$

其中 $\left\langle \frac{\partial E_z}{\partial z} \right\rangle$ 为核所产生的库仑场梯度在 Ω^- 所在位置的平均值.

$$\left\langle \frac{\partial E_z}{\partial z} \right\rangle \approx - \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle,$$

于是
$$\Delta E_Q \approx - Q \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle.$$

对于所考虑的奇异原子, 其长度和能量单位分别是

$$a = \frac{\hbar^2}{me^2} = 1.61 \times 10^{-12} \text{ cm},$$

$$\varepsilon = \frac{me^4}{\hbar^2} = 8.91 \times 10^4 \text{ eV},$$

当 $n=10, l=9$ 时, 由题给出公式容易算出 $\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle \approx 1 \text{ a.u.}$, 而

$Q \approx 10^{-28} \text{ cm}^2 \approx 10^{-3} \text{ a.u.}$, 故

$$\Delta E_Q \approx 10^{-3} \text{ a.u.} \approx 10^2 \text{ eV}.$$

该原子从 $n=11$ 到 $n=10$ 态跃迁的总跃迁能量为

$$\Delta E = Z^2 \frac{m}{m_e} \times 13.6 \times \left(\frac{1}{10^2} - \frac{1}{11^2} \right) \approx 10^5 \text{eV}. \quad (\text{何小东})$$

1059 (Wis, 1976)

碳- μ 原子从 $n=3$ 到 $n=2$ 的跃迁发出光子的能量是多少? (用氢原子从 $n=2$ 到 $n=1$ 的电子跃迁的 γ 能量表示) 已知 $\frac{m_\mu}{m_e} = 210$.

解: 碳- μ 原子能级 $E_n(\mu) = \frac{Z^2 m_\mu}{m_e} E_n(H)$, 这里 $E_n(H)$

为氢原子能级, $Z=6$.

碳- μ 原子从 $n=3$ 到 $n=2$ 的跃迁发出的光子的能量为

$$\Delta E = \frac{Z^2 m_\mu}{m_e} [E_3(H) - E_2(H)].$$

因 $E_n(H) \propto \frac{1}{n^2}$, 故 $E_3(H) - E_2(H) = \frac{5}{27} [E_2(H) - E_1(H)]$,

于是:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{5 Z^2 m_\mu}{27 m_e} [E_2(H) - E_1(H)] \\ &= 1400 [E_2(H) - E_1(H)], \end{aligned}$$

其中 $E_2(H) - E_1(H)$ 就是氢原子从 $n=2$ 到 $n=1$ 的电子跃迁的 γ 能量. (胡平)

1060 (MIT, 1983)

μ 介子原子. μ 介子是寿命相对较长的基本粒子之一, 其质量是电子的 207 倍, 电荷及其它相互作用性质都与电子

完全相同。中性原子中的一个电子被一个 μ 介子取代，就形成了 μ 介子原子。(a) μ 介子氢原子基态的结合能是多少？(b) μ 介子锂原子的化学性质最类似哪种化学元素？为什么？

解：(a) 类比于氢原子基态的结合能 $E_H = \frac{m_e e^4}{2\hbar^2}$ ，可得 μ

介子氢原子结合能为

$$E_\mu = \frac{m_\mu e^4}{2\hbar^2} = 207 E_H = 2.82 \times 10^3 \text{ eV}.$$

(b) μ 介子锂原子最类似化学元素 He。因为 μ 介子和电子是不同的费米子，各自填充自己的轨道。两个电子处于基态，恰如在氦原子中一样。 μ 介子处于自己的基态，其轨道半径比电子的小 207 倍。化学性质是由外层电子数目决定的，因此 μ 介子锂原子类似于 He 元素，而不是 Li 元素。

(任 勇)

1061 (Wis, 1978)

$n=1, l=0$ 的 $\mu^+ e^-$ 原子处于外磁场中的哈密顿量为

$$H = a \mathbf{S}_\mu \cdot \mathbf{S}_e + \frac{|e|\hbar}{m_e c} \mathbf{S}_e \cdot \mathbf{B} - \frac{|e|\hbar}{m_\mu c} \mathbf{S}_\mu \cdot \mathbf{B}.$$

(a) 哈密顿量中各项的物理意义是什么？哪些项表示原子与外场的相互作用？

(b) 选择 \mathbf{B} 沿着 z 轴，利用记号 (F, M_F) (这里 F 为 $\mathbf{S}_\mu + \mathbf{S}_e$)，则 $(1, +1)$ 是 H 的本征态，试证之并给出本征值。

(c) 外加射频场可引起到 $(0, 0)$ 态的跃迁。定性地讨论如何利用衰变 $\mu^+ \rightarrow e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu$ 来观察这种跃迁。

解：(a) 哈密顿量第一项 $a \mathbf{S}_\mu \cdot \mathbf{S}_e$ 描述 μ^+ 与 e^- 两粒子

之间的电磁作用。后两项分别描述电子， μ^+ 子与外磁场的相互作用。

(b) 以 Ψ 表示 $F=1, M_F=+1$ 的态。由 $F = S_e + S_{\mu}$ 得：

$$S_{\mu} \cdot S_e = \frac{1}{2}(F^2 - S_e^2 - S_{\mu}^2),$$

故
$$S_{\mu} \cdot S_e \Psi = \frac{1}{2}(F^2 \Psi - S_e^2 \Psi - S_{\mu}^2 \Psi) = \frac{\hbar^2}{4} \Psi.$$

在 S_e^z, S_{μ}^z 共同本征矢表象中，旋量表示的 Ψ 态为 $\Psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_e \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mu}$ 。

$$S_e^z \Psi = \frac{\hbar}{2} \sigma_e^z \Psi = \frac{\hbar}{2} \Psi,$$

$$S_{\mu}^z \Psi = \frac{\hbar}{2} \sigma_{\mu}^z \Psi = \frac{\hbar}{2} \Psi.$$

于是
$$\begin{aligned} H\Psi &= aS_e \cdot S_{\mu} \Psi + \frac{e}{m_e c} B S_e^z \Psi - \frac{e}{m_{\mu} c} B S_{\mu}^z \Psi \\ &= a \frac{\hbar^2}{4} \Psi + \frac{e}{m_e c} B \cdot \frac{\hbar}{2} \Psi - \frac{e}{m_{\mu} c} B \cdot \frac{\hbar}{2} \Psi \\ &= \left(\frac{1}{4} a \hbar^2 + \frac{eB}{2m_e c} \hbar - \frac{eB}{2m_{\mu} c} \hbar \right) \Psi. \end{aligned}$$

可见 $(1, +1)$ 确实是 H 的本征态，本征值为

$$\frac{1}{4} a \hbar^2 + \frac{eB}{2m_e c} \hbar - \frac{eB}{2m_{\mu} c} \hbar.$$

(c) 态 $(1, +1)$ 表示两个粒子自旋方向相同，态 $(0, 0)$ 表示两粒子自旋方向相反。由于这两个态中 μ^+ 子的极化方向刚好相反(相对于电子自旋方向)，所以这两种情况下极化 μ^+ 子衰变出来的正电子相对电子自旋取向也相反，则它们分

别湮灭为 3γ 和 2γ . 从而观察 μ^+ 衰变 $\mu^+ \rightarrow e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu$ 后湮灭为 2γ 的情况便能够探测 $(1, +1)$ 到 $(0, 0)$ 的跃迁.

(范扬眉 钱剑朋)

1062 (Wis, 1975)

μ 原子是指 μ 介子(质量 $m_\mu = 206 m_e$)被原子核束缚在氢原子轨道上. 由于核电荷分布于半径为 R 的区域中, μ 介子原子的能级相对于点核近似有一位移. 有效库仑位势可以近似为

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{Ze^2}{r}, & (r \geq R), \\ -\frac{Ze^2}{R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right), & (r \leq R). \end{cases}$$

(a) 定性说明 $1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 3d, \mu$ 原子能级的绝对移动和相互间的相对移动, 从物理上解释这些位移的不同, 画出这些态没有扰动和有扰动时的能级图.

(b) 给出由于核不是点电荷而引起的 $1s$ 态能量变化的一级表达式.

(c) 估计在假设 $\frac{R}{a_\mu} \ll 1$ 下的 $2s-2p$ 能级移动, 其中 a_μ

是 μ 介子原子的“玻尔半径”, 试表明这一移动给出 R 的一种量度.

(d) 什么时候(b)的方法不能用? 这个方法是低估还是高估了能级移动? 从物理上解释答案.

需用到的一些公式:

$$\Psi_{1s} = 2N_0 \exp\left(-\frac{r}{a_\mu}\right) Y_{00}(\theta, \phi), \quad N_0 = \frac{1}{a_\mu^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Psi_{2s} = \frac{1}{\sqrt{8}} N_0 \left(2 - \frac{r}{a_\mu}\right) \exp\left(-\frac{r}{2a_\mu}\right) Y_{00}(\theta, \phi),$$

$$\Psi_{2p} = \frac{1}{\sqrt{24}} N_0 \frac{r}{a_\mu} \exp\left(-\frac{r}{2a_\mu}\right) Y_{1m}(\theta, \phi).$$

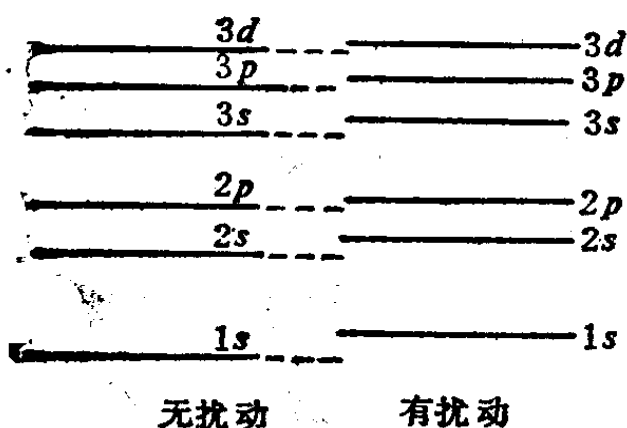


图1.19

解: (a) 核电荷分布在有限体积中时, 在核内电场强度比点核模型时为小, 能级升高. 相比之下, $1s$ 态在核内几率最大, 受影响最大, 能级移动也最大, 其次为 $2s, 3s, 2p, 3p, 3d$. 能级图如图1.19所示

(b) 由于原子核有限大小而引入的微扰势为

$$\Delta V = \begin{cases} 0, & (r > R), \\ \frac{Ze^2}{R} \left(\frac{r^2}{2R^2} - \frac{3}{2} + \frac{R}{r} \right), & (r < R). \end{cases}$$

如果只计及一级近似, 则可得到 $1s$ 态能级移动为

$$\begin{aligned} \Delta E_{1s} &= \int \Psi_{1s}^* \Delta V \Psi_{1s} d\tau \\ &= \frac{Ze^2}{R} 4N_0^2 \int_0^R \exp\left(-\frac{2r}{a_\mu}\right) \cdot \left(\frac{r^2}{2R^2} - \frac{3}{2} + \frac{R}{r} \right) r^2 dr \\ &\approx \frac{Ze^2}{R} 4N_0^2 \int_0^R \left(\frac{r^2}{2R^2} - \frac{3}{2} + \frac{R}{r} \right) r^2 dr \\ &= \frac{2Ze^2 R^2}{5a_\mu^3}. \end{aligned}$$

上面的计算中已假定 $\frac{R}{a_\mu} \ll 1$.

$$\begin{aligned}
 (c) \quad \Delta E_{2s} &= \int \Psi_{2s}^* \Delta V \Psi_{2s} d\tau \\
 &= \frac{Z e^2 N_0^2}{8R} \int_0^R \left(2 - \frac{r}{a_\mu}\right)^2 \exp\left(-\frac{r}{a_\mu}\right) \\
 &\quad \cdot \left(\frac{r^2}{2R^2} - \frac{3}{2} + \frac{R}{r}\right) r^2 dr \\
 &\approx \frac{Z e^2 N_0^2}{8R} \int_0^R 4 \left(\frac{r^2}{2R^2} - \frac{3}{2} + \frac{R}{r}\right) r^2 dr \\
 &= \frac{Z e^2 R^2}{20 a_\mu^3}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta E_{2p} &= \int \Psi_{2p}^* \Delta V \Psi_{2p} d\tau \\
 &= \frac{Z e^2 N_0^2}{24 a_\mu^2 R} \int_0^R r^2 \exp\left(-\frac{r}{a_\mu}\right) \cdot \left(\frac{r^2}{2R^2} - \frac{3}{2} + \frac{R}{r}\right) r^2 dr \\
 &\approx \frac{Z e^2 N_0^2}{24 a_\mu^2 R} \int_0^R r^2 \left(\frac{r^2}{2R^2} - \frac{3}{2} + \frac{R}{r}\right) r^2 dr \\
 &= \frac{3Z e^2 R^4}{3360 a_\mu^5} \ll \Delta E_{2s}.
 \end{aligned}$$

于是 $2s-2p$ 的能级相对移动为

$$\Delta E_{s,p} \approx \Delta E_{2s} = \frac{Z e^2 R^2}{20 a_\mu^3}.$$

由此可见, 从能级相对移动的大小可以得到 R .

(d) 对于较大的核电荷 Z , $a_\mu = \frac{\hbar^2}{Z m_\mu e^2}$ 较小, 此时 $\frac{R}{a_\mu}$

►1, 按照 (b) 中的结果, 有:

$$\Delta E_{1s} = \frac{2Z e^2 R^2}{5 a_\mu^3} = \frac{4}{5} |E_{1s}^0| \left(\frac{R}{a_\mu}\right)^2 > |E_{1s}^0|,$$

$$\left(E_{1s}^0 = -\frac{m_\mu Z^2 e^4}{2\hbar^2} \right).$$

即 $E_{1s} = E_{1s}^0 + \Delta E_{1s} > 0$, 这与实际情况是矛盾的, 因此 (b) 中方法所得到的 ΔE_{1s} 偏高. 这种情况的出现, 是由于在 (b) 中波函数展开 $\exp(-\frac{2\gamma}{a_\mu})$ 只取了零级量. 若取高级小量,

则还以使修正量降低, 结果与实际接近.

(范扬眉 胡 平)

1063 (Ber, 1975)

负 μ 介子 (μ^-) 被铝原子 ($Z=13$) 俘获, μ^- 进入“电子云”后, 与铝核形成类氢 μ 原子. μ 子质量是 105.7 MeV . (a) 计算 μ 原子从 $3d$ 态衰变时发出的光子的波长 (以 \AA 为单位). (要求计算结果达到计算尺的精度, 忽略核的运动); (b) 计算上述 $3d$ 态 μ 原子的平均寿命, 已知氢原子在 $3d$ 态的平均寿命是 $1.6 \times 10^{-8} \text{ s}$.

解: $3d$ 态有 $3^2D_{5/2}$ 和 $3^2D_{3/2}$ 两个能级. $3p$ 态有 $3^2P_{3/2}$ 和 $3^2P_{1/2}$, $3s$ 态是 $3^2S_{1/2}$, $2p$ 态有 $2^2P_{3/2}$ 和 $2^2P_{1/2}$, $2s$ 态是 $2^2S_{1/2}$, $1s$ 态是 $1^2S_{1/2}$.

可能发生的跃迁有 $3^2D_{5/2} \rightarrow 3^2P_{3/2}$, $3^2D_{5/2} \rightarrow 2^2P_{3/2}$, $3^2D_{3/2} \rightarrow 3^2P_{1/2}$, $3^2D_{3/2} \rightarrow 2^2P_{3/2}$, $3^2D_{3/2} \rightarrow 2^2P_{1/2}$, $3^2P_{3/2} \rightarrow 3^2S_{1/2}$, $3^2P_{3/2} \rightarrow 2^2S_{1/2}$, $3^2P_{3/2} \rightarrow 1^2S_{1/2}$, $3^2P_{1/2} \rightarrow 2^2S_{1/2}$, $3^2P_{1/2} \rightarrow 1^2S_{1/2}$, $3^2S_{1/2} \rightarrow 2^2P_{3/2}$, $3^2S_{1/2} \rightarrow 2^2P_{1/2}$, $2^2P_{3/2} \rightarrow 2^2S_{1/2}$, $2^2P_{3/2} \rightarrow 1^2S_{1/2}$, $2^2P_{1/2} \rightarrow 1^2S_{1/2}$.

$$(a) \text{ 设 } E_0 = -\frac{2\pi^2 m_\mu e^4 Z^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} = -13.6 \times \frac{105.7}{0.511} \times 13^2$$

$= 4.754 \times 10^5 \text{ eV}$, 则

$$E = E_0 \left[\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha^2 Z^2}{n^3} \left(\frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right) \right],$$

$$\Delta E(3^2D_{5/2} \rightarrow 3^2P_{3/2}) = 26.42 \text{ eV},$$

$$\Delta E(3^2D_{5/2} \rightarrow 2^2P_{3/2}) = 6.608 \times 10^4 \text{ eV},$$

$$\Delta E(3^2D_{3/2} \rightarrow 3^2P_{1/2}) = 79.27 \text{ eV},$$

$$\Delta E(3^2D_{3/2} \rightarrow 2^2P_{3/2}) = 6.596 \times 10^4 \text{ eV},$$

$$\Delta E(3^2D_{3/2} \rightarrow 2^2P_{1/2}) = 6.632 \times 10^4 \text{ eV},$$

$$\Delta E(3^2P_{3/2} \rightarrow 3^2S_{1/2}) = 79.27 \text{ eV},$$

$$\Delta E(3^2P_{3/2} \rightarrow 2^2S_{1/2}) = 6.632 \times 10^4 \text{ eV},$$

$$\Delta E(3^2P_{3/2} \rightarrow 1^2S_{1/2}) = 4.236 \times 10^5 \text{ eV},$$

$$\Delta E(3^2P_{1/2} \rightarrow 2^2S_{1/2}) = 6.624 \times 10^4 \text{ eV},$$

$$\Delta E(3^2P_{1/2} \rightarrow 1^2S_{1/2}) = 4.235 \times 10^5 \text{ eV},$$

$$\Delta E(3^2S_{1/2} \rightarrow 2^2P_{3/2}) = 6.598 \times 10^5 \text{ eV},$$

$$\Delta E(3^2S_{1/2} \rightarrow 2^2P_{1/2}) = 6.624 \times 10^4 \text{ eV},$$

$$\Delta E(2^2P_{3/2} \rightarrow 2^2S_{1/2}) = 267.5 \text{ eV},$$

$$\Delta E(2^2P_{3/2} \rightarrow 1^2S_{1/2}) = 3.576 \times 10^5 \text{ eV},$$

$$\Delta E(2^2P_{1/2} \rightarrow 1^2S_{1/2}) = 3.573 \times 10^5 \text{ eV}.$$

根据 $\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{1.243 \times 10^4}{\Delta E(\text{eV})} \text{ \AA}$, 可算出衰变中发出的光子波

长有: 0.0293 \AA , 0.0348 \AA , 0.187 \AA , 0.188 \AA , 46.5 \AA ,
 157 \AA , 470 \AA .

(b) 自发跃迁几率 $P \propto \frac{e^2 \omega^3}{\hbar c^3} R^2$,

其中: $\omega \propto \frac{m_\mu (Ze^2)^2}{\hbar^3}$, $R \propto \frac{\hbar^2}{m_\mu Ze^2}$

于是 $P \propto \frac{m_\mu (Ze^2)^4}{\hbar^5}$.

平均寿命 $\tau = \frac{1}{P} \propto \frac{1}{m_\mu (Ze^2)^4}$. 设氢原子在 $3d$ 态的平均寿命

为 τ_0 , 则该 μ 原子 $3d$ 态的平均寿命为

$$\tau = \frac{m_e}{m_\mu} \cdot \frac{1}{Z^4} \tau_0 = 2.5 \times 10^{-15} \text{s}. \quad (\text{胡 平})$$

1064 (Pri, 1981)

一个测量核电荷半径的方法是研究奇异原子的特征 X 射线. (a) 计算 μ^- 在带电荷为 Ze 的核场中的能级, 假设为点核; (b) 现假设 μ^- 完全在核内, 计算能级. 假定核是电荷为 Ze 的均匀带电球, 半径为 ρ ; (c) 用 (a) 或 (b) 中的近似, 估计 μ^- 介子 $^{208}_{82}\text{Pb}$ 的 K X 射线的能量, 讨论这些近似的正确性.

已知 $m_\mu = 200m_e$.

解: (a) μ^- 在带电荷为 $+Ze$ 的核场中的能级为

$$\begin{aligned} E_n &= Z^2 \frac{m_\mu}{m_e} E_n(H) = -Z^2 \times 200 \times \frac{13.6}{n^2} \\ &= -\frac{2.72 \times 10^3}{n^2} Z^2 \text{ (eV)}, \end{aligned}$$

($E_n(H)$: 氢原子能级).

(b) μ^- 在半径为 ρ 的均匀带电球内运动, 其势能为

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{\rho} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2\rho^2} \right).$$

即 μ^- 介子在固有频率为 $\omega = \sqrt{Ze^2/m_\mu \rho^3}$ 的各向同性的谱

振子势中运动，其能级为

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{3}{2} \right) - \frac{3Ze^2}{2\rho}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

其中 $\rho \approx r_0 A^{\frac{1}{3}} = 1.2 \times 10^{-13} A^{\frac{1}{3}} \text{ cm}$.

(c) X射线的 K 线系是 $n=1$ 以外各层电子跃迁到 $n=1$ 壳层的结果。下面考虑 K_α 线，已知 $Z=82$ ， $A=208$ 。

用(a)即点核模型，得X射线能量为

$$\begin{aligned} \delta E = E_2 - E_1 &= -2.72 \times 10^3 Z^2 \left(\frac{1}{2^2} - 1 \right) \\ &= 1.37 \times 10^7 \text{ eV}. \end{aligned}$$

用(b)即谐振子模型，得：

$$\delta E = E_2 - E_1 = \hbar\omega,$$

因 $\omega = \sqrt{Ze^2/m_\mu \rho^3} = 1.70 \times 10^{22} \text{ s}^{-1}$,

故 $\delta E = 1.056 \times 10^{-27} \times 1.70 \times 10^{22}$
 $= 1.80 \times 10^{-5} \text{ erg} = 1.12 \times 10^7 \text{ eV}.$

讨论：由于 μ^- 介子的质量较大，所以它有相当大的几率停留在核内，这使得原子核的有效电荷数 $Z^* < Z$ ，由此看来，从点核模型得到的 K X射线能量显然是偏高的。另一方面，从谐振子模型得到的结果则低估了 K X射线的能量，因为 μ^- 介子并不是完全呆在核内，它也有一定的几率处在核外。随着核电荷数 Z 的增大， μ^- 介子处在核外的几率急速下降，所以说，此刻谐振子模型比点核模型更接近于实际情况。

(叶 坚)

1065 (Wis, 1973)

有人建议通过研究由 π^+ ($m_{\pi^+} = 273.2 m_e$) 和 μ^- (m_{μ^-}

$= 206.77 m_e$) 组成的原子的性质来测量 π 介子的电荷半径。假设 π 介子的所有电荷均匀地分布在半径为 $r_0 = 10^{-13} \text{ cm}$ 的球壳上, μ 介子是一个点电荷。试把位势表示成一个点电荷的库仑势加上一个微扰, 并用微扰理论计算 $1s-2p$ 能级间隔 Δ 移动的百分数(忽略自旋轨道耦合及拉姆移动)。给定:

$$a_0 = \hbar^2 / m e^2,$$

$$R_{10}(r) = \left(\frac{1}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} 2 \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right),$$

$$R_{21}(r) = \left(\frac{1}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{r}{a_0} \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

解: 势函数的形式为

$$V(r) = \begin{cases} -e^2/r, & (r > r_0), \\ -e^2/r_0, & (r < r_0), \end{cases}$$

于是可将哈密顿写成 $H = H_0 + H'$, 其中 H_0 为 π 介子是点电荷时的哈密顿量, H' 为微扰项, 其形式为

$$H' = \begin{cases} 0, & (r > r_0), \\ e^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right), & (r < r_0). \end{cases}$$

由 H' 引起的 $1s$ 能级的移动为(只考虑一级修正)

$$\begin{aligned} \Delta E_{1s} &= \int \Psi_{1s}^* H' \Psi_{1s} d\tau = \int_0^{r_0} R_{10}^2(r) e^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) r^2 dr \\ &\approx \frac{2e^2 r_0^3}{3a_0^3}. \quad (\text{利用 } r_0 \ll a_0) \end{aligned}$$

$2p$ 能级移动为

$$\Delta E_{2p} = \int \Psi_{2p}^* H' \Psi_{2p} d\tau = \int_0^{r_0} R_{21}^2(r) e^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) r^2 dr$$

$$\approx \frac{e^2 r_0^4}{480 a_0^5} \ll \Delta E_{1s}$$

故 $\Delta E_{1s} - \Delta E_{2p} \approx \Delta E_{1s} = \frac{2e^2 r_0^2}{3a_0^3}$

不考虑微扰时, $1s-2p$ 能级间隔为

$$\Delta = -\frac{me^4}{2\hbar^2} \left(\frac{1}{2^2} - 1 \right) = \frac{3me^4}{8\hbar^2} = \frac{3e^2}{8a_0}$$

于是求得 $1s-2p$ 能级间隔移动的百分数为

$$\frac{\Delta E_{1s} - \Delta E_{2p}}{\Delta} \approx \frac{2e^2 r_0^2}{3a_0^3} / \frac{3e^2}{8a_0} = \frac{16}{9} \left(\frac{r_0}{a_0} \right)^2$$

由于 $m = \frac{m_{\mu^-} m_{\pi^+}}{m_{\mu^-} + m_{\pi^+}} = 117.7 m_e$

故 $a_0 = \hbar^2 / me^2 = 4.49 \times 10^{-11} \text{ cm}$,

最后得到:

$$\frac{\Delta E_{1s} - \Delta E_{2p}}{\Delta} = 8.8 \times 10^{-6} = 8.8 \times 10^{-4} \% \quad (\text{林 辰})$$

1066 (CUS, 1985)

一个 μ^- 介子(质量 $M \approx 210 m_e$, 这里 m_e 是电子质量)被俘获在一个质子的圆轨道上, 其初态半径 $R \approx$ 电子绕质子运动的玻尔半径. 估计需要多少时间(用 R , M 和 m_e 表示) μ^- 将辐射掉足够多的能量而达到其基态, 可利用经典论证, 包括非相对论加速带电粒子的辐射功率表达式.

解: μ^- 的能量为

$$E(r) = K(r) - \frac{e^2}{r} = -\frac{e^2}{2r}, \quad (K(r) \text{ 为动能项}),$$

辐射功率 $P = \frac{2e a^2}{3c^3}$, 式中 a 为加速度.

$$a = \frac{E_{\text{coul}}}{M} = \frac{e^2}{r^2 M},$$

由 $\frac{dE}{dt} = -P$ 得到:

$$\frac{e^2}{2r^2} \frac{dr}{dt} = -\frac{2e^2}{3c^3} \cdot \frac{e^4}{r^4 m^2},$$

于是有

$$R^3 - a_B^3(\mu^-) = \frac{2}{3c^3} \cdot \frac{e^4}{M^2} t,$$

式中: $a_B(\mu^-)$ 是 μ^- 的玻尔半径, R 为初始轨道半径. 由题设, $R \approx a_B(e) \approx 2 \times 10^2 a_B(\mu^-)$, 于是:

$$t \approx \frac{M^2 c^3 R^3}{4e^4} \approx 6 \times 10^{-7} \text{ s.} \quad (\text{杨永安})$$

1067. (Col, 1978)

考虑一个假设的宇宙, 其中的电子自旋是 $3/2$ 而不是 $1/2$. (a) 在无外场时, 画出氢原子 $n=3$ 的能级图. 以光谱符号标记每一个态并指出哪些态有相同的能量 (忽略超精细结构); (b) 定性讨论双电子 He 的能级, 尤其指出与自旋 $\frac{1}{2}$ 的电子的 He 之差别; (c) 此时周期表中头两个惰性气体元素的原子序数是多大?

解: (a) 对电子自旋为 $3/2$ 的氢原子, $n=3$ 时, 各量子数取值如第85页的表所示:

如果不考虑精细结构, 则这些态是简并的, 能量

$E_0 = -\frac{RhcZ^2}{n^2}$ ($Z=1, n=3, R$ 为里德堡常数, c 为光速). 计及

相对论效应及自旋-轨道耦合作用, 能量变为 $E = E_0 + \Delta E$, 此时简并消除, 不同的态具有不同的能量.

n	l	j
	0	3/2
	1	5/2, 3/2, 1/2
	2	7/2, 5/2, 3/2, 1/2

(1) $l=0$ 时, $j = \frac{3}{2}$, 这时只存在相对论效应引起的修

正 ΔE_r :

$$\Delta E = \Delta E_r = -A \left(\frac{1}{l + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right) = -\frac{7}{4} A,$$

其中 $A = Rhc \alpha^2 Z^4 / n^3$.

(2) $l \neq 0$ 时, 除相对论效应引起的修正 ΔE_r 外, 还有自旋-轨道耦合作用引入的修正 $\Delta E_{l,s}$:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \Delta E_r + \Delta E_{l,s} \\ &= -A \left(\frac{1}{l + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right) + A \frac{1}{l \left(l + \frac{1}{2} \right) (l+1)} \\ &\quad \cdot \frac{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)}{2}. \end{aligned}$$

(i) $l=1$ 时, $\Delta E = \left[\frac{1}{6} j(j+1) - \frac{33}{24} \right] A,$

$j = \frac{5}{2}, \quad \Delta E = \frac{1}{12} A,$

$$j = \frac{3}{2}, \quad \Delta E = -\frac{3}{4} A,$$

$$j = \frac{1}{2}, \quad \Delta E = -\frac{5}{4} A.$$

$$(ii) \quad l = 2 \text{ 时, } \Delta E = \left[\frac{j(j+1)}{30} - \frac{19}{40} \right] A,$$

$$j = \frac{7}{2}, \quad \Delta E = \frac{1}{20} A,$$

$$j = \frac{5}{2}, \quad \Delta E = -\frac{11}{60} A,$$

$$j = \frac{3}{2}, \quad \Delta E = -\frac{7}{20} A,$$

$$j = \frac{1}{2}, \quad \Delta E = -\frac{9}{20} A.$$

根据以上计算结果，容易得到氢原子 $n=3$ 能级，如图 1.20 所示。

(b) 第 87 页的表给出了 He (电子自旋 $S = \frac{3}{2}$) 和 He (电子自旋 $S = \frac{1}{2}$) 的单电

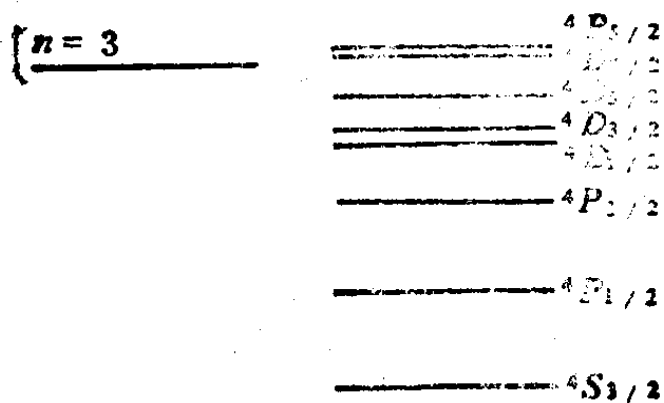


图 1.20

子能级。

(c) 当电子自旋 $S = 3/2$ 时，头两个惰性气体元素的原

		He ($S = \frac{3}{2}$)	He ($S = \frac{1}{2}$)
$n_1 = 1$	原子总自旋	$S = 0, 2$	$S = 0$
$n_2 = 1$	能 级	$^1S_0, ^5S_2$	1S_0
$l = 0$			
$n_1 = 1$	原子总自旋	$S = 0, 1, 2, 3$	$S = 0, 1$
$n_2 = 2$	能 级	$l_2 = 0: ^1S_0, ^3S_1, ^5S_2, ^7S_3$ $l_2 = 1: ^1P_1, ^3P_{2,1,0},$ $^5P_{3,2,1}, ^7P_{4,3,2}$	$l_2 = 0: ^1S_0, ^3S_1$ $l_2 = 1: ^1P_1, ^3P_1$
$l_2 = 0, 1$			

子序数分别为 4 和 20.

(斯其苗 叶 坚)

1068 (Wis, 1973)

图 1.21 表示氦原子的基态和前四个激发态. (a) 写出每个能级的光谱学符号; (b) 指出允许的偶极跃迁, 在图中用箭头表示出来; (c) 定性说明为何能级 B 低于能级 C .

解: (a) A : $1s^2$ 构成 1^1s_0 . B : $1s2s$ 构成 2^1s_0 . C : $1s2p$ 构成 2^1P_1 , D : $1s2s$ 构成 2^3s_1 . E : $1s2p$ 构成 $2^3P_{2,1,0}$.

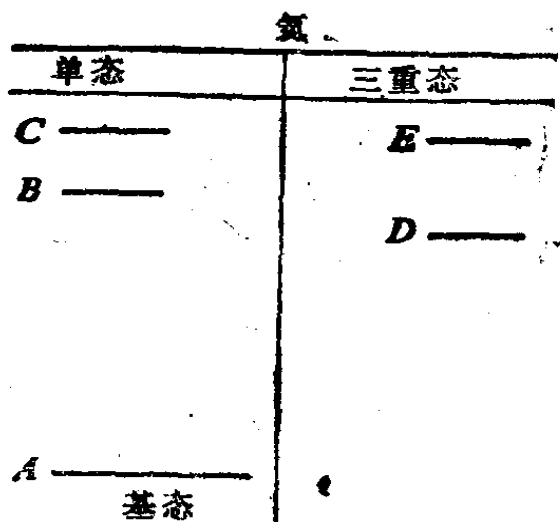


图 1.21

(b) 如图 1.22 所示.

(c) 在 C 态中有一个电子被激发到 $2p$ 轨道, 该轨道的能量比 $2s$ 轨道高, 主要原因是屏蔽效应对 p 轨道更大.

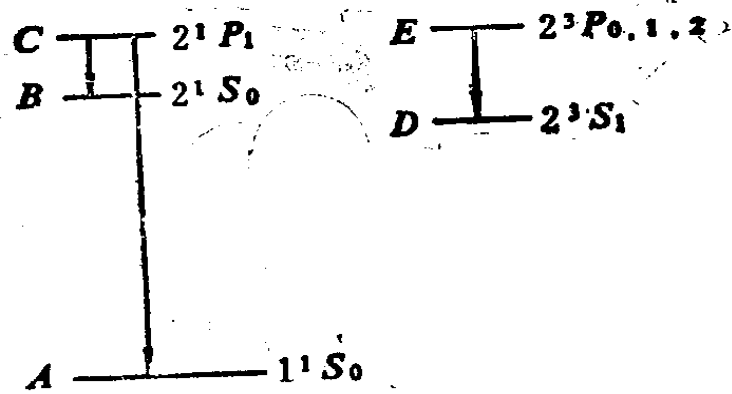


图 1.22

(胡 平)

1069 (Wis, 1976)

氢原子的基态和一组 $n=2$ 的激发态如图 1.23 所示。

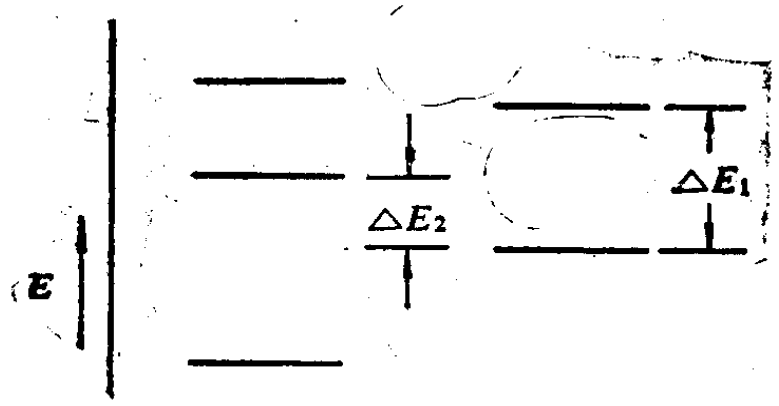


图 1.23

(a) 标出所有 5 个能级的光谱学符号; (b) 解释 ΔE_1 劈裂; (c) 解释 ΔE_2 劈裂; (d) 指出所有的允许跃迁。

解: (a) 见前题。

(b) ΔE_1 是相同 S , 不同电子组态之间的能量差别, 3P 态属于 $1s2p$ 组态, 也就是有一个电子处于 $2p$ 轨道, 其能量比 $2s$ 轨道要高, 主要是由原子实对 s, p 电子的屏蔽效应的差别引起的。

(c) ΔE_2 是同一电子组态中相同 L , 不同 S 能级间的劈裂, 其本质也是由交换库仑能引起的.

(d) 见前题.

(钱剑明)

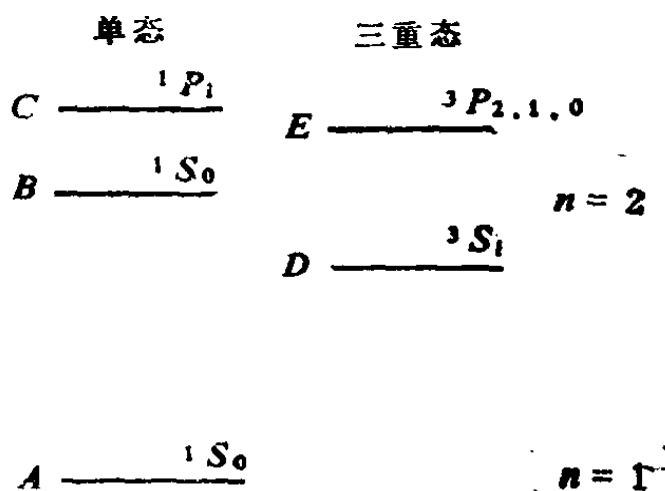
1070 (Wis, 1979)

图 1.24 为氦原子基态及头四个激发态的能级. (a) 给出所有能级的光谱符号;

(b) 列出这些能级间允许的电偶极跃迁;

(c) 列出这些能级间可能的双光子跃迁;

(d) 对于能量足够大的电子, 它们与基态原子碰撞会使哪些能级布居较多的电子?



解: (a), (b) 可参

见 1068 题.

图 1.24

(c) 双光子跃迁的选择定则为

(1) 宇称守恒;

(2) $\Delta J = 0, \pm 2$.

故可能的双光子跃迁有

$$(1s2s)^1S_0 \rightarrow (1S^2)^1S_0$$

本来 $(1s2s)^3S_1$ 通过双光子跃迁到 $(1S^2)^1S_0$ 也是可能的, 跃迁速率在 $10^{-8} \sim 10^{-9} \text{s}^{-1}$ 之间, 但 Gabriel 和 Jordan 指出 (Gabriel, A. H. & Jordan, C. 1969, *Nature, Lond.* 221, 947), 氦的 2^3S_1 能级以 $1.27 \times 10^{-4} \text{s}^{-1}$ 的速率用磁偶极辐射方式跃迁到 1^1S_0 , 这种跃迁被归因于对磁偶极算符的与自旋有关的相对论修正, 从而 $\Delta S = 0$ 定则可不满足.

(d) $(1s2s)^1S_0$ 与 $(1s2s)^3S_1$ 为亚稳态,故碰撞的结果是,除基态外这两个能级上也出现较多的电子. (杨永安)

1071 (Wis, 1971)

示意画出 He 原子的低能级,指出原子组态并给出这些能级的光谱记号. 写出一些允许的发射跃迁和吸收跃迁及一些禁戒的跃迁.

解: He 原子能级如图 1.25 所示

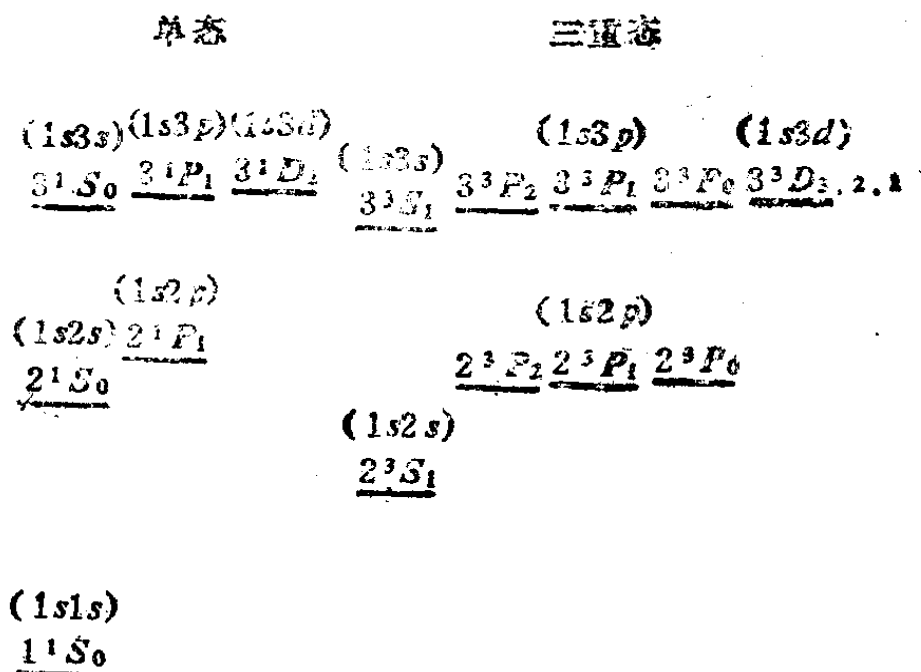


图 1.25

允许的发射跃迁有: $3^1S_0 \rightarrow 2^1P_1$, $3^3S_1 \rightarrow 2^3P_{2,1,0}$, $2^1P_1 \rightarrow 1^1S_0$, $2^1P_1 \rightarrow 2^1S_0$, $3^3D_1 \rightarrow 2^3P_0$, $3^3D_{2,1} \rightarrow 3^3P_1$, $3^3D_{3,2,1} \rightarrow 3^3P_2$, $3^1D_2 \rightarrow 3^1P_1$, $3^1D_2 \rightarrow 2^1P_1$, $3^3D_1 \rightarrow 2^3P_{1,0}$, $3^3D_{3,2,1} \rightarrow 2^3P_2$, $3^3P_{2,1} \rightarrow 2^3P_1$.

相反的跃迁均为允许的吸收跃迁.

禁戒的跃迁有: $2^3S_1 \rightarrow 1^1S_0$, $2^1P_1 \rightarrow 2^3S_1$. (钱剑明)

1072 (Ber, 1975)

画出氦原子在 $1s3d$ 态的能级图，考虑库仑相互作用及自旋-轨道耦合。

解：见 1102 题。 (胡 平)

1073 (Buf, 1980)

对 He 原子，光谱学上感兴趣的态是，至少有一个电子在基态上的态。可以证明，近似波函数可由正交轨道构成如下形式：

$$\Psi_{\pm}(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\Phi_{1s}(1)\Phi_{nlm}(2) \pm \Phi_{nlm}(1)\Phi_{1s}(2)]$$

× 自旋波函数，

仲态对应 + 号，而正态对应 - 号。

(a) 对哪个态来说，正态或相应的仲态具有最高能量？

(b) 提出一个论证，表明当 n 取大数时，相应的正态和仲态之间的能差变小。

解：(a) 当两个电子都处于 $1s$ 轨道时，它们的自旋必定是反平行的。只有一个电子留在基态轨道上时，正态的能量要低些，因为此时正态的位置波函数是

$$\Psi_{-}(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\Phi_{1s}(1)\Phi_{nlm}(2) - \Phi_{nlm}(1)\Phi_{1s}(2)].$$

当两个电子处于同一位置时 $\Psi_{-}(1,2) = 0$ ，也就是说两个电子接近的机会少，而对仲态，接近的机会要多些。所以前者的库仑排斥势能比后者小。

(b) 当 n 大时，两个电子的平均距离增大，在 (a) 中所提及的正、仲两种状态的差别将减小，因此能量差减小。

(a) 在非相对论近似下画出并定性说明氦原子 $n=1, 2$ 的能级图; (b) 画出并讨论氢原子的类似的能级图, 包括实际上存在的所有能级劈裂.

解: (a) 对于氦原子基态 ($n=1$), 两个电子都处在能量最低的 $1s$ 状态. 由泡利原理, 可知这两个电子的自旋相互反平行, 所以基态是单态. 由于电子之间的静电排斥, 氦原子的基态能量将大于 $8E_0$, 这里 $E_0 = -13.6\text{eV}$ 代表氢原子的基态能量.

对 $n=2$ 的激发态, 其中一个电子激发到较高的外层轨道, 另一电子仍保留在 $1s$ 轨道. 此时两个电子的自旋可以相互平行, 也可以相互反平行, 于是形成了两套不同的能级 (单态、三重态). 对于单态, 两自旋相互反平行的电子靠近

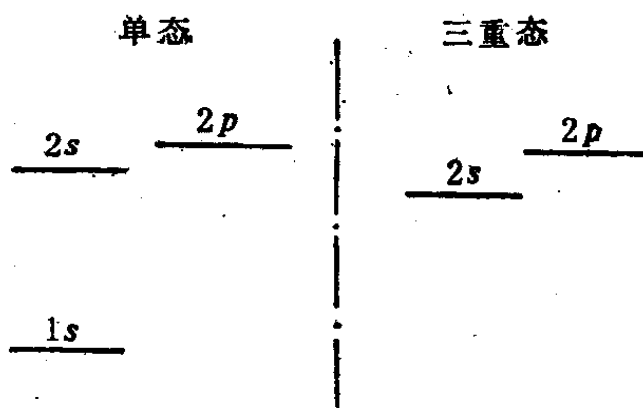


图 1.26

的几率较大, 斥力也大, 所以能级就较高, 而相应的三重态的能级就要稍低一些 (图 1.26).

(b) 如果仅考虑核与电子之间库仑相互作用, 那么氢原子的能量由玻尔能级

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2 n^2}$$

给出, 能级只与主量子数 n 有关.

相对论效应以及电子的自旋轨道相互作用给出氢原子能级的精细结构, 此时 $n=2$ 的能级劈裂为两个相距 $\approx \alpha^2 E_2$ 的

子能级, α 为精细结构常数.

考虑到电子与自身发生的辐射场之间的相互作用及真空极化, 前面简并的 $2S_{1/2}$ 和 $2P_{1/2}$ 态将产生分裂, 此即拉姆移动, 量级为 $m_e c^2 \alpha^5$.

此外, 电子轨道自旋运动与核磁矩的相互作用给出能级的超精细结构, 能级分裂的量级约为拉姆移动的 1/10 (对同一 n 而言). 考虑上述各种影响后, 氢原子能级如图 1.27

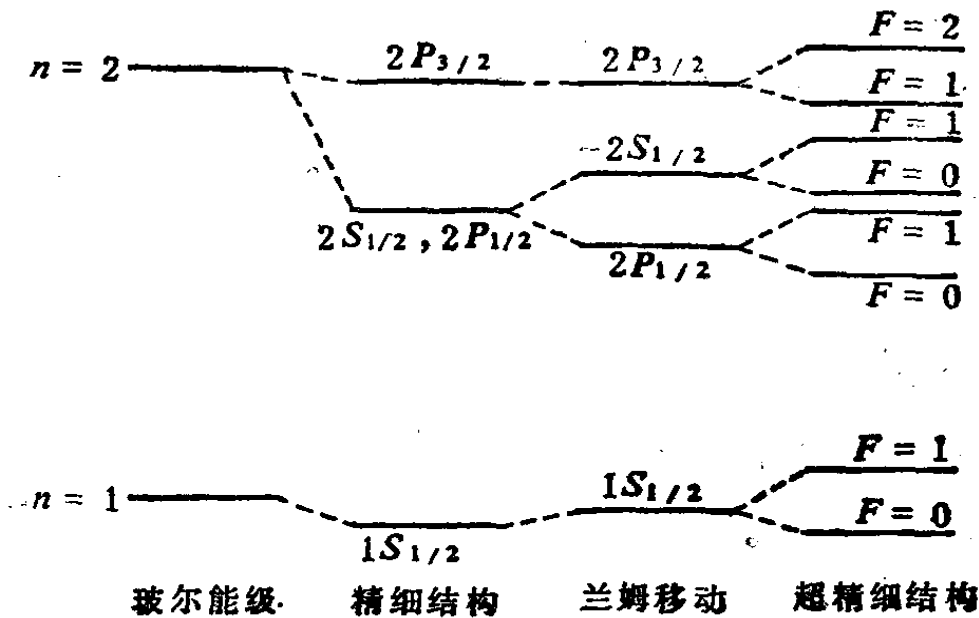


图 1.27

所示.

(杨永安)

1075 (Pri, 1982)

(a) 氢原子 $1s2s$ 组态有两个谱项 3S_1 和 1S_0 , 它们位于基态之上约 20 eV 处. 解释光谱项符号的意义, 给出这两个谱项能量分裂的原因, 估计分裂值的量级.

(b) 列出下列原子基态组态和最低能量谱项: He, Li,

Be, B, C, N, O, F, A. 可能用到的数据:

$$a_0 = 0.529 \times 10^{-8} \text{ cm},$$

$$\mu_B = 9.27 \times 10^{-21} \text{ erg/G},$$

$$e = 4.8 \times 10^{-10} \text{ esu}.$$

解: (a) 光谱项符号, 以 3S_1 为例, 3 表示三重态, 1 表示原子总角动量 $J=1$, S 表示轨道量子数 $l=0$.

1S_0 , 3S_1 两个谱项的能量分裂是由于电子自旋态不同而引起的静电作用的差别.

具有两个价电子的原子都有单态和三重态, 由量子力学微扰理论可求得氦的第一激发态近似能量为

$$E(\text{单态}) = -\frac{Z^2 e^2}{2a_0} \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + J + K,$$

$$E(\text{三重态}) = -\frac{Z^2 e^2}{2a_0} \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + J - K,$$

其中 J 为电子云间的平均库仑能量, K 为交换能. 它们之间的裂距为

$$\Delta E = 2K,$$

$$\begin{aligned} \text{而 } K &= e^2 \iint d^3x_1 d^3x_2 \frac{1}{r_{12}} \Psi_{100}(r_1) \Psi_{200}(r_1) \Psi_{100}(r_2) \Psi_{200}(r_2) \\ &= \frac{4Z^6 e^2}{a_0^6} \left[\int_0^\infty r_1^2 \left(1 - \frac{Zr_1}{2a_0}\right) \exp\left(-\frac{3Zr_1}{2a_0}\right) dr_1 \right]^2 \\ &\approx \frac{2^4 Z e^2}{3^6 a_0}. \end{aligned}$$

故 $\Delta E \approx 1 \text{ eV}$.

(b)	原子	基态电子组态	光谱项
	He	$1s^2$	1S_0
	Li	$1s^2 2s^1$	${}^2S_{1/2}$

Be	$1s^2 2s^2$	1S_0
B	$1s^2 2s^2 2p^1$	$^2P_{1/2}$
C	$1s^2 2s^2 2p^2$	3P_0
N	$1s^2 2s^2 2p^3$	$^4S_{3/2}$
O	$1s^2 2s^2 2p^4$	3P_2
F	$1s^2 2s^2 2p^5$	$^2P_{3/2}$
A	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$	1S_0

(章 俭)

1076 (? , ?)

利用变分法、微扰法、加和法则或其它方法估计 He 原子的下列特性：(a) 将两电子从基态电离所需的最小能量；(b) 将一个电子从最低的 F 态 ($L=3$) 电离所需的最小能量；(c) He 原子基态的电极化率 (最低 P 单态的能量比基态能量高 21 eV)。

解：(a) 微扰法：

氦原子哈密顿为

$$H = \frac{p_1^2}{2m_e} + \frac{p_2^2}{2m_e} - \frac{2e^2}{r_1} - \frac{2e^2}{r_2} + \frac{e^2}{r_{12}} = H_0 + \frac{e^2}{r_{12}}$$

其中：
$$H_0 = \frac{p_1^2}{2m_e} + \frac{p_2^2}{2m_e} - \frac{2e^2}{r_1} - \frac{2e^2}{r_2}$$

下面将库仑排斥看作微扰。于是基态的零级近似波函数为

$$\Psi = \Psi_{100}(r_1)\Psi_{100}(r_2),$$

其中： $\Psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{a}\right)^{3/2} e^{-2r/a}$, (a , 玻尔半径) 由此得

到主项能量 E_0 和微扰修正能量 E_1 为

$$E^{(0)} = 2 \left(-\frac{2^2 e^2}{2a} \right) = -\frac{4e^2}{a},$$

和
$$E^{(1)} = e^2 \int \Psi^2 \frac{1}{r_{12}} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 = \frac{5e^2}{4a}.$$

因此在计及一级修正时，氦原子的基态能量为

$$E = -\frac{4e^2}{a} + \frac{5e^2}{4a} = -74.8(\text{eV}).$$

由此可知，将两电子从基态电离所需的最小能量为 E_I ：

$$E_I = -E = 74.8 \text{ eV}.$$

变分法：

取试探波函数为
$$\Psi = \frac{\lambda^3}{\pi a^3} e^{-\lambda(r_1+r_2)/a}$$

$$\begin{aligned} \bar{E} = H &= \iint \Psi^* \left(-\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla_2^2 - \frac{2e^2}{r_1} - \frac{2e^2}{r_2} + \frac{e^2}{r_{12}} \right) \\ &\quad \cdot \Psi d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \left(Z\lambda^2 - \frac{27}{4} \lambda \right) E_H, \quad E_H = 13.6 \text{ eV}. \end{aligned}$$

基态能量 E_0 为 H 的极小值。由 $\frac{\partial H}{\partial \lambda} = 0$ 得 $\lambda = \frac{27}{16}$ ，于是

基态能量 E 为

$$E = -\frac{729}{128} E_H \approx 77.5 \text{ eV}.$$

(b) 对 F 态，因为在 F 轨道上的电子离原子核较远，因此可以将 $1s$ 电子和核看作一个带电荷 $-e$ 的整体。于是这个高激发态原子可看作一个氢原子。此时 $n=4$ 。于是最小电离能 E_I 为

$$E_1 = -E = \frac{13.6}{16} \text{ eV} = 0.85 \text{ eV}.$$

(c) 我们求出氢原子受到微扰后的能量的普遍表达式:

(i) 微扰能量和微扰波函数.

微扰波函数:

$$\Psi = \Psi_0 + \sum_{n \neq 0} \frac{u_{n0}}{E_0 - E_n} \Psi_n,$$

其中 u 为微扰势, u_{n0} 为相应的矩阵元. 为简单计, 可改写为

$$\Psi \approx \Psi_0 \left(1 + \frac{u - u_{00}}{E'} \right),$$

其中 $u = \sum_{n \neq 0} u_{n0} \Psi_n = \Psi_0 (u - u_{00})$, E' 是 $E_0 - E_n$ 的平均值.

$$\text{能量 } E = E_0 + u_{00} + \sum_{n \neq 0} \frac{(u_{n0})^2}{E_0 - E_n}.$$

(ii) 变分法求平均电子动能 \bar{T} :

$$\bar{H} = \frac{\int \Psi_0^* (1 + \lambda u) \hat{H} \Psi_0 (1 + \lambda u) d\tau}{\int \Psi_0^* \Psi_0 (1 + \lambda u) d\tau}.$$

动能

$$\hat{T} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \nabla_i^2, \quad (\text{原子单位})$$

i : 电子编号.

$$\bar{T} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \int \{ \Psi_0^* (1 + \lambda u) \nabla_i^2 (1 + \lambda u) \Psi_0 + \Psi_0 (1 + \lambda u) \nabla_i \cdot (1 + \lambda u) \Psi_0^* \} d\tau$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \int \{ \Psi_0^* (1 + \lambda u)^2 \nabla_i^2 \Psi_0 + \Psi_0 (1 + \lambda u)^2 \nabla_i \Psi_0^* \\ + 2\lambda \Psi_0 \Psi_0^* (1 + \lambda u) \nabla_i^2 u + 2\lambda (1 + \lambda u) [\nabla_i (\Psi_0^* \Psi_0) \cdot \nabla_i u] \} d\tau,$$

由于 $\{ \nabla_i (\Psi_0^* \Psi_0 (1 + \lambda u) \nabla_i u) \}$

$$= \Psi_0^* \Psi_0 (1 + \lambda u) \nabla_i^2 u + (1 + \lambda u) [\nabla_i (\Psi_0^* \Psi_0) \cdot \nabla_i u \\ + \lambda \Psi_0^* \Psi_0 (\nabla_i u \cdot \nabla_i u)],$$

$$\text{另外 } \{ \Psi_0^* \Psi_0 (1 + \lambda u) \nabla_i^2 u + (1 + \lambda u) [\nabla_i (\Psi_0^* \Psi_0) \cdot \nabla_i u] \} d\tau \\ = -\lambda \int \Psi_0^* \Psi_0 (\nabla_i u \cdot \nabla_i u) d\tau.$$

利用此二式得

$$\hat{T} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \int [\Psi_0^* (1 + \lambda u)^2 \nabla_i^2 \Psi_0 + \Psi_0 (1 + \lambda u)^2 \nabla_i^2 \Psi_0^*] d\tau \\ + \frac{\lambda^2}{2} \sum_{i=1}^2 \int \Psi_0^* \Psi_0 (\nabla_i u \cdot \nabla_i u) d\tau.$$

(iii) 总能量 E : 总的哈密顿量: $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{T} + u$. 由于 \hat{V} 和 $(1 + \lambda u)$ 对易, 所以有

$$\bar{H} = E_0 + \frac{\frac{1}{2} \int (1 + \lambda u)^2 (\Psi_0^* \hat{H} \Psi_0 + \Psi_0 \hat{H} \Psi_0^*) d\tau}{\int (1 + \lambda u)^2} \\ + \frac{\frac{1}{2} \lambda^2 \sum_{i=1}^2 \int \Psi_0^* \Psi_0 (\nabla_i u \cdot \nabla_i u) d\tau}{\int \Psi_0^* \Psi_0 d\tau}.$$

$\hat{H} \Psi_0 = E_0 \Psi_0$, 所以有

$$\bar{H} = E_0 + \frac{\int \Psi_0^* u (1 + \lambda u)^2 \Psi_0 d\tau}{\int (1 + \lambda u)^2}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \lambda^2 \frac{\sum_{i=1}^2 \int \Psi_0^* \Psi_0 (\nabla_i u \cdot \nabla_i u) d\tau}{\int \Psi_0^* \Psi_0 d\tau} \\
= E_0 & + \frac{(u)_{00} + 2\lambda(u^2)_{00} + \lambda^2(u^3)_{00}}{1 + 2\lambda(u)_{00}} \\
& + \frac{\frac{1}{2} \lambda^2 \sum_{i=1}^2 [\nabla_i u \cdot \nabla_i u]_{00} d\tau}{\lambda^2 (u^2)_{00}}
\end{aligned}$$

其中 $(u)_{00} = \int \Psi_0^* u \Psi_0 d\tau$, $(u^2)_{00} = \int \Psi_0^* u^2 \Psi_0 d\tau$ 等等。略去三级项: $(u^3)_{00}$, $(u)_{00}^3 \dots$ 。即可求得。

(iv) 能量改正 ΔE

$$\Delta E \approx (u)_{00} + 2\lambda(u^2)_{00} - 2\lambda(u_{00})^2 + \frac{1}{2} \lambda^2 \sum_{i=1}^2 [(\nabla_i u \cdot \nabla_i u)]_{00}.$$

变分法:

$$\frac{\delta \Delta E}{\delta \lambda} = 0,$$

$$2(u^2)_{00} - 2(u)_{00}^2 + \lambda \sum_{i=1}^2 [\nabla_i u \cdot \nabla_i u]_{00} = 0,$$

于是得到:

$$\lambda = 2 \frac{(u)_{00}^2 - (u^2)_{00}}{\sum_{i=1}^2 [(\nabla_i u \cdot \nabla_i u)]_{00}}.$$

最后得到:

$$\Delta E = (u)_{00} - 2 \frac{[(u)_{00}^2 - (u^2)_{00}]^2}{\sum_{i=1}^2 [(\nabla_i u \cdot \nabla_i u)]_{00}}.$$

如果电场 ϵ 沿 z 轴, 则有:

$$u = -\varepsilon \sum_{i=1}^2 Z_i = -\varepsilon z.$$

并且矩阵元 $(u)_{00}$ 为零. 于是有

$$\Delta E \approx -2\varepsilon^2 \frac{[(Z^2)_{00}]^2}{n}$$

其中 n 为电子数.

(v) 极化率

$$\alpha = \frac{4[(Z^2)_{00}]^2}{n}.$$

氦原子的基态波函数 Ψ_0 为

$$\Psi_0 = \frac{Z^*}{\pi} \exp[-Z^*(r_1 + r_2)],$$

$$Z^* = \frac{27}{16}, \quad n = 2.$$

于是得到:

$$\alpha = 0.98 \text{ 原子单位}, \quad \alpha = 0.98a_0^3. \quad (\text{叶 坚})$$

1077 (Chi, 1982)

简要回答下列问题, 如有可能, 试给出定量表述及推理过程. (a) 一束中性原子通过斯忒恩-盖拉赫装置, 观察到 5 条等间距的谱线, 该原子的总角动量是多少? (b) 处于 3P_0 态的原子的磁矩是多少? (不考虑核效应). (c) 为什么惰性气体化学性质不活泼? (d) 估计房间内黑体辐射能量密度, 以 erg/cm^3 为单位. 假设墙是黑的. (e) 氢气放电时, 观察到相应于 $2^2P_{1/2} \rightarrow 1^2S_{1/2}$ 和 $2^2P_{3/2} \rightarrow 1^2S_{1/2}$ 跃迁的两条谱线, 估计它们的强度比. (f) 什么原因使得氦原子中出现二套独立的能级系统, 即单线和三线系统?

解: (a) 原子总角动量为 $P_J = \sqrt{J(J+1)} \hbar$, 而该中性原

子通过斯忒恩-盖拉赫装置后分成 5 条等间距的谱线，故有 $5 = 2J + 1$, $J = 2$. 于是 $P_J = \sqrt{6} \hbar$.

(b) 磁矩 $M = g\mu_B J$, 因 $J = 0$, 所以 $M = 0$.

(c) 惰性气体原子核外电子为满壳层, 不能再接纳电子, 因此不易与其它原子形成化学键.

(d) 能量密度 $u = \frac{4}{c} J_\nu$, J_ν 为辐射通量密度. 根据斯

忒藩-玻耳兹曼定律:

$$J_\nu = \sigma T^4 = 5.669 \times 10^{-5} T^4 \text{ (erg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}\text{)}.$$

对于室温 $T = 300\text{K}$, 可得:

$$\begin{aligned} u &= \frac{4}{3 \times 10^{10}} \times 5.669 \times 10^{-5} \times 300^4 \\ &= 6.12 \times 10^{-5} \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-3}. \end{aligned}$$

(e) $2^2P_{1/2}$ 的简并度为 2, $2^2P_{3/2}$ 的简并度为 4, 而它们与 $1^2S_{1/2}$ 态能量差大致相等, 所以它们的自发跃迁的强度比为 1 : 2.

(f) 由于氦原子中两电子 $L-S$ 耦合, 形成 $S = 0$ 的单态和 $S = 1$ 的三重态, 而它们之间的跃迁是禁戒的, 所以出现了两套独立的单线、三线系统. (黄晓舟)

1078 (Wis, 1970)

(a) 试就元素 H, He, Li, Be, B, C 和 N 列一张原子基态表, 以光谱学符号标出这些态, 只给出 S 态的 J . (b) 陈述洪德定则并说明其物理基础.

解: (a) 原子基态表:

元素:	H	He	Li	Be	B	C	N
基态:	$^2S_{1/2}$	1S_0	$^2S_{1/2}$	1S_0	$^2P_{1/2}$	3P_0	$^4S_{3/2}$

(b) 洪德定则的陈述请参见 1008 题。洪德定则是在总结了若干实验结果后得到的经验规律，因此它的适用范围受到很多限制。首先它只能定出最低能态，至于严格的能级顺序，定则在许多场合并不适用。例如，对于碳的 $1s^2 2s 2p^2$ 组态，实验上谱项的顺序是：

$${}^3S < {}^3D < {}^1D < {}^3P < {}^1P,$$

虽然 3S 有较高的重数，它却在 1D 谱项之上。

对于能量较高的激发态，定则也不一定适用。例如镁原子，当一个电子被激发到 d 轨道时， 1D 态的能量比 3D 态低（见褚圣麟《原子物理学》p.148 图 5.2）。不过，洪德定则对决定除重元素外的原子基态是可靠的。

洪德定则可以大致解释如下。由于泡利原理的限制，自旋相同的同科电子倾向于彼此回避，从而使它们之间的库仑排斥最小。所以平行自旋数目最多的态（即 S 最大），其能量将是最低的。至于 L 值取最大的说法，物理原因尚不能直观说明。

(叶 坚)

1079 (Wis, 1971)

(a) 写出电子组态 $2p3p$ 在 LS 耦合下的光谱项。画出能级草图并说明能级分裂的原因。(b) 这些谱项之间电偶极跃迁的选择定则是什么？(c) 由 3P_1 态 * 通过电偶极将跃迁到本题禁戒项中的哪些项？

解：(a) 电子组态 $2p3p$ 在 LS 耦合下形成的光谱项为

单态： 1S_0 ， 1P_1 ， 1D_2 。

三态： 3S_1 ， ${}^3P_{2,1,0}$ ， ${}^3D_{3,2,1}$ 。

* 泛指不属于前述电子组态的谱项——编者注。

图 1.28 给出 $2p3p$ 组态在 LS 耦合下的能级草图, 但未画出不同 J 值能级的分裂.

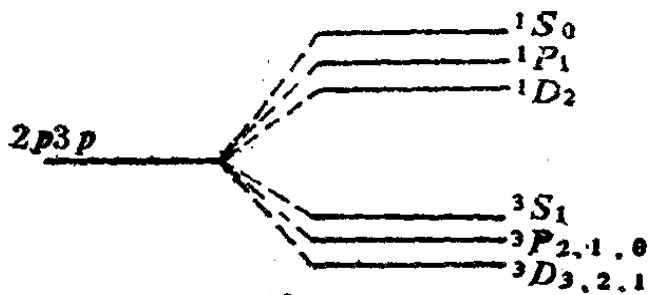


图 1.28

不同 S 谱项之间的分裂是由电子之间的交换库仑能引起的. 同一 S , 不同 L 谱项之间的分裂则是

由直接库仑排斥引起的. 具有相同 L, S 的谱项, 不同的 J 所导致的分裂是由轨道自旋耦合即磁相互作用引起的.

(b) 电偶极跃迁法则: (i) 要有宇称的变化: 偶 \leftrightarrow 奇. (ii) 需满足以下条件:

$$\begin{cases} \Delta S = 0, \\ \Delta L = 0, \pm 1, \\ \Delta J = 0, \pm 1, \quad (0 \leftrightarrow 0). \end{cases}$$

本题的谱项之间没有电偶极跃迁, 因为这些谱项具有相同的宇称.

(c) 若谱项 3P_1 具有负宇称, 则能跃迁到 (b) 中的禁戒谱项 ${}^3S_0, {}^3P_{2,1,0}, {}^3D_{2,1}$. (钱剑明)

1080 (Chi, 1979)

铅蒸气原子的基态组态为 $6s^2 6p^2$. (a) 假设 LS 耦合, 列出这一组态各能级的量子数; (b) 说明这些能级之间的跃迁是否光学允许的, 即是否属于电偶极型的, 给出理由; (c) 确定在磁场 B 中的能级总数; (d) 确定和磁场 B 一起再加一弱电场 E 时的能级总数.

解: (a) 一对同科 p 电子所能构成的状态为 ${}^1S_0, {}^3P_{2,1,0},$

1D_2 .

上述各耦合态构成 5 个能级.

(b) 上述各耦合态形成的能级是属于同一电子组态的, 它们具有相同的宇称, 它们之间的电偶极跃迁是禁戒的.

(c) 在外磁场 B 存在的情况下, 每一个总角动量量子数为 J 的能级分裂成 $2J+1$ 个具有不同 M_J 的子能级. 由此可知, 1S_0 , 3P_0 均不分裂, 而 3P_1 分裂成 3 个能级, 3P_2 , 1D_2 分别都劈裂为 5 个能级, 这样能级总数可达 15 个.

(d) 外加电场 E 将影响 (c) 中分裂出来的各个能级, 但由于这时各能级已完全非简并, 故外加电场并不造成新的能级分裂, 能级总数还是 15. (林 辰)

1081 (Col, 1980)

考虑一个多电子原子, 它的电子排布如下: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p 4d$. (a) 这个原子是否处于基态? 如果不是基态, 基态的电子排布又是怎样的? (b) 考虑原子的 LS 耦合, 试画出一个粗略的能级图, 先画出忽略微扰的单一能级, 再依重要次序计入微扰, 给出微扰项并估计劈裂, 注意在不同的阶段以适当的光谱记号标明劈裂项. (c) 此状态如果有向基态的允许跃迁, 则是哪些?

解: (a) 不是基态. 基态最外层电子组态是 $4p^2$, 相应原子态有 1D_2 , $^3P_{2,1,0}$, 1S_0 , 其中 3P_0 能量最低.

(b) LS 耦合能量修正可写成:

$$\Delta E = a_1 \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 + a_2 \mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{l}_2 + AL \cdot \mathbf{S}$$

$$= \frac{a_1}{2} [S(S+1) - s_1(s_1+1) - s_2(s_2+1)]$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{a_2}{2} [L(L+1) - l_1(l_1+1) - l_2(l_2+1)] \\
 & + \frac{A}{2} [J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)],
 \end{aligned}$$

式中系数 a_1, a_2, A 可为正值或负值，具体的能级标绘分三步，即依次对 S, L, J 引起的劈裂作图（图1.29）。（可参阅 B. 凯格纳克，J. C. 斐贝-斐罗拉著《近代原子物理学》下册第82, 83页。）

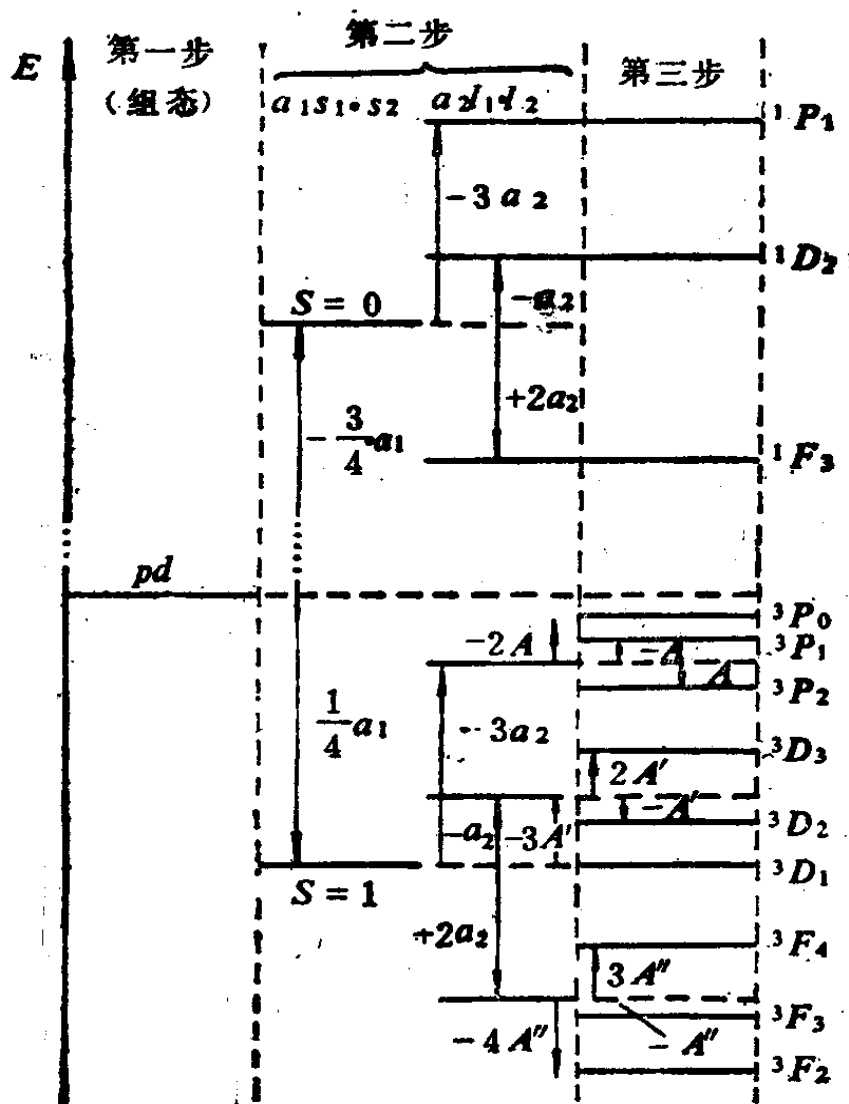


图 1.29

(c) 电偶极跃迁选择定则为

(i) $\Delta S = 0$,

(ii) $\Delta L = 0, \pm 1, \Delta J = 0, \pm 1 (0 \leftrightarrow 0)$.

由此可知, 下列跃迁都是允许的:

$$\begin{aligned}
 (4p4d)^3P_1 &\rightarrow (4p^2)^3P_0, & (4p4d)^3P_1 &\rightarrow (4p^2)^3P_1, \\
 (4p4d)^3P_1 &\rightarrow (4p^2)^3P_2, & (4p4d)^3P_2 &\rightarrow (4p^2)^3P_1, \\
 (4p4d)^3P_2 &\rightarrow (4p^2)^3P_2, & (4p4d)^3P_0 &\rightarrow (4p^2)^3P_1, \\
 (4p4d)^3D_1 &\rightarrow (4p^2)^3P_1, & (4p4d)^3D_1 &\rightarrow (4p^2)^3P_2, \\
 (4p4d)^3D_2 &\rightarrow (4p^2)^3P_1, & (4p4d)^3D_2 &\rightarrow (4p^2)^3P_2, \\
 (4p4d)^3D_3 &\rightarrow (4p^2)^3P_2, & (4p4d)^1P_1 &\rightarrow (4p^2)^1S_0, \\
 (4p4d)^1P_1 &\rightarrow (4p^2)^1D_2, & (4p4d)^1D_2 &\rightarrow (4p^2)^1D_2, \\
 (4p4d)^1F_3 &\rightarrow (4p^2)^1D_2. & &
 \end{aligned}$$

(王力军)

1082 (Col, 1983)

Be 的基态有两个 1s 电子和两个 2s 电子, 最低的激发态是其中一个 2s 电子被激发到 2p 轨道上而形成的. (a) 列出这些态, 并给出每个态的角动量量子数; (b) 按能量增大的次序排列这些态, 指出简并情况, 从物理上说明这样排列的原因并估算不同态之间的能量劈裂大小.

解: (a) 对于基态, $L = 0, S = 0$, 故 $J = 0$, 光谱项为 1S_0 . 最低的激发态的总自旋量子数可取 $S = 0$ 或 1, 而 $L = 1$. 当 $S = 0$ 时, $J = 1$, 从而构成独态 1P_1 . 当 $S = 1$ 时, $J = 2, 1, 0$, 构成三重态 $^3P_{2,1,0}$.

(b) 各个态按能量增大的排列次序是:

$$^1S_0 < ^3P_0 < ^3P_1 < ^3P_2 < ^1P_1^*$$

• 实际上洪德定则只能确定最低能态. 因 1P_1 以前的顺序往往是不可靠的. ——编者注

其中 3P_2 是 5 度简并, 3P_1 和 1P_1 都是 3 度简并, 以上各态的排列顺序, 是不难从洪德定则得出的, 因为从同一电子组态构成的, 具有相同 L 值的能级中, 重数最高 (S 值最大) 的能级最低.

1S_0 与 1P_1 之间的能量差为 eV 量级, 三重态和独态之间的能量差也是 eV 量级, 但三重态中各个态之间的裂距则很小, 约 10^{-4} — 10^{-5} eV. (管怀群)

1083 (CUS, 1983)

惰性气体原子结构的一个典型特性是, 最高 P 壳层是满的. 例如氖的电子组态为 $1s^2 2s^2 2p^6$. 这种封闭壳层组态的总角动量 J 、总轨道角动量 L 及总自旋角动量 S 都为零.

(a) 解释符号 $1s^2 2s^2 2p^6$ 的意义.

(b) 氖的最低一组激发态相应于一个 $2p$ 电子激发到 $3s$ 轨道. 原子实 ($2p^5$) 的轨道、自旋角动量和被移走的电子的相应量大小相等而方向相反. 于是, 对于它与激发电子的相互作用, 原子实可作为 p 波电子处理.

假定取 LS (罗素-桑德斯) 耦合, 计算这组激发态的量子数 (L, S, J).

(c) 当一个原子放在磁场强度为 H 的磁场中, 它的能量从 $H=0$ 的情形改变一个 ΔE :

$$\Delta E = \frac{e\hbar}{2mc} gHM.$$

这里 M 可等于 $J, J-1, J-2, \dots, -J$; g 为朗德 g 因子. 试对氖的 $1s^2 2s^2 2p^5 3s$ 组态的 $L=1, S=1, J=2$ 的情形计算 g .

(d) 氖的 $1s^2 2s^2 2p^5 3p$ 电子组态很难用罗素-桑德斯耦

合来描述。一个较好的描述是“对耦合”图式。这里，最外层电子的轨道角动量 L_2 与原子实的总角动量 J_0 耦合，所得矢量 K ($K = J_0 + L_2$) 再与最外层电子的自旋 S_2 耦合而得到原子的总角动量 J 。计算 $1s^2 2s^2 2p^5 3p$ 电子组态的各能级的量子数 J_0, K, J 。

解：(a) $1s^2 2s^2 2p^5$ ：英文字母前的数字表示主量子数 n ，字母给出轨道角动量量子数 l (s, p 相应于 $l=0, 1$)，字母肩上的数字表示各亚层的电子数。

(b) 这组激发态的 (L, S, J) 可为：(1, 1, 2), (1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1)。

(c) 根据公式可算得，当 $L=1, S=1, J=2$ 时，
 $g = \frac{8}{2}$ 。

(d) J_0 的两个可能值为 $\frac{3}{2}$ 和 $\frac{1}{2}$ 。

对 $J_0 = \frac{3}{2}, L_2 = 1$ ，可得 $K = \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$ 。再与 $S_2 = \frac{1}{2}$ 耦合，则有 $J = 3, 2$ (此时 $K = \frac{5}{2}$)， $J = 2, 1$ ($K = \frac{3}{2}$)， $J = 1, 0$ ($K = \frac{1}{2}$)。

对于 $J_0 = \frac{1}{2}, L_2 = 1$ ，有 $K = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$ 。于是， $J = 2, 1$

($K = \frac{3}{2}$)， $J = 1, 0$ ($K = \frac{1}{2}$)。 (杨永安)

一个炉子里有温度为 2000 K 的低压钠原子，现只考虑钠的下列三个能级：

$$1s^2 2s^2 2p^6 3s, \quad {}^2S, \quad 0, \quad (\text{基态})$$

$$1s^2 2s^2 2p^6 3p, \quad {}^2P, \quad 2.10\text{eV},$$

$$1s^2 2s^2 2p^6 4s, \quad {}^2S, \quad 3.18\text{eV}.$$

(a) 出现在发射谱中的光子能量是多少？它们的相对强度为多大？(给出适当的表达式，若时间充分，不妨估计一下近似值)。

(b) 如用具有平坦谱的连续辐射穿过这个炉子，并观察其吸收谱，那么能观察到哪些吸收谱线？求出它们的相对强度。

解：(a) 根据题设：

$$E_0 = 0\text{eV}, \quad E_1 = 2.10\text{eV}, \quad E_2 = 3.18\text{eV}.$$

一共有两个电偶极跃迁，跃迁能量为

$$E_{10} = 2.10\text{eV}, \quad E_{21} = 1.08\text{eV}.$$

由能级 k 至能级 i 的跃迁几率为

$$A_{ik} = -\frac{e^2 \omega_{ki}^3}{3 \hbar c^3} \frac{1}{g_k} \sum_{m_k, m_i} |\langle i m_i | r | k m_k \rangle|^2,$$

式中 $\omega_{ki} = (E_k - E_i)/\hbar$ ， i, k 可理解为总角动量， m_i 和 m_k 为相应的磁量子数，谱线强度为

$$I_{ik} \propto N_k \hbar \omega_{ki} A_{ik},$$

其中 $N_k \propto g_k \exp\left(-\frac{E_k}{kT}\right)$ 是 k 能级上的粒子数；对于 2P 来

说有两个值，即 $J = 3/2, 1/2$ 。若认为两个跃迁矩阵元及其

自旋权重因子近似相等, 则这两条谱线的强度比为

$$\frac{I_{01}}{I_{12}} = \left(\frac{\omega_{10}}{\omega_{21}}\right)^4 \exp\left(\frac{E_{21}}{kT}\right) \approx 10^4.$$

(b) 吸收强度公式:

$$I_{ik} \propto B_{ik} N_k \rho(\omega_{ik}) \hbar \omega_{ik},$$

其中 $B_{ik} = \frac{4\pi^2 e^2}{3\hbar^2} \cdot \frac{1}{g_k} \sum_{m_k, m_i} |\langle im_i | r | km_k \rangle|^2$ 是爱因斯坦系数.

根据题设, 入射光具有平坦谱, 即 $\rho(\omega)$ 为常量. 而吸收谱线有两条: $E_0 - E_1$ 和 $E_1 - E_2$, 于是得到吸收强度比:

$$\frac{I_{10}}{I_{21}} = \frac{B_{10} N_0 \hbar \omega_{10}}{B_{21} N_1 \hbar \omega_{21}} \approx 10^7. \quad (\text{胡 平 范扬眉})$$

1085 (Wis, 1973)

写出 C ($Z=6$) 正确的电子组态. 利用泡利原理推导 4 个外壳层电子的容许电子态, 并用通常的光谱符号表示能级. 根据洪德定则决定能级次序, 与 $(2p)^4$ 电子组态进行比较.

解: C 的电子组态为 $1s^2 2s^2 2p^2$, 可能的电子态有 1S_0 , 3D_2 和 $^3P_{2,1,0}$ (两个 S 电子耦合成的总角动量为零, 故只需考虑两个同科 p 电子的耦合就行了). 根据洪德定则, 能级次序 (由低至高) 为: 3P_0 , 3P_1 , 3P_2 , 1D_2 , 1S_0 .

$(2p)^4$ 所形成的电子态与上述组态所形成的电子态是相同的, 但前者的能量次序与后者稍有差别, 即在 3P 态中总角动量 $J=2$ 的能量最低, $J=0$ 的能量最高. 其余次序不变.

(叶 坚)

1086 (Wis, 1977)

镁的原子序数 $Z=12$.

(a) 画出镁原子能级示意图, 只需显示能级的主要特点, 包括基态和由一个价电子处于 $3s$ 轨道, 另一个价电子处在 $n=3, 4, l=0, 1$ 轨道所形成的激发态. 标明各能级在 LS 耦合下的光谱符号.

(b) 在能级图上指出下列各项 (并作出解释): (1) 一种允许跃迁; (2) 一种禁戒跃迁; (3) 一条相互组合线 (如果存在的话); (4) 一个显示出正常塞曼效应和反常塞曼效应的能级 (如果存在的话).

解: (a) 见图 1.30.

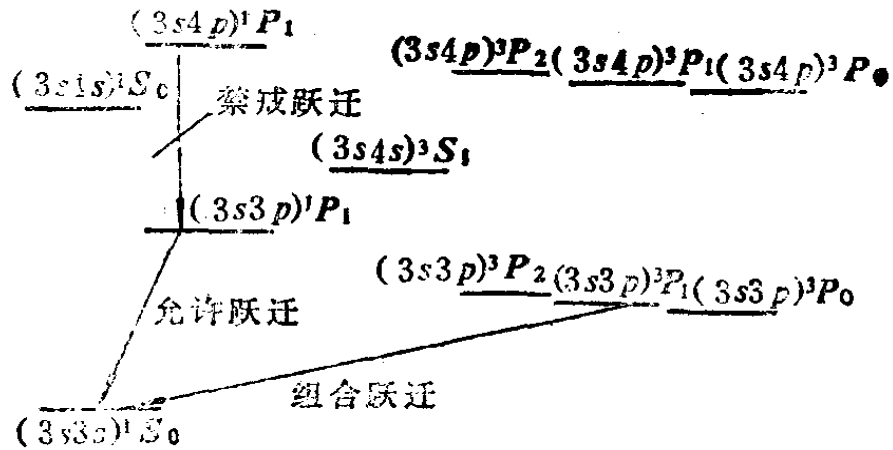


图 1.30

(b) (1) 允许跃迁:

$$(3s3p)^1P_1 \rightarrow (3s3s)^1S_0.$$

(2) 禁戒跃迁 (违背宇称守恒定律):

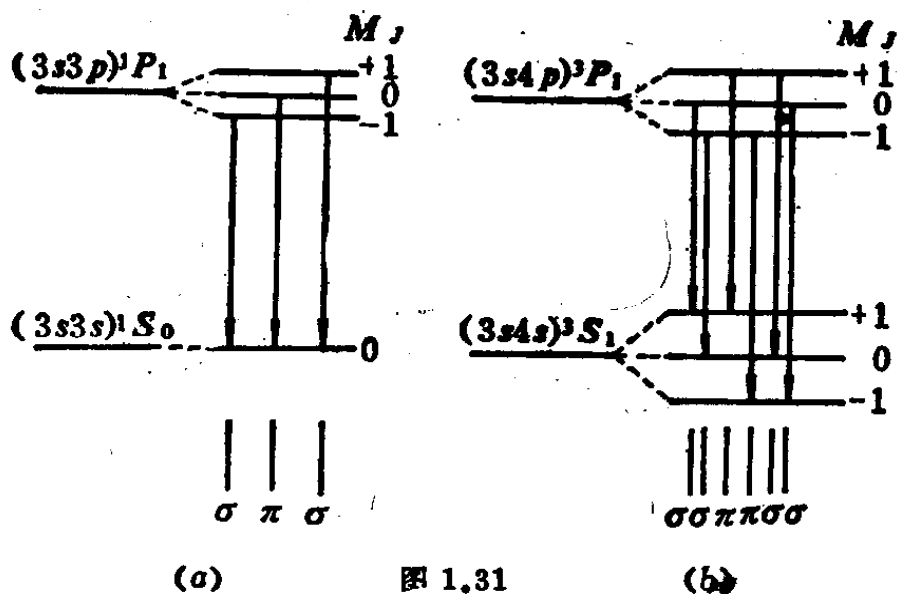
$$(3s4p)^1P_1 \rightarrow (3s3p)^1P_1.$$

(3) 相互组合线:

$$(3s3p)^3P_1 \rightarrow (3s3s)^1S_0.$$

(4) 在磁场中, $(3s3p)^1P_1 \rightarrow (3s3s)^1S_0$ 的跃迁只产生三条谱线, 为正常塞曼效应, 如图 1.31(a) 所示. 而 $(3s4p)^3P_1 \rightarrow (3s4s)^3S_1$ 的跃迁产生六条谱线, 是反常塞曼效应, 如

图 1.31 (b) 所示. 图中 $(3s3p)^1P_1$ 各子能级间距为 $\mu_B B$,



$(3s4p)^3P_1$ 各子能级间距是 $\frac{8}{2} \mu_B B$, 而 $(3s4s)^3S^1$ 各子能级的间距为 $2\mu_B B$. (钱剑明)

1087 (Wis, 1976)

用光谱学记号表示碳原子基态并说明原因.

解: 碳原子基态的电子组态为 $1s^2 2s^2 2p^2$. 根据洪德定则, 原子基态的总自旋应取最大, 并在此前提下总轨道角动量也取最大值, 而总角动量应取最小值, 这是因为 p 轨道不足半满. 下面给出 p 轨道电子填充情况:

$$\begin{array}{ccc} m_l & 1 & 0 & -1 \\ m_s & \uparrow & \uparrow & \end{array}$$

m_l 和 m_s 分别表示轨道和自旋角动量的投影量子数, \uparrow 表示 $m_s = \frac{1}{2}$. 由此可知:

$$(m_l)_{\max} = 1, \quad (m_s)_{\max} = 1.$$

因此原子基态光谱符号为： 3P_0 .

(叶 坚)

1088 (Wis, 1970)

基态碳原子的电子组态为 $1s^2 2s^2 2p^2$ ，其具体含义是什么？在 LS 耦合下，证明与此电子组态对应的光谱项有5个：

$${}^1S_0, {}^1D_2, {}^3P_2, {}^3P_1, {}^3P_0.$$

解：基态碳原子的电子组态 $1s^2 2s^2 2p^2$ 是指碳原子处于最低能量状态时，其核外6个电子在各壳层上的分布为：第一主壳层的 s 轨道上有2个电子；第二主壳层的 s, p 轨道各自都有2个电子。

相应于上述电子组态的光谱项由 p 轨道上的两个同科电子决定。考虑泡利不相容原理后，可得光谱项为： ${}^1S_0, {}^1D_2, {}^3P_2, {}^3P_1, {}^3P_0$ 。

(钱剑明)

1089 (Wis, 1978)

试给出电子组态 $1s^2 2s^2 2p^5 3p^1$ 在 LS 耦合下所有的原子态，并用相应的光谱符号表示之。

解：这个电子组态可以看成是组态 $1s^2 2s^2 2p^5$ 外加一个 $3p$ 电子构成，于是可先求 $1s^2 2s^2 2p^5$ 形成的原子态，然后与 $3p$ 电子耦合。

由于 $2p^5$ 与 $2p^1$ 互补，故电子组态 $1s^2 2s^2 2p^5$ 形成的谱项与电子组态 $1s^2 2s^2 2p^1$ 是相同的，因此下面转化为考虑组态 $1s^2 2s^2 2p^1 3p^1$ 。不难得到，该电子组态在 LS 耦合下形成的原子态为

$${}^3S_1, {}^3P_{2,1,0}, {}^3D_{3,2,1}, {}^1S_0, {}^1P_1, {}^1D_2.$$

这也就是 $1s^2 2s^2 2p^5 3p$ 组态所形成的原子态。

(钱剑明)

1090 (Wis, 1974)

钪原子基态的电子组态为 $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d 4s^2$. (a) 该电子组态可形成哪些谱项? (b) 该电子态包含哪些多重态? 试用光谱学符号表示之. 这些态能量大小的顺序如何? (c) 该基态多重态中的两个最低能级间的分裂间距为 168 cm^{-1} , 求温度为 2000 K 时, 这两个能级上粒子的相对分布.

解: (a) 这个电子组态形成光谱项 2D .

(b) 2D 包含的多重态为 $^2D_{3/2}$ 和 $^2D_{5/2}$, 其中以 $^2D_{3/2}$ 能量较低.

(c) 两能级上粒子数之比为 $\frac{g_1}{g_2} \exp\left(-\frac{\Delta E}{kT}\right)$, 其中:

$g_1 = 4$ 为 $^2D_{3/2}$ 能级的简并度, $g_2 = 6$ 为 $^2D_{5/2}$ 能级的简并度, ΔE 为能级间距.

$$\begin{aligned} \Delta E &= hc\Delta\nu = 6.6 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8 \times 168 \times 10^2 \\ &= 3.3 \times 10^{-21} \text{ J}, \end{aligned}$$

于是得到 $\frac{g_1}{g_2} \exp\left(-\frac{\Delta E}{kT}\right) \approx 0.75$. (钱剑明)

1091 (Ber, 1975)

考虑一个原子或离子中的四个同科 p 电子 (可认为这些电子有相同的径向波函数和相同的轨道角动量 $l = 1$). (a) 在 LS 耦合下, 定出四个电子所有可能的组态并以标准光谱学符号表示之. 指出各种情况下 L, S, J 的值以及态的重数. (b) 对于 $J = 2$ 的各态, 计算朗德 g 因子.

解: (a) 四个同科 p 电子的组态与两个同科 p 电子的情况是一样的, 因此下面将考虑两个同科 p 电子的情形.

右表给出了两个同科 p 电子的轨道角动量量子数. m_{l1}, m_{l2} 分别是两电子轨道角动量投影量子数, 方格中的数值为 $m_l = m_{l1} + m_{l2}$, 该表格中的数值关于对角线对称, 实际上只需考虑任何一侧即可.

$m_{l2} \backslash m_{l1}$	1	0	-1
1	2	1	0
0	1	0	-1
-1	0	-1	-2

当总自旋 $S=0$ 时, 由上表不难得到可能的组态为 1S_0 和 1D_2 . 这两个态都是独态, 其中 $^1S_0: L=J=0$, $^1D_2: L=J=2$.

$S=1$ 时, 受泡利原理限制, 表中对角线上的各个值将不再出现, 此时电子组态为 $^3P_{2,1,0}$. 这些态是三重态, 其中 $^3P_2: L=1, J=2$; $^3P_1: L=1, J=1$; $^3P_0: L=1, J=0$.

$$(b) \quad g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)},$$

对 1D_2 :

$$g = 1 + \frac{2 \times 3 + 0 \times 1 - 2 \times 3}{2 \times 2 \times 3} = 1,$$

对 3P_2 :

$$g = 1 + \frac{2 \times 3 + 1 \times 2 - 1 \times 2}{2 \times 2 \times 3} = 1.5. \quad (\text{胡平})$$

1092 (Wis, 1974)

(a) 给出钠原子双重结构能级 (图1.32) 的光谱学符号. (b) 解释引起能级差 E 的物理机制; (c) 解释引起 ΔE 分裂的物理机制; (d) 求谱线强度之比 $\frac{D_2}{D_1}$ (设 $kT \gg \Delta E$).

解: (a) 见图 1.33.

(b) 能级差 E 是由于原子实的极化与轨道贯穿引起的. 具有不同轨道角动量 l 的轨道引起的原子实的极化和轨道贯穿亦不同, 由此导致能级差 E .

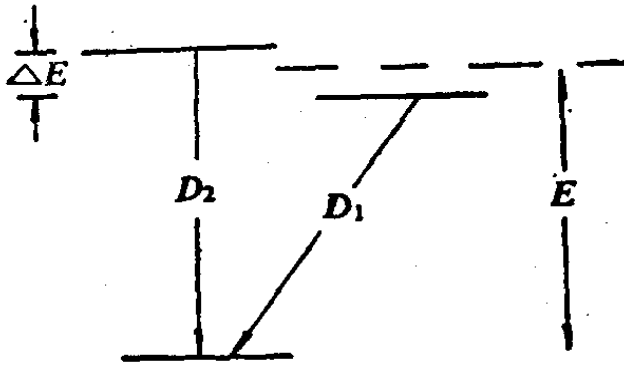


图 1.32

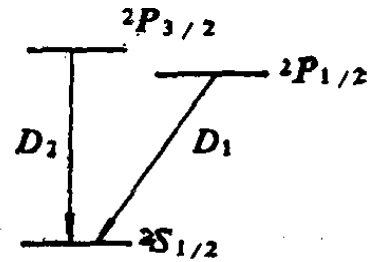


图 1.33

(c) ΔE 是由电子的自旋轨道耦合引起的.

(d) 当 $kT \gg \Delta E$ 时, 谱线强度比 D_2/D_1 由 ${}^2P_{3/2}$ 与 ${}^2P_{1/2}$ 的简并度决定.

$$D_2/D_1 = \frac{2j_2 + 1}{2j_1 + 1} = 2. \quad (\text{钱剑明})$$

1093 (Wis, 1973)

(a) 写出钠原子 ($Z = 11$) 基态及第一激发态的电子组态; (b) 给出这两个态在 LS 耦合下的光谱项符号; (c) 这两个态之间跃迁发出可见光, 试问 kR 为多大? 辐射极次如何? 这里 k 为辐射的波数, R 为原子半径; (d) 钠的 D 线是何种谱线? 为什么具有双线结构?

解: (a) 钠原子基态的电子组态为 $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$, 第一激发态为 $1s^2 2s^2 2p^6 3p^1$.

(b) 基态: ${}^2S_{1/2}$

第一激发态: ${}^2P_{3/2}$, ${}^2P_{1/2}$.

(c) 原子半径 $R \approx 1 \text{ \AA}$, 对可见光 $k \approx 10^{-4} \text{ \AA}^{-1}$, 故 $kR \ll 1$, 满足偶极辐射的近似条件. 因此, ${}^2P_{3/2} \rightarrow {}^2S_{1/2}$, ${}^2P_{1/2} \rightarrow {}^2S_{1/2}$ 的跃迁属于电偶极跃迁.

(d) D 线是钠原子从第一激发态到基态跃迁放出的谱线. 由于第一激发态因 LS 耦合分裂成两个不同能量的态 ${}^2P_{3/2}$ 和 ${}^2P_{1/2}$, 故 D 线为双线结构. (钱剑明)

1094 (Wis, 1972)

耦合一个 p 态和一个 s 态, 分别用 (a) 罗素-桑德斯耦合, (b) (j, j) 耦合. 用适当的量子数表征耦合态. 对于每一种情况, 试画出能级图并表示出当自旋轨道耦合增强时哪个能级变到了哪个能级?

解: $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$, $l_1 = 0$, $l_2 = 1$.

(a) 罗素-桑德斯耦合. $L = 1$, $S = 1, 0$.

当 $S = 1$ 时, $J = 2, 1, 0$. 耦合态为 ${}^3P_{2,1,0}$.

$S = 0$ 时, $J = L = 1$, 耦合态: 1P_1 .

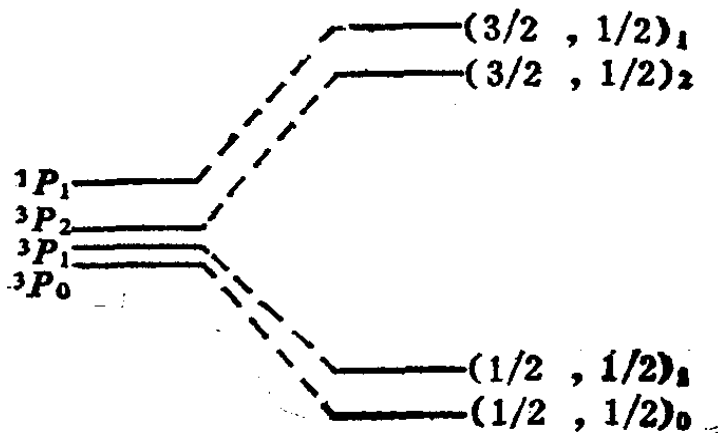


图 1.34

(b) (j, j) 耦合. $j_1 = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}; j_2 = \frac{1}{2}.$

耦合态为: $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)_2, \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)_1, \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)_1, \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)_0.$

上述各耦合态如图 1.34 所示 (第117页).

(林 辰 杨永安)

1095 (Wis, 1972)

(a) 给出碳原子基态的电子组态并列出该电子组态诸能级(按罗素-桑德斯耦合); (b) 哪一个是基态能级? 说明理由.

解: (a) 碳原子基态的电子组态是 $1s^2 2s^2 2p^2$. 相应的诸能级为: $^1S_0, ^3P_{2,1,0}, ^1D_2.$

(b) 按照洪德定则, 可知基态能级是 $^3P_0.$ (孟国武)

1093 (Wis, 1980)

指出下列原子辐射跃迁哪些是电偶极允许跃迁, 哪些是禁戒跃迁, 并说明禁戒跃迁所违背的选择定则.

(a) 氦: $(1s)(1p)^1P_1 \rightarrow (1s)^2 ^1S_0$

(b) 碳: $(1s)^2(2s)^2(2p)(3s)^3P_1 \rightarrow (1s)^2(2s)^2(2p)^2 ^3P_0$

(c) 碳: $(1s)^2(2s^2)(2p)(3s)^3P_0 \rightarrow (1s)^2(2s)^2(2p)^2 ^3P_0.$

(d) 钠: $(1s)^2(2s)^2(2p)^6(4d)^2D_{5/2} \rightarrow (1s)^2(2s)^2(2p)^6(3p)^2P_{1,2}$

(e) 氦: $(1s)(2p)^3P_1 \rightarrow (1s)^2 ^1S_0$

解: 单电子电偶极跃迁的选择定则为

$$\Delta l = \pm 1, \quad \Delta j = 0, \pm 1$$

多电子电偶极跃迁的选择定则为

$$\Delta S = 0, \quad \Delta L = 0, \pm 1, \quad \Delta J = 0, \pm 1 \quad (0 \leftrightarrow 0)$$

(a) 电偶极辐射允许跃迁.

(b) 电偶极辐射允许跃迁.

(c) 禁戒跃迁. 因为总角动量由 0 至 0 的跃迁是电偶极禁戒的.

(d) 禁戒跃迁, 不满足 $\Delta J = 0, \pm 1$ 选择定则.

(e) 禁戒跃迁, 违背条件 $\Delta S = 0$. (钱剑明)

1097 (Wis, 1980)

一个假想原子在封闭壳层外的 p 轨道上有两个电子.

(a) 利用 LS 耦合, 以惯用的光谱学符号 $(2s+1)L_J$ 标记体系所可能有的能级; (b) 给出 (a) 中各能级的宇称; (c) 在独立粒子近似中, 这些能级都是简并的, 但实际上它们的能量有一定差别, 试说明能级分裂的原因.

解: (a) 电子组态是 p^2 , 这两个电子属同科电子, 故可能的能级为

$${}^1S_0, \quad {}^3P_{2,1,0}, \quad {}^1D_2.$$

(b) 能级的宇称决定于这些电子的轨道角动量量子数之和. 对 (a) 中的各个能级有 $l_{\text{总}} = \sum_i l_i = 2$, 故宇称为 $(-1)^{l_{\text{总}}} = +1$.

(c) 可参见 1079 题. (钱剑明)

1098 (Ber, 1975)

钾原子 ($Z = 19$) 基态的电子组态是什么?

解: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^1$. (胡平)

1099 (Wis, 1978)

考虑氧原子的同位素 O^{17} 。试画出原子态 $(1s^2 2s^2 2p^4)^3P$ 的精细和超精细结构劈裂 (O^{17} 的核自旋 $I = \frac{5}{2}$)，在每个态上标记相应的角动量量子数。

解：如图1.35所示。

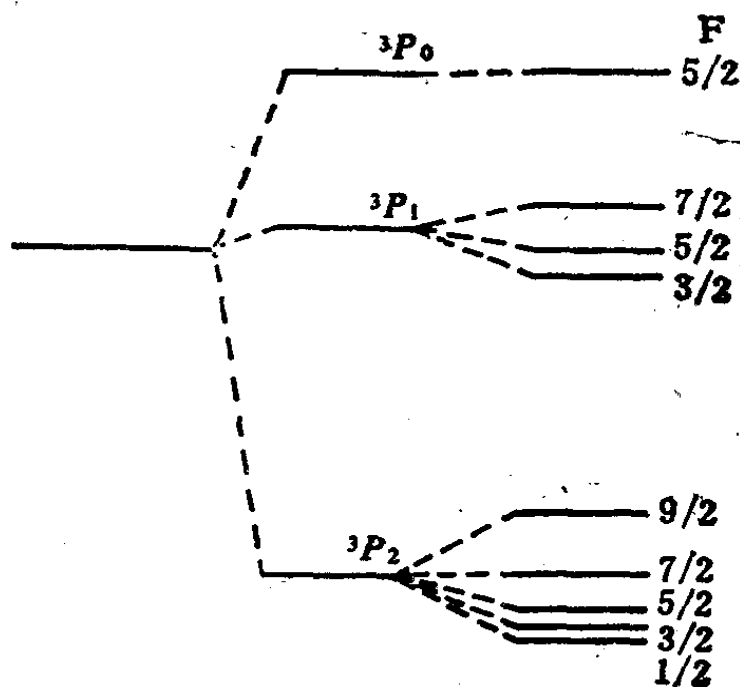


图 1.35

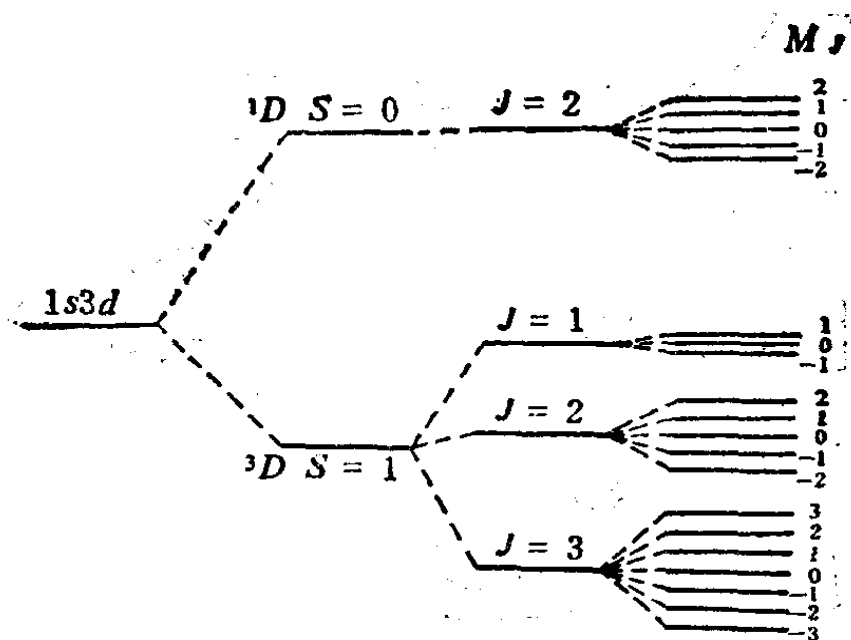
(杨永安)

1100 (Wis, 1974)

对于处在 $1s3d$ 电子组态的氦原子，试画出考虑下列作用时的能级系列图：

(a) 只有各电子与核的库仑引力；(b) 考虑各电子间的静电排斥；(c) 计入自旋轨道耦合；(d) 外加强弱磁场的影响。

解：如图1.36所示。



(a)库仑引力(b)交换库仑作用(c) $L-S$ 耦合(d)外磁场影响

图 1.36

(胡 平)

1101 (Ber, 1981)

氯化钠是立方晶体结构，每个晶胞包含 4 个 Na 和 4 个 Cl 原子。Na 和 Cl 的原子量分别是 23.0 和 35.5，NaCl 的密度为 $2.16 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ 。(a) 计算能够产生布喇格反射的 X 射线最大波长；(b) 对于波长为 4 \AA 的 X 射线，试给出各级布喇格反射的级次和角度。

解：(a) 立方晶胞的体积为

$$V = \frac{4A}{\rho N_A} = \frac{4 \times (23.0 + 35.5)}{2.16 \times 6.022 \times 10^{23}}$$

$$= 1.80 \times 10^{-23} \text{ cm}^3,$$

式中： A 为 NaCl 的分子量， $\rho = 2.16 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ 是 NaCl 的密度， N_A 为阿伏伽德罗常数。

晶胞边长为

$$d = \sqrt[3]{V} = 5.6 \times 10^{-8} \text{ cm} = 5.6 \text{ \AA}.$$

由 $2d \sin\theta = n\lambda$, 可知:

$$\lambda_{\max} = 2d = 11.2 \text{ \AA}.$$

(b) 对于 $\lambda = 4 \text{ \AA}$, 有

$$\sin\theta = n \frac{\lambda}{2d} = 0.357n,$$

于是, $n=1$ 时, $\sin\theta = 0.357$, $\theta = 20.9^\circ$,

$n=2$ 时, $\sin\theta = 0.714$, $\theta = 45.6^\circ$.

当 $n \geq 3$ 时, $\sin\theta > 1$, 故只有 $n=1, 2$ 两级布喇格反射. (胡 平)

1102 (Wis, 1973)

(a) 用 100 keV 电子轰击钨靶 ($Z=74$). 试画出由此产生的 X 射线谱对 $\frac{1}{\lambda}$ 的示意图, 并标出 K X 射线. (b) 对 K X

射线, 推导 λ 与 z 的近似关系式, 证明莫塞莱图线 ($\lambda^{-1/2} \approx Z$) 近似为一直线; (c) 证明莫塞莱图线中 K_α 线与 K_β 线 (即 K 线系中两个波长最大的线) 的斜率之比为 $\sqrt{\frac{27}{32}}$.

解: (a) X 射线谱分为两部分: 连续谱和特征谱. 连续谱最短波长由入射电子的最大能量决定:

$$\lambda_{\min} = \frac{12.4}{100} \text{ \AA} = 0.124 \text{ \AA},$$

而钨的 K X 射线最大能量为 $13.6 \times 74^2 \approx 74.5 \text{ keV}$, 故 K X 射线叠加在连续谱上, 如图 1.37 所示.

(b) 钨原子能级为 $E_n = -\frac{Rhc Z^{*2}}{n^2}$, 其中 Z^* 为有效核

电荷数. 对于 K X 射线, 有

$$\frac{hc}{\lambda} = -\frac{Rhc Z^{*2}}{n^2} + Rhc Z^{*2},$$

即
$$\lambda = \frac{n^2}{(n^2 - 1) R Z^{*2}}$$

$$\lambda^{-1/2} = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{n^2}} R Z^* \approx \sqrt{\frac{n^2 - 1}{n^2}} R Z, (n = 2, 3, \dots).$$

故 $\lambda^{-1/2}$ 与 Z 的关系曲线近似为一直线.

(c) K_α 线为 $n=2$ 到 $n=1$ 的跃迁谱线, K_β 线为 $n=3$ 到 $n=1$ 的跃迁谱线. 在莫塞莱图线中, K_α 线斜

率为 $\sqrt{\frac{3}{4}} R$, 而 K_β 线斜

率为 $\sqrt{\frac{8}{9}} R$, 两者之比为

$$\sqrt{\frac{3}{4}} R / \sqrt{\frac{8}{9}} R = \sqrt{27/32}.$$

(钱剑明)

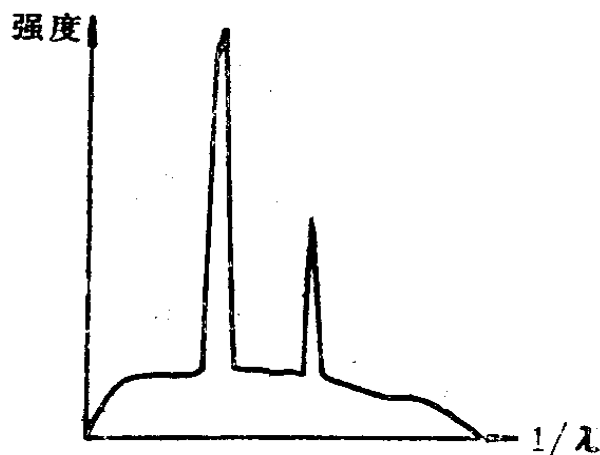


图 1.37

1103 (Wis, 1976)

(a) 连续辐射通过某气体后, 其出射谱通常称为吸收谱. 在可见光及紫外区出现吸收线, 而在 X 射线区域出现吸收边. 为什么会出现这种差别, 这两种差别的物理根源是什么?

(b) 氢原子基态电离能为 13.6eV ，试问四价硼离子 ($Z=5$ ，带电荷 $+4e$) 从 $n=2$ 态跃迁到 $n=1$ 态的辐射能量 E 是多大?

(c) 中性硼原子的 K_{α} 线能量为 E_K ， E_K 是大于、等于还是小于 (b) 中的 E ? 为什么?

(d) 中性硼原子的 K 吸收边能量 E_K 是大于、等于还是小于 (c) 中的 E_K ? 为什么?

解: (a) 可见光与紫外光能量较小，它只能引起气体原子外层电子的跃迁，表现在吸收谱上为吸收线，而 X 射线区域光子能量较高，可引起原子内层电子跃迁，这些内层电子只能跃迁到外层的空轨道上或者电离，因此在吸收谱上表现为吸收边。

(b) 由类氢原子能级公式，可得：

$$\begin{aligned} E &= Rhc Z^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) \\ &= 13.6 \times 25 \times \frac{3}{4} = 225\text{eV}. \end{aligned}$$

(c) 因为电子对核的屏蔽作用，中性硼原子的 K_{α} 线能量 E_K 一般应小于 (b) 中的 E 。

(d) 吸收边能量 E_K 对应于 K 壳层电子的电离能，故此时代 E_K 大于 (c) 中的 E_K 。 (钱剑明)

1104 (Ber, 1981)

对于 Zn，X 射线吸收限有下列值 (以 keV 为单位)：
 $K9.67$ ， $L_I1.21$ ， $L_{II}1.05$ ， $L_{III}1.03$ 。

试确定 K_{α} 线的波长。如果用 5keV 电子轰击 Zn，求：
(a) 最短 X 射线波长；(b) 可能发射的最短特征 X 射线波长。

(注: K 能级相应于 $n=1$, 三个 L 能级相应于 $n=2$ 的不同态. 吸收限是指从某能级打出一个电子所需吸收的 X 射线的最小能量, K_{α} 线对应于从最低 L 能级到 K 能级的跃迁).

解: K_{α} 线包括两条: $K_{\alpha_1}(L_{III} \rightarrow K), K_{\alpha_2}(L_{II} \rightarrow K)$.

$$E_{K_{\alpha_1}} = E_{L_{III}} - E_K = 9.67 - 1.03 = 8.64 \text{ keV},$$

$$E_{K_{\alpha_2}} = E_{L_{II}} - E_K = 9.67 - 1.05 = 8.62 \text{ keV},$$

故
$$\lambda_{K_{\alpha_1}} = \frac{hc}{E_{K_{\alpha_1}}} = 1.43 \text{ \AA},$$

$$\lambda_{K_{\alpha_2}} = \frac{hc}{E_{K_{\alpha_2}}} = 1.44 \text{ \AA}.$$

(a)
$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{E_{\max}} = 2.48 \text{ \AA}, (E_{\max} = 5 \text{ keV}).$$

(b) 除 K 能级电子外, 其它能级上的电子都有可能因为 5 keV 电子轰击而被激发, 从而产生特征 X 射线, 显然, 特征 X 射线的最大能量为 $0 - E_I = 1.21 \text{ keV}$, 对应的波长为 $\lambda_{\min} = 10.25 \text{ \AA}$. (胡 平)

1105 (Wis, 1971)

莫塞莱发现, 原子序数为 Z 的原子所发出的 K_{α} 线能量是 $13.6 \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times (Z-1)^2 \text{ eV}$. (a) 解释该表达式中的各个因子.

(b) K_{α} 线的精细结构如何? 相应的量子数是什么?

(c) 一些原子可放出俄歇电子而退激发, 试描述这种过程.

解: (a) 13.6 eV 是氢原子基态能量, 也就是单位核电荷对一个 $1s$ 电子的束缚能. $\left(1 - \frac{1}{4}\right)$ 是 $n=2$ 到 $n=1$ 的跃迁因

子, 即 $\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right)$, $(Z-1)$ 是有效核电荷数.

(b) K_{α} 线具有双线结构. 由于 LS 耦合, $n=2$ 能级分裂为三个次能级: ${}^2S_{1/2}$, ${}^2P_{1/2}$, ${}^2P_{3/2}$, 但 $n=1$ 能级仍是单一的 ${}^2S_{1/2}$. 根据选择定则: $\Delta l = \pm 1$, $\Delta J = 0, \pm 1 (0 \leftrightarrow 0)$, 可知允许跃迁为

$$K_{\alpha_1}: {}^2P_{3/2} \rightarrow 1^2S_{1/2},$$

$$K_{\alpha_2}: {}^2P_{1/2} \rightarrow 1^2S_{1/2}.$$

(c) 俄歇过程的机制是: 当某原子内壳层上的一个电子被电离以后, 在该壳层留下一个空位, 随后外层电子跃迁到这个空位中时并不发射 X 射线, 而是使另一个外层电子激发电离. 这样发射出来的电子称为俄歇电子. 俄歇电子的动能是一定的, 例如由 K 壳层打出一个电子后, L 壳层上的电子跃迁到 K 壳层上, 同时 L 壳层发射出另一个电子, 后者便是俄歇电子, 其动能为

$$E = E_K - 2E_L,$$

其中 E_K 和 E_L 分别表示 K, L 壳层电子的电离能.

(钱剑明)

1106 (Col, 1983)

Nb ($Z=41$) 原子两个 $2p$ 态的束缚能分别是 2370 eV 和 2465 eV. 而 Pb ($Z=82$) 原子两个 $2p$ 态的束缚能分别是 13035 eV 和 15200 eV. $2p$ 态的束缚能粗略地与 $(Z-a)^2$ 成正比. $2P_{1/2}$ 与 $2P_{3/2}$ 态的裂距跟 $(Z-a)^4$ 成正比. 试解释这种现象并给出常数 a 的合理数值.

解: 重原子的内层电子可以看成是在屏蔽的中心力场中运动, 类似于碱金属原子. 考虑到有效核电荷数为 $Z-a$,

并计入精细结构，可得 $2p$ 电子能量为

$$E = -\frac{1}{4} Rhc (Z - a_1)^2 + \frac{1}{8} Rhc \alpha^2 (Z - a_2)^4 \cdot \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{j + \frac{1}{2}} \right).$$

第一项正比于 $(Z - a_1)^2$ ，是能量的主要部份，粗略地决定了 $2p$ 态的束缚能。第二项导致 $2P_{1/2}$ 与 $2P_{3/2}$ 态的分裂，形成精细结构，裂距 $\propto (Z - a_2)^4$ 。 a_1 和 a_2 一般是不相同的（见褚圣麟《原子物理学》p. 136）。根据所给的 Nb 和 Pb 原子 $2p$ 态束缚能大小，不难求出 a_1, a_2 值：

$$\text{对 Nb: } a_1 = 14.7, a_2 = 2.9,$$

$$\text{对 Pb: } a_1 = 21.4, a_2 = -1.2. \quad (\text{叶 坚})$$

1107 (Col, 1977)

(a) 详细描述在 X 射线发射谱中确定特征谱线波长的实验安排；(b) 通过测量一系列元素的 X 射线谱，莫塞莱能给每一个元素确定原子序数，试解释之；(c) 从某一固定靶中发出的特征谱线一般不能为相同材料的物质所吸收，例如重元素吸收谱中 K_α 线是观察不到的，为什么？(d) 当一靶受到某种能量的电子轰击时，解释发出连续 X 谱的原因，这个谱的哪些方面与经典电磁理论不一致？

解：(a) 可利用晶体衍射方法进行测量。

如图 1.38，X 射线经窄缝 S_1, S_2 准直成细束射到晶体 C 表面上， P 为照相底片，围成圆弧形，晶体 C 位于中心并绕中心轴转动。当满足衍射条件 $2d \sin \theta = n\lambda$ 时，在照片 A 处得到衍射线。容易看出，转动晶体时，在与 A 对称的 A'

处将出现另一衍射线，于是 4θ (弧度) = $\frac{\text{弧}AA' \text{长度}}{CA \text{长度}}$ 。利用得到的 θ ，结合已知的晶体参量 (晶格常数，衍射面指数等)，便可由衍射条件 $2d \sin \theta = n\lambda$ 直接确定 X 射线波长 λ 。

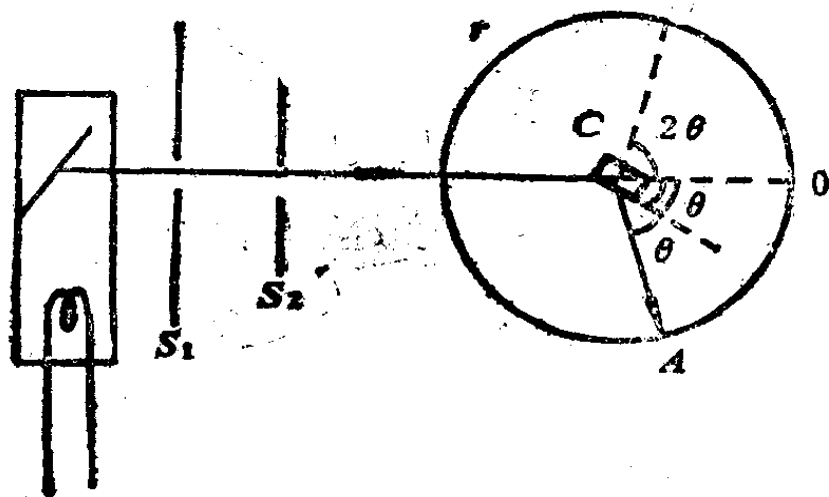


图 1.38

(b) 每种元素有一套 X 射线谱，波长最短的是 K 线系，其次是 L 线系等。莫塞莱经研究发现各元素的 K 线系有相似结构，只是波长不同。他用 $\sqrt{\frac{\nu}{R}}$ 对原子序数 Z 作图，得到的结果差不多为线性关系，他还给 K 线列出一个公式：

$$\nu = R(Z - 1)^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right).$$

因而只要找出某种元素的 K 线，并测定其频率 (或波长)，即可确定原子序数 Z 。

(c) 因为 K 线等等代表着原子内壳层之间的能量差，一般情况下，这些能级均已被电子占据，所以不可能利用能量等于这些能级差的射线激发彼此间的跃迁，而只有将内壳层的电子直接电离。于是只能观察到吸收限，而观察不到吸

收线。

(d) 电子在靶中受阻减速，出现轫致辐射，从而产生连续 X 射线谱。连续谱的短波极限由电子最大动能确定，也即由 X 光管的加速电压确定，需要用到量子论的公式。而在经典电磁理论中电子的动能只能影响出射线的强度。（叶 坚）

1108 (Wis, 1978)

物质对 X 射线区域光子的吸收截面除了在某些光子能量有尖锐的下降处，基本上是随光子能量下降而单调增加。对锌 ($Z = 30$) 来说，尖锐下降的光子能量为 9.678keV , 1.236keV , 1.047keV 和 1.024keV 。(a) 指出 X 射线吸收截面尖锐下降处所对应的跃迁；(b) 求锌的能量高于 5keV 的 X 射线能量，并指出相应的跃迁；(c) 计算 Zn^{+29} 的电离能 (Zn^{+29} 表示锌原子被移去 29 个电子)；(d) 为什么 (c) 中结果与 9.678keV 相差甚大？

解：(a) 能量 9.768keV 对应于一个 $1s$ 电子电离， 1.236keV 对应于一个 $2s$ 电子电离， 1.047keV 和 1.024keV 对应于一个 $2p$ 电子电离。

(b) 显然，锌的能量高于 5keV 的 X 射线只能是其它壳层电子跃迁到 K 壳层时发射的，其能量是跃迁前后态的能量差值。对于 L 壳层电子跃迁到 K 壳层，发射的 X 射线能量为

$$K_{\alpha_1}: E = 8.654\text{keV} (L_{III} \rightarrow K),$$

$$K_{\alpha_2}: E = 8.631\text{keV} (L_{II} \rightarrow K).$$

(c) 把 Zn^{+29} 看成类氢原子，其电离能为

$$E_{z,n} = Z^2 \times 13.6 = 12.24\text{keV}.$$

(d) 能量 9.678keV 对应于中性 Zn 原子 $1s$ 电子的电离

能, 由于核外其它电子的库仑屏蔽作用, 有效核电荷数 $Z^* < 30$, 并且离开核越远, 有效核电荷数 Z^* 越小, 故中性 Zn 原子 $1s$ 电子的电离能明显比 Zn^{+20} 电离能小. (钱剑明)

1109 (Wis, 1981)

导出朗德因子 g , 即决定弱场中原子有效磁矩的因子.

解: 设原子中电子的总轨道角动量为 P_L , 总自旋角动量为 P_s (P_L 和 P_s 均以 \hbar 为单位), 相应的磁矩分别为 $\mu_L = -\mu_B P_L$, $\mu_s = -2\mu_B P_s$. 电子的总磁矩为 $\mu_J = -g\mu_B P_J$, 这里 g 就是所要求的朗德因子, $P_J = P_L + P_s$.

$$\mu_J = \mu_L + \mu_s = -\mu_B (P_J + P_s).$$

两边点乘 P_J , 得:

$$\mu_J P_J = -\mu_B (P_J^2 + P_J \cdot P_s),$$

而 $\mu_J \cdot P_J = -g\mu_B P_J^2$

于是
$$g = 1 + \frac{P_s \cdot P_J}{P_J^2}$$

$$= 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

(钱剑明)

1110 (Pri, 1980)

在自旋回波实验中, 一内含质子的液体样品(如甘油)放在稳定但空间不均匀的磁场中, 磁场强度为数千高斯. 在垂直于稳定磁场的方向加一个几高斯的强脉冲(几个微秒)射频场, 于是在样品周围的线圈上就能立即得到一个射频信号. 不过, 除非采取特殊措施使得磁场的空间均匀性极好, 从而信号可以持续较长时间, 否则信号将在不到一毫秒的时间内

消除。如果在某个时间间隔，比如说 15 毫秒后施加第二个较长的射频脉冲，那么从第二个脉冲起再过 15 毫秒将能观察到一个射频信号（回波）。(a) 如何计算射频脉冲的合适频率？(b) 对于稳定场的空间均匀性有何要求？(c) 解释回波的形成；(d) 怎样计算第一个射频脉冲的合适宽度？

解：(a) 对射频脉冲频率的要求是它能引起核磁共振。

$$\hbar\omega = \gamma_P \hbar H_0(\mathbf{r}),$$

可取 $\omega = \gamma_P \langle H_0 \rangle$ ，其中 γ_P 为质子旋磁比， $\langle H_0 \rangle$ 是样品中磁场 $H_0(\mathbf{r})$ 的平均值。

(b) 设样品内各处 H_0 的最大差值为 $(\Delta H)_m$ ，可证衰减时间为 $\frac{1}{\gamma_P(\Delta H)_m}$ ，要求 $\frac{1}{\gamma_P(\Delta H)_m} > \tau$ ，其中 τ 为两次脉冲之间的时间间隔，于是要求：

$$(\Delta H)_m < \frac{1}{\gamma_P \tau} .$$

(c) 取稳定场 H_0 沿 z 轴方向。 $t=0$ 时，磁矩取向与 H_0 平行(图 1.39(a))，沿 x 方向加入第一次射频脉冲，将导致磁矩偏离 z 方向(图 1.39(b))，磁矩转过的角度 θ 可通过改变射频脉冲宽度进行控制，在图 1.39(c)中，假定 $\theta = 90^\circ$ 。

磁矩同时还要绕 H_0 方向作旋进，稳定场 H_0 的空间不均匀性，使各处旋进的角速度 $\omega = \gamma_P H_0(\mathbf{r})$ 互不相同，所以各处磁矩逐渐散开呈扇形，如图 1.39(d) 所示。如果在 $t = \tau$ (例如 15 毫秒) 时，沿 x 方向加入第二次较宽的射频脉冲，使所有磁矩绕 x 方向转过 180° (图 1.39(e))，此时各磁矩绕 H_0 旋进的先后顺序恰与原先相反(图 1.39(f))，在 $t = 2\tau$ 时，所有磁矩方向将重新达到一致(图 1.39(g))，此刻总磁

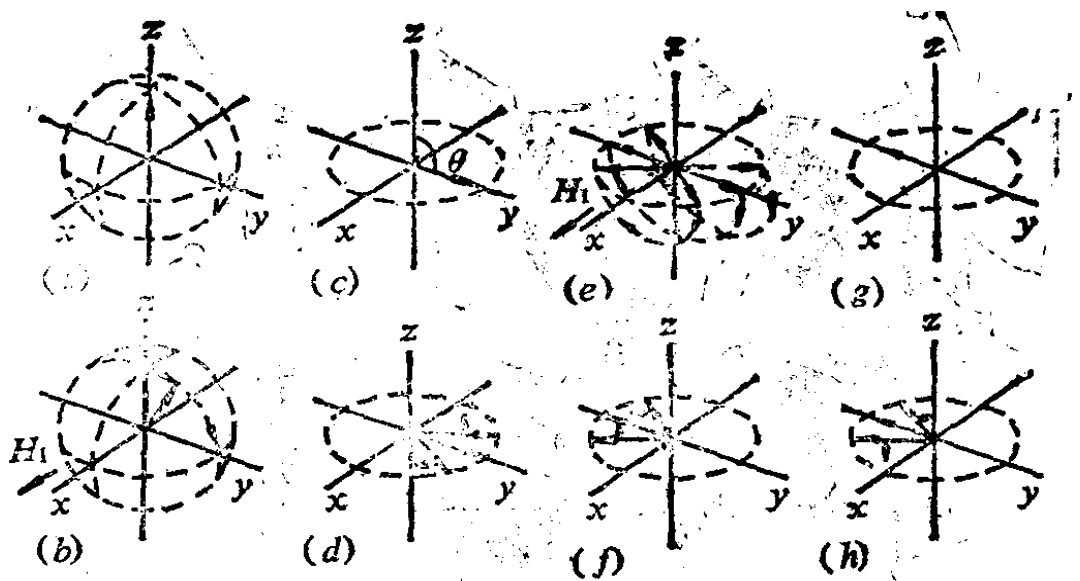


图 1.39

矩及其变化率达到最大，从而产生一共振信号，形成回波(图 1.40)。随后，磁矩再次散开，信号消失，如图 1.39(h) 所示。

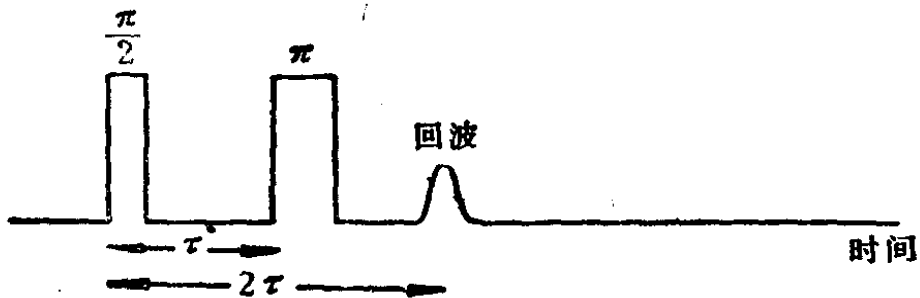


图 1.40

(d) 第一个射频脉冲导致磁矩绕 x 轴转过 θ 角，为使回波效果显著，应取旋转后的磁矩垂直于 H_0 为好，即 $\theta \approx \frac{\pi}{2}$ ，于是：

$$\gamma_p H_1 t_0 \approx \frac{\pi}{2},$$

即第一个射频脉冲长度可取 $t_0 \approx \frac{\pi}{2\gamma_p H_1}$ 。(斯其苗)

1111 (Buf, 1981)

就下列三个波谱学问题，即连续电子自旋共振，脉冲核磁共振和穆斯堡尔谱之中的一种。(a) 画出为完成你选中的波谱学测量所需的设备框图；(b) 简述这台仪器的工作；(c) 描述实验结果，说明从该实验的结果可得到哪些定量的结论并说明这些结论的物理意义。

解：(1) 连续电子自旋共振。

(a) 设备框图：见图 1.41。

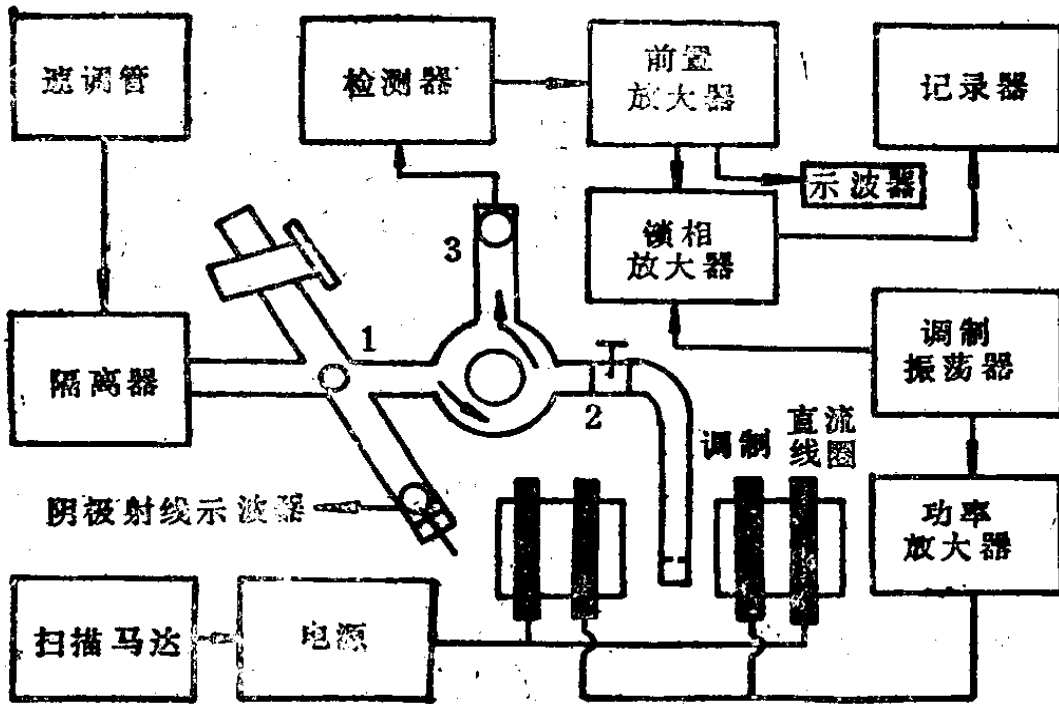


图 1.41

(b) 仪器工作：样品放在共振腔内，共振腔置于静磁场 B_0 中。由束调管产生频率固定的微波场 B_1 输送到 T 桥，当微波功率在臂 1 和 2 间均衡分配时，检波器上没有信号。对 B_0 进行扫描，当满足共振条件时，样品吸收微波功率，臂 1 和 2 之间的均衡受到扰动。吸收信号通过臂 3 到达检波器，

最后被显示或记录。

(c) 实验结果：显示器上的图形（参见图 1.42）为微分图线，有 Gaussian 型和 Lorentz 型两种。从图线可以得到以下信息：

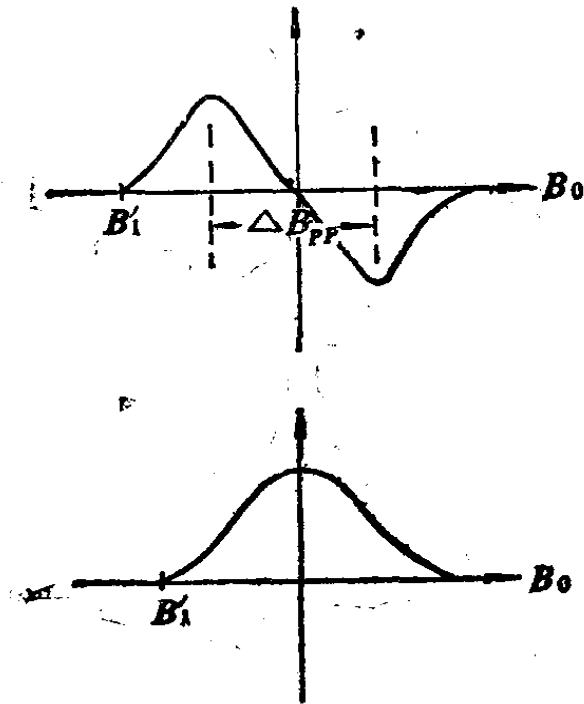


图 1.42

(i) g 因子：从图线中心位置的 B_0 值和微波频率可求得 g 因子。

(ii) 线宽：由微分信号峰-峰值 ΔB_{PP} 确定半宽。

(iii) 弛豫时间 T_1 和 T_2 ：利用饱和法可以测量 T_2 和 T_1 (Lorentz 线型)：

$$T_2 (\text{spin-spin}) = \frac{1.3131 \times 10^{-7}}{g \Delta B_{PP}^0},$$

$$T_1 = \frac{0.9848 \times 10^{-7} \Delta B_{PP}^0}{g} \cdot \left(\frac{1/s - 1}{B_1^2} \right).$$

这里 g 是朗德因子， ΔB_{PP}^0 为饱和峰-峰值 (以高斯为单位)， B_1 相应于谱线端点的磁场， s 是饱和因子。

(iv) 相对强度。

(v) 物理意义：将测得的结果和标准谱比较，可以由 g 因子和线型查明这个谱是属于何种顺磁原子的。比较强度能够探知绝对含量。如果一个样品中含有数种顺磁原子，则可以由强度比，确定它们的相对含量。根据谱线的结构还可以得知核自旋 I 的值，例如 Mn^{++} 的 ESR 谱上叠加六个小峰，

由此推知其核自旋 $I = \frac{5}{2}$.

(2) 脉冲核磁共振.

(a) 框图: 图 1.43 是一个带有傅里叶变换的核磁共振谱仪的框图.

(b) 工作原理: 核磁共振就是令核的自旋态在外磁场中劈裂, 并在垂直于静磁场的方向加上一射频场, 使自旋态之间发生共振跃迁. 脉冲谱是令射频场以脉冲方式加入, 也就是说, 如图所示截取射频场中的一段段波列. 吸收的信号由同一线圈取出, 经过放大和傅里叶变换使得一个个吸收峰呈现在显示屏上.

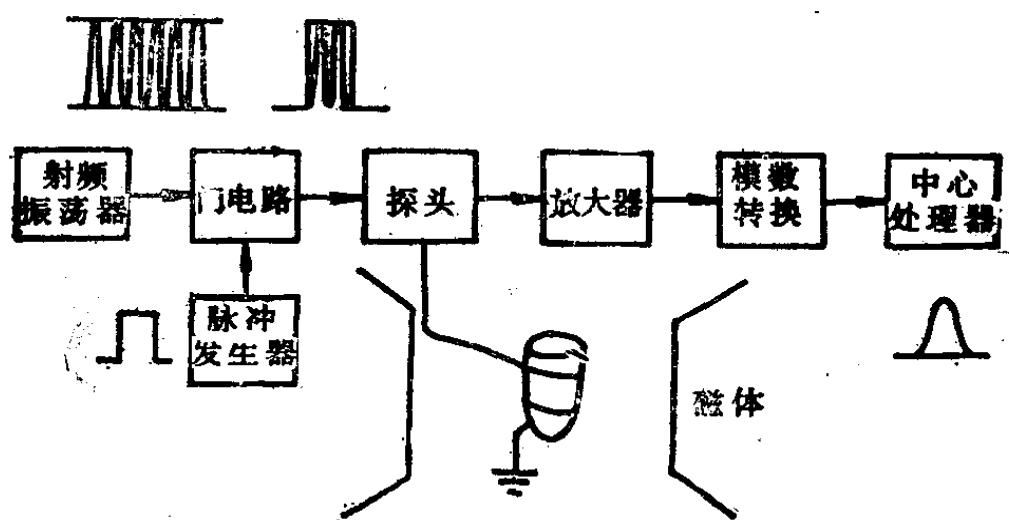


图 1.43

(c) 信息: (i) 吸收峰的位置和个数.

(ii) 吸收峰的积分强度.

(iii) 弛豫时间 T_1 和 T_2 .

(iv) 物理意义: 吸收峰的位置标志谱线的化学位移.

由化学位移, 峰的个数和积分强度可以确定化合物的结构.

因为同一种原子由于同其它原子结合的方式不一样, 化学位

移就不一样，各种结合方式中谱线的积分强度和原子数成正比。因此由强度比能够确定结合方式之间的原子比。峰的个数与核之间的耦合有关。

例：乙醇中 H 的核磁共振谱如图 1.44 所示。我们测量的是 H 原子的核磁共振谱，最左边的峰是 H 和 O 的结合，

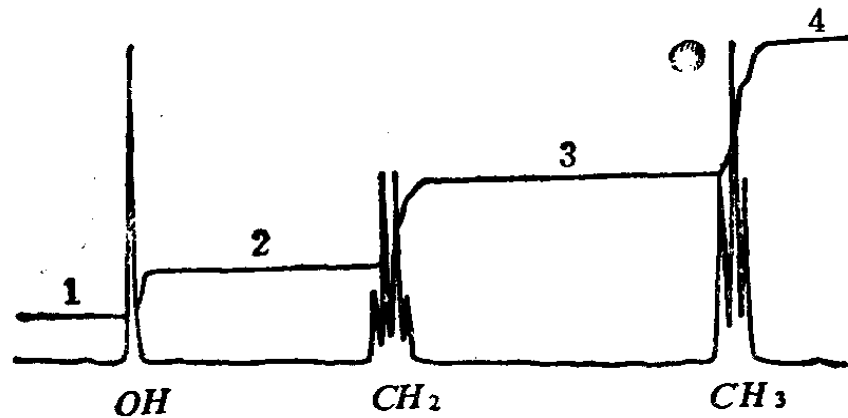


图 1.44

只有一个峰。中间一组有四个峰，是 CH_2 中 H 的核磁共振谱线，最右面一组有三个峰是 CH_3 中 H 的核磁共振谱线。 CH_2 与 CH_3 之间有耦合，谱线的形状及峰的数目就是耦合的结果。图中标有 1 的水平线是基线，2, 3, 4 水平线相对于基线的高度就是三组谱线的积分强度，正好是 1 : 2 : 3。

(3) 穆斯堡尔谱。

(a) 设备框图：如图 1.45 所示。

(b) 工作原理：图 1.45 所示的实验装置中，吸收体位置保持固定，而发射源相对吸收体有一运动速度 v ，速度 v 的大小受到来自波形发生器的信号的调制。产生共振吸收时，位于吸收体后的 γ 射线探测器将输出一个脉冲信号，这个信号被贮存于多道分析器中，用同步信号将脉冲在多道分析器中的位置和速度 v 建立对应关系，从而得到共振吸收曲线。

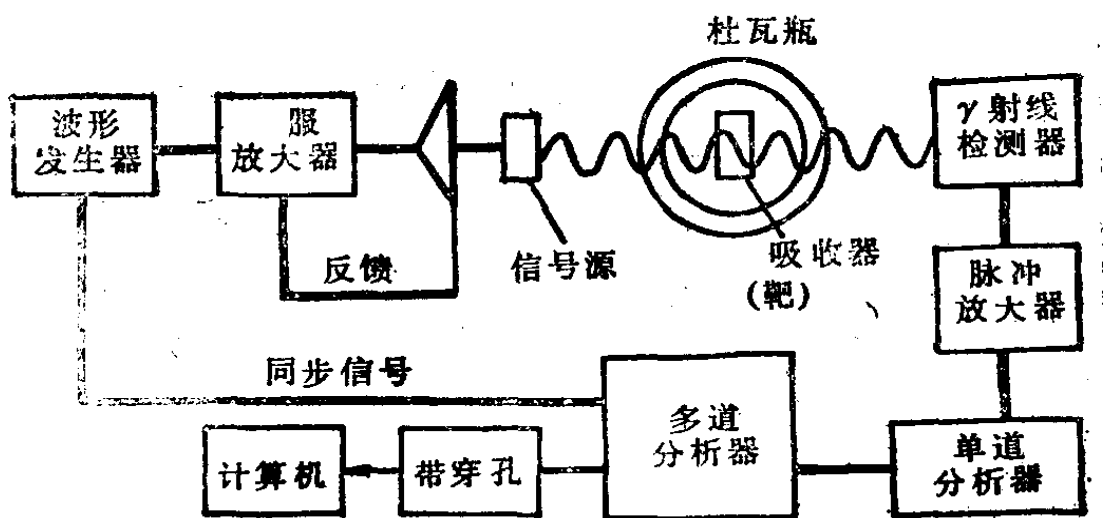


图 1.45

(c) 实验结果：从穆斯堡尔谱可以得到以下一些信息（见图 1.46）：

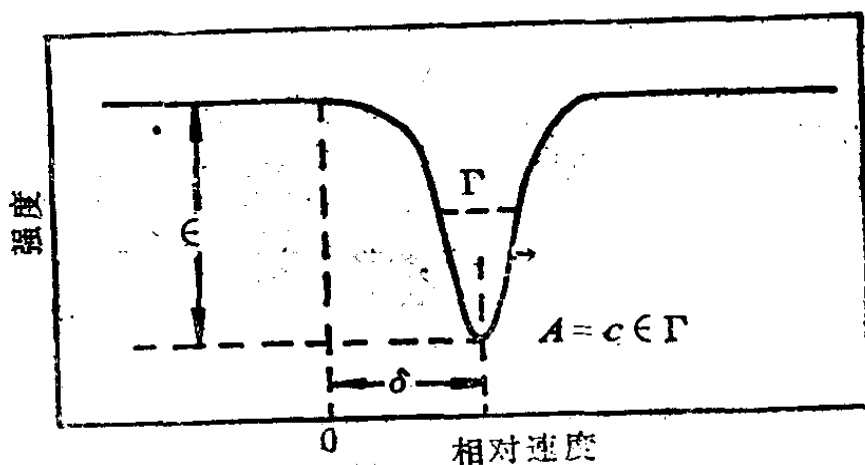


图 1.46

- (i) 吸收峰位置 δ (或称同质异能移)。
- (ii) 吸收峰的积分强度 A 。
- (iii) 峰宽 Γ 。

原子核的能级除与内部核子间的相互作用有关外，还受到外围电子，邻近原子以及晶体结构等因素的影响，这在穆

斯堡尔谱上表现为同质异能移 δ 随着元素化学环境的不同而变化, 例如在 Sn^{2+} , Sn^{4+} 和金属锡 ($\beta\text{-Sn}$) 中, δ 值以 Sn^{2+} 为最大, $\beta\text{-Sn}$ 次之, Sn^{4+} 最小.

利用峰宽 Γ 可以求出核激发态的寿命.

某些元素的穆斯堡尔谱还会出现四极分裂 Δ , 如图 1.47

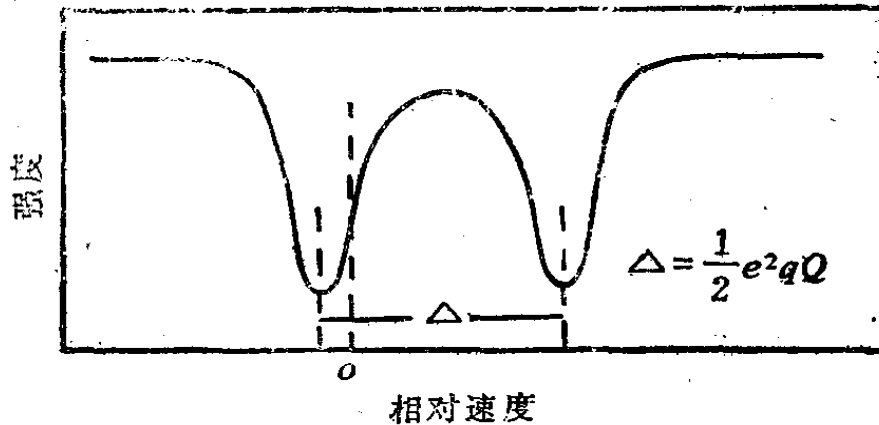


图 1.47

所示. 从中可以推知核的电四极矩 $Q = 2\Delta/e^2 q$, 其中 q 为核所在位置的电场梯度, $e = 1.6 \times 10^{-19}$ 库仑. (叶 坚)

1112 (Buf, 1982)

摘出下列现象之一并回答以下问题: (1) 该效应(例如电子自旋共振)是怎么回事? (2) 如何进行观测, 测量哪些量? (3) 通过观测这种效应可以测量到样品的何种性质或物理常数? (4) 简要介绍由直接测量的量得到所期结果的推理环节.

- (i) 电子自旋共振
- (ii) 穆斯堡尔效应
- (iii) 约瑟夫逊效应
- (iv) 核磁共振
- (v) 霍尔效应和电导率.

解: (i) 电子自旋共振是指物质中未配对电子在外磁场

中吸收微波场能量在不同自旋态之间的跃迁。

将样品放在可以调节的静磁场中，在垂直于静磁场的方向加一固定频率的微波场，然后将静场扫描，可以发现在某些静场值 B_0 处出现吸收峰。从中可以测到这样一些量：共振位置的 B_0 值，吸收峰的线形和强弱，峰的结构。

根据测量结果我们不难得到电子的 g 值，因为共振时满足条件：

$$g_e \mu_B B_0 = \hbar \omega,$$

于是 $g_e = \frac{\hbar \omega}{\mu_B B_0}$ ，其中 ω 为微波场的频率， $\mu_B = \frac{e\hbar}{m_e c}$ 为玻尔磁子。

另外，由吸收峰的位置我们可以知道样品中包含的成分，与标准样品比较可进一步得到它们的含量。根据峰的结构还能够得知核自旋。

(ii) 穆斯堡尔效应是原子核中 γ 射线的无反冲共振吸收现象。实验中将发射和吸收 γ 射线的原子核置于固体晶格束缚之中，于是原子核在发射和吸收 γ 射线时就可能不受反冲的影响而由所在晶格承担全部反冲，这时观察到的就是无反冲共振吸收。

实验中使源相对于吸收体运动，此时接收到的 γ 射线能量将附加多普勒能移 $\Delta E = \frac{v}{c} E_\gamma$ (E_γ 是发射的 γ 射线能量， c 为光速， v 为多普勒相对速度)，对相对运动速度 v 进行扫描，便得到共振吸收曲线。从中可以得到峰的位置，结构，强弱，宽度及同质异能移，四极分裂等参量。

根据实验测得的谱线宽度与源和吸收体厚度之间的关系，我们容易得到核的激发态寿命 τ 。因为激发态能级宽度

Γ_n 刚好是零厚度时共振谱线宽度的一半，而零厚度时的共振谱线宽度可根据实验结果用外推法得到，于是由测不准关系 $\Gamma_n \cdot \tau \sim \hbar$ ，便可以确定激发态平均寿命 τ 。

除此之外，穆斯堡尔效应还可以用来确定原子核的 g 因子，核磁矩及电四极矩等。

利用同质异能移和四极分裂等参量可以了解和研究固体材料的电子结构，缺陷等性质。

(iii) 在适当条件下，超导电子对从一个超导体穿过一极薄的绝缘层进入另一超导体的隧道贯穿现象，称为约瑟夫逊效应(图1.48)。约瑟夫逊效应分直流和交流两种。

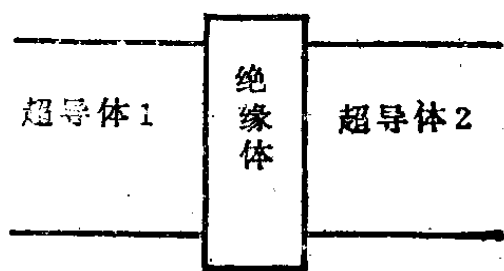


图 1.48

所谓直流约瑟夫逊效应，是指不存在任何电场或磁场时，有直流电流通过约瑟夫逊结的现象，超导电流密度为 $J_s = J_0 \sin \varphi$ ，其中 J_0 是约瑟夫逊结所能通过的最大电流密度， φ 是绝缘层两侧超导体中波函数的位相差。

交流约瑟夫逊效应是指下面两种情形：

1. 当直流电压加在约瑟夫逊结两端时，在结中产生射

频电流 $J_s = J_0 \sin \left(\frac{2e}{\hbar} V t + \varphi_0 \right)$ ，其中 V 为结两端的直流电压。

2. 对加有偏压 V 的约瑟夫逊结，如再用频率为 ω 的微波照射，则每当直流偏压满足条件： $V = n\hbar\omega / Ze$ ($n=1, 2, 3, \dots$) 时，在结中出现直流成分的超导电流。

利用交流约瑟夫逊效应可以精确测定 $\frac{e}{\hbar}$ 值。实验时，用

固定频率的微波照射约瑟夫逊结，同时对偏压 V 进行扫描，于是在 $I-V$ 曲线上出现电流阶梯，由 $\Delta V = \frac{\hbar\omega}{2e}$ 可得出 $\frac{e}{h}$ 值，其中 ΔV 是相邻两阶梯所对应的偏压之差。

显然，约瑟夫逊结可以用作灵敏微波探测器。 $\Delta V = \frac{\hbar\omega}{2e}$

还能作为电压基准。

利用磁场对结电流的调制效应，可以测量微弱的磁场。对于图 1.49 所示的由两个约瑟夫逊结并联组成的环结构(双结量子干涉仪)，可证总电流为

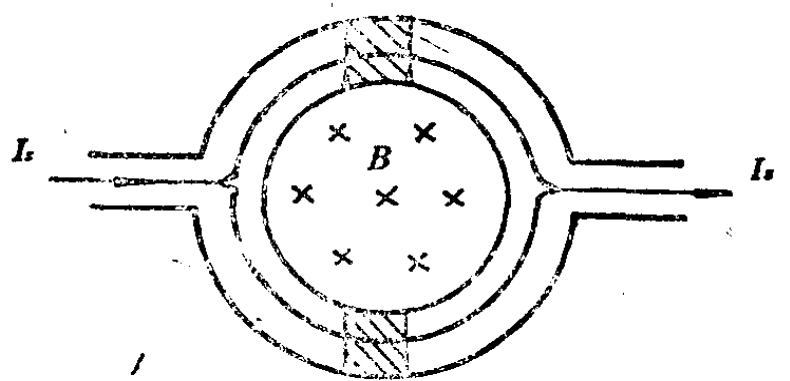


图 1.49

$$I_s = 2I_{s0} \sin \varphi_0 \cos \left(\frac{\pi\Phi}{\phi_0} \right),$$

其中： I_{s0} 为单个约瑟夫逊结所能通过的最大超导电流， $\phi_0 = \frac{h}{2e}$ 为磁通量子， Φ 为超导环所包围的磁通量。这种量子干涉仪作为磁场计用时，可以检测出 10^{-11} 高斯的磁场。

(iv) 核磁共振的基本原理与电子自旋共振相似，不过所用交变磁场的频率必须适合原子核磁能级的间隔，大约是

电子自旋共振所用交变场频率的千分之一的量级。

(v) 将通有电流的金属或半导体样品置于均匀磁场中，使磁场与电场方向互相垂直，则在样品内垂直于电流和磁场方向上形成稳定的横向电场，这就是霍尔效应。均匀磁场 B ，电流密度 j ，霍尔电场 E 之间有简单的关系： $E = R_H B \times j$ ，其中 R_H 称为霍尔系数。

如图 1.50，将通电的长方体薄片状样品置于均匀磁场

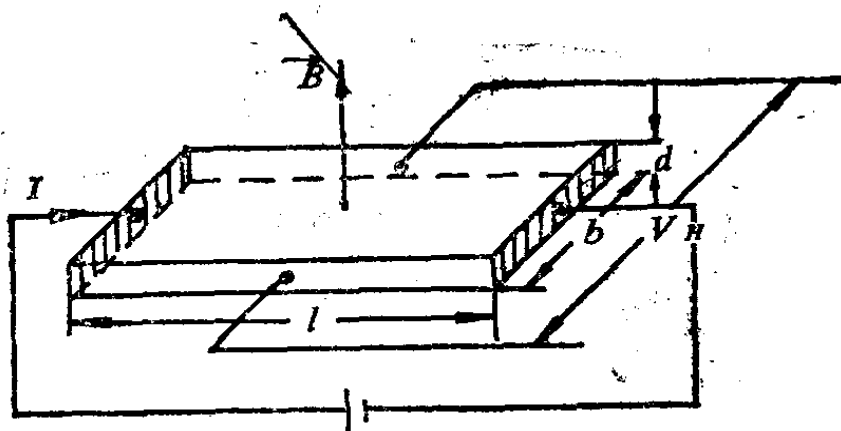


图 1.50

中，测量霍尔电压 V_H ，磁场强度 B ，电流强度 I 及样品的几何尺寸，即可求得霍尔系数 R_H 和样品电导率 σ ：

$$R_H = \frac{V_H d}{IB}, \quad \sigma = \frac{Il}{Ubd}$$

式中： U 为电源电压。

利用测得的 R_H ， σ 值，可以推知半导体样品的导电类型，载流子浓度 N 及迁移率 μ 。

因为霍尔效应是运动着的载流子在磁场中受到洛伦兹力作用发生偏转所致，达到稳定时，霍尔电场对载流子的作用与洛伦兹力相抵消，此时有：

$$qE = qv \times B.$$

于是
$$E = v \times B = \frac{1}{Nq} j \times B,$$

即 $R_H = \frac{1}{Nq}$ (q 为载流子所带电荷, $|q|=e$), 可见, 利用 R_H 的正负可判断半导体是 p 型或 n 型, 载流子浓度为 $N = \frac{1}{qR_H}$, 载流子的迁移率为 $\mu = \frac{\sigma}{Ne} = \sigma |R_H|$. (邹兴宇)

1113 (Wis, 1970)

简述下列实验在原子物理学发展过程中的重要性. (a) 法拉第 (Faraday) 电解实验; (b) 本生 (Bunsen) 和基尔霍夫 (Kirchhoff) 的光谱实验; (c) 汤姆逊 (J. J. Thomson) 关于阴极射线中粒子的 $\frac{e}{m}$ 实验; (d) 盖革 (Geiger) 和马斯登 (Marsden) 的 α 粒子散射实验; (e) 巴克拉 (Barkla) 的 X 射线散射实验; (f) 夫兰克 (Frank)-赫兹 (Hertz) 实验; (g) 汤姆逊 (J. J. Thomson) 的氖离子荷质比实验; (h) 斯忒恩 (Stern)-盖拉赫 (Gerlach) 实验; (i) 拉姆 (Lamb)-李瑟福 (Retherford) 实验.

解: (a) 法拉第电解实验首次从实验上证明存在一个最小的电荷单位 e , 任何带电体所带电荷都是 e 的整数倍 ($e = \frac{F}{N_A}$, 其中 F 为法拉第常数, N_A 是阿伏伽德罗常数).

(b) 本生和基尔霍夫用光谱仪分析了日光光谱中的夫朗和斐线, 指出夫朗和斐线乃因阳光中某些波长的光被太阳大气中的气体和蒸气吸收 (有些是被地球大气吸收) 所致, 他们的工作奠定了光谱学的基础, 两人由光谱的分析还发现了元

素铯和铷。

(c) 汤姆逊通过对阴极射线 $\frac{e}{m}$ 的直接测量而发现电子，

这是我们了解原子结构的开端。

(d) 盖革和马斯登的 α 粒子散射实验奠定了卢瑟福的原子核式结构模型的实验基础。

(e) 巴克拉的 X 射线散射实验发现了元素的 X 射线标识谱，为研究原子内部结构揭示了重要的现象。

(f) 夫兰克-赫兹实验使玻尔的原子能态量子化的理论得以证实。

(g) 汤姆逊氦离子荷质比实验最早发现化学元素中的同位素氦 20 和氦 22。

(h) 斯忒恩-盖拉赫实验验证了空间量子化的概念，并证实了电子自旋的存在。

(i) 拉姆-李瑟福实验证明了电子与辐射场的作用，为量子电动力学提供了有力的证据。 (叶 坚)

1114 (Wis, 1972)

估算斯忒恩-盖拉赫实验中氢原子的两条谱线分裂间隔，对实验仪器的性质可作任何合理的假设。标出所用的常数的出处及代入公式所要求的单位。

解：设磁场区域长度为 L_1 ，磁场梯度为 $\frac{dB}{dz}$ ，出磁场

后氢原子飞行长度为 L_2 (如图 1.51)。

基态氢原子的磁矩 $\mu = g\mu_B J = 2\mu_B J$ ，所以磁矩在磁场方向 (即 z 方向) 的分量分别为 μ_B 和 $-\mu_B$ 。于是谱线分裂间隔为

$$d = \frac{\mu_B L_1}{mv^2} (2L_2 + L_1) \frac{dB}{dz},$$

其中 v 为氢原子入射速度, m 为氢原子质量. 如取 $L_1 = 0.03 \text{ m}$,

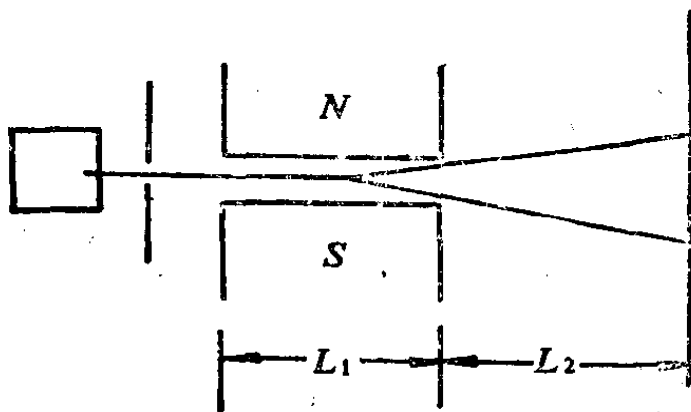


图 1.51

$L_2 = 0.10 \text{ m}$, $\frac{dB}{dz} = 10^3 \text{ T/m}$, $v = 10^3 \text{ m/s}$, 则

$$d = \frac{0.927 \times 10^{-24} \times 0.03}{1.67 \times 10^{-27} \times 10^6} \times (2 \times 0.10 + 0.03) \times 10^3$$

$$= 3.8 \times 10^{-2} (\text{m}) = 3.8 \text{ cm}.$$

其中: 玻尔磁子 μ_B 及氢原子质量 m (近似等于质子质量) 在所有物理学常数表上均能查到. 这些常数均以国际单位制代入公式, μ_B 的单位是: 焦耳/特斯拉, m 的单位是: 千克. 当然, 用其它单位也行, 不过公式中其它各物理量的单位也应作相应改变. (钱剑明)

1115 (Wis, 1975)

简要描述斯忒恩-盖拉赫实验并回答下列问题: (a) 磁场为什么必须是非均匀的? (b) 非均匀磁场是怎样产生的? (c) 用一束处于基态的氢原子, 会产生什么样的图形? 为什么?

(d) 用一束汞原子 (基态 1S_0), 会产生什么样的图形? 为什么?

解: 斯忒恩-盖拉赫实验的描述可参见 1035 题.

(a) 磁矩为 μ 的原子在非均匀磁场中受力为

$$F_z = - \cdot \frac{d}{dz} (\mu B \cos\theta) = - \mu \frac{dB}{dz} \cos\theta,$$

于是原子产生偏转. 如果磁场均匀的, 则原子受力为零, 也就不会有谱线分裂.

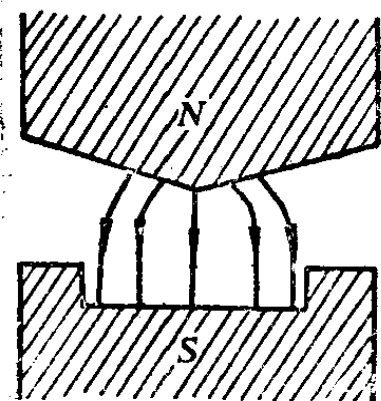


图 1.52

(b) 非均匀磁场可由不对称的磁极产生, 如图 1.52 所示.

(c) 氢原子的基态是 $^2S_{1/2}$, 因此在非均匀磁场中可分裂两条谱线, 但与通常所用的银原子相比, 氢原子两谱线裂距要大些 (裂距 $S \propto \frac{1}{m}$).

(d) 基态汞原子的总角动量 $J = 0$, 故原子磁矩 $\mu = 0$, 所以谱线不分裂. (胡 平)

1116 (Wis, 1972)

铝的原子序数为 13. (a) 试写出铝原子基态的电子组态; (b) 给出铝原子基态的光谱学符号, 并解释所有上、下角标; (c) 当外加一个很强的磁场 (Paschen-Back 区域) 时, 用能级图表示所发生的分裂现象; 标出所有能级的量子数及能级的相对间隔.

解: (a) 铝原子基态的电子组态为

$$(1s)^2 (2s)^2 (2p)^6 (3s)^2 (3p)^1.$$

(b) 铝原子基态的光谱学符号为 ${}^2P_{1/2}$ ，左上角标 2 为重数，右下角标 $1/2$ 为总角动量量子数。

(c) 在 Paschen-Back 区域的磁场作用下， LS 耦合将被破坏，自旋磁矩和轨道磁矩分别和外场相互作用，能级发生分裂。

$$\Delta E = -(\mu_L + \mu_s) \cdot \mathbf{B} = (M_L + 2M_s)\mu_B B,$$

其中： $M_L = 1, 0, -1$ ； $M_s = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ 。

可见 2P 能级分裂成 5 个次能级，相邻间隔均为 $\mu_B B$ ，各能级的量子数 (L, S, M_L, M_s) 已标于图 1.53 上。

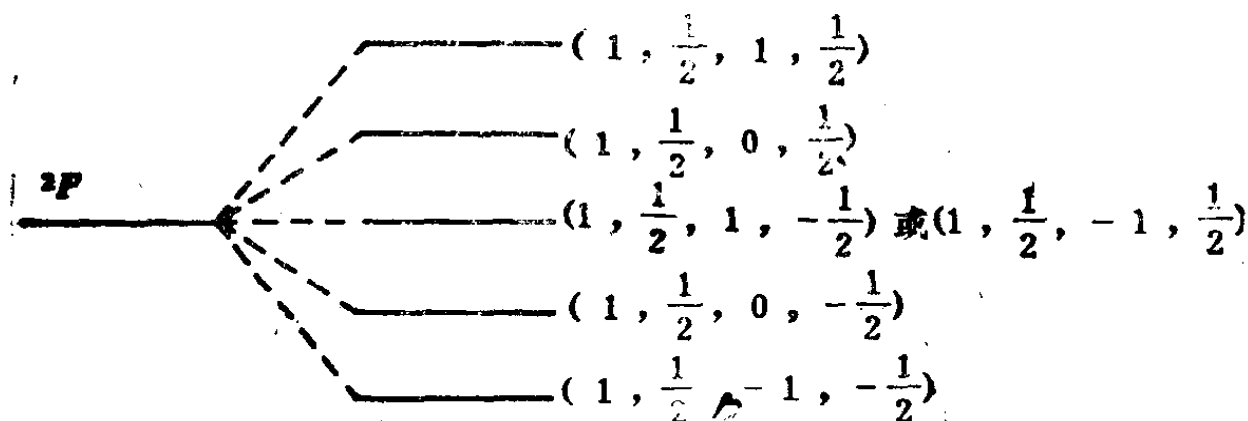


图 1.53

(钱剑明)

1117 (Wis, 1972)

一受热的中性锂原子 ($Z = 3$) 处于磁场中，下列各态中哪一个能级量低，试简要给出物理原因。(a) $3{}^2P_{1/2}$ 和 $2{}^3S_{1/2}$ ；(b) $5{}^2S_{1/2}$ 和 $5{}^2P_{1/2}$ ；(c) $5{}^2S_{3/2}$ 和 $5{}^2P_{1/2}$ ；(d) $5{}^2P_{3/2}$ 的各个子态。

解： 在外磁场中原子能级将产生移动；

$$\Delta E = M_J g \mu_B B.$$

式中： g 为朗德因子， M_J 为总角动量沿磁场方向分量的量子数， B 为外磁场强度。在1T的磁场中，分裂也只有 $5 \times 10^{-5} \text{ eV}$ 。

(a) $2^2S_{1/2}$ 中 $M_J = -\frac{1}{2}$ 的态能量最低。 $3^2P_{1/2}$ 的主量子数大，能量高于 $2^2S_{1/2}$ (约 eV 量级)。

(b) $2^2S_{1/2}$ 中 $M_J = -\frac{1}{2}$ 者能量最低。因为 2^2S 与 2^2P 之间的能量差主要是由轨道贯穿造成的，这一能量差也可达 eV 量级。

(c) $2^2P_{3/2}$ ， $2^2P_{1/2}$ 哪个低要看外磁场的强弱，若外磁场引起的劈裂比自旋轨道耦合要大，则以 $2^2P_{3/2}$ 中 $M_J = -\frac{3}{2}$ 的态能量最低，否则将是 $2^2P_{1/2}$ 中 $M_J = -\frac{1}{2}$ 的态能量最低。

(d) $2^2P_{3/2}$ 中以 $M_J = -\frac{3}{2}$ 的态能量最低。 (钱剑明)

1118 (Pri, 1977)

相应于 $J=1 \rightarrow J=0$ 跃迁的一条特定光谱线在1000高斯的磁场中分裂成三条，裂距为 0.0016 \AA ，无磁场时该谱线的波长为 1849 \AA 。(a) 研究 g 因子，决定 $J=1$ 态的总自旋是否为零；(b) 激发态的磁矩是多少？

解：(a) 处于外磁场中的原子的能级将产生劈裂，能级间距为

$$\Delta E = g \mu_B B,$$

当 $J=0$ 时，能级不劈裂。所以由 $J=1 \rightarrow J=0$ 跃迁谱线的劈裂相当于 $J=1$ 能级的劈裂 $\Delta E(J=1)$ 。

$$\Delta E(J=1) = hc\Delta\nu = hc \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2},$$

即
$$hc \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} = g\mu_B B.$$

代入题给数据，得 $g=1$ 。这说明对塞曼劈裂的贡献只来自轨道磁矩，而总自旋 $S=0$ ，并且 $L=1$ 。

(b) 该原子激发态的磁矩为

$$\mu_J = g\mu_B P_J = \sqrt{2} \mu_B. \quad (\text{章 俭})$$

1119 (Wis, 1971)

试比较氦原子在弱磁场中的跃迁： $(1s3s)^1S_0 \rightarrow (1s2p)^1P_1$ 和 $(1s3s)^3S_1 \rightarrow (1s2p)^3P_1$ 。只需定性地说明它们的主要特点。

解：在弱磁场中，能级 3P_1 ， 3S_1 和 1P_1 都劈裂为三个能级。由跃迁选择定则可知， $(1s3s)^1S_0 \rightarrow (1s2p)^1P_1$ 分裂成三条谱线， $(1s3s)^3S_1 \rightarrow (1s2p)^3P_1$ 分裂成六条谱线，如图 1.54 所示。

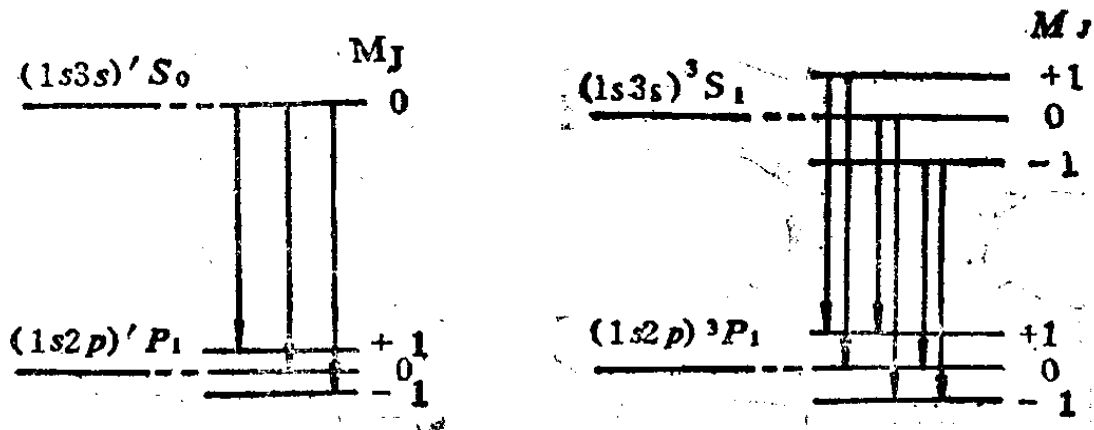


图 1.54

各谱项在磁场中的裂距为

$(1s3s)^1S_0$	$(1s2p)^1P_1$	$(1s3s)^3S_1$	$(1s2p)^3P_1$
0	$\mu_B B$	$2\mu_B B$	$\frac{3}{2}\mu_B B$

其中： μ_B 为玻尔磁子， B 为磁场强度。 (钱剑明)

1120 (Col, 1979)

就磁场对受激钠蒸汽所产生的黄光(6000 Å左右)光谱结构的影响进行试验(Zeeman效应)。观测从平行或垂直于磁场方向发出的光谱。

(a) 描述(i)磁场引入前的光谱。(ii)磁场引入后，上述两个方向上光谱改变的情况。(iii)上两种情况下光谱成分的偏振态。

(b) 上述结果如何按照原子量子态特性来解释。

(c) 如果有一个分辨率 $\frac{\lambda}{\delta\lambda}$ 为 100000 的显微镜，需要

多大磁场才能清晰地分辨由此引起的分裂。

解：(a) 如图 1.55 所示。

(i) 引入磁场前有两条谱线，分别为 5896 Å 和 5890 Å，在各个方向上都可观测到。

(ii) 引入磁场后，在平行于磁场方向可观测到 6 条 σ 线。在垂直于磁场方向可观测到 10 条谱线，即 6 条 σ 线，4 条 π 线。

(iii) σ 线两两成对为左、右旋圆偏振光。 π 线为平面偏振光。

(b) 谱线的分裂是由于原子总角动量量子化取向的结果，分裂的数目取决于跃迁选择定则，偏振情形是由于角动

量守恒的要求。

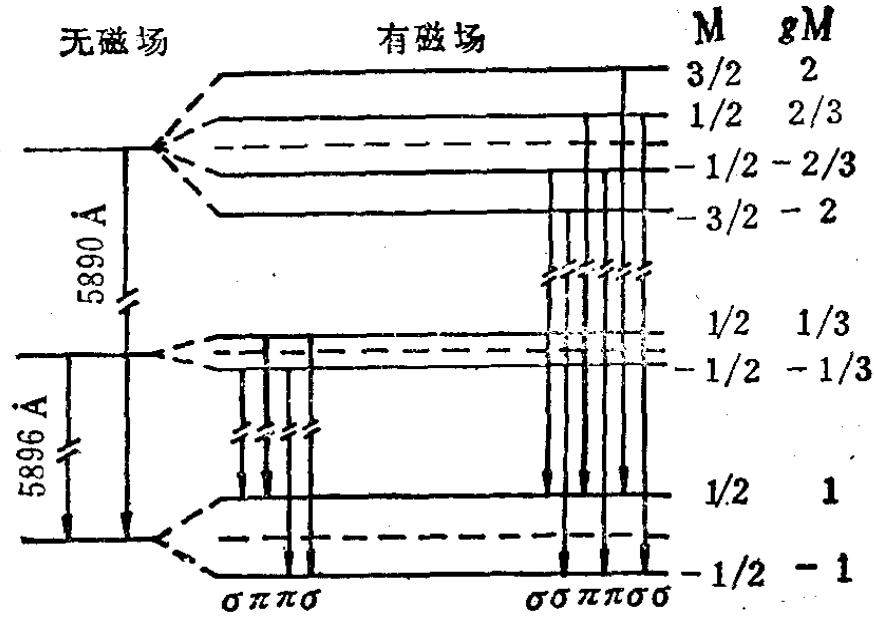


图 1.55

(c) 两条最靠近的谱线的波数差应为

$$\Delta\nu = \frac{|g_1 - g_2| \mu_B B}{hc} = \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \approx \frac{\delta\lambda}{\lambda^2},$$

其中: g_1 和 g_2 分别表示上下能级的朗德因子,

$$B = \frac{\frac{\delta\lambda}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot hc}{|g_1 - g_2| \mu_B} \approx 0.5 \text{ T}. \quad (\text{叶 坚})$$

1121 (Col, 1985)

定性讨论氢原子 $n=2$ 能级由于恒定外电场 E_0 引起的劈裂. 忽略自旋, 但需考虑 $2s$ 和 $2p$ 态的零场劈裂 w :

$$w = E_{2s} - E_{2p} \approx 10^{-5} \text{ eV},$$

分别讨论 $eE_0 a_0 \gg w$ 和 $eE_0 a_0 \ll w$ 情形, 其中 a_0 为玻尔半径.

解: 将外电场作为微扰, 则微扰哈密顿量在 $n=2$ 的四

个态： $|200\rangle$ ， $|211\rangle$ ， $|210\rangle$ ， $|21-1\rangle$ 中只在 $|200\rangle$ 和 $|210\rangle$ 间有非零矩阵元：

$$\langle 200 | H' | 210 \rangle \equiv u = -3eE_0 a_0,$$

故 $|211\rangle$ 与 $|21-1\rangle$ 态仍将简并。

(i) 对 $w \gg eE_0 a_0$ 情形， $w \gg u$ ，属于非简并微扰，能量直到二级才有非零修正：

$$E_+ = w + \frac{u^2}{w}, \quad E_- = -\frac{u^2}{w}.$$

(ii) 对 $w \ll eE_0 a_0$ 情形， $w \ll u$ ，属于简并微扰，能量劈裂：

$$E_+ = -u = 3eE_0 a_0, \quad E_- = u = -3eE_0 a_0.$$

(王力军)

1122 (MIT, 1980)

如图 1.56 所示，一束处于 $2s$ 激发态的氢原子从电容器的两极板间穿过，图中长度为 l 的区域存在均匀电场 E ，氢

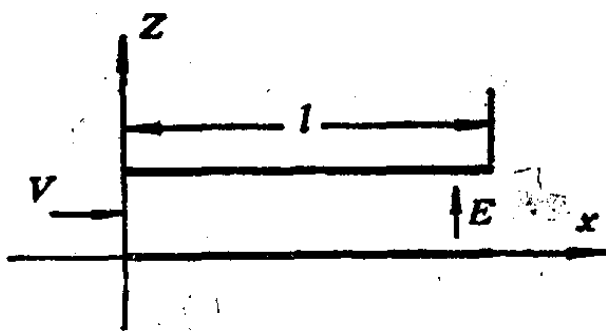


图 1.56

原子具有沿 x 轴的速度 v ，电场在 z 方向，在未加外电场的情况下，氢原子所有 $n=2$ 的态都是简并的，当外场存在时，其中某些能级便发生混合。

- $n=2$ 的哪些能级间微扰矩阵元不为零？
- 求出使简并得到最大消除的 $n=2$ 态的组合。
- 对于在 $t=0$ 时处于 $2s$ 态的系统，给出在 $t \leq \frac{l}{v}$ 时

的波函数.

(d) 求出射束中氢原子处于 $n=2$ 各个态的几率.

解: (a) 微扰哈密顿量 $H' = eErcos\theta$ 与 $\hat{l}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$

对易, 所以 H' 在 m 值不同的态间的矩阵元为零. $n=2$ 能级存在四个简并态:

$$\begin{aligned} 2s: & \quad l=0, \quad m=0. \\ 2p: & \quad l=1, \quad m=-1, \\ & \quad l=1, \quad m=0, \\ & \quad l=1, \quad m=+1. \end{aligned}$$

于是非零矩阵元只可能在 $2s$ 态和 $2p(m=0)$ 态之间存在, 具体计算得到:

$$\langle 2s | eErcos\theta | 2p(m=0) \rangle = -3eEa,$$

其中 a 为氢原子玻尔半径.

(b) 决定微扰后能级移动的久期方程为

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -3eEa & 0 & 0 \\ -3eEa & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$$\text{解得: } \lambda = 3eEa, \quad \Psi^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_{200} - \Phi_{210}),$$

$$\lambda = -3eEa, \quad \Psi^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_{200} + \Phi_{210}),$$

$$\lambda = 0, \quad \Psi = \Phi_{211}, \Phi_{21-1}.$$

(c) 记未受扰时 $n=2$ 能级的能量为 E_1 , 则由于

$$\Psi(t=0) = \Phi_{200}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_{200} - \Phi_{210}) + \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_{200} + \Phi_{210}) \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi^{(+)} + \Psi^{(-)}),
\end{aligned}$$

故 $\Psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \Psi^{(-)} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (E_1 + 3eEa)t \right] \right.$

$$\left. + \Psi^{(+)} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (E_1 - 3eEa)t \right] \right\}$$

$$= \left[\Phi_{200} \cos \left(\frac{3eEa t}{\hbar} \right) + \Phi_{210} \sin \left(\frac{3eEa t}{\hbar} \right) \right]$$

$$\cdot \exp \left(-\frac{i}{\hbar} E_1 t \right).$$

(d) 在出射时, $t = \frac{e}{v}$, 此时原子处在 $2s$ 态的几率为:

$$\begin{aligned}
\left| \exp \left(-\frac{i}{\hbar} E_1 t \right) \cos \left(\frac{3eEa t}{\hbar} \right) \right|^2 &= \cos^2 \left(\frac{3eEa t}{\hbar} \right) \\
&= \cos^2 \left(\frac{3eEa l}{\hbar v} \right).
\end{aligned}$$

原子处在 $2p(m=0)$ 态 Φ_{210} 的几率为

$$\left| \exp \left(-\frac{i}{\hbar} E_1 t \right) \sin \left(\frac{3eEa t}{\hbar} \right) \right|^2 = \sin^2 \left(\frac{3eEa l}{\hbar v} \right).$$

原子处在 $2p(m = \pm 1)$ 态的几率为零.

(任 勇)

§ 2 分子物理(1123—1142)

1123 (Buf, 1981)

(a) 假定 H_2^+ 的两个质子固定在正常间距 1.06 \AA , 示意画出电子势能沿贯穿两个质子的轴线上的变化. (b) 示意画出 H_2^+ 两个最低能级的波函数, 粗略指出它们和氢原子波函数的关系, 哪个波函数相应于 H_2^+ 的基态? 为什么? (c) 在将两个质子分开很远的极限情形下, H_2^+ 的两个最低能级将如何变化?

解: (a) 设一个质子位于原点, 另一个质子的坐标为 1.06 \AA , 电子势能为

$$V(r_1, r_2) = -\frac{e^2}{r_1} - \frac{e^2}{r_2}$$

其中 r_1 和 r_2 分别是电子离两个质子的距离, 如图 1.57 所示.

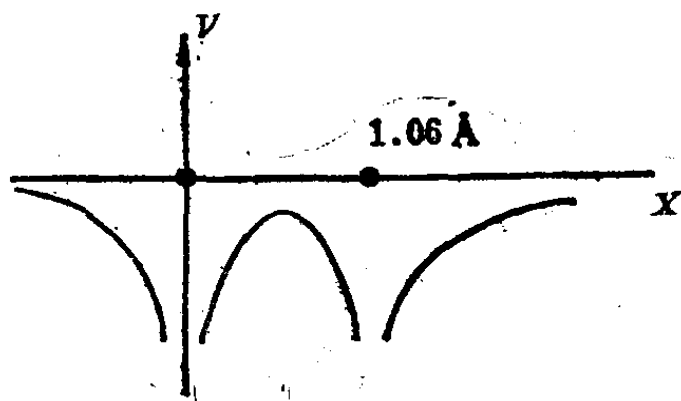


图 1.57

(b) 根据简单的分子轨道理论, H_2^+ 的分子轨道可以构成如下:

$$\Psi_s = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{1s}(1) + \Psi_{1s}(2)),$$

$$\Psi_A = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{1s}(1) - \Psi_{1s}(2)).$$

其中: $\Psi(i)$ 表示属第 i 个原子的原子轨道. Ψ_s 的能量比 Ψ_A 的能量低, 前者称为成键态, 后者称为反键态. 因此 H_2^+ 的基态为

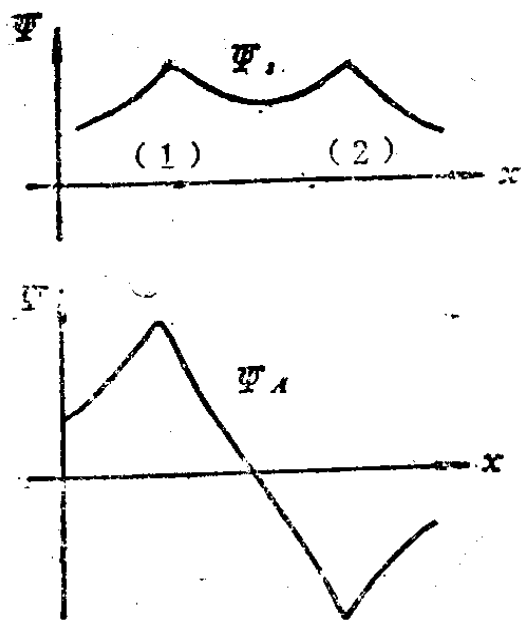


图1.58

Ψ_A 蜕变为氢原子的 $1s$ 轨道。

Ψ_s , 第一激发态为 Ψ_A . 它们是由两个氢原子的 $1s$ 轨道线性组合得到的. Ψ_s 和 Ψ_A 如图1.58所示.

由波函数示意图可以看到, Ψ_s 态在两个原子之间的电子云交叠比较大, 结合强, 所以系统的能量低些.

(c) 当两个质子远离时, 这两个轨道 (Ψ_s 和

(马 骥)

1124 (Buf, 1981)

中心力场 $V(r)$ 的薛定谔方程的径向部分为

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Psi(r)}{dr} \right) + \left[V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} \right] \Psi(r) = E\Psi(r),$$

考虑一个双原子分子, 两个核的质量为 m_1 和 m_2 , 分子中两原子之间相互作用势能的一个较好的近似是:

$$V(r) = -2V_0 \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{2\rho^2} \right),$$

此外 $\rho = \frac{r}{a}$, a 是一个特征长度.

(a) 把薛定谔方程在最小有效势附近展开, 证明对于小的 B 值, 波动方程将退化成为一个谐振子方程, 其频率为

$$\omega = \left[\frac{2V_0}{\mu a^2 (1+B)^3} \right]^{\frac{1}{2}}, \text{ 这里 } B = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu a^2 V_0}.$$

(b) 设 $\frac{\hbar^2}{2\mu} \gg a^2 V_0$, 求出振动、转动及转-振动能级(只考

虑小振动).

解: (a) 有效势为

$$V_{eff} = V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} = -2V_0 \left(\frac{1}{\rho} - \frac{B+1}{2\rho^2} \right).$$

由 $\frac{\partial V_{eff}}{\partial r} = 0$, 得 $r = r_0 = (B+1)a$, 此时 V_{eff} 取最小值. 将

V_{eff} 在 $r = r_0$ 附近展开, 并忽略高次项, 则有

$$V_{eff} \approx -\frac{V_0}{1+B} + \frac{V_0}{(1+B)^3 a^2} [r - (1+B)a]^2,$$

代入径向方程, 得到:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Psi}{dr} \right) + \left\{ -\frac{V_0}{1+B} + \frac{V_0}{(1+B)^3 a^2} [r - (1+B)a]^2 \right\} \Psi = E\Psi,$$

$$\begin{aligned} \text{即 } & -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Psi}{dr} + \frac{V_0}{(1+B)^3 a^2} [r - (1+B)a]^2 \Psi \right) \\ & = \left(E + \frac{V_0}{1+B} \right) \Psi. \end{aligned}$$

显然, 这是一个谐振子方程, 频率为

$$\omega = \left[\frac{2V_0}{\mu a^2 (1+B)^3} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

(b) 当 $\frac{\hbar^2}{2\mu} \gg a^2 V_0$ 时, 由上述谐振子方程容易得到振动

能级为

$$E_v = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega, \quad n \approx 0, 1, 2, \dots$$

转动能级为

$$E_r = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r_0} = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu(B+1)a}$$

转-振动能级为

$$E = E_v + E_r = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu(B+1)a}$$

(马 骥)

1125 (Wis, 1970)

动能为 1eV 的处于激发态的氢分子沿 z 轴运动，在运动中这些分子退激发并离解成为两个氢原子。现测得垂直于 z 轴运动的离解出的氢原子动能为 0.8eV，试计算氢分子在离解过程中释放出的能量。

解：如图 1.59 垂直于 z 轴运动的氢原子动量为

$$\begin{aligned} p_1 &= \sqrt{2m(H)E(H)} \\ &= \sqrt{2 \times 938 \times 10^6 \times 0.8} \\ &= 3.87 \times 10^4 \text{ eV}/c, \quad (c \text{ 为光速}). \end{aligned}$$

氢分子动量为

$$\begin{aligned} p_0 &= \sqrt{2m(H_2)E(H_2)} = \sqrt{2 \times 2 \times 938 \times 10^6 \times 1} \\ &= 6.10 \times 10^4 \text{ eV}/c. \end{aligned}$$

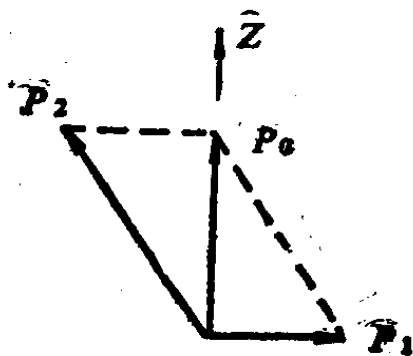


图 1.59

当离解出的一个氢原子垂直于 z 轴运动时，另一个离解出的氢原子动量为

$$p_2 = \sqrt{p_0^2 + p_1^2} = 7.22 \times 10^4 \text{ eV}/c.$$

离解出的两个氢原子的总动能

为

$$E_t = \frac{1}{2m(H)} (p_1^2 + p_2^2) = 3.58 \text{ eV},$$

所以，氢分子在离解过程中释放出的能量为 3.58 eV.

(钱剑明)

1126 (CCT, 1983)

原子间的力起因于：(a) 不同原子间相互的静电极化；
(b) 原子核间的力；(c) 原子间光子的交换。

解：答案为(a)。 (唐子洲)

1127 (CCT, 1983)

下列哪种能级的间距最小？(a) 分子转动能级；(b) 分子
振动能级；(c) 分子电子能级。

解：答案为(a)。 $\Delta E_{\text{电}} > \Delta E_{\text{振}} > \Delta E_{\text{转}}$ 。 (唐子洲)

1128 (Wis, 1976)

分子 ${}^1\text{H}^1 {}_{35}\text{Cl}^{17}$ 近似为一刚性哑铃，两核距离 $1.29 \times 10^{-10} \text{ m}$ ，计算其远红外谱线的频率间隔 ($h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ，1 原子质量单位 = $1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$)。

解：转动惯量为

$$\begin{aligned} I &= \mu r^2 \\ &= \frac{m_{\text{Cl}} m_{\text{H}}}{m_{\text{Cl}} + m_{\text{H}}} r^2 = \frac{35}{36} \times 1.67 \times 10^{-27} \times (1.29 \times 10^{-10})^2 \\ &= 2.7 \times 10^{-47} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

对远红外谱，有：

$$\nu = \frac{hcBJ(J+1) - hcB(J-1)J}{h}$$

$$= 2cBJ$$

其中 $B = \hbar^2/2Ihc$, 于是:

$$\nu = \frac{\hbar^2}{Ih} J,$$

$$\Delta\nu = \frac{\hbar^2}{Ih} = \frac{h}{4\pi^2 I} = \frac{6.6 \times 10^{-34}}{4\pi^2 \times 2.7 \times 10^{-47}}$$

$$= 6.2 \times 10^{11} \text{ Hz.} \quad (\text{胡 平})$$

1129 (Col, 1982)

(a) 氢核自旋为 $\frac{1}{2}$, 氘核自旋是 1, 试确定 H_2 , D_2 和

HD 分子的自旋态; (b) 分别对 H_2 , D_2 和 HD 分子讨论各自核自旋态允许的转动态; (c) 估计 H_2 前两个转动能级的能量差. 核动能贡献的近似量值为多少? 两个核自旋相互作用及核自旋与轨道运动相互作用贡献多少? (d) 用 (c) 的结果求出 H_2 , D_2 及 HD 在 1 K 在时核自旋态的分布.

解: (a) H_2 , H_2 中两核全同, 总波函数在交换下分别为反对称和对称, 而 HD 无此要求. 所以, H_2 的自旋可为 1 或 0; D_2 的自旋可为 2, 1 或 0; HD 的自旋可为 1/2 或 3/2.

(b) 转动态对 H_2 或 D_2 而言, 在交换核下出现因子 $(-1)^J$, J 是转动量子数. 所以

H_2 : 对自旋 1, $J=1, 3, 5, \dots$; 对自旋 0, $J=0, 2, 4, \dots$.

D_2 : 自旋为 2 或 0 时, $J=0, 2, 4, \dots$; 自旋为 1 时, $J=1, 3, 5, \dots$.

HD: 无限制.

(c) 1. 对 H_2 , 核间距近似取 $a = 1 \text{ \AA}$, 则能量差 ΔE

$$= \frac{\hbar^2}{2I} \times (1 \times (1+1) - 0 \times (0+1)) \approx \frac{2\hbar^2}{m_p a^2} \approx \frac{m_e}{m_p} E_0.$$

2. 核的动能除转动外, 还有振动的贡献, 作为估算, $\Delta E \approx \hbar\omega$. 核间力 $\approx e^2/a$, 梯度 $\approx e^2/a^3$, 故 $\omega \approx \sqrt{\frac{k}{m_p}}$

$$= \sqrt{\frac{e^2}{m_p a^3}} = \frac{\hbar}{a^2 m_p} \sqrt{\frac{m_p}{m_e}}. \text{ 所以 } E_v \approx \sqrt{\frac{m_e}{m_p}} E_0.$$

3. 核自旋之间相互作用 $\Delta E \approx \mu_N^2/a^3 \approx \left(\frac{m_e}{m_p}\right)^2 a^2 E_0.$

4. 核自旋与电子轨道运动的相互作用为

$$\Delta E \approx \mu_N \mu_B / a_0^3 \approx a^2 \left(\frac{m_e}{m_p}\right) E_0.$$

(d) 对 H_2 , 转动惯量 $I = \mu a^2 = \frac{1}{2} m_p a^2 \approx 2 m_p a_0^2$, 故

$l=0$ 与 $l=1$ 转动态能量差为

$$\Delta E_{H_2} = \frac{\hbar^2}{2I} \times (2 - 0) = \frac{2m_e}{m_p} E_0,$$

对 D_2 , 因核质量大一倍, 故

$$\Delta E_{D_2} = \frac{1}{2} \Delta E_{H_2} = \frac{m_e}{m_p} E_0.$$

于是对 H_2 和 D_2 均有 $\exp(-\Delta E/kT) \approx 0$ (其中 $T = 1\text{K}$), 由 Boltzmann 分布律, 可知 H_2 和 D_2 都处于最低态.

自旋态简并度: 对 H_2 , $g_{s=1} : g_{s=0} = 3:1$; 对 D_2 , $g_{s=2} : g_{s=1} : g_{s=0} = 5:3:1$; 对 HD , $g_{s=2/3} : g_{s=1/2} = 2:1$. 因此在 $T = 1\text{K}$, 根据布居比 g_2/g_1 , 可知 H_2 全部处在自旋 0 态 ($S = 0$); D_2 处在 $S = 2$ 态或 $S = 1$ 态, 相对比例是 $5:1$; HD

处于 $S = 3/2$ 或 $S = 1/2$ 态, 相对比例 $2 : 1$. (王力军)

1130 (Chi, 1980)

考虑(同核)双原子分子 N_2^+ . 已知氮的核自旋 $I = 1$, 试由此导出氮分子光谱中两相邻转动谱线的强度比为 $2 : 1$.

解: 氮的核自旋 $I = 1$, 因此氮分子的总波函数必须是对称的. 转动量子数 J 为偶数的能级必定是自旋偶态, J 为奇数的转动态必定是自旋反对称态, 且

$$\frac{\text{自旋对称态简并度}}{\text{自旋反对称态简并度}} = \frac{I+1}{I} = 2:1.$$

由于同核双原子分子只有拉曼谱, 在跃迁中自旋波函数的对称性不变, 于是得到相邻谱线的强度比为 $2 : 1$. (叶 坚)

1131 (Wis, 1972)

若一个中子与氧分子碰撞并使氧分子的转动能级激发, 试计算该中子必须具备的最小能量. 已知氧分子键长为 1.2 \AA .

解: 氧分子的转动惯量为

$$I = \mu r^2 = \frac{m}{2} r^2,$$

式中: r 为氧分子键长, m 为氧原子质量.

转动能级:

$$E_J = \frac{h^2}{8\pi^2 I} J(J+1), \quad J = 0, 1, 2, \dots$$

若要激发氧分子转动能级, 氧分子需吸收的最小能量为

$$\begin{aligned} E_{\min} &= E_1 - E_0 = \frac{h^2}{4\pi^2 I} = \frac{h^2}{2\pi^2 m r^2} \\ &= 5.7 \times 10^{-23} \text{ J} = 3.6 \times 10^{-4} \text{ eV}. \end{aligned}$$

由于中子质量远小于氧分子质量，故所求中子的最小动能近似为 $3.6 \times 10^{-4} \text{ eV}$. (钱剑明)

1132 (Wis, 1978)

(a) 利用氢原子基态波函数(包括电子自旋)写出满足泡利不相容原理的氢分子波函数. 略去两个电子绕一个核运动的项, 用总自旋将波函数进行分类. (b) 假定哈密顿量的势能项是源于库仑力, 试定性讨论上面各态的能量, 分两核相距正常及相距很远两种情况. (c) “交换力”是什么意思?

解: (a) 如图1.60为方便起见, 下面将采用原子单位 a (玻尔半径) $= e = \hbar = 1$. 氢分子波函数可写为

$$\Psi_s = [\Psi(r_{a1})\Psi(r_{b2}) + \Psi(r_{a2})\Psi(r_{b1})]\chi_0$$

$$\Psi_A = [\Psi(r_{a1})\Psi(r_{b2}) - \Psi(r_{a2})\Psi(r_{b1})]\chi_1$$

式中 χ_1, χ_0 分别为自旋三态和

单态的波函数, $\Psi(r) = \frac{\lambda^{3/2}}{\sqrt{\pi}}$

$\cdot e^{-\lambda r}$, 当 $\lambda=1$ 时即为氢原子基态空间波函数.

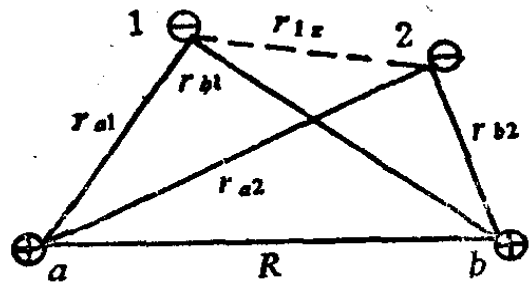


图 1.60

(b) 由题设, 哈密顿量可

写为

$$H = -\frac{1}{2}(\nabla_1^2 + \nabla_2^2) + \frac{1}{r_{12}} - \left(\frac{1}{r_{a1}} + \frac{1}{r_{b2}} + \frac{1}{r_{b1}} + \frac{1}{r_{a2}} \right) + \frac{1}{R}$$

当两核相距为分子间正常距离时, 对自旋单态 ($S=0$), H_2 电子空间波函数交换对称, 此时两个电子在空间上靠近的几率较大, 能量较低; 对自旋三重态 ($S=1$), H_2 的电子空间波函数交换反对称, 两个电子靠近的几率小, 能量较高. 因此 H_2 基态波函数对应于 Ψ_s . 当两核相距甚远时, 粒子变得可

以分辨，此时 Ψ_s 和 Ψ_A 态的差别亦逐渐消失。

(c) 由于空间波函数的交换对称或反对称性引起的“交换电子云密度”分布 $\rho_{ab}(1) = \Psi^*(r_{a1})\Psi(r_{b1})$ 与 $\rho_{ab}(2) = \Psi^*(r_{b2})\Psi(r_{a2})$ 之间的库仑排斥力叫做“交换力”。在氢原子结合能的贡献中，它表现为

$$\varepsilon = \iint d\tau_1 d\tau_2 \frac{1}{r_{12}} \Psi^*(r_{a1})\Psi(r_{b1})\Psi(r_{a2})\Psi^*(r_{b2}).$$

当两核相距很远时，由于粒子可分辨，全同粒子的交换对称或反对称性就不必考虑，因而也不会出现“交换力”，可见交换力纯属量子效应。 (杨永安)

1133 (Wis, 1971)

(a) 考虑一哑铃分子的基态，每个核的质量为 1.7×10^{-24} g，平衡核间距是 0.75 \AA 。视核为不可分辨的，试计算前两个转动能级的能量差。 $\hbar = 1.05 \times 10^{-27} \text{ erg}\cdot\text{s}$ 。(b) 当氢原子形成 H_2 时，75%的分子处于正氢态，其余处于仲氢态，这两个态的差别是什么？75%又来自哪里？

解：(a) 转动惯量为

$$I = \mu r^2 = \frac{1}{2} m r^2, \quad (r \text{ 为核间距}).$$

能级
$$E_J = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1),$$

其中
$$J = \begin{cases} 0, 2, 4, \dots & (\text{仲氢}) \\ 1, 3, 5, \dots & (\text{正氢}) \end{cases}$$

由于
$$\frac{\hbar^2}{2I} = \frac{\hbar^2}{m r^2} = \frac{(\hbar c)^2}{m c^2 r^2} = \frac{1973^2}{9.4 \times 10^8 \times 0.75^2}$$

$$= 7.6 \times 10^{-3} \text{ eV},$$

所以前两个转动能级 ($J = 0, 1$) 的能量差为

$$\Delta E_{0,1} = \frac{\hbar^2}{I} = 1.5 \times 10^{-2} \text{eV}.$$

(b) 正氢态: 核总自旋 $I = 1$ 是自旋对称态

仲氢态: 核总自旋 $I = 0$ 是自旋反对称态.

正氢和仲氢的数量比来自于这两个态的自旋态简并度之比:

$$\frac{\text{正氢态自旋简并度}}{\text{仲氢态自旋简并度}} = \frac{I+1}{I} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{2}} = 3:1,$$

其中 I 为氢原子核的自旋.

(叶 坚)

1134 (Buf, 1981)

^{14}N 核的自旋为 $I = 1$. 假设双原子分子 N_2 在常温下没有振动且忽略电子运动, 试求 N_2 中正氮及仲氮的相对丰度 (正氮: 反对称自旋态. 仲氮: 对称自旋态). 当温度降到绝对零度时, 相对丰度发生了什么变化? (证明你的结论!)

解: ^{14}N 核是自旋 $I = 1$ 的玻色子, 交换两个氮核时波函数要求是对称的. 因此对于自旋态是对称的仲氮, 转动量子数 J 必须取偶数, 这样才可使总波函数对称. 而对自旋态是反对称的正氮, J 应为奇数.

N_2 分子的转动能级为

$$E = \frac{\hbar^2}{2H} J(J+1), \quad J = 0, 1, 2, \dots$$

其中 H 为转动惯量. 按统计物理, 我们有:

$$\frac{\text{仲丰度}}{\text{正丰度}} = \frac{\sum_{J \text{ 偶}} (2J+1) \exp \left[-\frac{\hbar^2}{2HkT} J(J+1) \right]}{\sum_{J \text{ 奇}} (2J+1) \exp \left[-\frac{\hbar^2}{2HkT} J(J+1) \right]} \cdot \frac{I+1}{I},$$

如果 $\hbar^2/HkT \ll 1$, 则可以近似地把上式中的求和通过积分算出:

$$\begin{aligned} & \sum_{J \text{ 偶}} (2J+1) \exp \left[-\frac{\hbar^2}{2HkT} J(J+1) \right] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (4m+1) \exp \left[-\frac{\hbar^2}{2HkT} 2m(2m+1) \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \exp \left(-\frac{\hbar^2 x}{2HkT} \right) dx = HkT/\hbar^2, \end{aligned}$$

式中: $x = 2m(2m+1)$.

$$\begin{aligned} & \sum_{J \text{ 奇}} (2J+1) \exp \left[-\frac{\hbar^2}{2HkT} J(J+1) \right] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (4m+3) \exp \left[-\frac{\hbar^2}{2HkT} (2m+1)(2m+2) \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \exp \left(-\frac{\hbar^2 y}{2HkT} \right) dy \\ &= \frac{HkT}{\hbar^2} \exp \left(-\frac{\hbar^2}{HkT} \right), \end{aligned}$$

式中: $y = (2m+1)(2m+2)$.

由上述计算结果, 得到:

$$\frac{\text{仲丰度}}{\text{正丰度}} = \frac{I+1}{I} \exp \left(\frac{\hbar^2}{HkT} \right) \approx \frac{I+1}{I} = 2:1.$$

当 $T \rightarrow 0$ 时, $\frac{\hbar^2}{HkT} \gg 1$, 于是有:

$$\sum_{J\text{偶}} (2J+1) \exp \left[-\frac{\hbar^2}{2HkT} J(J+1) \right] \approx 1.$$

$$\sum_{J\text{奇}} (2J+1) \exp \left[-\frac{\hbar^2}{2HkT} J(J+1) \right]$$

$$\approx 3 \exp \left(-\frac{\hbar^2}{HkT} \right),$$

因此

$$\frac{\text{仲丰度}}{\text{正丰度}} \approx \frac{I+1}{3I} \exp \left(\frac{\hbar^2}{HkT} \right) \rightarrow \infty.$$

也即温度降到绝对零度时, N_2 全部变成仲氮. (何晓东)

1135 (Chi, 1979)

对 HCl 观测到一系列吸收线, 波数 (cm^{-1}) 分别是 83.03, 103.73, 124.30, 145.03, 165.51 和 185.86. 这些是振动还是转动跃迁? 如果是前者, 特征频率是多少? 如果是后者, 相应的量子数 J 值是多大? 在此情况下估计核间距.

解: 振动能级之间的间距一般约为 10^{-1}eV 即 10^3cm^{-1} 的量级, 由此判定上述谱线乃系转动能级之间的跃迁所致.

根据题设, 谱线的间距平均为 20.57cm^{-1} , 于是得 $B = \frac{20.57}{2} = 10.29 \text{cm}^{-1}$.

由转动能级表达式 $\bar{\nu} = BJ(J+1)$, 谱线的波数 $\bar{\nu} = 2BJ'$, 其中 J' 表示跃迁中涉及的较高能级的转动量子数. 由题设, $J' = 4, 5, 6, 7, 8$.

由 $B = \frac{\hbar^2}{2Ihc} = \frac{\hbar}{4\pi Ic}$, 得到 $I = \frac{\hbar}{4\pi Bc}$, 于是核间距为

$$R = \sqrt{\frac{I}{\mu}} = \sqrt{\frac{9\hbar}{35\pi M B c}},$$

其中 $\mu = \frac{35}{36}M$ 是 HCl 分子的折合质量, $M = 1.66 \times 10^{-27} \text{kg}$.

将各量的数值代入上式, 得 $R = 1.29 \text{ \AA}$. (叶 坚)

1136 (Chi, 1980)

当首次测到氮 ($^{14}\text{N}^{14}\text{N}$) 的拉曼谱时 (这在 Chadwick 1932 年发现中子之前), 发现氮核的自旋 $I = 1$, 这使许多科学家困惑不解. 试解释 (a) 他们怎样从拉曼谱发现核自旋 $I = 1$? (b) 为什么他们会对发现氮核 $I = 1$ 表示惊奇? (1932 年以前, 人们认为原子核包含质子和电子)

解: (a) $^{14}\text{N}^{14}\text{N}$ 的拉曼谱反映了转动能级的结构. 对于一个象 $^{14}\text{N}^{14}\text{N}$ 这样的同核双原子分子, 如果其核自旋为 I , 它的自旋态分成对称的和反对称的两组, 其比例为 $\frac{I+1}{I}$. 由于两个氮核是全同玻色子, 其总波函数要求是对称的. 当转动波函数为对称 (此时转动量子数 J 取偶数) 时, 自旋波函数亦为对称. 反之 J 是奇数时, 自旋态只能取反对称态. 根据拉曼跃迁的选择的定则: $\Delta J = 0, \pm 2$, 这将造成拉曼谱中谱线强度按 $\frac{I+1}{I}$ 的比例交替变化, 由实验测得的强度比可定出 $I = 1$.

(b) 根据当时的观点, 氮原子核由 14 个质子和 7 个电子构成, 核自旋应是半整数, 这与实验结果不一致.

(叶 坚)

一分子具有一个简正模式，简正坐标为 Q ，频率为 Ω ，分子极化率是 $\alpha(Q)$ 。它处于一外加入射场 $E = E_0 \cos \omega_0 t$ 中。把该分子考虑为一个经典谐振子。(a) 证明该分子能散射出频率为 ω_0 (瑞利散射) 和 $\omega_0 \pm \Omega$ (一级拉曼散射) 的辐射；(b) 对于图 1.61 所示的 $\alpha(Q)$ 有无一级拉曼散射？(c) 氧分子 O_2

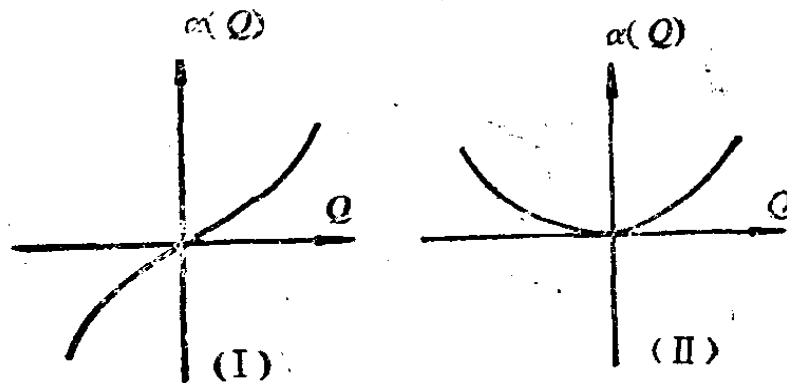


图 1.61

会显示一级拉曼效应吗？ O_2 会有一级红外吸收带吗？简要解释你的答案。

解：(a) 将 $\alpha(Q)$ 展开：

$$\alpha(Q) = \alpha_0 + \left(\frac{d\alpha}{dQ} \right)_{Q=0} Q + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\alpha}{dQ^2} \right)_{Q=0} Q^2 + \dots$$

考虑其中的前两项，偶极矩为

$$\begin{aligned} P = \alpha E &= \left[\alpha_0 + \left(\frac{d\alpha}{dQ} \right)_{Q=0} Q \cos \Omega t \right] E_0 \cos \omega_0 t \\ &= \alpha_0 E_0 \cos \omega_0 t + Q E_0 \left(\frac{d\alpha}{dQ} \right)_{Q=0} \frac{1}{2} \cdot [\cos(\omega_0 + \Omega)t \\ &\quad + \cos(\omega_0 - \Omega)t]. \end{aligned}$$

振荡偶极子的辐射频率与其振荡频率相同， P 的振荡频率有

$\omega_0, \omega_0 \pm \Omega$, 所以分子的散射也有这些频率.

(b) 如果有上述的一级拉曼效应, 就要求: $\left(\frac{d\alpha}{dQ}\right)_{0-0} \neq 0$. 故图 1.61(I) 所示的情况有一级拉曼效应. 而图 1.61(II) 的情形没有一级拉曼效应.

(c) 氧分子 O_2 会显示一级拉曼效应, 因为它的极化率会随简正坐标改变, $\left(\frac{d\alpha}{dQ}\right)_{0-0} \neq 0$. 但 O_2 没有一级红外吸收带, 这是因为 O_2 的电荷分布完全对称, 固有电偶极矩为零, 振动和转动也不产生电偶极矩变化. (林 辰)

1138 (Chi, 1980)

图1.62示出在室温下 HCl 蒸汽的透射率随波数(波长的

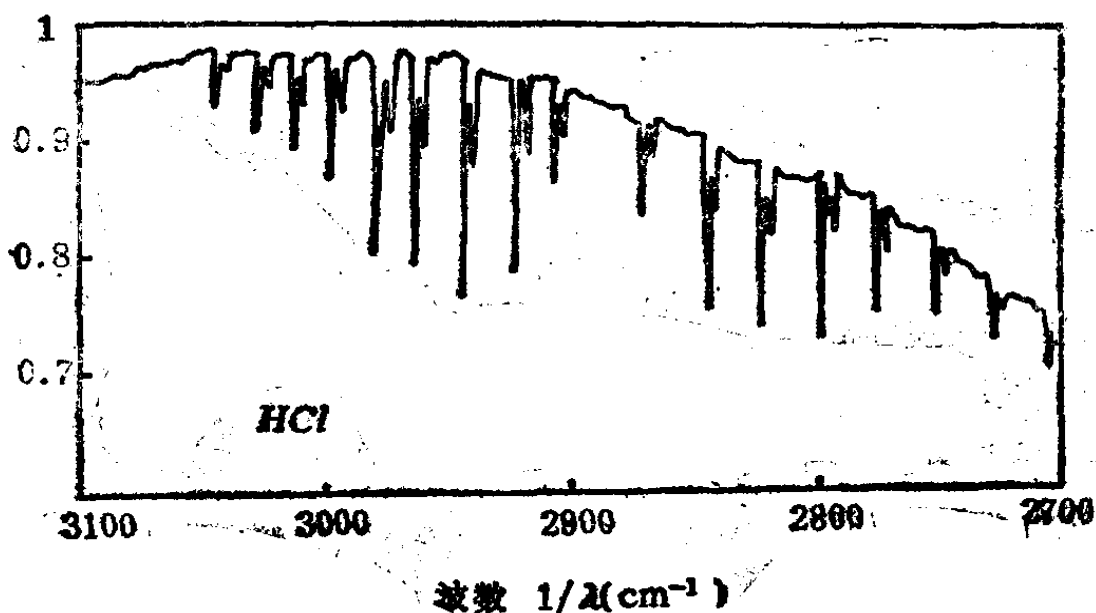


图 1.62

倒数, 单位 cm^{-1}) 的变化情形, 从左到右是波数减小的方向.

解释透射谱的所有特征并获得关于 HCl 的定量知识.

示意绘出标有量子数的能级图以帮助你的解释。不考虑 $\lambda^{-1} < 2900 \text{ cm}^{-1}$ 时上基线的缓慢下降并假设上基线代表 100% 的透射率。吸收线的相对大小是正确的。

解：图 1.62 中的吸收谱是 Cl 的两种同位素 Cl^{35} 和 Cl^{37} 的化合物 HCl^{35} , HCl^{37} 的振动-转动谱。跃迁能量为

$$E_{v,k} = \left(v + \frac{1}{2} \right) h\nu_0 + \frac{\hbar^2 k(k+1)}{2I},$$

其中： v, k 分别为振动和转动量子数， ν_0 为特征频率， I 为转动惯量。

跃迁的选择定则为 $\Delta v = \pm 1$, $\Delta k = \pm 1$ 。

光谱中间所缺少的一条吸收线相应于 $k=0 \rightarrow k'=0$ ，但它是禁戒的，如图 1.63 所示。这条被禁戒的吸收线位于 $\lambda^{-1} =$

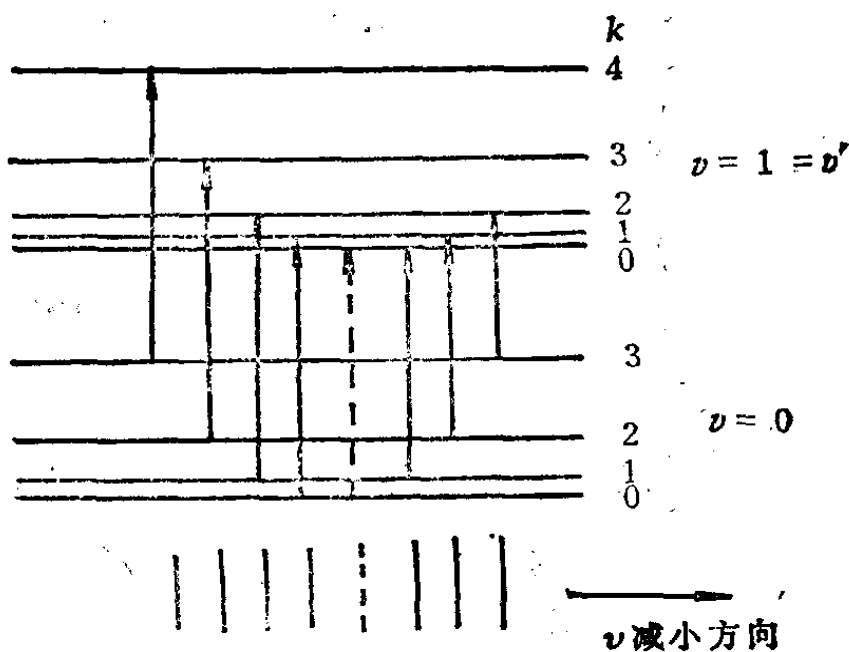


图 1.63

390 cm^{-1} 处，即 $\nu_0 = c\lambda^{-1} = 8.67 \times 10^{13} \text{ s}^{-1}$ (c 为光速)。

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C}{\mu}}$$

其中 C 为作用力常数, μ 为 HCl 分子折合质量.

$$\mu = \frac{35}{36} m_{\text{H}} = 1.62 \times 10^{-24} \text{ g},$$

从而求得 $C = 4.8 \times 10^5 \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-2} = 30 \text{ eV} \cdot \text{\AA}^{-2}$.

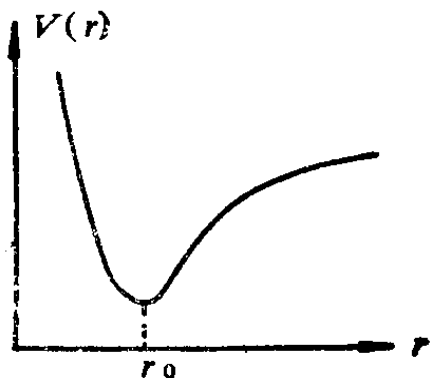


图 1.64

图 1.64 是 HCl 分子中两原子间相互作用势的大致形状, 力

常数 C 就等于 $\frac{1}{2} \left. \frac{d^2 V(r)}{dr^2} \right|_{r=r_0}$

(小振动近似). 从图 1.62 转动谱线的间距可确定:

$$B \approx 10.25 \text{ cm}^{-1},$$

$$\frac{\hbar^2}{2I} = Bhc \approx 1.27 \times 10^{-3} \text{ eV}.$$

于是求得 $r_0 = 1.30 \text{ \AA}$.

从图 1.62 中两套谱线的强度比可以推知该样品中 Cl 同位

素的丰度比. 对于 HCl^{35} , $\mu = \frac{35}{36} m_{\text{H}}$; 而对 HCl^{37} , $\mu = \frac{37}{38} m_{\text{H}}$,

故 HCl^{37} 所对应的谱线波数较小. 从图中可以看出两套谱线的强度比约为 3:1, 所以 Cl^{35} 和 Cl^{37} 的丰度比约为 3:1.

(林 辰)

1139 (Col, 1985)

(a) 分子中的电子被局限在典型分子大小的体积内, 利用这一事实估计电子激发态的能量间隔 ($E_{\text{电子}}$); (b) 由于分子中核运动, 引起电子波函数变化, 进而导致电子能量的改变. 核在能量最小的平衡位置附近振动, 这个能量是电子的能量加上核间的库仑排斥能. 假设核处于一个谐振子势中,

估计振动频率及其能量 ($E_{\text{振}}$)；(c) 估计核对平衡位置的偏离；
 (d) 估计转动能量 ($E_{\text{转}}$)；(e) 估计比值 $E_{\text{电子}} : E_{\text{振}} : E_{\text{转}}$ ，将结果用 $\frac{m_e}{m_p}$ 表示出来，式中 m_e 和 m_p 分别是电子和核的质量。

解：(a) 由测不准关系可知激发态间能级间隔为 $E_{\text{电子}} \approx \frac{\hbar^2}{2m_e d^2}$ ，式中 d 是标志分子线度的量， d 近似玻尔半径 a_0 。

(b) 平衡时，核间库仑斥力 $f \approx \frac{e^2}{d^2}$ ，斥力的梯度（谐振子势的力常数） $k \approx \frac{f}{d} \approx \frac{e^2}{d^3}$ ，故频率

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_p}} \approx \sqrt{\frac{m_e}{m_p}} \cdot \frac{\hbar}{2m_e d^2}$$

于是 $E_{\text{振}} = \hbar\omega \approx \sqrt{\frac{m_e}{m_p}} E_{\text{电子}}$ 。

(c) 由 $E_{\text{振}} = \frac{1}{2} m \omega^2 \Delta x^2 = \hbar\omega$ ，可知 $\Delta x \approx \sqrt{\frac{m_e}{m_p}} \cdot d$ 。

(d) 转动能量 $E_{\text{转}} \approx \frac{\hbar^2}{2I}$ ，而 $I \approx m_p d^2$ ，故 $E_{\text{转}} \approx \frac{m_e}{m_p} E_{\text{电子}}$ 。

(e) 作为估计，有

$$E_{\text{电子}} : E_{\text{振}} : E_{\text{转}} \approx 1 : \sqrt{\frac{m_e}{m_p}} : \frac{m_e}{m_p} \quad (\text{王力军})$$

1140 (Wis, 1977)

示意画出 HF 分子的势能随核间距变化的曲线 $V(r)$ ，在图上标出离解能。(a) 为估计振动能级，在 $V(r)$ 最小值附近可作何种简单近似？如果 HF 的零点能为 0.265 eV，试用所作的近似估算 DF 分子的零点能 (D-氘，F = ^{19}F)；(b) 在上述近似下，叙述 HF 分子中振动能级间电磁跃迁的选择

定则，并简要说明理由。这些跃迁中光子能量多大？

解： $V(r)$ 曲线如图 1.65 所示，图中 E_d 表示离解能。

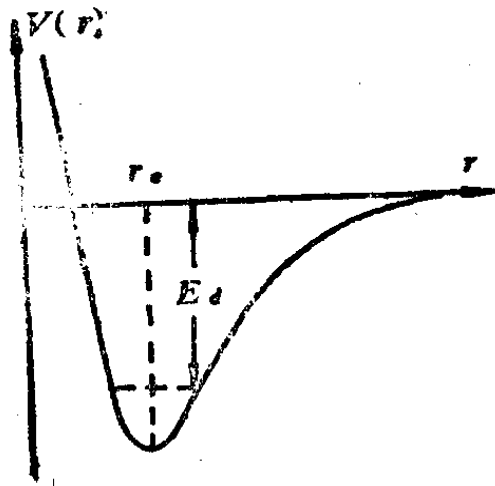


图 1.65

(a) 在 $V(r)$ 最小值附近作

$$\text{简谐近似 } V(r) \approx \frac{1}{2}k(r-r_0)^2,$$

这样可估算出振动能级。

$$\text{零点能为 } E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0, \text{ 其}$$

$$\text{中 } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\mu}}, \mu \text{ 为振动体系的}$$

折合质量。

DF 与 HF 相比是氘取代了氢，因此两者有近似相同的势能曲线，即 $k(\text{DF}) \approx k(\text{HF})$ 。但它们的折合质量不同。

$$\mu(\text{DF}) = \frac{m(\text{D})m(\text{F})}{m(\text{D}) + m(\text{F})} \approx 1.8 \text{ u},$$

$$\mu(\text{HF}) = \frac{m(\text{H})m(\text{F})}{m(\text{H}) + m(\text{F})} \approx 0.95 \text{ u},$$

式中： μ 为核子质量单位。于是：

$$\frac{E_0(\text{HF})}{E_0(\text{DF})} \approx \sqrt{\frac{\mu(\text{DF})}{\mu(\text{HF})}}.$$

DF 分子的零点能为

$$E_0(\text{DF}) \approx \sqrt{\frac{\mu(\text{HF})}{\mu(\text{DF})}} E_0(\text{HF}) \approx 0.193 \text{ eV}.$$

(b) 在简谐近似下，振动能级为

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

这些能级间电磁跃迁的选择定则为

$$\Delta n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

而这些能级间电偶极跃迁的选择定则为

$$\Delta n = \pm 1.$$

选择定则由跃迁矩阵元及宇称变化决定。电磁辐射中包括所有的电磁跃迁极性，故对宇称变化没有要求，因此选择定则为 $\Delta n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ 。而对电偶极跃迁，跃迁前后宇称应发生变化，又跃迁矩阵元只在 $\Delta n = \pm 1$ 时才不为零，故选择定则为 $\Delta n = \pm 1$ 。

纯振动能级间跃迁放出的光子能量近似为 ω_0 ，约 $0.1 \sim 1\text{eV}$ 。
(钱剑明)

1141 (Pri, 1980)

双原子分子例如 HBr 的激发能量来自于电子、振动及转动的贡献。(a) 作粗略近似，估计上述三项(电子、振动、转动)对能量贡献的大小，用基本物理常数表示，例如 M, m_e, e, \dots ，其中 M 是核的质量；(b) 在本小题及以下各小题中都假定分子处在电子基态。试问辐射跃迁的选择定则是什么？给出理由；(c) HBr 气体的红外吸收谱如图 1.66 所示(红外吸收不包括电子跃迁)，试由此决定 HBr 的转动惯量 I 和振动频率 ω_0 ；(d) 仔细观察可发现两相邻吸收线间的距离随能量增加而减小，为什么？(e) 这个吸收谱与同核分子如 H_2 或 D_2 的吸收谱有何不同？

解：(a) 用 a 表示双原子分子线度。由于价电子在线度为 a 的空间区域中运动，动量的不确定度 $\Delta p \approx \hbar/a$ ，因此电子的零点能(或相邻电子能级之能量差)量级为

$$E_{\text{电}} \approx \frac{(\Delta p)^2}{m_e} \approx \frac{\hbar^2}{m_e a^2}.$$

用质量为 m , 倔强系数为 k 的谐振子作为核振动的模型. 核间距离改变的数量应该引起电子波函数显著失真, 即应与能量改变的数量级 $E_{\text{电}}$ 相联系: $ka^2 \approx E_{\text{电}}$, 故

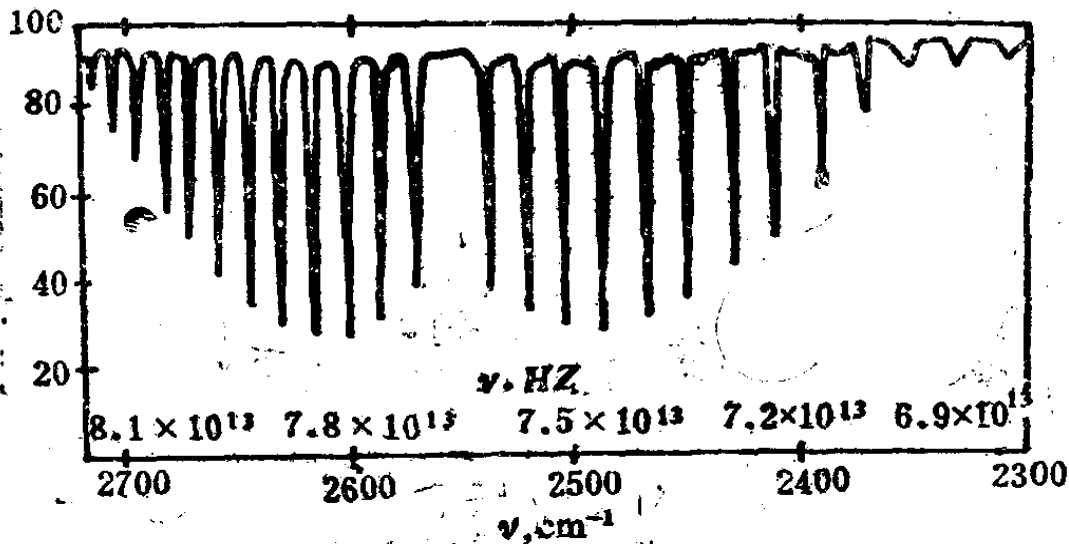


图 1.66

$$E_{\text{振}} \approx \hbar \omega \approx \hbar \sqrt{\frac{k}{M}} \approx \left(\frac{m_e}{M}\right)^{\frac{1}{2}} E_{\text{电}}$$

分子的转动能级可以当作转动惯量 $I \approx ma^2$ 的转子能级来处理, 于是:

$$E_{\text{转}} \approx \frac{\hbar^2}{I} \approx \frac{m_e}{M} E_{\text{电}}$$

(b) 辐射跃迁的选择定则为: $\Delta J = \pm 1$; $\Delta v = \pm 1$. 其中 J 是转动量子数, v 为振动量子数. 这是由于电子处于基态, 没有电子态的跃迁, 只有转动和振动能级间的跃迁.

(c) 由图 1.66 可决定相邻吸收线间的距离(近似看作等间距) $\Delta \nu = 18 \text{ cm}^{-1}$, 利用 $\Delta \nu = 2B$ 以及 $B = \frac{\hbar^2}{8\pi^2 I c}$, 可得转

动惯量为

$$I = \frac{\hbar}{4\pi^2 c \Delta \nu} = 3.1 \times 10^{-40} \text{g} \cdot \text{cm}^2.$$

又由谱线的基线 $\bar{\nu}$ 可得到振动频率:

$$\omega_0 = c\bar{\nu}_0 = 7.7 \times 10^{13} \text{Hz}.$$

(d) 实际上, 双原子分子并不是简谐振子, 随着振动能级增高, 平均核间距要稍稍增大, 所以 B 值要略微减小为

$$B_v = B_e - \left(v + \frac{1}{2}\right) \alpha_e.$$

这里 B_e 是相应于平衡距离的 B 值, $\alpha_e > 0$ 为一常数. 从能级 E 跃迁到 E' ($E < E'$) 时, 产生的吸收谱线的波数为

$$\nu = \frac{E' - E}{hc} = \frac{1}{hc} [(E'_{\text{振}} + E'_{\text{转}}) - (E_{\text{振}} + E_{\text{转}})]$$

$$= \bar{\nu}_0 + B' J' (J' + 1) - B J (J + 1),$$

式中 $B' < B$. 对于 R 支, $J' = J + 1$, 于是:

$$\bar{\nu}_R = \bar{\nu}_0 + (B' + B) J' + (B' - B) J'^2.$$

谱线间距为

$$\Delta \nu = (B' + B) + (B' - B) (2J' + 1),$$

其中 $J' = 1, 2, 3, \dots$. 可见当谱线能量增大时, J' 值变大, $\Delta \nu$ 减小.

对于 P 支, $J' = J - 1$, 故有

$$\bar{\nu}_P = \bar{\nu}_0 - (B' + B) J + (B' - B) J^2,$$

$$\Delta \nu = (B' + B) - (B' - B) (2J + 1),$$

其中 $J = 1, 2, 3, \dots$. 当谱线能量增大时, J 值减小, 从而 $\Delta \nu$ 减小.

(e) 象 H_2 或 D_2 这样的同核双原子分子, 它们是没有电偶极矩的, 这些分子的振动、转动并不涉及电偶极子的吸收或辐射, 因此它们对整个红外区是透明的. (章 俭)

最近 G. Zweig 讨论了氦核的催化聚变反应, ded 负氦核分子中两个氦核由一个电子结合在一起, 电子始终在两核之间运动. 原则上, 一个中子可由一个质子隧穿至另一个质子, 成为氦 + 质子 + 能量, 但由于两氦核之间距离很大, 以致于这种隧穿几率几乎为零. 假如电子被一个很重的夸克 (带电 $-4/3e$) 代替, 则两氦核间距变小, 隧穿速率可变大. 反应以后, 夸克逃离并俘获另一氦核组成 dQ 原子 (电荷 $-e/3$), 接着这原子衰变到基态, 再俘获另一氦核于 n 值很大的轨道上并再次衰变到基态, 然后很快发生聚变, 夸克又一次逃离.

(a) 假设夸克质量比氦核质量大得多, 则对 dQd 分子基态, 两氦核之间的距离是多少?

(b) dQ 俘获一个氦核于 n 值很大的轨道上, 试写出其衰变到基态所需时间的表达式, 毋需估计数值.

(c) 试写出在氦核中, 中子和质子之间距离 $r \geq r_0$ ($r_0 \gg 10^{13} \text{cm}$) 的几率的表示式, 此处需要引入氦核的束缚能等, 但不必估计表达式的数值.

解: (a) 可把 dQd 分子类比于 He 原子.

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} - \frac{4e^2}{3r_1} - \frac{4e^2}{3r_2} + \frac{e^2}{r_{12}},$$

其中 m 为氦核质量, $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$.

取基态波函数为 $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \Psi_{100}(\mathbf{r}_1)\Psi_{100}(\mathbf{r}_2)$, 式中:

$$\Psi_{100}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} a^{-3/2} \exp\left(-\frac{r}{a}\right), \quad a = \frac{3\hbar^2}{4me^2}, \quad \text{则有:}$$

$$\begin{aligned} \bar{r}_{12} &= \frac{1}{\pi^2 a^6} \iint d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 r_{12} \exp \left[-\frac{2(r_1 + r_2)}{a} \right] \\ &= \frac{8}{5} a = \frac{6\hbar^2}{5me^2}. \end{aligned}$$

(积分方法可参阅曾谨言著《量子力学》下册第 406~407 页.)

(b) dQd 分子基态能量为

$$E_0 = -2 \times \frac{4e^2}{6a} + \frac{5e^2}{8a},$$

对 n 值很大的情形, dQ 与 d 组成类氢原子, 于是有:

$$E_n = -\frac{4e^2}{6a} - \frac{e^2}{6a'} \cdot \frac{1}{n^2},$$

其中: $a' = \frac{3\hbar^2}{me^2}$.

$$\Delta E = E_n - E_0 = \frac{4e^2}{6a} - \frac{5e^2}{8a} + \frac{e^2}{6a'n^2} \approx \frac{e^2}{24a} = \hbar\omega.$$

故 $\omega = \frac{e^2}{24\hbar a}$,

而 $A_{n1} = \frac{4e\omega^3}{3\hbar c^3} |\bar{r}_{1n}|^2$,

于是 $\tau = \frac{1}{A_{n1}} = 3\hbar c^3 / 4e\omega^3 |\bar{r}_{1n}|^2$.

激发态波函数为

$$\Psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\Psi_{100}(r_1) \Psi_{nlm}(r_2) \pm \Psi_{100}(r_2) \Psi_{nlm}(r_1)], r_{1n}$$

只对一个氦核作用.

且
故

$$\langle r_{1z} \rangle = \langle \Psi_{100} | r_1 | \Psi_{100} \rangle = 0.$$

$$\langle r_{1x} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \Psi_{n1m} | \hat{r} | \Psi_{100} \rangle.$$

$$\tau = \frac{3\hbar c^3}{2e^2 \omega^3 |\langle \Psi_{n1m} | r | \Psi_{100} \rangle|^2}.$$

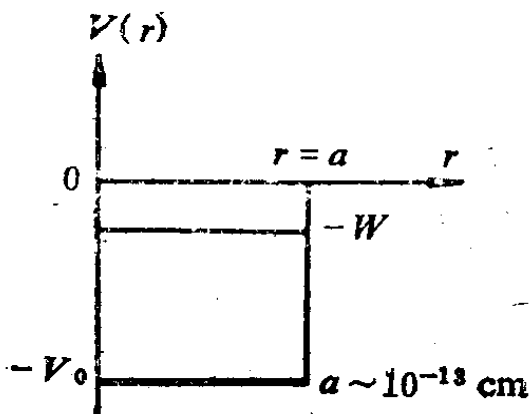


图 1.67

(c) 氘核中，质子与中子之间的作用势可用图 1.67 表示，其中 W 是结合能。

径向波函数 R 满足方程：

$$R'' + \frac{1}{r} R' + \frac{M}{\hbar^2} [-W - V(r)] \cdot R = 0,$$

其中 M 是中子质量。令 $rR = u$,

$$\text{则 } u'' - \frac{M}{\hbar^2} [W + V(r)] u = 0,$$

于是

$$\begin{cases} u'' + \frac{M}{\hbar^2} (V_0 - W) u = 0, & (r \leq a), \\ u'' - \frac{MW}{\hbar^2} u = 0, & (r \geq a). \end{cases}$$

由 $u|_{r=0} = 0$, $u|_{r \rightarrow \infty}$ 有限，可知方程解为

$$u = \begin{cases} A \sin k_1 r, & (r \leq a), \\ B \exp(-k_2 r), & (r \geq a), \end{cases}$$

其中 $k_1^2 = \frac{M}{\hbar^2} (V_0 - W)$, $k_2^2 = \frac{MW}{\hbar^2}$. 由波函数连续性，得

$$u = \begin{cases} A \sin k_1 r, & (r \leq a), \\ A \sin k_1 a \cdot \exp[k_2(a-r)], & (r \geq a). \end{cases}$$

再由波函数一阶导数连续, 得: $\text{ctg}k_1 a = -k_2/k_1$. 于是所求的几率为

$$P = \frac{\int_{r_0}^{\infty} r^2 R^2(r) dr}{\int_0^{\infty} r^2 R^2(r) dr} = \frac{\sin^2 k_1 a \cdot \exp[2k_2(a-r_0)]}{a k_2 - \frac{k_2}{2k_1} \sin 2k_1 a + \sin^2 k_1 a}$$

$$\approx \frac{\sin^2 k_1 a}{a k_2} \exp(-2k_2 r_0).$$

上面已经利用了条件 $a \approx 10^{-13} \text{ cm}$, $r_0 \gg 10^{-13} \text{ cm}$.

本题可以近似求解, u 用 $c \cdot \exp(-k_2 r)$ 替代, 则

$$P = \frac{\int_{r_0}^{\infty} \exp(-2k_2 r) dr}{\int_0^{\infty} \exp(-2k_2 r) dr} = \exp(-2k_2 r_0).$$

(戴铁生)

第二篇 原子核物理

§ 1 原子核的基本性质 (2001-2023)

2001 (Col, 1982)

核中不含有电子，讨论四种论据。

解：第一种：统计性。原子核的统计性可以从双原子分子的转动光谱加以研究。若认为核 (A, Z) 是由 A 个质子， $A-Z$ 个电子构成，那么奇奇核或奇偶核的自旋与实验结果不符，如奇奇核 ^{14}N 。偶数个质子耦合成为整数自旋，奇数个电子耦合成为半整数自旋。 ^{14}N 的总自旋应是半整数，即为费米子，这与实验不符合，说明核不是由质子和电子组成。

第二种：从能量考虑，电子是不参与强作用的轻子，若存在于核内，则是库仑相互作用产生的束缚态，束缚能的数量级为

$$E \approx -\frac{Ze^2}{r},$$

r 是核电磁半径， $r = 1.2A^{\frac{1}{3}}(\text{fm})$ ，代入上式有

$$\begin{aligned} E &\approx -\frac{Ze^2}{r} \approx -Z \cdot \left(\frac{e^2}{c\hbar}\right) \frac{c\hbar}{1.2A^{\frac{1}{3}}} \\ &\approx -Z \cdot \frac{197\text{MeV}\cdot\text{fm}}{137 \times 1.2A^{\frac{1}{3}}\text{fm}} \end{aligned}$$

$$\approx -1.20 \frac{Z}{A^{\frac{1}{3}}} (\text{MeV}).$$

当 $A \approx 125$, $Z \approx \frac{A}{2}$. 代入上式:

$$E \approx -15 \text{MeV}.$$

这时电子的德布罗意波长 λ 为

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{c\hbar}{cp} = \frac{197 \text{MeV} \cdot \text{fm}}{15 \text{MeV}} \approx 13 \text{fm}.$$

$\lambda \gg r$, 这样的电子不可能束缚在核内.

第三种: 核磁矩、若核由中子和质子组成, 核磁矩应为两种核子磁矩的共同贡献(不同耦合形式有些差异), 即核磁矩的量级应是 μ_N 的量级, 若核是由质子和电子构成, 则它应是 μ_e 的量级, 但 $\mu_e \approx 1800 \mu_N$. 实验结果支持前者, 与后者相差很大.

第四种: β 衰变, 原子核发生 β 衰变时放出电子, 若核内只有质子和电子, 则核放出电子并剩下子核, 实为二体衰变, 故电子应该是单能谱, 与实际 β 连续谱矛盾.

上述四条证据说明核内不存在电子. (王力军)

2002 (Buf, 1981)

原子核的大小可以通过以下方法确定: (a) 电子散射; (b) μ 原子的能级; (c) 同位旋多重态的基态的能量. 讨论并只讨论在以上三个实验中的两个实验的过程中, 测量了什么物理量且是如何与核半径相联系的.

解: (a) 形状因子在实验中测量, 即:

$$F(q^2) = \frac{(d\sigma)_{\text{实}}}{(d\sigma)_{\text{点}}},$$

$(d\sigma)_{\text{实}}$ 是实验值, $(d\sigma)_{\text{点}}$ 是把核看成点的理论值. 我们知道在 Born 一级近似下有

$$F(q^2) = \int \rho(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^3r.$$

假设 $\rho(\mathbf{r}) = \rho(r)$, 且 $\vec{R}_N \cdot \mathbf{q} \ll 1$, 有

$$F(q^2) \approx \int \rho(r) \left[1 + \frac{1}{2} (i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})^2 \right] d^3r$$

$$= 1 + \frac{i^2}{2} \int \rho(r) (\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})^2 d^3r$$

$$= 1 - \frac{1}{6} q^2 \langle r^2 \rangle.$$

$$\langle r^2 \rangle = \int \rho(r) r^2 d^3r.$$

实验测量弹性散射电子的角分布并对实验曲线拟合, 给出 $F(q^2)$ 值, 从而推导出电荷分布函数 $\rho(r)$ 随 r 值变化的规律.

(b) 对 μ 原子, 测量其激发态和基态的能量差, 因为 μ 原子的 $m_\mu \approx 210m_0$, 所以有 $a_\mu \approx \frac{1}{210} a_0$, a_0 为玻尔半径. μ

原子的能级对核半径很灵敏, 以 μ 原子的 s 态为例, 其 H 量为

$$H = -\frac{1}{2m_\mu} \nabla^2 + V(r).$$

当核为点电荷时: $V(r) = V_0(r) = -\frac{e^2}{r^2}$.

若认为核电荷均匀分布在半径为 R 的球内, 则

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{e^2}{2R^3}(3R^2 - r^2), & 0 < r \leq R, \\ -\frac{e^2}{r}, & r > R. \end{cases}$$

由于核有一定大小引起的基态能量改变 ΔE 可用微扰来求得:

$$\begin{aligned} H' &= H - H_0 = V(r) - V_0(r) \\ &= \begin{cases} -\frac{e^2}{2R^3}(3R^2 - r^2) + \frac{e^2}{r}, & r \leq R, \\ 0, & r > R. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta E &= \langle \Phi_0 | H' | \Phi_0 \rangle = \int d^3r |\Phi_0|^2 H' \\ &= |\Phi(0)|^2 \int 4\pi r^2 \cdot H' dr, \end{aligned}$$

代入上式得到:

$$\Delta E = \frac{1}{20} \left(\frac{e^2}{2a_\mu} \right) \left(\frac{R}{a_\mu} \right)^2, \quad a_\mu \text{ 为 } \mu \text{ 原子基态半径.}$$

实验上测量从第一激发态到基态的X射线能量,

$$E_x = (E_1 - E_0) - \frac{1}{20} \frac{e^2}{2a_\mu} \left(\frac{R}{a_\mu} \right)^2,$$

E_1 和 E_0 为 H_0 的本征值. E_1 为第一激发态的能级, E_0 为基态能级(点电荷). 当测得 E_x 和 $(E_1 - E_0)$ 之差, 即可求得 R 的大小.

(c) 同一同位旋多重态, 认为它们的核内结构是相同的, 质量差是由电磁作用及中子质子质量差引起的.

$$\begin{aligned} \Delta E &= [M(Z, A) - M(Z-1, A)]C^2 \\ &= \Delta E_0 - (m_n - m_H)C^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3e^2}{5R} (2Z - 1) - (m_n - m_H)C^2 \\
&= \frac{3e^2}{5R_0 A^{1/3}} (2Z - 1) - (m_n - m_H)C^2,
\end{aligned}$$

$$R_0 \approx 1.2 \text{ fm} \sim 1.4 \text{ fm}.$$

(何小东)

2003 (Buf, 1982)

为研究核的大小、形状和密度分布，常用电子、质子和中子作为探针。(a)选择探针的标准是什么？(b)比较上述探针的优缺点？(c)你认为用光子作探针如何？

解：(a)选择探针的基本条件是入射粒子的德布罗意波长小于或等于被研究目标的线度，对研究核的大小，则有：

$$\lambda = \frac{h}{p} \leq d_{\text{核}}, \quad p \geq \frac{h}{d_{\text{核}}}. \quad d_{\text{核}} \text{ 为核的大小.}$$

当 $\lambda \ll d_{\text{核}}$ 时，才能较好的研究核内的密度分布。

(b)用电子作探针来研究核的电磁半径，电荷分布是较理想，因为电子不参与强相互作用，只有电磁相互作用，容易分析。实际上，很多重要结果都是从电子和核散射得到的，但是需要较高的电子能量。例如，对一般的核有：

$$d_{\text{核}} \approx 10^{-12} \sim 10^{-13} \text{ cm}, \quad \text{令 } d_{\text{核}} \approx 10^{-13} \text{ cm}.$$

$$p_0 \approx \frac{h}{d_{\text{核}}} \approx 0.2 \text{ GeV}/c,$$

$$E_0 \approx pc = 0.2 \text{ GeV}.$$

质子和核的相互作用可以用于研究核的结构、形状和分布，优点是很容易得到高通量、参数好的质子束，缺点是它与核子有电磁相互作用和强相互作用两部分，比较复杂。

中子作探针原则上讲是比质子作探针“干净”，但获得高能、高性能参数的中子束远比质子束困难，且对质子的探测也比探测中子容易。

(c)用光子来作探针研究核结构时，高能光子和核子作用表现出类强子性质，使问题复杂化。

(马 骥)

2004 (Wis, 1971)

考虑一个变形核(椭球形,长轴比短轴长10%),如果把核视为点电荷来计算第一玻尔半径处的电势精度如何?做合理的估计(不涉及积分)。

解: 设核内电荷是均匀分布, 且是椭球、有轴对称性, 核的电偶极矩为零。

$$V = V_{\text{点}} + V_{\text{四极矩}},$$

$$V_{\text{点}} = \frac{Q}{r} \text{ 为电点荷产生的势,}$$

$$V_{\text{四极矩}} = \frac{MQ}{r^3}, \text{ } M \text{ 为电四极矩.}$$

对椭球, 设长轴为 $a = (1 + \varepsilon)R$, 短轴 $b = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)R$, ε 为变

形参数. 题设: $a:b = 1.1$, 得 $\varepsilon \approx \frac{0.4}{6}$.

$$M = \frac{2Q}{5} (a^2 - b^2) \approx \frac{6}{5} QR^2 \varepsilon \approx \frac{0.4}{5} QR^2.$$

R 为核半径, 对中等核, 如 $A = 125$,

$$R = 1.2A^{\frac{1}{3}} \text{ (fm)} = 6 \text{ fm.}$$

$$V_{\text{四极矩}} = \frac{MQ}{r^3} = \frac{0.4QR^2}{5r^3}.$$

$$\Delta V = \frac{V_{\text{四极矩}}}{V_{\text{点}}} = \left(\frac{0.4QR^2}{5r^3} \right) / \frac{Q}{r} = \frac{0.4}{5} \frac{R^2}{r^2}.$$

$r \approx 0.5 \times 10^{-8} \text{cm}$. $R \approx 6 \times 10^{-13} \text{cm}$. 代入得:

$$\Delta V \approx \frac{0.4}{5} \left(\frac{6 \times 10^{-13}}{0.5 \times 10^{-8}} \right)^2 \approx 1.1 \times 10^{-9}.$$

在玻尔半径处, 引起电势的修正约为 10^{-9} .

(王璜鑫)

2005 (Col, 1975)

原子核在地磁场中的进动频率是:

$$10^{-1}, 10^1, 10^3, 10^5 (\text{s}^{-1})$$

解: 10^3s^{-1} .

$$\omega = \frac{geB}{2m_N c}, \quad g = 10^0, \quad e = 4.8 \times 10^{-10} \text{esu}.$$

$$c = 3 \times 10^{10} \text{cm/s}. \quad m_N = 10^{-23} \text{g}. \quad B \approx 0.5 \text{G}.$$

$$\omega = \frac{4.8 \times 0.5 \times 10^{-10}}{10^{-23} \times 3 \times 10^{10}} \approx 10^3 \text{s}^{-1}.$$

注: 对质子:

$$\omega_p \approx 9.6 \times 10^{13} \text{rad} \cdot \text{s}^{-1} \text{G}^{-1}. \quad B \approx 0.5 \text{G},$$

$$\omega_p \approx 4.8 \times 10^3 \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

(周平)

2006 (Wis, 1981)

根据下列给出的关于轻核的一组数据:

核素	J^P (自旋宇称)	核质量(u)	核磁矩(μ_N)
${}^1\text{H}_1$	$\frac{1}{2}^+$	1.00783	+2.79

${}^2\text{H}_1$	1^+	2.01410	+0.89
${}^3\text{H}_1$	$\frac{1}{2}^+$	3.01605	...
${}^3\text{He}_2$	$\frac{1}{2}^+$	3.01603	...
${}^4\text{He}_2$	0^+	4.02603	0
${}^6\text{Li}_3$	1^+	6.01512	...

求(a)中子, ${}^3\text{H}_1$, ${}^3\text{He}_2$ 和 ${}^6\text{Li}_3$ 磁矩的近似值.

(b) ${}^3\text{H}_1$ 到 ${}^3\text{He}_2$ β 衰变放出电子的最大能量.

(c) ${}^3\text{H}_1$ 和 ${}^3\text{He}_2$, ${}^2\text{H}_1$ 和 ${}^4\text{He}_2$ 发生聚变反应, 那个聚变反应放出的能量大?

解: (a)核素的磁矩可以写成:

$$\mu = g\mu_N J.$$

其中 J 为核素自旋, g 为朗德因子, μ_N 为核玻尔磁矩. 由给出的数据得

$$g({}^1\text{H}_1) = 2 \times 2.79 = 5.58, \quad g({}^2\text{H}_1) = 0.86,$$

$$g({}^4\text{He}_2) = 0.$$

朗德因子分别为 g_1 和 g_2 的两个粒子组成一个新粒子的 g 因子为(设相动运动轨道角动量为零), 则

$$g = g_1 \frac{J(J+1) + j_1(j_1+1) - j_2(j_2+1)}{2J(J+1)} + g_2 \frac{J(J+1) + j_2(j_2+1) - j_1(j_1+1)}{2J(J+1)}.$$

其中 J 为新粒子的自旋, j_1 和 j_2 分别为组成新粒子的二个粒子的自旋.

${}^2\text{H}_1$ 可以看成由中子与 ${}^1\text{H}$ 组成, 因此:

$$J = 1, \quad j_1 = \frac{1}{2}, \quad j_2 = \frac{1}{2}.$$

故中子的朗德因子为

$$g(n) = g_1 = 2g(^2H_1) - g(^1H_1) \\ = 2 \times 0.86 - 5.58 = -3.86.$$

由单粒子壳模型的观点, 3H 和 3He 由最后一个不配对的核子贡献它的磁矩. 由 g_n , g_p 合成 g 得

$$g(^3H) = g(^1H), \\ g(^3H) = g(n),$$

该结果是因为对 3H 有

$$j = \frac{1}{2}, \quad l = 0, \quad s = \frac{1}{2},$$

对 1H 有

$$j = \frac{1}{2}, \quad l = 0, \quad s = \frac{1}{2},$$

因此有

$$\mu(^3H) = 2.8\mu_N,$$

$$\mu(^3He) = -1.9\mu_N.$$

6Li_3 可以看成由 4He_2 与 2H_1 组成, 故

$$J = 1, \quad j_1 = 0, \quad j_2 = 1.$$

$$g(^6Li_3) = g(^2H_1) = 0.86.$$

中子, 3H_1 , 3He_2 和 6Li_3 的磁矩近似值为

$$\mu(n) = g(n)\mu_N \times \frac{1}{2} = -1.93\mu_N,$$

$$\mu(^3H_1) = 2.8\mu_N,$$

$$\mu(^3He_2) = -1.9\mu_N,$$

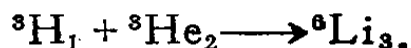
$$\mu(^6Li) = g(Li_3)\mu_N \times 1 = 0.86\mu_N. \quad]$$

(b) 3H_1 到 3He 的 β 衰变只可能为



$$\begin{aligned} \text{衰变能 } Q &= m({}^3\text{H}_1) - m({}^3\text{He}_2) = 3.01605u - 3.01603u \\ &= 0.00002u = 18.6\text{keV}. \end{aligned}$$

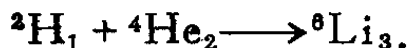
(c) ${}^3\text{H}_1$ 和 ${}^3\text{He}_2$ 的聚变反应为



释放出的能量(以 u 为单位)为

$$Q = m({}^3\text{H}_1) + m({}^3\text{He}_2) - m({}^6\text{Li}_3) = 0.01696(u)$$

${}^2\text{H}_1$ 和 ${}^4\text{He}_2$ 的聚变反应为



释放出的能量(以 u 为单位)为

$$Q' = m({}^2\text{H}_1) + m({}^4\text{He}_2) - m({}^6\text{Li}_3) = 0.02501(u).$$

${}^2\text{H}_1$ 和 ${}^4\text{He}_2$ 聚变反应放出的能量较 ${}^3\text{H}_1$ 和 ${}^3\text{He}_2$ 聚变反应放出的能量大. (钱剑明 范扬眉)

2007 (CCT, 1983)

要穿过轻核的库仑势垒, 质子必须具有的最小能量量级为:

(a) 1 GeV, (b) 1 MeV, (c) 1 keV.

解: 轻核的库仑势垒:

$$V = \frac{Q_1 Q_2}{r}. \quad \text{令 } Q_1 = Q_2 = e. \quad r = 1\text{fm}.$$

$$V = \frac{e^2}{r} = \frac{e^2 c \hbar}{r \cdot c \hbar} = \alpha \cdot 197\text{MeV} \cdot \text{fm} / 1\text{fm}$$

$$\approx 1.44\text{MeV} \approx 1\text{MeV}.$$

故答案为 (b).

(唐子洲)

2008 (CCT, 1983)

核物质的密度是多少 (t/cm^3) ?

(a) 0.004; (b) 400; (c) 10^9 .

解: 核子尺寸为 10^{-13}cm , 单位体积中的核子数约为 10^{39}cm^{-3} . 一个核子的质量近似为 $10^{-24}\text{g} = 10^{-30}\text{t}$. 所以

$$\rho = 10^{-30} \cdot 10^{39} = 10^9 \text{t/cm}^3.$$

故答案为(c).

(唐子洲)

2009 (Wis, 1977)

(a) 计算半径为 R , 电荷为 Q 的均匀带电球体的静电能;

(b) ${}_{14}^{27}\text{Si}$ 和 ${}_{13}^{27}\text{Al}$ 是一对镜像核, 除了电荷以外, 它们的基态是相同的. 它们的质量差为 6MeV . 忽略中子、质子之间的质量差, 估计它们的半径.

解: (a) 电场随 r 的变化为

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Qr}{R^3}, & r < R, \\ \frac{Q}{r^2}, & r > R. \end{cases}$$

静电能:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^\infty \frac{1}{8\pi} E^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi} \left[\int_0^R \left(\frac{r}{R^3}\right)^2 dr + \int_R^\infty \frac{1}{r^4} dr \right] \\ &= \frac{Q^2}{2} \left(\int_0^R \frac{r^4}{R^6} dr + \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr \right) = \frac{Q^2}{2} \left(\frac{1}{5R} + \frac{1}{R} \right) = \frac{3Q^2}{5R}, \end{aligned}$$

(b) ${}^{27}\text{Si}$ 和 ${}^{27}\text{Al}$ 的质量差可以看成静电能之差.

$$\Delta W \approx \frac{3}{5R} (Z_1^2 - Z_2^2) e^2,$$

$$\text{所以 } R \approx \frac{1}{\Delta W} \cdot \frac{3e^2}{5} (14^2 - 13^2) = \frac{1}{\Delta W} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{e^2 \cdot c\hbar}{c\hbar} (14^2 - 13^2)$$

$$\approx \frac{1}{6\text{MeV}} \times \frac{3}{5} \cdot \frac{197\text{MeV} \cdot \text{fm}}{137} (14^2 - 13^2) \approx 3.88\text{fm}.$$

(钱剑明)

2010 (Pri, 1977)

${}^{27}_{14}\text{Si}$ 核通过正电子发射衰变到它的“镜象”核 ${}^{27}_{13}\text{Al}$. 正电子的最大能量为 3.48MeV . 设两原子核之间的质量差是由于库仑能, 核是带电均匀球, 电荷为 Ze , 半径为 $R = r_0 A^{\frac{1}{3}}$, 从上述数据求 r_0 .

解: ${}^{27}_{14}\text{Si} \rightarrow {}^{27}_{13}\text{Al} + \beta^+ + \nu$.

若忽略核的反冲能, 正电子的最大能量近似为两核的质量差减去 $2m_e c^2$. 均匀球带电体的库仑能:

$$B_0 = -\frac{3e^2 z^2}{5R} = \frac{3e^2}{5r_0} Z^2 A^{-\frac{1}{3}}.$$

对于 ${}^{27}_{14}\text{Si}$ 和 ${}^{27}_{13}\text{Al}$ 核, 有:

$$\frac{3e^2}{5r_0} (14^2 \times 2)^{-\frac{1}{3}} - 13^2 \cdot 27^{-\frac{1}{3}} = 3.48 + 1.02 = 4.5.$$

$$\frac{27e^2}{5r_0} = 4.5,$$

所以
$$r_0 = \frac{27e^2}{5 \times 4.5} = \frac{27\alpha \cdot c\hbar}{5 \times 4.5} = \frac{27 \times 197}{5 \times 4.5 \times 137} \approx 1.7(\text{fm}).$$

(林 辰)

2011 (Pri, 1978)

${}^{90}_{40}\text{Zr}_{50}$ 的结合能为 783.916MeV . ${}^{90}_{39}\text{Y}_{51}$ 的结合能为 782.410MeV . 估计 ${}^{90}\text{Zr}$ 的同位旋 $T = 6$ 的最低激发能.

解: 两同位旋多重态之间的能量差主要由库仑能和中

子、质子质量差决定:

$$\begin{aligned}\Delta E &= E(A, Z+1) - E(A, Z) = \Delta E_0 - (m_n - M_H)c^2 \\ &\approx \frac{3}{5} \frac{e^2}{R} (2Z+1) - 0.78 = \frac{3(2Z+1) c \hbar \alpha}{5 R} - 0.78 \\ &= \frac{3(2 \times 39 + 1) \times 197}{5 \times 1.2 \times 90^{\frac{1}{3}} \times 137} - 0.78 \approx 12.67 - 0.78 \\ &= 11.89 \text{ (MeV)},\end{aligned}$$

其中: $R = 1.2A^{\frac{1}{3}}$.

${}_{40}^{90}\text{Zr}$ 的 $T = 6$ 的激发态能量为

$$E = -782.410 + 11.89 + 783.916 = 13.40 \text{ (MeV)}.$$

(何小东)

2012 (Pri, 1977)

一组同量异位素组成同位旋多重态, 它们的质量算符可写成:

$$M = a + bT_z + cT_z^2,$$

其中 a, b, c 是常数, T_z 是同位旋 Z 分量算符.

(a) 推导出该公式.

(b) 必须多大的同位旋值, 才能对上述公式进行实验检验.

解: (a) 对同位旋多重态. 由于结构上的相似性, 有共同的 J^P . 其质量差主要由库仑能和中子质子差决定, 令 A 为核的质量数

$$M = \frac{3}{5} \frac{e^2}{R} Z^2 + [M(H) - m(n)]c^2 \cdot T_z + M_0,$$

$$\begin{aligned}
&= B \left(\frac{A}{2} - T_z \right)^2 + CT_z + M_0 \\
&= \frac{BA^2}{4} - BAT_z + BT_z^2 + CT_z + M_0 \\
&= M_0 + \frac{BA^2}{4} + (C - BA)T_z + BT_z^2 \\
&= a + bT_z + cT_z^2.
\end{aligned}$$

式中： $a = M_0 + \frac{BA^2}{4}$, $b = C - BA$, $C = B$;

$$A = N + Z = 2Z - 2T_z.$$

式中线性项由中子质子质量差和库仑项的贡献，二次方项主要是库仑项的贡献。

(b) 公式有三个常数 a , b , c . 故需三个独立的线性相关的方程，对同位旋为 T 的多重态，共有 $(2T + 1)$ 个成员，为在实验上检验上式，至少要选 $T = 1$ 的同位旋多重态。

(吴为民)

2013 (Col, 1979)

核 ${}^7_7\text{N}$, ${}^{12}_6\text{C}$ 基态都是同位旋 $T = 0$ 的态. 最低的 $T = 1$ 态的激发能在 ${}^7_7\text{N}$ 是 2.3MeV , 而在 ${}^{12}_6\text{C}$ 却有 15MeV . 为什么会有这样明显的差别? 并指出可以把这些核态按 T 划分的基础. (考虑 $T = 1$ 的其它三重态成员, 通过系统的核性质来解释它们的关系).

解: ${}^{12}_6\text{C}$ 的 $T = 1$ 激发态的同位旋三重态是: ${}^{12}_5\text{B}$, ${}^{12}_6\text{C}$ 和 ${}^{12}_7\text{N}$. 对 ${}^{12}_5\text{B}$ 和 ${}^{12}_7\text{N}$ 而言, $|T_z|$ 最小为 1, 故 ${}^{12}_5\text{B}$, ${}^{12}_7\text{N}$ 的同位

旋三重态是基态。类似地，考虑到 ^{14}N 的 $T=1$ 激发态的另两个： ^{14}C 和 ^{14}O 也处于各自的基态。从表上查得结合能 $M-A$ 值如下：

元素：	$M-A(\text{MeV})$
$^{12}_6\text{C}$	0
$^{12}_5\text{B}$	13.370
$^{14}_7\text{N}$	2.864
$^{14}_6\text{C}$	3.020

同位旋多重态核素之间的能级差由下式给出：

$$\begin{aligned}
 \Delta E &= [M(Z, A) - M(Z-1, A)]c^2 \\
 &= \frac{3}{5} \frac{e^2}{R} (2Z-1) - (m_n - M_H)c^2 \\
 &= \frac{3}{5} \frac{e^2}{R_0 A^{\frac{1}{3}}} (2Z-1) - 0.78\text{MeV} \\
 &= \frac{3}{5} \frac{c\hbar}{R_0 A^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{e^2}{c\hbar} \right) (2Z-1) - 0.78\text{MeV} \\
 &= \frac{3 \times 197}{5 \times 137 R_0 A^{\frac{1}{3}}} (2Z-1) (\text{MeV}) - 0.78\text{MeV}.
 \end{aligned}$$

设 $R_0 = 1.4\text{fm}$. $M(^{14}\text{N}, T=1) - M(^{14}\text{C}, T=1)$

$$\approx 2.5(\text{MeV}/c^2),$$

$$M(^{12}\text{C}, T=1) - M(^{12}\text{B}, T=1)$$

$$= 2.2(\text{MeV}/c^2),$$

$$M(^{14}\text{N}, T=1) - M(^{14}\text{N}, T=0)$$

$$\begin{aligned}
&= M(^{14}\text{N}, T=1) - M(^{14}\text{C}, T=1) \\
&+ M(^{14}\text{C}, T=1) - M(^{14}\text{N}, T=0) \\
&= 2.5 + 3.02 - 2.86 = 2.66 (\text{MeV}/c^2), \\
M(^{12}\text{C}, T=1) - M(^{12}\text{C}, T=0) \\
&= M(^{12}\text{C}, T=1) - M(^{12}\text{B}, T=1) \\
&+ M(^{12}\text{B}, T=1) - M(^{12}\text{C}, T=0) \\
&= 2.1 + 13.37 \approx 15.5 (\text{MeV}/c^2).
\end{aligned}$$

这些值与实验值2.3MeV和15.0MeV相近， ^{12}C 和 ^{14}N 的激发能值的很大差异，是因为基态 ^{12}C 是 α 集团结构，故其基态能量尤其低的缘故。

同位旋多重态的核具有类似的结构，具有相同的 J^P 值，且同位旋多重态之间的能级差别由库仑能及中子质子质量差决定，由此可决定同位旋多重态，例如上述， ^{14}O ， $^{14}\text{N}^*$ ， ^{14}C 为同一同位旋多重态， $J^P = 0^+$ ， ^{14}C 和 ^{14}O 为基态， $^{14}\text{N}^*$ 为 0^+ 的激发态。 $^{12}\text{C}^*$ ， ^{12}C ， ^{12}B 又是 1^+ 的同位旋多重态，其中 ^{14}N 和 ^{12}B 是基态， $^{12}\text{C}^*$ 是 1^+ 的激发态。 (王力军 范扬眉)

2014 (Pri, 1981)

(a) 填上在下表中指定原子核基态遗漏项的性质，质量过剩($\Delta M_{z,A}$)是这样定义的： $M_{z,A} = A \times 931.5 \text{MeV} + \Delta M_{z,A}$ 其中 $M_{z,A}$ 是原子的质量， A 是质量数。 T 和 T_z 是总的同位旋量子数和同位旋的第三分量的量子数，确定 T_z 。

(b) 在 ^{81}Kr 中同量异位素相似态(IAS)的波函数可以用同位旋升算子 T 作用到 ^{81}Br 基态波函数来得到*。

* 原题为降算符，为保持同位旋定义的一致性 ($T_z(p) = \frac{1}{2}$, $T_z(n) = -\frac{1}{2}$)，故改为升算符。——编者注

同位素	Z	T_z	T	D	质量过剩(兆电子伏)
n	0				8.07
^1H	1				7.29
^4He	2				2.43
^{77}Se	34			$1/2^-$	-74.61
^{77}Br	35			$3/2^-$	-73.24
^{77}Kr	36			$7/2^+$	-70.24
^{80}Br	35			1^+	-73.89
^{80}Kr	36				-77.90
^{81}Br	35			$3/2^-$	-77.98
^{81}Kr	36			$7/2^+$	-77.65
^{81}Rb	37			$3/2^-$	-77.89

(1) 在 ^{81}Kr 中 IAS 的 J^P , T 和 T_z 是多少?

(2) 估计在 ^{81}Kr 中 IAS 的激发能.

(3) 现在估计在 ^{81}Kr 中 IAS 可能的衰变能, 它适宜于通过发射下列粒子的衰变

中子

γ 射线

α -粒子

β^+ 射线

(4) 假设对 (3) 中的每种衰变模式来说都有足够的衰变能, 指出有那些选择规则或其他因素, 可能阻止某种模式的衰变.

(c) 考虑 ^{80}Kr 的中子共振吸收导致 ^{81}Kr 的 IAS, 假设 IAS 有 5×10^{-21} 秒的寿期以及 80% 的中子衰变的分枝比, 计算这一反应的共振吸收截面.

解: (a) 填好的表如下. (第199页)

(b) (1) 对 ^{81}Br , $|T, T_z\rangle = \left| \frac{11}{2}, -\frac{11}{2} \right\rangle$, 则 ^{81}Kr 的

IAS 的量子数是: $T = \frac{11}{2}$, $T_z = -\frac{9}{2}$,

同位素	Z	T_z	T	J^P	质量过剩(兆电子伏)
n	0	-1/2	1/2	1/2 ⁺	8.07
¹ H	1	1/2	1/2	1/2 ⁺	7.29
⁴ He	2	0	0	0 ⁺	2.43
⁷⁷ Se	34	-9/2	9/2	1/2 ⁻	-74.61
⁷⁷ Br	35	-7/2	7/2	3/2 ⁻	-73.24
⁷⁷ Kr	36	-5/2	5/2	7/2 ⁺	-70.24
⁸⁰ Br	35	-5	5	1 ⁺	-75.83
⁸⁰ Kr	36	-4	4	0 ⁺	-77.90
⁸¹ Br	35	-11/2	11/2	3/2 ⁻	-77.98
⁸¹ Kr	36	-9/2	9/2	7/2 ⁺	-77.65
⁸¹ Rb	37	-7/2	7/2	3/2 ⁻	-77.39

$$J^P(^{81}\text{Kr IAS}) = J^P(^{81}\text{Br}) = \frac{3^-}{2}$$

(2) ⁸¹Br 和 ⁸¹Kr(IAS) 的质量差是由两核的库仑能差和中子、质子的质量差引起。(令 c=1)

$$\Delta M_{^{81}\text{Kr (IAS)}} = \Delta M_{^{81}\text{Br}} + \frac{3}{5} \times \frac{(2Z-1)e}{R_0 A^{1/3}} - [m(n) - M(^1\text{H})],$$

代入 Z=35, r₀=1.2fm, A=81,

$$m(n) - M(^1\text{H}) = 0.78(\text{MeV})$$

$$\Delta M_{^{81}\text{Br}} \approx -77.98(\text{MeV}).$$

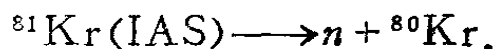
得到

$$\Delta M_{^{81}\text{Kr (IAS)}} \approx -67.28(\text{MeV}).$$

⁸¹Kr(IAS) 相对于 ⁸¹Kr 的基态激发能:

$$\Delta E = -67.28 - (-77.65) = 10.37(\text{MeV}).$$

(3) 对 中子衰变:

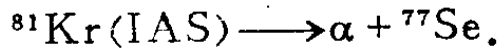


$$Q_1 = \Delta M_{^{81}\text{Kr(IAS)}} - \Delta(n) - \Delta M_{^{80}\text{Kr}} = 2.55(\text{MeV}).$$

对 r 跃迁, $^{81}\text{Kr}(\text{IAS}) \longrightarrow ^{81}\text{Kr} + \gamma$.

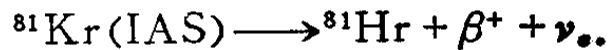
$$Q_2 = \Delta M_{^{81}\text{Kr}(\text{IAS})} - \Delta M_{^{81}\text{Kr}} = -67.28 - (-77.65) \\ \approx 10.37(\text{MeV}).$$

对于 α 衰变:



$$Q_3 = \Delta M_{^{81}\text{Kr}(\text{IAS})} - \Delta M_{^4\text{He}} - \Delta M_{^{77}\text{Se}} \\ = -67.28 - (-74.61) - 2.43 = 4.9(\text{MeV}).$$

对于 β^+ 衰变:

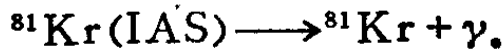


$$Q_4 = \Delta M_{^{81}\text{Kr}(\text{IAS})} - \Delta M_{^{81}\text{Br}} - 2\text{Me} = 9.68(\text{MeV}).$$

(4) 对 $^{81}\text{Kr}(\text{IAS}) \longrightarrow ^{80}\text{Kr} + n$.

$$T \quad \frac{11}{2} \longrightarrow 4, \quad \frac{1}{2}.$$

强作用过程要求 T , T_z 守恒, 该过程 $\Delta T \neq 0$, 是禁戒的.

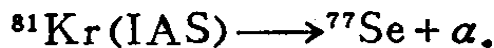


$$J, \quad \frac{3^-}{2} \quad \frac{7^+}{2}.$$

$$\Delta J = \left| \frac{3}{2} - \frac{7}{2} \right| = 2,$$

$$\Delta P = -1.$$

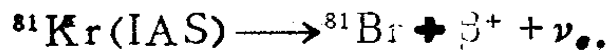
为 E_3 或 M_2 跃迁.



$$T \quad \frac{11}{2} \quad \frac{9}{2} \quad 0$$

$$T_z \quad -\frac{9}{2} \quad -\frac{9}{2} \quad 0$$

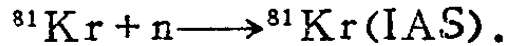
同位旋不守恒, 故是禁戒的.



$$J^P \quad \frac{3^-}{2} \quad \frac{3^-}{2}$$

是允许型 β 衰变, F 型和 $G-T$ 型混合跃迁.

(c) 对于



其反应截面应为(在共振峰时)

$$\sigma_{ON} \approx 4\pi\lambda^2 \frac{\Gamma_n}{\Gamma}.$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu E_a}} \approx \frac{197 \text{ MeV}\cdot\text{fm}}{\sqrt{2 \times M_n c^2 \cdot E_a}} \\ &= \frac{197 \cdot \text{MeV}\cdot\text{fm}}{\sqrt{2 \times 940 \times 2.55}} \approx 2.8 \text{ fm}. \end{aligned}$$

$$\frac{\Gamma_n}{\Gamma} = 0.8.$$

$$\sigma_{ON} = 4\pi\lambda^2 \frac{\Gamma_n}{\Gamma} = 4\pi \times (2.8 \times 10^{-13})^2 \times 0.8$$

$$= 0.79 \times 10^{-24} (\text{cm}^2) = 0.79 (\text{b}). \quad (\text{黄晓舟})$$

2015 (Pri, 1977)

磁偶极矩的同位旋结构.

自由中子和自由质子的磁偶极矩分别为 $-1.9137\mu_N$ 和 $+2.793\mu_N$. 将核考虑成中子和质子的集合体, 每个核子带有其自由磁矩: (a) 写出其有 A 个核子的原子核的磁矩算子; (b) 引入同位旋概念, 决定同位旋标量和矢量算符. 其相对大小如何? (c) 证明两个 $T = \frac{1}{2}$ 镜核的磁矩之和以核磁子为

单位时为 $J + (\mu_p + \mu_n - 1/2) \langle \sum_{i=1}^A \sigma_z^{(i)} \rangle$, 其中 J 为总核自旋, $\sigma_z^{(i)}$ 为核子的泡利自旋算符.

解: (a) 对 A 个核子的原子核的磁矩算子为

$$\mu = \sum_{i=1}^A (g_l^i l_i + g_s^i S_i),$$

其中对质子: $g_l = 1, g_s = 2\mu_p$,

对 neutron: $g_l = 0, g_s = 2\mu_n$.

(b) 在同位旋空间中存在四个独立算子, 即:

标量算子: 单位矩阵, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

矢量算子: 泡利矩阵: $\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$,

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

设质子和中子的波函数分别为 Ψ_p, Ψ_n , 令 τ_+ 和 τ_- 为

$$\tau_{\pm} = \tau_1 \pm i\tau_2, \quad T = \frac{1}{2}\tau_3,$$

则有

$$T_3 \Psi_p = \frac{1}{2} \Psi_p, \quad \tau_3 \Psi_p = \Psi_p,$$

$$T_3 \Psi_n = -\frac{1}{2} \Psi_n, \quad \tau_3 \Psi_n = -\Psi_n,$$

$$T_+ \Psi_n = \Psi_p, \quad T_- \Psi_p = \Psi_n.$$

(c) 对镜核. 核 1 的同位旋量子数为 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

核 2 的同位旋量子数为 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

对核 1, 磁矩算子为

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \sum_{i=1}^A (g_i^l \mathbf{l}_i^i + g_i^s \mathbf{S}_i^i), \quad \text{引入 } \tau_3^i \\ \mu_1 &= \sum_{i=1}^A \frac{(1 + \tau_3^i)}{2} \mathbf{l}_i^i + \left[\sum_{i=1}^A (1 + \tau_3^i) \mu_p \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^A (1 - \tau_3^i) \mu_n \right] \mathbf{S}_i^i \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^A (\mathbf{l}_i^i + \mathbf{S}_i^i) + \left(\mu_p + \mu_n - \frac{1}{2} \right) \sum_{i=1}^A \mathbf{S}_i^i \\ &\quad + \sum_{i=1}^A \tau_3^i [\mathbf{l}_i^i + (\mu_p - \mu_n) \mathbf{S}_i^i].\end{aligned}$$

同理, 对核 2 有:

$$\begin{aligned}\mu_2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^A (\mathbf{l}_2^i + \mathbf{S}_2^i) + \left(\mu_p + \mu_n - \frac{1}{2} \right) \sum_{i=1}^A \mathbf{S}_2^i \\ &\quad + \sum_{i=1}^A \tau_3^i [\mathbf{l}_2^i + (\mu_p - \mu_n) \mathbf{S}_2^i].\end{aligned}$$

因 $\mathbf{J}^i = \sum_{i=1}^A (\mathbf{l}^i + \mathbf{S}^i)$. 对镜核, $\mathbf{J}^1 = \mathbf{J}^2$. 每个核子的 T_3 分量

相反. $T_3 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^A \tau_3$, $\mathbf{S} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}$.

观测磁矩值 $\mu = \langle \mu_z \rangle = \langle J J T T_3 | \mu_z | J J T T_3 \rangle$

$$\begin{aligned}\text{对核 1: } \mu_1 &= \langle J J \frac{1}{2} \frac{1}{2} \left| \frac{J}{2} + \left(\mu_p + \mu_n - \frac{1}{2} \right) \times \frac{1}{2} \sum_{i=1}^A (\sigma_i^z) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^A (\mathbf{l}_{1z}^i + (\mu_p - \mu_n) \mathbf{S}_{1z}^i) \right| J J \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{J}{2} + \frac{1}{2} \left(\mu_p + \mu_n - \frac{1}{2} \right) \left\langle \sum_i (\sigma_i)_z \right\rangle \\
&\quad + \left\langle JJ \frac{1}{2} \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^A \tau_3^i [l_{1z}^i + (\mu_p - \mu_n) S_{1z}^i] \right| JJ \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle.
\end{aligned}$$

对核 2,

$$\begin{aligned}
\mu_2 &= \frac{J}{2} + \frac{1}{2} \left(\mu_p + \mu_n - \frac{1}{2} \right) \left\langle \sum_{i=1}^A (\sigma_i)_z \right\rangle + \left\langle JJ \frac{1}{2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^A \tau_3^i [l_{2z}^i + (\mu_p - \mu_n) S_{2z}^i] \right| JJ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle.
\end{aligned}$$

$\mu_1 + \mu_2$ 中, 显然最后一项相互抵消. 有:

$$\mu_1 + \mu_2 = J + \left(\mu_p + \mu_n - \frac{1}{2} \right) \left\langle JJ \left| \sum_{i=1}^A \sigma_i^z \right| JJ \right\rangle.$$

(赵叔平)

2016 (MIT, 1982)

硬球散射: 证明点粒子在半径为 R 的无限重球上的弹性散射的经典散射截面是各向同性的.

解: 对一个点粒子在一个固定表面上的经典弹性散射来说, 出射角等于入射角. 当沿 $-z$ 方向运动的粒子在硬球上极角为 θ 处发生碰撞后, 以 $\alpha = \pi - 2\theta$ 出射, 其相应的瞄准距离 $b = R \sin \theta$. 所以散射截面:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = - \frac{2\pi b db}{2\pi \sin \alpha d\alpha} = \frac{R^2 \sin \theta \cos \theta d\theta}{4 \sin \theta \cos \theta d\theta} = \frac{R^2}{4}.$$

与 θ 无关, 即为各向同性的.

(任勇)

一个电荷为 q 的粒子在一个核电荷为 Q 的原子上散射，
一个简单的模型给出位能 V 为

$$V = \frac{qQ}{r} e^{-\alpha r}.$$

其中 α^{-1} 是原子中电子的屏蔽长度。

(a) 用玻恩近似：

$$f = -\frac{1}{4\pi} \int e^{-i\Delta k \cdot r} \frac{2m}{\hbar^2} V(r) d^3r.$$

计算散射截面。

(b) α 怎样的依赖核电荷 Z ?

$$\text{解: (a) } f = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int V(r) \exp^{-irq} d^3r.$$

其中 $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$ 为入射粒子对出射粒子的传递动量。 $|\mathbf{q}| = 2K_0 \sin \frac{\theta}{2}$ 。 θ 为散射粒子与入射粒子的夹角，因 $V(r)$ 是球对称的，可以方便地分别对角度和径向积分：

$$\begin{aligned} f(\theta) &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi V(r) e^{-i\Delta k r \cos\theta'} \sin\theta' r^2 dr d\phi' d\theta' \\ &= -\frac{2m}{\hbar^2 \Delta k} \int_0^\infty V(r) \sin(\Delta k r) \cdot r dr \\ &= -\frac{2m Q q}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{\alpha^2 + (\Delta k)^2}, \end{aligned}$$

$$\text{微分截面 } d\sigma = |f(\theta)|^2 d\Omega = \frac{4m^2 q^2 Q^2}{\hbar^2} \frac{d\Omega}{[\alpha^2 + (\Delta k)^2]^2}$$

$$= \frac{m^2 q^2 Q^2}{4\hbar^4 k_0^4} \cdot \frac{d\Omega}{\left(\frac{\alpha^2}{4k_0^2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^2}$$

全截面 $\sigma = \int d\sigma = \frac{m^2 q^2 Q^2}{4\hbar^4 k_0^4} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta d\varphi}{\left(\frac{\alpha^2}{4k_0^2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^2}$

$$= \frac{16\pi m^2 \theta^2 q^2}{\hbar^4 \alpha^2 (4k_0^2 + \alpha^2)}$$

(b) α^{-1} 是代表了原子大小的量, 当 Z 大时, 核外电子的数目会增加, 电子靠近核的几率增加, 屏蔽效应越明显, 故 α 是 Z 的增函数. (管怀群)

2018 (Wis, 1975)

考虑 1keV 的质子被氢原子散射 (a) 角分布会是什么样的? (画图并说明); (b) 估计总截面, 给出以 cm^2 , m^2 或 b ($= 10^{-24}\text{cm}^2$) 为单位的数量级的估计.

解: 据 2017 题的结果:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2 q^2 Q^2}{4\hbar^4 k_0^4} \frac{1}{\left(\frac{\alpha^2}{4k_0^2} + \sin \frac{\theta}{2}\right)^2}$$

对质子和氢原子, $Q = q = e$, α^{-1} 为电子的屏蔽长度. $\alpha^{-1} \approx R_0$, R_0 为氢原子的玻尔半径. 对 1keV 的入射质子有:

$$\lambda_0 = \frac{\hbar^2}{\sqrt{2\mu E}} = \frac{c\hbar}{\sqrt{2\mu c^2 E}} = \frac{197\text{MeV}\cdot\text{fm}}{\sqrt{10^{-3} \times 938\text{MeV}}} \approx 203\text{fm}.$$

$$\alpha^{-1} = R_0 = 5.3 \times 10^4 \text{fm}. \quad \frac{\alpha^2}{4k_0^2} \ll 1.$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{m^2 e^4}{4\hbar^2 k_0^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}, \quad \text{即为 Rutherford 散射公式.}$$

1keV 的质子，对氢原子的散射主要集中在小角度(图2.1)，在大角度(粒子和质子对头碰)的几率是很小的，说明氢原子

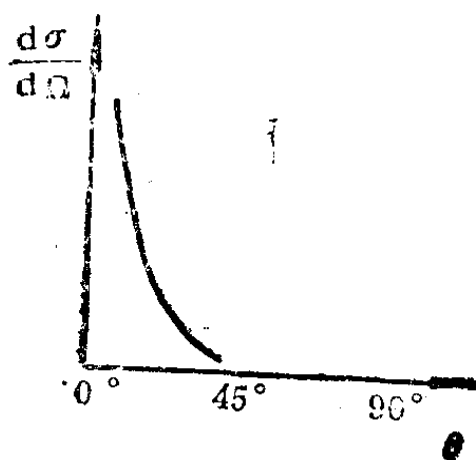


图2.1

有一个尺度很小的核。

(b) 利用上题的结果：

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{16\pi m^2 e^4}{\hbar^4 \alpha^2 (4k_0^2 + \alpha^2)} \approx \frac{16\pi m^2 e^4}{\hbar^4 \alpha^2 \cdot 4k^2} \approx \frac{4\pi (mc^2)^2 e^4 R_0^2 \lambda^2}{\hbar^2 c^2 (c\hbar)^2} \\ &\approx \frac{4\pi \times 938^2 \cdot (\text{MeV})^2 \times 5.3^2 \times 10^8 (\text{fm})^2 \times 203^2 (\text{fm})^2}{197^2 (\text{MeV} \cdot \text{fm})^2 \times 137^2} \\ &= 1.76 \times 10^{12} (\text{fm})^2 = 1.76 \times 10^{-14} \text{cm}^2. \end{aligned}$$

(胡 平)

2019 (Col, 1980)

(a) 质心系中的动能为 5MeV，用相移描述中子在某个核上的弹性散射，相移值为： $\delta_0 = 30^\circ$ ， $\delta_1 = 10^\circ$ 。假定所有其它级相移均可忽略，描绘 $d\sigma/d\Omega$ 作为散射角函数的曲线，严格计算散射角为 30° ， 45° 和 90° 时的 $d\sigma/d\Omega$ 。总截面 σ 是多大？(b) 相移 $\delta_2, \delta_3 \dots$ 可以忽略的事实意味着势在什么范围？(尽可能地定量)。

$$\text{解: (a) } \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{k^2} \left| \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta) \right|^2,$$

取 $l=0, 1$ 两项, 有:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{k^2} |e^{i\delta_0} \sin \delta_0 + 3e^{i\delta_1} \sin \delta_1 \cos \theta|^2 \\ &= \frac{1}{k^2} [\sin^2 \delta_0 + 9\sin^2 \delta_1 \cos^2 \theta \\ &\quad + 6\sin \delta_0 \sin \delta_1 \cos(\delta_1 - \delta_0) \cos \theta] \\ &\approx \frac{1}{k^2} [0.25 + 0.49 \cos \theta + 0.27 \cos^2 \theta]. \end{aligned}$$

式中 k 为质心系中子入射动量. 设核质量远大于中子质量 m_n , 则

$$k^2 \approx \frac{2m_n E}{\hbar^2}$$

$$\approx 2.4 \times 10^{29} \text{m}^{-2} = 2.4 \times 10^{25} \text{cm}^{-2}.$$

作图 2.2 并列列表计算如下:

θ	0°	30°	45°	90°	180°
$k^2 \frac{d\sigma}{d\Omega}$	1	0.88	0.73	0.25	0
$\frac{d\sigma}{d\Omega} (\times 10^{-28})$	4.2	3.7	3.0	1.0	0

总截面为

$$\begin{aligned} \sigma &= \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{2\pi}{k^2} \int_0^\pi (0.25 + 0.49 \cos \theta + 0.27 \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta \\ &= \frac{4\pi}{k^2} (0.25 + \frac{1}{3} \times 0.27) \approx 1.78 \times 10^{-25} (\text{cm}^2) \approx 0.18 \text{b}. \end{aligned}$$

(b) 计算 1 阶相移的公式为

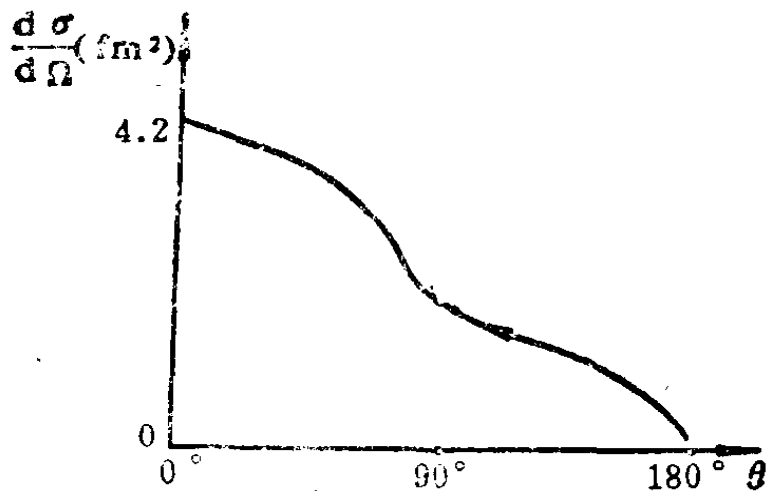


图2.2

$$\delta_l \approx -\frac{2m_n k}{\hbar^2} \int_0^\infty V(r) J_l^2(kr) r^2 dr.$$

因为 $J_l(x)$ 的最大值出现在 $x=l$ 附近. 故高阶的相移由于 J_l 在势 $V(r)$ 的区域内很小而可以忽略. 也就是说 $\delta_2, \delta_3 \dots$ 可以忽略意味着势的范围在 $R \approx 1/k$ 以内, 计算得

$$R \approx 2 \times 10^{-15} \text{ m} = 2 \text{ fm}.$$

即势范围约为 2fm.

(周 平)

2020 (Chi, 1980)

动能为 1000eV 的中子入射到碳靶上, 如果非弹性散射截面为 $400 \times 10^{-24} \text{ cm}^2$, 弹性散射截面上, 下限是多少?

解: 因为动能 $T_n = 1 \text{ keV}$, 只涉及 S 波, 设相移因子为 δ , 由于是非弹散射过程, 必定有一正的虚部, 有下列关系:

$$\sigma_{\text{弹}} = \pi \lambda^2 |e^{2i\delta} - 1|^2,$$

$$\sigma_{\text{非弹}} = \pi \lambda^2 (1 - |e^{2i\delta}|^2),$$

$$\sigma_{\text{总}} = 2\pi \lambda^2 (1 - R_e e^{2i\delta}).$$

入射中的 $E = 1 \text{ keV}$,

$$\lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu E}}, \quad \mu = \frac{m_e m_o}{m_o + m_n} \approx \frac{12}{13} m_n,$$

$$\lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu E}} = \frac{197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{\sqrt{2 \times 10^{-3} \times 940 \text{ MeV}}} \approx 143 (\text{fm}),$$

$$\pi \lambda^2 = 642.4 \times 10^{-24} (\text{cm}^2),$$

$$\sigma_{\text{非弹}} = 400.0 \times 10^{-24} (\text{cm}^2),$$

$$1 - |e^{2i\delta}|^2 = \frac{400.0}{648.5} = 0.6226.$$

$$|e^{2i\delta}|^2 = 0.3774,$$

$$|e^{2i\delta}| = 0.6143.$$

所以，弹性散射截面

$$\sigma_{\text{弹}} = \pi \lambda^2 |e^{i2\delta} - 1|^2,$$

$$(\sigma_{\text{弹}})_{\text{max}} = \pi \lambda^2 (-0.6143 - 1)^2 = 1674.1 \times 10^{-24} (\text{cm}^2),$$

$$(\sigma_{\text{弹}})_{\text{min}} = \pi \lambda^2 (1 - 0.6143)^2 = 95.6 \times 10^{-24} (\text{cm}^2),$$

$$95.6 \times 10^{-24} \text{cm}^2 \leq \sigma_{\text{弹}} \leq 1674.1 \times 10^{-24} \text{cm}^2.$$

(林 辰)

2021 (Ber, 1975)

从高能电子与核的散射研究中，发现了许多关于核及核子中的电荷分布的有意义的信息。在此我们考虑一种简单的理论，在这种理论中，“电子”被假设为具有零自旋。并假设电荷为 Ze 的核固定在空间中（例如：其质量假设为无限大）。令 $\rho(\mathbf{x})$ 表示核中的电荷密度，假设电荷分布是球对称的，但其它条件是任意的。

设 $f_0(\mathbf{p}_i; \mathbf{p}_f)$ 是在一级玻恩近似下，电子与带电 Ze 的点核散射的散射振幅，其中 \mathbf{p}_i 和 \mathbf{p}_f 是初态和末态的动量。设 $f(\mathbf{p}_i; \mathbf{p}_f)$ 也是在一级玻恩近似下的散射振幅，不过是电子

与真实的带同样电荷的核的散射振幅。设 $\mathbf{q} = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f$ 表示动量传递，由下式定义的量 F ：

$$f(\mathbf{p}_i; \mathbf{p}_f) = F(q^2) f_0(\mathbf{p}_i; \mathbf{p}_f),$$

称为形状因子。显然， F 只通过量 q^2 而依赖于 \mathbf{p}_i 和 \mathbf{p}_f 。

(a) 形状因子 $F(q^2)$ 和电荷密度 $\rho(\mathbf{x})$ 的傅立叶变换有十分简单的关系，用非相对论薛定谔理论阐述并推导这一关系。在这里，假定电子是“非相对论的”可以使问题尽可能简化，如能仔细考虑，这一假设是无关紧要的；相同的结果也适用于实际实验的“相对论的”情形。同样，忽略自旋也不影响问题的讨论。

(b) 图2.3表示一些关于质子形状因子的实验结果，可认

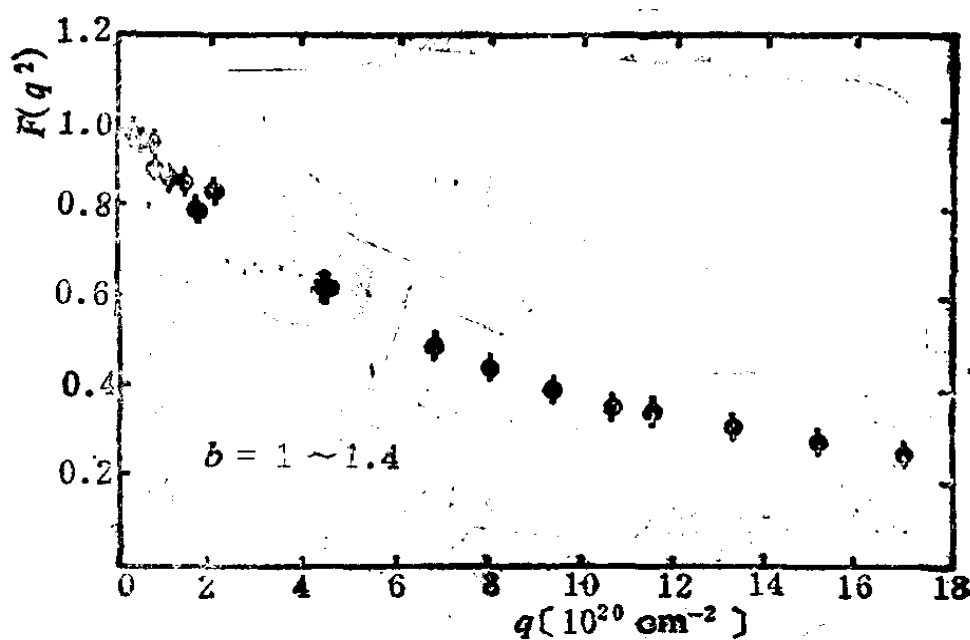


图2.3 质子形状因子函数的实验值

为我们的理论是适合于这些数据的。用所给的数据计算质子的均方根(电荷)半径。(提示：注意均方根半径与 $q^2 = 0$ 处 $F(q^2)$ 对 q^2 的微商有简单的关系，找出这一关系，再进行计算)。

解: (a) 证明 $F(q^2) = \int d^3r \rho(r) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}/\hbar}$

在一级玻恩近似下, 高能电子的核散射振幅:

$$f(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int V(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}/\hbar} d^3x.$$

对于有一定球对称电荷分布的核来说, 它在 \mathbf{x} 处产生的势为

$$V(\mathbf{x}) = \int \frac{\rho(r) Ze}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} d^3r.$$

所以

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f) &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3x e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}/\hbar} \int d^3r \frac{\rho(r) Ze}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|} \\ &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r \rho(r) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}/\hbar} \\ &\quad \int d^3x \frac{Ze}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|} e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{r})/\hbar} \\ &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r \rho(r) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}/\hbar} \cdot \\ &\quad \int d^3x' \frac{Ze}{x'} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}'/\hbar} \end{aligned}$$

而对于点核来说, $V(\mathbf{x}) = \frac{Ze}{x}$, 于是:

$$f_0(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{ze}{x} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}/\hbar} d^3x.$$

比较上面两式有: $f(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f) = f_0(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f) \int d^3r \rho(r) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}$

故 $F(q^2) = \int d^3r \rho(r) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}/\hbar}$.

(b) 当 $q \approx 0$ 时,

$$\begin{aligned}
 F(q^2) &= \int \rho(r) e^{i \mathbf{q} \cdot \mathbf{r} / \hbar} d^3 r \\
 &\approx \int \rho(r) \left(1 + i \mathbf{q} \cdot \mathbf{r} / \hbar - \frac{1}{2} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})^2 / \hbar^2 \right) d^3 r \\
 &= \int \rho(r) d^3 r \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int (\rho(r) q^2 r^2 \cos^2 \theta / \hbar^2) \cdot r^2 \sin \theta \, dr d\theta d\varphi \\
 &= 1 - \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{q^2}{\hbar^2} \int dr \cdot r^4 \rho(r).
 \end{aligned}$$

$$F(q^2) - F(0) = -\frac{2\pi}{3} \cdot \frac{q^2}{\hbar^2} \int dr \cdot r^4 \rho(r).$$

定义

$$\langle r^2 \rangle = \int d^3 r \rho(r) r^2 = 4\pi \int dr \cdot \rho(r) r^4.$$

所以
$$\langle r^2 \rangle = -6\hbar^2 \frac{F(q^2) - F(0)}{q^2} = -6\hbar^2 \left(\frac{\partial F}{\partial q^2} \right)_{q^2=0},$$

由图知:

$$-\left(\frac{\partial F}{\partial q} \right)_{q^2=0} \approx -\frac{0.8 - 1.0}{2 - 0} \times 10^{-26} = 0.1 \times 10^{-26} \text{cm}^2 / \hbar^2.$$

故 $\langle r^2 \rangle = 0.6 \times 10^{-26} \text{cm}^2$, $\sqrt{\langle r^2 \rangle} = 0.77 \times 10^{-13} \text{cm}$,
即质子方均根半径约为 0.77fm. (黄晓舟)

2022 (Chi, 1979)

在质心系动量 $p = 10 \text{GeV}/c$ 时, 质子-中子相互作用的总截面(弹性 + 非弹性)为 $\sigma = 40 \text{mb}$. (a) 不考虑核子自旋, 给

出质心系质子-中子弹性散射朝前的微分截面下限；(b)假定实验中找到了一个违反这一界限的事例，这意味着什么？

解：(a)质子-中子前向弹性散射微分截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}_0 = |f(0)|^2 \geq |I_m f(0)|^2 = \left(\frac{k}{4\pi} \sigma_t \right)^2.$$

最后一步推导是根据光学定理。其中 k 为波矢。由于 $k = p/\hbar$ 。

故

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega}_0 &\geq \left(\frac{p}{4\pi\hbar} \sigma_t \right)^2 \\ &= \left(\frac{10 \times 10^9 \times 1.6 \times 10^{-12}}{4\pi \times 1.054 \times 10^{-27} \times 3 \times 10^{10}} \right. \\ &\quad \left. \times 40 \times 10^{-27} \right)^2 \\ &= 2.6 \times 10^{-24} \text{cm}^2 = 2.6 \text{b}. \end{aligned}$$

(b)如果实验上发现该限制不成立，就意味着光学定理不成立，也就是 S 矩阵非么正，于是量子力学的几率解释就有错误。
(林 辰)

2023 (Chi, 1979)

当一 300 GeV 的质子束轰击一氢靶(图2.4)时，弹性散射的截面在朝前方向为最大。在偏离精确地朝前的方向上，发现截面有一个(第一)极小值。(a)造成该极小值的原因是什么？估计它位于哪一实验系角度；(b)如果束能增加到 600 GeV ，求该极小的位置；(c)如果靶是铅而不是氢，极小值位置有何变化？(束能为 300 GeV)；(d)对于铅，试预期第二极小出现在哪一角度？

解：造成极小值的原因是不同的碰撞参数的散射质子的相消干涉。

入射质子的波长为 $\lambda = h/p$ 。利用 $\hbar c = 0.2 \text{ GeV} \cdot \text{fm}$ ，可以求出 300 GeV 的质子的波长为 $4.2 \times 10^{-16} \text{ cm}$ 。这比靶质子的

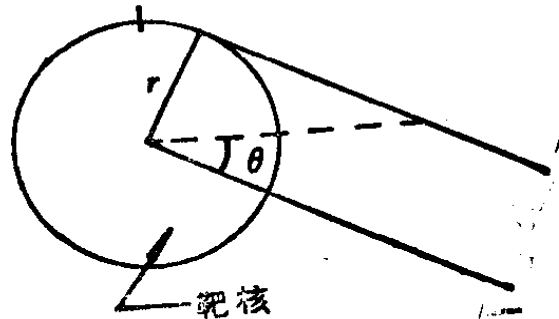


图2.4

的尺寸小得多。

设第一衍射极小位于 θ_{\min} 处。则从边缘散射的质子与在中心散射的质子对 θ_{\min} 的相位差相应于 $\lambda/2$ 。所以

$$r \theta_{\min} = \lambda/2 = 2.1 \times 10^{-16} \text{ cm},$$

设 $r = 1.0 \times 10^{-16} \text{ cm}$ ，则极小值位于 2.1×10^{-3} 弧度处。

(b) 如果束能增加到 600 GeV ，则波长减小为原来的一半。故极小值角度 θ_{\min} 也减少为原来的一半，即 1.05×10^{-3} 弧度。

(c) 对 Pb: $A = 208$, $r = 1.1 \times \sqrt[3]{208} \text{ fm} = 6.6 \text{ fm}$ ，可求得第一极小角 $\theta_{\min} = 3.2 \times 10^{-4}$ 弧度。

(d) 对于第二极小，边缘处散射相对于中心处散射的相差为一个半波长。因而得：

$$\theta_{\min} = 9.6 \times 10^{-4} \text{ 弧度。} \quad (\text{林 辰})$$

§ 2 原子核结合能、裂变 和聚变(2024—2047)

2024 (Col, 1982)

原子核 $M(A, Z)$ 的质量有一个半经验公式, 将它与原子量 A 和原子序数 Z 联系起来, 写出这个公式的近似表达式, 解释和证实每一项, 并给出其中常数或系数的大概数值.

解: 核素的原子质量公式:

$$M(Z, A) = ZM(^1\text{H}) + (A - Z)m_n - B(Z, A)/c^2.$$

其中 $B(Z, A)/c^2$ 是结合能的部分, 其表达式为

$$\begin{aligned} B(Z, A) &= B_v + B_s + B_c + B_a + B_p \\ &= a_v A - a_s A^{\frac{2}{3}} - a_c Z^2 A^{-\frac{1}{3}} \\ &\quad - a_p \left(\frac{A}{2} - Z \right)^2 A^{-1} + a_p \delta A^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

上式中 B_v, B_s, B_c 分别是液滴模型中核的体积能、表面能和静电能(质子之间产生), 由于核半径可写成 $r_0 A^{\frac{1}{3}}$ 形式, 故 B_v 与核体积成正比, 即与 A 成正比, 同样理解可以得出表面能. 而库仑能与 $\frac{Z^2}{R}$ 成正比, 即与 $Z^2 A^{-\frac{1}{3}}$ 成正比.

B_p 称为对称能, 这是由于中子、质子间有对称相处的趋势, 不然结合能将降低, 这是一项量子效应.

另外, 中子、质子本身还有成对相处的趋势, 同类核子成对相处时结合能增大, 这是最后一项对能 B_p . 其中:

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{偶偶核,} \\ 0 & \text{奇偶核,} \\ -1 & \text{奇奇核.} \end{cases}$$

这个公式中的各个系数一般不能由理论导出，而依赖于实验。魏茨克给出一组数据近似如下：

$$\begin{aligned} a_v &= 15.835 \text{ MeV}, & a_s &= 18.33 \text{ MeV}, \\ a_c &= 0.714 \text{ MeV}, & a_a &= 92.80 \text{ MeV}, \\ a_p &= 11.20 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (\text{管怀群})$$

2025 (Pri, 1982)

原子核的结合能由经验公式近似给出：

$$B.E = a_1 A - a_2 A^{\frac{2}{3}} - a_3 Z^2 A^{-\frac{1}{3}} - a_4 (A - 2Z)^2 A^{-1}.$$

(a) 解释公式中的各项；(b) 考虑一组同量异位素，对自然界存在的原子核，说明 A 和 Z 的关系；(c) 使用费米气体模型，估计 a_4 的值，可以假设 $A = 2Z$ ，原子核的半径

$$R = R_0 A^{\frac{1}{3}}.$$

解：(a) 各项的意义是：依次为体积能、表面能、库仑能和对称能。

(b) 对同量异位素， A 相同， Z 不同。稳定核应满足：

$$\frac{\partial(B.E)}{\partial Z} = 0,$$

$$-2A^{-\frac{1}{3}} a_3 Z + 4a_4 A^{-1} (A - 2Z) = 0,$$

$$Z = \frac{2a_4 A}{4a_4 + a_3 A^{\frac{2}{3}}} = \frac{A}{2 + \frac{a_3}{2a_4} A^{\frac{2}{3}}}.$$

代入 $a_3 = 0.711$ ， $a_4 = 23.702$ 。得到：

$$Z \approx \frac{A}{2 + 0.015 A^{\frac{2}{3}}}$$

(c) 由费米气体模型给出最低态能量:

$$\begin{aligned} E &= \frac{3}{40} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{h^2}{m} \frac{N^{\frac{5}{3}} + Z^{\frac{5}{3}}}{V^{\frac{2}{3}}} \\ &= \frac{3}{40} \left(\frac{9}{4\pi^2} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{h^2}{mR_0^2} \frac{N^{\frac{5}{3}} + Z^{\frac{5}{3}}}{A^{\frac{2}{3}}} \\ &= C \frac{N^{\frac{5}{3}} + Z^{\frac{5}{3}}}{A^{\frac{2}{3}}}, \end{aligned}$$

式中 $V = \frac{4\pi R_0^3 A}{3}$, $C = \frac{3}{40} \left(\frac{9}{4\pi^2} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{h^2}{mR_0^2} \approx 31.7(\text{MeV})$

其中 m 为核子质量, $R_0 \approx 1.2\text{fm}$.

对稳定核: $N + Z = A$, $N \approx Z$, 令

$$N = \frac{1}{2}A \left(1 + \frac{\varepsilon}{A} \right), \quad Z = \frac{1}{2}A \left(1 - \frac{\varepsilon}{A} \right), \quad \varepsilon \ll 1.$$

$$\left(1 + \frac{\varepsilon}{A} \right)^{\frac{5}{3}} = 1 + \frac{5\varepsilon}{3A} + \frac{5\varepsilon^2}{9A^2} + \dots,$$

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{A} \right)^{\frac{5}{3}} = 1 - \frac{5}{3} \frac{\varepsilon}{A} + \frac{5}{9} \frac{\varepsilon^2}{A^2} - \dots$$

$$\begin{aligned} E &\approx 2^{-\frac{2}{3}} \cdot CA \left[1 + \frac{5}{9} \frac{D^2}{A^2} \right] = 2^{-\frac{2}{3}} CA \\ &\quad + \frac{5}{9} \times 2^{-\frac{2}{3}} C \frac{(N-Z)^2}{A}. \end{aligned}$$

第二项对应于 $a_4 \frac{(N-Z)^2}{A}$, 由此可求出 a_4 值为

$$a_4 = \frac{5}{9} \times 2^{-\frac{2}{3}} C = \frac{5}{9 \times 2^{\frac{2}{3}}} \times 31.7 \approx 11(\text{MeV}).$$

与2024题给出的18.33MeV相差近一倍，这是由于模型太简单粗糙引起的。 (吴为民)

2026 (Col, 1983)

在 ^{56}Fe 附近的核，每核子的结合能最大，而在 ^{238}U 附近的要小得多。按照核结合能的半经验理论，解释之。说出半经验结合能公式(不必给出各个系数的值)。

解：核 (A, Z) 结合能的半经验公式：

$$\begin{aligned} B(Z, A) &= B_v + B_s + B_c + B_a + B_p \\ &= a_v A - a_s A^{\frac{2}{3}} - a_c Z^2 A^{-\frac{1}{3}} \\ &\quad - a_a \left(\frac{A}{2} - Z \right)^2 A^{-1} + a_p A^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

其中各个系数 a 为正。

B_v, B_s, B_c 分别是核的体积能、表面能、库仑能，这是把核看成荷电液滴的结果，另外，核子间有中子、质子对称相处的趋势，即出现对称能 B_a 。另外，还有中子、质子各自成对相处的趋势，则出现对能项 B_p 。

每个核子平均结合能为

$$\begin{aligned} \varepsilon = B/A &= a_v - a_s A^{-\frac{1}{3}} - a_c Z^2 A^{-\frac{4}{3}} \\ &\quad - a_a \left(\frac{1}{2} - \frac{Z}{A} \right)^2 + a_p A^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

可见， ε 的五项中：对能项主要在相近 A 而不同 Z, N 的核素表现出差异，不考虑其随 A 的变化；体积能项 a_v 是常数，不随 A 变化的正值；表面能项是负值，绝对值随 A 增大而减小；

库仑能项是负值，绝对值随 A 增大而增大；对称能项也是负值，由于 Z/A 值随 A 增大而变小，该项绝对值随 A 增大而增大。综合这几项值随 A 变化可得：平均结合能随 A 增大而开始增大然后又变小，在 $A \sim 56$ 处极大。如图 2.5 的趋势。

(范扬眉 王横鑫)

2027 (Wis, 1970, 1972)

作一曲线显示核子的平均结合能为原子质量数的函数的大致趋势。以 MeV 为单位给出每个核子的结合能。用核子间作用力的性质解释曲线的形状。利用该曲线，说明核裂变和核聚变中释放出来的能量。

解：(1) 曲线在 $A < 30$ 段是上升的，但中间有较大的起伏。这是因为在核子数较少时，核子间的作用力还未达到饱和，所以随着原子序数的增加，平均结合能增加。由于总的核子数较少，对能和对称能对平均结合能的影响较大，造成曲线的较大起伏(图 2.5)。

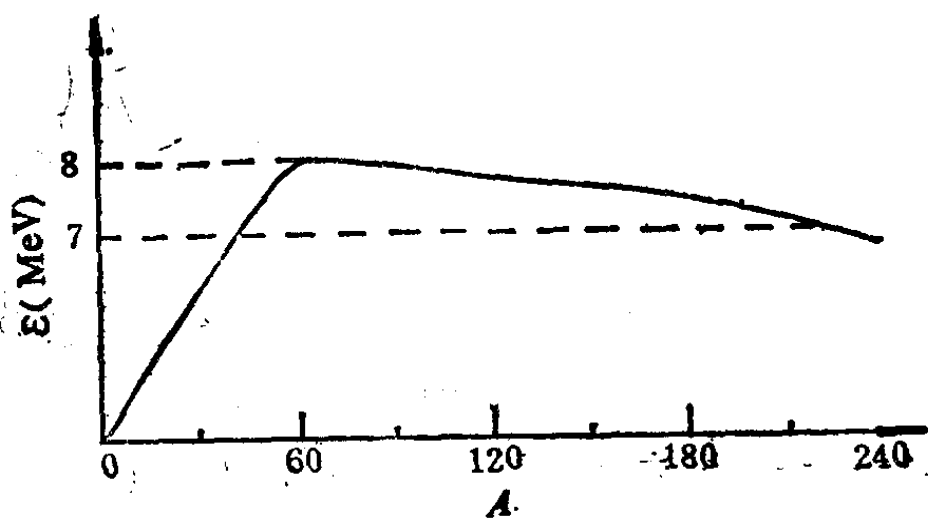


图2.5

(2) $A > 30$, 平均结合能趋近于 8MeV , A 继续增大时, 曲线缓慢下降. 这是因为核子数增加后, 核子间作用力达到饱和, 平均结合能趋于饱和性, 核子数继续增加时, 由于库仑排斥作用, 平均结合能缓慢减小.

核裂变是一个重核裂变成二个中等质量的核, 从曲线中可以看出, 核子的平均结合能增加, 故释放出能量. 轻核聚变同样也是使平均结合能增加而释放能量. (林 辰)

2028 (Wis, 1972)

核素的结合能更接近于与 $A (= N + Z)$ 还是与 A^2 成正比? 涉及的系数的值是什么(给出单位)? 如何理解它依赖于 A ? 这意味着一个核子-核子间作用力的一个重要性质, 该性质叫做什么? 为什么束缚在核中的中子是稳定的不会衰变, 而超核中的 A 粒子却不是这样?

解: 核的结合能更接近于与 A 成正比, 其系数为 15.6MeV . 这是因为核力的饱和性, 一个核仅与一定个数的其他核子相互作用, 所以结合能与核子数成正比.

衰变的根本原因是因为系统要处于能量更低的稳定状态. 自由中子衰变大约释放 0.78MeV 的能量, 若中子处于核中, 设核为 ${}^A X_N$, 中子衰变后生成 ${}^A X_{N-1}$. 若 ${}^A X_{N-1}$ 的结合能比 ${}^A X_N$ 小并且差值超过 0.78MeV . 那末衰变反而使系统能量增加, 这种衰变就不会发生. 所以许多非 β^- 放射性的核中的中子是稳定的. 而 A 粒子的衰变能为 37.75MeV , 大于核的结合能之差, 所以核中 A 粒子仍要衰变.

(范扬眉 林 辰)

2029 (Wis, 1971)

图 2.5 为原子核中每个核子的平均结合能 ε 与原子核质量数 A 的关系曲线. 质量数 A_0 (库仑量 M_0) 的原子核裂变成质量数为 A_1 和 A_2 (质量分别为 M_1 和 M_2) 的两个原子核, 释放出的能量为

$$Q = M_0 c^2 - M_1 c^2 - M_2 c^2.$$

试用 $\varepsilon(A)$ 和 A 表示 Q . 估算 $A_0 = 240$ 原子核对称裂变的 Q 值.

解: 原子核的质量为

$$M = Zm_p + (A - Z)m_n - B/c^2,$$

Z 为核素所带电荷数, m_p, m_n 分别为质子、中子质量, B 为结合能. 所以

$$Q = M_0 c^2 - M_1 c^2 - M_2 c^2 = B_1 + B_2 - B_0.$$

(利用 $Z_0 = Z_1 + Z_2, A_0 = A_1 + A_2$).

而结合能与平均结合能及质量数的关系为

$$B = \varepsilon(A) \times A.$$

所以 $Q = B_1 + B_2 - B_0 = A_1 \varepsilon(A_1) + A_2 \varepsilon(A_2) - A_0 \varepsilon(A_0)$.

$A_0 = 240$ 时对称裂变有 $A_1 = A_2 = 120$.

查 $\varepsilon(A) \sim A$ 曲线得

$$\varepsilon(120) \approx 7.6 \text{ MeV}, \quad \varepsilon(240) \approx 6.7 \text{ MeV}.$$

所以裂变释放的能量为:

$$\begin{aligned} Q &= 120\varepsilon(120) + 120\varepsilon(120) - 240\varepsilon(240) \\ &\approx 216 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

(钱剑明)

2030 (Wis, 1974)

(a) 绘出用来解释核裂变的相对分离能曲线. 定性地讨

论此曲线与液滴模型的关系。(b)重核裂变时放出裂变能从何而来?(c)什么原因阻止比铁重但比铅轻的那些元素自发裂变?

解: (a) 用来解释核裂变的曲线是比结合能 ε 原子核质量数 A 的曲线(图 2.5)。液滴模型很好地解释了这条曲线,中间高,两端低,变化平稳,在定量上也符合得较好,在很大范围内 $\varepsilon \approx 8\text{MeV/Nu}$ 。实际上 ε - A 曲线表明了核力的饱和特性,是液滴模型的实验依据。

(b) 由于重核裂变时分裂成两个中等质量的原子核,比结合能由小变大,从而放出核能,其大小为裂变前后结合能之差。

$$Q = A_1\varepsilon(A_1) + A_2\varepsilon(A_2) - A\varepsilon(A),$$

A, A_1 和 A_2 分别为裂变前后的核质量数, $\varepsilon(A_i)$ 为 A_i 核的比结合能。

(c) 对于比铁重但比铅轻的元素,虽然从比结合能方面考虑裂变会有能量放出,但由于这些核的裂变势垒都较高,使得穿透裂变势垒的几率很小,库仑势垒阻止了自发裂变的发生。
(钱剑明)

2031 (Wis, 1973)

稳定核的 Z 和 N 标绘点近似位于 $N = Z$ 的一条直线。(a)定性讨论决定曲线形状的因素;(b)重核的质子数小于中子数,请解释;(c) ^{14}O ($Z = 8, N = 6$)的寿命为71秒,给出 ^{14}O 衰变的末态粒子。

解: (a) 原子核结合能中的对称能贡献决定了这条曲线(图2.6)。根据泡利(Pauli)不相容原理,在质子、中子对称

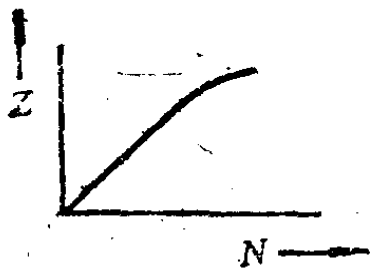


图2.6

相处的情况下，能填充的单粒子能级更低些，这些核就较稳定，因而稳定在 $Z = N$ 的直线附近。

(b) 对重核，由于核内质子较多，库仑排斥作用增大，为了构成稳定核，就需要更多的中子以抵消库仑排斥作用，这与质子、中子对称项贡献相竞争，为克服质子间的库仑作用，使得稳定核中中子数与质子数之比随 A 增大，即重核中质子数稍微小于中子数。

(c) 对 ^{14}O ，由于质子数比中子数多，且其寿为 71 秒，因此 ^{14}O 衰变为 β^+ 衰变，衰变方程为



衰变产物为 ^{14}N , e^+ 和电子中微子。另外的过程是电子俘获。但由于 ^{14}O 的衰变能很大 ($E_{\max} > 4\text{MeV}$)，电子俘获的分支比很小。
(钱剑明)

2032 (Col, 1981)

稳定的轻核中质子数和中子数是基本相等的，然而稳定的重核中中子数远比质子数大得多。对轻核，要从核中移去一个中子和移去一个质子所需的能量基本上是相同的，而对重核，移去一个质子比一个中子需要更多的能量。假设所有核子对间的核力完全相同，解释上述事实。

解：由核素质子解这能和中子解这能 S_p 和 S_n 定义可得

$$S_p - S_n = B(Z, A - 1) - B(Z - 1, A - 1)$$

$$= \frac{\partial B}{\partial Z} \Delta Z, \quad \Delta Z = 1.$$

这里 B 是核素结合能，液滴模型给出

$$E = a_v A - a_s A^{\frac{2}{3}} - a_c Z^2 A^{-1} - a_a \left(\frac{A}{2} - Z\right)^2 A^{-1} - a_p \delta A^{-\frac{1}{2}},$$

得 $S_p - S_n = -2 a_c Z A^{-1} + 2 a_a \left(\frac{A}{2} - Z\right) A^{-1},$

由稳定核关系 $Z = \frac{A}{2 + 0.0155 A^{\frac{2}{3}}},$

得 $S_p - S_n = \frac{(-2 a_c + 0.0155 a_a) A^{\frac{2}{3}}}{2 + 0.0155 A^{\frac{2}{3}}},$

代入 $a_c = 0.714 \text{ MeV}$ 和 $a_a = 92.8 \text{ MeV}$, 可得 $S_p - S_n$ 随 A 增大而增大, 即从重核中解这一个质子比解这一个中子需花更多的能量.

(范扬眉)

2033 (Wis, 1971)

由于质子间的库仑排斥作用, 所有重的自发辐射核都是不稳定的. 它们减小尺寸的机制是 α 衰变. 为什么 α 衰变比其它分解更优先(如: 质子衰变, 氦核衰变, 或氦发射, 或裂变)? 从以下方面简要地讨论: (a) 释放的能量; (b) 所穿透的库仑位垒.

解: (a) 一个核要发生某种衰变首先要求衰变能必须大于零. 而对于重核, 其质子衰变, 氦核衰变和氦发射的衰变能通常小于零, 以 ${}_{95}^{238}\text{Am}$ 的同位素和同中子表为例, Am 的十种同位素的质子衰变能均在 $-3.9 \text{ MeV} \sim -5.6 \text{ MeV}$ 之间, 氦核衰变的衰变能均在 $-7.7 \text{ MeV} \sim -9.1 \text{ MeV}$ 之间. 氦核衰变的衰变能均在 $-7.6 \text{ MeV} \sim -8.7 \text{ MeV}$ 之间. 而 α 衰变的衰变能在 $5.2 \text{ MeV} \sim 6.1 \text{ MeV}$ 之间. 对于 ${}_{95}^{242}\text{Am}$ 的三种同中子素其

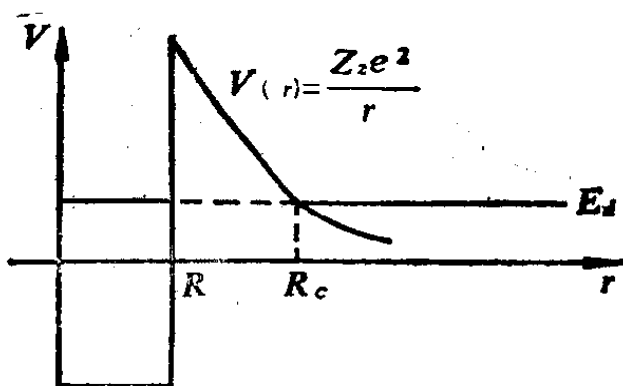


图2.7

子衰变，氘核衰变和氦核衰变的衰变能也都小于零，而它们的 α 衰变能大于零。所以重核的 α 衰变比质子、氘核、氦核优先。重核发生裂变的几率也不如 α 粒子是

因为它的库仑位垒穿透几率太小。

(b) 对于分裂成电荷为 z_1, z_2 两部分的衰变，其库仑位垒的穿透几率为

$$\exp\left[-\frac{2}{h}\int_R^{R_c}\left[2\mu\left(\frac{z_1 z_2 e^2}{r} - E_d\right)\right]^{\frac{1}{2}}dr\right],$$

令其等于 $\exp[-G]$ ，则可求得 G 为

$$G = \frac{2\sqrt{2\mu E_d}}{h} \int_R^{R_c} \left(\frac{R_c}{r} - 1\right)^{\frac{1}{2}} dr$$

而 R_c 与 E_d 满足关系：
$$E_d = \frac{z_1 z_2 e^2}{R_c},$$

$$\begin{aligned} G &\approx \frac{2R_c \sqrt{2\mu E_d}}{h} \left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{R}{R_c}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &\approx \frac{2z_1 z_2 e^2 \sqrt{2M}}{h \sqrt{E_d}} \left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{R}{R_c}\right)^{\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned}$$

$$\left(\frac{R}{R_c} < \frac{1}{3}\right)$$

对于裂变，虽然其衰变能比 α 衰变大50倍，但其折合质量也大20倍，且 $z_1 \cdot z_2$ 比 α 衰变大5倍， G 值要大3倍多，故其势垒贯穿几率比 α 衰变小得多。

(林 辰)

原子核的放射性在重核表现为常见的 α 衰变, 而质子放射性不存在. 尽可能定量地解释这一显著的差别.

解: 从能量角度很容易解释这一点. 重核素 (N, z) 发生 α 衰变的质能关系为

$$\begin{aligned} M(N, z) - M(N-2, z-2) - M(2, 2) \\ = -B(N, z) + B(N-2, z-2) + B(2, 2) = E_\alpha > 0. \end{aligned}$$

式中: B 为结合能. 用液滴模型得:

$$\begin{aligned} E_\alpha = 48.88 A^{-\frac{1}{3}} - 92.80 \left(1 - \frac{2z}{A}\right)^2 \\ + 2.856 A^{-\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{z}{3A}\right) - 35.04. \end{aligned}$$

对 β 稳定线上核素作图 (图中虚线). 从图2.8可见对 $A \gtrsim 150$ 核, E_α 才大于零, E_α 随 A 增大而增大, 重核才有 α 衰变性. 实际上 E_α 值在图中用实线标明. 与 $E_\alpha = 0$ 的交线移到

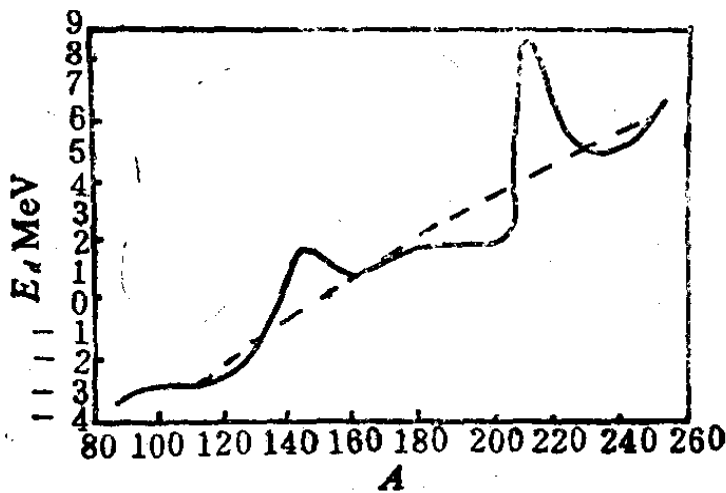


图2.8

$A \approx 140$ 处. 实验上确实发现了如 $^{147}_{62}\text{Sm}$, $^{144}_{60}\text{Nd}$ 等 α 放射性

同位素。

重核不能有质子衰变也可从衰变能说明，注意到：

$$\begin{aligned}M(N, z) - M(0, 1) - M(N, z - 1) \\ &= -B(N, z) + B(0, 1) + B(N, z - 1) \\ &= -B(N, z) + B(N, z - 1) \approx -e < 0.\end{aligned}$$

式中： e 是比结合能，在重核为7MeV左右，衰变能小于零，故不能自发衰变。值得注意，这个重核是在 β 稳定线附近的普通核素，对某些远离 β 稳定线的核素，中质比远小于稳定核素的中质比，最后一个质子的结合能小于零。这时会出现质子放射性。与发射中子不同，质子放射性不是瞬发过程。而与 α 衰变类似，由于库仑位垒阻挡，有一定半衰期。由于质子质量比 α 粒子小，库仑位垒也低一半左右，故半衰期比 α 短得多。质子放射体都具有 β^+ 放射性或轨道电子俘获，半衰期与这些竞争过程衰变几率有关。实验已找到原子核的同质异能态产生质子放射性的事例。

(王力军)

2035 (Col, 1975)

(a) 讨论重核有 α 衰变但不发射中子而衰变的原因。(b) 讨论用什么方法和论据确定核的半径？(c) 核子系统的基态由哪些性质决定？讨论非经典性质。(d) 下列数据是铀同位素 ($Z = 92$)，热中子裂变截面数据。

铀同位素	σ (巴)
^{230}U	20
^{231}U	300
^{232}U	76
^{233}U	530

^{234}U	0
^{235}U	580
^{236}U	0

而这些同位素的快中子裂变截面数量级均为若干巴，奇偶周期性很少有大变化，试解释之。

解：(a) 重核有 α 衰变且只有重核才有 α 衰变的原因见题2033, 2034. 对 β 稳定线附近的普遍原子核，中子的结合能大于零，所以不能有中子放射性，而对远离 β 稳定线的中子同位素，最后一个中子的结合能可能小于零，这时会自发发射中子，由于中子没有库仑势垒，这是一个瞬发过程。同时，某些 β^- 衰变形成的核激发态也可能发射中子，因为这种激发态是 β^- 衰变过程才形成，然后发射中子，又称为缓发中子。缓发中子的半衰期实际上就是 β 衰变母核的半衰期。

(b) 测量核半径的方法有两大类：利用核力的强相互作用来测定核物质的半径，它实际上是测量核力的作用范围，这种方法有中子、质子和 α 粒子对核的散射，中能中子全截面，目前对核力作用范围给出的核半径为

$$R = R_0 A^{\frac{1}{3}}, \quad R_0 \approx (1.4 - 1.5) \text{ fm}.$$

另一类是利用带电粒子与核的库仑相互作用，或核内的库仑相互作用，得到核的电磁半径。如高能电子和核的散射求出核的形状因子，进而得到核的电磁半径。利用镜象核之间的质量差异，设它们的内部结构相同，只是库仑能差和中子—质子质量不同引起。由公式：

$$\Delta E = \frac{3}{5} \frac{R^2}{R} (2Z - 1) - (m_n - M_H) c^2.$$

ΔE 为镜象核基态的能量差 (ΔMc^2), 由此可求出核的电磁半径 R . 更精确的测定核的电磁半径的方法是研究 μ 原子对简单氢原子玻尔公式的偏离, 因为 μ 子的玻尔半径远小于氢原子半径, 故它对核的电磁半径很灵敏. 用上述方法测得的核电磁半径为

$$R = R_0 A^{\frac{1}{3}}, \quad R_0 \approx 1.1(\text{fm}).$$

电子散射发现核内电荷分布不是完全均匀的.

(c) 一个核子系统的基态是由核子系统的自旋、宇称和同位旋等量子数决定的.

核子系统的自旋、宇称是由最后未成对的一个或两个核子的自旋和宇称决定. 对偶偶核基态, $J^p = 0^+$. 对奇偶核, 核的自旋宇称由最后一个核子决定, 对奇奇核的基态自旋和宇称, 由最后两个核子的自旋和轨道角动量耦合而成.

$$\text{核基态的同位旋 } I = \frac{1}{2}|N - Z|.$$

(d) 这是因为U的裂变有一个裂变势垒, 大约为6MeV自发裂变困难, 需诱发裂变. 同时核内中子有成对的趋势, 即对于偶中子的核, 有较大的结合能, 当奇中子数的U同位素俘获一个中子实成偶中子数U同位素, 核放出较大的能量, 足够克服裂变势垒而产生裂变, 而由偶中子数的U同位素俘获一个中子变成奇中子数的U同位素, 这时复合核的激发能小于核的裂变势垒, 故有很小的裂变截面, 例如, $^{235}\text{U} + n \longrightarrow ^{236}\text{U}^*$, 它的激发能为6.42MeV, 而 ^{236}U 的裂变势垒高度为5.9MeV, 故 ^{235}U 有较大的裂变几率. 而 $^{238}\text{U} + n \longrightarrow ^{239}\text{U}^*$, 它的激发能为4.8MeV, 而 ^{239}U 的裂变势垒为6.2MeV, 故 ^{238}U 不易裂变. 这种核又称为有阈裂变, 即当中子

能量超过一定值时，裂变截面才很快增加。对热中子，由于它的波长很长，核俘获热中子的截面很大。故热中子诱发裂变截面对奇中子U同位素可达几百巴。

快中子若能被U同位素俘获，即有足够的激发能引起裂变，但快中子被核俘获的截面远小于热中子，所以快中子诱发U同位素裂变的截面没有明显地随中子数的偶奇变化，均为若干巴的量级。 (王力军)

2036 (Pri, 1377)

由于核形变对半经验质量公式的影响，建议对核 X 的结合能写成下列形式：

$$B.E = \alpha A - \beta A^{\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{2}{5} \varepsilon^2 \right) - \gamma Z^2 A^{-\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{1}{5} \varepsilon^2 \right),$$

α, β, γ 分别为 14, 13, 0.6 MeV, ε 为偏心率。

(a) 简单解释这一公式并找出瞬时自发裂变包括 A 和 Z 在内的限制条件。考虑 ${}^{240}_{94}\text{Pu}$ 作为一个例子。

(b) 裂变同质异能态的发现和对重同位素基态瞬时裂变的探测，表明核的势能是一个更为复杂的函数 $V(\varepsilon)$ 。什么样的简单核激发可以解释下面 ${}^{240}_{94}\text{Pu}$ 的两组能级，讨论这两组能级之间的异同。由此对 $V(\varepsilon)$ 作出推断并画出 $V(\varepsilon)$ 的草图。

解：(a) 公式中第一项为体积能，第二项为表面能，其中 $\frac{2}{5}\varepsilon^2$ 一项是对变形核表面能的修正，第三项为库仑能，其中 $\frac{1}{5}\varepsilon^2$ 项也是由于核形变引起的修正，考虑核形变后，结合

能是变形参数 ε 的函数。极限条件是 $\frac{d(B \cdot E)}{d\varepsilon} = 0$ 。

$$\frac{dB \cdot E}{d\varepsilon} = -\frac{4\beta}{5} A^{\frac{2}{3}} \varepsilon + \gamma \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{2}{5} \varepsilon$$

$$= \frac{2\varepsilon}{5} A^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\gamma Z^2}{A} - 2\beta \right).$$

$\frac{dB \cdot E}{d\varepsilon} > 0$ 表明结合能随 ε 的增加而增加，即变形使核的结合能增加，这时核是不稳定的。当 $\frac{dB \cdot E}{d\varepsilon} < 0$ 且 ε 增加时，结合能反而减小，这时候核有继续向减小 ε 的方向发展，核是稳定的。最后得到瞬时裂变限制条件：

$$\frac{Z^2}{A} = \frac{2\beta}{\gamma} = 43.3.$$

当 $\frac{Z^2}{A} > 43.3$ ，核瞬时自发裂变有可能发生。

对 ${}_{94}^{240}\text{Pu}$ ， $\frac{Z^2}{A} = 36.8 < 43.3$ 。故 ${}_{94}^{240}\text{Pu}$ 不可能产生瞬时自

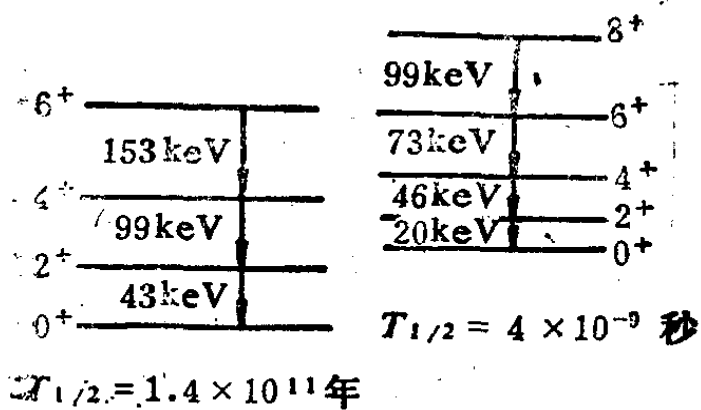


图2.9

发裂变。它的自发裂变有一定寿命。

(b) ${}_{94}^{240}\text{Pu}$ 的两组能级(图2.9)可用变形核的集体转动激发来解释。因为他们的两组能谱都满足转动能谱关系，对 $K=0$ 的转动带，有

$$E_I = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}} [I(I+1)].$$

它们都具有上述偶偶核转动谱的特点，只是两个转动带对应不同的转动惯量，对第一组 $\frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}_1} \approx 7\text{MeV}$. 对第二组有 $\frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}_2} \approx 3.3\text{MeV}$. 不同的转动惯量正说明其形变不同。根据核的液滴模型和壳层修正，可以给出双峰势垒形式 $V(\epsilon)$. 用来解释这两种转动谱的存在。寿命较长的一组对应于基态的转动带，最低能级处于双峰势垒的第一个极小值，当核处于此态时称为基态，它要穿透较厚的势垒才能使核裂变。因此，基态有较长的寿命(对 ${}^{240}_{94}\text{Pu}$, $T_{\frac{1}{2}} = 1.4 \times 10^{11}$ 年)。另一转动带的最低能级相当于核处在第二个极小值处，核处在此态时需要穿透势垒的厚度较薄，因而寿命较短(${}^{240}_{94}\text{Pu}$ 为 $T_{1/2} 4 \times 10^{-9}$ s)。两转动带的区别在于核形变不同而引起，又称为形状同质异能转动带裂变的双峰势垒如图 2.10 所示。

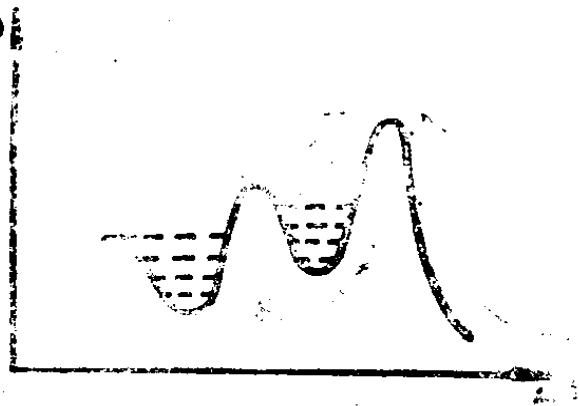


图2.10

(王绍舜 吴为民)

2037 (Col, 1979)

假定一个铀核自发分裂为两个大致相同的部分，估计核的静电能的减少。它与总能量改变是什么关系？(设电荷均匀分布；核半径为 $1.2 \times 10^{-13} A^{1/3} \text{cm}$)。

解：对于铀核 $Z_0 = 92$, $A_0 = 236$, 它的半径

$$R_0 = 1.2 \times 10^{-13} A_0^{1/3} \text{cm},$$

分裂为两块后，对于每一块有

$$Z = \frac{1}{2}Z_0, \quad A = \frac{1}{2}A_0, \quad R = 1.2 \times 10^{-13} A^{\frac{1}{3}} \text{ cm.}$$

而每一个带电荷 Q 的均匀球的静电能为

$$\frac{3}{5} \frac{Q^2}{R}, \quad R \text{ 为半径.}$$

所以对于铀核这样的裂变，静电能的释放为

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{3}{5} \left[\frac{(Z_0 e)^2}{R_0} - 2 \times \frac{(Ze)^2}{R} \right] \\ &= \frac{3 \times Z_0^2 e^2}{5} \frac{1}{R_0} \left[1 - \frac{1}{2^{2/3}} \right] \\ &\approx 0.72 Z_0^2 A_0^{-\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}} \right) \\ &= 365 \text{ MeV.} \end{aligned}$$

这项静电能的减少是铀核裂变释放能量的来源，但实际释放的能量还要考虑其它因素，如表面能增大大部分的扣除等。

(周 平)

2038 (Col, 1981)

估计 1 克铀裂变放出能量对 1 克 TNT 爆炸放出能量的比的数量级。

解：裂变与核力相互作用有关，强度约 1 MeV/核，TNT 爆炸与电磁相互作用有关，强度约 1 eV/TNT 分子。考虑到 1 克铀核和 TNT 分子数同数量级，可知此比例约为 10^6 。

上述粗略估计数量级是可以的，详细计算 1 克 TNT 炸药放出能量 $E_{\text{TNT}} \approx 2.61 \times 10^{22} \text{ (eV)}$ ，1 克铀裂变能为

$$E_{\nu} \approx \frac{1}{238} \times 6.023 \times 10^{23} \times 210 \times 10^6 \approx 5.3 \times 10^{20} (\text{eV}).$$

由此可得到该比值约为 10^7 .

(王力军)

2039 (Col, 1984)

一块 U^{235} 内的中子密度满足下列微分方程:

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = A \nabla^2 \rho(\mathbf{x}, t) + B \rho(\mathbf{x}, t),$$

其中 A 和 B 为正的常数。考虑一个边长为 L 的 U^{235} 立方块。假定到达边缘的中子立刻离开立方体，所以 U^{235} 立方体表面的中子密度为 0。

(a) 简单描述产生 $A \nabla^2 \rho$ 和 $B \rho$ 项的物理过程，特别要解释 A 和 B 为什么都是正数。

(b) U^{235} 立方块的边长有一个临界长度 L_0 。当 $L > L_0$ ，立方体中的中子密度是不稳定的，并随时间指数增长而产生爆炸。当 $L < L_0$ ，中子密度随时间减小则不爆炸，根据 A 和 B 找出临界长度 L_0 。

解: (a) 正比于中子密度的项 $B \rho(\mathbf{x}, t)$ 描写的是核裂变使中子密度的增加, $B \rho(\mathbf{x}, t)$ 代表 \mathbf{x} 处体积元内 t 时刻的中子密度由于核裂变引起的时间增长率, 它正比于诱发裂变的中子密度, 由于 U^{235} 裂变的过程是使中子增殖的过程, 所以 B 一定是正数. $A \nabla^2 \rho(\mathbf{x}, t)$ 项描写的是由于中子分布不均匀而引起的中子宏观运动, 因为宏观上中子总是从密度大的地方向密度小的地方运动, 所以 A 也是正数。

$$(b) \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = A \nabla^2 \rho(\mathbf{x}, t) + B \rho(\mathbf{x}, t), \quad (1)$$

取立方块的一个顶点为原点, 三条边分别为 x, y, z 轴, 并设

$\varphi(x, y, z, t) = f(x, y, z)e^{-\alpha t}$ 代入式(1), 得:

$$A\nabla^2 f(x, y, z) + (\alpha + B)f(x, y, z) = 0. \quad (2)$$

边界条件为

$$f(x, y, z)|_{t=0, L} = 0, \quad i = x, y, z.$$

由式(2)解得:

$$f(x, y, z) = \sum_i C_i \sin\left(\frac{n_x \pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{L} y\right)$$

$$\sin\left(\frac{n_z \pi}{L} z\right) \alpha_x^i + n_y^i + n_z^i$$

$$= \frac{L^2}{\pi^2} \frac{\alpha + B}{A}.$$

$$n_x, n_y, n_z = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots \quad (3)$$

由式(3)得:

$$\alpha = \frac{\pi^2 A}{L^2} (n_x^i + n_y^i + n_z^i) - B. \quad (4)$$

由临界长度的定义: $L = L_0, \alpha = 0$.

$$L_0 = \pi \sqrt{\frac{A}{B} (n_x^i + n_y^i + n_z^i)}.$$

当 $n_x = n_y = n_z = 1$ 时, 则:

$$L_0 = \pi \sqrt{\frac{3A}{B}} \quad (\text{周平})$$

2340 (Col, 1975)

U^{235} 的半衰期是 $10^8, 10^9, 10^{10}, 10^{12}$ 年.

解: 应为 10^9 年. 因为 U^{235} 的半衰期为 7×10^8 年 $\approx 10^9$ 年.

(周平)

2041 (Col, 1975)

在一个 100MW 的反应堆中每秒的裂变数为

$$10^6, 10^{12}, 10^{18}, 10^{24}, 10^{30}.$$

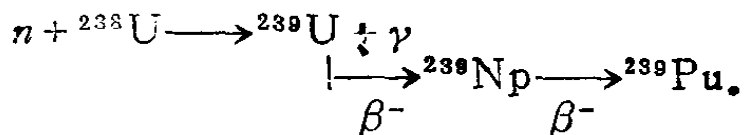
解：应为 10^{18} 。一个铀核裂变释放总能量 $E \approx 10^2 \text{ MeV}$ ，所以 100MW 的反应堆中每秒的裂变数为

$$N = \frac{W}{E} = \frac{10^2 \times 10^6 \times 10^{18}}{1.6 \times 10^2} \approx 6 \times 10^{18} \approx 10^{18}. \quad (\text{周平})$$

2042 (Wis, 1975)

简单叙述增殖反应堆的运行，裂变过程的什么物理常数是可能增殖的前提？在选择反应堆材料时要考虑什么重要的限制因素？水可以用来做减速剂吗？

解：增殖反应堆是这样一类反应堆，它产生的燃料比它损耗的燃料还要多。故称为增殖反应堆。若反应堆中加入增殖性核素，当这种核素吸收中子后，其最终产物成为可以裂变核素。例如，用 ^{239}Pu 作燃料， ^{238}U 作增殖性核素，其增殖可能的前提是一个裂变核平均放出的中子数 ν 比较高，例如对 ^{239}Pu ， $\nu = 2.91$ ，其中一个中子可维持链式裂变过程，另一个多中子可使 ^{238}U 核变成 ^{239}Pu ，



这样的堆在 7~10 年内， ^{239}Pu 可增殖一倍。这种堆利用快中子裂变，故不能有慢化剂，不能用水。 (范扬眉)

2043 (Wis, 1974)

(a) 简单描述核裂变反应堆的反应类型；(b) 为什么能释

放能量,每个反应约有多少?(c)为什么反应产物是放射性的?(d)为什么需要“减速剂”?是轻元素还是重元素适于做减速剂,为什么?

解:(a)核裂变反应,就是重核分裂为两个中等质量核的反应.反应堆的反应是诱发裂变,如:



(b)重核的比结合能约为7.6MeV/核子,中等质量核的比结合能约为8.5MeV/核子,所以当发生裂变时,有一部分结合能会释放出来,每个反应释放的能量约为210MeV.

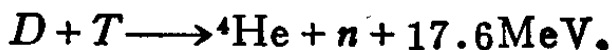
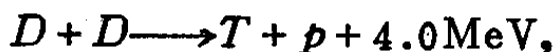
(c)裂变过程释放大能量,其中一部分转化为碎片的激发能,因此裂变碎片一般具有较高的激发能,是很不稳定的原子核,且会放出各种射线,另一方面,裂变碎片中的中质比和裂变核相似,远大于相同质量的稳定核,因此,它们是半中子同位素,且是不稳定的同位素,具有很强的放射性.

(d)对 ${}^{235}\text{U}$,裂变主要是由热中子引起的,而反应放出的是快中子,所以要用“减速剂”减速.比较而言,轻元素比重元素适于做减速剂,因为中子与轻原子核每次碰撞损失的能量较与重核碰撞时损失能量多,即轻元素减速效率高.

(胡平)

2044 (Wis,1970)

给出三个通常认为是受控热核聚变的核反应,哪个截面最大?给出反应中释放的大致能量,如何利用产生的中子?



第三个反应截面最大.

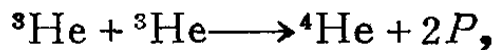
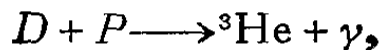
反应中产生的中子可以用于裂变过程,做成裂变-聚变

堆. 或用 ${}^6\text{Li} + n \longrightarrow {}^4\text{He} + T$ 再次聚变放能. (范扬眉 林辰)

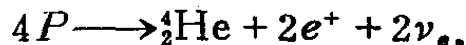
2045 (Wis, 1970)

讨论热核反应, 给出在太阳内部, 氢弹和受控聚变试验中一些重要反应的例子. 粗略估算每个反应放出的能量 (用电子伏表示). 说明这些反应中最重要的核力特征.

解: 太阳内部的热核反应主要是质子-质子反应链反应, 即,



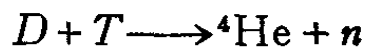
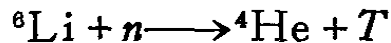
总反应



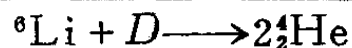
此反应放出的能量近似为

$$Q = [4M({}_1^1\text{H}) - M({}_2^4\text{He})]c^2 = 26.7 \text{ MeV}.$$

氢弹中的爆炸材料主要是氘、氚和锂的某种凝聚态物质. 氢弹爆炸是一种不可控的热核反应, 在爆炸瞬间释放出巨大能量. 反应方程式为



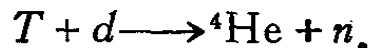
总反应



每个反应释放的总能量为

$$Q = [M({}^6\text{Li}) + M({}^2\text{H}) - 2M({}^4\text{He})]c^2 = 22.4 \text{ (MeV)}.$$

受控聚变反应利用的反应较多, 现举一例:



释放的能量为

$$\begin{aligned} Q &= [M({}^3\text{H}) + M({}^2\text{H}) - M({}^4\text{He}) - M(n)]c^2 \\ &= 17.59 \text{ (MeV)}. \end{aligned}$$

这些反应说明了核力的一个重要特征: 核力的饱和性, 也就是说核子只与附近的核子发生作用, 处在核内部的核子

受到的核力作用达到饱和时，比处在表面的核子受到的核力作用大，由于轻核处在表面的核子和处在核内部的核子数之比要比重核大，故轻核的每个核子平均结合能比较重的核小，即轻核结合得松，而很重的核由于库仑能影响使平均结合能也小于中等核。 (钱剑明)

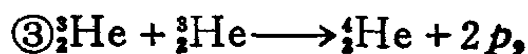
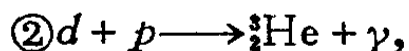
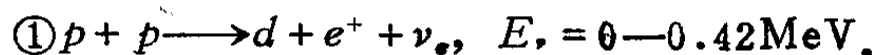
2046 (Pri, 1979)

近几年来，R. 戴维斯和他的合作者一直在探索太阳中微子，他的著名的实验中用一个置于地下的霍姆斯特克矿井中充 C_2Cl_4 的大容器作探测器。其想法是观察由逆 β 衰变的反应 $Cl^{37}(\gamma, e^-)Ar^{37}$ 产生的氩原子(Ar^{37})。这一反应由于阈效应对于低能中微子相对地不灵敏。而低能中微子是构成预期的太阳中微子的主要成份。这一反应被认为是对应于预期的太阳中微子中的一个较小部分的高能中微子。太阳常数(地球上的辐射能流)约为1千瓦/米²。

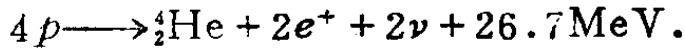
(a) 描述被认为是产生太阳能量的核反应的主要反应链，哪个反应是链中的慢环节？估计在这个反应链中产生的中微子的平均能量。太阳中微子主要成份在地球上的预计通量是多少？

(b) 描述次要过程反应链，它被认为是产生中微子能谱中的高能部分，即上述实验所探测的部分，简单讨论实验本身及结果。并给出数据。

解：(a) 产生太阳能量的主要反应链是：



总的效果是



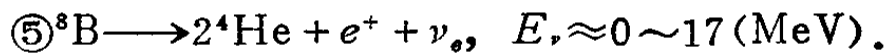
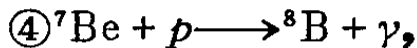
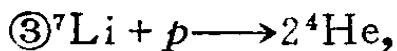
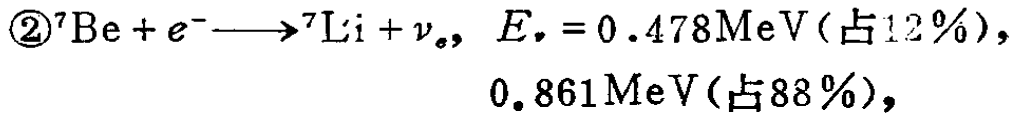
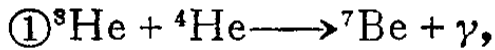
其中①为慢环节。反应中约25MeV的能量变为热能，余下被中微子带走。

$$\bar{E}_\nu \approx \frac{1}{2}(26.7 - 25) \approx 0.85(\text{MeV}),$$

地球表面中微子通量约为

$$I = \frac{1\text{kJ}}{25\text{MeV}} \times 2 = \frac{1 \times 10^3\text{J}}{25 \times 1.6 \times 10^{-13}\text{J}} \times 2 = 5 \times 10^{14} \text{m}^{-2}\text{s}^{-1}$$

(b) 核反应中的次要过程为



${}^8\text{B}$ 衰变产生的高能中微子即为被测量的中微子。

戴维斯和他的同事所作的探测中微子的实验是将一装有390000升 C_2Cl_4 的容器放在地下1.5公里深处的矿井里，其目的是减小宇宙线本底。太阳中微子与 Cl 发生反应 $\nu_e + {}^{37}\text{Cl} \longrightarrow e^- + {}^{37}\text{Ar}$ 其阈能为 0.814MeV。产生的 Ar 气会通过电子俘获而衰变 $e^- + {}^{37}\text{Ar} \longrightarrow \nu_e + {}^{37}\text{Cl}$ ，伴随这一过程所发射的俄歇电子的能量为 2.8keV。Ar 衰变的半衰期为 35 天，产生的 Ar 在容器中积累 n 个月后，将 Ar 取出，用正比计数器测量其放射性。实验结果为理论预期值的三分之一。这就是有名的太阳中微子失踪。当然，这里有很多可能，或实验是错误的，或太阳理论有问题，也有可能是中微子“振荡”等等。

(林 辰)

作为一个粗略的但非无道理的近似，中子星几乎全部由中子构成，并形成非相对论的费米气，费米气的压力由万有引力平衡；(a) 估计质量 10^{33} 克的中子星的半径。由于只要求数量级估计，可以作些近似，如假定均匀密度，估计积分值等。(b) 实验室里，中子不稳定，以 $\mu \rightarrow p + e + \nu + 1\text{MeV}$ 衰变，寿命 1000 秒。简单解释(定性但要准确)为什么可以假定中子星是全由中子构成而不是质子和电子？

解：(a) 设这个星球的半径是 R ，当 R 发生微小变化 ΔR 时，费米压力对外做功： $\Delta E = p \cdot \Delta V = p \cdot 4\pi R^2 \Delta R$ 。星球的引力势能 V_p ：

$$V_p = - \int_0^R 4\pi r^2 dr \cdot \rho \cdot \left(\frac{4\pi}{3} \rho r^3 \right) \frac{G}{r} = - \frac{3}{5} \frac{M^2 G}{R}$$

V_p 的变化等于对外做功： $\Delta E = \Delta V_p$ 。得 $\frac{3GM^2}{20\pi R^4} = P$ ，

$$\text{代入 } P = \frac{2}{5} N E_f = \frac{2}{5} \cdot \frac{M}{M_n} \cdot \frac{3}{4\pi R^3} \cdot \frac{\hbar^2}{2M_n} \cdot \left(3\pi^2 \frac{M}{M_n V} \right)^{2/3}$$

$$\text{得 } R = \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \cdot \frac{\hbar^2}{6M_n^3} \cdot \left(\frac{M_n}{M} \right)^{1/3}$$

式中： $M_n = 1.67 \times 10^{-27} \text{kg}$ 是中子静质量。代入计算，得

$$R = 3.3 \times 10^4 (\text{m}).$$

(b) 先计算中子间距 d 。由近似式 $M/R^3 = M_n/d^3$ 得：
 $d = R \cdot \left(\frac{M_n}{M} \right)^{1/3} \approx 4 \text{fm}$ 。 d 的量级是核内距离的大小，电子若能存在于此星体内，平均自由程将是 d 的量级，电子的波长将是 d 的量级，那么电子动能将是 $c\hbar k \approx 100 \text{MeV}$ 的量级，中子衰变放出能量仅 1MeV ，而中子运动动能也远小于 10^4MeV ，故由能量守恒律知，中子星内的中子不能衰变。(王力军)

§ 3 氘核 (2048—2058)

2048 (Wis, 1976)

如果核力与电荷无关, 而且一个中子和质子可以组成束缚态, 为什么两个中子没有束缚态? 这给出了核子-核子相互作用的什么知识?

解: 一个中子和一个质子的体系既可以处于自旋单态, 也可以处于自旋三重态. 束缚态只有三重态, 单态的能量比三重态高, 不能形成束缚态. 两个中子在同一能级的体系, 只能有自旋单态, 因此没有束缚态. 由此给出了核力的自旋相关性.

(胡平)

2049 (Wis, 1980)

质量为 M , 结合能为 $B (B \ll Mc^2)$ 的氘核吸收能量为 E_γ 的光子离解成中子与质子. 求离解反应能够发生的 $E_\gamma - B$ 最小值.

解: $E_\gamma - B$ 最小就是求最小 E_γ 值, 显然阈能反应时 E_γ 最小.

在阈能反应时, 末态粒子在质心系中处于静止状态, 因此要求入射道光子与氘核质心系中的能量 $E^* = (m_n + m_p)c^2$.

入射道的不变质量

$$s = (E_\gamma + Mc^2)^2 - c^2 p^2 = M^2 c^4 \left(1 + \frac{2E_\gamma}{Mc^2}\right).$$

即
$$\sqrt{s} = Mc^2 \left(1 + \frac{2E_\gamma}{Mc^2}\right)^{\frac{1}{2}} = (m_n + m_p)c^2.$$

利用
$$B = (m_n + m_p - M)c^2,$$

$$M^2 c^4 \left(1 + \frac{2E_\gamma}{Mc^2} \right) = B^2 + M^2 c^4 + 2BMc^2.$$

$$2Mc^2(E_\gamma - B) = B^2,$$

$$E_\gamma - B = \frac{B^2}{2Mc^2}.$$

最后给出 $(E_\gamma - B)$ 最小值为 $\frac{B^2}{2Mc^2}$.

(钱剑明)

2050 (Buf, 1981)

按简单的图象，氘核中中子和质子相互作用是通过一个方势阱，宽度 $b = 1.9 \times 10^{-13} \text{cm}$ ，深 $V_0 = 40 \text{MeV}$ ，氘核处于 $l = 0$ 的态。

(a) 计算质子运动到中子力程内的几率，利用下列近似：

$$m_n = m_p = M \quad kb = \frac{\pi}{2}, \quad k = \sqrt{\frac{M(V_0 - \epsilon)}{\hbar^2}},$$

ϵ 是氘核的结合能。

(b) 计算氘核的半径平方平均值。

解：两体相互作用，约化质量 $\mu = \frac{1}{2}M$ 。

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & r < b, \\ 0, & r > b. \end{cases}$$

体系能量 $E = -\epsilon$,

对于 $l = 0$ ，令波函数 $\Psi = \frac{u(r)}{r}$,

$$u'' + \frac{2\mu}{\hbar^2}(E - V)u = 0, \quad \mu = \frac{1}{2}M,$$

$$u'' + k^2 u = 0, \quad r \leq b, \quad k = \sqrt{\frac{M(V_0 - e)}{\hbar^2}},$$

$$u'' - k_1^2 u = 0, \quad r > b, \quad k_1 = \sqrt{\frac{Me}{\hbar^2}}.$$

解出 $u(r) = A \sin kr, \quad r \leq b,$

$$B e^{-k_1(r-b)}, \quad r > b.$$

由波函数连续和归一化条件, 得系数:

$$A = B = \left[2\pi b \left(1 + \frac{1}{k_1 b} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

由近似条件 $kb = \frac{\pi}{2}$, 即 $V_0 \gg e$. 只有一个束缚态.

(a) 质子运动到 neutron 力程的几率为

$$R = 4\pi A^2 \int_0^b \sin^2 kr \, dr = \left(1 + \frac{1}{k_1 b} \right)^{-1},$$

由 $kb = \frac{\pi}{2}$, $V_0 = 40 \text{ MeV}$, 求得 $e = 11.8 \text{ MeV}$.

$$k_1 = \left(\frac{Me}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{2}} = 0.53 \text{ fm}^{-1},$$

$$R = \frac{1}{1 + \frac{1}{0.53 \times 1.9}} = \frac{0.53 \times 1.9}{1 + 1.9 \times 0.53} = 0.50.$$

(b) $\bar{r}^2 = \langle \Psi | r^2 | \Psi \rangle_{r < b} + \langle \Psi | r^2 | \Psi \rangle_{r > b}$

$$= \frac{b^2}{1 + \frac{1}{k_1 b}} \left[\left(\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \right) + \frac{1}{k_1 b} + \frac{1}{(k_1 b)^2} + \frac{1}{2(k_1 b)^3} \right]$$

$$= 5.4 (\text{fm}^2).$$

(王瑛鑫 叶邦角)

(a) 中子和质子能发生辐射俘获反应, 即: $p + n \rightarrow d + \gamma$. 求辐射放出 γ 光子的能量 (设中子、质子静止). 氘核的反冲重要吗?

(b) 如果俘获辐射以较大的几率发生在 p 态 ($l=1$), 且质子静止, 估算入射中子的能量. 氘核半径为 4×10^{-13} 厘米.

$$M_p = 1.00783 \text{amu}, \quad M_n = 1.00867 \text{amu},$$

$$M_d = 2.01410 \text{amu},$$

$$1 \text{amu} = 1.66 \times 10^{-24} \text{gm} = 931 \text{MeV},$$

$$1 \text{MeV} = 1.6 \times 10^{-13} \text{J} = 1.6 \times 10^{-6} \text{erg}$$

$$\hbar = 1.05 \times 10^{-27} \text{erg} \cdot \text{s}.$$

解: (a) 俘获辐射放出的能量 Q 为

$$\begin{aligned} Q &= [M_p + M_n - M_d]c^2 = (1.00783 + 1.00867 \\ &\quad - 2.01410) (\text{amu}) \cdot c^2 \\ &\approx 2.24 (\text{MeV}) \end{aligned}$$

设光子动量为 p , 则反冲核的动量为 $-p$,

$$pc + \frac{p^2}{2m_d} = Q.$$

$$(pc)^2 + 2m_d c^2 (pc) - 2m_d c^2 Q = 0.$$

故解得
$$pc = m_d c^2 \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2Q}{m_d c^2}} \right).$$

又因为 $\frac{Q}{m_d c^2} \ll 1$, 上式可展开:

$$p \approx m_d c \left(-1 + 1 + \frac{Q}{m_d c^2} \right) \approx \frac{Q}{c}.$$

$$E_{\text{反}} = \frac{p^2}{2m_d} = \frac{Q^2}{2m_d c^2} = \frac{2.24^2}{2 \times 2.0141 \times 931}$$

$$= 1.34 \times 10^{-3} (\text{MeV}),$$

$$\frac{\Delta E_{\text{反}}}{E_\gamma} = \frac{1.34 \times 10^{-3}}{2.24} \approx 6 \times 10^{-4}.$$

由此可见，氘核反冲对入射光子能量影响是很小的，约为 10^{-4} 量级。

(b) 设氘核半径就是俘获作用力程。由此给出： $p'a \approx \sqrt{2}\hbar$ ， p' 为相对运动动量， a 为氘核半径。令 $a = 4 \times 10^{-13} \text{cm}$ ，相对运动动能为

$$E' = \frac{p'^2}{2\mu_n} \approx \frac{p'^2 c^2}{m_n c^2} \approx \frac{2}{2m_n c^2} \cdot \left(\frac{\hbar c}{a}\right)^2$$

$$\approx \frac{2}{940 \text{MeV}} \cdot \frac{197^2 \text{MeV}^2 \cdot \text{fm}^2}{4^2 \text{fm}^2} \approx 5.2 \text{MeV}.$$

故 $L_n = 2E' \approx 1.29 \text{MeV}$. (钱剑明 范扬眉)

2052 (Pri, 1980)

考虑中子质子俘获产生氘核和光子的反应。 $n + p \rightarrow d + \gamma$ ，假定初始核子未极化且质心系动能很小，对这个过程的研究可提供有关 S 波 $n-p$ 散射的信息：尤其是单态散射长度 a_s (定义为 $k \text{ctg } \delta \rightarrow -\frac{1}{a_s}$ ，当 $k \rightarrow 0$)，假定氘核处于纯 3S_1

态。

- 指出反应的多极性并说明原因。
- 说明低能俘获发生于初态的 1S_0 而不是 3S_1 。
- 令 B 为氘核的结合能，且 $m = m_p = m_n$ 为核子的质量，当 $n-p$ 之间的 γ 很大时，氘核的 Ψ_d 与 γ 的变化怎样？

(d) 在质子-中子力是短程力的近似下, 截面 σ 依赖于 B, T, a_s, m 和普适常数, 它具有形式:

$$\sigma = \sigma_0(T, B, m) f(a_s, B, m),$$

其中, 当 $a_s = 0$ 时, $f = 1$, 计算 $a_s \neq 0$ 时因子 f .

解: (a) $n-p$ 系统, 题设质心系动能很小, 只发生在 S 波俘获 $l = 0$.

$$s_p + s_n = 0 \text{ 为 } {}^1S_0 \text{ 态, } P({}^0S_1) = 1 \text{ 即 } J^P = 0^+.$$

$$s_p + s_n = 1 \text{ 为 } {}^3S_1 \text{ 态, } P({}^2S_1) = 1 \text{ 即 } J^P = 1^+.$$

末态氦核: $J^P = 1^+$. 故有 $0^+ \rightarrow 1^+$, 和 $1^+ \rightarrow 1^+$ 两种跃迁, 均满足 $\Delta J = 0, 1, \Delta p = +$. 属于 $M_1(E_2)$ 跃迁.

(b) 考虑上述两种跃迁过程.

$${}^1S_0 \rightarrow {}^3S_1, {}^3S_1 \rightarrow {}^3S_1.$$

因为两种跃迁过程的初、末态的 $l = 0$, 因此, 只有包含有自旋的哈密顿相互作用项才能使跃迁发生, 这样的算符要使跃迁矩阵元不为零, 核子系统之一的初末态自旋应有变化,

$${}^3S_1 \rightarrow {}^3S_1, \Delta l = 0, \Delta s = 0,$$

$${}^1S_0 \rightarrow {}^3S_1, \Delta l = 0, \Delta s \neq 0.$$

满足条件的只有自旋单态 $n-p$ 系统 1S_0 态.

(c) 仅考虑 S 波, 由薛定谔方程可以得到:

$$R(r) \approx \frac{1}{r} \sin(kr + \delta),$$

$$k^2 = 2\mu T / \hbar^2 = mT / \hbar^2, \quad k \cot \delta_0 = -\frac{1}{a_s}. \quad \delta_0 \text{ 为相移因子.}$$

(d) 利用 $r = a$ 处边界条件, a 代表氦核半径, 可以得到 δ_0 和 σ 的表达式:

$$\delta_0 = \text{tg}^{-1} \left(\frac{k}{K} \text{tg} K a \right) - k a,$$

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0, \quad a_s = -a \left(\frac{\text{tg} K_0 a}{K_0 a} - 1 \right).$$

可证明当 $a_s \rightarrow 0$ 时, $\delta_0 \rightarrow 0$, $\sigma \rightarrow \sigma_0 = 4\pi a^2 \left(\frac{\text{tg} K_0 a}{K_0 a} - 1 \right)^2$,

$$\begin{aligned} \text{则 } f(a_s, B, m) &= \frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{\sin^2 \left[\text{tg}^{-1} \left(\frac{k}{K} \text{tg} K a \right) - k a \right]}{k^2 a^2 \left(\frac{\text{tg} K_0 a}{K_0 a} - 1 \right)^2} \\ &= \frac{\sin^2 \left[\text{tg}^{-1} \left(\frac{k}{K} \text{tg} K a \right) - k a \right]}{k^2 a^2 s} \end{aligned}$$

其中: $K^2 = \frac{m}{\hbar^2} (T + B)$, $K_0^2 = \frac{\hbar^2}{m} B$, a 中隐含 a_s , m 和 B .

(黄晓舟)

2053 (Pri, 1980)

自然界中存在的两核子基态组态是总角动量 $J = 1$, 束缚能为 -2.2 MeV 的唯一的氘核.

(a) 仅从以上信息, 证明 $n-p$ 力是自旋相关的;

(b) 写出在 $L-S$ 耦合项中氘核的所有可能角动量态。这些态的什么样线性组合是可能的? 试解释之.

(c) 在 (b) 中的哪些态由于氘核四极矩的存在而被排除? 试解释之.

另外, 如果氘核有纯同位旋 $T = 0$, 哪些态将被排斥在

外?

(d) 用 (c) 中允许的态计算氘核的磁矩, 并与观测值 $\mu_d = 0.875\mu_N$ 比较 (注意 $\mu_p = 2.793\mu_N$, $\mu_n = -1.913\mu_N$) μ_N 是核磁子。

下列 Clebsch-Gordan 系数也许有用:

表象: $\langle J_1, J_2, M_1, M_2 | J_{TOT} M_{TOT} \rangle$,

$$\langle 2, 1; 2, -1 | 1, 1 \rangle = \sqrt{\frac{8}{5}} .$$

$$\langle 2, 1; 1, 0 | 1, 1 \rangle = -\sqrt{\frac{8}{10}} .$$

$$\langle 2, 1; 0, 1 | 1, 1 \rangle = \sqrt{\frac{1}{10}} .$$

解: (a) 氘核自旋 $J=1$, 从 $J = s_n + s_p + l$, 可推出氘核处于 3S_1 态, 3D_1 态 ($s_n + s_p = 1, l = 0, 2$) 或 1P_1 态 ($s_n + s_p = 0, l = 1$), 但未见 $n-p$ 自旋反平行, $l=0$ 的单态 1S_0 , 说明 $n-p$ 耦合成 $S=1$ 和 $S=0$ 的态时, 相互作用力是不一样的, 一个在自然界存在, 一个不存在. 即核力自旋相关。

(b) 氘核总自旋 $J=1, J = s_n + s_p + l$.

$$S=1, l=0, 2, 1 \quad {}^3S_1, {}^3D_1, {}^3P_1.$$

$$S=0, l=1, \quad {}^1P_1.$$

即在 $L-S$ 耦合的情况下, 有以下的组合态存在,

$${}^3S_1, {}^3D_1 \text{ 和 } {}^3P_1, {}^1P_1.$$

因氘核有确定的宇称, 故只有相同宇称的态之间才能混合, 所以有:

$$\Psi(n, p) \approx a {}^3S_1 + b {}^3D_1 \text{ 或 } c {}^3P_1 + d {}^1P_1$$

a, b, c, d 为混合常数。

(c) $l=1$ (p 态) 只能给出质心的平移, 不能给出电四极

项。由氦核存在电四极矩可排除 p 态混合态的存在。

由推广的泡利原理，中子和质子组成的系统总波函数必须是反对称的。

$$\Psi(n, p) = \Psi_l(n, p) \Psi_s(n, p) \Psi_T(n, p).$$

l, s, T 分别代表空间、自旋和同位旋波函数。 $T = 0$ ，同位旋波函数交换反对称。要求空间和自旋部分是交换对称的。

$$l = 1, \text{ 只能 } S = 0.$$

$$l = 0, 2, \quad S = 1.$$

同位旋 $T = 0$ 要求不存在 3P_1 态。综合电四极矩和同位旋 $T = 0$ 要求。氦核应为 3S_1 和 3D_1 的混合态。

(d) 对 3S_1 态。 $l = 0$ ，轨道部分对磁矩无贡献，仅有自旋部分。 $s = 1$ 即 n 和 p 自旋平行，这时

$$\mu_{3s_1} = \mu_p + \mu_n = (2.793 - 1.913) \mu_N = 0.88 \mu_N.$$

对 3D_1 态， $m = 1$ 时，磁矩在 z 方向投影将会给出磁矩值，将总角动量 $|1, 1\rangle$ 展开为各种 D 态的组合：

$$\begin{aligned} |1, 1\rangle &= \sqrt{\frac{3}{5}} |2, 2, 1, -1\rangle \\ &\quad - \sqrt{\frac{3}{10}} |2, 1, 1, 0\rangle + \sqrt{\frac{1}{10}} |2, 0, 1, 1\rangle \end{aligned}$$

D 态的磁矩贡献。

$$\begin{aligned} \mu_{3D_1} &= \left[\frac{3}{5} (g_l m_{l1} + g_s m_{s1}) + \frac{3}{10} (g_l m_{l2} + g_s m_{s2}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{10} (g_l m_{l3} + g_s m_{s3}) \right] \mu_N \\ &= \left[\left(\frac{3}{5} m_{l1} + \frac{3}{10} m_{l2} + \frac{1}{10} m_{l3} \right) \times \frac{1}{2} \right. \end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{3}{5} m_{s1} + \frac{3}{10} m_{s2} + \frac{1}{10} m_{s3} \right) \times 0.88 \Big] \mu_N$$

$$= 0.31 \mu_N.$$

$\mu_d^{*2p} = 0.857 \mu_N$. 可知, D 核为 S 和 D 的混合态, 令 D 态为 x , s 态为 $1-x$. 则:

$$(1-x) \times 0.88 + 0.31x = 0.857.$$

$$0.57x = 0.023. \quad x \approx 0.04.$$

即 3D_1 态占 4%, 3S_1 态占 96%. (黄晓舟)

2054 (Buf, 1980)

考虑非相对论的两核子系统, 假设相互作用是电荷无关的, 并且宇称守恒. (a) 利用上面的假设和 Pauli 原理, 证明两核子自旋的平方 S^2 是好量子数; (b) 氘的同位旋是多少? 证明你的回答; (c) 确定两中子系统的所有总角动量 $J \leq 2$ 的态. 利用 ${}^{2S+1}X$ 的记号, 这里 X 代表轨道角动量.

解: (a) 设体系总的交换算符为

$$P = P' P_{12},$$

P' 为空间交换算符, 或宇称算符, P_{12} 为自旋交换算符;

$$P_{12} = \frac{1}{2}(1 + \sigma_1 \cdot \sigma_2) = S^2 - 1,$$

式中令 $\hbar = 1$.

由 Pauli 原理, $[P, H] = 0$; 由宇称守恒, $[P', H] = 0$. 所以

$$\begin{aligned} 0 &= [P, H] = [P' P_{12}, H], \\ &= P' [P_{12}, H] + [P', H] P_{12} \\ &= P' [P_{12}, H] = P' [S^2 - 1, H] \\ &= P' [S^2, H]. \end{aligned}$$

即 $[S^2, H] = 0$, 故 S^2 量子数是好量子数.

(b) 原子核基态同位旋总是取其可能的最小值, 对氦核, $I = |Z - N|/2 = 0$.

(c) 由 $S = \frac{\vec{I}}{2} + \frac{\vec{I}}{2}$, 故 S 量子数可为 1, 0. 可能的态有:

$$s = 0, l = 0: {}^1S_0,$$

$$s = 0, l = 1: {}^1P_1,$$

$$s = 0, l = 2: {}^1D_2,$$

$$s = 1, l = 0: {}^3S_1,$$

$$s = 1, l = 1: {}^3P_2, {}^3P_1, {}^3P_0,$$

$$s = 1, l = 2: {}^3D_2, {}^3D_1,$$

$$s = 1, l = 3: {}^3F_2.$$

但双中子系统需要满足交换反称性, 即 $(-1)^{l+s+1} = -1$ 或 $l+s = \text{偶数}$. 故可能的态有:

$${}^1S_0, {}^1D_2, {}^3P_2, {}^3P_1, {}^3P_0, {}^3F_2. \quad (\text{马 骥})$$

2055 (Chi, 1980)

考虑两核子之间的势, 忽略速度有关项, 导出与适用的守恒律相一致的最广泛的势的形式, 包括同位旋守恒. 请列出每一守恒律并指出它对势的影响.

解: (a) 动量守恒: 空间平移不变性.

这就要求势函数仅与两核子的相对位置 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ 有关 (1, 2 分别代表两个核子).

(b) 角动量守恒: 空间转动不变性.

$$\mathbf{x}' = \hat{R}\mathbf{x}, \quad \mathbf{J}^{(i)'} = \hat{R}\mathbf{J}^{(i)}, \quad i = 1, 2,$$

\hat{R} 为转动变换算符,

$$\hat{R}^{T*}\hat{R} = \hat{R}\hat{R}^{T*} = 1, \quad \det\hat{R} = 1.$$

所以转动变换 \hat{R} 不变的量为: $1, \mathbf{x}^2, \mathbf{J}^{(1)} \cdot \mathbf{x}, \mathbf{J}^{(2)} \cdot \mathbf{x}$,

$\mathbf{J}^{(1)} \cdot \mathbf{J}^{(2)}$, $[\mathbf{J}^{(1)} \times \mathbf{J}^{(2)}] \cdot \mathbf{x}$. 由于 $J_i J_j = \delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} J_k$, 任何高于 $\mathbf{J}^{(1)}$ 或 $\mathbf{J}^{(2)}$ 一阶的项均可降阶. $[\mathbf{J}^{(1)} \times \mathbf{x}] \cdot [\mathbf{J}^{(2)} \times \mathbf{x}]$ 可以化成: $(\mathbf{J}^{(1)} \cdot \mathbf{J}^{(2)}) \mathbf{x}^2$ 和 $(\mathbf{J}^{(1)} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{J}^{(2)} \cdot \mathbf{x})$.

(c) 宇称守恒: 空间反射不变性.

$$\mathbf{x}' = -\mathbf{x}, \quad \mathbf{J}^{(i)'} = \mathbf{J}^{(i)}, \quad i=1, 2.$$

由于 \mathbf{x} 是唯一极矢量, 所以势中只可能含有 \mathbf{x} 的偶次项. 剩下的不变量: $1, \mathbf{x}^2, \mathbf{J}^{(1)} \cdot \mathbf{J}^{(2)}, (\mathbf{J}^{(1)} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{J}^{(2)} \cdot \mathbf{x})$.

(d) 同位旋守恒: 同位旋空间转动不变性.

$$\mathbf{I}^{(i)'} = R_i \mathbf{I}^{(i)}, \quad i=1, 2, \quad \text{不变量为 } 1 \text{ 和 } \mathbf{I}^{(1)} \cdot \mathbf{I}^{(2)}$$

(e) 几率守恒.

哈密顿量厄密: $V^+ = V$.

这意味着势函数的系数是实数, 即 $V_{a,b}(r)$ 为实数, $r = |\mathbf{x}|$.

$$V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{J}_0^{(1)}, \mathbf{J}^{(2)}, \mathbf{I}^{(1)}, \mathbf{I}^{(2)}) = V_a + \mathbf{J}^{(1)} \cdot \mathbf{J}^{(2)} V_b,$$

其中 V_a 和 V_b 为如下形式:

$$V_0(r) + V_1(r) \mathbf{J}^{(1)} \cdot \mathbf{J}^{(2)} + V_2(r) \frac{(\mathbf{J}^{(1)} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{J}^{(2)} \cdot \mathbf{x})}{\mathbf{x}^2}.$$

各个系数 $V_{\nu,K}(r)$: $\Sigma = a, b$ 和 $K = 1, 2, 3$ 为实函数.

(f) 时间反演不变性.

$$V = U^{-1} V^* U, \quad U^{-1} \mathbf{J}^i U = -\mathbf{J}^i.$$

这对 V 没有新的限制.

势函数对于两个核子的相互交换 $1 \leftrightarrow 2$ 也是不变的.

(林 辰)

2056(CUS, 1984)

氘核是一个质子和一个中子形成的束缚态, 其总角动量 $J=1$, 已知它主要为 S 态 ($l=0$), 也有少量的 D 态 ($l=2$) 混

合, (a) 解释为何不能出现 D 态; (b) 解释为何不能出现 G 态; (c) 计算总角动量 $J=1$ 的 $n-p$ 系统纯 D 态的磁矩, 假定 n 和 p 自旋耦合形成总自旋 S , 再与轨道角动量 L 耦合而得总角动量 J . 试将结果用核磁子表示. 质子和中子的磁矩分别为 2.79 和 -1.91 核磁子.

解: (a) P 态与 S 态、 D 态的宇称相反. 由于强相互作用宇称守恒, 故宇称相反的态不能混合.

(b) G 态轨道角动量量子数 $l=4$, 与两个 $1/2$ 自旋耦合不可能得到 $J=1$.

$$(c) \quad J = L + S,$$

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{[(g_l L + g_s S) \cdot J]}{J(J+1)} J,$$

式中: μ_0 为核磁矩. 我们需求出 g_L 和 g_s .

考虑 g_s .

$$S = s_p + s_n$$

$$\frac{\mu_s}{\mu_0} = \frac{[(g_p s_p + g_n s_n) \cdot S]}{S(S+1)} S,$$

于是

$$g_s = \frac{g_p s_p \cdot S + g_n s_n \cdot S}{S(S+1)},$$

$$s_n = S - s_p,$$

$$\text{于是} \quad S \cdot s_p = \frac{S(S+1) + s_p(s_p+1) - s_n(s_n+1)}{2}.$$

或

$$S \cdot s_p = 1,$$

类似地

$$S \cdot s_n = 1.$$

从而

$$g_s = \frac{1}{2}(g_p + g_n).$$

现在考虑 g_L . 由于中子对轨道磁矩无贡献, 质子贡献了全部

轨道磁矩，但只贡献了轨道角动量的一半。于是 $g_L = \frac{1}{2}$ 。

所以
$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{\frac{1}{2}(L \cdot J) + \frac{1}{2}(g_p + g_n)(S \cdot J)}{J \cdot (J + 1)} J,$$

$$\begin{aligned} L \cdot J &= \frac{1}{2} [J(J+1) + L(L+1) - S(S+1)] \\ &= \frac{1}{2} (1 \times 2 + 2 \times 3 - 1 \times 2) = 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S \cdot J &= \frac{1}{2} [J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)] \\ &= \frac{1}{2} (1 \times 2 + 1 \times 2 - 2 \times 3) = -1. \end{aligned}$$

故
$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} - \frac{g_p + g_n}{2} \right] J.$$

由
$$\frac{g_p}{2} \mu_0 = \mu_p, \quad \frac{g_n}{2} \mu_0 = \mu_n.$$

所以
$$\begin{aligned} \mu &= \left[\frac{3}{4} - \frac{\mu_p + \mu_n}{2} \right] \mu_0 = \left[\frac{3}{4} - \frac{2.79 - 1.91}{2} \right] \mu_0 \\ &= 0.31 \mu_0. \end{aligned}$$

(杨永安)

2057 (Wis, 1980)

(a) 氘核 (^2H) 的自旋为1，磁矩 ($\mu = 0.857 \mu_N$) 近似为质子磁矩 ($\mu_p = 2.793 \mu_N$) 和中子磁矩 ($\mu_n = -1.913 \mu_N$) 之和。根据这些事实，你能得到中子和质子在氘核中轨道运动和自旋取向怎样的推断？

(b) 怎样解释 μ 与 $\mu_p + \mu_n$ 之间的差别？

(c) 为什么中子会有不为零的磁矩?

解: (a) 由于 $\mu \approx \mu_n + \mu_p$, 故中子、质子的轨道磁矩对氘核磁矩的贡献为零, 即质子与中子轨道运动量子数为 $l=0$. 又由于氘核自旋为 1, 因此它是由自旋取向平行的中子和质子组成的 3S_1 态.

(b) μ 与 $\mu_n + \mu_p$ 之间的差别超过了实验误差, 一般认为质子与中子并不是处于纯的 3S_1 态, 而是处于 3S_1 与 3D_1 的混合态. 理论计算表明大约有 4% 的几率处于 3D_1 态.

(c) 中子总电荷为零, 似乎中子磁矩为零, 但中子是有结构的, 目前夸克模型认为中子是由三个带电夸克组成, 这些夸克是带电的, 这就使得中子内部电荷分布不是对称的, 所以磁矩不为零. (钱剑明)

2058 (MIT, ?)

氘核是中子和质子的束缚态. 质心系中的哈密顿量具有如下形式:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + V_1(r) + \boldsymbol{\sigma}_p \cdot \boldsymbol{\sigma}_n V_2(r) \cdot \left[\left(\boldsymbol{\sigma}_p + \frac{\mathbf{x}}{r} \right) \left(\boldsymbol{\sigma}_n \cdot \frac{\mathbf{x}}{r} \right) - \frac{1}{3} (\boldsymbol{\sigma}_p \cdot \boldsymbol{\sigma}_n) \right] V_3(r),$$

其中 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_p$, $r = |\mathbf{x}|$, $\boldsymbol{\sigma}_p$ 和 $\boldsymbol{\sigma}_n$ 是质子和中子自旋的泡利矩阵, μ 是约化质量, \mathbf{p} 是 \mathbf{x} 的正则动量.

(a) 总角动量 $[J^2 = J(J+1)]$ 和宇称是好量子数. 证明: 如果 $V_3 = 0$, 则总轨道角动量 $[L^2 = L(L+1)]$ 和总自旋 $[S^2 = S(S+1)]$ 是好量子数. 这里 $\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}_p + \boldsymbol{\sigma}_n)$. 又证明: 如果 $V_3 \neq 0$, S 仍然是好量子数. (考虑质子和中子自

旋交换可能有帮助)。

(b) 氘核具有 $J=1$ 和正宇称, L, S 的可能值是什么?

(c) 假设 V_3 可被认为是微扰, 证明零级 (即 $V_3=0$) 波函数 (具有角动量 $J_z=+1$) 具有形式 $\Psi_0(r)|\alpha, \alpha\rangle$, 这里 $|\alpha, \alpha\rangle$ 是具有 $s_{pz}=s_{nz}=1/2$ 的自旋态. 问 $\Psi_0(r)$ 满足怎样的微分方程?

(d) 由 V_3 引起的一级能量移动是多少?

假设一级波函数是:

$$\begin{aligned} & \Psi_0(r)|\alpha, \alpha\rangle + \Psi_1(\mathbf{x})|\alpha, \alpha\rangle \\ & + \Psi_2(\mathbf{x})(|\alpha, \beta\rangle + |\beta, \alpha\rangle) + \Psi_3(\mathbf{x})|\beta, \beta\rangle. \end{aligned}$$

(其中 $|\beta\rangle$ 是 $s_z = -\frac{1}{2}$ 态, Ψ_0 就是 (c) 中定义的波函数)。

通过分离出正比于 $|\alpha, \alpha\rangle$ 并准确到 V_3 一次方的薛定谔方程, 找出 $\Psi_1(\mathbf{x})$ 满足的薛定谔方程. 分解出 $\Psi_1(\mathbf{x})$ 的角度部分, 写出径向部分满足的薛定谔方程.

解: (a) $[L^2, \sigma_p \cdot \sigma_n] = 0, [L^2, V(r)] = 0,$

$$[S^2, \sigma_p \cdot \sigma_n] = [S^2, 2S^2 - 3] = 0,$$

$$[S^2, V(r)] = 0,$$

$$\left[S^2, 3\left(\sigma_p \cdot \frac{\mathbf{x}}{r}\right)\left(\sigma_n \cdot \frac{\mathbf{x}}{r}\right) - \sigma_p \cdot \sigma_n \right]$$

$$= \left[S^2, \frac{6(\mathbf{s} \cdot \mathbf{r})^2}{r^2} - 2S^2 \right]$$

$$= \left[S^2, \frac{6(\mathbf{S} \cdot \mathbf{r})^2}{r^2} \right] = \frac{6(\mathbf{S} \cdot \mathbf{r})}{r^2} [S^2, \mathbf{S} \cdot \mathbf{r}]$$

$$+ [S^2, \mathbf{S} \cdot \mathbf{r}] \frac{6(\mathbf{S} \cdot \mathbf{r})}{r^2} = 0.$$

$$[L^2, \mathbf{p}^2] = L[L, \mathbf{p}^2] + [L, \mathbf{p}^2]L = 0, (\because [L, \mathbf{p}^2] = 0) \dots$$

因此当 $V_3=0$ 时, $[L^2, H]=0$, $[S^2, H]=0$. 当 $V_3 \neq 0$ 时, $[S^2, H] \neq 0$. 从而当 $V_3=0$ 时总轨道角动量和总自旋是好量子数; 当 $V_3 \neq 0$ 时 S 仍是好量子数.

(b) L 的可能值是 $0, 2$; S 的可能值是 1 .

(c) 如果 $V_3=0$, 则哈密顿量是中心对称的. 质子和中子间的中心对称势相互作用描述 S 态 (即 $L=0$ 态). 由于微扰 V_3 的存在, 使得氦核 S 态中混有 D 态.

考虑 $V_3=0$ 的情形, 这时 $L=0$, $S=1$ 且 $S_z=1$, 所以态 $J_z=+1$, 波函数具有形式 $\Psi_0(r)|\alpha, \alpha\rangle$.

$$\begin{aligned} H\Psi_0(r)|\alpha, \alpha\rangle &= \left[-\frac{\nabla^2}{2\mu} + V_1(r) \right. \\ &\quad \left. + (2S^2 - 3)V_2(r) \right] \Psi_0(r)|\alpha, \alpha\rangle \\ &= \left[-\frac{\nabla^2}{2\mu} + V_1(r) + V_2(r) \right] \Psi_0(r)|\alpha, \alpha\rangle \\ &= E_0 \Psi_0(r)|\alpha, \alpha\rangle. \end{aligned}$$

所以
$$\left[-\frac{\nabla^2}{2\mu} + V_1(r) + V_2(r) - E_0 \right] \Psi_0(r) = 0.$$

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2\mu} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \Psi_0'(r)) \\ &+ [V_1(r) + V_2(r) - E_0] \Psi_0(r) = 0. \end{aligned}$$

即
$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2\mu} \Psi_0''(r) - \frac{1}{\mu r} \Psi_0'(r) \\ &+ [V_1(r) + V_2(r) - E_0] \Psi_0(r) = 0. \end{aligned}$$

$$(d) H = -\frac{\nabla^2}{2\mu} + V_1(r) + (2S^2 - 3)V_2(r) + S_{12}V_3(r),$$

$$\begin{aligned} H\Psi &= \left(-\frac{\nabla^2}{2\mu} + V_1 + V_2\right)\Psi_0(r)|\alpha, \alpha\rangle \\ &\quad + \left(-\frac{\nabla^2}{2\mu} + V_1 + V_2\right)[\Psi_1|\alpha, \alpha\rangle \\ &\quad + \Psi_2(|\alpha, \beta\rangle + |\beta, \alpha\rangle) + \Psi_3|\beta, \beta\rangle] \\ &\quad + S_{12}V_3\Psi_0|\alpha, \alpha\rangle \\ &= E_0\Psi_0(r)|\alpha, \alpha\rangle + E_0[\Psi_1|\alpha, \alpha\rangle \\ &\quad + \Psi_2(|\alpha, \beta\rangle + |\beta, \alpha\rangle) + \Psi_3|\beta, \beta\rangle] \\ &\quad + \Delta E\Psi_0(r)|\alpha, \alpha\rangle. \end{aligned}$$

其中 $S_{12}V_3\Psi_0(r)|\alpha, \alpha\rangle$

$$\begin{aligned} &= \left[(\sigma_{p_z} \cos\theta \cdot \sigma_{n_z} \cos\theta) |\alpha, \alpha\rangle - \frac{1}{3} |\alpha, \alpha\rangle \right] \\ &\quad V_3\Psi_0(r) + \dots \\ &= \left(\cos^2\theta - \frac{1}{3} \right) V_3\Psi_0(r)|\alpha, \alpha\rangle + \dots \end{aligned}$$

(省略部分是不正比于 $|\alpha, \alpha\rangle$ 的部分)。

在薛氏方程中挑出正比于 $|\alpha, \alpha\rangle$ 且是 V_3 的一次方的部分, 我们得到:

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{\nabla^2}{2\mu} + V_1 + V_2\right)\Psi_1(\mathbf{x}) + \left(\cos^2\theta - \frac{1}{3}\right)V_3\Psi_0(r) \\ &= E_0\Psi_1(\mathbf{x}) + \Delta E\Psi_0(r). \end{aligned}$$

可知 $\Psi_1(\mathbf{x})$ 依赖于角度部分是 $Y_{20} = 3\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(\cos^2\theta - \frac{1}{3}\right)$, 这是因为 $|\alpha, \alpha\rangle$ 态 $S_z = 1$, 从而 $L_z = 0$, 因此必是 Y_{20} .

所以

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2\mu} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Psi_1(r)}{dr} \right) + V_1(r) \Psi_1(r) \\
 & + V_2(r) \Psi_2(r) + \frac{l(l+1)}{r^2} \Psi_1(r) \\
 & + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{16\pi}{5}} V_3 \Psi_0(r) = E_0 \Psi_1(r) + \Delta E \Psi_0(r).
 \end{aligned}$$

(这里 $\Psi_1(\mathbf{x}) = \Psi_1(r) Y_{20}$, $l=2$).

所以

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2\mu} \Psi_1''(r) - \frac{1}{\mu r} \Psi_1'(r) \\
 & + \left[V_1(r) + V_2(r) + \frac{6}{r^2} - E_0 \right] \Psi_1(r) \\
 & + \left(\frac{1}{3} \sqrt{\frac{16\pi}{5}} V_3 - \Delta E \right) \Psi_0(r) = 0
 \end{aligned}$$

$$\Delta E = \left(\cos^2\theta - \frac{1}{8} \right) V_3. \quad (\text{王福强})$$

§ 4 核模型(2059-2075)

2059 (Col, 1978)

核的液滴模型, 壳模型和集体模型的主要特点是什么?
指出每个模型各可用来说明核的哪些性质并怎样说明?

解：由基本的事实：每个核子的结合能 B_1 和核物质的密度几乎与 A 无关。这与液滴相似，液滴的蒸发热和密度与液滴的大小是无关的，并加进表面项和库仑斥能项及对能，对称能修正可得液滴模型。液滴模型给出稳定核的 A 与 Z 的关系即 β 稳定线与实验相符，并解释了为什么元素43(Te)，61(Pm)没有稳定 β 同量异位素。若将核半径作为 $a_{\text{表面}}$ 和 $a_{\text{体}}$ 的参数与质量实验值拟合，可以得到核半径与各种其它方法给出的结果符合很好，能解释比结合能曲线。

由于幻数的存在，说明核有内部结构。进而建立与原子类似的壳层模型，解释了幻数核的特别稳定性，壳层模型要求：

- (1) 存在一个平均场，对球形核是有心场。
- (2) 每个核子在核内的运动看成独立的。
- (3) 每个能级上核子数目由于 Pauli 原理而有一定限制。
- (4) 自旋轨道耦合给出了能级次序。

由壳层模型可以预言核的基态自旋和宇称，对偶偶核基态自旋宇称的预言(0^+)全部为实验证实，这是由于中子和质子配对时的自旋宇称为 0^+ 的缘故。对于奇 A 核也可预言基态的自旋宇称，与实验大部分相符合。关于奇奇核也给出了一些结果。特别解释了幻数的存在原因在于满壳层。

壳层模型未解决全部核的问题。对于满壳层(球形核)外加一个或几个核子壳模型较成功，这是因为此时核仍近似为球型。但当介于两闭合壳层之间时，核明显偏离球形，涉及很多核子的集体运动就显得重要了。例如，壳层中间段，核四极矩实验值比从单粒子求出的值大许多倍。这样就引进了集体模型。考虑原子核的集体运动，得到许多振动、转动能

级，它们分别处于 $60 < A < 150$ 和 $190 < A < 220$ ， $150 < A < 190$ 和 $A > 220$ 的核素区。 (王力军)

2060 (Wis, 1975)

简述核能级壳层模型的主要实验依据。举出一些核说明这些核具有闭合壳层，并指出闭合的壳层。

解：核壳层模型的实验依据主要是幻数的存在，即当组成原子核的质子数或中子数为 2, 8, 20, 28, 50, 82 和中子数为 126 时，原子核特别稳定，具有这些“幻数”的核素在自然界中的含量比附近核素的含量多。在所有稳定核中，当中子数为 20, 28, 50 和 82 时的同中子素最多，在质子数为 8, 20, 28, 50 和 82 时稳定同位素的数目也比邻近的元素多，当中子数或质子数等于幻数时，实验测得的结合能与用液滴模型计算得到的结合能差别很大。鉴于这些幻数的存在，说明原子核中存在着类似于原子中电子能级的壳层结构。

${}^4_2\text{He}$ 是双幻核（质子数与中子数均为幻数的核称为双幻核），其质子与中子均填满各自的第一主壳层。 ${}^{16}_8\text{O}$ 也是一个双幻核，质子与中子均填满到第二主壳层。 ${}^{208}_{82}\text{Pb}$ 也是个双幻核，其质子填满到第六主壳层，而中子填满第七主壳层。上述几例都具有闭合壳层。 (钱剑明)

2061 (Pri, 1979)

(a) 讨论典型的原子核壳层模型。尤其是根据描述壳层的单粒子项标志各能级，即用主量子数 n ，总角动量量子数 j ，和总轨道角动量子数 l 。(光谱标记在这里是有用的。如 $2s_{1/2}$ ， $1p_{3/2}$ ，等等)。简单叙述一些支持壳层模型的基本事实。

(b) 考虑一种核能级，它相应于一个封闭壳层加上一个处于角动量量子数为 l 和 j 的态的单个质子。显然 $j = l \pm 1/2$ 。设 g_p 为自由质子的回旋磁比率。计算本题中能级的回旋磁比率。对于 $j = l + 1/2$ 和 $j = l - 1/2$ 两种情况。

解：壳模型的基本思想是：首先认为核子是处在一个平均场中，这一平均场是其它核子对这一核子作用的总和，对于接近于球形的核，该平均场接近于一个有心力场。其次认为由于泡利原理的限制，它的低能态填满了核子。核子之间的碰撞无法造成跃迁而改变核子的状态。这就使得各核子能够保持其运动状态，即核子在核中独立运动。因此我们根据核子间相互作用的性质，可以写出平均场的形式为伍兹-萨克森势，用量子力学可以求出各能级（图2.11）。再考虑自旋-轨道相互作用，得到单粒子能级。各核子就在这些能级上逐层填充。

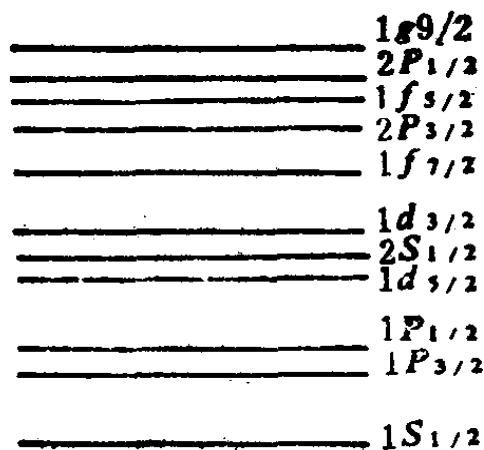


图2.11

壳模型的主要实验依据是“幻数”的存在。类似原子核外电子的情况，核中的中子，质子数取某些“幻数”（8, 20, 28, 50, 82）时，原子核特别稳定，其丰度，稳定同位素，结合能

都特别大。

根据壳模型，封闭壳层内核子的总角动量之和为零，其磁矩亦为零。所以本题中核的磁矩和角动量取决于那个单独的质子。

由于

$$\mu_j = \mu_l + \mu_s,$$

$$g_j \mathbf{j} = g_l \mathbf{l} + g_s \mathbf{s}.$$

$$g_j \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = g_l \mathbf{l} \cdot \mathbf{j} + g_s \mathbf{l} \cdot \mathbf{s},$$

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{j} = \frac{1}{2} [j(j+1) + l(l+1) - s(s+1)],$$

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{j} = \frac{1}{2} [j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)],$$

$$g_j = g_l \frac{j(j+1) + l(l+1) - s(s+1)}{2j(j+1)} + g_s \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}.$$

对于质子 $g_l = 1$ ， g_s 等于其自由状态的因子 g ，（自由状态 $l=0$ ， $j=s$ ）。

因为 $s = \frac{1}{2}$ ，分别用 $j = l \pm \frac{1}{2}$ 代入，可求得：

$$g_j = \begin{cases} \frac{j-1/2}{j} + \frac{1}{2j} g_s, & j = l + 1/2, \\ \frac{1}{j+1} \left[j + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} g_s \right], & j = l - 1/2. \end{cases}$$

(林 展)

2062 (Pri, 1977)

各向同性三维谐振子能级为

$$E = \left(2n + l + \frac{3}{2} \right) \hbar\omega = \left(N + \frac{3}{2} \right) \hbar\omega.$$

应用于单粒子模型。 $\hbar\omega$ 取值为 $44 \text{ MeV}/A^{\frac{1}{3}}$ 。

(a) 对壳模型的单粒子能级考虑谐振子能级中 $N \leq 3$ 的修正，画出与没有受到扰动的谐振子能级有关的壳模型能级图。

(b) 应用壳模型，预言下列核的基态自旋和宇称：

$${}^3_2\text{He}, {}^{17}_8\text{O}, {}^{34}_{19}\text{K}, {}^{41}_{20}\text{Ca}.$$

(c) 从 5 MeV 以下的激发态到基态的电耦极辐射一般观测不到，用单粒子模型解释这一现象，并预言巨偶极共振的激发能。

解：(a) 考虑 $L-S$ 耦合后，谐振子能级劈裂如图 2.12 所示。

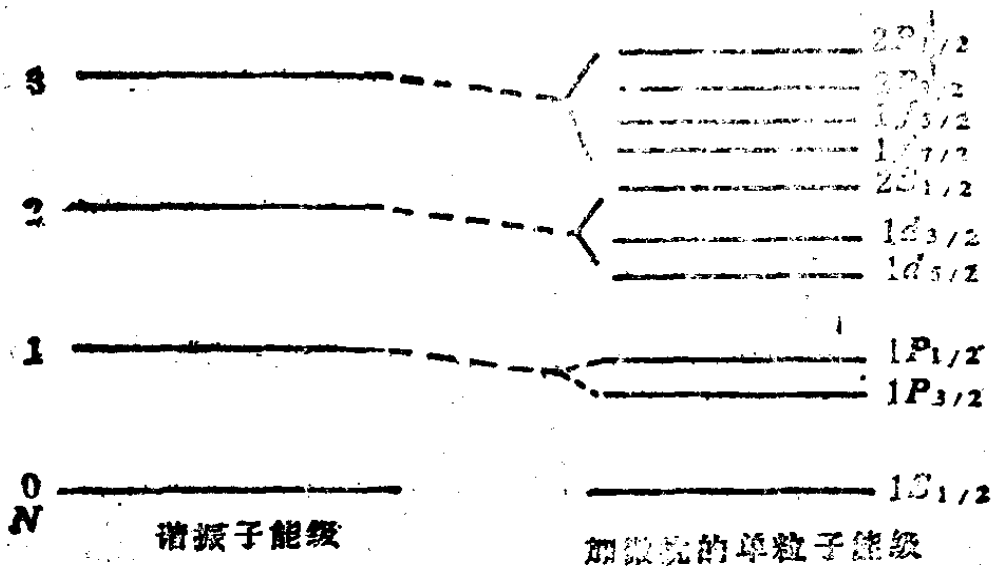


图 2.12

(b) ${}^3_2\text{He}$: 最后一个核子是 s 态，故为 $J^\pi = \left(\frac{1}{2} \right)^+$ 。

${}^{17}_8\text{O}$: 最后未成对的核子为 $1d_{5/2}$ ，故 $J^\pi = \left(\frac{5}{2} \right)^+$ 。

${}^{34}_{19}\text{K}$: 最后两个未成对核子为 $2s_{1/2}$ 和 $1d_{3/2}$ ， $J^\pi = 1^+$ 。

${}_{20}^{48}\text{Ca}$: 最后一个未成对核子为 $1f_{7/2}$, $J^\pi = \left(\frac{7}{2}\right)^-$.

(c) 电偶极跃迁的选择定则为

$$\Delta J = J_f - J_i = 0, 1, \quad \Delta\pi = -.$$

J 为核的自旋, π 为核的宇称. 由于 $\hbar\omega = \frac{44\text{MeV}}{A^{1/3}}$, 对一般的

核 $\hbar\omega > 5\text{MeV}$, 对 N 相差 1 时, 能级大于 5MeV , 5MeV 以下的激发态, 具有相同的 N , 宇称相同. 对于电偶极辐射, $\Delta\pi = -1$. 上述条件将不能满足, 故观测不到电偶极辐射. 当考虑到 $L-S$ 耦合后, 不同 N 值的能级差可能很小, (特别是对重核). 此时电偶极跃迁也有可能.

巨偶极共振可以认为是入射光子引起核中质子和中子分离, 位能增加, 核引起振动, 当光子频率等于核共振频率时, 发生共振吸收. (见题 2094) (吴为氏)

2063 (Col, 1980)

作为近似, 一个中等重量的核可以当作一个平底势阱, 势阱壁完全刚性, 为进一步简化把核子当作禁闭在一个长度等于核直径的立方盒子里. 考虑一个具有 28 个质子和 28 个中子的 ${}^{56}\text{Fe}$ 核, 估计核子的最大动能, 设核直径为 10^{-12}cm .

解: 核子的势可写成如下形式:

$$V(x, y, z) = \begin{cases} \infty, & |x|, |y|, |z| > \frac{a}{2}, \\ 0, & |x|, |y|, |z| < \frac{a}{2}. \end{cases}$$

a 为核的直径薛定谔方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(x, y, z) + V(x, y, z)\Psi(x, y, z) = E\Psi(x, y, z),$$

令 $\Psi(x, y, z) = \Psi(x)\Psi(y)\Psi(z)$. 得到:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx_i^2}\Psi(x_i) + V(x_i)\Psi(x_i) = E_i\Psi(x_i).$$

$$V(x_i) = \begin{cases} \infty, & |x_i| > \frac{a}{2}, \\ 0, & |x_i| < \frac{a}{2}. \end{cases} \quad x_i = x, y, z.$$

解得 $\Psi(x_i) = A_i \sin(k_i x_i) + B_i \cos(k_i x_i)$.

利用边界条件 $\Psi(x_i)|_{x_i = \pm \frac{a}{2}} = 0$,

$$\Psi(x_i) = \begin{cases} A_i \sin\left(\frac{n\pi}{a}x_i\right), & n \text{ 为偶数,} \\ B_i \cos\left(\frac{n\pi}{a}x_i\right), & n \text{ 为奇数,} \end{cases}$$

$$E_{n_i} = \frac{\pi^2 n_i^2 \hbar^2}{2ma^2}, \quad n_i = 1, 2, 3 \dots$$

$$E = E_0(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2), \quad E_0 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} = \frac{\pi^2 (c\hbar)^2}{2mc^2 \cdot a^2} = 2.04 \text{ MeV}.$$

据 Pauli 原理, 每个态上可容一对中子和一对质子. 这样, 可计算态数如下.

(n_x, n_y, n_z)	态数	可容核子数	E
(1 1 1)	1	4	$3E_0$
(2 1 1)			
(1 2 1)	3	12	$6E_0$
(1 1 2)			

(2 2 1)			
(1 2 2)	8	12	$9E_0$
(2 1 2)			
(3 1 1)			
(1 3 1)	8	12	$11E_0$
(1 1 3)			
(2, 2, 2)	1	4	$12E_0$
(1, 2, 3)			
(1, 3, 2)			
(2, 3, 1)	6	24	$14E_0$
(2, 1, 3)			
(3, 1, 2)			
(3, 2, 1)			

对于 ${}^6\text{F}$ 核, $\Gamma_{\max} = 14E_0 = 2.04 \times 14 \approx 28.6(\text{MeV})$. (马 骥)

2064 (Pri, 1979)

壳层模型中的轻核.

(a) 利用谐振子壳层模型, 写出稳定的轻原子核 ($A \leq 4$) 基态的组态, 并确定它们的总 L , S , J 和 T 量子数和宇称.

(b) 对于 ${}^4\text{He}$, 在谐振子第一激发态附近, 它可以处于哪些态中?

(c) 对每一个态可以发生什么模式的辐射?

(d) ${}^4\text{H}$ 可以处在这些态中的哪些? 在 ${}^4\text{Be}$ 中可以发现这样的态中的哪些?

(e) 在 α 粒子的非弹性散射中, ${}^4\text{He}$ 可以激发到这些态中的哪一个态? 在质子非弹性散射中如何?

解: (a) $A=1$. 稳定核 ${}^1\text{H}$, 组态 $(1s \frac{1}{2})^1$,

$$L=0, S=\frac{1}{2}, J^P=\frac{1}{2}^+, T=\frac{1}{2}.$$

$A=2$ 时, 稳定核为 ${}^2\text{H}$, 组态为: $p: (1s_{\frac{1}{2}})^1, n: (1s_{\frac{1}{2}})^1$,
 $L=0, S=1, J^p=1^+, T=0$,

$A=3$ 时, 稳定核为 ${}^3\text{He}$, 组态为: $p: (1s_{\frac{1}{2}})^2, n: (1s_{\frac{1}{2}})^1$,
 $L=0, S=\frac{1}{2}, J^p=\frac{1}{2}^+, T=\frac{1}{2}$,

$A=4$ 时, 稳定核为 ${}^4\text{He}$, 组态为: $p: (1s_{\frac{1}{2}})^2, n: (1s_{\frac{1}{2}})^2, L=0, S=0, J^p=0^+, T=0$.

(b) 在谐振子第一激发态附近, 由于 p 态的 $L-S$ 耦合作用, 分裂成 $1p_{\frac{3}{2}}$ 和 $1p_{\frac{1}{2}}$ 两个能级, ${}^4\text{He}$ 的同位旋 $T_z=0$, 基态 $T=0$, 可处的激发态为:

① 当一个质子(或中子)处于 $1p_{\frac{3}{2}}$ 态, 另一个处于 $1s_{\frac{1}{2}}$ 态, 可能耦合的态为 $1^-, 2^-$ ($T=0$ 或 $T=1$).

② 当一个质子(或中子)处于 $1p_{\frac{1}{2}}$, 另一个处在 $1s_{\frac{1}{2}}$ 态时, 可组成 $0^-, 1^-$ ($T=0$ 或 $T=1$).

③ 当两个质子(或中子)同时处于 $1p_{\frac{1}{2}}$ (或 $1p_{\frac{3}{2}}$) 态时, 组成 $0^+, T=0$ 的态.

(c) ${}^4\text{He}$ 的各种态的衰变方式为:

	J^p	T	衰变方式
基态	0^+	0	稳定
激发态	0^+	0	p
	0^-	0	p, n
	2^-	0	p, n
	2^-	1	p, n
	1^-	1	$p, n\gamma$
	0^-	1	p, n
	1^-	1	$p, n\gamma$
	1^-	0	p, n, d

.....

(d) ${}^4\text{H}$ 的同位旋 $T=1$, 可处在上述 $T=1$ 的各态中, 即 2^- , 1^- , 0^- 态.

${}^4\text{Be}$ 的 $T \geq 2$. 不可能处于上述任何态中.

(e) α - α 粒子散射, 是两个全同粒子的散射, 末态总波函数交换对称和总角动量守恒.

初态, 两 α 粒子空间波函数 $L=0, 2, \dots$.

末态, 两 α 粒子都处于 0^- , $l=0, 2, \dots$.

故 α 粒子可以把 ${}^4\text{He}$ 激发到 0^- 态.

p 可以把 ${}^4\text{He}$ 激发到 2^- 或 0^- 态.

(王绍舜 何小东)

2065 (Buf, 1982)

根据物理原理, 试解释下面的说法:

(a) 核内单个核子的运动可以看成是独立于其它核子, 尽管核子之间的相互作用是非常强的.

(b) 所有偶偶核都具有 0^+ 的基态.

(c) 核的外壳层部分地被奇数个核子填充, 核将趋于具有永久的变形.

解: (a) 这种描述是基于把核子之间的相互作用等效于核子处于其它核子产生的平均场中, 核子的相互作用变成了核子场对核子产生的作用. 核子的运动好像独立于其它核子. 核内核子的密度虽然很大, 核子之间的“个别”相互作用可以认为不能“宏观”表现出来, 因为核子是费米子, 基态时所有低能级都被填满, 而核子之间的相互作用不能使某个核子激发到高一级能态. 我们可以采用相互作用弱的模型来描述核子之间强的相互作用.

(b) 按壳模型理论, 偶偶核中质子和中子有分别成对的趋势, 即每对中子或质子在同一个轨道上且自旋相反, 故每对中子或质子的总角动量为零, 总自旋也为零. 核的总角动量也为零, 而每对中子或质子的宇称为 $(-1)^{2l} = +1$ 核子的总宇称为正, 即 $J^P = 0^+$.

(c) 最外层的核子可以看成是外层核子绕一个自旋为零的核子系统运动, 对于 $l \neq 0$ 的核子总是作椭圆运动. 核子又具有一定自旋和磁矩, 它对核子系统起到“极化”作用, 即使核趋于永久变形. (马 骥)

2066 (Col, 1979)

解释下列现象. (a) ^3He 俘获中子 (或 ^3H 俘获质子) 形成 ^4He , 放出束缚能大于 20MeV , 但中子或质子都不能被 ^4He 所稳定束缚. (b) 天然放射性核, 如 ^{232}Th 或 ^{238}U , 通过 α 或 β 发射的递次衰变到铅同位素, ^{232}Th 和 ^{238}U 的半衰期大于 10^9 年, 终止 Pb 同位素是稳定的. 但是中间过程 α 衰变半衰期短到 1 小时甚至 1 秒. 并逐渐随着接近终态 Pb 同位素而减小半衰期, 增大 α 衰变能.

解: (a) ^4He 是双幻核, 即中子和质子壳层都是满的, 特别稳定, 故不能再吸收中子或质子. 并且, 当从 ^3He 或 ^3H 过渡到 ^4He 时, 因结合能很大, 就放出很大能量.

(b) 从 ^{232}Th 和 ^{238}U 放射系中间过程 α 衰变的半衰期随着接近终态 Pb 同位素而逐渐减小, 同时所放出的 α 粒子能量逐渐增加, 这是因为 α 衰变时核内 α 粒子和子核之间形成的库仑势垒阻挡 α 粒子衰变, 当 α 粒子能量增加时, α 粒子贯穿势垒的几率也愈大, 因此, 当 α 粒子能量大时它的半衰期短. 量子力学可导出努塔尔公式:

$$\log \lambda = A - BE_a^{-\frac{1}{2}}. \quad A, B \text{ 为与核有关的常数.}$$

其中： λ 为衰变常数， E_a 为 α 衰变能，衰变能改变很小，半衰期可变化很大。

由液滴模型可以推得 α 衰变能 E_a 随 A 的增加而增加，但实验表明，对于 ^{232}Th 和 ^{238}U 放射系， α 衰变能 E_a 随 A 增加而减小。这说明液滴模型只能反应结合能随 A, Z 变化的平均趋势，反应不出变化的起伏关系，而这种现象只有靠核结构的壳模型来解释。 (王绍舟 王力军)

2067 (Wis, 1978)

(a) 利用原子核的壳模型预言 ^{13}B ， ^{13}C 和 ^{13}N 基态的自旋、宇称和同位旋(提示： $p_{3/2}$ 壳层能量低于 $p_{1/2}$ 壳层能量)；
(b) 按质量从小到大重新排列上述三个同量异位素，并说明原因；
(c) 怎样估计上述原子核中两个质量最小的核之间质量差？

解：(a) 原子核基态的同位旋 $I = \frac{1}{2}|Z - N|$ ，其中 N, Z

分别表示原子核的中子数与质子数。原子核基态的自旋宇称由最后一个未成对的核子的自旋宇称决定。按此有：

$$^{13}\text{B}: J^P = \frac{3}{2}^-, \quad I = \frac{3}{2},$$

$$^{13}\text{C}: J^P = \frac{1}{2}^-, \quad I = \frac{1}{2},$$

$$^{13}\text{N}: J^P = \frac{1}{2}^-, \quad I = \frac{1}{2}.$$

(b) ^{13}B ， ^{13}C 和 ^{13}N 按质量大小从小到大排列为 ^{13}C ，

$^{13}_7\text{N}$, $^{13}_5\text{B}$.

$^{13}_6\text{C}$ 和 $^{13}_7\text{N}$ 属同位旋二重态, 它们的质量差主要由库仑作用能差, 中子、质子质量差引起的. 而库仑能差是主要的. $^{13}_7\text{N}$ 较 $^{13}_6\text{C}$ 多一个质子, 故质量较大. $^{13}_5\text{B}$ 虽然质子较少, 但有较多的中子, 远离稳定线, 结合较松, 故有较大的质量.

(c) 由于 $^{13}_6\text{C}$ 和 $^{13}_7\text{N}$ 属同位旋二重态, 它们的质量差是由库仑作用能差, 中子质子质量差引起, 库仑作用能可以看作核的静电自能. 若将核看成是均匀带电球体, 则静电自能为 $W = \frac{3Q^2}{5R}$, R 为原子核半径.

$$R \approx 1.2A^{\frac{1}{3}} \text{ (fm)}.$$

所以质量差为

$$\begin{aligned} [m(^{13}_7\text{N}) - m(^{13}_6\text{C})]c^2 &= \frac{3}{5R}(Q_N^2 - Q_C^2) - [m(n) - M(^1\text{H})]c^2 \\ &= \frac{3e^2}{5R}(7^2 - 6^2) - 0.78 \\ &= 0.6 \times \frac{197}{137} \times \frac{(49 - 36)}{1.4 \times 13^{\frac{1}{3}}} - 0.78 \\ &= 2.62 \text{ (MeV)}. \end{aligned} \quad \text{(钱剑明)}$$

2068 (Wis, 1978)

在原子核壳层模型中, 核子按下列次序填充到 $1s_{1/2}$, $1p_{3/2}$, $1p_{1/2}$, $1d_{5/2}$, $2s_{1/2}$, $1d_{3/2}$, (a) 两轨道 $p_{3/2}$ 与 $p_{1/2}$ 是由于什么原因分裂的? (b) 按此模型, ^{16}O ($Z=8$) 是个满壳层核, 其自旋宇称为 $J^P = 0^+$. 那么, 此模型预言 ^{15}O 和 ^{17}O 的自旋宇称为何值? (c) 对奇奇核, J^P 有一组允许值.

求 ^{18}F ($Z=9$) J^p 的允许值. (d) 对偶偶原子核 (例如 ^{16}O), J^p 总是 0^+ , 怎样解释?

解: (a) $P_{3/2}$ 与 $P_{1/2}$ 之间的劈裂是由核子的自旋-轨道耦合引起.

(b) ^{16}O 的质子组态为 $(1s_{1/2})^2(1p_{3/2})^4(1p_{1/2})^2$, 中子组态为 $(1s_{1/2})^2(1p_{3/2})^4(1p_{1/2})^2$. 质子填满一个主壳层, 中子没有填满主壳层, ^{16}O 的自旋宇称决定于 $1P_{1/2}$ 态上的一个中子的角动量与宇称, 所以 ^{16}O 的自旋宇称为 $J^p = \frac{1}{2}^-$.

^{17}O 的质子组态为 $(1s_{1/2})^2(1p_{3/2})^4(1p_{1/2})^2$, 中子组态为 $(1s_{1/2})^2(1p_{3/2})^4(1p_{1/2})^2(1d_{5/2})^1$. ^{17}O 的自旋宇称决定于 $1d_{5/2}$ 上的一个中子, 所以 $J^p = \frac{5}{2}^+$.

(c) ^{18}F 的中子组态为 $(1s_{1/2})^2(1p_{3/2})^4(1p_{1/2})^2(1d_{5/2})^1$, 质子组态为 $(1s_{1/2})^2(1p_{3/2})^4(1p_{1/2})^2(1d_{5/2})^1$, ^{18}F 自旋宇称的允许值决定于 $1d_{5/2}$ 态上的一个中子与一个质子.

$l_n = 2, l_p = 2$, 所以可能的宇称为

$$\pi = (-1)^{l_n + l_p} = +1.$$

$j_n = \frac{5}{2}, j_p = \frac{5}{2}$, 所以可能的自旋为

$$J = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

^{18}F 自旋宇称的可能值为 $0^+, 1^+, 2^+, 3^+, 4^+, 5^+$.

(实际上为 1^+).

(d) 对偶偶核, 当偶数个核子处于最低能级时, 每一能级上所占有核子数都是偶数. 由于同一能级中偶数个核子具有同样大小的角动量, 而且由于对力的作用, 成对的两个核子的 j 的方向总是相反的, 因而同一能级的所有核子的角

动量之和为零，则质子壳层和中子壳层都具有等于零的角动量，故偶偶核的自旋为零。偶偶核中每一能级的核子数为偶数，因而它的宇称为正。 (钱剑明)

2069 (Pri, 1978)

图2.13给出在 $^{208}_{82}\text{Pb}$ 邻近的中子和质子的单粒子能级，利用图上的值，估算下列数值。

- (a) $^{207}_{82}\text{Pb}$ 的基态和两个最低激发态的自旋和宇称值。
- (b) $^{207}_{82}\text{Pb}$ 的基态的电四极矩。
- (c) $^{209}_{82}\text{Pb}$ 的基态磁矩。
- (d) $^{208}_{83}\text{Bi}$ 的最低的两个能级的自旋和宇称， $^{208}_{83}\text{Bi}$ 基态能量相对于 ^{208}Pb 基态能量是多少？
- (e) ^{208}Pb 基态的同位旋相似态 ^{208}Bi 按下式定义，

$$T_+ |^{208}\text{Pb}\rangle$$

其中 $T_+ = \sum_i t_+(i)$ ， t_+ 使一个中子变成一个质子，那么，

这一同位旋相似态的自旋、宇称、同位旋和同位旋第三分量是多少？

相对于 ^{208}Pb 基态的能量，该相似态的能量是多少？(由库仑相互作用产生的)。

(f) 解释为什么在重核中人们没有观测到超允许电子或正电子衰变的原因。

解：(a) $^{207}_{82}\text{Pb}$ 是满壳层缺 $p_{\frac{1}{2}}$ 能级上的一个中子。核的基态由 $p_{\frac{1}{2}}$ 上的一个未成对的中子决定，基态为 $\left(\frac{1}{2}\right)^-$ 。第一激发态是 $f_{\frac{5}{2}}$ 态的一个中子跳到 $p_{\frac{1}{2}}$ 能级。 J^π 由 $f_{\frac{5}{2}}$ 上的单个中子决定，故为 $\left(\frac{5}{2}\right)^-$ ，第二激发态由 $p_{\frac{3}{2}}$ 态的中子再填入

$f_{5/2}$ (或者说, $p_{3/2}$ 态的中子 直接到 $p_{1/2}$ 态) 核的 J' 由 $p_{1/2}$ 态的单个中子决定, 为 $\left(\frac{3}{2}\right)^-$.

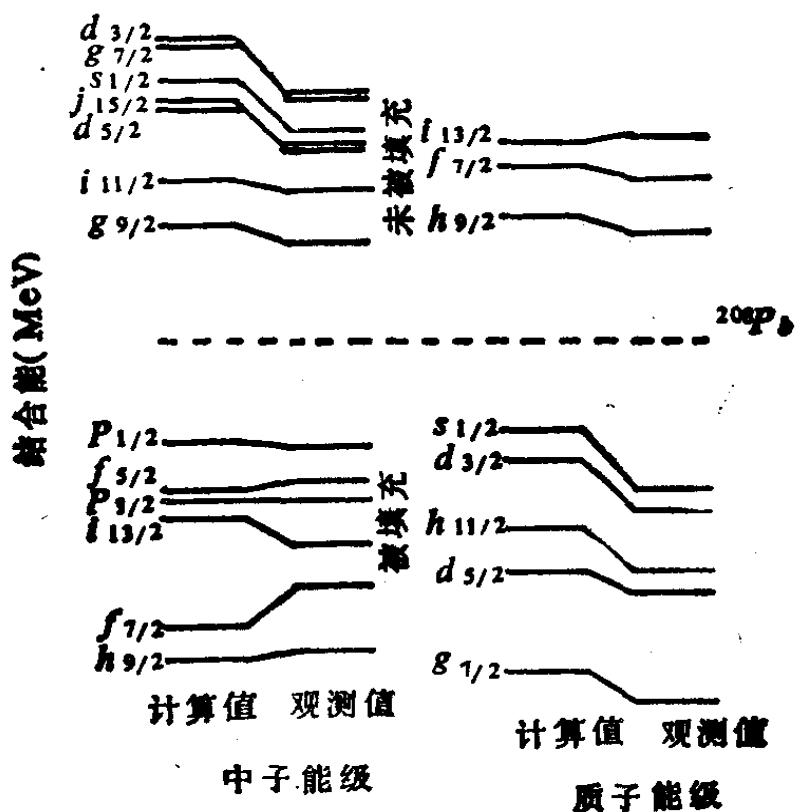


图2.13

(b) 质子是满壳层, 缺一个中子 ($p_{1/2}$), 电四极矩主要由中子运动使核心“极化”产生的. 但因 $J = \frac{1}{2}$, 故 ^{207}Pb 的电四极矩观测值为零.

(c) ^{209}Pb 是满壳层外在 $g_{7/2}$ 能级上有一个中子, 中子轨道对核磁矩无贡献, 只有中子本身值.

$$\mu(^{209}\text{Pb}) = -1.91\mu_N, \mu_N \text{ 为核磁子.}$$

(d) 对 ^{209}Bi . 其基态由两个未成对的中子、质子. 质

子为 $h_{\frac{9}{2}}$, 中子为 $p_{\frac{1}{2}}$. 因两核子均和 l 反平行.

$J = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 5$. 宇称为 $(-1)^{l_p + l_n} = +$, 即 5^+ , 第一激发态

为 $f_{\frac{5}{2}}$ 的中子跃迁到 $p_{\frac{1}{2}}$, 自旋宇称由 $f_{\frac{5}{2}}$ 的中子和 $h_{\frac{9}{2}}$ 的质子决定. $J = \frac{5}{2} + \frac{9}{2} = 7$. 宇称为 $(-1)^{l_p + l_n} = +$, 即 7^+ .

两个最低态分别为 $5^+, 7^+$. ^{208}Bi 和 ^{208}Pb 的基态能量差可从图 2.13 粗略给出.

$$\begin{aligned} \Delta E &= E(\text{Bi}) - E(\text{Pb}) \approx 7.2 - 4 + 2\Delta \\ &\approx 3.2 + 1.5 = 4.7 (\text{MeV}) \end{aligned}$$

即 ^{208}Bi 的基态比 ^{208}Pb 的基态高 4.7 MeV.

(e) T_- 只改变同位旋第三分量.

$$T_+ |T, T_3\rangle = A |T, T_3 + 1\rangle.$$

所以同位旋相似态应有相同的自旋、宇称和同位旋, 只是同位旋第三分量不同. 对 ^{208}Pb , $J^P = 0^+$, $T = 22$, $T_3 = -22$, ^{208}Bi 的 ^{208}Pb 同位旋相似态的 J^P, T 与 ^{208}Pb 相同, 只是 $T_3 = -21$. 两同位旋相似态之间的能量差:

$$\Delta E \approx \frac{6}{5} \frac{Ze^2}{R} + (m_n - m_p)c^2 = \frac{6Z}{5} \frac{c\hbar\alpha}{R} - 0.78$$

$$= \frac{6 \times 82 \times 197}{5 \times 137 \times 1.2 \times 208} - 0.78 \approx 19.12 (\text{MeV}).$$

(f) 超容许型费米跃迁的选择定则是 $\Delta J = 0$, $\Delta P = +$, $\Delta T = 0$, 即母核和子核波函数很相似. 同位旋是好量子数. 故超容许型跃迁一般发生在同一同位旋多重态之间的跃迁. 但对重核, 同位旋相似态之间由库仑能引起的能量差达 10^4 MeV 以上, 这时的同位旋相似态多处于高激发态, 它可有发射核子等过程, 故看不到 β 衰变. (吴为民 范扬眉)

对 N 和 Z 在 20 至 28 之间的核的最低能级, 最简单的模型认为只包含 $f_{7/2}$ 的核子。

(a) 用这个模型估计 ${}^{41}_{20}\text{Ca}_{21}$ 和 ${}^{41}_{21}\text{Sc}_{20}$ 的磁偶极矩并粗略估计这两个态的电四极矩。

(b) 用这个模型, 预计在 ${}^{42}_{20}\text{Ca}$ 中有哪些能级。计算这些态的磁偶极矩和电四极矩。画出这些高自旋态的完整的实验衰变纲图。

(c) 图 2.14 给出 ${}^{43}_{20}\text{Ca}_{23}$ 的第一激发态, 它以半衰期为 $34 \times 10^{-12}\text{s}$ 衰变到基态, 用单粒子模型估计这个态的寿命。

实验值: $\mu_n = -1.91\text{nm}$,

$$\mu_p = 2.79\text{nm},$$

$$\mu({}^{41}\text{Ca}) = -1.59\text{nm}, \quad \mu({}^{41}\text{Sc}) = 5.43\text{nm},$$

解: (a) 求 ${}^{41}\text{Ca}$ 和 ${}^{41}\text{Sc}$ 的磁偶极矩。它由最后一个核子的状态决定:

$$\mu = g_j j \cdot \mu_N,$$

其中 j 为总角动量。 μ_N 为核磁子, g 为 g 因子。对奇 A 核 (以 nm 为单位) 有:

$$\mu_I = \begin{cases} g_l \left(j - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} g_s & \text{当 } j = l + \frac{1}{2} = I. \\ \frac{j}{j+1} \left[g_l \left(j + \frac{3}{2} \right) - \frac{1}{2} g_s \right] & j = l - \frac{1}{2} = I. \end{cases}$$

对中子 $g_l = 0$, $g_s = g_n = -3.82$ 。对质子 $g_l = 1$, $g_s = g_p = 5.58$, 对 ${}^{41}_{20}\text{Ca}$, 它的一个中子处在 $f_{7/2}$ 态。

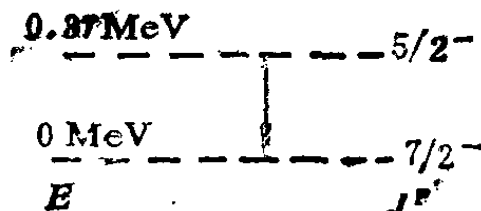


图 2.14

$$j = \frac{7}{2}, \quad l = 3, \quad j = l + \frac{1}{2}.$$

$$\mu(^{41}\text{Ca}) = \frac{1}{2}g_n = -1.91(\text{nm}).$$

对 ^{41}Sc . 它的一个质子处于 $f_{7/2}$ 态.

$$\begin{aligned} \mu(^{41}\text{Sc}) &= \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \times 5.58 = 3 + 2.79 \\ &= 5.79(\text{nm}). \end{aligned}$$

求 ^{41}Sc 和 ^{41}Ca 的电四极矩.

$$Q(^{41}\text{Sc}) = -\langle r^2 \rangle \frac{2J-1}{2(J+1)}.$$

$\langle r^2 \rangle$ 为径向波函数对 r^2 的平均值, 为简化问题, 令 $\langle r^2 \rangle \approx R^2 = [1.2 \times A^{1/3}]^2$,

$$Q(^{41}\text{Sc}) = -\frac{6}{9} \times (1.2 \times A^{1/3})^2 = -1.14 \times 10^{-26}(\text{cm}^2)$$

对 ^{41}Ca , 它是满壳层外一个中子, 电四极矩是由中子相对于核心极化影响而产生的.

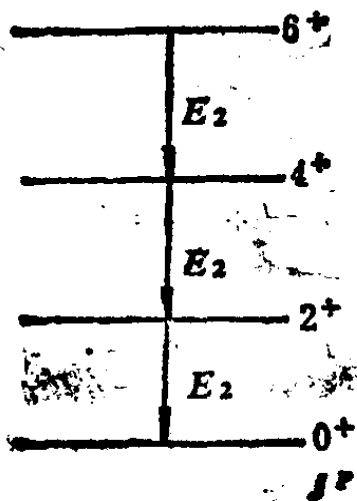


图2.15

$$Q(^{41}\text{Ca}) \approx \frac{Z}{(A-1)^2} \times Q(^{41}\text{Sc})$$

$$\approx 1.43 \times 10^{-27}(\text{cm}^2).$$

(b) 如图2.15对 ^{42}Ca 的核, 基态为 0^+ , 两个核子均为 $f_{7/2}$ 的中子可耦合成 $J = 7, 6, 5 \dots 0$, 宇称为正的能级, 对全同粒子考虑反对称, 可组成 $J = 6, 4, 2, 0$.

对两核子系统:

$$\mu = gJ\mu_N = (g_1j_{z_1} + g_2j_{z_2})\mu,$$

$$g = \frac{1}{2}(g_1 + g_2) + \frac{1}{2}(g_1 - g_2) \frac{j_1(j_1 + 1) - j_2(j_2 + 1)}{J(J + 1)}.$$

对 $^{42}_{20}\text{Ca}$, 核子 1 和 2 均为 $j = \frac{7}{2}$ 的中子.

$$g_1 = g_2 = \frac{-3.82}{2j_1},$$

$$\mu(^{42}_{20}\text{Ca}) = gJ\mu_N = \frac{-3.82}{2j_1}J\mu$$

$$= -1.09J\mu_N. \quad J = 0, 2, 4, 6.$$

$^{42}_{20}\text{Ca}$ 的基态 $Q = 0$. 激发态的电四极矩可用 γ 跃迁的约化矩阵元几率来求.

$$B(E2, 2^+ \rightarrow 0^+) = \frac{1}{16\pi} e^2 Q_0^2, \quad Q_0 \text{ 为内禀电四极矩.}$$

对于 $^{42}_{20}\text{Ca}$ 第一激发态 (2^+) 的能量为 1.524MeV . 由此求得

$$B(E2; 2^+ \rightarrow 0^+) = 81.5 e^2 \text{fm}^4,$$

$$Q_0^2 = 81.5 \times 16\pi \text{fm}^4 = 4097 \text{fm}^4,$$

$$Q_0 \approx 64 \text{fm}^2.$$

实验值 $Q = \frac{K^2 - J(J + 1)}{(J + 1)(2J + 3)} Q_0$

$$= -\frac{J(J + 1)Q_0}{(J + 1)(2J + 3)} = \frac{-J}{2J + 3} Q_0,$$

$$K = 0.$$

$$J = 2, \quad Q = 18.3 \text{fm}^2,$$

$$J = 4, \quad Q = 23.3 \text{fm}^2,$$

$$J = 4, \quad Q = 25.6 \text{fm}^2.$$

(c) 根据 γ 跃迁选择定则, $\left(\frac{5}{2}\right)^- \longrightarrow \left(\frac{7}{2}\right)^-$ 的跃迁为磁

偶极和电四极跃迁, 按单粒子模型给出:

$$\begin{aligned} \lambda_{M1} &= \frac{1.9(L+1)}{L[(2L+1)!!]^2} \left[\frac{3}{L+3} \right]^2 \left(\frac{E\gamma}{197} \right)^{2L+1} \\ &\quad \times (1.4 \times A^{\frac{1}{3}})^{2L-2} \times 10^{21} \\ &= \frac{1.9 \times 2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{0.37}{197}\right)^3 (1.4 \times 43^{\frac{1}{3}})^0 \times 10^{21}}{3^2} \\ &= 1.57 \times 10^{12} \text{s}^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{E2} &= \frac{4.4(L+1)}{L[(2L+1)!!]^2} \left(\frac{3}{L+3} \right)^2 \left(\frac{E\gamma}{197} \right)^{2L+1} \\ &\quad \times (1.4 \times A^{\frac{1}{3}})^{2L} \times 10^{21} \\ &= \frac{4.4 \times 3}{2 \times (5 \times 3)^2} \left(\frac{3}{L+3} \right)^2 \left(\frac{0.37}{197} \right)^5 \\ &\quad \times (1.4 \times 43^{\frac{1}{3}})^4 \times 10^{21} = 1.4 \times 10^8 \text{s}^{-1}. \end{aligned}$$

$\lambda_{E2} \ll \lambda_{M1}$, 略去 $E2$ 的贡献.

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda_{M1}} = \frac{\ln 2}{1.57 \times 10^{12}} \approx 4.4 \times 10^{-13} \text{(s)}.$$

用单粒子模型计算的值比实验值约小 20 倍, 因为这是集体运动改变引起的 γ 跃迁. (吴为民)

2071 (Pri, 1982)

单个核子(中子)在核内相互作用的真实的位势模型中的结合能由图2.16给出:

(a) 对 ${}_{20}^{40}\text{Ca}$ 和 ${}_{82}^{208}\text{Pb}$ 的中子分离能是多少?

(b) 在 ${}_{20}^{40}\text{Ca}$ 和 ${}_{82}^{208}\text{Pb}$ 之间最好的中子幻数是多少?

(c) 画出 ^{210}Pb 的包括自旋、宇称和近似的相对能级的最低五个能级谱，并给以解释。

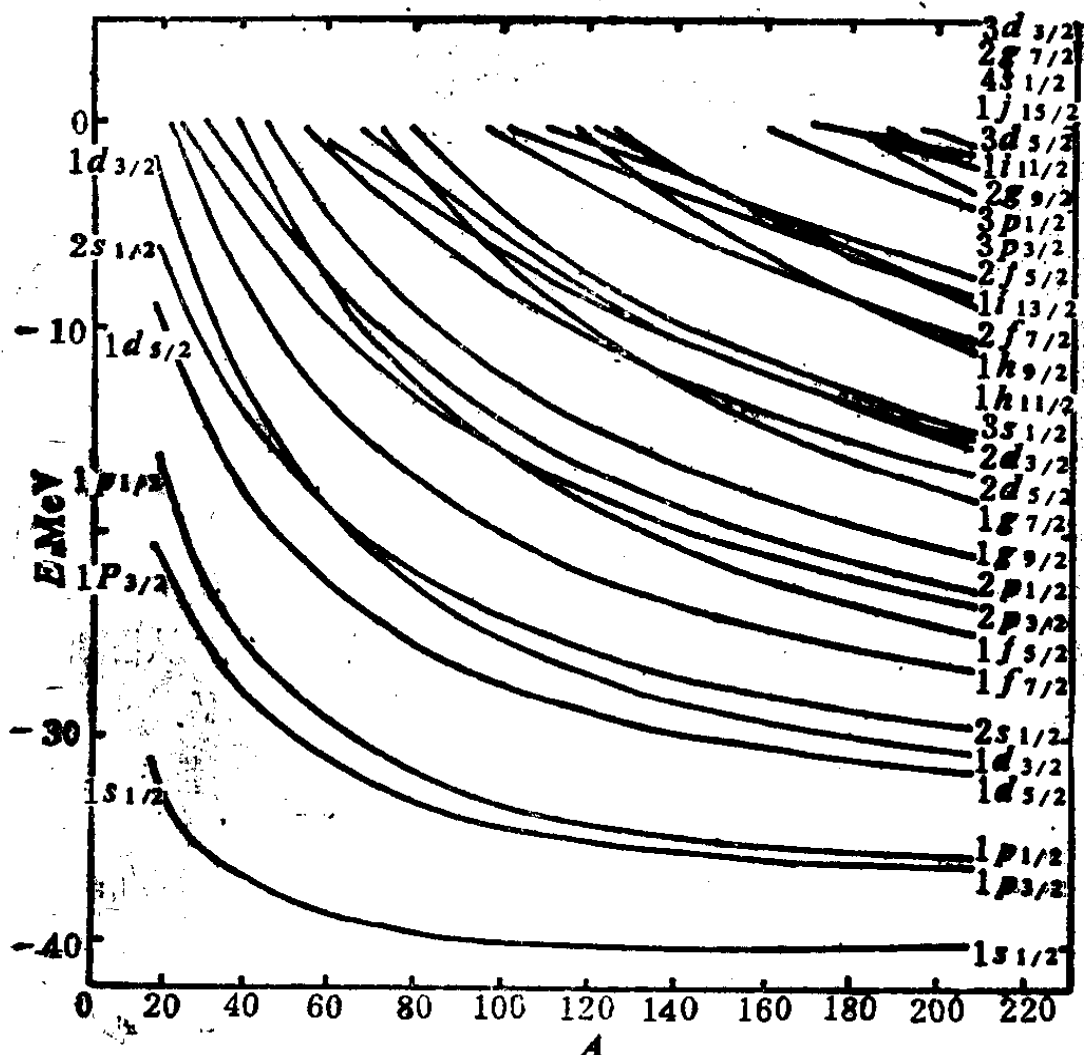


图2.16

(d) 中子的 S 波强度函数 S_0 是这样定义的，它是平均中子衰变宽度 $\langle \Gamma_n \rangle$ 和平均局部能量间隔 $\langle D \rangle$ 之比，即：

$$S_0 = \langle \Gamma_n \rangle / \langle D \rangle$$

图2.17给出了热中子的 S 波强度函数 S_0 随质量数 A 的变化，解释在 $A=50$ 处的单峰的原因及 $A=160$ 时劈裂峰的原因，即为什么第二个峰是劈裂的？

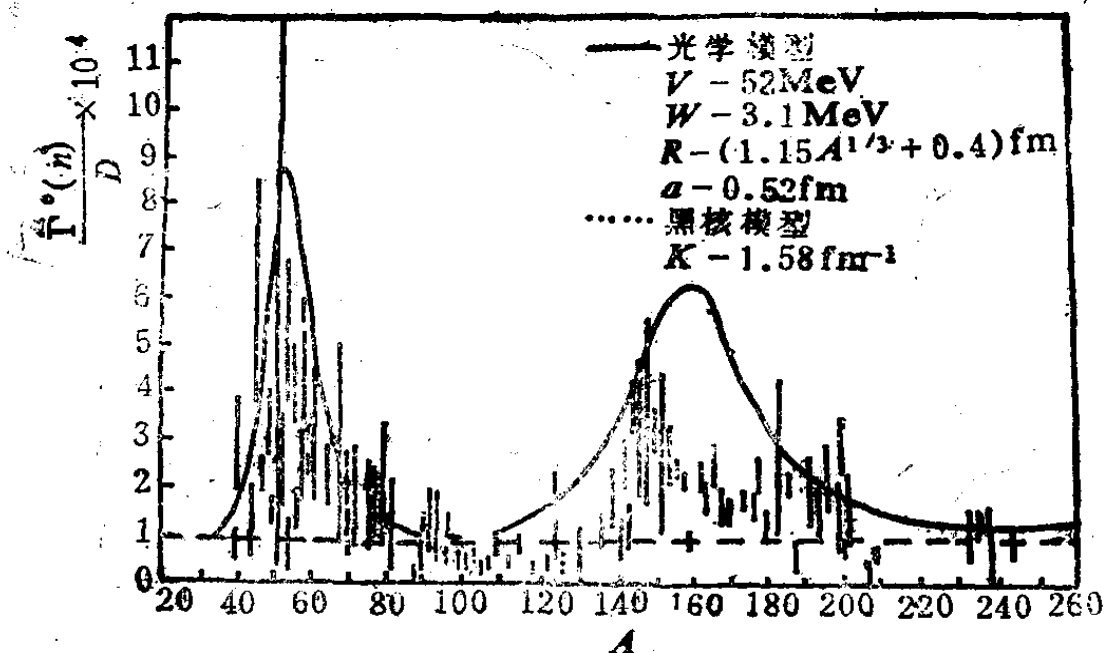


图2.17

解: (a) ${}_{20}^{40}\text{Ca}$ 的最外层中子是第20个中子. 从图2.16查得, $A=40$, 应处于 $1d_{3/2}$, 分离能约为13MeV.

${}_{82}^{208}\text{Pb}$ 是满壳层, 最后一对中子是 $3p_{1/2}$, 查得 $A=208$ 时分离能约为7MeV.

(b) ${}_{20}^{40}\text{Ca}$ 和 ${}_{82}^{208}\text{Pb}$ 之间的中子幻数为50, 82和28三个, 对于 $N=Z$ 的核, 当中子的幻数为 $N=28$ 时, 分离能约13MeV. 对中子数为50, 分离能亦约为13MeV. 中子数为82时, 分离能约12MeV, 但对重核, 中子数大于质子数, 即 $A < 2N$, 考虑这一因素后, 对50和82两个幻数的核, 分离能还要小些, 故还是28的幻数分离能最大, 即最好的中子幻数.

(c) ${}_{82}^{210}\text{Pb}$ 的最后两个中子是处于双满壳层外的 $2g_{9/2}$ 态上, 因这两个核子在同一轨道上, 有成对趋势, 即偶偶核基态为 0^+ .

因为 ${}_{82}^{210}\text{Pb}$ 外层的 $2g_{9/2}$ 态两个中子可耦合成为 J 为9, 8, 7

... 0 的态, 因两中子的系统 $T = 1$, 总波函数反对称要求 $J + T = \text{奇数}$. 故允许的 J 值为 $8, 6, 4, 2, 0$, 宇称均为正. 即最低的五个态的 J^π 值为

$$8^+, 6^+, 4^+, 2^+, 0^+.$$

当考虑剩余相互作用后, 这五个态能级不同. 如图 2.18 所示.

(d) $A = 50$ 附近, S 波强度函数出现峰值是因为在 $A = 50$ 时, $3s$ 能级出现在激发能近似等于中子的结合能, 用光学模型可以计算出峰的轮廓 (图中实

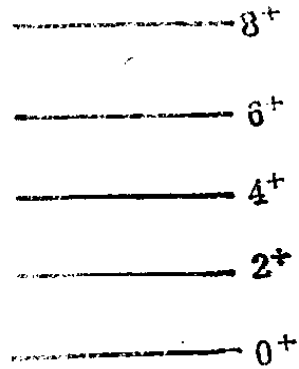


图 2.18

线所示). 在 $150 < A < 190$ 之间, S 波强度函数是由于 $4s$ 态中子的激发能和结合能近似相等. 但这个区域的核变形较大, 特别是在 $A = 160 - 170$ 附近, 核有明显地呈永久变形趋势. 这时结合能比单粒子模型有明显改变, 故原来的 S 波强度函数峰值下降, 劈裂成两个小峰. (何小东)

2072 (Pri, 1330)

图 2.19 给出 ^{18}O 的几个低能态能级的自旋、宇称及相对于基态的能量 (单位为 MeV). (a) 解释为什么这些能级的 J^π 值

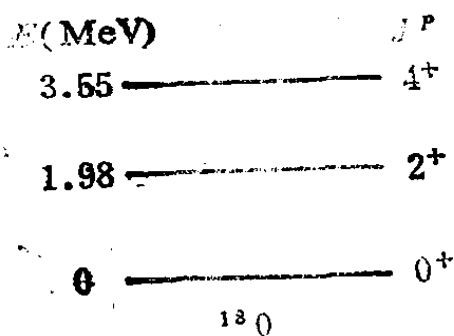


图 2.19

和壳模型理论预言的一致? (b) ^{18}O 的几个低能态的 J^π 值是什么? (c) 若给出 ^{18}O 的低能级的值, 忽略相互组态作用时, 用壳模型计算 ^{18}O 的能级是可能的, 但是这需要熟悉 Clebsch-Gordon 系数. 为简化问题, 考虑一个假

想的情况, 这时 ^{18}O 的 2^+ 和 4^+ 能级分别为 2MeV 和 $6\frac{2}{8}\text{MeV}$.

对于这个虚构的世界，计算 ^{18}O 的最低的几个能级的能量。

解：(a) 如图2.20所示，当用简单的壳模型理论，忽略核子间的剩余相互作用，只考虑自旋与轨道耦合，对 A 个核子系统：

$$H = \sum H_i, \quad H_i = T_i + V_i,$$

$$V_i = V_0(r) + f(r) \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{L}_i,$$

$$\Psi = \prod_{i=1}^A \psi_i, \quad H_i \psi_i = E_i \psi_i.$$

当考虑剩余相互作用时，要考虑到同一能级上的核子之间不同组合的能级不同。

对 ^{18}O 核，为核满壳层外有两个中子，它们可填充在 $1d_{\frac{5}{2}}$ 和 $2s_{\frac{1}{2}}$ 能级。当两核子在同一轨道的系统的总波函数的反对称要求 $T + J = \text{奇数}$ 。因 $T = 1$ ， $J = \text{偶数}$ 。 ^{18}O 可能的基态和激发态应为

$$\text{组态: } (1d_{\frac{5}{2}})^2: J = 0^+, 2^+, 4^+; T = 1,$$

$$(1d_{\frac{5}{2}} 2s_{\frac{1}{2}}): J = 2^+; T = 1,$$

$$(2s_{\frac{1}{2}})^2: J = 0^+; T = 1,$$

$$(1d_{\frac{3}{2}})^2: J = 0^+, 2^+; T = 1.$$

从题设 ^{18}O 的最低三个能级为 $0^+, 2^+, 4^+$ ，两中子应处于 $(1d_{\frac{5}{2}})^2$ 组态。

(注：当考虑能级大小时，只考虑 $(d_{\frac{5}{2}})^2$ 组态时与实验符合不好，必须考虑 $1d_{\frac{5}{2}}, 2s_{\frac{1}{2}}, 1d_{\frac{3}{2}}$ 等的组态混合，这时给出的能级大小和实验符合较好)。

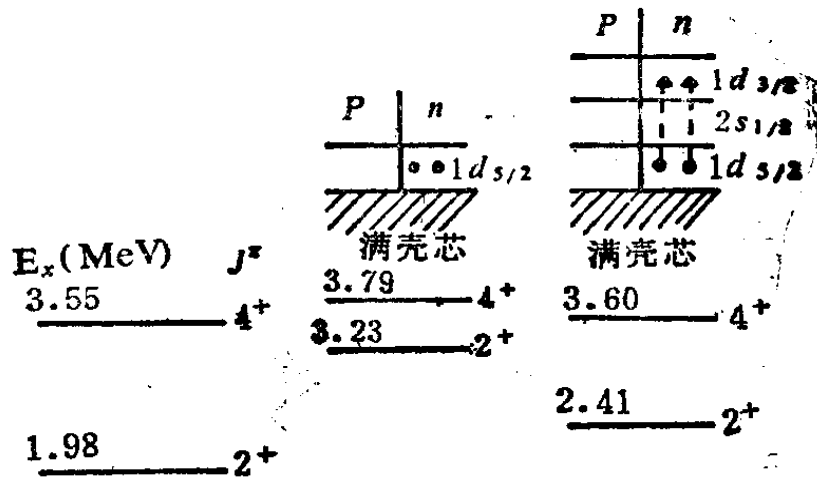
(b) 对 ^{18}O 的最低几个能级，用简单的壳模型不考虑组态相互作用，能级由最后一个未成对的中子所处的能级决定，基态应为 $\frac{5}{2}^+$ ，第一激发态为 $\frac{1}{2}^+$ ，第二激发态为 $\frac{3}{2}^+$ 。

如果考虑组态相互作用，满壳层外的三个中子可填充

$1d_{5/2}$ 和 $2s_{1/2}$ 轨道, 这时组成:

$$J^P = \frac{5}{2}^+, \text{ 组态: } \left(d_{\frac{5}{2}} \right)_2^3 \frac{5}{2} m,$$

$$\left[\left(d_{\frac{5}{2}} \right)_2^2 s_{\frac{1}{2}} \right]_{\frac{5}{2} m}, \quad \left[d_{\frac{5}{2}} (s_{\frac{1}{2}})_0 \right]_{\frac{5}{2} m_0}$$



$$E^b = \underbrace{-139.8 \text{ MeV}}_{\text{实验值}} 0^+ - \underbrace{138.7 \text{ MeV}}_{(a)} 0^+ - \underbrace{140.2 \text{ MeV}}_{(b)} 2^+$$

图2.20

$$J^P = \frac{1}{2}^+, \text{ 组态: } \left[\left(d_{\frac{5}{2}} \right)_0^2 s_{\frac{1}{2}} \right]_{\frac{1}{2} m_0}$$

$$J^P = \frac{3}{2}^+, \text{ 组态: } \left(d_{\frac{5}{2}} \right)_2^3 \frac{3}{2} m, \quad \left[\left(d_{\frac{5}{2}} \right)_2^2 \cdot s_{\frac{1}{2}} \right]_{\frac{3}{2} m_0}$$

此外还可组成 $J^P = \frac{7}{2}^+, \frac{9}{2}^+$ 的各种组态.

(c) ^{18}O 的低激发态能级为 $0^+, 2^+, 4^+$, 能级分别为 0, 2 和 $6\frac{2}{3}$ (图2.21), 按这种虚拟的能级. 它正好是偶-偶核

的转动谱，因为按转动谱：

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{4(4+1)}{2(2+1)} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3} = \frac{6 \frac{2}{3}}{2},$$

根据这个假设，可由 ^{18}O 的转动能级，求出 ^{18}O 的转动惯量，并进一步假设 ^{19}O 的激发态也是转动谱，且转动惯量近似等于 ^{18}O 的值。从而估计 ^{19}O 的能级。

$$E_{I \rightarrow J} = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}} J(J+1),$$

$$\frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}} = \frac{E_1}{J(J+1)} = \frac{2}{2(2+1)} = \frac{1}{3} \text{ (MeV)}.$$

^{19}O 的基态 (图2.22)， $J^P = \frac{5}{2}^+$ ，所以有：

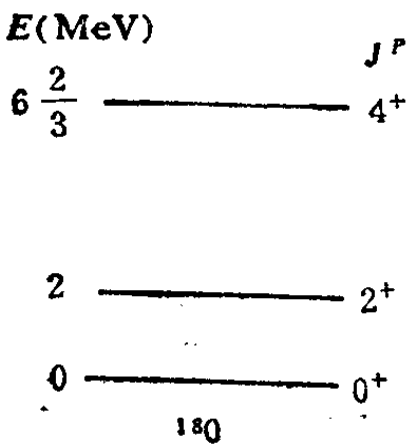


图2.21

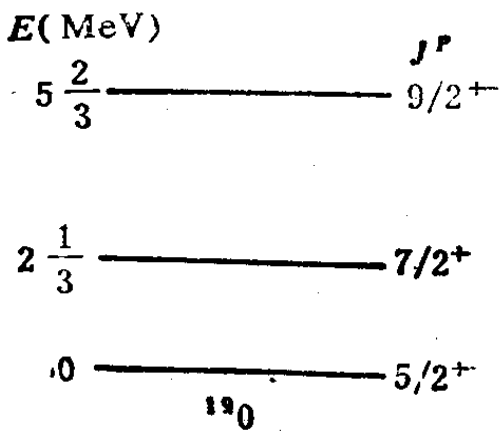


图2.22

$E_{\frac{5}{2}^+} = 0$ ，(相当于 ^{19}O 基态)，

$$\begin{aligned} E_{\frac{7}{2}^+} &= \frac{1}{3} \left[\frac{7}{2} \left(\frac{7}{2} + 1 \right) - \frac{5}{2} \left(\frac{5}{2} + 1 \right) \right] \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} (7 \times 9 - 5 \times 7) = 2 \frac{1}{3} \text{ (MeV)}, \end{aligned}$$

$$E_{\frac{9}{2}^+} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} (9 \times 11 - 5 \times 7) = \frac{1}{12} (99 - 35)$$

$$= 5\frac{1}{3} \text{ (MeV).} \quad \text{(王绍奔)}$$

2073 (Pri, 1979)

下面的非相对论的哈氏量可以用来描述核子系统:

$$H_0 = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 r_i^2, \quad H_1 = H_0 - \sum_i \beta \hat{l}_i \cdot \hat{s}_i;$$

$$H_2 = H_1 - \sum_i \frac{1}{2} m \bar{\omega}^2 (2z_i^2 - x_i^2 - y_i^2),$$

其中: $\hbar\omega_0 \gg \beta \gg \hbar\omega$.

(a) 对于每一个哈氏量, 找出绝对和近似守恒的量子数. 对于每一模型的基态, 给出当全同核子 $n=11, 13$ 和 15 时, 最后填充的单粒子轨道量子数.

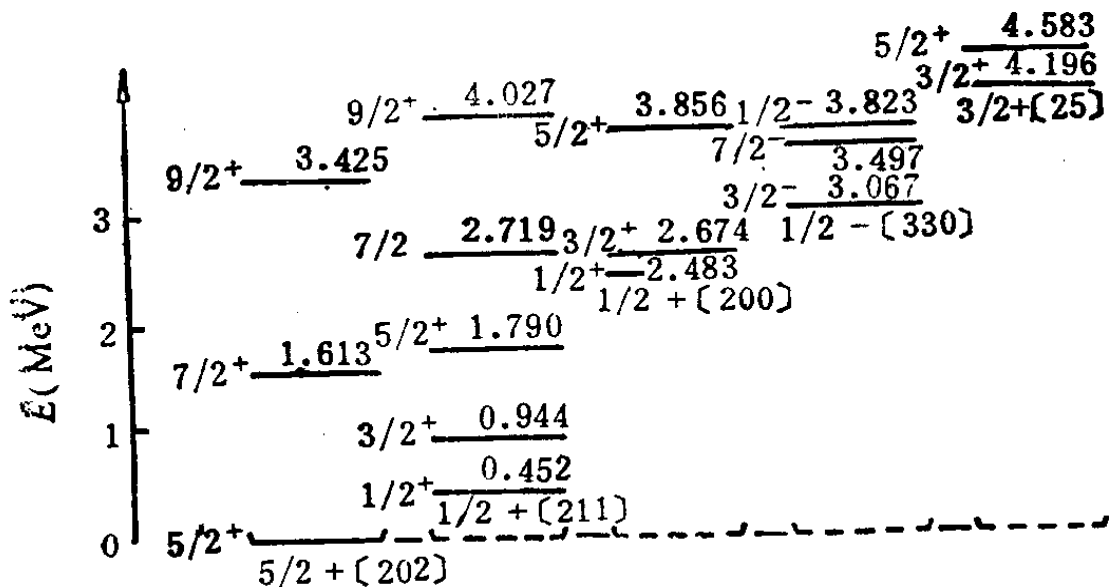


图2.23

(b) 当考虑球形核或变形核的低激发态时, 还有哪些因素要考虑.

(c) ^{27}Al 的低于 5MeV 的能级如图 2.23 所示 (见第 289 页), 哪些态与球形核和变形核的预期值相对应.

解: (a) H_0 的绝对守恒量为能量 E , 轨道角动量 L , 总自旋 S , 总角动量 J 及宇称.

对 H_1 的绝对守恒量为 E, J 和宇称. 近似守恒量为 L 和 S .

对 H_2 的绝对守恒量为 E , 总角动量的第三分量 J_z 及宇称. 近似守恒量为 J, L, S .

对 H_0 是一各向同性谐振子场. $E_N = \left(N + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega$,

当 $N=0$ 时为基态, 记作 $1s_{1/2}$.

$N=1$ 时为 p 态, $1p_{3/2}$ 和 $1p_{1/2}$ 是简并的.

$N=2$ 时为 $2s$ 或 $1d$ 态, $2s_{1/2}$, $1d_{5/2}$ 和 $1d_{3/2}$ 是简并的.

$n=11, 13, 15$ 时均填充在 $N=2$ 的能级上 ($2s_{1/2}$, $1d_{5/2}$ 和 $1d_{3/2}$ 各态是简并的).

对 H_1 可改写成:

$$\begin{aligned} H_1 &= H_0 - \sum_i \beta (\mathbf{l}_i \cdot \mathbf{s}_i) \\ &= H_0 - \sum_i \frac{1}{2} \beta [j_i(j_i + 1) - l_i(l_i + 1) \\ &\quad - s_i(s_i + 1)], \end{aligned}$$

j_i 越大, 能量越低, 部分简并解除, $1p_{3/2}$ 和 $1p_{1/2}$ 分开. $1d_{3/2}$ 和 $1d_{5/2}$ 也分开. 这时, 对 $n=11$ 和 13 的粒子填充到 $1d_{5/2}$ 态, $n=15$ 的核子填充到 $2s_{1/2}$.

对 H_2 , 也可改写成:

$$H_2 = H_1 - \sum_i \frac{1}{2} m \omega^2 r_i^2 (3 \cos^2 \theta - 1).$$

它是变形核的哈氏量，这时， $1p_{3/2}$ ， $1d_{3/2}$ 和 $1d_{5/2}$ 能级再次分裂：

$$1d_{5/2} \text{ 能级分裂成 } \frac{1}{2}^+, \frac{3}{2}^+, \frac{5}{2}^+,$$

$$1d_{3/2} \text{ 能级分裂成 } \frac{1}{2}^+, \frac{3}{2}^+,$$

$$1p_{3/2} \text{ 能级分裂成 } \frac{1}{2}^-, \frac{3}{2}^-.$$

设变形参数 ϵ 。能级的分裂顺序与变形参数有关。根据 $\epsilon \approx 0.3$ (^{27}Al 核的 $\epsilon \approx 0.3$) 时，变形核中的单粒子模型的能级顺序，最后一个核子：

$$n = 11: \left(\frac{3}{2}\right)^+ \left(1d_{5/2} \text{ 的 } \frac{3}{2}^+\right).$$

$$n = 13: \left(\frac{5}{2}\right)^+ \left(1d_{5/2} \text{ 的 } \frac{5}{2}^+\right).$$

$$n = 15: \left(\frac{1}{2}\right)^+ (2s_{1/2})$$

(b) 对球形核，当考虑基态和低激发态时，还必须考虑对效应，组态相互作用。对于变形核，除上述效应外，还要考虑变形场对单粒子能级的影响及核的集体振动和转动。

(c) $^{27}_{13}\text{Al}$ 是属于变形核， $\epsilon \approx 0.3$ 。它的 14 个中子和 13 个质子填入球形核的顺序是：

$$n: (1s_{1/2})^2 (1p_{3/2})^4 (1p_{1/2})^2 (1d_{5/2})^6,$$

$$p: (1s_{1/2})^2 (1p_{3/2})^4 (1p_{1/2})^2 (1d_{5/2})^5.$$

基态由最后一个未成对的核子($1d_{5/2}$)态决定: $J^P = \left(\frac{5}{2}\right)^+$.

考虑到核的形变后, 不仅象 $1p_{3/2}$, $1d_{5/2}$, $1d_{3/2}$ 等能级分裂, 使能级变密, 而且能级的顺序也有变化. 严格来说, ${}^{27}_{13}\text{Al}$ 的能级是按变形核中的单粒子能级填充的, 再加上集体运动, 故能级复杂, 从能级图和理论比较, 对应于原来球形核的能级(J^P 一样)是:

$$\text{基态: } J^P = \left(\frac{5}{2}\right)^+, E = 0,$$

$$\text{激发态: } J^P = \left(\frac{1}{2}\right)^+, E = 2.463 \text{ (MeV)},$$

$$\text{激发态: } J^P = \left(\frac{3}{2}\right)^+, E = 4.156 \text{ (MeV)}.$$

对应于变形核中的单粒子能级是:

$$\text{基态: } \left(\frac{5}{2}\right)^+ \quad (K = \frac{5}{2}, P = +1) E = 0,$$

$$\text{激发态: } K^P = \left(\frac{1}{2}\right)^+, E = 0.452 \text{ MeV},$$

$$K^P = \left(\frac{1}{2}\right)^+, E = 2.463 \text{ MeV},$$

$$K^P = \left(\frac{1}{2}\right)^-, E = 3.623 \text{ MeV},$$

$$K^P = \left(\frac{3}{2}\right)^+, E = 4.196 \text{ MeV}.$$

而每一个 K^P , 又对应一个核的集体转动能带. 由下列各式给出能级.

$$E_J = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}} [J(J+1) - K(K+1)],$$

$$K \neq \frac{1}{2}, J = K, K+1, \dots.$$

$$E_J = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}} \left[J(J+1) - \frac{3}{4} + a - a(-1)^{J+1/2} \left(J + \frac{1}{2} \right) \right],$$

$$K = \frac{1}{2}, J = k, k+1, \dots.$$

如：对 $\frac{2}{5}^+$ (0), $\frac{7}{2}^+$ (1.613), $\frac{9}{2}^+$ (3.425) 的转动带

$$\frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}} \approx 0.219 \text{ (MeV)}$$

对于 $K = \frac{1}{2}$ 的转动谱，有两个参数 $\frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}}$ 和 a 。

如： $\frac{1}{2}^+$ (0.452), $\frac{3}{2}^+$ (0.944), $\frac{5}{2}^+$ (1.790), $\frac{7}{2}^+$ (2.719),

$\frac{9}{2}^+$ (4.027), 的转动带，

$$\frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}} \approx 0.150 \text{ (MeV)}, a \approx -3.175 \times 10^{-2}.$$

对于 $\frac{1}{2}^-$ (3.623), $\frac{7}{2}^-$ (3.497) 和 $\frac{3}{2}^-$ (3.042) 同样可求出两个

参数来，这时的 $\frac{5}{2}^-$ 已超过 5 MeV。它的参数为

$$\frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}} \approx 0.278 \text{ MeV}, a \approx 5.092. \quad (\text{何小东})$$

2074 (Pri, 1978)

最近的一集体核模型(Collective Model)通过玻色子的相互作用来处理原子核. 对于一系列可以用 S, D 玻色子(即: 自旋分别为 0, 2)的对称叠加来描写的核态, 问当 $N_s = 0, 1, 2, 3$ 时, 态的自旋为多少? 如果 S 玻色子的能量为 E_s , d 玻色子的为 E_d . 在 D 玻色子之间又存在着强度为 α 的剩余相互作用. 问 $N_s + N_d = 3$ 的态的能谱是什么?

解: $N_s = 0$ 时, 自旋为 0,

$N_s = 1$ 时, 自旋为 2,

$N_s = 2$ 时, 自旋为 4, 2, 0,

$N_s = 3$ 时, 自旋为 6, 4, 2, 0, 3.

对 $N_s + N_d = 3$ 的态, 当 $N_s = 0$ 时, $E = E_d \cdot 3$,

当 $N_s = 1$ 时, $E = E_s + 2E_d$,

当 $N_s = 2$ 时, $E = E_s + 2E_d + \alpha$,

当 $N_s = 3$ 时, $E = 3E_s + 3\alpha$.

(何小东)

.075 (Pri, 1978)

复杂核相互作用的一个简化了的模型是通过如下形式的哈氏量来确定“对力”.

$$H = -g \begin{pmatrix} 1 & 1 \cdots 1 \\ 1 & 1 \cdots \cdots \\ 1 & 1 \cdots \cdots \\ \vdots & \vdots \vdots \vdots \\ 1 & 1 \cdots 1 \end{pmatrix}.$$

对在 j 轨道上的两个全同粒粒子的基态由 $(-1)^{j-m} |jm\rangle$

$j - m\rangle$ 给出，这一相互作用有单独的本特征。它的自旋是什么？能量是多少？对其它本征态的自旋和能量是多少？

解：本征态可写成下列形式：

$$\Psi^{N-2} = \left(j + \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$H\Psi^{N-2} = -g \cdot \left(j + \frac{1}{2}\right) \Psi^{N-2}.$$

故 Ψ^{N-2} 的能量本征值为 $-g\left(j + \frac{1}{2}\right)$ 。由于对力只作用在 $J^z = 0$ 的态上，故其自旋为零。

由于全部能量本征值之和等于 H 矩阵的迹 $-g\left(j + \frac{1}{2}\right)$ ，

且 H 是负值，故与 Ψ^{N-2} 正交的本征态全部具有能量本征值为 0，它们的角动量依次为 $I = 2, 4, 6 \dots$ 等。

(注：详见 J. M. Eisenberg and W. G. Reiner, *Microscopic Theory of the Nucleus*, 1976: 296.)

(黄晓舟)

§ 5 原子核的衰变(2076 - 2107)

2076 (Col, 1978)

盖革-努塔尔定律的最初表示形式为 α 粒子射程 (R) 和

衰变常数 (λ) 之间的关系. 在天然 α 放射性中, $\log \lambda$ 和 $\log R$ 间有线性关系. 随后, 这关系表成 $\log \lambda$ 和 α 粒子能量的某次方 $E^\alpha(\alpha)$ 之间的线性关系.

用量子力学解释这一关系, 并说明在通常原子核情形中 λ 对 $E(\alpha)$ 的敏锐的依赖性. (比如 $E(\alpha) = 5.3 \text{ MeV}$ (Po^{210}) 到 $E(\alpha) = 7.7 \text{ MeV}$ (Po^{214}) 变化引起 λ 变化 10^{10} , 半衰期从 140 天变成 1.6×10^{-4} 秒!)

解: α 衰变看作 α 粒子对子核的势垒的透射过程, 子核的势见图 2.7, R 是核的半径, r_1 是使库仑排斥势

$$V(r) = \frac{Zze^2}{r}$$

等于 E 的点, 采用三维的模型, 忽略角动量, 由 $W.K.B$ 近似法知透射系数 T :

$$T = e^{-2G},$$

$$G = \frac{1}{\hbar} \int_R^{r_1} (2m|E - V|)^{1/2} dx,$$

$$V = zZe^2/r,$$

$$E = zZe^2/r_1,$$

令 $B = zZe^2/R$, 于是可计算 G :

$$G = \frac{1}{\hbar} (2mzZe^2r_1)^{1/2} \left[\arccos \left(\frac{R}{r_1} \right) - \left(\frac{R}{r_1} - \frac{R^2}{r_1^2} \right)^{1/2} \right],$$

$$\xrightarrow[\substack{R \rightarrow 0 \\ r_1}]{\quad} \frac{1}{\hbar} (2mzZe^2r_1)^{1/2} \left[\frac{\pi}{2} - 2 \left(\frac{R}{r_1} \right)^{1/2} \right].$$

α 粒子在阱内速度 v_0 , 每秒碰壁数在三维下为 $\frac{v_0}{R}$, 则衰变几

率 $\lambda = \frac{v_0}{R} T$, 有:

$$\log \lambda = \frac{(2mB)^{1/2}}{\hbar} R \left[\pi \left(\frac{B}{E} \right)^{1/2} - 4 \right] + \log \frac{v_0}{R}.$$

这就是所求的 $\log \lambda$ 与 $E^{-1/2}$ 的线性关系, 考虑到: $R \propto A^{1/3}$, $v_0 \approx 10^9 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$, $R \approx 10^{-12} \text{ cm}$, 可得到塔格彼拉 (Tagerpera) 和诺米亚 (Nurmia) 的关于半衰期公式:

$$\log_{10} T (\text{年}) = 1.61 (ZE^{-1/2} (\text{MeV}) - Z^2 \cdot 3) - 28.9.$$

特别对 ${}_{84}\text{Po}$, $\log_{10} \frac{T({}^{210}\text{Po})}{T({}^{214}\text{Po})} = 1.61 \times 84 \times \left(\frac{1}{\sqrt{5.3}} - \frac{1}{\sqrt{7.7}} \right),$
 $= 10.007.$

相差 10 个量级.

(注: 关于 α 衰变, 请参看 E. Segre 著《核与粒子》一书有关章节).
 (王力军)

2077 (Col, 1977)

放射性同位素的半衰期强烈地依赖于衰变释放的能量. 对 α 和 β 放射体, 半衰期与能量的关系不同. (a) 对 α 放射体, 导出这个定律. (b) 详细讨论两种过程的差别, 说明为什么这定律对 β 衰变不同.

解: (a) 关于 α 衰变盖革-努塔尔定律的量子力学推导在题 2076 中, 亦可参考 E. Segre 著《核与粒子》一书有关章节, 结论如下:

$$\log \lambda = - \frac{(2mB)^{1/2}}{\hbar} R \left[\pi \left(\frac{B}{E} \right)^{1/2} - 4 \right] + \log \frac{v_0}{R},$$

式中, $B = \frac{zZe^2}{R}$, R 是子核半径, v_0 是 α 粒子在核内运动

速度, E 是 α 粒子的衰变能.

(b) β 衰变是与 α 衰变完全不同的一种过程, α 衰变看成 α 粒子对衰变后的子核形成的势垒壁的穿透, 衰变速率对衰变能 E 有单一关系.

β 衰变为一个中子衰变成一个质子, 一个电子及一个反中微子. 费米用类似 γ 辐射的办法确定 β 谱的形状. 由“黄金公式”:

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} |H_{fi}|^2 \rho,$$

$\rho = \frac{dN}{dE}$ 是末态的态密度.

$$dN_e dN_\nu = \frac{16\pi^2 \Omega^2}{h^6} p_e^2 dp_e p_\nu^2 dp_\nu,$$

有 $p_e = \frac{1}{c}(E - E_e)$, E 是总能量, $dp_e = \frac{1}{c}dE$.

则 $dN_e \frac{dN_\nu}{dw} = \frac{16\pi^2 \Omega^2}{(12\pi\hbar)^6 c^3} (E - E_e)^2 p_e^2 dp_e,$

令 $H_{fi} = g \frac{M_{fi}}{\Omega}$, 则

$$w(p_e) dp_e = \frac{2\pi}{\hbar c} g^2 |M_{fi}|^2 \frac{(4\pi)^2}{(2\pi\hbar)^6} \frac{(E - E_e)^2}{c^2} p_e^2 dp_e.$$

总衰变率 $\lambda = \int_0^{p_{\max}} w(p_e) dp_e.$

$$= \frac{g^2 |M_{fi}|^2}{2\pi^3 c \hbar^7} \int_0^{p_{\max}} [E - (m_e^2 c^4 + c^2 p_e^2)^{1/2}]^2 p_e^2 dp_e.$$

在极限情形 $\left(\frac{E}{m_0 c^2} \ll 5\right)$ 下:

$$\lambda \propto E^5,$$

与 α 衰变截然不同.

(王力军)

2078 (Pri, 1982)

自然界中 ^{197}Au 是有放射性的, 它放出一个能量为 3.3 MeV 的 α 粒子, 估计 ^{197}Au 的寿命. 由此解释为什么金子不会把你的口袋烧一个洞.

解: 根据 Geiger-Nuttal 定律. 可以估计 ^{197}Au 的寿命. α 粒子能量 E_α 与衰变常数的关系为

$$\log_{10} \lambda = C - DE_\alpha^{-1/2}.$$

式中 E_α 为 MeV, C, D 为与 Z 有关的常数. 可以用量子理论计算. 作为最粗糙的估计, C, D 可近似用 Pb 的常数 C, D 代入, $C \approx 52, D = 140$.

$$\lambda \approx 10^{[52 - 140E_\alpha^{-1/2}]} \approx 10^{-25} \text{ s}^{-1},$$

$$T_{1/2} = \frac{1}{\lambda} \ln 2 \approx 6.9 \times 10^{24} \text{ (s)}$$

$$\approx 2.2 \times 10^{17} \text{ (a)}$$

因为半衰期太长, 单位时间的衰变数太少, 故不会把口袋烧个洞.

(吴为民)

2079 (Buf, 1983)

^{239}Pu 的半衰期可通过下列方法测定, 把质量为 120.1 克的 ^{239}Pu 球置于液氮中, 液氮的体积足以阻止所有的 α 粒子, 测量液氮的蒸发率相当于功率为 0.231 瓦, 计算 ^{239}Pu 的半衰期, 近似到 10^2 年, ^{239}Pu 的 α 粒子能量为 5.144 MeV,

(要计算核的反冲能). 转换因子为

$$1\text{MeV} = 1.60206 \times 10^{-13}\text{J},$$

$$1\text{amu} = 1.66 \times 10^{-24}\text{g}.$$

解: 反应式 $^{239}\text{Pu} \longrightarrow \alpha + ^{235}\text{U}$.

$$\text{核反冲能为 } E_M = \frac{p^2}{2M} = \frac{2m_\alpha}{M} E_\alpha = 1.702 \times 10^{-2} E_\alpha.$$

一次衰变, ^{239}Pu 核放出的总能量为

$$\begin{aligned} E &= E_M + E_\alpha = (1 + 1.702 \times 10^{-2}) E_\alpha \\ &= 5.232(\text{MeV}). \end{aligned}$$

$W = ER$, R 为每秒衰变的次数.

$$\text{核衰变 } -\frac{dN}{dt} = +\lambda N \approx +\lambda N_0 = R,$$

所以 $W = E\lambda N_0$,

$$\lambda = \frac{W}{N_0 E} \quad T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{N_0 E \ln 2}{W}.$$

代入具体数值得:

$$\begin{aligned} T_{1/2} &= \frac{\frac{120.1}{239} \times 6.023 \times 10^{23} \times 5.232 \times \ln 2}{0.231 \times \frac{10^{13}}{1.602}} \\ &= 7.7 \times 10^{11}(\text{s}) = 2.44 \times 10^4(\text{a}). \end{aligned}$$

(马 骥)

2080 (Wis, 1977)

如图2.24. ^8Li 以半衰期 0.85 秒发生衰变, 衰变末态为 ^8Be 的 2.9MeV 能级. ^8Be 的 2.9MeV 激发态又以半衰期 10^{-22} 秒发生衰变放出两个 α 粒子. (a) 求 ^8Be 的 2.9MeV 激发态

的字称；(b)为什么 ${}^8\text{Be}$ 的2.9MeV激发态的半衰期比 ${}^8\text{Li}$ 基态的半衰期小很多。(c)相对于 ${}^8\text{Be}$ 基态的能量，所期望的 ${}^7\text{Li}$ 俘获中子的起点在哪里？为什么？

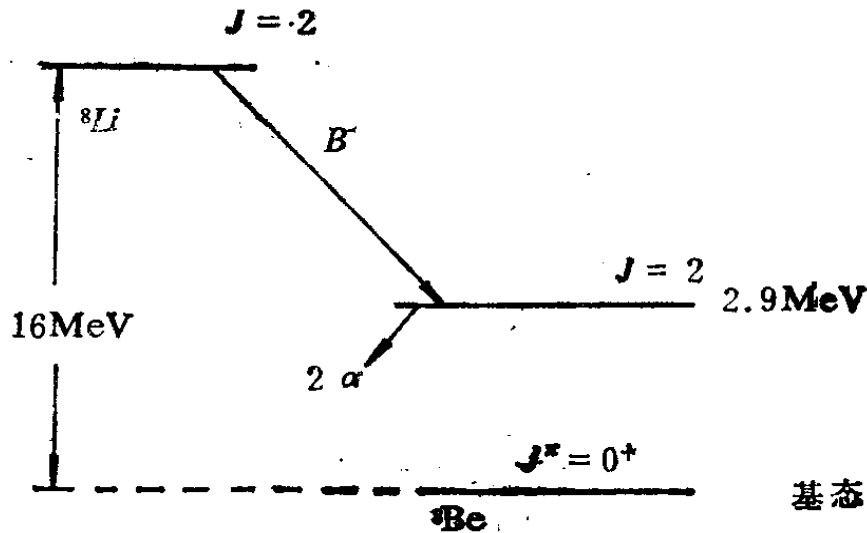


图2.24

解：(a) α 粒子的自旋宇称为 $J^\pi = 0^+$ 。

${}^8\text{Be}^* \rightarrow \alpha + \alpha$. 衰变末态为两个全同玻色子，故要求波函数交换对称，这就要求 α 粒子相对运动轨道量子数 l 为偶数，末态 2α 系统的宇称：

$$\pi_f = (+1)^2(-1)^l = +1.$$

由于 α 衰变是强相互作用过程，故宇称守恒， ${}^8\text{Be}$ 的2.9 MeV激发态的宇称为正。

(b) ${}^8\text{Li}$ 的基态 β 衰变是弱作用。 ${}^8\text{Be}$ 的2.9MeV激发态的 α 衰变是强作用过程，且库仑势垒很低，两种作用强度的差别导致了寿命上的巨大差别。

(c) ${}^7\text{Li}$ 俘获中子的起点能量高出 ${}^8\text{Be}$ 基态能量 $16\text{MeV} + S_n({}^8\text{Li})$ 。因为

$$\begin{aligned}
& M(^7\text{Li}) + m(u) - M(^6\text{Be}) \\
&= M(^7\text{Li}) + m(n) - M(^6\text{Li}) + M(^6\text{Li}) - M(^6\text{Be}) \\
&= S_n(^6\text{Li}) + 16\text{MeV}.
\end{aligned}$$

查得 $\Delta(^7\text{Li}) = 14.91\text{MeV}$, $\Delta(n) = 8.07\text{MeV}$, $\Delta(^6\text{Li}) = 20.95\text{MeV}$, 因此 $S_n(^6\text{Li}) \approx 2.0\text{MeV}$. 由于 ^6Li 是 β 稳定线近旁的核素, 其中子解离能 S_n 较小.

(范扬眉 钱剑明)

2081 (Col, 1976)

下述原子质量已经测定(原子质量单位为 amu):

$$(1) \begin{array}{ll} {}^7_3\text{Li} & 7.0182 \\ {}^7_4\text{Be} & 7.0192 \end{array}$$

$$(2) \begin{array}{ll} {}^{13}_6\text{C} & 13.0076 \\ {}^{13}_7\text{N} & 13.0100 \end{array}$$

$$(3) \begin{array}{ll} {}^{19}_9\text{F} & 19.0045 \end{array}$$

$$(4) \begin{array}{ll} {}^{33}_{15}\text{P} & 33.9983 \\ {}^{33}_{16}\text{S} & 33.9978 \end{array}$$

$$(5) \begin{array}{lll} {}^{35}_{16}\text{S} & 34.9791 & {}^{35}_{18}\text{Ar} & 34.9791 \\ {}^{35}_{17}\text{Cl} & 34.9789 & {}^{35}_{10}\text{Ne} & 19.0080 \end{array}$$

电子质量是 0.00055amu , 指出每对中哪个是不稳定的核, 就衰变形式和衰变时释放出的能量, 导出所用的稳定性条件.

解: 因为每对的原子序数都差 1, 故只能是通过 β 衰变或轨道电子俘获.

对 β^- 衰变, 用 m_x, m_y, m_e 代表母核, 子核电子的质量, 则 $E_s(\beta^-) = [m_x(Z, A) - m_y(Z+1, A) - m_e]c^2$. 用原子质

量表示之，并忽略电子在原子中结合能之差异，可得：

$$\begin{aligned}
 E_a(\beta^-) &= [M_x(Z, A) - Zm_e \\
 &\quad - m_r(Z+1, A) + (Z+1)m_e - m_e]c^2 \\
 &= [m_x(Z, A) - m_r(Z+1, A)]c^2,
 \end{aligned}$$

故 β^- 衰变只能发生在 $M_x > M_r$ 的情况。同理，对 β^+ 可得

$$E_a(\beta^+) = [M_x(Z, A) - M_r(Z-1, A) - 2m_e]c^2,$$

要求 $M_x - M_r > 2m_e$ ，轨道电子俘获是

$$E_a(i) = [M_x(Z, A) - M_r(Z-1, A)]c^2 - W_i,$$

要求 $M_x - M_r > W_i/c^2$ ， W_i 是 i 层电子的结合能。故(1)中 ${}^7\text{Be}$ 不稳定，且释放出的能量 $E = 0.0010 \text{ amu} < 2m_e$ ，不可能是 β^+ 衰变，而是 K 轨道俘获 $K_{\alpha\alpha}$ 。

(2) ${}^{13}_7\text{N}$ 不稳定，释放能 $E = 0.0024 \text{ amu} > 2m_e$ ，故可以发生 β^+ 衰变，或 $K_{\alpha\alpha}$ 。

(3) ${}^{18}_{10}\text{Ne}$ 不稳定，释放能 $E = 0.0035 \text{ amu} > 2m_e$ ，故可发生 β^+ 或 $K_{\alpha\alpha}$ 。

(4) ${}^{31}_{15}\text{P}$ 不稳定，释放能 $E = 0.0005 \text{ amu} > 0$ ，故可发生 β^- 衰变。

(5) ${}^{35}_{16}\text{S}$ 不稳定，释放能 $E = 0.0002 \text{ amu} > 0$ ，故 β^- 衰变可发生。

(管怀群)

2082 (Wis, 1971)

${}^{34}\text{Cl}$ β^+ 衰变为 ${}^{34}\text{S}$ 。绘出以动量 p 发射的正电子数目为 p 的函数的谱形，如果中性 ${}^{34}\text{Cl}$ 和 ${}^{34}\text{S}$ 原子的质量差为 $5.52 \text{ MeV}/c^2$ ，正电子的最大能量是多少？

解: $^{34}\text{Cl} \rightarrow ^{34}\text{S} + e^+ + \nu$.

根据量子力学的微扰论, 单位时间内一 β^+ 粒子发射到动量为 $p \sim p + dp$ 之间的几率为

$$I(p) dp = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \int \psi_f^* H \psi_i d\tau \right|^2 \frac{dn}{dE}$$

$$= \frac{2\pi g^2}{\hbar V^2} |M_{if}|^2 \frac{dn}{dE}.$$

其中 dn/dE 为单位能量间隔中的状态数. g 为耦合常数, M_{if} 为跃迁矩阵元, V 为归一化体积. 由于:

$$dn_{\beta^+} = \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} V, \quad dn_{\nu} = \frac{4\pi p_{\nu}^2 dp_{\nu}}{(2\pi\hbar)^3} V.$$

$$\frac{dn}{dE} = \frac{dn_{\beta^+} dn_{\nu}}{dE} = \frac{16\pi^2 p^2 p_{\nu}^2 dp dp_{\nu}}{(2\pi\hbar)^6 dE}$$

$$= \frac{p^2 p_{\nu}^2 dp dp_{\nu}}{4\pi^4 \hbar^6 dE}.$$

由于 $B_{\beta^+} + E_{\nu} = E_m$, 则有

$$dE = -dE_{\nu} \text{ 且 } m_{\nu} = 0,$$

所以 $E_{\nu} = cp_{\nu}$,

$$dE = -dE_{\nu} = -cdp_{\nu}, \quad p_{\nu} = (E_m - E)/c.$$

所以 $\frac{dn}{dE} = \frac{p^2 (E_m - E)^2 dp}{4\pi^4 \hbar^6 c^2} V^2.$

$$I(p) dp = \frac{g^2 |M_{if}|^2}{2\pi^3 c^3 \hbar^7} (E_{\max} - E)^2 p^2 dp.$$

即 $I(p)$ 与 $(E_{\max} - E)^2 P^2$ 成正比. 如图 2.25 所示.

$$E_{\max \beta^+} = [M(^{34}\text{Cl}) - M(^{34}\text{S}) - 2m_e]c^2$$

$$= 5.52\text{MeV} - 1.022\text{MeV} \approx 4.50\text{MeV}.$$

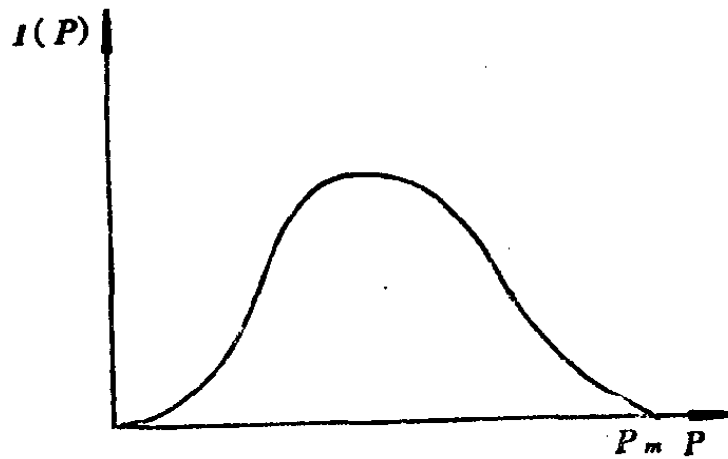


图2.25

(林 辰)

2083 (Pri, 1982)

^{161}Ho 和 ^{163}Ho 均可以通过电子俘获而衰变为Dy同位素。但是 $Q_{\beta 0}$ 的值分别是850keV和2.5keV。($Q_{\beta 0}$ 是生成核基态质量与原子电子质量和与初始时原子基态的原子质量之差)。对 ^{161}Ho $3p_{1/2}$ 电子的俘获率是3s电子俘获率的5%。计算在 ^{163}Ho 中 $3p_{1/2}$ 电子与3s电子的相对俘获率？如果 $Q_{\beta 0}$ 保持不变但是中微子由原来的零值量变成质量为50ev,那么 ^{161}Ho 及 ^{163}Ho 中 $3p_{1/2}$ 和3s电子的相对俘获率有何改变？

对Dy轨道电子结合能为：1s: 54keV; 2s: 9keV; $2p_{1/2}$ 8.6keV; 3s: 2.0keV; $3p_{1/2}$: 1.8keV.

解：对 ^{161}Ho 和 ^{163}Ho ，因为Z相同，所以轨道电子的波函数一样。对于它们的3s和 $3p_{1/2}$ 唯一的差别是相空间。轨道电子俘获，其跃迁矩阵元也是相同的。

$\lambda \approx A |M_{if}|^2 \rho(E)$. M_{if} 为跃迁矩阵元， $\rho(E)$ 为态密度，A为常数。对于电子俘获过程，核只放出一个中微子，故

为两体问题.

$\rho(E) \propto E^2 \approx (Q_{E.C} - W)^2$. W 为 s 或 p 态电子结合能.

题设:

$$\frac{\lambda(3p_{1/2})}{\lambda(3s)} = \frac{|M(3p_{1/2})|^2 \cdot (Q_{E.C} - W_p)^2}{|M(3s)|^2 (Q_{E.C} - W_s)^2} = 0.05.$$

所以
$$\frac{|M(3p_{1/2})|^2}{|M(3s)|^2} = 0.05 \times \left(\frac{850 - 2.0}{850 - 1.8} \right)^2 = 0.04998,$$

对于 ^{183}Ho , 相空间不同.

$$\begin{aligned} \frac{\lambda(3p_{1/2})}{\lambda(3s)} &= \frac{|M(3p_{1/2})|^2 (Q_{E.C} - B_p)^2}{|M(3s)|^2 (Q_{Ho} - B_s)^2} \\ &= 0.04998 \times \frac{(2.5 - 1.8)^2}{(2.5 - 2.0)^2} \\ &\approx 9.8\%. \end{aligned}$$

若假定 $m_p = 50\text{eV}$, 相空间因子 $P_p \propto \frac{dp_p}{dE_p}$ 改为:

$$\begin{aligned} p_p \frac{dp_p}{dE_p} &= (E_p^2 - m_p^2) \frac{E_p}{p_p} = E_p \sqrt{E_p^2 - m_p^2} \\ &= E_p^2 \left(1 - \frac{m_p^2}{2E_p^2} \right). \end{aligned}$$

由上面计算可知, 对 ^{161}Ho 和 ^{183}Ho . 各衰变道都有相对改变.

$$\lambda = \lambda_0 \left[1 - \frac{1}{2} \frac{m_p^2}{E_p^2} \right], \quad \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0} = \frac{1}{2} \frac{m_p^2}{E_p^2},$$

对 ^{161}Ho . $3s$ 态.

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{50^2}{848^2 \times 10^6} \\ &\approx 1.74 \times 10^{-9}, \end{aligned}$$

$$3p_{1/2}\text{态} \quad \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0} = \frac{1}{2} \times \frac{50^2}{848.2^2 \times 10^6}$$

$$\approx 1.74 \times 10^{-9},$$

$$\text{对 } ^{163}\text{Ho } 3s \text{ 态} \quad \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0} = \frac{1}{2} \times \frac{50^2}{0.5 \times 10^{-6}}$$

$$= 5 \times 10^{-3},$$

$$3p_{1,2}\text{态} \quad \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0} = \frac{1}{2} \times \frac{50^2}{0.7^2 \times 10^{-6}}$$

$$= 2.25 \times 10^{-3}. \quad (\text{何小东})$$

2084 (Pri, 1980)

低原子序数 Z 的元素能够发生 β^+ 衰变. 设 E_0 为正电子可能的最大动量, 假定 $E_0 \ll mc$ (m 为电子质量), Γ_β 为 β^+ 衰变速率. 与此共存的过程为 K 俘获. 原子核俘获一个 K 壳层电子发生同样的核跃迁并放出一个中微子. Γ_K 为这过程的速率. 试计算比值 Γ_K/Γ_β . (可认为 K 壳层电子与氢原子具有相同波函数, 并可忽略电子的结合能).

解: 根据量子力学微扰论, 单位时间发射一动量在 p 到 $p + dp$ 间 β 粒子的几率可表示为

$$I(p) dp = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \int \psi_f^* H \psi_i d\tau \right|^2 \frac{dn}{dE}, \quad (1)$$

其中: ψ_i 为初态波函数, 即为母体的波函数, ψ_f 为末态波函数, 由于末态有三个粒子, 故 ψ_f 为 $\psi_f = u_f \phi_e \phi_\nu$ (假设末态粒子间无相互作用或作用很弱). u_f 为衰变生成核的波函数, ϕ_e, ϕ_ν 分别为正电子和中微子的波函数. $\frac{dn}{dE}$ 为末态单

位能量间隔内的态数目, H 为 β 相互作用算符.

在费米的 β 衰变理论中, $H = g = \text{常数}$, 所以

$$I(p) dp = \frac{2\pi g^2}{\hbar} \left| \int \psi_i u_f^* \phi_\beta^* \phi_\nu d\tau \right|^2 \frac{dn}{dE}. \quad (2)$$

我们可以近似地把 β^+ 粒子和中微子看作自由粒子, 并以平面波来描写, 即:

$$\phi_\beta^* = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-ik_\beta \cdot r} \quad (3)$$

$$\phi_\nu^* = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-ik_\nu \cdot r} \quad (4)$$

其中 V 为归一化体积, k_β 和 k_ν 分别是 β 粒子和中微子的波矢量.

将(3), (4)代入(2), 并令:

$$M_{if} = \int \psi_i u_f^* e^{-ik_\beta + k_\nu \cdot r} d\tau$$

则
$$I(p) dp = \frac{2\pi g^2}{\hbar V^2} |M_{if}|^2 \frac{dn}{dE}. \quad (5)$$

终态为三粒子态, 故 $\frac{dn}{dE}$ 为生成核、 β^+ 粒子和中微子状态

数的乘积. 对 β^+ 衰变, 生成核状态数为1. 由统计理论知, β^+ 粒子在体积 V 中动量在 p 到 $p+dp$ 内的状态数为

$$dn_\beta = \frac{4\pi p^2 dp V}{(2\pi\hbar)^3}.$$

同理, 中微子的状态数为

$$dn_\nu = \frac{4\pi p_\nu^2 dp_\nu V}{(2\pi\hbar)^3}.$$

所以, 终态密度为

$$\frac{dn}{dE} = \frac{dn_e dn_\nu}{dE} = \frac{p^2 p_\nu^2 dp dp_\nu V}{4\pi^4 \hbar^6 dE} \quad (6)$$

β 粒子与中微子的能量之和等于 β 粒子的最大动能 E_m , 设 $E_m \approx E_0$, 所以

$$E + E_\nu \approx E_0,$$

由此得

$$dE = -dE_\nu.$$

设中微子静止质量为零, 则 $E_\nu = cp_\nu$, 所以 $dE_\nu = cd p_\nu$, $dE = -cd p_\nu$, 而

$$p_\nu = (E_0 - E)/c. \quad (7)$$

上述关系代入(6)得

$$\frac{dn}{dE} = \frac{p^2 (E_0 - E)^2 dp V}{4\pi^4 \hbar^6 c^3} \quad (8)$$

(8)代入(5)得

$$I(p) dp = \frac{g^2 |M_{if}|^2}{2\pi^3 c^3 \hbar^7} (E_0 - E)^2 p^2 dp.$$

β^+ 衰变速率 Γ_β 为

$$\lambda_{\beta^+} = \int_0^{p_0} I(p) dp = B_0 \int_0^{p_0} (E_0 - E)^2 p^2 dp,$$

$$B = \frac{g^2 |M_{if}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3}, \quad \text{又 } E_0 \ll mc^2, \quad E = \frac{p^2}{2m}.$$

$$\begin{aligned} \lambda_{\beta^+} &= B \int_0^{p_0} \frac{1}{(2m)^2} (p_0^4 + p^4 - 2p_0^2 p^2) p^2 dp \\ &= \frac{B_0}{4m^2} \left[\frac{p_0^7}{3} + \frac{p_0^7}{7} - 2\frac{p_0^7}{5} \right] \\ &= \frac{B p_0^7}{4m^2} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{7} - \frac{2}{5} \right] \approx 1.9 \times 10^{-2} \frac{B p_0^7}{m^2}. \end{aligned}$$

对于K俘获, 末态为二体, 放出单能中微子, 有:

$$\lambda_K = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \int \psi_f^* H \psi_i d\tau \right|^2 \frac{dn}{dE_f}$$

终态波函数为子核波函数 u_f^* 和中微子波函数 ϕ_f^* 的乘积。设 ϕ_f^* 为平面波，则

$$\phi_f^* = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

初态波函数近似为母核波函数和 K 壳层波函数的乘积，

$$\phi_K = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Zm_e e^2}{\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{Zm_e c^2}{\hbar^2} r}$$

代入求出：

$$\lambda_K = \frac{2m_e^2 g^2 |M_{if}|^2 \left(\frac{Ze^2}{c\hbar} \right)^3 E_{\nu}^2}{\pi^2 \hbar^7} = 4\pi m_e^2 B_0 \left(\frac{Ze^2}{\hbar^2} \right) E_{\nu}^2$$

忽略电子结合能， $E_{\nu} \approx E_0 + 2m_e c^2 \approx 2m_e c^2$ ，

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_K}{\lambda_{\beta+}} &= \frac{16m_e^2 c^4}{1.9 \times 10^{-2} p_0^7} \left(\frac{Ze}{\hbar} \right)^3 = \frac{16m_e^2 c^7 Z^3 \alpha^3}{1.9 \times 10^{-2} p_0^7} \\ &\approx 842 \frac{m_e c^7 Z^3 \alpha^2}{p_0^7}, \quad \alpha = \frac{e^2}{c\hbar} \end{aligned}$$

即 $\frac{\lambda_K}{\lambda_{\beta+}} \propto \frac{1}{p_0^7}$ ，随 p_0 减少很快增加。

(钱剑明)

2085 (Col, 1985)

同位素 ^3H 有一个半衰期为 12.5 年的 β 衰变道，一些富氢气体样品，包含 0.1 克氚，每小时放热为 21 卡。(a) 用此数值，计算 β 粒子平均发射能量；(b) 对 β 谱的什么特殊测量显示了有质量很轻的且是中性的附加放射物产生；(c) 给出一个评论性，定量地分析，说明对氚的 β 谱的仔细测量，如何确定电子中微子质量(或质量上限)。

解: (a) $N_A \cdot \frac{0.1}{3} \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot \Delta E = E, E = 21 \text{ cal.}$

$$\Delta E = \frac{21 \times 4.18 \times 10^{10} / 1.6}{\frac{0.1}{3} \times 6.023 \times 10^{23} \times \ln 2} \times 12.5 \times 360 \times 24$$

$$\approx 4.3 (\text{keV}).$$

(b) 如果认为能、动量仍同时守恒, 则因 β 谱是连续谱, 故有附加放射物, 因已测定末态产物中有 He^3 , 由电荷守恒知, 该附加放射物是中性的. 测量 β 谱中 $(E_\beta)_{\max}$ 接近 β 衰变的衰变能, 由能量守恒定律可知, β 衰变中附加的产物很轻.

(c) 泡利建议 β^- 衰变方式为



衰变的连续能谱如图 2.24. 可见 β^- 粒子存在一最大能量 E_m . 当 ν_e 动能趋于零时, β^- 能量就趋于 E_m . 于是由(1)式, 知:

$$M({}^Z_X) = M({}^{Z+1}_A Y) + \frac{E_m}{c^2} + m\nu_e,$$

故对题述衰变过程为

$$m\nu_e = M({}^3\text{H}) - M({}^3\text{He}) - E_m/c^2.$$

精确测量 E_m , 我们就能由上式算得 $m\nu_e$, 其值是很小的, 它给出了中微子质量的上限. (杨永安 王力军)

2086 (Ber, 1973)

(a) 简述放射性核发射出的 α 和 β 粒子的能谱, 注意它们的不同并定性地解释其原因; (b) 画出能测量这些谱之一的仪器简图, 给出基本参数的数量级估计并解释它们是如何选

定的。

解：(a) α 谱是单能谱，全能峰很突出。 β 谱是连续谱，这是由于 β 衰变时产生的中微子带走了一部分衰变能，使电子能量成为连续分布的。

(b) 图2.26是一个半导体 α 谱仪的简图。

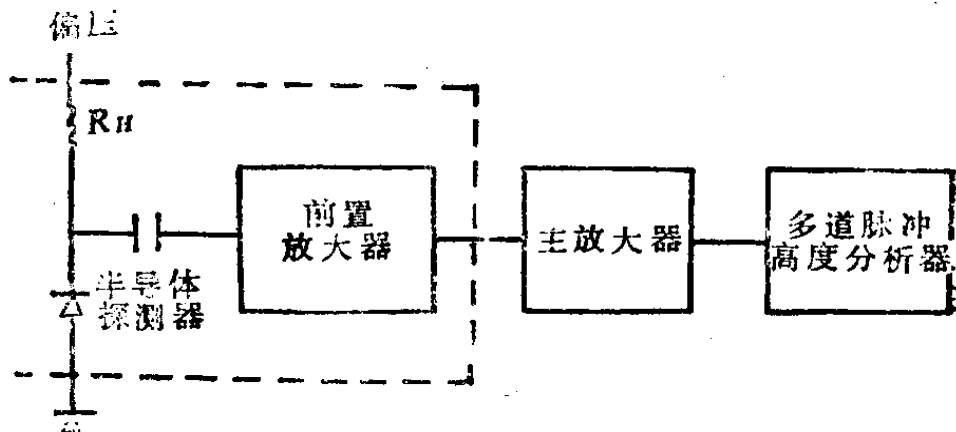


图2.26

α 衰变中的 α 粒子动能一般为几个 MeV，所以采用薄窗的金硅面垒型半导体探测器，能量分辨率在室温下约为 1%。由于 α 粒子能量较低，不需要很厚的灵敏层，偏压用几十伏到 100 伏左右即可。为较好的测量 α 能谱，多道脉冲分析器最好大于 1024 道，这时 α 能谱峰的半宽度约 10 道。

(胡 平)

2087 (Pri, 1981)

图 2.27 是 $^{42}_{21}\text{Sc}$ 和 $^{42}_{20}\text{Ca}$ 的能级图和它们之间的跃迁关系。

已知钪 42 ($^{42}_{21}\text{Sc}_{21}$) 的两个最低态自旋为 0^+ 和 7^+ 。它们分别经正电子衰变到钙 42 ($^{42}_{20}\text{Ca}_{22}$) 的第一个 0^+ 和 6^+ 态，正电子比较半衰期为 $(ft)_{0^+} = 3.2 \times 10^8$ 秒、 $(ft)_{7^+} = 1.6 \times 10^4$ 秒。没有探测到处于 1.84 MeV 的 0^+ 态的正电子衰变。

(a) ^{42}Sc 的两个态可以通过假设两个价核子处于 $(f_{7/2})^2$ 组态而简单地得到。确定 ^{42}Sc 的哪些态与这一组态一致，简要说明理由。假定电荷无关性成立，确定所有 $(f_{7/2})^2$ 态的同位旋量子数 $|T, T_z\rangle$ 。把两个 β 跃迁的性质分类并解释其理由。

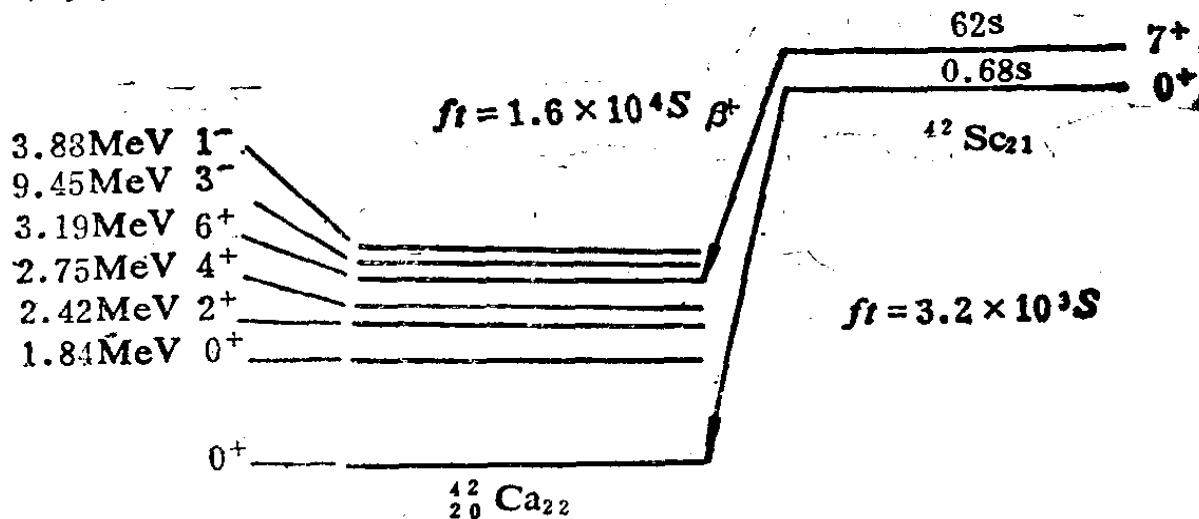


图2.27

(b) 用钪 42 的 $|J, M_J\rangle = |7, 7\rangle$ 和钙 42 的 $|6, 6\rangle$ 态的恰当的波函数，计算两正电子衰变率之比 $(ft)_{7^+}/(ft)_{0^+}$ 的理论值。

$$j = l + \frac{1}{2} \text{ 时, } \hat{S}_- |j, j\rangle = \frac{1}{(2j)^{1/2}} |j, j-1\rangle + \left(\frac{2j-1}{2j}\right)^{1/2} |j-1, j-1\rangle.$$

$$\hat{S}_z |j, j\rangle = \frac{1}{2} |j, j\rangle.$$

$$g_V = 1.4 \times 10^{-49} \text{ erg} \cdot \text{cm}^3,$$

$$g_A = 1.6 \times 10^{-49} \text{ erg} \cdot \text{cm}^3.$$

解: (a) $T_z = \frac{1}{2}(Z - N) = 0$, 由于两个核子的角动量

取值是7/2, 同位旋是1/2, 根据矢量合成法则, 核自旋可取0到7的值, 同位旋可取值0和1. 根据推广的泡利不相容原理的要求, 总波函数必须是反对称的, 这就有 $J+T = \text{奇数}$. 所以, 与组态 $(f_{7,2})^2$ 一致的态有 $J=0^+, 2^+, 4^+, 6^+$, $T=1$ 和 $J=1^+, 3^+, 5^+, 7^+$, $T=0$.

跃迁 $7^+ \rightarrow 6^+$ 是 Gamow-Teller 跃迁, 这类跃迁特征是 $\Delta J = 0$ 或 $1 (J_i = 0 \Rightarrow J_f = 0)$, $\Delta T = 0$ 或 1 , $\pi_i = \pi_f$.

跃迁 $0^+ \rightarrow 0^+$ 是 Fermi 跃迁, 这类跃迁特征是 $\Delta J = 0$, $\Delta T = 0$, $\pi_i = \pi_f$.

(b) β 跃迁几率 $\Gamma(\beta) \propto G_V^2 \langle M_F \rangle^2 + G_A^2 \langle M_{GT} \rangle^2$, 其中 $\langle M_F \rangle^2$ 和 $\langle M_{GT} \rangle^2$ 是对自旋平均了的弱作用矩阵元平方:

$$\begin{aligned} \langle M_F \rangle^2 &= \frac{1}{2J_i + 1} \sum_{M_i M_f} \langle J_f M_f T_f T_{zf} | 1 \\ &\quad \cdot \sum_{K=1}^A t_{\pm}(k) | J_i M_i T_i T_{zi} \rangle |^2 \\ &= \langle J_f M T_f T_{zf} | 1 \sum_{K=1}^A t_{\pm}(k) | J_i M T_i T_{zi} \rangle^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle M_{GT} \rangle^2 &= \frac{1}{2J_i + 1} \sum_{m M_i M_f} | \langle J_f M_f T_f T_{zf} | \\ &\quad \cdot \sum_{K=1}^A \sigma_m(k) t_{\pm}(k) | J_i M_i T_i T_{zi} \rangle |^2. \end{aligned}$$

σ_m , m 可取 $-1, 0, +1$.

$$\sigma_{+1} = \sigma_x + i\sigma_y, \quad \sigma_0 = \sigma_z, \quad \sigma_{-1} = \sigma_x - i\sigma_y.$$

$$ft = \frac{K}{G_V^2 \langle M_F \rangle^2 + G_A^2 \langle M_{GT} \rangle^2}.$$

K 是一个常数 $= 2\pi^3 \hbar^7 \ln 2 / m^5 c^4$. 故

$$\frac{ft(7^+ \rightarrow 6^+)}{ft(0^+ \rightarrow 0^+)} = \frac{G_V^2 \langle M_F \rangle_0^2}{G_A^2 \langle M_{GT} \rangle_7^{2+}}.$$

$$\begin{aligned} \langle M_F \rangle &= \langle JMTT_{zf} | 1 \sum_{K=1}^A t_{\pm}(k) | JMTT_{zi} \rangle \\ &= \langle JMTT_{zf} | T_{\pm} | JMTT_{zi} \rangle \\ &= \sqrt{T(T+1) - T_{iz}T_{fz}}. \end{aligned}$$

即各个核子的同位旋分量之和由总同位旋分量取代, 代入 $T=1, T_{zi}=0$. 则

$$\langle M_F \rangle^2 = 2.$$

$$\begin{aligned} \langle M_{GT} \rangle^2 &= \sum_m |\langle 6, 6, 1, -1 | \sigma_m(1) t_{\pm}(1) \\ &\quad + \sigma_m(2) t_{\pm}(2) | 7, 7, 1, 0 \rangle|^2, \end{aligned}$$

这里只考虑了满壳层外两个核子, 它们是完全相同的:

$$\begin{aligned} \langle M_{GT} \rangle^2 &= 4 \sum_m |\langle 6, 6, 1, -1 | \sigma_m(1) \\ &\quad t_{\pm}(1) | 7, 7, 1, 0 \rangle|^2. \end{aligned}$$

将波函数分解为核子波函数组合:

$$|7, 7\rangle = \left| \frac{7}{2}, \frac{7}{2}, \frac{7}{2}, \frac{7}{2} \right\rangle,$$

$$\begin{aligned} |7, 6\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| \frac{7}{2}, \frac{6}{2}, \frac{7}{2}, \frac{7}{2} \right\rangle \right. \\ &\quad \left. + \left| \frac{7}{2}, \frac{7}{2}, \frac{7}{2}, \frac{6}{2} \right\rangle \right), \end{aligned}$$

$$|6, 6\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| \frac{7}{2}, \frac{6}{2}, \frac{7}{2}, \frac{7}{2} \right\rangle \right.$$

$$- \left| \frac{7}{2}, \frac{7}{2}, \frac{7}{2}, \frac{6}{2} \right\rangle \Bigg|.$$

$$\begin{aligned} \text{故} \quad \langle M_{GT} \rangle^2 &= 4 \left| \left\langle \frac{7}{2}, \frac{6}{2}, \frac{7}{2}, \frac{7}{2}, 1, -1 \right| \right. \\ &\quad \cdot \frac{\sigma_-(1)t_+(1)}{2} \left. \left| \frac{7}{2}, \frac{7}{2}, \frac{7}{2}, \frac{7}{2}, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. 1, 0 \right\rangle \right|^2 = 2. \end{aligned}$$

$$\text{所以} \quad \frac{(ft)_{7^+}}{(ft)_{0^+}} = \frac{G_V^2}{G_A^2} \approx \left(\frac{1.4}{1.6} \right)^2 \approx 0.77. \quad (\text{任勇})$$

2088 (Pri, 1979)

未发现的 $^{57}_{29}\text{Cu}$ 同位素预期可通过正电子衰变到 $^{57}_{28}\text{Ni}$.
 (a) 用壳模型给出两核的基态和第一激发态的自旋和宇称;
 (b) 估计从 ^{57}Cu 基态到 ^{57}Ni 基态衰变时正电子的最大能量并估计其寿命的数量级;
 (c) 讨论什么叫允许型Fermi和Gamov-Teller β 跃迁, 并指出相应的自旋宇称选择定则. 对上述过程, 估计比率 Γ_F/Γ_{GT} , 你能预期从 ^{57}Cu 基态到 ^{57}Ni 第一激发态之间能发生可观测的 β^+ 衰变吗? 解释之.
 (d) ^{58}Ni 在自然界存在. 简单描述一个实验装置来研究 ^{57}Cu 的正电子衰变.

解: (a) ^{57}Cu 和 ^{57}Ni 为“镜核”, 能级结构应一样. 都是双满壳层以外有一个核子. ^{57}Cu 为质子, ^{57}Ni 为中子, 两核的基态和第一激发态能级特性一样.

对基态, 最后核子为 $2p_{3/2}$ 态, 故 $J^\pi = \frac{3}{2}^-$; 对第一激发

态, 核子为 $1f_{5/2}$ 态, $J^\pi = \frac{5}{2}^-$ ($E_1 = 0.70\text{MeV}$).

(b) ^{57}Cu 和 ^{57}Ni 因为是镜核, 两者的质量差为

$$\begin{aligned}\Delta E &= M(Z+1, A)c^2 - M(Z, A)c^2 \\ &= \frac{3e^2}{5R}(2Z+1) - (m_n - M_H)c^2 \\ &= \frac{3 \times 197 \times (2 \times 28 + 1)}{5 \times 1.2 \times 57^{1/3} \times 137} - 0.78 \\ &= 9.87 (\text{MeV}).\end{aligned}$$

即 ^{57}Cu 基态比 ^{57}Ni 基态高 9.87 MeV. ^{57}Cu 基态到 ^{57}Ni 基态 β^+ 衰变, β^+ 的最大能量为

$$E_{\beta^+} = \Delta E - 2m_e c^2 \approx 9.87 - 1.02 \approx 8.85 (\text{MeV}).$$

因是 $\left(\frac{3}{2}\right)^- \longrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^-$ 的 β^+ 衰变, $\Delta J = 0$, $\Delta\pi = +$, $\Delta T = 0$.

为超允许型衰变, 为简化计算, 令 $F(Z, E) = 1$,

$$\begin{aligned}\lambda_{\beta^+} &\approx \int_0^{E_0} I(p) dp = A \int_0^{E_0} (E_0 - E)^2 E^2 dE \\ &= AE_0^5 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{30} AE_0^5.\end{aligned}$$

$$A = \frac{g^2 |M|^2}{2\pi^3 c^6 \hbar^7}, \quad |M_{fi}|^2 \approx 1.$$

$$g \approx 1.17 \times 10^{-5} (c\hbar)^3 \cdot \text{GeV}^{-2}.$$

$$\begin{aligned}T_{1/2} &= \frac{1}{\lambda} \ln 2 = \frac{30 \ln 2}{AE_0^5} = \frac{60 \pi^3 \cdot (c\hbar)^6}{g^2 \cdot |M|^2 \cdot c} \\ &= \frac{60 \pi^3 \cdot (c\hbar)^6 \ln 2}{(1.17 \times 10^{-5})^2 (c\hbar)^6 \cdot 3 \times 10^{23} \times (8.85 \times 10^{-8})^5} \\ &= 0.114 (\text{s}).\end{aligned}$$

(c) 对于镜象核基态 $\frac{3}{2}^- \longrightarrow \frac{3}{2}^-$ 之间 β^+ 衰变, 因初末态

核结构相似，为超允许型跃迁，它有两种跃迁类型，即 Fermi 型和 Gamov-Teller 型，对 F 型的选择定则是 $\Delta J = 0$ ， $\Delta\pi = +1$ ，中微子和电子自旋反平行，对 G-T 型，选择定则为 $\Delta J = 0, \pm 1$ ， $\Delta\pi = +$ ，中微子和电子自旋平行。

对 $\frac{3}{2}^- \longrightarrow \frac{3}{2}^-$ 的 F 型跃迁。

$$|M_F|^2 = T(T+1) - T_{zi}T_{zf} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 1.$$

对 G-T 型 $\frac{3}{2}^- \longrightarrow \frac{3}{2}^-$ 跃迁。

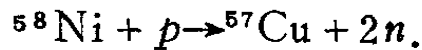
$$|M_{G-T}|^2 = \frac{J_f + 1}{J_i} = \frac{\frac{3}{2} + 1}{\frac{3}{2}} = \frac{5}{3}.$$

耦合常数有 $|g_{G-T}| \approx 1.24 |g_F|$ 。代入得到两种类型的跃迁几率之比为

$$\frac{\Gamma_F}{\Gamma_{G-T}} = \frac{g_F^2 |M_F|^2}{g_{G-T}^2 |M_{G-T}|^2} = \frac{1}{1.24^2 \times \frac{5}{3}} = 0.39.$$

从 ^{57}Cu 到 ^{57}Ni 第一激发态的跃迁。 $\Delta J = 1$ ， $\Delta\pi = +$ ，是一般的允许型跃迁，因初末态是从 $2p_{3/2}$ 态到 $1f_{5/2}$ 态跃迁，两核的结构相差较大，故其 $fT_{1/2}$ 要比超允许型要大 2—3 个数量级。加上相空间因子 $\left(\left(\frac{8.85 - 0.76}{8.85}\right)^5 = 0.64\right)$ 。其分支比很小，难以测量到。

(d) 用质子轰击 ^{58}Ni 靶，产生下列反应，



$$\Delta(n) \approx 8.071, \Delta({}^1\text{H}) = 7.289,$$

$$\Delta({}^{58}\text{Ni}) = -60.235, \Delta({}^{57}\text{Cu}) \approx -46.234.$$

$$\begin{aligned} Q &= \Delta({}^{58}\text{Ni}) + \Delta({}^1\text{H}) - \Delta({}^{57}\text{Cu}) - 2\Delta({}^1n) \\ &= -60.235 + 7.289 + 46.234 - 2 \times 8.071 \\ &= -22.854 \text{ (MeV)}. \end{aligned}$$

反应为吸热反应，需要较高能量的质子，可用 n 来监测 ${}^{57}\text{Cu}$ 产生，同时测量相对于 n 的延迟 β^+ 衰变来研究 ${}^{57}\text{Cu}$ 的 β^+ 衰变。
(王绍舜 黄晓舟)

2089 (Pri, 1980)

建议用同位素 ${}^7\text{Li}$ 丰度较高的大量锂样品来研究太阳中微子，测量半衰期为 53 天的 ${}^7\text{Be}$ 同位素的产生、分离和衰变过程，图 2.28 给出两个核的最低的能级， ${}^7\text{Be}$ 的基态比 ${}^7\text{Li}$ 的基态高 0.86 MeV.

(a) 讨论 ${}^7\text{Be}$ 基态的电子俘获，并估计分支比和相对衰变几率 (fT 之比).

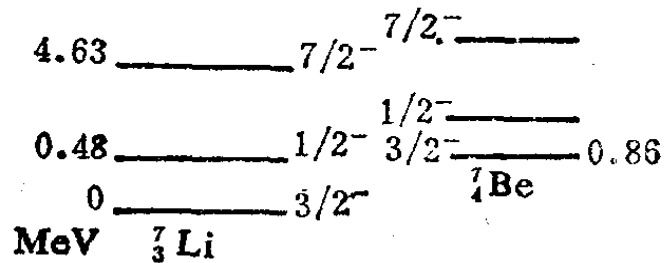


图 2.28

(b) 为标定探测器，用一个单能点中微子源，它放出 1.5 MeV 的中微子，强度为 $10^{17}/\text{s}$ ，把该源放在 1 吨重的锂球中心，估计在平衡时 ${}^7\text{Be}$ 的衰变率.

$$\begin{aligned} g_V &= 1.42 \times 10^{-49} \text{ erg} \cdot \text{cm}^3, \quad g_A = 1.60 \times 10^{-49} \text{ erg} \cdot \text{cm}^3, \\ \rho_{\text{Li}} &= 0.53 \text{ g/cm}^3. \end{aligned}$$

解: (a) 可能发生 $E.C$ 有两种情况:

$$\frac{3^-}{2} \longrightarrow \frac{3^-}{2} \quad \Delta J = 0, \Delta P = +.$$

有 F 和 $G-T$ 混合跃迁

$$\frac{3^-}{2} \longrightarrow \frac{1^-}{2} \quad \Delta J = 1, \Delta P = +.$$

为纯 $G-T$ 跃迁.

对于 $\frac{3^-}{2} \longrightarrow \frac{3^-}{2}$ 的 F 跃迁, 因是镜像核之间跃迁, 初、末态波函数相似, 有:

$$\langle M_F \rangle^2 = T(T+1) - T_{\text{初}} T_{\text{末}} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

对于 $\frac{3^-}{2} \longrightarrow \frac{3^-}{2}$ 的 $G-T$ 跃迁, 由单粒子模型有:

$$\langle M_{G-T} \rangle^2 = \frac{J_f + 1}{J_i} = \frac{\frac{3}{2} + 1}{\frac{3}{2}} = \frac{5}{3}.$$

对于 $\frac{3^-}{2} \longrightarrow \frac{1^-}{2}$ 的 $G-T$ 跃迁,

$$\langle M_{G-T} \rangle^2 = \frac{2J_f + 1}{J_i + 1} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}.$$

$$\lambda_K(M^2, W_\nu) = |M|^2 W_\nu^2,$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \frac{\lambda_K\left(\frac{3^-}{2} \rightarrow \frac{3^-}{2}\right)}{\lambda_K\left(\frac{3^-}{2} \rightarrow \frac{1^-}{2}\right)} &= \frac{\langle M_{G-T} \rangle_{3/2}^2 + \frac{g_V^2}{g_A^2} \langle M_F \rangle^2}{\langle M_{G-T} \rangle_{1/2}^2} \cdot \frac{W_{\nu_1}^2}{W_{\nu_2}^2} \\ &= \frac{(0.79 \times 3 + 5) \times 0.86^2}{4 \times (0.86 - 0.48)^2} = 9.43. \end{aligned}$$

即分支比: $B\left(\frac{3}{2}^- \rightarrow \frac{3}{2}^-\right) = 90.4\%$,

$$B\left(\frac{3}{2}^- \rightarrow \frac{1}{2}^-\right) = 9.6\%.$$

两者的 (fT) 之比为

$$\begin{aligned} \frac{(fT)_{\frac{3}{2}^-}}{(fT)_{\frac{1}{2}^-}} &= \frac{\langle M_{G-T} \rangle_{1/2}^2}{\langle M_{G-T} \rangle_{3/2} + \frac{g_v^2}{g_s^2} \langle M_T \rangle^2} \\ &= \frac{4}{3 \times 0.79 + 5} = 0.543. \end{aligned}$$

(b) 在中微子照射 ${}^7\text{Li}$ 时, 一方面 ${}^7\text{Li}$ 俘获中微子变成 ${}^7\text{Be}$. 另一方面 ${}^7\text{Be}$ 又衰变成 ${}^7\text{Li}$.

按题意, 单位时间由照射引起 ${}^7\text{Li}$ 变成 ${}^7\text{Be}$ 的数目 ΔN_1 ,

$$-d[\Delta N_1(r)] = \phi(r) \rho n \sigma a \cdot 2\pi r^2 dr / A, \quad \phi(r) = \frac{I_0}{4\pi r^2},$$

$$\begin{aligned} \Delta N_1 &= - \int \frac{I_0}{4\pi r^2} \rho n \sigma a \cdot 4\pi r^2 dr / A \\ &= -I_0 \rho n \sigma a R / A = -\lambda_1 N_1, \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = I_0 \sigma, \quad N_1 = R \rho n a / A.$$

$$I_0 = 10^{17}/s, \quad \sigma = \sigma(\nu, {}^7\text{Li}) = 10^{-43} \text{cm}^2,$$

$$\rho(\text{Li}) \approx 0.53 \text{g/cm}^3.$$

$$a = 0.925 \text{ 为 } {}^7\text{Li} \text{ 的丰度, } A = 7, \quad n_0 = 6.023 \times 10^{23},$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi} 10^6} = 77 \text{cm, 为 Li 球半径.}$$

$$\lambda_1 = I_0 \sigma = 10^{17} \times 10^{-43} \approx 10^{-26} (\text{s}^{-1}),$$

$$N_1(0) = R \rho n_0 a / A$$

$$\approx \frac{77 \times 0.53 \times 6.022 \times 10^{23} \times 0.925}{7}$$

$$= 3.2 \times 10^{24},$$

$$\Delta N_1 (^7\text{Li}) = -\lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2,$$

$$\Delta N_2 (^7\text{Be}) = -\lambda_2 N_2 + \lambda_1 N_1.$$

平衡时, $\Delta N_1 = \Delta N_2$

$$\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2, \quad N_1 + N_2 = N_1(0),$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{N_2}{N_1}, \quad \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1} = \frac{N_1 + N_2}{N_1} = \frac{N_1(0)}{N_1},$$

$$N_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} N_1(0), \quad A_2 = \lambda_2 N_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} N_1(0),$$

$$\lambda_2 = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{53 \times 24 \times 3600} = 1.51 \times 10^{-7} (\text{s}^{-1}).$$

$$\lambda_2 \gg \lambda_1,$$

$$A_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_2 N_1(0)}{\lambda_1 + \lambda_2} = \lambda_1 N_1(0) = 10^{-26} \times 3.2 \times 10^{24} \\ = 3.2 \times 10^{-2} (\text{s}^{-1}).$$

即100秒有 3.2 个 ^7Be 衰变.

(黄晓舟)

2090 (Pri, 1977)

核子-核子弱相互作用.

据信核子 (N) 间存在直接的弱相互作用, 而宇称在弱作用中是不守恒的. 研究 $N-N$ 弱作用的途径之一是 α 衰变, 例如 ^{20}Ne 的 3^+ , $T=1$ 和 $3^-, T=0$ 态衰变的典型例子 (图 2.29).

试解释测量这些态间弱作用矩阵元 $\langle 3^+ | H_{\text{弱}} | 3^- \rangle$ 的一个实验的原理.

(a) $N-N$ 弱作用包含同位旋标量、同位旋矢量、同位旋张量(即秩为 0, 1, 2)成分。哪一成分对矩阵元 $\langle 3^+ | H_{弱} | 3^- \rangle$ 有贡献?

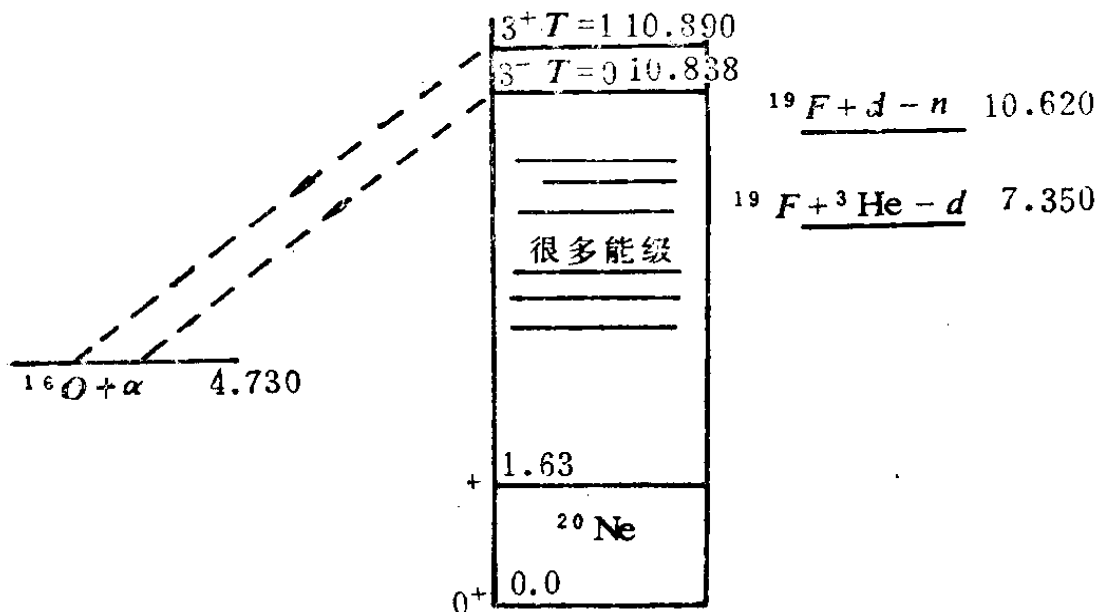


图 2.29

(b) 给出 α 衰变中自旋和同位旋的选择定则, 特别要说明两个 ^{20}Ne 态中的哪一个会衰变到 $^{16}\text{O} + \alpha$ 的基态, 如果 $N-N$ 相互作用中宇称守恒的话。

(c) 设宇称破坏的矩阵元 $\langle 3^+ | H_{弱} | 3^- \rangle$ 为 1eV, 估计宇称禁戒跃迁的 α 宽度 Γ_c , 用宇称允许的跃迁宽度 Γ_a 来表示, 假定 Γ_a 与 3^+ , 3^- 态间的间隔相比之下是很小的。

(d) 宇称允许跃迁的 α 宽度为 $\Gamma_a = 45\text{keV}$ 。与间隔能量相比已不算小了。预计这个态的有限宽度会影响 (c) 部分的答案吗? 试讨论之。

(e) 直接反应 $^{19}\text{F} (^3\text{He}, d) ^{20}\text{Ne}^*$ 的产物中, Ne^* 绝大部分处于同一个激发态, 你认为是哪一个激发态呢? 为什么?

(f) 在约11.23MeV处存在一个 $1^+/1^-$ 宇称二重态, 两个态都有 $T=1$. (i) 在这种情形下, 哪个态对 α 衰变来说是宇称禁戒的? (ii) 同(a)的问题一样, 弱 $N-N$ 作用的哪一个同位旋成分对混合矩阵元有贡献? (注意 ^{20}Ne 是自轭的); 测量宇称破坏的 α 宽度可以决定哪个成分.

解: (a) 由于 3^+ 态的 $T=1$, 3^- 态 $T=0$, 因此, 只有 $\Delta T=1$ 即同位旋矢量对 $\langle 3^+ | H_{\text{弱}} | 3^- \rangle$ 有贡献.

(b) α 衰变属强相互作用, 同位旋守恒, 因此, $\Delta T=0$, 由于 α 粒子同位旋为0, 则有子核和母核的同位旋应相等. α 衰变前后总角动量不变, 因此子核的自旋与 α 粒子绕核的角动量的矢量和应为母核的自旋. 由于 ^{16}O 的 $T=0$, 只有 3^- , $T=0$ 才能衰变到 $^{16}\text{O} + \alpha$. 由于 ^{16}O 和 α 的自旋均为0, 末态的轨道角动量为 $l=3$, 宇称为 $(-1)^3 = (-1)$, 和初态的宇称相同, 故宇称也是允许的.

(c) 根据费米的“黄金规则”, 一级跃迁几率为

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{ji}|^2 \rho(E_f).$$

V_{ji} 为跃迁矩阵元, $\rho(E_f)$ 为末态密态. 因此, 宇称允许跃迁(3^- , $T=0$ 到 $^{16}\text{O} + \alpha$)宽度为

$$\Gamma_\alpha = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{3^- \rightarrow ^{16}\text{O}}|^2 \rho(E_f).$$

宇称破坏跃迁(3^+ , $T=1$ 到 $^{16}\text{O} + \alpha$)是一个二级过程,

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \sum_{n \neq i} V_{jn} \frac{1}{E_i - E_n + i\varepsilon} V_{ni} \right|^2 \rho(E_f),$$

$2\varepsilon =$ 中间态宽度,

其中求和遍历一切中间态, 在我们考虑的情况下, 中间态只有 3^- , $T=0$, 所以

$$\begin{aligned} \Gamma'_a &= \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle V_{3^+ \rightarrow 3^-} | \langle 3^+ | H_w | 3^- \rangle \right|^2 \frac{1}{(E_f - E_a)^2 + e^2} \\ &= \Gamma_a \frac{|\langle 3^+ | H_w | 3^- \rangle|^2}{(\Delta E)^2 + (\Gamma_a/2)^2} \end{aligned}$$

式中 ΔE 为 $3^+, 3^-$ 能级间隔, Γ_a 为宇称允许跃迁宽度. 在 $\Gamma_a \ll \Delta E$ 情况下, 当 $\langle 3^+ | H_w | 3^- \rangle = |eV$.

$$\begin{aligned} \Gamma'_a &= \frac{|\langle 3^+ | H_w | 3^- \rangle|^2}{(\Delta E)^2} \Gamma_a = \frac{1}{52^2 \times 10^6} \Gamma_a \\ &\approx 3.7 \times 10^{-10} \Gamma_a. \end{aligned}$$

(d) 当 $\Gamma_a = 45 \text{KeV}$ 时, $\frac{\Gamma_a^2}{4}$ 不可忽略, 这时有:

$$\Gamma'_a = \frac{10^{-6}}{52^2 + \frac{45^2}{4}} \Gamma_a \approx 3.1 \times 10^{-10} \Gamma_a \approx 1.4 \times 10^{-5} (\text{eV}).$$

(e) 考虑 $^{19}\text{F} (^3\text{He}, d)^{20}\text{Ne}$ 反应. 设初态 ^{19}F 的自旋为 J_A , ^3He 的自旋为 J_a , d 的自旋为 J_b , ^{20}Ne 的自旋为 J_B , ^3He 的轨道角动量为 l_a , d 的角动量为 l_b , 被俘获的质子的自旋为 J_p , 轨道角动量为 l_p ,

$$J_A + J_a + l_a = J_B + J_b + l_b,$$

因为 $J_a = J_p + l_p$, $l_a = l_p + l_b$, $J_A + J_p + l_p = J_B$.

$$J_A = \frac{1}{2}, J_p = \frac{1}{2}, J_B = 3, l_p = 2, 3, 4.$$

宇称守恒要求: $P(^{19}\text{F})P(p)(-1)^{l_p} = P(^{20}\text{Ne}^*),$

$$P(^{20}\text{Ne}) = (-1)^{l_p}.$$

l_p 的实验值从角分布可得到: $l_p = 2$. $P(^{20}\text{He}^*) = +$, 则 Ne^* 的 3^+ 能级被激发, 而 3^- 能级不能被激发.

(f), (i) 在这种情况下, 1^+ 态对 α 衰变是禁戒的(宇称禁戒). 在 1^- 态的 α 衰变中, $l_f + J_\alpha + J_{16o} = 1$ $F_f = P(\alpha)P(^{16}\text{O})(-1)^{l_f} = -1$. 故 1^- 态的 α 衰变是允许的.

(ii) 由于 ^{20}Ne 是自旋核, 即 $T_3 = 0$, 因为有:

$$\langle 1, 0 | 1, 0; 1, 0 \rangle = 0.$$

只有 $T = 0, 2$ 的成份有贡献, 在弱作用中, 有:

$$|\Delta T| \leq 1,$$

所以, 只有 $\Delta T = 0$ 的项对实验结果有贡献. (任 勇)

2091 (Pri, 1977)

考虑下面的能级结构: 基态和激发态都是同位旋三重(且自旋宇称都是 0^+). ^{42}Sc 的基态通过 β 衰变到 ^{42}Ca 的基态, 最大电子动能 5.4MeV (图 2.30 II) .

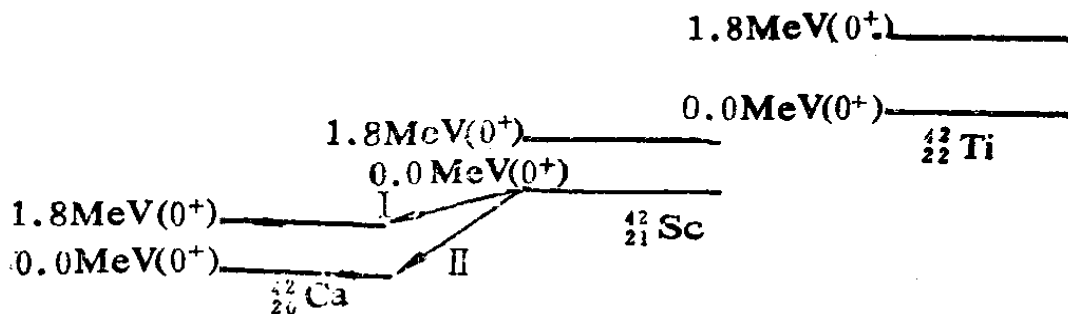


图2.30

(a) 仅从相空间考虑, 计算衰变道 I 和 II 的衰变几率之比.

(b) 设核态是(事实上也是如此)纯的同位旋本征态, 为什么 Fermi 矩阵元是一个对衰变 I 禁戒的阶跃算符.

(c) 考虑由电磁相互作用产生的同位旋混合态, 一般地讲:

$$H_{EM} = H_0 + H_1 + H_2,$$

下标表示了每一项的同位旋张量秩，写出分支比 $\frac{\Gamma_I}{\Gamma_{II}}$ ，用混

合态的 H_{EM} 的每一部分的约化矩阵元表示。

(d) 用 (a) 和 (c) 的结果，忽略 H_2 部分且给出 $\Gamma_I/\Gamma_{II} = 6 \times 10^{-5}$ ，计算混合 ^{42}Ca 的基态和激发态的约化矩阵元。

解：(a) 只考虑相空间时，对 β 衰变， $E_0 \gg m_e c^2$ ，这时 $\lambda \approx E_0^5$ 。

$$\frac{\Gamma_I}{\Gamma_{II}} = \frac{(5.4 - 1.8)^5}{5.4^5} \approx 0.13.$$

(b) 对于同一同位旋多重态之间的 Fermi 跃迁，由于初末态是同一同位旋多重态，结构相似。跃迁几率大，一般称超允许型 β 衰变。对 $0^+ \rightarrow 0^+$ 之间 ($T=1$) 只有 Fermi 型衰变，且有：

$$\begin{aligned} \langle M_T \rangle^2 &= \langle \alpha, T_f, T_{3f} | \sum_{K=1}^A t_{\pm}(k) | \alpha', T_i, T_{3i} \rangle^2 \\ &= (\delta_{\alpha\alpha'}, \delta_{T_i T_f} \sqrt{T(T+1) - T_{3i} T_{3f}})^2 \\ &= \begin{cases} T(T+1) - T_{3i} T_{3f} & \alpha = \alpha', T_i = T_f, \\ 0, & \end{cases} \end{aligned}$$

其它情况(略去 Fermi 矩阵元高阶修正)。

这里 α 为核态除同位旋以外的其它量子数。由上式可知： Π 为同一同位旋多重态之间的跃迁，是超允许型跃迁。 I 是不同同位旋多重态成员之间的跃迁。故是 Fermi 跃迁禁戒的。

(c) 可用微扰来处理。设 ^{42}Ca 的基态和激发态分别用 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$ 表示，由于 H_{EM} 作用，混合后的两态为 $|1\rangle'$ 和 $|2\rangle'$ ；且 M_{EM} 造成的混合是很小量。

$H_0|1\rangle = E_1|1\rangle$, E_1 和 E_2 为两态的能量.

$H_0|2\rangle = E_2|2\rangle$, ($E_1 \approx E_0$, $E_2 - E_0 = 1.8\text{MeV}$),

$H = H_0 + H_{EM}$.

题设 $H_{EM} = H_0 + H_1 + H_2$ 相当于同位旋秩位数, 用 $P_{0,0}$, $P_{1,0}$, $P_{2,0}$ 代替, 且定义

$$\langle J_1 m_1 | P_{\mu r} | J_2, m_2 \rangle = C_{\mu r}^{J_1 m_1, J_2 m_2} \langle J_1 | P_{\mu} | J_2 \rangle.$$

$$H_{EM} = P_{0,0} + P_{1,0} + P_{2,0}.$$

$$\begin{aligned} \langle 1 | E_{EM} | 2 \rangle &= \langle \alpha, 1, -1 | (P_{0,0} + P_{1,0} \\ &\quad + P_{2,0}) | \alpha', 1, -1 \rangle \\ &= (\langle \alpha, 1 || P_0 || \alpha', 1 \rangle - \sqrt{\frac{1}{2}} \\ &\quad \langle \alpha, 1 || P_1 || \alpha', 1 \rangle + \sqrt{\frac{1}{10}} \\ &\quad \langle \alpha, 1 || P_2 || \alpha', 1 \rangle). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle 1 | H_{EM} | 1 \rangle &= \langle 2 | H_{EM} | 2 \rangle = \langle \alpha, 1, -1 | \\ &\quad (P_{0,0} + P_{1,0} + P_{2,0}) | \alpha, 1, -1 \rangle \\ &= \langle \alpha, 1 || P_0 || \alpha, 1 \rangle - \sqrt{\frac{1}{2}} \\ &\quad \langle \alpha, 1 || P_1 || \alpha, 1 \rangle + \sqrt{\frac{1}{10}} \\ &\quad \langle \alpha, 1 || P_2 || \alpha, 1 \rangle. \end{aligned}$$

α 和 α' 分别代表 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$ 除同位旋以外的其它量子数,

$\langle \alpha, 1 || P || \alpha, 1 \rangle$ 代表约化矩阵元部分, 代入上式结果有:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma_I}{\Gamma_{II}} &= \frac{E_1^5 |M_1|^2}{E_2^5 |M_2|^2} = \frac{(5.40 - 1.8 - \langle 2 | H_{EM} | 2 \rangle)^5}{(5.4 - \langle 1 | H_{EM} | 1 \rangle)^5} \\ &\quad \cdot \frac{\langle 1 | H_{EM} | 2 \rangle^2}{(E_2 - E_1)^2}. \end{aligned}$$

令 $\langle 1 | H_{B, M} | 1 \rangle \ll E_1, E_2$, 即能级修正可忽略,

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma_I}{\Gamma_{II}} &= \frac{E_{10}^5}{E_{20}^5 (E_2 - E_1)^2} |\langle 1 | E_M | 2 \rangle|^2 \\ &= \frac{(5.4 - 1.8)^5}{5.4^5 \times 1.8^2} (\langle 1 | P_0 | 2 \rangle - \sqrt{\frac{1}{2}} \\ &\quad \langle 1 | P_1 | 2 \rangle + \sqrt{\frac{1}{10}} \langle 1 | P_2 | 2 \rangle)^2. \end{aligned}$$

略去 H_2 的贡献, 设 $\langle 1 | P_0 | 2 \rangle = 0$. 即同位旋标量 H 量不会引起两同位旋态之间的混合.

$$\frac{\Gamma_I}{\Gamma_{II}} = \frac{E_{10}^5}{E_{20}^5 \cdot (E_2 - E_1)} |\langle \alpha, 1 | P_1 | \alpha', 1 \rangle|^2.$$

(d) 在上述简化情况下:

$$\frac{\Gamma_I}{\Gamma_{II}} = \frac{(5.4 - 1.8)^5}{5.4^5 \times 1.8} |\langle \alpha, 1 | P_1 | \alpha', 1 \rangle|^2 = 6 \times 10^{-5}.$$

$$|\langle \alpha, 1 | P_1 | \alpha^1, 1 \rangle|^2 = 24.6 \times 6 \times 10^{-5} (\text{MeV}),$$

$$|\langle \alpha, 1 | P_1 | \alpha', 1 \rangle|^2 \approx 0.00147 (\text{MeV}),$$

$$|\langle \alpha, 1 | P_1 | \alpha', 1 \rangle| \approx 38 (\text{keV}). \quad (\text{任 勇})$$

2092 (Pri, 1980)

与原子光谱学不同, 电偶极E1跃迁在头几个核态间不常见到. (a) 对于轻核, 根据壳层模型给出支持这一陈述的论证, 指出可能出现例外的情况. (b) 给出 ${}^{17}\text{F}_8$ 的能量最低的电偶极跃迁辐射寿命的一个数量级估计, 说明所假设的参数. (c) 证明对于自轭核 ($N=Z$), 在具有相同的同位旋 T 的两个态间观察不到电偶极跃迁.

(下列 Clebsh—Gordan 系数也许有用;

[记号 $\langle J_1 J_2 M_1 M_2 | J_{\text{总}} M_{\text{总}} \rangle$], $\langle J 1 0 0 | J 0 \rangle = 0$].

解: (a) 从壳模型给出的单粒子能级可以看出. 处于同一壳层内的能级, 一般具有相同的宇称, 特别是前几个壳层, 如 $1s$ 壳层, $1p$ 壳层, $1d, 2s$ 壳层等, 对轻核, γ 跃迁主要是单个核子不同能级之间的跃迁, 对相同壳层之内不同能级之间的核子跃迁, 宇称不变. 电偶极跃迁的选择定则为 $\Delta P = -1$, $\Delta J = 0$ 或 1 . 宇称不改变不可能是电偶极跃迁, 但也有例外. 当激发态与基态处于不同的壳层, 这时跃迁宇称改变. 如 $1p_{3/2} \rightarrow 1s_{1/2}$ 之间的跃迁. $\Delta J = 1$, $\Delta p = -1$, 即为电偶极跃迁.

(b) 利用单粒子模型 ^{17}F 的最低的电偶级跃迁为 $2s_{1/2} \rightarrow 1p_{1/2}$ 之间的跃迁. 设 $E_\gamma \approx 5\text{MeV}$. 利用偶极跃迁:

$$\lambda(E_\gamma) \approx 1.5 \times 10^{14} A^{2/3} E_\gamma^3 = 1.5 \times 10^{14} \times 17^{2/3} \times 5^3 \\ \approx 3.2 \times 10^{17} \text{s}^{-1},$$

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \approx 3.1 \times 10^{-16} \text{s}.$$

(c) 在轻核或中等核中. 同位旋是好量子数, 一个核态可写成 $|J, m, T, T_z\rangle$, J, m 与角动量有关. T, T_z 为同位旋部分. 这时从两个不同态之间的电多极跃迁算符可写成:

$$O_\pm(L, E) = \sum_{K=1}^L \left[\frac{1}{2} (1 + \tau_z(K)) e_\pm \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (1 - \tau_z(K)) e_\mp \right] r^L(K) Y_{L,M}(r(K)) \\ = \sum_{K=1}^L S(L, M, M) \cdot 1 \\ + \sum_{K=1}^L V(L, M, K) \tau_z(K),$$

$$S(L, M, K) = \frac{1}{2} (e_p + e_n) r^L(K) Y_{LM}(r(k)),$$

$$V(L, M, K) = \frac{1}{2} (e_p - e_n) r^L(K) Y_{Lm}(r(k)),$$

第一项是与同位旋标量有关项，第二项是同位旋矢量有关项，在 J, T, T_z 到 J', T', T'_z 之间的电跃迁可写成：

$$\begin{aligned} & B_E(L; J_i, T_i, T_z \longrightarrow J_f, T_f, T_z) \\ &= \langle J_f, T_f, T_z | O_E(L) | T_i, T_i, T_z \rangle^2 / (2J_i + 1) \\ &= \frac{1}{(2J_i + 1)(2T_f + 1)} [\delta_{T_i, T_f} \langle J_f, T_f | \\ & \sum_{K=1}^A S(L, K) \cdot 1 | J_i, T_i \rangle + \langle T_i, T_z, 1, 0 | T_f, T_z \rangle \\ & \langle J_f, T_f | \sum_{K=1}^A V(L, K) \tau(K | J_i, T_i) \rangle]^2. \end{aligned}$$

τ_z 为同位旋矩阵的 z 分量， $\tau_z \phi_n = -\phi_n$ ， $\tau_z \phi_p = +\phi_p$ 。从上式可看到，电跃迁两态之间的同位旋选择定则为 $\Delta T \leq 1$ ，当 $\Delta T = 0$ 时 $\delta_{T_i, T_f} \neq 0$ ，有同位旋标量部分； $\Delta T = 1$ ，标量部分为零。

对于电偶极跃迁：

$$\begin{aligned} \sum_{K=1}^A S(1, K) \cdot 1 &= \sum_{K=1}^A \frac{1}{2} (e_p + e_n) r(K) Y_{LM}(r(K)) \\ &= \frac{1}{2} (e_p + e_n) \sum_{K=1}^A r(K) Y_{L,M}(r(K)). \end{aligned}$$

r_i 为核子相对于核动量中心的坐标，对于球形或轴对称的核， $\sum_{K=1}^A r Y_{L,M}(r(K))$ 相当于核的重心的偏离应为零，故电偶极跃迁中，同位旋标量项无贡献。同位旋矢量项，当

$T_1 = T_2 = T$ 时,

$$\langle T_1, T_2, 1, 0 | T_1, T_2 \rangle = \frac{T_2}{\sqrt{T(T+1)}}.$$

对 $Z = N$ 的核 $\Delta T = 0$ 的两能级跃迁, $T_2 = 0$, 有

$$\langle T_1, T_2, 1, 0 | T_1, T_2 \rangle = 0.$$

同位旋标量和矢量的贡献均为零, 即 $T_1 = T_2$ 的自轭核两态之间不存在电偶极跃迁. (任勇)

2093 (Pri, 1980)

(a) 解释为什么在 E_2 电跃迁中, 最低的多极跃迁占主导地位? 估计 ^{16}O 的几个跃迁 (图 2.31) 之比: $E_1 : E_2 : E_3 : E_4 : E_5$.

(b) 估计 7.1 MeV

态的寿命, 并说明你所作的近似,

(c) 给出 6.0 MeV 态的可能衰变方式.

解: (a) 在壳模型

理论中, γ 跃迁只是少数核子不同能级之间的跃迁, 按单质子模型,

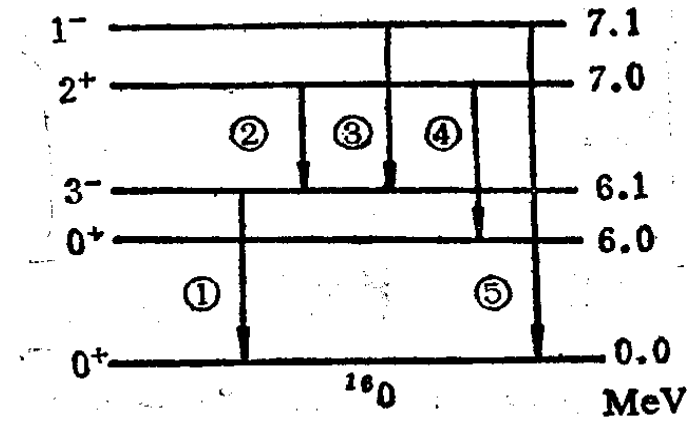


图 2.31

γ 跃迁是由核内一个质子状态改变所决定的. 对 L 级跃迁, 跃迁几率上限为

$$\lambda_{\gamma}(L) = \frac{4.4(L+1)}{L[(2L+1)!!]^2} \left(\frac{3}{L+3}\right)^2 \left(\frac{E_{\gamma}}{197}\right)^{2L+1} \cdot (1.4 \times A^{1/3})^{2L} \times 10^{21}.$$

E_{γ} 的单位为 MeV. A 为原子量, λ_{γ} 的单位为 s^{-1} . 对 1 MeV 的 E_{γ} ,

$$\lambda_E(L+1)/\lambda_E(L) = (kR)^2.$$

k 为光子的以 \hbar 为单位的动量, R 为核半径, 代入上式有

$$\lambda_E(L+1)/\lambda_E(L) \approx 2.5 \times 10^{-3}.$$

即 L 增加 1, 相应的几率小 10^{-3} 倍, 故只有最低级的跃迁起主导作用.

对 O^{16} 的几个跃迁 E_1 为电八极跃迁, E_2 为电偶极跃迁, E_3 为电四极跃迁, E_4 为电四极跃迁, E_5 为电偶极跃迁, 按上面单粒子跃迁公式:

$$\begin{aligned} \lambda_{E_1}:\lambda_{E_2}:\lambda_{E_3}:\lambda_{E_4}:\lambda_{E_5} &= \frac{4}{3(7! !)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{6.1}{197}\right)^7 \cdot (1.4A^{1/3})^9 \\ &:\frac{2}{(3! !)^2} \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{0.9}{197}\right)^3 (1.4A^{1/3})^2 \\ &:\frac{3}{2(5! !)^2} \left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(\frac{1}{197}\right)^5 (1.4 \times A^{1/3})^6 \\ &:\frac{3}{2(5! !)^2} \left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(\frac{1}{197}\right)^5 (1.4A^{1/3})^4 \\ &:\frac{2}{(3! !)^2} \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{7.1}{197}\right)^3 (1.4A^{1/3})^2 \\ &= 1.28 \times 10^{-13} : 1.1 \times 10^{-8} : 1.0 \times 10^{-13} \\ &: 1.0 \times 10^{-13} : 5.85 \times 10^{-6} \\ &= 2.19 \times 10^{-8} : 1.9 \times 10^{-3} : 1.7 \times 10^{-3} \\ &: 1.7 \times 10^{-8} : 1, \end{aligned}$$

即 E_5 跃迁几率最大, E_2 次之, E_3, E_4 和 E_1 都很小.

(b) 估计 7.1MeV 的能级寿命, 它主要由 E_5 来决定:

$$\lambda_{E_1}(7.1\text{MeV}) = \frac{4.4 \times 2}{[3! !]^2} \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{7.1}{197}\right)^3 (1.4A^{1/3})^2 \times 10^{21}$$

$$= 3.2 \times 10^{17} (\text{s}^{-1}).$$

$$T_{1/2}(7.1\text{MeV}) = \frac{\ln 2}{\lambda_{E_1}} = 2.2 \times 10^{-18} (\text{s}).$$

这由忽略了7.1MeV能级到其它能级跃迁，从上面(a)的计算，甚至略去7.1(1⁻)→6.0(0⁺)的E₁跃迁也是合理的，因为： $\lambda_{E_1}(7.1 \rightarrow 0) : \lambda_{E_1}(7.1 \rightarrow 6.0) = 7.1^3 : 1.1^3 \approx 270$ ，同时，单粒子 γ 跃迁模型还假设核是球对称的，初、末态波函数在核内为常数，在核外为零，这些对¹⁶O核是合理的。

(c) 对¹⁶O的6.0MeV到基态为0⁺→0⁺跃迁， r 跃迁是禁戒的，但可以通过内转换跃迁到基态。 (吴为民)

2094 (Pri, 1979)

γ 射线对¹⁴²Nd的反应总截面 σ ，(排除电子对产生)如图2.32所示。

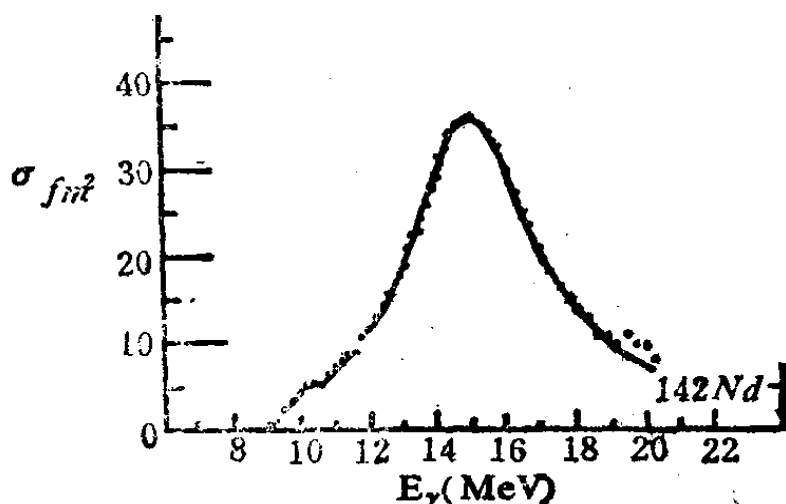


图 2.32

(a) 哪一级电或磁多极子在总截面中占主导作用？为什么？

(b) 把核看成是简单的类似于两种核子的流体(质子及中子), 定性地解释图中的共振峰.

(c) 用简单的谐振子位势模型, 估计共振能量和核子 A 的关系, 它与图中给出的, $A=142$ 的核的观测值相符合吗?

(d) 讨论剩余相互作用的两体相互作用在(c)的估计中所起的作用.

(e) 与共振宽度相应的物理过程是什么? 粗略估计不同机制引起加宽的数量.

解: (a) 有关 (γ, n) 和 (γ, p) 反应的激发曲线看出, 在 E_γ 为 $10\sim 20\text{MeV}$ 之间形成宽度为几 MeV 的宽共振. 它的解释一方面可以认为, 当核激发态能量很高时, 这时激发态的密态增加, 能级宽度变宽, 当能级间距和能级宽度可以比较时, 分离能级连成一片, 形成各种能量的 γ 光子都能使核激发, 形成宽共振. 对于 $E_\gamma \approx 15\text{MeV}$, 它超过了核子谐振子能量 $\hbar\omega \approx 44/A^{1/3}\text{MeV}$, 因此偶极跃迁可以发生. 从单粒子模型来估计:

$$\frac{\Gamma(E2\text{或}M1)}{\Gamma(E2)} \approx \left(\frac{R}{\lambda}\right)^2 \approx \left(\frac{6}{80}\right)^2 \approx 5 \times 10^{-3}.$$

主要是电偶极吸收. 另外, 从核的集体共振吸收来考虑, γ 射线引起核变形, 当 γ 射线的能量正好等于核集体振动的能级时, 产生共振吸收, 由于 $E_\gamma \approx 15\text{MeV}$, 对 ^{142}Nd 核可以引起电偶极、四极、八极振动, 但更接近电偶极能级, E_1 共振为主.

(b) 把核中的质子和中子看成相互渗透又不可压缩的液体, 在入射光子的作用下, 所有核内质子和中子分别倾向于一边, 使中子的质心和质子的质心分离, 核的位能增加, 从

而产生恢复力，引起偶极振动，当光子频率等于谐振子的共振频率时，即产生共振吸收。

(c) 从经典振动理论可知，谐振子势和共振频率为

$$f \approx \sqrt{\frac{k}{m}},$$

其中： k 为恢复系数。 m 为核的质量。 k 正比于核的表面积， m 正比于核体积。

$$f \approx \sqrt{\frac{R^2}{R^3}} = \sqrt{\frac{1}{R}} \propto A^{-1/6} \approx A^{-0.17}.$$

实验结果 $E_{共振} \propto A^{-0.18}$ ，两者相当吻合。

(b) 剩余力为非中心力。它可引起核的变形使振动更容易形成，粗略理论值与实验值的差别也可用剩余力作用解释。特别是对有变形的核，甚至会出现双共振峰，已被实验证实。

(c) 巨共振的宽度加宽主要是核在光子作用下产生变形和共振。一是变形和恢复力与很多因素有关，故形成的“谐振子”质量不高 (Q 值小)，故共振宽度较宽。二是光子能量传给其它核子，形成复合核以及能量重新按自由度分配，故形成宽度在几个到近 10 MeV 的宽共振。此外，像 Dopple 效应的加宽等，但这只是 keV 的量级，如对 $A=142$ 的核，由 Dopple 效应引起的 ΔE_D 为

$$\Delta E_D \approx \frac{E_\gamma^2}{Mc^2} \approx \frac{15^2}{142 \times 940} \approx 1.7 \text{ (keV)}. \quad (\text{黄晓舟})$$

2095 (Wis, 1979)

^{208}Pb 对 γ 射线的总吸收截面曲线如图 2.33， ^{208}Pb 基态的自旋宇称为 0^+ 。2.6 MeV 处的峰相当于 $J^\pi = 3^-$ 态，

此态通过 γ 衰变跃迁至 1.2MeV 处的 1^- 态,如图 2.34 所示.
 (a) 求 2.6MeV 态到 1.2MeV 态之间可能的电或磁多极性 γ 跃迁. 其中哪一种极性最重要? (b) 2.6MeV 能级宽度小于 1eV , 而 14MeV 处的能级宽度为 1MeV . 对这么大的差别, 你能提供一种解释吗? 什么实验可以证实你的推测?

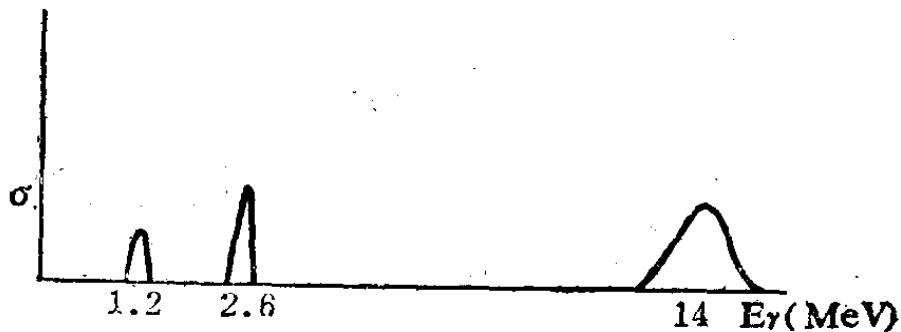


图 2.33

解: (a) 2.6MeV 态到 1.2MeV 态之间跃迁, 光子可能带走的角动量为 $L = 4, 3, 2$, 而宇称改变为 $\Delta\pi = +1$, 故可能的多极性为 E_4, M_3, E_2 , 即电十六极, 磁八极和电四极跃迁, 其中最主要的是电四极跃迁.

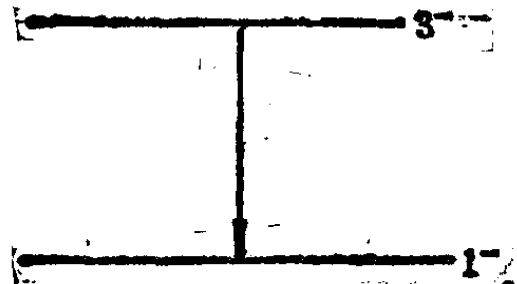


图 2.34

(b) 2.6MeV 的能级宽度小于 1eV . 是典型的电磁衰变宽度. 而对 14MeV 的共振曲线, 据题2094, 它是巨偶极共振吸收曲线. 而共振态的能量较高, 多为发射核子的强过程, 故单个能级也宽, 很多能级联成一个很宽的巨共振区. 即退激发的类型不同, 导致了能级宽度上的显著不同, 实验上对 2.6MeV 能级只观测到 γ 辐射, 对 14MeV 能区, 观察到核子的发射.

(钱剑明)

从一核的激发态发射的 γ 射线相对于激发核的自旋方向通常具有非各向同性的角分布. 由于通常情况下核自旋并不排列成同一取向, 它们的取向是无规律的, 因而这种各向异性探测不到. 然而, 对于经历一级联 γ 发射的核(如 ^{60}Ni 用于本题, 见图2.35), 级联 γ 射线中的第一个 γ 射线的方向可以用做一特定核的自旋取向的相关方向. 这样, 假设中间

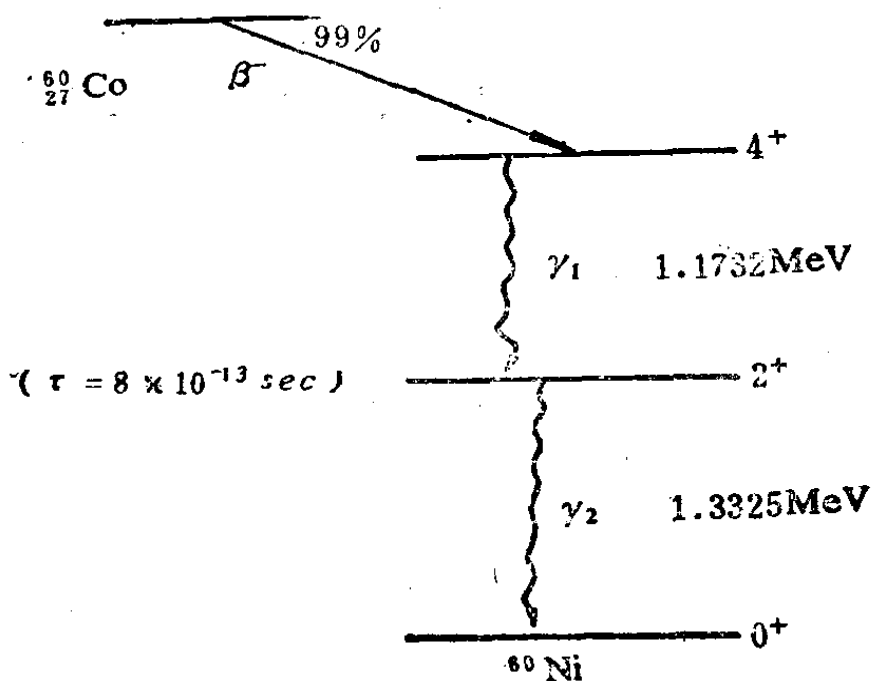


图 2.35

态的半衰期可以忽略, 测量作为两个 γ 的方向之间夹角的函数的符合率可以得到角关联, 它可以用于确定核的自旋.

对于 ^{60}Ni 我们发现这样的—个级联, 名为 $J^\pi = 4^+ \longrightarrow J^\pi = 2^+ \longrightarrow J^\pi = 0^+$

角关联函数的形式为

$$W(\theta) = 1 + 0.1248\cos^2\theta + 0.0418\cos^4\theta,$$

- (a) 跃迁是属于哪一类型?
- (b) 为什么没有 $\cos \theta$ 的奇次方? 为什么 $\cos^4 \theta$ 是最高次方?
- (c) 画一实验装置的草图表明你将如何进行测量, 指出所有部件. (方块图)
- (d) 描述 γ 射级探测器.
- (e) 如何确定关联函数的系数, 这些系数将证实 ^{60}Ni 经历 $4 \rightarrow 2 \rightarrow 0$ 的跃迁.
- (f) 两个 γ 探测器之间将发生偶然符合, 你如何考虑它?
- (g) 如何用 ^{22}Na 源来标定探测器和电子学线路? (^{60}Na 由 β^+ 湮灭产生 0.511MeV 的 γ).

(h) ^{60}Co 源内部的康普顿散射将如何改变测量结果?

解: (a) 两个级联的 γ 跃迁的角动量改变均为 2, 而宇称均不变, 所以两个 γ 跃迁均属于 $E2$ 跃迁.

(b) 根据角关联的理论, 级联跃迁的角关联函数的一般形式为

$$W(\theta) = \sum_{K=0}^{k_{\max}} A_{2K} P_{2K}(\cos \theta),$$

其中: $0 \leq K_{\max} \leq \min(J_b, L_1, L_2),$

$$A_{2K} = F_{2K}(L_1, J_a, J_b) F_{2K}(L_2, J_c, J_d),$$

L_1, L_2 为两个 γ 的角动量, J_a, J_b, J_c 分别为初态, 中间态, 末态的自旋.

由于 $W(\theta)$ 仅与 $P_{2K}(\cos \theta)$ 有关, 所以 $W(\theta)$ 中只有 $\cos \theta$ 的偶次方项, 而对于 ^{60}Ni 的 $4^+ \rightarrow 2^+ \rightarrow 0^+$ 的跃迁 K_{\max} 取 2, 涉及的 $P_4(\cos \theta)$ 中 $\cos \theta$ 的最高次方为 4, 所以 $W(\theta)$ 中 $\cos \theta$ 最高次方为 4.

图2.36是测量 γ - γ 方向角关联的实验装置示意图。通常探测器1固定,探测器2在源到探测器1组成的平面内绕源转动,使两 γ 探头可以在保持跟源的距离不变下改变夹角 θ 。要减小偶然符合及多次散射,可采用快慢符合法。

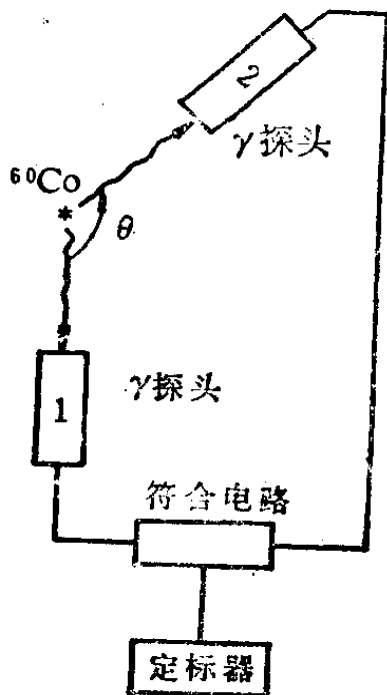


图 2.36

动,使两 γ 探头可以在保持跟源的距离不变下改变夹角 θ 。要减小偶然符合及多次散射,可采用快慢符合法。

(d) 通常的 γ 探测器由闪烁体,光电倍增管和信号放大电路,以及光电倍增管的高压系统构成。 γ 射线被闪烁体吸收后,闪烁体内将产生荧光,荧光光子在光电倍增管的阴极材料上打出初级光电子,在光电倍增管的高压的作用下,逐级产生更多的次级电子,最后在阳极产生一较大的

电流信号,由放大电路放大输出。为更好的选择 γ 射线能量,也可用Ge(Li)半导体探测器。

(e) 改变两 γ 探头之间的角度,相应于各个角度测量符合计数率,所得的计数率相应于各个角度的 $W(\theta)$ 值,用角关联函数形式对实验值进行拟合,就可以定出数值,从而求出各个系数。

(f) 在其中一个 γ 探测器后接一延迟线路,取延迟时间足够大(相对于中间态寿命)。这时两路的信号可以认为是无关的。这时的计数率就是偶然符合计数率,应从实际测量的计数率中将它扣除。

(g) ^{22}Na 的 β^+ 湮灭时产生的二个 0.511MeV 的 γ 是同时产生的,且方向相反。可以用它来调整两路之间的相对延

迟，以其与探头以及电子学线路的固有延迟的差互补，以获得符合系统的最佳状态。

(h) ^{60}Co 源内的康普顿散射将增加发射 γ 方向的无规律性，减小其各向异性，从而使测得的系数偏小。（林辰）

2097 (Wis, 1978)

一个处于激发态的原子核(质量为 M)，其激发能为 ΔE 。这核退激发跃迁到基态，放出能量为 $h\nu$ 的 γ 射线，为什么 $h\nu$ 不等于激发能 ΔE ？求相对变化 $\frac{h\nu - \Delta E}{\Delta E}$ (假定 $\Delta E < Mc^2$)。

解：由于动量守恒，原子核在放出 γ 射线的同时要发生反冲，因此在退激发过程中，原子核将从激发能 ΔE 中分得一部分反冲能，这就使得 $h\nu$ 比 ΔE 略小。

设原子核反冲动量值为 p ，原子核的总能量为 E ，则由能量、动量守恒得

$$p = p_\gamma = E_\gamma / c,$$

$$Mc^2 + \Delta E = E + E_\gamma = \sqrt{p^2 c^2 + M^2 c^4} + E_\gamma,$$

$$E_\gamma = \frac{1}{2Mc^2} \cdot \frac{\Delta E^2 + 2Mc^2 \Delta E}{\left(1 + \frac{\Delta E}{Mc^2}\right)} \approx \Delta E - \frac{\Delta E^2}{2Mc^2},$$

所以
$$\frac{\Delta E - E_\gamma}{\Delta E} \approx \frac{\Delta E}{2Mc^2}. \quad (\text{钱剑明})$$

2098 (Wis, 1975)

一个质量为 m 的粒子通过吸收一个 γ 光子可跃迁到激发能为 ΔE 的激发态。假定 $\Delta E/c^2$ 与 m 可比拟，求为使静止的这种粒子跃迁到激发态所需 γ 射线的共振能量。

解： $\gamma + A \longrightarrow A^*$, 使粒子 A 共振激发, 则入射道质心系中的能量必须等于 A^* 粒子的能量.

设 E_γ 和 p_γ 分别为 γ 射线能量和动量, m_A 为粒子 A 的质量, E^* 为入射道质心系中的能量. 有:

$$(E_\gamma + m_A c^2)^2 - E_\gamma^2 = 2m_A c^2 E_\gamma + m_A^2 c^4 = E^{*2}, \quad (1)$$

当 $E^* = m_A c^2 + \Delta E$ 时, A 粒子可跃迁到激发态. 把 E^* 代入式(1)有:

$$E_\gamma = \Delta E + \frac{\Delta E^2}{2m_A c^2},$$

即所需 γ 射线能量比 ΔE 大 $\frac{\Delta E^2}{2Mc^2}$. (钱剑明)

2099 (Col, 1982)

(a) 利用等价原理和狭义相对论计算到 ν 的一级量, 一个光子经过一段距离 y , 垂直落到地面所引起的频移 (必须指明符号).

(b) 在实验室中可以利用 Mossbauer 效应来测量这个频移. 描述这样的一个实验——特别说明什么是 Mossbauer 效应以及它为什么在这里有用? 你将使用什么能量的光子和如何产生它们以及如何测量这么小的频移? 试估算为了作一个有意义的测量需要探测的光子数.

解： (a) 设光子的初始频率为 ν_0 , 落到地面后变成 ν . 因此光子所等价的质量分别为 $\frac{h\nu_0}{c^2}$ 和 $\frac{h\nu}{c^2}$. 记地球质量为 M , 半径为 R , 由能量守恒得:

$$h\nu_0 - G \frac{M \cdot \frac{h\nu_0}{c^2}}{R+y} = h\nu - G \frac{M \cdot \frac{h\nu}{c^2}}{R},$$

精确到 y 的一阶，最后可得到：

$$\Delta\nu = \nu - \nu_0 = \frac{g \cdot \frac{\nu_0}{c^2}}{1 - g \frac{R}{c^2}} y,$$

其中 $g = G \frac{M}{R^2}$ 为当地的重力加速度， $GR \ll c^2$ ，所以

$$\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} = \frac{g}{c^2} y = 1.1 \times 10^{-16} y,$$

令 $y = 20\text{m}$ ，则 $\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} \approx 2.2 \times 10^{-15}$ 。

(b) 利用 Mossbauer 效应可以测量这个微小频移，Mossbauer 效应就是无反冲共振吸收效应。一般情况下，核发射 γ 射线的能量 E_γ 又等于核的激发能 E_0 。由于核的反冲，核带走反冲能，使 $E_\gamma < E_0$ ：

$$E_\gamma = E_0 - \frac{E_0^2}{2Mc^2},$$

其中： M 为核的质量。由于 $E_\gamma < E_0$ ，而 $\frac{E_0^2}{2Mc^2}$ 一般大于核能级的自然宽度。同样道理，当该原子核共振吸收光子时，需要光子能量 $E_\gamma = E_0 + \frac{E_0^2}{2Mc^2}$ 。所以同一种核发出的 γ 射线不能被相同的原子核共振吸收。当源和吸收体的核都固定在晶体中，因反冲体为整个晶体。 $M \rightarrow \infty$ ， $\frac{E^2}{aMc^2} \approx 0$ 。这时可出现



共振吸收，即 Mossbauer 效应。由此可见 Mossbauer 效应可精确测定 γ 射线的能量差别。要测量 $\Delta\nu/\nu_0 \approx 2.2 \times 10^{-15}$ ，必须选用自然线宽较窄的 γ 射线源，例如 ^{67}Zn ， $E_\gamma = 93\text{keV}$ ， $\frac{\Gamma}{E_0} \approx 5.0 \times 10^{-16}$ ，它小于 $\Delta\nu/\nu_0$ 。具体做法是：把 ^{67}Zn 源和

吸收体做成晶体。当源在 $y=0$ 时和 $y=20\text{m}$ 时，测量其共振吸收曲线，当 $y=0$ 时，即源和吸收体在同一水平面时，源和吸收体都不移动即可测到共振吸收。当源放在吸收体上方 20m 处，这时吸收体接收到的光子频率为 $\nu_0 + \Delta\nu$ （吸收体不动时）只有吸收体向下移动速度 $v = 2.2 \times 10^{-15} \times 3 \times 10^{10} = 6.6 \times 10^{-5} (\text{cm/s})$ 时，测量到共振吸收。

由于 ^{67}Zn 的自然线宽远小于测量值 $\Delta\nu/\nu$ 。故对计数要求不高，对谱线峰值处有 5% 的统计误差已经很高。即光子计数为 400 个即可。 (管怀群)

2100 (Wis, 1980)

半衰期为 $\tau_{1/2} = 10^4$ 年 = 3.15×10^{11} 秒的放射性母体，衰变成一系列的放射性子体，最后衰变成一种稳定同位素。在所有子体中，最大的半衰期为 20 年，其它子体的半衰期均小于一年。 $t=0$ 时有 10^{20} 个这样的母体原子核，但没有子体。(a) 求 $t=0$ 时母体的活度。(b) 大约需多长时间，半衰期为 20 年的子体核数目才达到它平衡值的 97%。(c) 在 $t=10^4$ 年时，有多少个半衰期为 20 年的子体核(假定衰变到半衰期为 20 年的子体。没有其它任何分支衰变)。(d) 设半衰期为 20 年的子体有两种衰变方式： α 衰变：分支比为 99.5%， β 衰变：分支比为 0.5%。在 $t=10^4$ 年时， β 衰变产物的活度

多大? (e) 在所有的放射性子体中, 它们能以比半衰期为 20 年的子体更快或更慢的速度趋于平衡值吗?

解: (a) 母体的衰变常数

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = 6.9315 \times 10^{-5} (\text{a}^{-1}), \\ &= 2.2 \times 10^{-12} (\text{s}^{-1}).\end{aligned}$$

$t=0$ 时, 母体的活度为

$$A_1(0) = \lambda_1 N_1(t=0) = 2.2 \times 10^8 / \text{s} \approx 6 (\text{mCi}),$$

(b) 设半衰期为 20 年的子体为放射性系列的第 n 代核素, 则其核数目随时间的变化为

$$N_n(t) = N_1(0) (h_1 e^{-\lambda_1 t} + h_2 e^{-\lambda_2 t} + \dots + h_n e^{-\lambda_n t}),$$

其中:

$$h_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-1}}{(\lambda_2 - \lambda_1) (\lambda_3 - \lambda_1) \dots (\lambda_n - \lambda_1)},$$

$$h_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-1}}{(\lambda_1 - \lambda_2) (\lambda_3 - \lambda_2) \dots (\lambda_n - \lambda_2)},$$

...

$$h_n = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-1}}{(\lambda_1 - \lambda_n) (\lambda_2 - \lambda_n) \dots (\lambda_{n-1} - \lambda_n)}.$$

λ_i 为第 i 代放射性核素的衰变常数. 显然

$$\lambda_1 \ll \lambda_i, \quad i = 2, 3, \dots, n, \dots,$$

$$\lambda_n \ll \lambda_i, \quad i = 2, 3, \dots (i \neq n),$$

$$\lambda_n = \ln 2 / t_{1/2} = 0.03466 (\text{a}^{-1}),$$

所以
$$h_1 \approx \frac{\lambda_1}{\lambda_n}, \quad h_n \approx -\frac{\lambda_1}{\lambda_n},$$

当时间足够长时, 体系将达到平衡, 此时

$$\lambda_n N_n^{\circ}(t) = \lambda_1 N_1^{\circ}(t),$$

(上标 e 表示平衡值)

所以
$$N_n^e(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_n} N_1^e(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_n} N_1(0) e^{-\lambda_1 t},$$

在达到平衡之前, 但接近平衡时有:

$$N_n(t) \approx N_1(0) \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n} e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_n} e^{-\lambda_n t} \right),$$

所求时间 t_0 满足:

$$0.97 \frac{\lambda_1}{\lambda_n} N_1(0) e^{-\lambda_1 t_0} \approx N_1(0) \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n} e^{-\lambda_1 t_0} - \frac{\lambda_1}{\lambda_n} e^{-\lambda_n t_0} \right),$$

解得
$$t_0 = \frac{\ln 0.03}{\lambda_1 - \lambda_n} \approx 101 \text{ (a)},$$

即大约经过 101 年, 半衰期为 20 年的子体数目将达到其平衡值的 97%.

(c) $t = 10^4$ 年时, 可以认为体系已达到平衡, 故半衰期为 20 年的子体核数目为

$$N_n(10^4) = \frac{\lambda_1}{\lambda_n} N_1(0) e^{-\lambda_1 t} = 10^{17}.$$

(d) 体系达到平衡后, 各代同位素将有同样的活度.

$t = 10^4$ 年时, 母体活度:

$$\begin{aligned} A_1(10^4 \text{ a}) &= \lambda_1 N(0) e^{-\lambda_1 t} = \lambda_1 \times 0.5 \times N(0) \\ &= A_1(0) \times 0.5 = 1.1 \times 10^8 / \text{s} \\ &\approx 3 \times 3.7 \times 10^7 \text{ Bq}. \end{aligned}$$

半衰期为 20 年子体的 β 衰变产物的活度为

$$A_\beta = 3 \times 0.05 = 0.15 \times 3.7 \times 10^7 \text{ Bq},$$

(e) 在半衰期为 20 年的子体前面的子体核数目比半衰期为 20 年的子体核数以更快的速度趋于平衡值, 而其后面的子体以近似于半衰期为 20 年的子体的速度趋于平衡值.

(钱剑明)

2101 (Col, 1980)

一束通量为 $10^{22}/(\text{cm}^2 \cdot \text{s})$ 的热中子轰击厚为 0.02cm 的金片, 通过反应 $^{197}\text{Au}(n, \gamma)^{198}\text{Au}$ 产生半衰期为 2.7 天的核素 ^{198}Au . 金的密度为 $19.3\text{g}/\text{cm}^3$. 反应截面为 $98.7 \times 10^{-24}\text{cm}^2$. 金的含量为 100%. (a) 照射 5 分钟后, 求金片中 ^{198}Au 的比放射性是多少? ($/\text{cm}^2 \cdot \text{s}$); (b) 在金片中, 能生成 ^{198}Au 的最大值多少? ($/\text{cm}^2$); (c) 如果活度为最大活度的 $\frac{2}{3}$, 金

需照射多长时间?

解: (a) 单位面积上的靶核数为

$$N_0^1 = \frac{0.02 \times 19.3}{197} \times 6.023 \times 10^{23} = 1.18 \times 10^{21}/\text{cm}^2,$$

$$\frac{dN_1}{dt} = -\sigma I N_1,$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \sigma I N_1 - \lambda N_2 \approx \sigma I N_1(0) - \lambda N_2,$$

$$N_1 = N_1(0) e^{-\sigma I t},$$

$$N_2 = \frac{\sigma I}{\lambda - \sigma I} N_1(0) (e^{-\sigma I t} - e^{-\lambda t}),$$

$$\lambda \approx 3 \times 10^{-6}\text{s}^{-1}.$$

当 $t = 300\text{s}$ 时, ^{198}Au 的活度为

$$A(300\text{s}) = \lambda N_2(t) = \frac{\lambda \sigma I N_1(0)}{\lambda - \sigma I} (e^{-\sigma I t} - e^{-\lambda t})$$

$$\approx \sigma I N_1(0) (1 - e^{-\lambda t})$$

$$= 98.7 \times 10^{-24} \times 1.18 \times 10^{21}$$

$$\times 10^{12} (1 - e^{-\lambda t})$$

$$= 1.05 \times 10^8 / (\text{cm}^2 \cdot \text{s}).$$

(b) 平衡时, N_2 不变化, N_2 为极大.

$$\frac{dN_2}{dt} = 0, \quad I\sigma e^{-\sigma I t} - \lambda e^{-\lambda t} = 0,$$

$$t \approx \frac{1}{\lambda} [\ln \lambda - \ln(\sigma I)] = \frac{1}{3 \times 10^{-6}} [-12.72 + 23.04]$$

$$= 3.44 \times 10^6 (\text{s}) \approx 39.8 (\text{d}).$$

$$N_2 = \frac{\sigma I N_1(0)}{\lambda} (e^{-\sigma I t} - e^{-\lambda t}) = 3.88 \times 10^{16} / \text{cm}^2.$$

$$(c) \quad A = \frac{2}{3} A_{\max} \approx \sigma I N_1(0) (1 - e^{-\lambda t}),$$

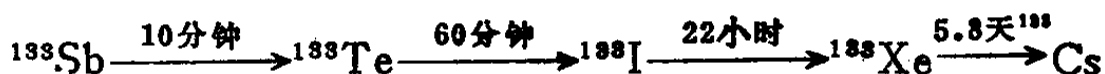
$$A_{\max} = \lambda N_2 = 1.16 \times 10^{11} / \text{cm}^2 \cdot \text{s},$$

$$t = -\frac{1}{\lambda} \ln \left(1 - \frac{2}{3} \frac{A_{\max}}{\sigma I N_0} \right) \approx 4.2 (\text{d}).$$

(钱剑明)

2102 (Col, 1982)

^{235}U 裂变中, 4.5% 裂变成 ^{133}Sb . 这个同位素是不稳定的, 它是一个 β 衰变链的母体. 直到衰变成稳定的 ^{133}Cs .



(a) 若 1 克 U 放在堆中照射 60 分钟, 中子通量为 $10^{11} \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$. 计算从堆中取出时, Sb, Te, I 的原子数目. 注意: U 中 99.3% 是 ^{238}U , 0.7% 是 ^{235}U , ^{235}U 的裂变截面为 500 靶.

(b) 取出 12 小时后, 用化学方法把 I 分离出来, 设分离过程的效率为 75%, 可得到多少 I 原子?

解: (a) 设在反应堆中每秒产生的 Sb 数为 C , 则有:

$$C = N_0 \cdot f \cdot \sigma \cdot 4.5\% = \frac{1 \times 0.007}{235} \times 6.023 \times 10^{23}$$

$$\times 500 \times 10^{-24} \times 10^{11} \times 0.045$$

$$= 4.04 \times 10^7 / \text{s}.$$

设从堆中取出时, Sb, Te, I 的数目分别为 N_1, N_2, N_3 , 衰变常数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. 由题知: $\lambda_1 = 1.16 \times 10^{-8} / \text{s}$, $\lambda_2 = 1.93 \times 10^{-4} / \text{s}$, $\lambda_3 = 8.75 \times 10^{-6} / \text{s}$.

$$\frac{dN_1}{dt} = C - \lambda_1 N_1, \quad t=0, \quad N_1=0,$$

$$N_1(T) = \frac{C}{\lambda_1} (1 - e^{-T\lambda_1}) = \frac{C}{\lambda_1} (1 - 2^{-T/T_1})$$

$$= 3.43 \times 10^{10}.$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2, \quad t=0, \quad N_2=0.$$

$$N_2(T) = \frac{C}{\lambda_2} \left(1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_1 T} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 T} \right) = 8.38 \times 10^{10}.$$

$$\frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2 - \lambda_3 N_3, \quad t=0, \quad N_3=0,$$

$$N_3(T) = \frac{C}{\lambda_3} \left(1 - \frac{\lambda_2 \lambda_3 e^{-\lambda_1 T}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} + \frac{\lambda_1 \lambda_3 e^{-\lambda_2 T}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} \right)$$

$$+ \frac{C}{\lambda_3} \left(\frac{\lambda_3 \lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} - \frac{\lambda_1 \lambda_3}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} - 1 \right) e^{-\lambda_1 T}$$

$$= \frac{C}{\lambda_3} \left(1 - \frac{\lambda_2 \lambda_3 e^{-\lambda_1 T}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} - \frac{\lambda_1 \lambda_3 e^{-\lambda_2 T}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)} \right)$$

$$- \frac{\lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 T}}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)})$$

$$\approx \frac{c}{\lambda_3} (1 - 0.969) \approx 2.77 \times 10^{10}.$$

(b) 从反应堆取出后, 不再生成 Sb. 故 Sb 在衰减, 这时 N_1, N_2, N_3 均不为零.

$$N_1(t) = N_1(T) e^{-\lambda_1 t},$$

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(T) e^{-\lambda_1 t} + \left[N_2(T) - \frac{\lambda_1 N_1(T)}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 T} \right],$$

$$N_3(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 N_1(T)}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2} \left[N_2(T) - \frac{\lambda_1 N_1(T)}{\lambda_2 - \lambda_1} \right] e^{-\lambda_2 t} + \left[N_3(T) - \frac{\lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2} N_2(T) - \frac{\lambda_1 \lambda_2 N_1(T)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_2)} \right] e^{-\lambda_3 t}.$$

当 $t = 12$ 小时, $t \gg T_1, T_2$, 所以

$$\begin{aligned} N_3(12 \text{小时}) &\approx \left[N_3(T) + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_3} N_2(T) + \frac{\lambda_1 \lambda_2 N_1(T)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} \right] e^{-\lambda_3 t} \\ &= 10^{10} \times [2.77 + 8.38 \times 1.05 + 3.43] \times 2^{-12/22} \\ &= 3.41 \times 10^{10}. \end{aligned}$$

分离出来的 I 同位素为

$$N = 0.75 \times N_3 = 2.56 \times 10^{10}. \quad (\text{管怀群})$$

质量为 0.05 克的锂膜 (${}^7\text{Li}$) 被热中子照射 (俘获截面为 37 毫靶), 形成具有 β^- 放射性的 ${}^8\text{Li}$, 其半衰期为 0.85 秒. 当入射中子通量为 $3 \times 10^{12} / (\text{秒} \cdot \text{厘米}^2)$ 时, 求 ${}^8\text{Li}$ 的平衡活度.

解: 设 ${}^7\text{Li}$ 的核数目为 $N_1(t)$, ${}^8\text{Li}$ 核数为 $N_2(t)$, 则有:

$$N_1(0) = \frac{0.05}{7} \times 6.022 \times 10^{23} = 4.3 \times 10^{21},$$

$$N_2(0) = 0.$$

由于中子照射, $N_1(t)$ 的变化为

$$\frac{dN_1}{dt} = -\sigma\phi N_1, \quad (1)$$

$$N_1(t) = N_1(0)e^{-\sigma\phi t}, \quad (2)$$

$N_2(t)$ 的变化为

$$\frac{dN_2}{dt} = -\frac{dN_1}{dt} - \lambda N_2(t) = N_1(0)\sigma\phi e^{-\sigma\phi t} - \lambda N_2(t), \quad (3)$$

利用初始条件解方程 (3), 得:

$$N_2(t) = \frac{\sigma\phi N_0}{\lambda - \sigma\phi} (e^{-\sigma\phi t} - e^{-\lambda t}) \quad (4)$$

平衡时有 $\frac{dN_2}{dt} = 0$, 所以达到平衡时的时间 t 为

$$t = \left(\ln \frac{\lambda}{\sigma\phi} \right) / (\lambda - \sigma\phi) = 36.3 \text{ 秒}.$$

代入 (4) 式:

$$A = \lambda N_2 \approx \frac{\lambda\sigma\phi N_0}{\lambda - \sigma\phi} \approx \sigma\phi N_0 = 4.77 \times 10^8 / \text{s} \approx 12.9 \times 3.71 \times 10^7 \text{ Bq}.$$

${}^8\text{Li}$ 在平衡时的活度约为 $47.73 \times 10^7 \text{ Bq}$.

(钱剑明)

一束通量为 10^8 中子/(厘米²·秒)的中子垂直入射到面积为 1 平方厘米,密度为 10^{22} 原子/厘米³,厚度为 10^{-2} 厘米的薄片上 (图 2.37)。

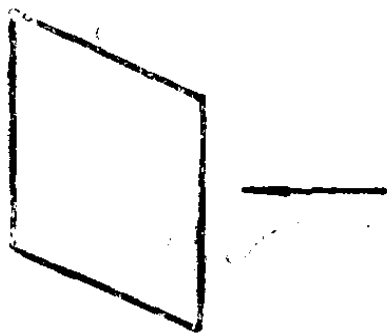


图 2.37

靶核中子俘获截面为 1 靶 (10^{-24} 厘米²), 俘获中子后靶核形成具有 β^- 放射性的不稳定核, 其寿命为 10^4 秒. 中子照射 100 秒后, 薄片的放射性活度多大?

解: 设具有 β^- 放射性不稳定核数目随时间变化为 $N_\beta(t)$, 靶核数目随时间变化为 $N(t)$. 由于靶厚为 10^{-2} 厘米, 故可作为薄靶处理. $dN(t)/dt = -\sigma\phi N(t)$, 其中 ϕ 为中子通量, σ 为靶核俘获中子总截面. 解得: $N(t) = N(0)e^{-\sigma\phi t}$. $\sigma\phi t \ll 1$, 所以

$$N(t) \approx N(0), \quad \frac{dN}{dt} \approx -\sigma\phi N(0). \quad \text{即产生率为常数.}$$

$$\frac{dN_\beta(t)}{dt} = \sigma\phi N(0) - \lambda N_\beta(t).$$

λ 为 β^- 放射性核的衰变常数. 解之得:

$$N_\beta(t) = \frac{\sigma\phi N(0)}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}),$$

$$A = N_\beta(t) \cdot \lambda = \sigma\phi N(0) (1 - e^{-\lambda t}).$$

代入 $t = 100$ 秒, 得:

$$A = 10^{-24} \times 10^8 \times 10^{20} (1 - e^{-10^{-4} \times 10^2})$$

$$= 10^4 (1 - e^{-0.01}) = 99.5 \text{ (s}^{-1}\text{)}.$$

(钱剑明)

2105 (CCT, 1983)

放射性测量年代所用的同位素为: (a) ^{238}U , (b) ^{12}C , (c) ^{14}C .

解: 答案为(c). 因为 ^{14}C 的 $T_{1/2} \approx 5600$ 年. 和人类感兴趣的年代的数量级一致. 又因为C是生物代谢的成分.

(唐子州)

2106 (Wis, 1970)

^{14}C 以半衰期 5500 年. (a) 简洁说明 ^{14}C 发生什么类型的衰变? 衰变产物是什么? (b) 如果生物体死亡后没有 ^{14}C 进入体内, 现测得一棵死树的 ^{14}C 放射性活度为一棵活树的 $1/3$, 试估算这棵树死了多少年?

解: (a) ^{14}C 是丰中子元素, 故发生 β^- 衰变, 衰变产物是 ^{14}N . 衰变方程为



(b) 生物体死后 ^{14}C 核数目随时间变化为 $N(t) = N(0)e^{-\lambda t}$, 所以 ^{14}C 活度变化为

$$A(t) = \lambda N(t) = A(0)e^{-\lambda t},$$

所以

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{A(0)}{A(t)} = \frac{\tau_{1/2}}{\ln 2} \ln \frac{A(0)}{A(t)}.$$

根据题给数据, 得树死了时间为

$$t = \frac{\tau_{1/2}}{\ln 2} \cdot \ln \frac{A_0}{A(t)} = \frac{5500}{\ln 2} \ln 3 \approx 8717 \text{ (年)} \quad (\text{钱剑明})$$

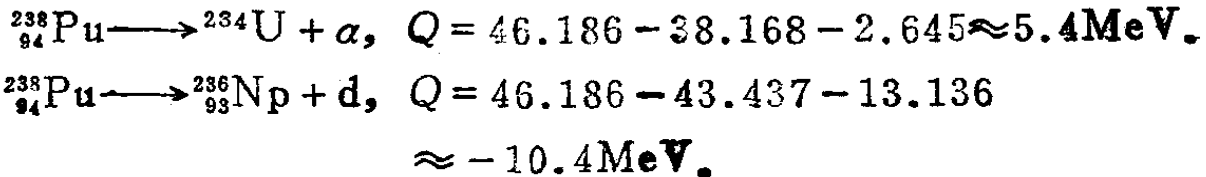
2107 (Wis, 1972)

^{238}Pu ($Z=94$) 已作为宇宙飞行的能源. ^{238}Pu 的 α 衰变半衰期为 90 年. (a) α 衰变产物的 Z 和 N 等于多少? (b) 为

什么 ^{238}Pu 是发射 α 粒子, 而不是氦核? (c) 放出 α 粒子的能量为 5.5MeV . 如果有 238 克的 ^{238}Pu (6×10^{23} 个原子), 那么这些 ^{238}Pu 衰变会放出多大能量? (功率是多大?) (d) 如果 (c) 中释放出的功率是为保证一套仪器运行所需最小能量的 8 倍, 多长时间内这个能源能产生足够的功率以保证仪器正常运行?

解: (a) α 衰变产物 $N=142, Z=92$.

(b) 这个问题可以从释放出的能量, 由于 α 粒子的结合能较氦核结合能大, α 衰变可放出更多的能量.



由此可知. 从能量考虑 ^{238}Pu 衰变 d 的 $Q < 0$, 是严格禁戒的.

(c) 一个 ^{238}Pu 衰变能, 由题设:

$$E_d = \frac{238}{238-4} \times 5.5 = 5.6\text{MeV}.$$

又知 ^{238}Pu 的 $T_{1/2} = 87.75 \text{年} \approx 2.8 \times 10^9 \text{秒}$, 衰变常数 $\lambda = \ln 2 / T_{1/2} = 2.5 \times 10^{-10} / \text{秒}$, 对于 238 克 ^{238}Pu , 开始时每秒放出的能量为

$$\frac{dE}{dt} = E_d \frac{dN}{dt} = E_d \lambda N_0 = 5.6 \times 2.5 \times 10^{-10}$$

$$\times 6.022 \times 10^{23} = 8.4 \times 10^{14} \text{MeV/s}.$$

(d) 随 ^{238}Pu 核的减少, 放出的功率也变少.

$$W(t) = W(0)e^{-\lambda t}. \quad \text{当 } W(t_0) = \frac{1}{8}W(0) \text{ 时,}$$

$$t_0 = \frac{\ln 8}{\lambda} = 3 \left(\frac{\ln 2}{\lambda} \right) = 3T_{1/2} \approx 263.3 \text{年}.$$

即能保证仪器正常运行 263 年.

(钱剑明 范杨属)

§ 6 核反应(2108—2120)

2108 (Col, 1975)

典型核激发能为 10^{-2} , 10^1 , 10^3 , 10^5 (MeV).

解: 应为 10^1 MeV. (周 平)

2109 (Wis, 1980)

以下给出几种元素的原子质量及中子、电子质量(以 u 为单位, $u = 932 \text{ MeV}/c^2$).

电子	0.000549	$^{152}_{62}\text{Sm}$	151.919756
中子	1.008665	$^{152}_{64}\text{Eu}$	151.921749
^1_1H	1.007825	$^{152}_{64}\text{Gd}$	151.919794

- (a) 反应 $^{152}\text{Eu}(n, p)$ 的 Q 值是多少?
 (b) ^{152}Eu 能发生哪些类型的弱作用衰变?
 (c) 求 (b) 中 ^{152}Eu 弱作用衰变放出粒子的最大能量.

解: (a) 反应式为 $^{152}\text{Eu} + n \longrightarrow ^{152}\text{Sm} + p$.

反应 Q 值为:

$$\begin{aligned} Q &= [m(^{152}\text{Eu}) + m(n) - m(^{152}\text{Sm}) - m(p)]c^2 \\ &= [M(^{152}\text{Eu}) + m(n) - M(^{152}\text{Sm}) - M(^1_1\text{H})]c^2 \\ &= 0.002833u = 2.64 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

这里 m 表示原子核质量, M 为原子质量, 计算中忽略了电子结合能的影响.

(b) 为确定 ^{152}Eu 能发生的弱作用衰变, 只须计算其衰变能.

对 β^- 衰变:

$$E_d(\beta^-) = [M(^{152}\text{Eu}) - M(^{152}\text{Gd})]c^2$$

$$= 1.822(\text{MeV}) > 0.$$

故 ^{152}Eu 能发生 β^- 衰变.

对 β^+ 衰变:

$$\begin{aligned} \text{Ed}(\beta^+) &= [M(^{152}\text{Eu}) - M(^{152}\text{Sm}) - 2m(e)]c^2 \\ &= 0.831(\text{MeV}) > 0. \end{aligned}$$

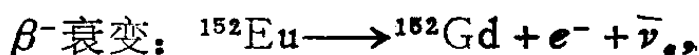
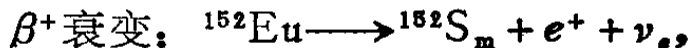
故 ^{152}Eu 能发生 β^+ 衰变.

对轨道电子俘获:

$$\begin{aligned} \text{Ed}(EC) &= [M(^{152}\text{Eu}) - M(^{152}\text{Sm})]c^2 - W_i \\ &= 1.858(\text{MeV}) - W_i. \end{aligned}$$

其中 W_i 为轨道电子在原子中的结合能, 下标 i 表示 K, L, M 等电子壳层. 一般 $W_i \ll 1\text{MeV}$, 故 ^{152}Eu 亦能发生轨道电子俘获.

三种弱作用衰变方程式为



(c) 忽略原子核的反冲, (b) 中放出粒子的最大能量就是衰变时放出的衰变能.

β^- 衰变, 电子的最大能量为 1.822MeV .

β^+ 衰变, 正电子的最大能量为 0.831MeV .

轨道电子俘获, 中微子的最大能量由电子壳层结合能而定. 例如: 对 K 俘获 $W_K \approx 50\text{keV}$, $E_{\text{max}} \approx 1.8\text{MeV}$.

(钱剑明)

2110 (Wis, 1976)

(a) 考虑核反应 $^1\text{H} + ^A\text{X} \rightarrow ^2\text{H} + ^{A-1}\text{X}$, ^AX 为下列三种靶中哪一种靶时反应最强烈? 为什么?

$${}^4X = {}^{39}\text{Ca}, {}^{40}\text{Ca}, {}^{41}\text{Ca}.$$

(b) 利用你所熟悉的知识, 估算在聚变反应堆中发生 ${}^2\text{H} + {}^2\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + n$ 反应所需温度.

解: (a) 用 ${}^{41}\text{Ca}$ 作为靶反应最强烈. 由反应方程式知, 反应属拾取反应, 质子从靶核中拾取一个中子形成氦核. ${}^{41}\text{Ca}$ 是丰核素, 且最外一中子处于双满壳层之外, 故结合能比 ${}^{40}\text{Ca}, {}^{39}\text{Ca}$ 中的中子小, 容易被拾取.

(b) 欲使反应 ${}^2\text{H} + {}^2\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + n$ 发生, 要求两个氦核克服库仑势垒 $V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$, 其中 r 为两氦核之间的距离. 取氦核半径为 2fm , 则:

$$r_{\min} = 4\text{fm} = 4 \times 10^{-15}\text{m},$$

所以
$$V_{\max} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_{\min}}.$$

所需温度 T 满足:

$$kT \approx V_{\max}$$

所以
$$T \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_{\min}} \cdot \frac{1}{k} \approx 10^9(\text{K}),$$

即当温度高于 10^9K 时, 聚变反应 ${}^2\text{H} + {}^2\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + n$ 才能发生.

(钱剑明)

2111 (Wis, 1973)

(a) 描述一个可以测量 ${}^{13}\text{C}$ 核激发态能级位置的实验. 说明所用的靶, 反应过程和探测器. (b) 在所设计的计算中, 如何观察激发态角动量有关的知识.

解: (a) 由氦核轰击 ${}^{12}\text{C}$ 靶, 用金硅面垒型半导体探测器来测量 ${}^{12}\text{C}(d, p){}^{13}\text{C}$ 反应中出射的质子能谱, 当已知入

射 d 核的能量时, 可以推得 ^{13}C 激发态的能级, 也可以同时用 Ge 探测器测量 $^{13}\text{C}^*$ 退激发放出的 γ 射线能量, 并由此推得 ^{13}C 激发态的能级.

(b) 在此实验中通过对反应产物 P 的角分布测量, 在已知动态 ^{12}C 的自旋宇称情况下, 可以获得剩余核 ^{13}C 有关能级的自旋和宇称的知识. (王绍舜)

2112 (Wis, 1971)

给出原子的质量盈余 ($M-A$) 以 keV 为单位:

$${}^1_0\text{n} = 8071\text{keV}, \quad {}^1_1\text{H} = 7289\text{keV},$$

$${}^7_3\text{Li} = 14907\text{keV}, \quad {}^7_4\text{Be} = 15769\text{keV},$$

以及一个电子的 $m_0c^2 = 511\text{keV}$.

(a) 在什么条件下反应 ${}^7_3\text{Li}(p, n){}^7_4\text{Be}$ 才能发生?

(b) 在阈值时, 产生的中子在实验室的能量为多大?

解: (a) ${}^7_3\text{Li} + p \rightarrow {}^7_4\text{Be} + n + Q$,

其中 Q 为反应能.

$$Q = M({}^7_3\text{Li}) + M({}^1_1\text{H}) - M({}^7_4\text{Be}) - M({}^1_0\text{n})$$

$$= 14907 + 7289 - 15769 - 8071$$

$$= -1644\text{keV}.$$

在质心系中 ${}^7_3\text{Li}$ 和 p 的相对运动能量必须达到 1644keV 才能发生反应. 在实验室系质子动能为

$$E_p^{lab} = \frac{m_p + m_{{}^7_3\text{Li}}}{m_{{}^7_3\text{Li}}} \times |Q| \approx \frac{1+7}{7} \times 1644\text{keV} = 1879\text{keV},$$

所以, 当入射质子动能超过 1879keV 时才可能发生 ${}^7_3\text{Li}(pn){}^7_4\text{Be}$ 反应.

(b) 设质心系相对于实验室系的速度为 v_0 , 则:

$$v_0 = \frac{m_p}{m_p + m_{Li}} v_p,$$

$$v_p = \sqrt{2m_p E_p} / m_p.$$

在临界情况下，产生的中子在质心系速度为零，在实验室系速度为 v_0 。

$$E_n = \frac{1}{2} m_n v_n^2 = \frac{1}{2} m_n v_0^2$$

$$= \frac{1}{2} m_n \frac{2m_p E_p m_p^2}{m_p^2 (m_p + m_{Li})^2}$$

$$\approx \frac{1}{(1 + m_{Li}/m_p)^2} E_p \approx \frac{E_p}{64}$$

$$= 29.3 \text{ (keV)}.$$

(林 辰)

2113 (Chi, 1979)

${}^8\text{Be}$ 核是不稳定的，会分裂成二个 α 粒子。但是核反应实验给出的二个最低能级的性质是：

$J=0$ ，偶宇称，高于分裂能级 95keV；

$J=2$ ，偶宇称，高于分裂能级 3MeV。

考虑这些能级的存在如何影响 α 粒子在氦气中的散射，尤其是：

(a) 对于 $\gamma \rightarrow \infty$ ，用分波展开写出弹性散射波函数。

(b) 定性地描述相对相移是如何随每一能级附近的能量变化的。

(c) 描述这种变化是如何影响 α 粒子的角分布。

解：(a) α 粒子与 He 核之间的碰撞包括两个相移：库仑相互作用的相移 δ_l 及核力相移 η_l 。

另外，考虑到全同性， α 粒子 $J=0$ ，因而空间波函数必

须对称, l 只能取偶数. 因此 $\gamma \rightarrow \infty$ 处的波函数分波展开为

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1+(-)^l}{2} (2l+1) i^l e^{i(\delta_e + \eta_e)} \frac{1}{k\gamma} \sin(k\gamma - \frac{l\pi}{2} - r \ln 2k\gamma + \delta_l + \eta_l) P_l(\cos\theta), \quad (1)$$

其中 k 为质心系中的波数, $\gamma = \frac{(2e)^2}{h\nu}$ 为索末菲因子.

(b) 核力为吸引的, $\eta_l > 0$. 在共振态附近, 当质心系能量接近然后越过每个不稳定能级时, 即对 $l=0$ 在 95keV 附近, 对 $l=2$ 在 3MeV 附近, η_l 从一个小值迅速上升为接近 π 弧度. 但由于库仑势垒及离心势垒的作用, 使核力几乎不起作用(除了在共振能附近), 这导致在能级附近的共振极窄.

对 He^{++} , 取半径 $R \approx 1.5\text{fm}$, 库仑势垒

$$B \approx \frac{(2e)^2}{2R} \approx 2\text{MeV},$$

因此 $l=0$ 在 95keV 附近处的共振仍被库仑势抑制, 而使得宽度极窄, 至于 $l=2$ 的共振宽度则较宽. [见 *Phy. Rev.* 104, 123 & 135, 1956].

(c) 为明显表示出核力对角分布的影响, 将波函数写为

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1+(-)^l}{2} (2l+1) i^l e^{i\delta_l} (kr)^{-1} \left\{ \sin(kr - \frac{l\pi}{2} - \gamma \ln 2kr + \delta_e) + (e^{2i\eta_l} - 1) \exp i(kr - \frac{l\pi}{2} - \gamma \ln 2kr + \delta_l) \right\} P_l(\cos\theta), \quad (2)$$

(2) 式中第一项为库仑散射波函数，求和给出：

$$\begin{aligned} & \exp i\{krcos\theta - \gamma \ln[k\gamma(1 - \cos\theta)] + \delta_0\} \\ & - \gamma(k\gamma)^{-1} \exp i\{k\gamma cor\theta - \gamma \ln(k\gamma) + \delta_0\} \\ & \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{e^{-i\gamma \ln(1 - \cos\theta)}}{1 - \cos\theta} + \frac{e^{-i\gamma \ln(1 + \cos\theta)}}{1 + \cos\theta} \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

(2) 式中第二部分表示核力的散射波。它将与库仑散射波干涉。但当 η_l 的值在 $n\pi$ 附近时干涉效应很小。相应地探测这种相干效应可以确定在低能情况下共振是否产生。

(1956 年的实验观察到在 300keV 以下核散射中没有明显的干涉，在这能量下， $\eta_0 = 178^\circ \pm 1^\circ$ 。 (王璜鑫)

2114 (Col, 1976)

如图 2.38. 一个 3MV 的范氏发电机用来加速质子、氘核、双电离³He 粒子和 α 粒子。(a) 各种粒子所能达到的最大能量是多少？(b) 列出可以产生¹⁵O 同位素的反应式。(c) 列出至少六个反应式，这些式中¹⁵N 是复合核。(d) 描述两种类型的反应实验，它们可以利用这个加速器进行并确定¹⁵N 的能级，导出所需方程。(假设所有质量为已知)。

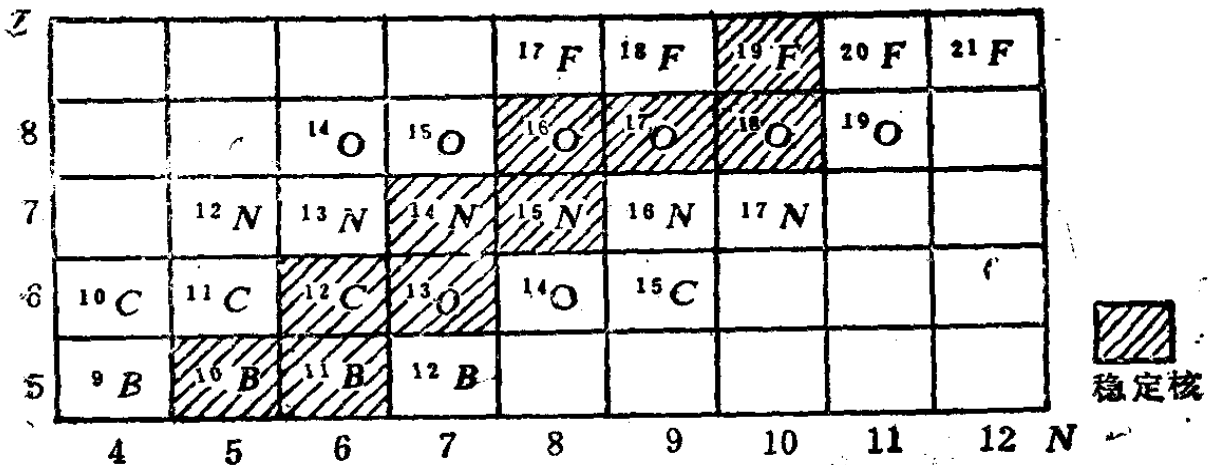
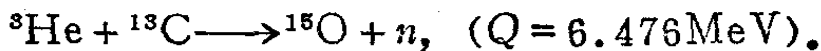
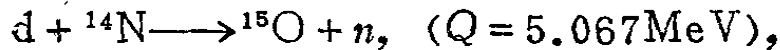
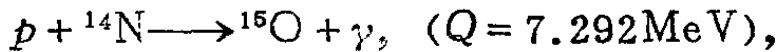


图 2.38

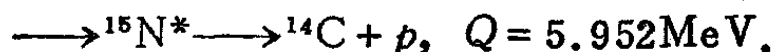
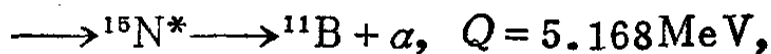
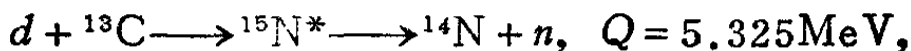
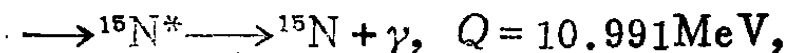
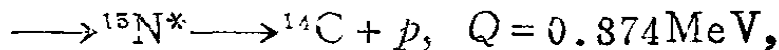
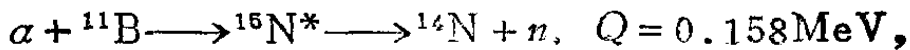
解: (a) 各种粒子所能达到的最大能量是: 质子为 3MeV, 氘核为 3MeV, 双电离 ${}^3\text{He}$ 为 6MeV. α 粒子为 6MeV.

(b) 主要从能量来考虑, 可产生 ${}^{15}\text{O}$ 的反应有:



α 粒子则不能产生 ${}^{15}\text{O}$, 因为 α 粒子结合能大, 质量小.

(c) 产生 ${}^{15}\text{N}$ 复合核的反应有:



(d) (1) 对于反应 $\alpha + {}^{11}\text{B} \longrightarrow {}^{15}\text{N}^* \longrightarrow {}^{15}\text{N} + \gamma$, 测量 γ 产额随入射 α 粒子能量而变化的激发曲线, 其共振峰处 α 粒子的能量对应于 ${}^{15}\text{N}^*$ 复合核的某一能级的位置, 由此推出 ${}^{15}\text{N}^*$ 的能级为

$$E^* = \frac{11}{15}E_\alpha + m({}^4\text{He})c^2 + m({}^{11}\text{B})c^2 - m({}^{15}\text{N})c^2.$$

(2) 在确定的人射粒子能量时, 测定反应产物中粒子的能谱, 也可以确定 ${}^{15}\text{N}^*$ 的能级, 如



对应于 ${}^{15}\text{N}$ 基态, 此反应的 $Q = 4.558\text{MeV}$. 同时根据入射 ${}^3\text{He}$ 的能量 E_0 和出射氘核的能量 E' 及出射角 θ , 可得到对应于 E' 能量的 Q' 值为

$$Q' = \left(1 + \frac{2}{15}\right)E' - \left(1 - \frac{3}{15}\right)E_0 - \frac{2\sqrt{3 \times 2E_0E'}}{15} \cos\theta$$

$$= \frac{1}{15} [17E' - 12E_0 - 2\sqrt{6E_0E'} \cos\theta]$$

^{15}N 的激发能: $E^* = Q - Q'$. (王绍舜 管怀群)

2115 (Col, 1983)

当 ^6Li (基态自旋为1, 宇称为偶) 受到氘核轰击时, 反应 $^6\text{Li} + d \rightarrow \alpha + \alpha$ 在 $E_d = 0.6\text{MeV}$ 时出现一个共振峰, 末态 α 的角分布 (与入射方向) 呈现 $1 + A\cos^2\theta$ 的规律 (d 的基态是一个质子和中子, 处于 3S_1 态), 有关核子的质量是: $m_p = 2.0149\text{amu}$, $m_n = 4.003\text{amu}$, $m_{\text{Li}} = 6.0170\text{amu}$, $m_{\text{Be}} = 8.0079\text{amu}$, 和 $1\text{amu} = 938.2\text{MeV}$ 仅从上述数据, 确定复合核激发能级的能量, 角动量、宇称, d 的哪个分波 ($s, p, d \dots$) 对产生这一激发态有效? (试说明之).

解: 反应式: $d + ^6\text{Li} \rightarrow ^8\text{Be}^* \rightarrow \alpha + \alpha$,

$$E(^8\text{Be}^*) = [m(^2\text{H}) + m(^6\text{Li}) - m(^8\text{Be})]$$

$$+ E_d \frac{m(^6\text{Li})}{M(^6\text{Li}) + m(^2\text{H})}$$

$$= (2.0147 + 6.0170 - 8.0079) \times 938.2$$

$$+ 0.6 \times \frac{6}{8} = 22.779 (\text{MeV}).$$

从 $^8\text{Be}^* \rightarrow \alpha + \alpha$, α 的 $J^\pi = 0^+$, 末态总波函数对称要求两 α 的相对轨道角动量为 $l_r =$ 偶数, 因是强作用过程, 宇称守恒 $^8\text{Be}^*$ 的宇称为

$$\pi(^8\text{Be}^*) = (-1)^{l_r} (+1)^2 = +1.$$

由末态 α 粒子的角分布为非球对称, 知 $l_r = 2$.

$$J^\pi(^8\text{Be}^*) = 2^+$$

初态 $d + {}^6\text{Li}$ 系统的总角动量为 $J_i = 2$.

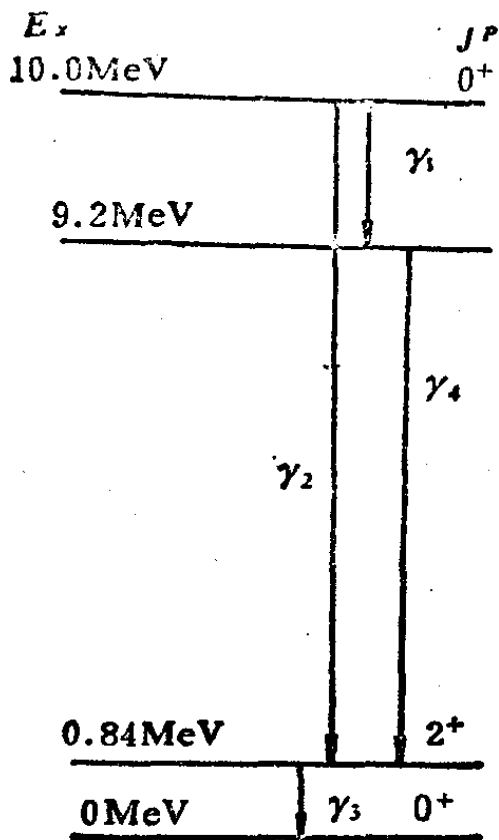
$$J_i = J_d + I_{\text{Li}} + l_i = \vec{1} + \vec{1} + l_i.$$

$$\vec{1} + \vec{1} = \begin{cases} \vec{0} \\ \vec{1} \\ \vec{2} \end{cases} \quad l_i \text{ 的可能值为 } 0, 1, 2, 3, 4.$$

但是 ${}^6\text{Li}$ 和 d 的基态宇称为正, l_i 必须是偶数, 由于末态角分布非各向同性, $l_i \neq 0$, 所以, l_i 的可能值为 $l_i = 2, 4$, 即主要是 d 波起作用. (王绍舜 杨永安)

2116 (Wis, 1976)

快中子打到一个10厘米厚的靶, 靶中每立方厘米有 ${}^{58}\text{Cr}$



原子 10^{21} 个, 有千分之一的中子被俘获形成自旋宇称 $J^P = 0^+$ 的态, 这个态的中子俘获截面是多少? 激发态的 ${}^{54}\text{Cr}$ γ 衰变网图如图 2.39 所示. 对 9.2 MeV 的激发态最可能的 J^P 值是什么, 这些 γ 辐射的多极性是多少?

解:
$$\sigma = \frac{N_2/N_1}{nt}$$

$$= \frac{10^{-3}}{10^{21} \times 10}$$

$$= 10^{-25} (\text{cm}^2) = 0.1 (\text{b}).$$

9.2 MeV 激发态的最可能的

$J^P = 2^+$, 这时, γ_1, γ_2 和 γ_3 均

图 2.39

为 $E2$ 跃迁. γ_4 主要也是 $E2$ 跃迁或 $M1$ 跃迁.

(胡 平)

2117 (Wis, 1972)

探测器表面复盖着一层自发裂变重核. 探测器面积为 2cm^2 , 裂变同位素的平均寿命为 $1/3 \times 10^9$ 年 (1 年 = 3×10^7 秒). 每秒钟探测到二千个裂变. 然后把探测器放在通量为 $10^{11}/\text{s} \cdot \text{cm}^2$ 的均匀中子流中, 探测到的裂变数为 $120/\text{s}$. 中子诱发裂变的截面有多大?

解: 设重核的数量为 N_0 , 每秒钟发生的自发裂变数:

$$\frac{dN_0}{dt} = \frac{dN}{dt} \Big|_{t=0} = \lambda N_0 e^{-\lambda t} \Big|_{t=0} = \lambda N_0.$$

设诱发裂变的截面为 σ , 每秒钟诱发裂变数为: $\sigma N_0 \phi$. 其中 ϕ 为中子通量:

$$\frac{\sigma N_0 \phi + \lambda N_0}{\lambda N_0} = \frac{120}{20},$$

$$\frac{\sigma \phi}{\lambda} = \frac{100}{20} = 5.$$

$$\sigma = 5\lambda/\phi = 5 / \left(\frac{1}{3} \times 10^9 \times 3 \times 10^7 \right) \text{s} \times 10^{11} / \text{s} \cdot \text{cm}^2$$

$$= 5 \times 10^{-27} \text{cm}^2 = 5 \text{mb}. \quad (\text{林 辰})$$

2118 (Pri, 1982)

(a) 对于能量很低的中子, 其弹性散射截面怎样随能量发生变化; (b) 假设非共振散射, 估计热中子和 ^3He 散射的弹性散射截面是多少? (c) 利用图 2.40 给出的 $A=4$ 的能级图, 估算 ^3He 对热中子吸收截面, 这里共振散射较为重要.

解: (a) 对能量很低的热中子, 中子和轻、较轻核的弹

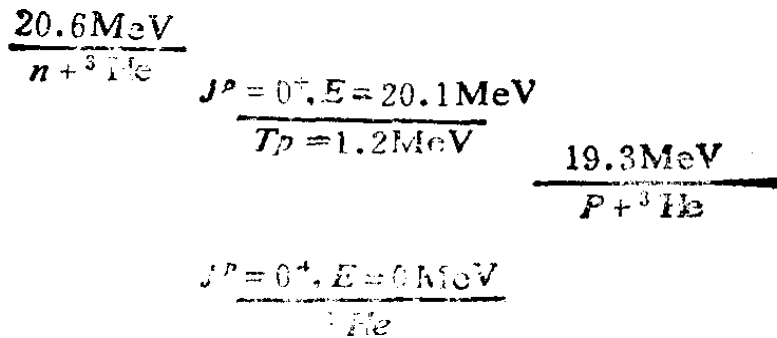


图2.40

性散射截面与中子能量无关，在较大的 E_n 范围是常数，但对较重的核，很小的中子能量可使某些核共振散射，如 ${}^{157}\text{Gd}$ ，对 $E_n = 0.044\text{eV}$ 时，即有共振散射。

(b) 热中子与核的非共振散射截面近似等于 $4\pi R_0^2$ 。其中 R_0 为道半径，其值为入射粒子和靶核的半径之和。对 ${}^3\text{He}$ 的热中子弹性散射截面，利用核半径的近似式：

$$R \approx 1.5 \times 10^{-13} A^{1/3},$$

得到

$$R_0 \approx 3.7 \times 10^{-13} \text{cm}.$$

弹性散射截面：

$$\sigma = 4\pi R_0^2 \approx 1.7 \times 10^{-24} (\text{cm}^2) = 1.7 \text{b}.$$

(c) 利用 Breit-Wigner 公式：

$$\sigma_{n,b} = \pi \lambda^2 \frac{\Gamma_n \Gamma_b}{(E' - E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$$

可以求出 ${}^3\text{He}$ 共振俘获中子的截面。 λ 为折合约化波长， E' 为入射粒子的能量， E_0 为共振能量。 Γ_n 和 Γ_b 为共振态到中子和 b 态的部分宽度。 Γ 为衰变总宽度。

对实验室中的热中子：

$$E_n = 0.025\text{eV},$$

$$\lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu E'}} = \frac{\hbar}{\sqrt{2 \frac{m_n m_{3\text{He}}}{m_n + m_{3\text{He}}} E'}}$$

$$\approx \frac{\hbar}{\sqrt{\frac{9}{8} E_n m_n}} = 3.08 \times 10^{-9} (\text{cm}).$$

由于 ${}^4\text{He}$ 的第一激发态和基态均为 0^+ ,故 $\Gamma_\gamma = 0$,只有从 ${}^4\text{He}$ 激发态到质子的出射道. $\Gamma = \Gamma_n + \Gamma_p$,查得 $\Gamma_n \approx 150$ (eV), $\Gamma \approx \Gamma_p = 1.2 \text{MeV}$. 代入 $E' = 20.6 \text{MeV}$, $E = 20.1 \text{MeV}$. 有:

$$\sigma = \pi \lambda^2 \frac{\Gamma_n \Gamma_p}{(E' - E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \approx 8800 \times 10^{-24} (\text{cm}^2)$$

$$\approx 8800 (\text{b}). \quad (\text{黄晓舟})$$

2119 (Col, 1975)

低能中子-核散射的典型截面为: $10^{-16}, 10^{-24}, 10^{-18}, 10^{-40} (\text{cm}^2)$.

解: 应为 10^{-24}cm^2 . 因为核力作用半径为 $10^{-12} \sim 10^{-13} \text{cm}$. 典型散射截面可估算为相应的面积. (周平)

2120 (Pri, 1978)

用 26MeV 的氘核进行 ${}^{21}\text{Ne}(d, {}^3\text{He}){}^{20}\text{F}$ 反应, ${}^{20}\text{F}$ 有很多激发态, 角分布显示直接相互作用机制且很容易鉴别质子所传递的角动量是 $l_p = 0, 1, 2$.

图2.41给出了 ${}^{21}\text{Ne}$ 的低能态和 ${}^{20}\text{F}$ 的低于 4MeV 的能级(这里略去了 ${}^{20}\text{F}$ 的很多正能级).

在 $(d, {}^3\text{He})$ 反应中, 观察到 $l_p = 1$ 的强度函数约为

$$S(1^-) = 0.84, S(2_1^-) = 0.78,$$

$$S(2_2^-) = 0.79, S(3^-) = 0.00.$$

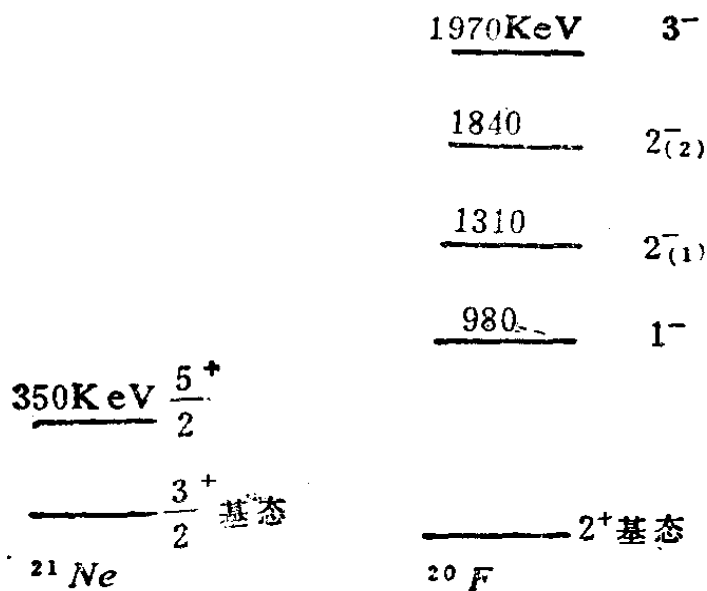


图 2.41

(a) 如果靶 ${}^{21}\text{Ne}$ 和末态 ${}^{20}\text{F}$ 均为 $(1s-0d)$ 组态, 它们都有正宇称, 所以要求有 $l_p = 0$ 和 $l_p = 2$ 的反应. 另一方面, ${}^{20}\text{F}$ 的负宇称态是由 $l_p = 1$ 激发的, 试解释.

(b) 为解释在 ${}^{20}\text{F}$ 中观测到的负宇称态, 试图用 ${}^{21}\text{Ne}$ 态的空穴弱耦合的耦合模型, 在这个模型中, ${}^{21}\text{N}$ 核是失去一个质子并给出上面的能级图. 指出怎样解释 ${}^{20}\text{F}$ 的负宇称态.

(c) 弱耦合极限, 也就是没有剩余相互作用在空穴和粒子之间存在, 四个负宇称态的相对能量是怎样的.

(d) 如果有弱的空穴和粒子相互作用, 这个效应又是怎样的? 根据这种新的情况, 给出四个负宇称态的能量相应的重心.

(e) 弱耦合模型和直接反应理论给出了对各种末态的相对作用截面(强度函数)预言值. 比较理论预言值和上面给出的观测值. 最后, 指出如何得到与 d 预言值符合更好些.

解: (a) 反应过程为强作用, 宇称守恒, 要求初末态宇称的变化等于质子所带走的宇称.

(b) 为解释在 ${}^{20}\text{F}$ 中观测到的负宇称态, 试图用 ${}^{21}\text{Ne}$ 态的空穴弱耦合的耦合模型, 在这个模型中, ${}^{21}\text{N}$ 核是失去一个质子并给出上面的能级图. 指出怎样解释 ${}^{20}\text{F}$ 的负宇称态.

$$P(P^-)P({}^{21}\text{He}) = P({}^{19}\text{F}),$$

$$P(^{21}\text{He}) = P(^{20}\text{F}) \cdot (-1)^{l_p}.$$

当 ^{20}F 和 ^{21}Ne 均为偶宇称态时, $(-1)^{l_p} = 1$, $l_p = 0, 2, \dots$, 由总角动量守恒可知, l_p 可能为0, 1, 2. 上述情况限定了 $l_p = 0, 2$. 同样的道理, 对 ^{20}F 的负宇称态, 质子所带走的角动量只能为1, 3, \dots . 对 ^{20}F 的 1^- 和 2^- 态, $l_p = 1$.

(b) 由弱耦合理论, 对末态核, 一个质子空穴可能存在于 $2s_{1/2}$, $1p_{1/2}$, $1p_{3/2}$ 等态上, 而一个中子可能存在于 $1d_{3/2}$, $1d_{5/2}$, $2s_{1/2}$ 等态上, 对于 ^{19}F 的负宇称态可以看作处于 $1p_{1/2}$ 态的质子空穴与处于 $1d_{3/2}$, $1d_{5/2}$ 等态的核子心的耦合, 如对于 1^- 态可写成:

$$|1M\rangle = |1p_{1/2}^{-1}, 1d_{3/2}; 1, M\rangle \quad (1)$$

其中 $1p_{1/2}^{-1}$ 表示处于 $1p_{1/2}$ 态的质子空穴. $1d_{3/2}$ 表示处于 $1d_{3/2}$ 的中子.

(1)式的右边可写作:

$$\begin{aligned} & |1p_{1/2}^{-1}1d_{3/2}; 1, M\rangle \\ &= \sum_{m_1, m_2} \langle \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, m_1, m_2 | 1, M \rangle \psi_{1/2, m_1} \psi_{3/2, m_2}. \end{aligned}$$

同理, 2^- 可表示为

$$\begin{aligned} & |1p_{1/2}^{-1}, 1d_{3/2}; 2, M\rangle \text{和} \\ & |1p_{1/2}^{-1}, 1d_{5/2}; 2, m\rangle, \end{aligned}$$

3^- 可表示为

$$|1p_{1/2}^{-1}, 1d_{5/2}; 3, M\rangle.$$

$$(c) H = H_p + H_h + V_{ph}.$$

H_p 为核心的哈密顿量, H_h 为空穴的哈密顿量, V_{ph} 空穴和核心的耦合项, 当弱耦合时, 有:

$$V_{ph} = 0,$$

$$H_p \psi(a_1, j_1, m_1) = E_{a_1, j_1, m_1} \psi(a_1, j_1, m_1),$$

$$H_h \phi(a_2, j_2, m_2) = E_{a_1, j_1, m_1} \phi(a_2, j_2, m_2).$$

对于各态能量可求得:

$$\text{对 } 3^-: E_{3^-} = E_p(1d_{5/2}) + E_h(1p_{1/2}),$$

$$2_1^-: E_{2_1^-} = E_p(1d_{5/2}) + E_h(1p_{1/2}),$$

$$2_2^-: E_{2_2^-} = E_p(1d_{3/2}) + E_h(1p_{1/2}),$$

$$1^-: E_{1^-} = E_p(1d_{3/2}) + E_h(1p_{1/2}).$$

得到 $E_{3^-} = E_{2_1^-}$, $E_{2_2^-} = E_{1^-}$, 如图 2.42 所示, 其值为

$$1230 \text{KeV} \text{-----} 2^-, 3^-$$

$$890 \text{KeV} \text{-----} 1^-, 2^-$$

$$0 \text{-----} 2^+$$

图 2.42

$$E_{3^-} = E_{2_1^-} = 1230 \text{keV},$$

$$E_{2_2^-} = E_{1^-} = 890 \text{keV}.$$

(d) 如果 $V_{ph} \neq 0$, 即耦合作用存在.

$$E_{3^-} = H_p(1d_{5/2}) + H_h(1p_{1/2})$$

$$+ \langle 1p_{1/2}^{-1}, 1d_{5/2}, 3^- | V_{ph} | 1p_{1/2}^{-1}, 1d_{5/2}, 3^- \rangle.$$

$$E_{1^-} = H_p(1d_{3/2}) + H_h(1p_{1/2})$$

$$+ \langle 1p_{1/2}^{-1}, 1d_{3/2}, 1^- | V_{ph} | 1p_{1/2}^{-1}, 1d_{3/2}, 1^- \rangle.$$

结果为 $\langle 1p_{1/2}^{-1}, 1d_{5/2}, 3^- | V_{ph} | 1p_{1/2}^{-1}, 1d_{5/2}, 3^- \rangle$
 $\approx 0.7 \text{MeV}.$

$$\langle 1p_{1/2}^{-1}, 1d_{3/2}, 1^- | V_{ph} | 1p_{1/2}^{-1}, 1d_{3/2}, 1^- \rangle$$

$$= 0.1 \text{MeV}.$$

而 $\langle 1p_{1/2}^{-1}, 1d_{5/2}, 2^- | V_{ph} | 1p_{1/2}^{-1}, 1d_{5/2}, 2^- \rangle$
 $= 0.45 \text{MeV}.$

$$\langle 1p_{1/2}^{-1}, 1d_{3/2}, 2^{-} | V_{ph} | 1p_{1/2}^{-1}, 1d_{3/2}, 2^{-} \rangle = 0.25 \text{ MeV}.$$

$$\begin{aligned} & \langle 1p_{3/2}^{-1}, 1d_{5/2}, 2^{-} | V_{ph} | 1p_{1/2}^{-1}, 1d_{3/2}, 2^{-} \rangle \\ &= \langle 1p_{1/2}^{-1}, 1d_{3/2}, 2^{-} | V_{ph} | 1p_{1/2}^{-1}, 1d_{5/2}, 2^{-} \rangle \\ &= 0.3 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

代入上面结果有:

$$E'_{3^{-}} = 0.9 + 0.35 + 0.7 \approx 1.95 (\text{MeV}),$$

$$E'_{1^{-}} = 0.9 + 0.1 = 1.00 (\text{MeV}).$$

$E_{2^{-}}^1$ 和 $E_{2^{-}}^2$ 为下列矩阵之本征值:

$$\begin{pmatrix} \langle 1p_{1/2}^{-1}, 1d_{5/2}, 2^{-} | H | 1p_{1/2}^{-1}, 1d_{5/2}, 2^{-} \rangle, \\ \langle 1p_{1/2}^{-1}, 1d_{3/2}, 2^{-} | H | 1p_{1/2}^{-1}, 1d_{5/2}, 2^{-} \rangle, \\ \langle 1p_{1/2}^{-1}, 1d_{5/2}, 2^{-} | H | 1p_{1/2}^{-1}, 1d_{3/2}, 2^{-} \rangle \\ \langle 1p_{1/2}^{-1}, 1d_{3/2}, 2^{-} | H | 1p_{1/2}^{-1}, 1d_{3/2}, 2^{-} \rangle \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix} \lambda - 1.95 & -0.3 \\ -0.3 & \lambda - 1.1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\lambda_1 = 1.80 \text{ MeV}, \quad \lambda_2 = 1.26 \text{ MeV},$$

即

$$E_{2^{-}}^1 = 1.80 \text{ MeV}, \quad E_{2^{-}}^2 = 1.26 \text{ MeV}.$$

它们的能级如图 2.43 所示.

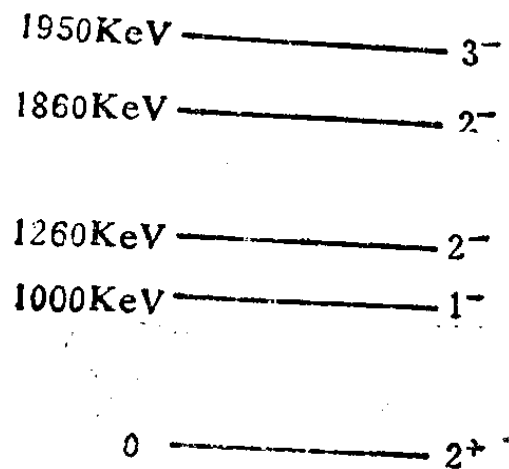


图 2.43

(e) 下面给出几种理论所预言的强度函数,

	Nilson模型	PHF	壳模型	实验值
$S(1^-)$	0.70	0.76	0.59	0.84
$S(2_2^-)$	0.93	0.20	0.72	0.78
$S(2_1^-)$	0.28	0.20	0.23	0.79
$S(3^-)$			0.002	0.00

特别是 $S(2_1^-)$, 理论值均比实验值小.

第三篇 粒子物理

§ 1 相互作用和对称性(3001—3037)

3001 (Col, 1979)

基本粒子之间相互作用通常按强度递减分为：强、电磁、弱和引力相互作用。

(a) 尽可能精确定量地解释强度指什么及它们的相对强度比较。

(b) 对前三种相互作用，各有什么守恒定律成立？用实验证据说明之。

解：(a) 相互作用的类型可用它们的耦合常数来区分。耦合常数是和相互作用截面、相互作用时间有关的无量纲的量，它表示相互作用类型之间的耦合强弱不同，作用强表示相互作用截面大，作用时间短。

强作用：力程为 10^{-13} cm，如核子之间的势可写成

$$V(r) = g \cdot \frac{e^{-r/R}}{r}.$$

指数表示短程力。 $R \approx \frac{\hbar}{m_{\pi}c}$ 为 π 介子的康普顿波长，耦合常数为无量纲的量。

$$g^2/\hbar c \approx 1-10.$$

电磁相互作用：两电荷为 e ，相距为 r 的粒子之间的位势可写成：

$$V_e(r) = \frac{e^2}{r}$$

耦合常数是用无量纲的精细结构常数 α 表示，

$$\alpha = \frac{e^2}{c\hbar} \approx \frac{1}{137}$$

弱作用：用 β 衰变中的费米耦合常数来表示，

$$G_F = 1.4 \times 10^{-49} \text{erg} \cdot \text{cm}^3$$

弱作用也是短程力，而粒子之间的弱作用势为

$$g_w \frac{e^{-\frac{r}{R_w}}}{r}$$

R_w 为弱作用力程，目前认为 $R_w \approx 10^{-16} \text{cm}$ 。弱作用耦合常数写成：

$$\frac{g_w^2}{\hbar c} = \frac{G_F m_p^2 c}{\hbar^3} \approx 10^{-5}$$

引力相互作用：以两个质子为例，势写成：

$$\frac{Gm_p^2}{r}$$

写成无量纲的耦合常数：

$$\frac{Gm_p^2}{c\hbar} \approx 6 \times 10^{-39}$$

因为都是无量纲的量，故它们之间相互作用强度差别可以直接用耦合常数来比较，例如，两质子之间的引力和电磁力强度之比：

$$\frac{Gm_p^2}{e^2} \approx 10^{-36}$$

在粒子物理中，常常忽略引力相互作用。四种相互作用的性质见下表：

相互作用	耦合常数形式	强度大小	力程	典型截面	典型寿命
强	$\alpha_s = \frac{g^2}{c\hbar}$	1—10	10^{-13} cm	10^{-26} cm ²	10^{-23} s
电磁	$\alpha = \frac{e^2}{c\hbar}$	$\frac{1}{137}$	∞	10^{-29} cm ²	10^{-16} s
弱作用	$\alpha_w = \frac{g_w^2}{c\hbar} = \frac{G_F m_p^2 c}{\hbar^3}$	10^{-5}	10^{-16} cm	10^{-38} cm ²	10^{-10} s
引力作用	$\frac{G m_p^2}{c\hbar}$	10^{-39}			

(b) 强、电磁和弱相互作用各遵守的守恒定律见下表，表中×为守恒律破坏，√为遵守该守恒定律，×为在某些反应中已发现该定律破坏。

守恒量	E	J	P	Q	B	$L, (L_0)$	I	I_3	S	P	C	T	PC	G
强作用	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√
电磁作用	√	√	√	√	√	√	×	√	√	√	√	√	√	×
弱作用	√	√	√	√	√	√	×	×	×	×	×	×	×	×

强相互作用遵守所有守恒定律。例如，用同位旋耦合来计算强相互作用的核子散射，核子与 π 散射等都与实验符合较好。

电磁相互作用中， I 不守恒，如 Σ^0 的电磁衰变 $\Delta I = 1$ ，($\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$)。

弱作用中 I, I_3, S, P, C, T, PC 均不守恒，例如 K_L^0 的 2π 衰变，($K_L^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$)即破坏了 PC 守恒，因 PCT 守恒，故也破坏了时间反演不变性。
(王力军)

3002 (CCT, 1983)

地球和月球之间的静电力可以忽略。(a)因为它比万有引力小得多；(b)因为地球和月球都是电中性的；(c)由于潮汐效应。

解: 答案为(b). 因静电相互作用的物体本身必须带电荷, 而地球和月球都是电中性的, 所以没有静电作用。(马 骥)

3003 (Wis, 1972)

(a) 解释下列几个名词: 玻色子、费米子、强子、轻子、重子。
(b) 上述各类粒子各举一例; (c) 上述名词哪些适用于光子, 哪些不适用于光子。

解: (a) 玻色子: 自旋为整数的粒子;
费米子: 自旋为半整数的粒子;
强子: 参与强相互作用的粒子;
轻子: 不参与强作用, 只参与弱作用的粒子 (有电荷的, 有电磁作用);
重子: 自旋为半整数的强子。

(b) 玻色子, 如 π 介子; 费米子, 如质子; 强子, 如质子;
轻子, 如各类型的中微子; 重子, 如质子和中子。

(c) 玻色子适用于光子。费米子, 强子, 轻子和重子都不适用于光子。
(钱剑明)

3004 (CCT, 1983)

为什么质子有宇称而 μ 子没有? (a) 宇称在电磁作用中不守恒; (b) 人们对质子更熟悉; (c) 宇称是从互相关联的反应中定义的, 所以它对质子有意义而对 μ 子没有意义。

解: 答案为(c) (唐子洲)

3005 (Buf, 1982)

G 宇称算符是什么? 为什么粒子物理中引入 G 算符?
 \hat{G} 对 π 介子的本征值及对 n 个 π 介子的本征值如何? $\rho, \omega,$

ϕ 及 η^0 的 G 值是多少?

解: G 算符定义为: $G = Ce^{i\pi I}$.

因为 C 宇称只有对纯中性粒子或纯中性粒子系统才有其本征值. 定义 G 宇称后, 带电粒子也可能是 G 宇称的本征态, 在强作用中, G 宇称守恒. 它反映在强相互作用中的一种对称性. 对于有纯中性粒子成员的同一同位旋多重态, G 宇称算符的本征值为

$$G = C(-1)^I.$$

C 为纯中性粒子的值, I 为同位旋. 对 π 介子, $C(\pi^0) = +1$, $I = 1$, 所以 $G = -1$, 对 n 个 π 介子 $G(n\pi) = (-1)^n$;

对 ρ 介子, $C(\rho^0) = -1$, $I(\rho) = 1$, $G(\rho) = +1$;

对 ω 介子, $C(\omega^0) = -1$, $I(\omega^0) = 0$, $G(\omega) = -1$;

对 ϕ 介子, $C(\phi) = -1$, $I(\phi) = 0$, $G(\phi) = -1$;

对 η^0 介子, $C(\eta^0) = +1$. $I(\eta^0) = 0$, $G(\eta^0) = +1$.

对 ρ, ω, ϕ 介子也可以从衰变中得到 G 值, 因它们的衰变为强衰变, 宇称 G 守恒.

$$\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-, \quad G(\rho) = (-1)^2 = 1;$$

$$\omega \rightarrow 3\pi, \quad G(\omega) = (-1)^3 = -1;$$

$$\phi \rightarrow 3\pi, \quad G(\phi) = (-1)^3 = -1.$$

至于 η^0 的衰变, 因为是电磁衰变, G 不守恒, 故不能从 η^0 的衰变给出 η^0 的 G 宇称. (邹兴宇)

3006 (Wis, 1970)

以下是一系列粒子间相互作用的守恒律(或对称性). 在每一个后面用 S, E, W 表示该类相互作用——强, 电磁, 弱——没有观察到违背这一对称性或守恒律. 对于这些守恒律中的任何一个, 指出一个实验, 它给出了一个违背的例子.

(a)同位旋守恒;(b)同位旋 I_3 分量守恒;(c)奇异数守恒;
(d) CP 不变性.

解: (a)同位旋守恒 (S).

(b)同位旋 I_3 分量守恒 (S, E).

(c)奇异数守恒 (S, E).

(d) CP 不变性. (S, E, W 仅在 K_L 衰变中发现 CP 破坏).

同位旋 I 不守恒的实验可由 $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$ 衰变 (电磁衰变) 观察.

同位旋第三分量 I_3 不守恒的实验可观测衰变过程: $\pi^- \rightarrow \mu^- + \nu_\mu$. 衰变前后 I_3 不同.

奇异数不守恒的例子可观察奇异粒子的弱衰变: 例如 $\Lambda^0 \rightarrow \pi^- + p$. 这时衰变前 $S = -1$, 衰变产物 $S = 0$, 故 $\Delta S = -1$.

目前只有一个实验观察到 CP 守恒破坏, 即 K_L^0 的衰变. 实验测量 K_L^0 的 3π 和 2π 衰变, 得到:

$$\eta = \frac{B(K_L^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)}{B(K_L^0 \rightarrow \text{所有带电粒子})} \approx 2 \times 10^{-3}.$$

说明在 K_L^0 衰变中, CP 守恒破坏, 但破坏很小. (林 辰)

3007 (CCT, 1983)

只包含一个奇异粒子的态: (a)能衰变成一个零奇异数的态; (b)能够从一个零奇异数态强产生; (c)不可能存在.

解: 答案为(a). 奇异粒子是强产生、弱衰变的. 强作用中, 奇异数守恒; 而弱作用中, 奇异数是不守恒的.

(唐子洲)

3008 (CCT, 1983)

一个粒子和其反粒子：(a)一定有相同的质量；(b)一定互不相同；(c)总可以湮没形成两个光子。

解：答案为(a)。根据对称性，要求正反粒子质量相同。
(唐子洲)

3009 (Col, 1978)

简述下列物理问题：(1) J/ψ 粒子；(2) 中性 K 介子系统，包括 K_s 再生；(3) 两类中微子；(4) 中子电偶极矩；(5) 协同产生；(6) β 衰变的 Fermi 理论；(7) μ 子的反常磁矩。

解：(1) J/ψ 粒子。1974 年，丁肇中和 B. Richter 等同时用不同的方法发现了一个重介子， $M=3.1\text{GeV}$ 。但其寿命约比同样质量的介子长 3~4 个数量级，说明它在粒子物理中处在特殊的位置，被命名为 J/ψ 。研究表明， J/ψ 是由一种新的称为粲夸克及其反夸克组成的束缚态。 J/ψ 通过所谓 OZI 规律衰变成非粲数粒子，或通过电磁作用衰变成轻子对，故它有较长的寿命，它的量子数为

$$m(J/\psi) = (3096.9 \pm 0.1) \text{ MeV}, \quad \Gamma = (63 \pm 9) \text{ keV},$$

$$I^G(J^P)C = 0^-(1^-) - .$$

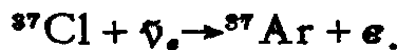
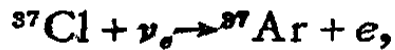
它的各种衰变已被详细研究。 J/ψ 和其它粲介子粲重子形成粲粒子家族。大大丰富了粒子物理学的内容。

(2) 中性 K 介子，包括 K_s 再生。(见 3056~3058 题)。

(3) 两类中微子。

泡利(W. Pauli)于 1933 年提出中微子假设，用于解释 β 衰变连续谱及核自旋等。目前已实验证实中微子是一种质量很小，自旋为 $\frac{1}{2}$ 的费米子。

实验发现：和 β 衰变产生的电子中微子及和 π 衰变相应的 μ 子中微子是两种不同的中微子。另外，中微子和反中微子也是两种不同的粒子。证明 ν_e 和 $\bar{\nu}_e$ 为不同类型的实验是中微子吸收实验：



如果 ν_e 和 $\bar{\nu}_e$ 是同一种中微子，则两种反应是一样的。若 ν_e 和 $\bar{\nu}_e$ 不同，则第二种反应是禁戒的。用反应堆出来的反中微子做上述实验，结果证实，第二种反应截面远小于理论值，说明 ν_e 和 $\bar{\nu}_e$ 不同。

证明 ν_e 和 $\bar{\nu}_e$ 不同的实验是用 ν_μ 来打靶，比较下列反应：



若 $\nu_e(\bar{\nu}_e)$ 和 $\nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)$ 是一种中微子，则用 $\nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)$ 做实验，产生的 e^+ 和 μ^+ 应是一样的；若 $\nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)$ 和 $\nu_e(\bar{\nu}_e)$ 不同，则产生 e^+ 的反应是禁戒的。实验结果，有51个 μ 事例，但未见肯定的电子事例，说明 $\nu_e(\bar{\nu}_e)$ 和 $\nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)$ 是两类不同的中微子。

(4) 中子的电偶极矩.

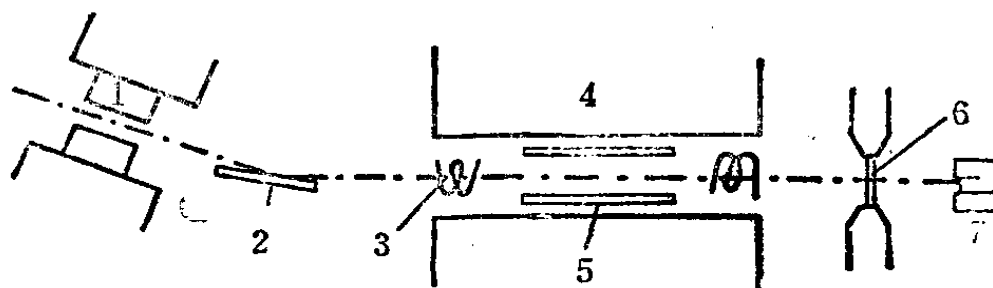
中子的电偶极矩测量一直是人们注重的问題，因为它可直接检验时间反演不变性。如图3.1所示。测量中子电偶极矩的方法之一是核磁共振加静电偏转方法，给出 $p_n = eD$ ， $D = (-1 \pm 4) \times 10^{-21} \text{cm}$ 。其中 e 是电子电荷。 D 是电偶极子电荷之间的距离。1976年有人用冷中子做实验，给出

$$D = (0.4 \pm 1.1) \times 10^{-24} \text{cm}$$

即在实验误差范围内，未见中子有电偶极矩。

(5) 协同产生.

1947年人们首先在宇宙线中发现一类粒子. 它有介子和重子两类, 这类粒子的最大特点是强产生和弱衰变. 在强产



1—准直器 2—磁性极化器 3—高频线圈
4—永久磁铁 5—电场电极 6—磁性穿透型分析器
7—中子探测器

图 3.1

生过程中, 由于各类量子数守恒, 这些粒子往往成对产生, 这种现象称为协同产生, 并且因为这类粒子带有奇异数, 故称为奇异粒子. 在强作用产生过程中带有正负奇异数的介子 K^+, K^0 和 Λ^0, Σ 往往同时产生, 在衰变中, 由于弱作用中奇异数不守恒. 奇异粒子可单独衰变成一般粒子. 这类粒子的协同产生和单独衰变特点引起人们很大兴趣. 内因是这类粒子包含有奇异夸克(或反夸克).

(6) β 衰变 Fermi 理论.

1934年费米(Fermi)参照电磁跃迁理论, 建立起 β 衰变理论, 他的基本思想是: 电子和中微子是在衰变过程中产生的, 正像原子或核发射 γ 射线一样, 很简单的办法可以导出 β 衰变中电子能谱的形状:

$$\left[\frac{dI(p_e)}{p_e^2 F dp_e} \right]^{\frac{1}{2}} = C |M_{ij}|^2 (E_0 - E_e),$$

式中： $dI(p)$ 为电子量为 p 时的发射几率， P_e, E_e 为电子的动量和能量， E_0 为电子的最大能量， C 为常数， M_{ij} 为弱作用跃迁矩阵元，该理论可以很好解释 β 衰变现象。费米理论一直用于弱作用。直到 1956 年发现弱作用中宇称不守恒。理论才作一些修改，但修改后的理论还是十分接近费米原来的陈述。可以说费米理论是描述弱作用的基本理论。

(7) μ 子的反常磁矩。

按照狄拉克理论，严格的狄拉克粒子，自旋为 J ，质量为 m 的单电荷粒子，磁矩 μ 为：

$$\mu = \frac{J}{me} = g \frac{J}{2mc}$$

对 μ ， $g = -2$ 。但是，物理粒子不是严格的狄拉克粒子。即 μ 子的 g 因子不是 -2 ，称 μ 子有反常磁矩。理论上可以用量子电动力学计算，令：

$$\alpha = \frac{|g| - 2}{2}$$

理论计算的费曼图如图 3.2。

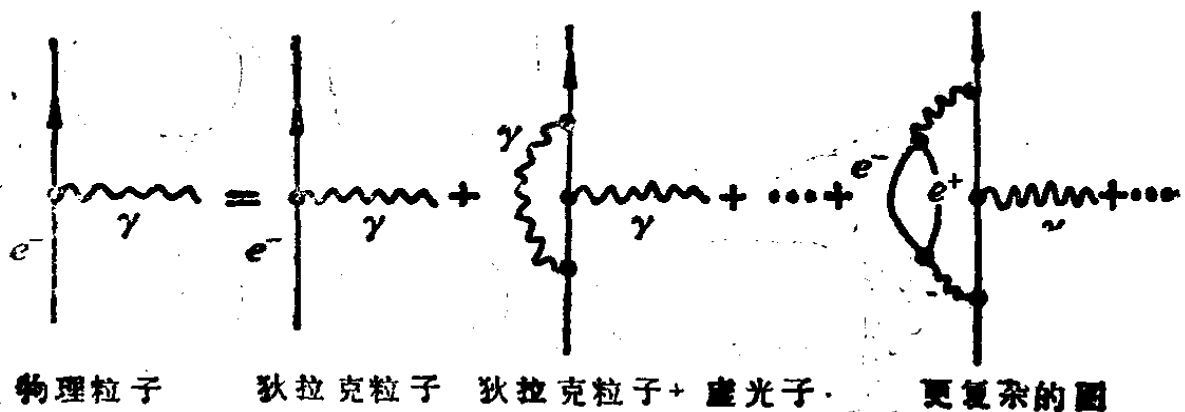


图 3.2

$$\alpha_{\mu}^{13} = \frac{\alpha}{2\pi} + 0.76578 \frac{\alpha^2}{\pi^2} + 2.55 \frac{\alpha^3}{\pi^3} + \dots$$

$$= (116592.1 \pm 1.0) \times 10^{-8}.$$

实验上可以精确测量 μ 子的反常磁矩值:

$$\alpha_{\mu}^{02D} = (116592.2 \pm 0.9) \times 10^{-8}, \quad (1975 \text{ 年值}).$$

两者符合得如此之好, 这是量子电动力学的最出色的成就.

(杨保忠)

3010 (Col, 1975)

μ 子的寿命为 $10^0, 10^2, 10^{-2}, 10^{-6}$ 秒.

解: 10^{-6} 秒. $\tau_{\mu} = 2.2 \times 10^{-6}$ 秒 $\approx 10^{-6}$ 秒. (周平)

3011 (Wis, 1975)

列出所有已发现的轻子, μ^+ 如何衰变? 考虑 μ^+ 衰变和反应 $\nu_{\mu} + n \rightarrow e^- + p$ 是禁戒的这一事实, 讨论使得满足附加量子数守恒定律可能的量子数. 利用 ν_{μ} 怎样才能产生一种新的“重轻子”?

解: 目前已经发现的轻子有 10 种, 它们是: $e^-, \nu_e, \mu^-, \nu_{\mu}, \tau^-$ 及其它们的反粒子 $e^+, \bar{\nu}_e, \mu^+, \bar{\nu}_{\mu}, \tau^+$. 理论上还预言存在 ν_{τ} 及其反粒子 $\bar{\nu}_{\tau}$, 但还没有被直接观察到.

μ^+ 的衰变方程为: $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_{\mu}$.

我们可以将此方程写成 $\bar{\nu}_e + \mu^+ \rightarrow e^+ + \bar{\nu}_{\mu}$, 而反应 $\nu_{\mu} + n \rightarrow e^- + p$ 是禁戒的. 由这两个截然不同的反应可以看出, 能够实现的有轻子参加的反应, 初态中若有某种轻子, 则末态中必有相应种类的轻子. 我们可以定义这样一种轻子量子数(轻子数), 对 ν_e 和 e^- 定义其电子轻子数为 +1, 即 $L_e = +1$, 对 ν_{μ} 和 μ^- 定义其 μ^- 子轻子数 $L_{\mu} = +1$, 它们的反

粒子的轻子数相应地改变符号。由此附加的量子数守恒定律为：电子轻子数和 μ 子轻子数在反应过程中分别守恒。

由上述守恒定律知，产生一种新的带电重轻子，必定要满足与此类轻子相应的轻子数守恒定律。 ν_μ 与 n 反应可以产生新的带电“重轻子”：

$$\nu_\mu + n \rightarrow A^+ + \nu_\Delta + \mu^- + X,$$

其中 A^+ 表示新的带电重轻子， ν_Δ 表示此类轻子的中微子， X 为重子。例如 A^+ 为 τ^+ ， ν_Δ 为 ν_τ 等。 (钱剑明)

3012 (Wis, 1976)

写出下列各粒子的主要衰变方式(分支比大于 5%)，如果在末态中包含中微子，请说明它们的类型。 [$n, \pi^+, \rho^0, K^0, \Lambda^0, \Delta^{++}, \mu^-, \phi, \Omega^-, \psi$ (或 J)]。

解： $n \rightarrow pe^- \bar{\nu}_e$ ； $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ ； $\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ ； $K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ ， $\pi^0 \pi^0$ ， $\pi^0 \pi^0 \pi^0$ ， $\pi^+ \pi^- \pi^0$ ， $\pi^\pm \mu^\mp \nu_\mu$ ， $\mu^\pm \pi^\pm e^\mp \nu_e$ ； $\Lambda^0 \rightarrow p \pi^-$ ， $n \pi^0$ ； $\Delta^{++} \rightarrow N \pi$ ； $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$ ； $\phi \rightarrow K^+ K^-$ ， $K_L^0 K_S^0$ ， $\pi^+ \pi^- \pi^0$ ； $\Omega^- \rightarrow \Lambda K^-$ ， $\Xi^0 \pi^-$ ， $\Xi^- \pi^0$ ； ψ (或 J) $\rightarrow e^+ e^-$ ， $\mu^+ \mu^-$ ，强子。如果末态有中微子，则一定是弱衰变。 (胡平)

3013 (Wis 1972)

考虑下列高能反应或核子衰变：

- (1) $\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$ ； (2) $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma + \gamma$ ； (3) $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ ；
 (4) $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ ； (5) $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \bar{\nu}_\mu$ ； (6) $p + \bar{p} \rightarrow \Lambda^0 + \Lambda^0$ ；
 (7) $p + \bar{p} \rightarrow \gamma$ 。

对于每个过程指出：(a) 允许还是**禁戒**？(b) 如果是**禁戒**，是什么原因？(c) 如果允许，那么是什么类型的相互作用？(如：强作用、弱作用、电磁作用等)。

解: (1) $\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$. 各种量子数均守恒, 强作用允许过程.

(2) $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma + \gamma$, $C(\pi^0) = +1$, $C(\gamma) = -1$. $C(\pi^0) \neq (-1)^3$. 该过程 C 宇称禁戒.

(3) $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$, 允许, 是电磁衰变.

(4) $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$, 允许, 弱衰变.

(5) $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \bar{\nu}_\mu$, $L_\mu; 0, -1, -1$.

左边 $L_\mu = 0$, 右边 $L_\mu = -2$.

禁戒, μ 轻子数不守恒.

(6) $p + \bar{p} \rightarrow \Lambda^0 + \Lambda^0$,

$$B \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad \Delta B = -2,$$

$$S \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad -1 \quad \Delta S = +2,$$

禁戒, 重子数不守恒, $|\Delta S| > 2$.

(7) $p + \bar{p} \rightarrow \gamma$.

禁戒, 不能使角动量和宇称同时守恒, 也不能使动量和能量同时守恒. 如:

$$W^2(p + \bar{p}) = (E_p + E_{\bar{p}})^2 - (p_p + \bar{p})^2 = m_p^2 + m_p^2 + 2(E_p E_{\bar{p}} - p_p \cdot p_{\bar{p}}).$$

由 $E^2 = p^2 + m^2$. $E \geq |p|$. $W(p + \bar{p}) \geq 0$. 但是 $W(r) \equiv 0$.

$W(p + \bar{p}) \neq W(r)$.

(林 辰)

3014 (Wis, 1973)

对于下列每个中子衰变道, 哪些守恒定律使其禁戒.

$n \rightarrow p + e^-$; $n \rightarrow \pi^+ + e^-$; $n \rightarrow p + \pi^-$; $n \rightarrow p + \gamma$.

解: $n \rightarrow p + e^-$, 违背了角动量守恒、轻子数守恒定律.

$n \rightarrow \pi^+ + e^-$, 违背了重子数、轻子数守恒定律.

$n \rightarrow p + \pi^-$, 违背了能量守恒定律.

$n \rightarrow p + \gamma$, 违背了电荷守恒定律.

这些守恒定律使这些衰变道禁戒.

(钱剑明)

3015 (Wis, 1973)

什么守恒定律、不变性或其它机制使下列过程禁戒?

(1) $p + n \rightarrow p + \Lambda^0$

(6) $K_L^0 \rightarrow e^+ + e^-$;

(2) $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^+ + \pi^-$

(7) $K^- \rightarrow \pi^0 + e^-$;

+ $\pi^+ + \pi^0$;

(3) $\bar{K}^0 \rightarrow \pi^- + e^+ + \nu_e$;

(8) $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma + \gamma$;

(4) $\Lambda^0 \rightarrow K^0 + \pi^0$;

(9) $K_L^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$;

(5) $\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_e$ (相对于

(10) $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^0$.

$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$);

解: (1) 违反奇异数守恒和同位旋守恒定律.

(2) 违反能量守恒定律.

(3) $\Delta S = 1$, $\Delta Q = -1$, 违反弱作用中 $|\Delta S| = 1$ 时, $\Delta S = \Delta Q$ 的规律.

(4) 违反重子数守恒定律.

(5) 根据弱作用理论,

$$\frac{\lambda(\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_e)}{\lambda(\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu)} = 0.965 \left(\frac{m_e}{m_\mu} \right)^2 \left(\frac{m_\pi^2 - m_e^2}{m_\pi^2 - m_\mu^2} \right)^2$$

$$= 1.23 \times 10^{-4}, \text{ (见 3040 题).}$$

(6) $\Delta S = -1$, $\Delta Q = 0$, 违反弱作用中 $|\Delta S| = 1$ 时, $\Delta S = \Delta Q$ 的规律.

(7) 违反轻子数守恒定律.

(8) 违反 C 宇称守恒定律.

(9) C ρ 不守恒.

(10) 违反电荷守恒定律.

(胡 平)

3016 (Buf, 1981)

下列反应中哪些破坏了守恒定律? 指出这个守恒律:

$$\begin{aligned} \mu^+ &\rightarrow e^+ + \gamma; & e^- &\rightarrow \nu_e + \gamma; & n &\rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e; & p &\rightarrow n + e^+ + \nu_e; \\ \pi^+ &\rightarrow \mu^+ + \nu_\mu; & p &\rightarrow e^+ + \nu_e; & p + p &\rightarrow p + \Sigma^+ + K^-. \end{aligned}$$

解: $\mu^+ \rightarrow e^+ + \gamma$, 破坏了轻子数分别守恒的定律, 在任何相互作用过程中, 轻子数必须守恒.

$e^- \rightarrow \nu_e + \gamma$, $p + p \rightarrow p + \Sigma^+ + K^-$, 均破坏了电荷守恒定律.

$p \rightarrow e^+ + \nu_e$, 破坏了重子数守恒定律.

$p \rightarrow e^+ + n + \nu_e$, 破坏了能量守恒定律.

只有 $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ 和 $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ 两个反应是允许的.

(唐子洲)

3017 (Col, 1976)

(a) 解释为什么下列反应过程未观察到, 尽管入射质子的动能达到 GeV 量级.

$$\begin{aligned} (1) p + p &\rightarrow K^+ + \Sigma^+; & (3) p + n &\rightarrow \Xi^0 + p; \\ (2) p + n &\rightarrow \Lambda^0 + \Sigma^+; & (4) p + n &\rightarrow \Xi^- + K^+ + \Sigma^+. \end{aligned}$$

(b) 解释下列衰变过程为什么也未观测到的原因.

$$\begin{aligned} (1) \Xi^0 &\rightarrow \Sigma^0 + \Lambda^0; & (4) V^0 &\rightarrow K^+ + K^-; \\ (2) \Sigma^+ &\rightarrow \Lambda^0 + K^+ & (5) \Xi^0 &\rightarrow p + \pi^-; \\ (3) \Xi^- &\rightarrow n + \pi^-; \end{aligned}$$

下面给出一些粒子的参数, 回答问题时有些是有用的.

解: (a) 1—4 反应过程均是强相互作用过程, 强作用过程中各种守恒定律均成立, 若某些量子数不守恒, 则该过程

粒子	寿命	质量	自旋	奇异数	同位旋
π^\pm	2.55×10^{-8}	139.58	0	0	1
k	1.23×10^{-8}	493.98	0	± 1	1/2
p	stable	938.21	1/2	0	1/2
n	1.0×10^3	939.51	1/2	0	1/2
Λ^0	2.52×10^{-10}	1115.5	1/2	-1	0
e^+	0.81×10^{-10}	1189.5	1/2	-1	1
e^-	$< 10^{-14}$	1192.2	1/2	-1	1
Ξ^-	1.7×10^{-10}	1321	1/2	-2	1/2
Ξ^0	2.9×10^{-10}	1315	1/2	-2	1/2

被禁戒，实验上观察不到：

(1) $p + p \rightarrow K^+ + \Sigma^+$ ，重子数，同位旋及第三分量均不守恒。

(2) $p + n \rightarrow \Lambda^0 + \Sigma^+$ ，奇异数及同位旋第三分量不守恒 ($\Delta S = 2$)。

(3) $p + n \rightarrow \Xi^0 + p$ 同上。

(4) $p + n \rightarrow \Xi^- + K^+ + \Sigma^+$ 同上。

(b) 下列衰变过程均为奇异粒子的非轻子弱衰变过程。衰变前后，奇异数 S ，同位旋 I 和同位旋第三分量 I_3 的改变规律是 $|\Delta S| = 1$ ， $|\Delta I_3| = \frac{1}{2}$ ， $|\Delta I| = \frac{1}{2}$ 。

下面过程中：

(1) $\Xi^0 \rightarrow \Sigma^0 + \Lambda^0$ ，能量不守恒，重子数不守恒。

(2) $\Sigma^+ \rightarrow \Lambda^0 + K^+$ ，能量不守恒。

(3) $\Xi^- \rightarrow n + \pi^-$ ， $|\Delta S| = 2 > 1$ ， $|\Delta I_3| = 1 > \frac{1}{2}$ 。

(4) $\Lambda^0 \rightarrow K^+ + K^-$ ，重子数不守恒。

(5) $\Xi^0 \rightarrow p + \pi^-$ ， $|\Delta S| = 2 > 1$ ， $|\Delta I_3| = 1 > \frac{1}{2}$ 。

(管怀群)

3018(Col, 1983)

下面一些衰变过程：(a)哪一些自然界不发生？并标明什么守恒定律禁戒它们？(b)将剩下的按寿命增长的次序排列，写出衰变类型并给出寿命的数量级，对你的回答作简短的解释。

$$\begin{aligned} \rho^0 &\rightarrow \pi^+ + \pi^-; & \mu^- &\rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu; \\ \Omega^- &\rightarrow \Xi^0 + K^-; & \Xi^- &\rightarrow \Lambda^0 + \pi^-; \\ p &\rightarrow e^+ + \pi^0; & D^0 &\rightarrow K^- + \pi^+; \\ \pi^0 &\rightarrow \gamma + \gamma. \end{aligned}$$

下面给出一些粒子的量子数：

粒子名称	质量(MeV)	J	B	L	I	S	C
γ	0	1	0	0	0	0	0
ν_e	0	1/2	0	1	0	0	0
ν_μ	0	1/2	0	1	0	0	0
e^-	.5	1/2	0	1	0	0	0
μ^-	106	1/2	0	1	0	0	0
π^0	135	0	0	0	1	0	0
κ^-	494	0	0	0	1/2	-1	0
ρ^0	770	1	0	0	1	0	0
P	938	1/2	1	0	1/2	0	0
Λ^0	1116	1/2	1	0	0	-1	0
Ξ^-	1321	1/2	1	0	1/2	-2	0
Ω^-	1672	3/2	1	0	0	-3	0
D^0	1865	0	0	0	1/2	0	1

解：(a) $p \rightarrow e^+ + \pi^0$ ，轻子数和重子数不守恒，禁戒。

$\Omega^- \rightarrow \Xi^0 + K^-$ ，能量不守恒， $m_{\Omega^-} < (m_{\Xi^0} + m_{K^-})$ ，禁戒。

(b) ① $\rho^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ ， $\approx 10^{-24}S$ ，强衰变。

② $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ ， $\approx 10^{-16}S$ ，电磁衰变。

③ $D^0 \rightarrow K^- + \pi \approx 10^{-13} \text{s}$, 弱衰变.

④ $\Xi^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi \approx 10^{-10} \text{s}$, 弱衰变.

⑤ $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \approx 10^{-6}$, 弱衰变.

①和②是典型的强和电磁衰变, ③—⑤是弱衰变, ④和⑤是奇异数和粲数改变的弱衰变, ⑤是非奇异粒子弱衰变.

(管怀群)

3019(Pri, 1977)

为研究反应: $p p \rightarrow H K + K^+$, 完成一个实验.

(a) H 粒子的电荷, 奇异数和重子数是多少? H 粒子必须含有多少夸克?

(b) 一个理论计算预期这种状态的 H 粒子的质量为 2150 MeV. 为产生这个粒子, 入射质子的最小动量是多少? (假设靶是静止的).

(c) 如果质量的预期值是正确的, H 粒子可能的衰变形式将是怎样的呢? (考虑强衰是和弱衰变).

解: (a) 电荷数 $Q=0$, 奇异数 $S=-2$, 重子数 $B=2$, H 粒子至少要含有 6 个夸克 ($uu dd ss$) 才能满足上面的性质.

(b) 由 $W^2 = \text{常数}$, 设一个 p 静止,

$$\begin{aligned} E_{0p}^{+h} &= \frac{(\sum m_i)^2 - 2m_p^2}{2m_p} = \frac{(m_H + 2m_K)^2 - 2m_p^2}{2m_p} \\ &= 4.3(\text{GeV}); \end{aligned}$$

$$p_p^{+h} = \sqrt{E_p^{+h 2} - m_p^2} = \sqrt{4.3^2 - 0.938^2} = 4.2(\text{GeV}/c).$$

(c) 强作用衰变: $\Delta S=0$, $\Delta B=0$. 可能有:

$$H \rightarrow \Lambda\Lambda, \Lambda\Sigma, \Xi N.$$

但从能量守恒均不能满足.

弱衰变:

非轻子衰变: $H \rightarrow \Lambda + n,$

$\Sigma^0 + n,$

$\Sigma^- + p.$

半轻子衰变: $H \rightarrow \Lambda + p + e^- + \bar{\nu}$

$\Sigma^0 + p + e^- + \bar{\nu}.$

(吴为民)

3020 (CCT, 1983)

若有 4.5GeV 的自由能, 理论上能产生的最重的同位素是什么? (a) ${}^2\text{D}$, (b) ${}^3\text{He}$, (c) ${}^3\text{T}$.

解: 答案为(a). 因为有 4.5GeV 的自由能, 应可以产生 2.25GeV 以下的重子(保证重子数守恒, 重子必须与反重子同时产生). 故只有产生 ${}^2\text{D}$.

(唐子洲)

3021 (Pri, 1981)

(a) 衰变 $K \rightarrow \pi\gamma$ 为某一守恒定律所绝对禁戒, 这一定律被认为是精确成立的, 这是哪个守恒定律?

(b) 不存在电荷数为 2 的介子, 你能简单解释为什么?

(c) 说明如何通过观察在 $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ 中光子的极化, 测出 π 介子的宇称.

(d) 在一个很高的精度内, e^-p 散射截面和 e^+p 散射截面相等, 这是守恒定律导致的吗? 若是, 是哪一个? 若不是, 解释这一结果, 你认为会相等到什么程度?

(e) 最近观察到在单举 Λ 产生中图(33), 例如 $\pi p \rightarrow \Lambda + \dots$, Λ 是高度极化的, 你相信这一极化是

(1) 沿(或逆)入射束的方向?

(2) 沿(或逆)出射束的方向?

(3) 还是与它们都垂直?

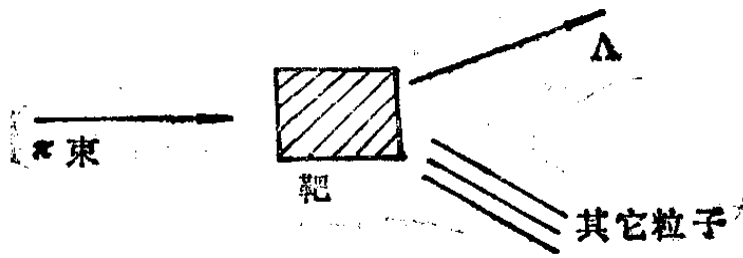


图 3.3

解: (a) 这一守恒定律为电磁相互作用中的奇异数守恒定律.

(b) 按目前公认的理论, 介子是夸克和反夸克组成的束缚态, 夸克所带电荷的绝对值均不大于 $2/3$, 因此, 由两个夸克组成的介子的电荷数不可能为 2.

(c) 记 π^0 介子衰变产生的两个光子的波矢为 k_1, k_2 (即动量除以光速), 电场偏振方向为 e_1, e_2 . 并且 $k = k_1 - k_2$. 由于 π^0 介子自旋为零, 可能的衰变振幅的形式将为 $Ae_1 \cdot e_2$ 或 $Bk \cdot (e_1 \times e_2)$. 在空间反射下前者符号不变, 宇称为正, 后者改变符号, 宇称为负. 这两种情况分别代表光子的两种不同偏振, 前者光子偏振以平行为主, 后者则以互相垂直为主. 当然, 对于高能量 ($\approx 70\text{MeV}$) 的光子很难进行直接偏振测量. 但是, 在 π^0 介子的衰变中, 大约有 α^2 部分二个光子直接衰变成两对电子偶, 可以观察两对电子偶的夹角来确定光子偏振. 实验上倾向于认为光子的偏振是垂直的, 电磁衰变中宇称守恒, 因此, π^0 的宇称是负的.

(d) 不是. 在精确到第一阶时, 电磁流相互作用的几率与入射粒子电荷符号无关. 只有考虑到高阶过程时, 电荷符号的影响才显示出来. 因为电磁相互作用每一阶的强度减少

α^2 倍，所以会相等到 $\alpha^2 \approx 5.3 \times 10^{-5}$ 量级。

(e) A^0 的极化方向垂直于反应事例平面。因为该过程是强相互作用。强相互作用过程中宇称守恒意味着 σ 垂直于产生平面，即： $\sigma \propto (\mathbf{p}_\pi \times \mathbf{p}_\Delta)$ 。

(任 勇)

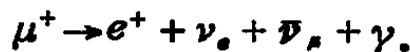
3022 (Wis, 1977)

最近一个振奋人心的事件是由于报导发现了分支比为 10^{-9} 的 $\mu^+ \rightarrow e^+ + \gamma$ 衰变。

(a) 哪些基本原理导致该衰变是禁戒的？

(b) 如图3.4所示。实验装置包括 μ^+ 束阻止器和两块 NaI 晶体，后者用来探测正电子或 γ 射线总能量。实验上应怎样安排两块晶体与 μ^+ 束阻止器和 μ^+ 束方向的相对位置，晶体中哪些信号表示这种衰变？

(c) 这种衰变的主要背景事例是没有探测到中微子的 μ^+ 辐射衰变：



定性地讨论怎样从实验上从这类本底事例中区分感兴趣的 $\mu^+ \rightarrow e^+ + \gamma$ 事例。

解：(a) 电子轻子数和 μ 子轻子数分别守恒使得 μ 子衰变 $\mu^+ \rightarrow e^+ + \gamma$ 禁戒。

(b) 由于 $\mu^+ \rightarrow e^+ + \gamma$ 是两体衰变，因此，两晶

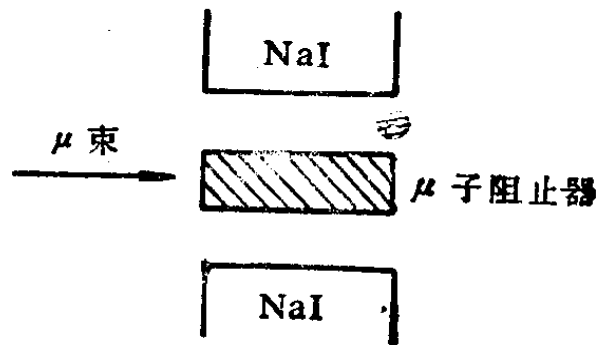


图 3.4

体应相对放置，为了减小直射 μ 子的影响，两晶体最好垂直 μ 束放置，两晶体中 e^+ 信号与 γ 信号给出的符合表示这种衰变，这当然包括(c)中的本底。

(c) 由于 $\mu^+ \rightarrow e^+ + \gamma$ 为两体衰变，而 $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu + \gamma$ 为四体衰变，故前者 e^+ 与 γ 的能量是单值的，后者 e^+ 和 γ 的能量是连续的，实验上可以对两晶体输出信号幅度选择事例，对于 $\mu^+ \rightarrow e^+ + \gamma$ ，两 NaI 晶体中测得的 $(E_e + E_\gamma) = m_\mu$ ，对于

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu + \gamma$$

事例有 $(E_e + E_\gamma) < m_\mu$ 。

(钱剑明)

3023 (Buf, 1980)

叙述各种 π 介子的性质，详细讨论决定 π 介子自旋、宇称和同位旋的实验。

解：共有三种 π 介子，它们是 π^+ , π^0 , π^- ， π^+ 和 π^- 为正反粒子， π^0 的反粒子是它自己。三种 π 组成 $I=1$ 的同位旋三重态，它们的主要性质如下：

π 介子名称	质量 (MeV)	自旋	宇称	C 宇称	同位旋 I	I_3	G
π^+	139.6	0	-		1	1	-1
π^0	135	0	-	+	1	0	-1
π^-	139.6	0	-		1	-1	-1

π^+ 的自旋测定，利用可逆反应： $\pi^+ + d \rightleftharpoons p + p$ 的细致平衡来测定，正、逆反应的跃迁矩阵元不变，则有：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(pp \rightarrow d\pi^+) = \frac{d\sigma}{d\Omega}(d\pi^+ \rightarrow pp)$$

$$\times 2 \frac{p_{\pi}^2 (2J_{\pi} + 1)(2J_d + 1)}{p_p^2 (2J_p + 1)^2}$$

p_{π} 和 p_p 为质心系中 π 和 p 的动量. 实验给出 $2J_{\pi} + 1 = 1.00 \pm 0.01$.

π^- 的自旋可以根据 π 原子发射光谱的超精细结构来测定. 同时从对称性可知, 正反粒子自旋相同, 知 π^- 的自旋为零.

π^0 的自旋通过 $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ 来测定, 首先说明: 自旋为 1 的粒子不可能衰变成 2γ . 设在 2γ 的质心系, 动量分别为 $-k$ 和 k . 极化矢量为 ϵ_1 和 ϵ_2 因初态自旋为 1, 末态必须是矢量形式, 注意到实光子只有横向极化的, 则由 k 和 ϵ_1, ϵ_2 只能构成如下矢量:

$$\epsilon_1 \times \epsilon_2, (\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)k, [(\epsilon_1 \times \epsilon_2) \cdot k]k.$$

这三种形式交换 2γ 时都改变符号, 而 2γ 系统为玻色子系统, 二粒子交换是对称的, 所以无法给出 2γ 的波函数. 由此说明 π^0 的自旋不等于 1. 另外从 $\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$ 反应来研究, 当 π^- 低能入射 (s 波). 若 π^0 的 $J \geq 2$, 则反应禁戒. 实验测量这种电荷交换反应截面很大, 证明 $J_{\pi^0} = 0$.

π^- 的字称通过反应: $\pi^- + d \rightarrow n + n$ 来测定. π^- 的低能 s 波入射. 已知 d 的 $J^P = 1^+$, 所以 $p(\pi^-) = p^2(n) (-1)^l$. l 为两中子轨道角动量, 由 $n-n$ 系统是费米子系统, 满足交换反对称, 有 $l=1, J=1$, 所以 $p(\pi^-) = -1$.

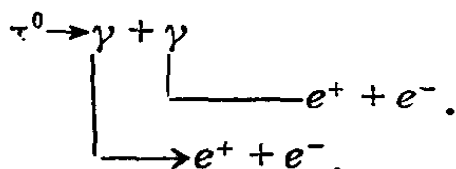
用 $\pi^+ + d \rightarrow p + p$ 反应, 详细分析在低能反应中反应截面随能量的变化, 研究在 s 波入射的情况, 同样可知 $p(\pi^+) = -1$.

π^0 的字称通过 π^0 衰变成 2γ 的极化平面来测定, 由 $J(\pi^0) = 0$, 末态两光子交换对称得到衰变振幅的形式为:

(1) $A\epsilon_1 \cdot \epsilon_2$, π^0 为正宇称,

(2) $B\mathbf{k} \cdot (\epsilon_1 \times \epsilon_2)$, π^0 为负宇称.

\mathbf{k} 为在 π^0 静止的系统中一个光子的动量, 对(1)表示两光子极化平面相互平行占优势, 对(2)相当于两极化垂直部分占优势. 测量 2γ 的极化平面可以测量两对电子的方向.



因为电子对产生在光子的电矢量平面内, 测量结果表明两电子对平面主要是正交的, 说明 π^0 的宇称为负.

π 介子的同位旋可以用 π 介子和核子散射或其它强作用过程测定, 如:



初态($p + p$)系统的同位旋态为 $|1, 1\rangle$, 末态也为 $|1, 1\rangle$ 据同位旋守恒, 它可100%的到末态($d + \pi^+$)态. 而($n + p$)系统. 它的同位旋态是 $\frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle - |0, 0\rangle)$.

只有 $|1, 0\rangle$ 态才能到 $|1, 0\rangle$ 态的 ($d + \pi^0$) 系统, 即只有50%的几率从($n + p$)态到($d + \pi^0$)态, 即若 $I(\pi) = 1$, 则有:

$$\sigma(pp \rightarrow d\pi^+) = 2\sigma(pn \rightarrow d\pi^0).$$

实验结果证实上式, 说明 $I(\pi) = 1$.

(柯小东)

3024 (Chi, 1979)

中性超子 $\Sigma^0(1915)$ (质量 m 为 $1915M_W/e^2$) 具有 $I = 1$, $I_3 = 0$ 的同位旋, $\Gamma_{K^- p}$, $\Gamma_{\bar{K}^0 n}$, $\Gamma_{\pi^- p}$, $\Gamma_{\pi^+ \pi^-}$ 分别表示 $\Sigma^0 \rightarrow K^- p$, $\Sigma^0 \rightarrow \bar{K}^0 n$, $\Sigma^0 \rightarrow \pi^- p$ 和 $\Sigma^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ 的衰变率, 求:

$$\frac{\Gamma_{\bar{K}^0 n}}{\Gamma_{K^- p}}, \frac{\Gamma_{\pi^- p}}{\Gamma_{K^- p}} \text{ 和 } \frac{\Gamma_{\pi^+ p}}{\Gamma_{K^- p}}.$$

(K^- 、 π^- 和核子的质量保证这些衰变在运动学上是可能的, 可以忽略同位旋多重态之间的质量差.)

解: n, p 是同位旋二重态, π^+, π^0, π^- 为同位旋三重态, K^+, K^0 是同位旋二重态, K^- 和 \bar{K}^0 是它们的反粒子组, 成同位旋二重态.

$\Sigma^0(1915)$ 的同位旋态写成: $|1, 0\rangle$;

p 和 n 的同位旋态写成: $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ 和 $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$;

\bar{K}^0 和 K^- 的同位旋态写成: $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ 和 $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$;

$$\psi(K^- n) = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} (|1, 0\rangle + |0, 0\rangle),$$

$$\psi(K^- p) = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} (|1, 0\rangle - |0, 0\rangle).$$

$\Sigma^0(1915) \rightarrow \bar{K}^0 n$ 和 $K^- p$ 为强衰变, 其部分宽度:

$$\Gamma_{\bar{K}^0 n} \propto |\langle \psi(\Sigma^0) | H | \psi(K^0 n) \rangle|^2 = \frac{1}{2} a_1^2,$$

$$\Gamma_{K^- p} \propto |\langle \psi(\Sigma^0) | H | \psi(K^- p) \rangle|^2 = \frac{1}{2} a_1^2,$$

$$a_1 = \langle 1 | H | 1 \rangle.$$

因强作用与电荷无关, a_1 只与同位旋 I 有关而与 I_3 无关.

$$\frac{\Gamma_{\bar{K}^0 n}}{\Gamma_{K^- p}} = 1.$$

$\Sigma^0(1915) \rightarrow p\pi^-$ 为弱衰变, 故有

$$\frac{\Gamma_{\pi^- p}}{\Gamma_{K^- p}} \ll 1 \quad (\text{实际上} \approx 10^{-10}).$$

$\Sigma^0(1915) \rightarrow \pi^+\pi^-$, 重子数不守恒, 是严格禁戒的, 有

$$\Gamma_{\pi^+\pi^-} = 0. \quad \text{即} \frac{\Gamma_{\pi^+\pi^-}}{\Gamma_{K^- p}} = 0. \quad (\text{林 辰})$$

3025 (Chi, 1980)

下列反应哪些允许? 说明禁戒反应的原因.

(a) $\pi^- + p \rightarrow K^- + \Sigma^+$; (b) $d + d \rightarrow {}^4\text{He} + \pi^0$, (c) $K^- + d \rightarrow \Xi^- + K^+$. 在同一质心系下, 反应截面比

$$\frac{\sigma(p + p \rightarrow \pi^+ + d)}{\sigma(n + p \rightarrow \pi^0 + d)}$$

是多少?

解: (a) 禁戒的, 因为 $\Delta I_3 = (-1/2) + (+1) - (-1) - 1/2 = 1 \neq 0$, $\Delta S = (-1) + (-1) - 0 - 0 = -2 \neq 0$. 同位旋第 3 分量和奇异数均不守恒.

(b) 禁戒的, 因为 $I(d) = I({}^4\text{He}) = 0, I(\pi^0) = 1. \Delta I = 1 \neq 0$.

(c) 允许的, 因为 Q, I, I_3 和 S 都是守恒的, 是强作用过程.

反应 $pp \rightarrow \pi^+ d$ 和 $np \rightarrow \pi^0 d$ 的截面差异仅仅是和同位旋部分相关, 将两边的同位旋部分变换到耦合表象, 利用同位旋波函数的正交性:

$$|pp\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = |1, 1\rangle;$$

$$|\pi^+ d\rangle = |1, 1, 0, 0\rangle = |1, 1\rangle;$$

$$\begin{aligned}
 |np\rangle &= \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left| 1, 0 \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \left| 0, 0 \right\rangle,
 \end{aligned}$$

$$|\pi^0 d\rangle = |1, 0, 0, 0\rangle = |1, 0\rangle.$$

$pp \rightarrow \pi^+ d$ 矩阵元为

$$\langle \pi^+ d | \hat{H} | pp \rangle \propto \langle 1, 1 | \hat{H} | 1, 1 \rangle = \langle 1 | \hat{H} | 1 \rangle = a_1.$$

类似地, $np \rightarrow \pi^0 d$ 的矩阵元为

$$\begin{aligned}
 \langle \pi^0 d | \hat{H} | np \rangle &\propto -\frac{1}{\sqrt{2}} \langle 1, 0 | \hat{H} | 1, 0 \rangle \\
 &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 1, 0 | \hat{H} | 0, 0 \rangle.
 \end{aligned}$$

利用 $\langle 0, 0 | \hat{H} | 1, 0 \rangle = 0$, 得到:

$$\begin{aligned}
 \langle \pi^0 d | \hat{H} | np \rangle &\propto -\frac{1}{\sqrt{2}} \langle 1, 0 | \hat{H} | 1, 0 \rangle \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \langle 1 | \hat{H} | 1 \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} a_1.
 \end{aligned}$$

$a_1 = \langle 1 | \hat{H} | 1 \rangle$ 因为强作用与 I_3 无关. 由上式可得到如下结果:

$$\frac{\sigma(pp \rightarrow \pi^+ d)}{\sigma(np \rightarrow \pi^0 d)} = \frac{|\langle \pi^+ d | \hat{H} | pp \rangle|^2}{|\langle \pi^0 d | \hat{H} | np \rangle|^2} = \frac{a_1^2}{\frac{1}{2} a_1^2} = 2.$$

(黄晓舟)

3026 (Ber, 1983)

给定两个角动量 J_1 和 J_2 (例如 L 和 S) 以及相应的波函数.

(a) 计算对各种 m_1 与 m_2 的可能值, 态 $j = j_1 + j_2$, $M = m_1 + m_2$ 为 Clebsch Gordan 系数; 其中 $j_1 = 1$, $j_2 = 1/2$, $J = 3/2$, $M = 1/2$.

(b) 考虑反应: (1) $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p$, (2) $\pi^- p \rightarrow \pi^- p$, (3) $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$. 这些同位旋守恒的反应可发生在 $I = 3/2$ 态 (Δ 共振) 和 $I = 1/2$ 态 (N^* 共振), 计算具有 Δ 共振与 N^* 共振能量时相应的截面比 $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3$. 在共振能量时, 可忽略其它同位旋态效应. $I_\pi = 1$, $I_N = \frac{1}{2}$.

解: (a) 首先, $\left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle = \left| 1, 1; \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$,

两边以算子 L_- 作用, 有

$$\begin{aligned} L_- \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle &= L_-^{(1)} \left| 1, 1; \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ &\quad + L_-^{(2)} \left| 1, 1; \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \\ \sqrt{3} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle &= \sqrt{2} \left| 1, 0; \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ &\quad + \left| 1, 1; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left| 1, 0; \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ &\quad + \sqrt{\frac{1}{3}} \left| 1, 1; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle. \end{aligned}$$

(b) 在同位旋空间将各粒子对耦合:

$$\left| \pi^+ p \right\rangle = \left| 1, 1; \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle,$$

$$\begin{aligned}
|\pi^- p\rangle &= \left|1, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \\
&= \sqrt{\frac{2}{3}} \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} \left|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle, \\
|\pi^0 n\rangle &= \left|1, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \\
&= \sqrt{\frac{2}{3}} \left|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle.
\end{aligned}$$

据强作用电荷无关性，跃迁矩阵元平方：

$$\sigma_1(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) \propto \left| \left\langle \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \left| H \right| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle \right|^2 = |a_1|^2,$$

$$\begin{aligned}
\sigma_2(\pi^- p \rightarrow \pi^- p) &\propto \left| \sqrt{\frac{2}{3}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right| + \sqrt{\frac{1}{3}} \left\langle \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right| \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \left| H \right| \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \right|^2 \\
&= \frac{2}{3} a_2 + \frac{1}{3} a_1 \Big|^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_3(\pi^- p \rightarrow \pi^0 n) &\propto \left| \sqrt{\frac{2}{3}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right| + \sqrt{\frac{1}{3}} \left\langle \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right| \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \left| H \right| \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \right|^2 \\
&= \left| -\frac{\sqrt{2}}{3} a_2 + \frac{\sqrt{2}}{3} a_1 \right|^2.
\end{aligned}$$

其中： $a_1 = \left\langle \frac{3}{2}, m_f \left| \hat{H} \right| \frac{3}{2}, m_i \right\rangle = \left\langle \frac{3}{2} \left| \hat{H} \right| \frac{3}{2} \right\rangle,$

$$a_2 = \left\langle \frac{1}{2}, m_f \left| \hat{H} \right| \frac{1}{2}, m_i \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} \left| \hat{H} \right| \frac{1}{2} \right\rangle.$$

利用正交性: $\left\langle \frac{1}{2} \left| \hat{H} \right| \frac{3}{2} \right\rangle = 0$, 当发生 Δ 共振时, $|a_1| \gg |a_2|$,

这时可忽略 a_2 的影响;

$$\sigma_2 \propto \frac{1}{9} |a_1|^2; \quad \sigma_3 \propto \frac{2}{9} |a_1|^2;$$

$$\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = |a_1|^2 : \frac{1}{9} |a_1|^2 : \frac{2}{9} |a_1|^2 = 9 : 1 : 2. \quad \text{当发生 } N^* \text{ 共振时, 有 } |a_1| \ll |a_2|, \text{ 这时可略去 } a_1 \text{ 的影响, 有:}$$

$$\sigma_1 \approx 0,$$

$$\sigma_2 \propto \frac{4}{9} |a_2|^2,$$

$$\sigma_3 \propto \frac{2}{9} |a_2|^2,$$

$$\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = 0 : 2 : 1.$$

(黄晓舟)

3027 (Pri, 1978)

估计下列衰变率之比, 说明起作用的选择定则(“基本的”或唯象的). 同时说明每个衰变是强的、弱的还是电磁的. 如有可能, 用基本常数表达结果(如 G, α, θ_s, m_K 等). 假定强相互作用具有单位强度.

$$(a) \frac{K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0}{K_s^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-},$$

$$(b) \frac{\rho^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0}{\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-},$$

$$(c) \frac{K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-}{K_L^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0},$$

$$(d) \frac{K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^+ e^- \nu}{K^- \rightarrow \pi^- \pi^+ e^- \nu},$$

$$(e) \frac{\Omega^- \rightarrow \Sigma^- \pi^0}{\Omega^- \rightarrow \Xi^0 \pi^-},$$

$$(f) \frac{\eta^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-}{\eta^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0},$$

$$(g) \frac{\Lambda^0 \rightarrow K^0 \pi^0}{\Lambda^0 \rightarrow p \pi^-}, \quad (h) \frac{\theta^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0}{\omega^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0},$$

$$(i) \frac{\Sigma^- \rightarrow \Lambda^0 \pi^-}{\Sigma^- \rightarrow n \pi^-}, \quad (j) \frac{\pi^- \rightarrow e^- \nu}{K^+ \rightarrow \mu^+ \nu}.$$

提示：若忽略轻子质量，对(j)，相空间为 $m_{\text{轻子}}^4$ 。

解：(a) $K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0$ 。据非轻子弱衰变 $\Delta I = \frac{1}{2}$ ，因 $I(K) = \frac{1}{2}$ ，所以两 π 系统的 $I = 0, 1$ 。但根据广义泡利原理， π 系统的总波函数必须是对称的，总角动量守恒要求 2π 系统 $J = J(K) = 0$ ， π 的自旋为零， $l = 0$ 。空间和自旋部分是对称的，要求同位旋波函数必须是对称的，故 $\pi^+ \pi^0$ 系统的同位旋 $I = 0, 2$ 。满足两个条件有 $I(\pi^+ \pi^0) = 0$ ，但是 $I_3(\pi^+ \pi^0) = 1$ 。因为 $I_3 \leq I$ ，必须是 $I(\pi^+ \pi^0) \geq 1$ 。即不服从 $\Delta I = \frac{1}{2}$ 规则，故 $K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0$ 是禁戒的， $K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ 满足 $\Delta I = \frac{1}{2}$ 规则。

$$\frac{K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0}{K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-} \ll 1.$$

注：若设 K 介子衰变中 $\Delta I = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ 的振幅分别为 A_0 和 A_2 。

利用 K 介子衰变可求 A_0 和 A_2 的相对值 $\frac{\Gamma(K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0)}{\Gamma(K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)}$

$$= \frac{3}{4} \left(\frac{A_2}{A_0} \right)^2 \approx 1.5 \times 10^{-3}, \quad \frac{A_2}{A_0} \approx 4.5\% \sim 4.6\%.$$

(b) $\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ ， $\pi^0 \pi^0$ 为强衰变。 $\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ ，允许衰变，但 $\rho^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0$ ， $C(\rho^0) = -1$ ， $C(\pi^0 \pi^0) = 1$ ， C 宇称破坏，

$$\frac{\rho^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0}{\rho \rightarrow \pi^+ \pi^-} \approx 0.$$

(c) K_L^0 并非 CP 本征态, 因此, $K_L^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0$ 有非零的分支比 $\approx 9.4 \times 10^{-4}$. 而 $K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ 是二阶弱衰变, 几率更小, 它是一种改变味道的中性弱流衰变.

$$1 \gg \frac{K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-}{K_L^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0} \approx 0, \quad \left(\text{实验值} \approx \frac{10^{-8}}{10^{-3}} = 10^{-5} \right).$$

(d) $K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^+ e^- \nu$, 为半轻子弱衰变, 应有 $\Delta Q = \Delta S$, ΔQ 为强子电荷的改变. 式中 $\Delta S = 1$, $\Delta Q = -1$, 为禁戒. $K^- \rightarrow \pi^+ \pi^- e^- \nu$ 则为允许衰变:

$$\frac{K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^+ e^- \nu}{K^- \rightarrow \pi^+ \pi^- e^- \nu} = 0.$$

(e) $\Omega^- \rightarrow \Sigma^- \pi^0$, $\Delta S = 2$, 禁戒. $\Omega^- \rightarrow \Xi^0 \pi^-$, 为允许型弱衰变:

$$\frac{\Omega^- \rightarrow \Sigma^- \pi^0}{\Omega^- \rightarrow \Xi^0 \pi^-} = 0.$$

(f) $\eta^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$, η^0 是电磁衰变 ($\Gamma = 0.83 \text{ keV}$). $J^P = 0^-$ $\pi^+ \pi^-$ 只能组成 0^+ , 1^- , 2^+ 的态, 电磁衰变中 P 宇称守恒, 所以上述衰变是禁戒的. $\eta^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ 为电磁衰变, 满足守恒律:

$$\frac{\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-}{\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0} = 0.$$

(g) $\Lambda^0 \rightarrow K^- \pi^+$, 是非轻子衰变, 但是 $\Delta I_3 = \frac{1}{2}$, $\Delta S = 0$, 是禁戒的. $\Lambda^0 \rightarrow p \pi^-$, 是非轻子弱衰变满足 $|\Delta S| = 1$, $|\Delta I| = \frac{1}{2}$, $|\Delta I_3| = \frac{1}{2}$ 的规则:

$$\frac{\Lambda^0 \rightarrow K^- \pi^+}{\Lambda \rightarrow p \pi^-} = 0.$$

(h) $\theta^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$, θ^0 为强衰变 ($\Gamma = 180 \text{ MeV}$), $I^G J^{PC} = 0^+ 2^{++}$, G 宇称不守恒: $G(\pi) = (-1)$, $G(\pi^+ \pi^- \pi^0) = (-1)^3 = -1$, $G(\theta^0) = +1$. 故禁戒. $\omega^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$, ω 的量子数为 $I^G J^{PC} = 0^- 1^{--}$ 上式满足守恒定律, 为允许衰变:

$$\frac{\theta^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0}{\omega^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0} = 0.$$

(i) $\Sigma^- \rightarrow \Lambda^0 \pi^-$, $\Delta S = 0$, 禁戒. $\Sigma^- \rightarrow n \pi^-$, 允许型非轻子弱衰变:

$$\frac{\Sigma^- \rightarrow \Lambda^0 \pi^-}{\Sigma^- \rightarrow n \pi^-} = 0,$$

(j) $\pi^- \rightarrow e \nu$ 和 $K^+ \rightarrow \mu^+ \nu$ 均为半轻子两体衰变, 前者为 $\Delta S = 0$, 耦合常数为 $G \cos \theta_c$, 后者 $\Delta S = 1$, 为 $G \sin \theta_c$. θ_c 为卡皮玻混合角, 对赝矢量耦合, 有:

$$\omega'(\varphi \rightarrow l \nu) = \frac{f_\varphi^2 m_l^2 (m_\varphi^2 - m_l^2)^2}{4\pi m_\varphi^3}, \quad f_\varphi \text{ 为耦合常数,}$$

对 K^+ 介子衰变到 $\mu^+ \nu$ 和 π^- 衰变到 $e^- \nu$.

$$\begin{aligned} \frac{\pi^- \rightarrow e^- \nu}{K^+ \rightarrow \mu^+ \nu} &= \frac{f_\pi^2 m_e^2 (m_\pi^2 - m_e^2)^2 m_\mu^3}{f_K^2 m_\mu^2 (m_K^2 - m_\mu^2)^2 m_\pi^3} \\ &= \text{ctg}^2 \theta_c \frac{m_\mu^3 m_e^2 (m_\pi^2 - m_e^2)^2}{m_\pi^3 m_\mu^2 (m_K^2 - m_\mu^2)^2} \\ &= 1.72 \times 10^{-8}. \end{aligned}$$

(注: 按题的提示, $\frac{\pi^- \rightarrow e \nu}{K^+ \rightarrow \mu \nu} = \text{ctg}^2 \theta_c \frac{m_\mu^3}{m_K^4} = 0.13$, (太大了).)

(任 勇)

Σ^* 是一种不稳定超子, 质量为 $m = 1385\text{MeV}$, 衰变宽度为 $\Gamma = 35\text{MeV}$, 衰变道 $\Sigma^{*+} \rightarrow \pi^+ \Lambda^0$ 的分支比为 88%. Σ^{*+} 在反应 $K^- p \rightarrow \pi^- \Sigma^{*+}$ 中产生, 但反应 $K^+ p \rightarrow \pi^+ \Sigma^{*+}$ 却不能发生. (a) Σ^* 的奇异量子数是什么? 用所给的两个反应解释. (b) Σ^* 是强作用还是弱作用衰变? 说明之, (c) Σ^* 的同位旋是什么? 利用上面的结论说明.

解: (a) 由于 Σ^{*+} 在反应 $K^- p \rightarrow \pi^- \Sigma^{*+}$ 中产生, 由强相互作用过程中奇异数守恒知 Σ^* 的奇异数与 K^- 的奇异数相同, 其值为 -1.

反应 $K^+ p \rightarrow \pi^+ \Sigma^{*+}$ 由于不满足奇异数守恒, 故此反应禁戒. 这两个反应从表面上看差不多, 但由于奇异数守恒的要求, 一个反应能发生, 另一个反应却是禁戒的.

(b) $\Sigma^* \rightarrow \Lambda \pi^+$ 的衰变部分宽度为

$$\Gamma_{\Lambda \pi} = 35 \times 0.88 \text{MeV}.$$

其寿命可给出

$$\tau_{\Lambda \pi} \approx \frac{\hbar}{\Gamma} = \frac{6.6 \times 10^{-22}}{30.8} \approx 2.15 \times 10^{-23} (\text{s}).$$

这是典型的强作用时间, 故 $\Sigma^* \rightarrow \Lambda \pi^+$ 是强衰变.

(c) 由于强作用过程中同位旋守恒, 可利用 $\Sigma^* \rightarrow \pi^+ \Lambda$ 来确定 Σ^* 的同位旋. 由于 $I(\Lambda) = I_3(\Lambda) = 0$, 故 $I(\Sigma^*) = I(\pi) = 1$.

(钱剑明)

3029 (Wis, 1977)

粒子 x 有两种衰变模式，其部分衰变速率为 γ_1 (秒⁻¹) 和 γ_2 (秒⁻¹)。 (a) 求 x 粒子质量的固有不确定量， (b) x 的一种衰变模式是强作用衰变 $x \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ ，关于 x 的同位旋，能得出什么结论？

解： (a) 粒子的总衰变速度为

$$\lambda = \gamma_1 + \gamma_2 (\text{s}^{-1}),$$

粒子的平均寿命

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\gamma_1 + \gamma_2} (\text{s}).$$

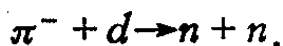
设粒子质量的固有不确定量为 P ，则有：

$$\Gamma = \hbar/\tau = \hbar(\gamma_1 + \gamma_2).$$

(b) $x \rightarrow \pi^+ + \pi^+$ ，由 π^+ 的同位旋 $I=1$ 及同位旋第三分量 $I_3 = +1$ 知，末态的同位旋为 $I=2$ 。强相互作用过程中同位旋守恒，故 x 的同位旋为 2。 (钱剑明)

3030 (Wis, 1974)

假定 π^- 具有 0 自旋及负的内禀宇称，一个氘核从 p 轨道上俘获这样一个 π^- 介子发生反应：



试说明两个中子只能处于单态，氘核的自旋与宇称为 1^+ 。

解： 反应初态为 $\pi^- + d$ ，其宇称由三部分组成， π^- 和 d 的内禀宇称， π^- 与 d 核的轨道宇称。总宇称为这三部分宇称的乘积：

$$P_i = P(\pi^-)P(d)(-1)^l = (-1) \times (-1)^l \times (+1) = +1.$$

该反应为强相互作用，因此，反应过程中宇称守恒，故末态宇称为 +1。

末态为 $n+n$ ，中子的内禀宇称为 +1，所以末态宇称为 $P_f = (-1)^{l'} = +1$ ， l' 为两中子相对运动的轨道角动量量子数。所以 $l' = 0, 2, 4, 6, \dots$ 。但末态是两个全同费米子，故总波函数必须是交换反对称的。 $l' = 0$ 或偶数，导致了轨道波函数是交换对称的，这就要求自旋波函数交换反对称，即两个中子处于自旋单态。

(钱剑明)

3031 (CUS, 1985)

一个带负电荷的 π^- 介子(一种赝标粒子：零自旋，奇宇称)初始束缚在一个氘核的最低能态库仑波函数。它被氘核(质子与中子的 1S_0 束缚态)俘获而变为一对 neutron:

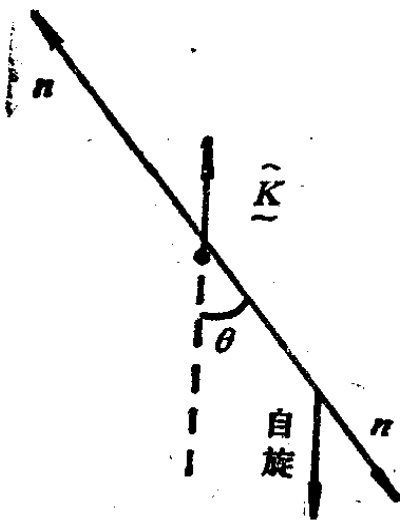
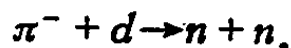


图 3.5

(a) 中子对的轨道角动量是多少? (b) 它们的总自旋角动量是多少? (c) 探测到两个中子的自旋取向都与氘核自旋相反的几率是多少? (d) 如果初态氘核自旋 100% 地沿 K 方向极化(图3.5), 一个中子自旋与氘核自旋相反的中子出射的角分布几率(每单位立体角)是多少? 也许头几个

(没有归一化的)球谐函数的是有用的;

$$Y_0^0 = 1, Y_1^{\pm 1} = \mp \sin\theta e^{\pm i\phi},$$

$$Y_2^0 = 3\cos^2\theta, Y_2^{\pm 1} = \mp \sin 2\theta e^{\pm i\phi}.$$

解：氘核的 p 和 n 处在 3S_1 态。 $P(d) = (-1)^0 \cdot P(p) \cdot P(n) = +1$, $J(d) = 1$, π^- 和 d 形成最低能态, $l = 0$. 初态宇称:

$$P_i = (-1)^0 \cdot P(\pi) \cdot P(d) = -1.$$

所以末态宇称 $P_f = P_i = -1 = (+1)(+1)(-1)^{l_f}$, $l_f =$ 奇数. 初态总角动量 $J_i = \mathbf{O} + \mathbf{O} + \mathbf{I} = \mathbf{I}$, 即 $J_i = 1$. 所以末态总角动量 $J_f = J_i = 1 = S_f + l_f$, 而 $S_f = I/2 + I/2$, $S_f = 0$ 或 1 , 又 l_f 为奇数, 所以 $l_f = 1$.

(b) 由末态为全同费米子, 总波函数应反对称. $l_f = 1$, 故空间波函数反对称. 因此, 自旋波函数应对称, 从而 $S_f = 1$.

(c) 几率 = 0. 这是因为 $S_f = -1$, 不能与 p 态 ($l_{p_z} = 1, 0, -1$) 组合而得到 $J_{z_f} = +1$.

(d) 末态波函数为

$$|1, 1\rangle = AY_1^1\chi_{10} + BY_1^0\chi_{11}.$$

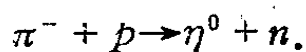
式中: A, B 为常数, $\chi_{10} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)$, $\chi_{11} (= \uparrow\uparrow)$.

所以角分布几率 $P \propto |Y_1^1|^2 = \sin^2\theta$, 归一化后得:

$$P = \frac{3}{8\pi} \sin^2\theta. \quad (\text{杨永安})$$

3032 (Col, 1979)

(i) η^0 粒子由下列反应中的 s 波产生,



(但未发现相对应的过程 $\pi^- + p \rightarrow \eta^- + p$).

(ii) η^0 有以下的衰变道, 其衰变几率为

$$\eta^0 \rightarrow 2\gamma (\text{占} 38\%), 3\pi^0 (\text{占} 30\%), 2\pi (< 0.15\%).$$

(iii) η^0 的静止质量为 548.8 MeV.

描述一个实验测量. 由此可确定(i) — (iii)的结果. 并由这些事实, 给出 η^0 的自旋、宇称、同位旋和电荷.

解: 实验可这样安排: ①动量可变的 π^- 束, ②氢靶, ③对 γ 和带电粒子有较好空间和能量分辨的探测器系统. 当改变 π^- 的动量, 在 η^0 产生时, 可得到较多的 2γ 和 3π 事例, 这个反应的特点是有阈效应.

$$E_{\pi^-}^{\text{th}} = \frac{(m_\eta + m_p)^2 - m_p^2 - m_\pi^2}{2m_p}$$

$$= \frac{(0.5488 + 0.94)^2 - 0.938^2 - 0.14^2}{2 \times 0.938}$$

$$= 0.702(\text{GeV}) = 702(\text{MeV}),$$

$$p_{\pi^-}^{\text{th}} = \sqrt{(E_{\pi^-}^{\text{th}})^2 - m_\pi^2} \approx 0.688(\text{GeV}) = 688(\text{MeV}).$$

即当 π^- 的动量为 688 MeV 时, η^0 开始产生, 当 p_π 小于 688 MeV 时, 不会产生 η^0 .

这时质心运动参数为

$$\beta_0 = \frac{p_\pi}{E_\pi + m_p} = \frac{688}{702 + 938} \approx 0.420,$$

$$\gamma_0 = 1.10,$$

$$P_\pi^* = \gamma(P_\pi - \beta E_\pi) \approx 433 \text{ MeV},$$

$$\lambda = \frac{1}{P_\pi^*} = \frac{1}{433} (\text{MeV}^{-1}) = \frac{197}{433} \times 10^{-18} (\text{cm})$$

$$= 0.45 \times 10^{-18} (\text{cm}).$$

考虑质子半径 $\approx 0.5 \times 10^{-18} \text{ cm}$, 这时 $\pi^- p$ 相互作用主要是

3033 (Chi, 1982)

第一部分：一束 K^+ 介子从左侧进入泡室（充气）并按图3.6所示衰变，一均匀磁场($B \approx 12\text{kG}$)垂直于泡室窗平面，把答案写在附页上。

第二部分：一束 K^- 粒子从左侧进入充气气泡室。在与上面第一部分中所述的相同的磁场的作用下运动并逐渐停止在室中。如图3.7所示。回答附页中的所有问题。

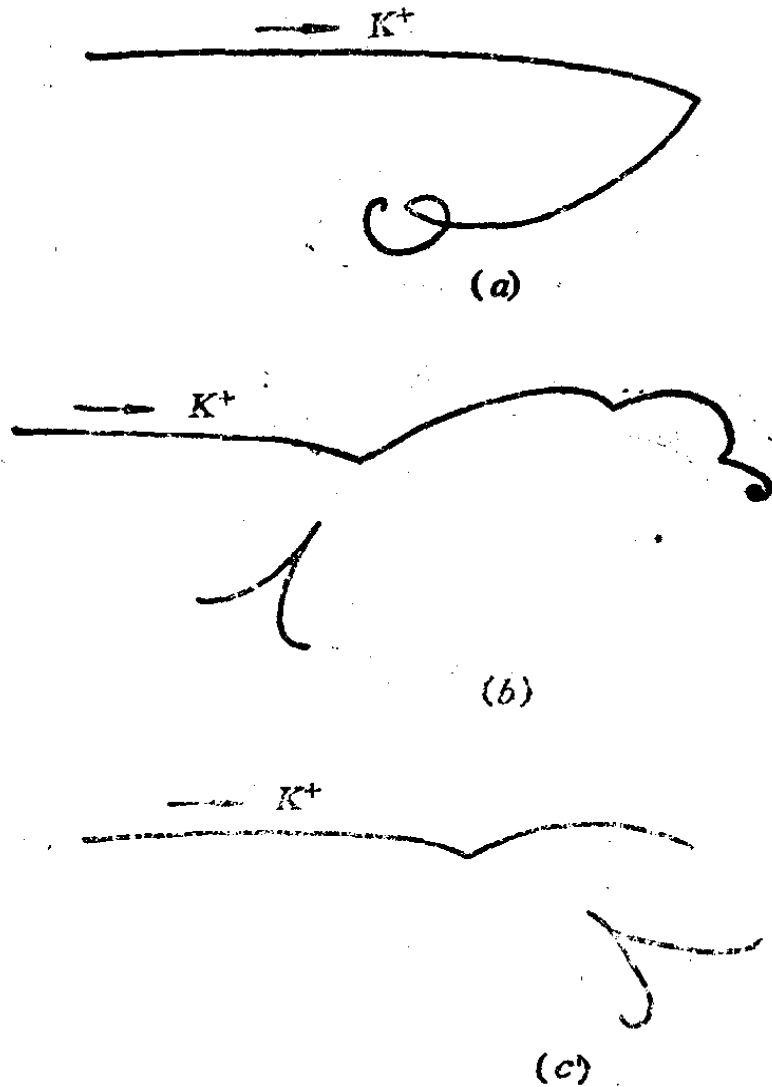


图 3.6

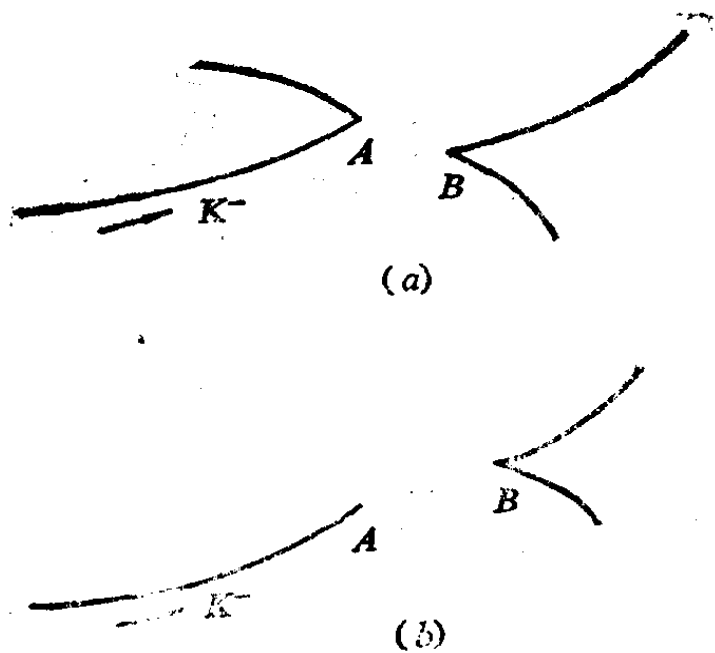


图 3.7

附 页

第一部分：把所有的答案写在本页上并交上试卷作为凭证。

用符号 (π^+ , π^0 , p 等等) 标出 K^+ 介子在泡室图 3.6 中所有衰变产物并完成相应于每一个图的 K^+ 作用方程。

第二部分：把 (a) 和 (b) 的所有答案写在本页上并附上试卷。(c) 答案在本页的背面，回答 (c)。

如的泡室图 3.7 所示， K^- 介子逐渐停止。用符号标出关系到 K^- 粒子的所有粒子径迹并用虚线标出中性粒子“径迹”。对于每一个图给出 K^- 介子相互作用的完整的方程。

(c) 假设图 3.7(a) 和 3.7(b) 中的所有径迹都处于图平面内，确定中性粒子寿命和它的质量的表达式。关于本问题的答案写在本页的反面。

解：第一部分(a)如图3.8所示

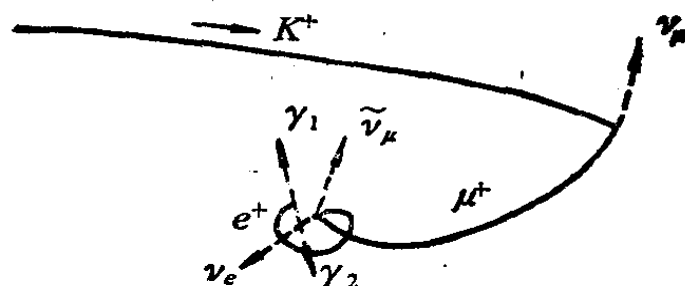
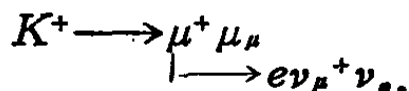


图 3.8

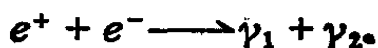
K^+ 介子可以有列衰变方式：

$K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu,$	63.50% ;
$\pi^+ \pi^0,$	21.16% ;
$\pi^+ \pi^+ \pi^-,$	5.59% ;
$\pi^+ \pi^0 \pi^0,$	1.73% ;
$\mu^+ \nu \pi^0,$	3.20% ;
$e^+ \nu \pi^0,$	4.82% .

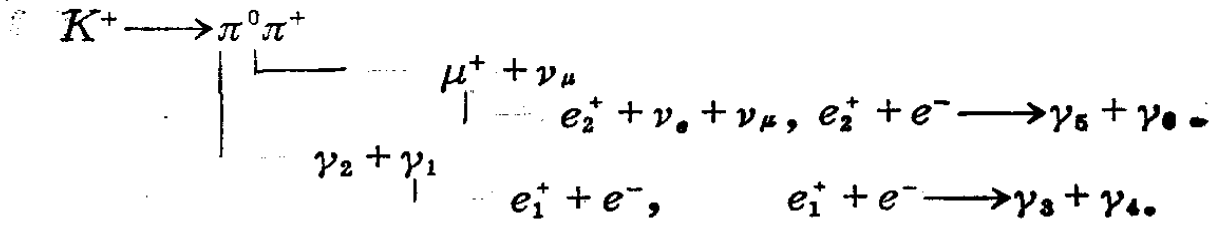
从图 3.6(a)中可以看出 K^+ 的衰变产物有一个带正电的粒子和其它中性粒子，所以 K^+ 的衰变在这种情况下只可能是 $\mu^+ \nu$, $\pi^+ \pi^0$, $\pi^+ \pi^0 \pi^0$, $\mu^+ \nu \pi^0$, $e^+ \nu \pi^0$. 而衰变出来的带正电粒子还要衰变成一个带正电的粒子，而这次的产物不再衰变出带电粒子。所以上述各衰变方式中有 π^+ 的是不符合的，因为， $\pi^+ \xrightarrow{100\%} \mu^+ \nu$, $\mu^+ \rightarrow e^+ + \text{其它产物}$. 有 e^+ 产生的 K^+ 衰变方式也不符合. 因为 e^+ 不能再衰变出带正电的粒子，故只剩下 $\mu^+ \nu_\mu$ 和 $\mu^+ \nu \pi^0$, $\mu^+ \nu$ 方式的几率较大，故以为：



e^+ 与氕中的电子湮灭生成 2 个光子，



类似于(a)中的分析, 可以推出各衰变产物



第一部分(b)如图3.9所示.

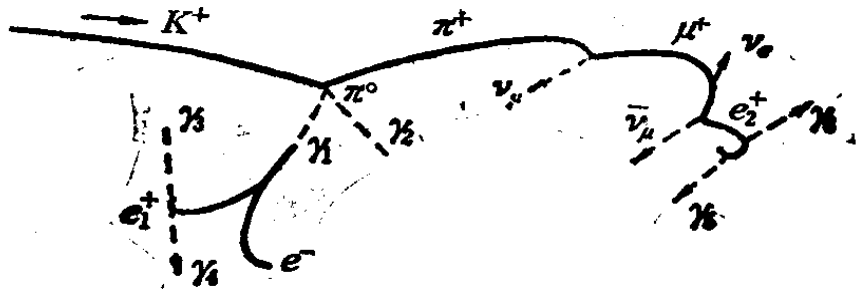


图 3.9

第一部分(c)如图3.10所示.

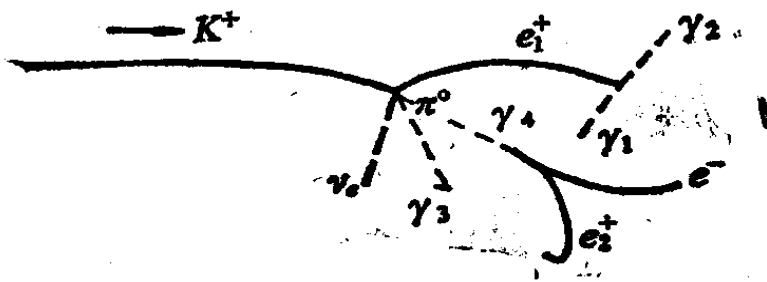
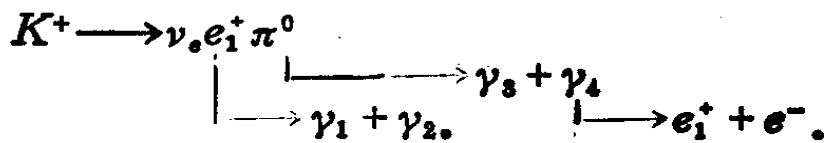


图 3.10



第二部分(a)如图3.11和图3.12所示。

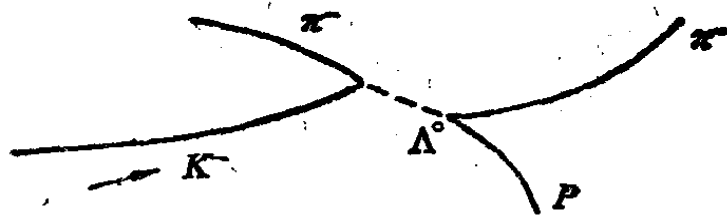
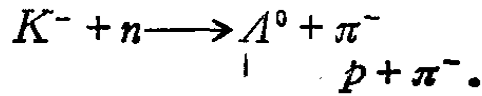
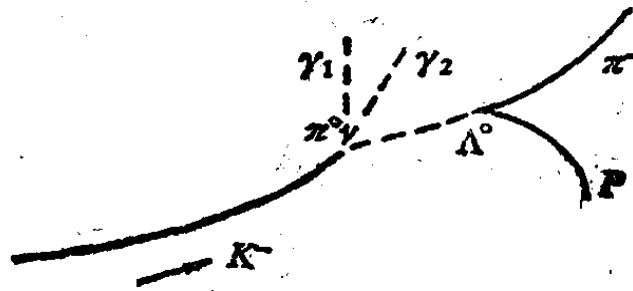
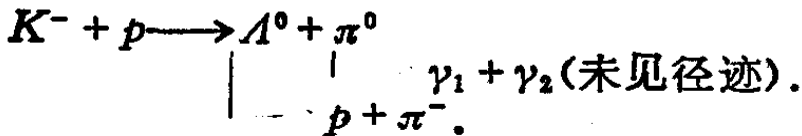


图 3.11



第二部分(b)

图 3.12



(c) 中性粒子 Λ^0 的质量和寿命测量方法：(1) 测量中性粒子径迹(图3.7a, b虚线部分)的长度 l 及它和 p, π^- 粒子的夹角 θ_p, θ_{π^-} 。(2) 测定 p 和 π^- 径迹的曲率半径 R_p 和 R_{π^-} 。由 $l, \theta_p, \theta_{\pi^-}$ 和 R_p, R_{π^-} 可求出 M_{Λ} 和 τ_{Λ} ：

$$p_p = 0.3B(T)R_p(m), \quad p_p \text{ 用 GeV 表示.}$$

$$p_{\pi^-} = 0.3B(T)R_{\pi^-}(m), \quad p_{\pi^-} \text{ 用 GeV 表示.}$$

求出:

$$E_p = (p_p^2 + m_p^2)^{1/2},$$

$$E_{\pi^-} = (p_{\pi^-}^2 + m_{\pi^-}^2)^{1/2}.$$

$$p_{\Delta} = p_p \cos \theta_p + p_{\pi^-} \cos \theta_{\pi^-}.$$

$$\begin{aligned} M^2(\Delta) &= (E_p + E_{\pi^-})^2 - (p_{\pi^-} + p_p)^2 \\ &= m_p^2 + m_{\pi^-}^2 + 2[E_p E_{\pi^-} - 2p_{\pi^-} p_p \cos(\theta_p + \theta_{\pi^-})]. \end{aligned}$$

$$M(\Delta) = \sqrt{m_p^2 + m_{\pi^-}^2 + 2E_p E_{\pi^-} - 2p_{\pi^-} p_p \cos(\theta_p + \theta_{\pi^-})}.$$

$$E_{\Delta} = E_p + E_{\pi^-}.$$

所以
$$i = \gamma \beta \tau, \quad \gamma \beta = \frac{P_{\Delta}}{M(\Delta)}.$$

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{l}{\gamma \beta} = l (p_p \cos \theta_p + p_{\pi^-} \cos \theta_{\pi^-})^{-1} [m_p^2 + m_{\pi^-}^2 + 2E_p E_{\pi^-} \\ &\quad - 2p_{\pi^-} p_p \cos(\theta_p + \theta_{\pi^-})]^{1/2}. \end{aligned} \quad (\text{林 展})$$

3034 (Col, 1980)

在反应 $K^- + p \rightarrow \Lambda^0 + \pi^+ + \pi^-$ 中, Λ^0 和 π^+ 的不变质量谱在 1385 MeV 处出现一个宽度 50 MeV 的峰, 称作 Y_1^* . 从相同反应式(但不同事例)出来的 $\Lambda^0 \pi^-$ 的不变质量谱出现一类似的峰. (a) 从这些数据决定 Y_1^* 的奇异数, 超荷和同位旋. (b) 实验证实 Y_1^* 产物 $\Lambda^0 + \pi^+$ 介子是处于相对轨道角动量的 p 态. Y_1^* 可能的自旋角动量多大? 它的内禀宇称如何? (Λ^0, π^+ 的宇称是 $+, -$) (c) (如果还有) Y_1^* 的其它强衰变道是什么?

解: (a) Y_1^* 共振态参数:

$$\Gamma = 50 \text{ MeV}.$$

$$\tau = \frac{\hbar}{\Gamma} \approx \frac{6.6 \times 10^{-22}}{50} = 1.3 \times 10^{-23} (\text{s}).$$

可知 Y_1^* 是强衰变, 故有奇异数 s , 超荷 Y 和同位旋等量子数守恒.

$$S(Y_1^*) = S(\Lambda^0) + s(\pi) = 1,$$

$$Y(Y_1^*) = Y(\Lambda^0) + s(\pi^0) = 0,$$

$$I(Y_1^*) = I(\Lambda^0) + I(\pi) = 1,$$

$$I_3(Y_1^*) = I_3(\Lambda^0) + I_3(\pi^+) = 1.$$

Y_1^* 是同位旋三重态, 它的三个成员为 Y_1^{*+} , Y_1^{*0} 和 Y_1^{*-} . $\pi^+ \Lambda^0$ 的共振峰对应 Y_1^* .

(b) Λ^0 的自旋 $J_\Lambda = \frac{1}{2}$, π^+ 的自旋 $J_\pi = 0$, 因 $l=1$, 所

以 $J_{Y_1^*} = \frac{1}{2} + 1$. 可能值为 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{3}{2}$.

Y_1^* 的内禀宇称 $P(Y_1^*)$,

$$P(Y_1^*) = P(\pi) \cdot P(\Lambda) \cdot (-1)^l = +1.$$

(c) 其它可能的强衰变道有:

$$Y_1^* \longrightarrow \Sigma \pi$$

由于 Σ 的宇称为 $(+1)$, 而 π 的宇称为 (-1) . 故这些出射粒子也处于相对 p 态. (王力军)

3035 (Col, 1985)

考虑下列超子的非轻子弱衰变.

$$\Lambda^0 \rightarrow p\pi^-, \quad \Sigma^+ \rightarrow n\pi^+,$$

$$\Lambda^0 \rightarrow n\pi^0, \quad \Xi^- \rightarrow \Lambda^0\pi^-,$$

$$\Xi^- \rightarrow n\pi^-, \quad \Xi^0 \rightarrow \Lambda^0\pi^0,$$

$$\Sigma^+ \rightarrow p\pi^0.$$

设在 这些 $\Delta S = 1$ 的弱衰变中, 服从 $\Delta I = \frac{1}{2}$ 规律, 这时求下

列 x, y, z 值, 式中 A 为跃迁振幅.

$$x = \frac{A(\Lambda^0 \rightarrow p\pi^-)}{A(\Lambda^0 \rightarrow n\pi^0)},$$

$$y = \frac{A(\Sigma^+ \rightarrow \pi^+n) - A(\Sigma^- \rightarrow \pi^-n)}{A(\Sigma^+ \rightarrow \pi^0p)},$$

$$z = \frac{A(\Xi^0 \rightarrow \Lambda^0\pi^0)}{A(\Xi^- \rightarrow \Lambda^0\pi^-)}.$$

解: 对超子的非轻子衰变 $\Delta I = \frac{1}{2}$, 可引入一个“假粒子” α ($I = \frac{1}{2}, I_3 = \frac{1}{2}$). 在同位旋耦合表象中, 超子和 α 粒子耦合, 利用同位旋波函数的正交性求出跃迁振幅 A 、超子和 α 的耦合:

$$|\Lambda^0; \alpha\rangle = |0, 0; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle,$$

$$|\Sigma^-; \alpha\rangle = |1, -1; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = |\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle,$$

$$\begin{aligned} |\Sigma^+; \alpha\rangle &= |1, 1; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \\ &= \sqrt{\frac{1}{3}}|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\Xi^0; \alpha\rangle &= |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}}|1, 0\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}|0, 0\rangle, \end{aligned}$$

$$|\Sigma^+ a\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = |1, -1\rangle$$

同样，把末态在同位旋表象的波函数写出：

$$|\pi^- p\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{2}{3}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle,$$

$$|\pi^0 p\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle,$$

$$|\pi^+ n\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle,$$

$$|\pi^- n\rangle = \left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle,$$

$$|\Lambda^0 \pi^0\rangle = |1, 0\rangle,$$

$$|\Lambda^0 \pi^-\rangle = |1, -1\rangle,$$

$$|\pi^0 n\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle.$$

从而可求：

$$A_1(\Lambda^0 \rightarrow n\pi^0) = \sqrt{\frac{1}{3}} M_{\frac{1}{2}},$$

$$A_2(\Lambda^0 \rightarrow p\pi^-) = -\sqrt{\frac{2}{3}} M_{\frac{1}{2}}, \quad M_{\frac{1}{2}} = \left\langle \frac{1}{2} \left| H_w \right| \frac{1}{2} \right\rangle,$$

故

$$x = -\sqrt{2},$$

$$A_3(\Sigma^- \rightarrow \pi^- n) = M_{\frac{3}{2}}, \quad M_{\frac{3}{2}} = \left\langle \frac{3}{2} \left| H_w \right| \frac{3}{2} \right\rangle,$$

$$A_4(\Sigma^+ \rightarrow \pi^0 p) = \sqrt{\frac{2}{3}} (M_{\frac{3}{2}} - M_{\frac{1}{2}}),$$

$$A_5(\Sigma^+ \rightarrow \pi^+ n) = \frac{1}{3} (M_{\frac{3}{2}} + 2M_{\frac{1}{2}}),$$

故
$$y = \frac{\frac{1}{3}(M_{3/2} + 2M_{1/2}) - M_{3/2}}{\sqrt{\frac{2}{3}}(M_{3/2} - M_{1/2})} = \frac{M_{3/2} + 2M_{1/2} - 3M_{3/2}}{\sqrt{2}(M_{3/2} - M_{1/2})}$$

$$= -\sqrt{2}.$$

故 $A_6(\Xi^0 \rightarrow \Lambda^0 \pi^0) = \sqrt{\frac{1}{2}} M_1, \quad M_1 = \langle 1 | H_w | 1 \rangle,$

$$A_7(\Xi^- \rightarrow \Lambda^0 \pi^-) = M_1,$$

$$z = \frac{1}{2} \sqrt{2}.$$

(与实验比较: 跃迁几率为 A^2 , 所以 $x^2 = \frac{A_1^2}{A_2^2} = 2$. 实验:

上测量其部分宽度之比 $\Gamma(\Lambda^0 \rightarrow p\pi^-) / \Gamma(\Lambda^0 \rightarrow n\pi^0) = \frac{64.2}{35.8}$

≈ 2 , 两者相吻合. $z^2 = A_6^2 / A_7^2 = \frac{1}{2}, \Gamma(\Xi^- \rightarrow \Lambda^0 \pi^-) = 100\%$,

$\Gamma(\Xi^0 \rightarrow \Lambda^0 \pi^0) = 100\%$. 但是, $\tau_{\Sigma^+} / \tau_{\Sigma^0} = \frac{1.64}{2.9} \approx \frac{1}{2}$, 也与实

验基本符合. 对 Σ^+, Σ^- 衰变较复杂, 这里从略, 详见:
K. Nishijima: *Fundamental Particles*. 1963年, 第278页)

(杨保志)

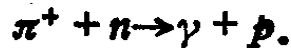
3036 (Pri, 1979)

(i) 细致平衡原理以时间反演不变性为前提, 它把反应 $a+b \rightarrow c+d$ 的截面与其逆反应 $c+d \rightarrow a+b$ 的截面联系起来, 设 $\sigma_r(W)$ 为反应

$$\gamma + p \rightarrow \pi^+ + n.$$

在质心系中总能量为 W 时的截面, 这个截面已对散射角积分, 对末态自旋求和, 对初态自旋求平均. $\sigma_{nr}(W)$ 为逆

反应



同样意义下的截面, 设 μ 为 π 介子质量, m 为核子质量(忽略中子与质子质量的微小差别). 给定 $\sigma_i(W)$, 利用细致平衡原理预言 $\sigma_r(W)$.

(ii) 反应 T 的阈能多大? 当 W 刚超过阈能时, $\sigma_i(W)$ 随 W 变化情况怎样?

解: (i) 为方便起见, 用 α 表示 (a, b) 态, β 表示 (c, d) 态, 反应 $a+b \rightarrow c+d$ 在题意下的截面为 $\sigma_{\alpha\beta}$, 其逆反应 $c+d \rightarrow a+b$ 在同样意义下的截面为 $\sigma_{\beta\alpha}$. 若时间反演不变性成立, 则当正逆反应的人射道具有相同的质心系能量 W 时, $\sigma_{\alpha\beta}$ 和 $\sigma_{\beta\alpha}$ 满足:

$$\frac{\sigma_{\alpha\beta}}{\sigma_{\beta\alpha}} = \frac{p_\beta^2 (2I_a + 1)(2I_d + 1)}{p_\alpha^2 (2I_c + 1)(2I_b + 1)}.$$

这就是细致平衡原理. 式中 p_α 为反应 $a+b \rightarrow c+d$ 入射道的相对动量值, p_β 为逆反应入射道的相对动量值, I_a, I_b, I_c 和 I_d 分别为粒子 a, b, c 和 d 的自旋.

对反应 $\gamma + p \rightarrow \pi^+ + n$, α 态为 (γ, p) .

设入射道质心系中 γ 的动量为 \mathbf{p}_r , 质子能量为 E_p , 则 $(W, 0) = (E_p, i\mathbf{p}_r) + (E_\gamma, -i\mathbf{p}_r)$. 所以

$$(W - E_p, i\mathbf{p}_r) = (E_\gamma, i\mathbf{p}_r),$$

$$(W - E_p)^2 - P_r^2 = 0.$$

于是 $E_p = \frac{W^2 + m^2}{2W}$ (利用 $E_p^2 = p_r^2 + m^2$),

相对动量 $p_\alpha^2 = p_r^2 = E_p^2 - m^2 = \left(\frac{W^2 - m^2}{2W}\right)^2$.

对逆反应, $\pi^+ + n \rightarrow \gamma + p$, β 态为 (π^+, n) .

设质心系中 π^+ 介子能量为 E_π , 动量为 p_π , 中子的能量为 E_n , 则

$$(W, 0) = (E_\pi, i p_\pi) + (E_n, -i p_\pi).$$

所以 $(W - E_n, i p_\pi) = (E_\pi, i p_\pi),$

$$(W - E_n)^2 - p_\pi^2 = E_\pi^2 - p_\pi^2.$$

利用 $E_\pi^2 = m^2 + p_\pi^2$, $E_n^2 = \mu^2 + p_\pi^2$ 得:

$$E_n = \frac{W^2 + m^2 - \mu^2}{2W}.$$

所以 $p_\pi^2 = p_n^2 = E_n^2 - m^2$

$$= \frac{(W^2 + m^2 - \mu^2)^2 - 4W^2 m^2}{4W^2}.$$

由 $I_\pi = 1$, $I_p = \frac{1}{2}$, $I_n = \frac{1}{2}$, $I_\pi = 0$, 但 γ 只有左、右旋两个自由度.

$$\frac{\sigma_1(W)}{\sigma_{II}(W)} = \frac{p_\pi^2 (2I_\pi + 1) (2I_n + 1)}{p_n^2 (2I_p + 1) (2I_p + 1)} = \frac{1}{2} \frac{p_\pi^2}{p_n^2}.$$

于是 $\sigma_{II}(W) = 2 \frac{p_n^2}{p_\pi^2} \sigma_1(W)$

$$= \frac{(W^2 - m^2)^2}{(W^2 + m^2 - \mu^2)^2 - 4W^2 m^2} \sigma_1(W).$$

(ii) $r + p \rightarrow \pi^+ + n.$

阈能反应时, 末态粒子在质心系中的动量均为零, 此时, 质心系中能量 $W_{\text{阈}} = m + \mu$. 因质子静止, 光子能量为 E_γ , 则质心系中能量 $W = \sqrt{2mE_\gamma + m^2}$, 阈能时有

$$\sqrt{2mE_\gamma^{\text{阈}} + m^2} = m + \mu.$$

所以 阈能 $E_\gamma^{\text{阈}} = \mu \cdot \left(1 + \frac{\mu}{2m}\right) \approx 150 \text{ MeV}.$

当 $E_\gamma > E_\gamma^{\text{阈}}$ 时, $\sigma(\gamma p \rightarrow \pi^+ n)$ 随 E_γ 的增加很快增加,

当 $E_s = 340 \text{ MeV}$ 时, 出现宽共振峰, 这时:

$$E^* = \sqrt{2m_p E_s + m_p^2} \approx 1232 \text{ MeV}, \quad \Gamma = 115 \text{ MeV}.$$

它是称为 Δ 粒子, 在峰值处 $\sigma \approx 280 \mu\text{b}$. (钱剑明)

3037 (Pri. 1981)

对下列问题作粗糙的、定性的或者数量级的回答: (i) 质心系能量为 20 GeV 时, 反应 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 的截面多大? 截面对能量的依赖关系怎样? (ii) 对 100 GeV (相对于核子静止系) 入射中微子, 中微子-核子作用总截面多大? 它对能量的依赖关系怎样? 根据 Weinberg-Salam 理论, 多大能量时这个能量依赖关系将改变? (iii) μ 子的寿命多长, τ 子呢? 如果发现一个质量比 τ 子重十倍的轻子, 并假定它以与 μ 子和 τ 子同样的衰变机制衰变, 则预期它的寿命多长? (iv) 在加速器能量下, 核子-核子作用总截面多大? (v) 在 π 介子核子散射中, 观察到一个很大的前向峰(小角度散射). 在向后方向又观察到一个小的但十分明显的峰(在质心系中近似为 180° 散射). 你能解释后向峰吗? 在 K^+P 弹性散射中观察到同样的后向峰而 K^-P 散射中却没有观察到, 你能解释这现象吗?

解: (i) $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 反应截面对能量的依赖关系可以通过下面方法粗略估计: 在 高能时, $s \gg m_e, m_\mu, s = (E_{cm})^2, m_e \approx m_\mu \approx 0$, 因电磁作用最低级有两个顶点, 因此

$$\sigma = f(s)\alpha^2.$$

用量纲分析 $\sigma = [\text{M}^{-2}]$, $s = [\text{M}^2]$, $\alpha = [0]$, 因此 $f(s) \approx \frac{1}{s}$,

$$\sigma \approx \frac{\alpha^2}{s}.$$

用量子电动力学计算, 不考虑辐射修正时,

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}.$$

对 $E = 20 \text{ GeV}$, $\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3 \times 20^2} = 5.6 \times 10^{-7} (\text{GeV}^{-2}) \approx 2.2 \times 10^{-36}$

$(\text{cm}^2) = 220(\text{pb})$.

(ii) 中微子与核子的相互作用总截面, 也可用类似的办法估计. 高能时, 有 $s \gg m_p^2$, νp 为弱作用, 有

$$\sigma \approx G_F^2 f(s).$$

从量纲来分析, $G_F = [M^{-2}]$, $s = [M^2]$, $\sigma = [M^{-2}]$

$$f(s) \approx s,$$

$$\sigma \approx G_F^2 s.$$

设实验室中的中微子能量为 E_ν , 则有:

$$s = (E_\nu + m_p)^2 - p_\nu^2 = m_p^2 + 2m_p E_\nu \approx 2m_p E_\nu.$$

$$\sigma \approx G_F^2 s \approx G_F^2 \cdot m_p E_\nu.$$

已知: $G_F m_p^2 = 10^{-5}$, 令 $m_p \approx 1 \text{ GeV}$. E_ν 用 GeV 单位.

$$\sigma \approx 10^{-10} E_\nu (\text{GeV}^{-2}) \approx 4 \times 10^{-38} (\text{cm}^2).$$

实验上给出: $\sigma \approx 0.6 \times 10^{-38} (\text{cm}^2)$. 对 100 GeV 的中微子, $\sigma \approx 10^{-36} (\text{cm}^2)$. 当 $s \approx m_W^2$ 附近时, 据弱电统一理论, σ 将有较大的变化.

(iii) μ 子的寿命 $\tau_\mu \approx 2.2 \times 10^{-6} \text{ s}$. τ 子的寿命 $\tau_\tau \approx 2.86 \times 10^{-13} \text{ s}$.

若存在新的重轻子 H , $M_H = 10M_\tau$, 且它衰变到电子的分支比相同, 它的寿命为 τ_H , 则有

$$\tau_H = \left(\frac{M_\tau}{M_H}\right)^5 \tau_\tau = 10^{-5} \tau_\tau \approx 2.86 \times 10^{-18} (\text{s}).$$

(iv) 核子之间为强相互作用. 在现在加速器能量下 (GeV 量级), 核子之间相互作用截面

$$\sigma_{NN} \approx \pi R_N^2,$$

R_N 为核子的半径, $R_N \approx 10^{-13} \text{cm}$.

$$\sigma_{NN} \approx 3 \times 10^{-26} \text{cm}^2 \approx 30 \text{mb}$$

实验上给出 $\sigma_{p,p} \approx 30-50 \text{mb}$, (当 $E_p: 10-2 \times 10^3 \text{GeV}$);

$\sigma_{n,p} \approx 30-50 \text{mb}$, (当 $E_p: 10-5 \times 10^2 \text{GeV}$).

(v) 类似电磁相互作用的物理图象, 强子之间的相互作用, 可以认为是强子之间交换虚的强子来实现的, 任何强子可以作为交换粒子, 也可以被别的强子产生, 所有的强子是平等的. 一般认为强作用是交换单个粒子, 多粒子交换的影响可以忽略, 这就是单粒子交换模型.

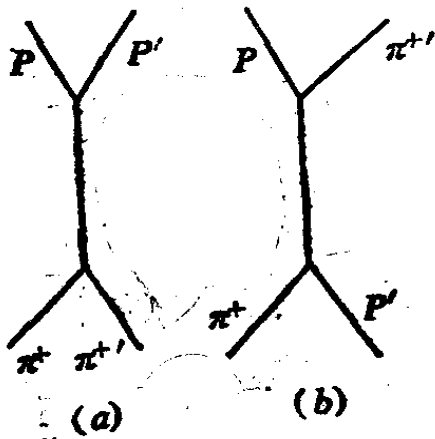


图 3.13

图3.13(a)称为 t 道, $t = -(p_{\pi^+} - p_{\pi^+})^2$. 为 π^+ 对于 π^+ 的四动量转移平方. 图3.13(b)称为 u 散射道, 有 $u = -(p_{\pi^+} - p_{p'})^2$ 为 π^+ 对于 p' 的四动量转移平方. 设 θ 为入射 π^+ 与出射 π^+ 的夹角. 当 $\theta = 0^\circ$ 时, $|t|$ 很小, 当 $\theta = 180^\circ$

时, $|u|$ 很小. 前者相当于 π^+ 向前散射, 后者相当于 π^+ 向后散射. 由于各顶点量子数守恒, 对 t 道, 虚交换子是介子, 对 u 道虚交换子是重子, 即有交换重子的散射在后向有峰. 一般散射交换介子的振幅大, 故朝前向的峰较大. 如 $\pi^+ p$ 散射, 有交换中子的 u 道, 故有后向散射峰. 在 $K^+ p$ 散射中, 交换一个虚的重子 ($S = -1, B = 1$) Δ^0 . 但 $K^- p$ 散射, 若有重子交换项, 必须是 $S = 1, B = 1$ 的重子, 但没有这样的重子存在, 故 $K^- p$ 散射没有向后散射峰.

(杨保忠 钱剑明)

§ 2 弱作用、弱电统一和大统一理论 (3038—3071)

3038 (Ber, 1983)

考虑轻子衰变： $\mu^+ \rightarrow e^+ \nu \bar{\nu}$ 和 $\tau^+ \rightarrow e^+ \nu \bar{\nu}$ ，它们都是通过同样的弱作用进行的。(a) 如果 μ^+ 的平均寿命是 2.2×10^{-6} 秒，估计 τ^+ 的平均寿命。已知 $\tau^+ \rightarrow e^+ \nu \bar{\nu}$ 的实验分支比是 16%， $M_\mu = 106 \text{ MeV}/c^2$ ， $M_\tau = 1784 \text{ MeV}/c^2$ ， $M_e = 0.5 \text{ MeV}/c^2$ ，(可忽略)， $M_\nu = 0 \text{ MeV}/c^2$ 。(b) 如果 τ^+ 是在加速器碰撞束中产生的(如 PEP)， $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$ ，当 $E_{cm} = 29 \text{ GeV}$ (e^+ 和 e^- 具有等值反向的动量)，求 τ^+ 衰变前通过的平均距离(在实验室系中)。

解：(a) 根据弱作用理论，可以算出：

$$\lambda_\mu = \frac{1}{\tau_\mu} = \frac{G_\mu^2 m_\mu^5}{192\pi^3}, \quad \lambda_\tau = \frac{G_\tau^2 m_\tau^5}{192\pi^3}.$$

它们具有同样的弱作用常数：

$$G_\mu = G_\tau, \quad \frac{\lambda_\tau}{\lambda_\mu} = \frac{m_\tau^5}{m_\mu^5}.$$

分支比： $R = \frac{\lambda_\tau(\tau^+ \rightarrow e^+ \nu \bar{\nu})}{\lambda}$ ，而 $\tau = \frac{1}{\lambda}$ ，

$$\text{所以 } \tau = \frac{R}{\lambda_\tau(\tau^+ \rightarrow e^+ \nu \bar{\nu})} = R \cdot \frac{m_\mu^5}{m_\tau^5} \cdot \tau_\mu$$

$$= 16\% \times \left(\frac{106}{1784}\right)^5 \times 2.2 \times 10^{-6}$$

$$= 2.6 \times 10^{-13} \text{s}.$$

(b) 在质心系中, τ^+, τ^- 具有相同的能量,

$$E_{\tau} = \frac{E_{cm}}{2} = 14.5 \text{ GeV},$$

$$\gamma = \frac{E_{\tau}}{m_0} = \frac{14.5 \times 10^3}{1784} = 8.13,$$

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{8.13^2}} = 0.992,$$

$$L = \beta(c) \gamma \tau = 0.992 \times 3 \times 10^{10} \times 8.13 \times 2.6 \times 10^{-13} = 6.29 \times 10^{-2} \text{ cm}.$$

(胡 平)

3039 (Ber, 1976)

假设 β 衰变: $n \rightarrow pe^{-}\bar{\nu}$ 和 $\Sigma^- \rightarrow \Lambda e^{-}\bar{\nu}$ 是由于同样的弱作用过程, 并且描述衰变的矩阵元是同样的. 估计过程 $\Sigma^- \rightarrow \Lambda e^{-}\bar{\nu}$ 的衰变率. 已知自由中子的寿命约为 10^3 秒, $m_n = 939.57 \text{ MeV}/c^2$, $m_p = 938.28 \text{ MeV}/c^2$, $m_{\Sigma} = 1197.35 \text{ MeV}/c^2$, $m_{\Lambda} = 1116.058 \text{ MeV}/c^2$, $m_e = 0.51 \text{ MeV}/c^2$, $m_{\nu} = 0$.

解: 根据 β 衰变理论, 单位时间的跃迁几率是 $W = 2\pi G^2 |M|^2 dN/dE_0$, 总衰变率 $\lambda \approx E_0^5$, 其中 E_0 是衰变中微子的最大能量. 对于两个衰变矩阵元相同的衰变, 比例常数一样.

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \left(\frac{E_{01}}{E_{02}} \right)^5,$$

$$\begin{aligned}
\lambda(\Sigma^- \rightarrow \Lambda e^- \bar{\nu}) &= \left[\frac{E_0(\Sigma^- \rightarrow \Lambda e^- \bar{\nu})}{E_0(n \rightarrow p e^- \bar{\nu})} \right]^5 \cdot \lambda_n \\
&= \left(\frac{m_{\Sigma^-} - m_{\Lambda}}{m_n - m_p} \right)^5 \cdot \frac{1}{\tau_n} \\
&= \left(\frac{1197.35 - 1116.058}{939.57 - 938.28} \right)^5 \times \frac{1}{10^8} \\
&= 9.94 \times 10^5 \text{ s}^{-1}.
\end{aligned}$$

(胡 平)

3040 (Pri, 1978)

尽管弱作用耦合的普适性，由于运动学的原因使得不同的弱作用过程有着巨大差别的速率。

(a) 假定普适的 $V-A$ 作用，计算(或估计)速率比：

$$\gamma = \frac{\Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu})}{\Gamma(\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu})}.$$

(b) 如果普适的弱作用 $V-A$ 理论为标量耦合，这个比值怎样改变？对赝标量又怎样？

(c) 期望比值 γ' ($V-A$ 作用)：

$$\gamma' = \frac{\Gamma(\Lambda \rightarrow p \mu^- \bar{\nu})}{\Gamma(\Lambda \rightarrow p e^- \bar{\nu})}$$

为多大？这里只要求一个定性结果。

$$\begin{aligned}
J^P(\pi^-) &= 0^-, \quad M_{\Lambda} = 1190 \text{ MeV}/c^2, \quad M_{\mu} = 105 \text{ MeV}/c^2, \\
M_e &= 0.5 \text{ MeV}/c^2, \quad M_p = 938 \text{ MeV}/c^2.
\end{aligned}$$

解：(a) 弱作用反应速率：

$$\Gamma = 2\pi G^2 |M|^2 \frac{dN}{dE_0}.$$

式中： $\frac{dN}{dE_0}$ 为单位能量间隔的终态数目， M 为跃迁矩阵元， G

为弱作用耦合常数。

π^- 粒子的二种衰变：

$$\pi^- \longrightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu, \quad \pi^- \longrightarrow e^- \bar{\nu}_e.$$

可设想为核子—反核子中间态的四个费米子相互作用 (图3.14)：

$$\pi^- \xrightarrow{\text{强作用}} \bar{p} + n \xrightarrow{\text{弱作用}} e^- + \bar{\nu}_e \text{ 或 } \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$

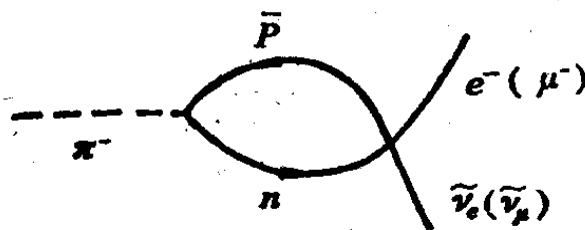


图 3.14

由于宇称、角动量方面的原因及 $V-A$ 理论知这种耦合为轴矢量耦合 (A)。

对 A 耦合 $M^2 \approx 1 - \beta$ (β 为带电轻子速率)。

相空间因子：

$$\frac{dN}{dE_0} = c \times p^2 \frac{dp}{dE_0},$$

其中： c 为常数， p 为带电轻子在静止 π 介子系统中的动量值，系统总能量：

$$E_0 = m_\pi = p + \sqrt{p^2 + m^2}, \quad (m \text{ 为带电轻子质量}).$$

所以

$$\frac{dp}{dE_0} = \frac{(m_\pi^2 + m^2)}{2m_\pi^2},$$

$$1 - \beta = \frac{2m^2}{m_\pi^2 + m^2}.$$

对于 A 耦合，衰变速率正比于：

$$\Gamma^2 \frac{dp}{dE_0} (1 - \beta) = \frac{m^2}{4} \left(1 - \frac{m^2}{m_\pi^2}\right)^2,$$

比值:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{p(\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu)}{\Gamma(\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e)} = \frac{m_\mu^2}{4} \left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2}\right)^2 / \frac{m_e^2}{4} \left(1 - \frac{m_e^2}{m_\pi^2}\right)^2 \\ &= \frac{m_\mu^2 (m_\pi^2 - m_\mu^2)^2}{m_e^2 (m_\pi^2 - m_e^2)^2} = 8.13 \times 10^3. \end{aligned}$$

(b) 对标量耦合 $M^2 \approx 1 - \beta$, 故比值 R 不变.

对赝标量耦合 $M^2 \approx 1 + \beta$, 衰变率正比于:

$$p^2 \frac{dp}{dE} (1 + \beta) = \frac{m_\mu^2}{4} \left(1 - \frac{m_e^2}{m_\pi^2}\right)^2,$$

得到:
$$\gamma = \frac{\Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- \nu)}{\Gamma(\pi^- \rightarrow e^- \nu)} = \frac{(m_\pi^2 - m_\mu^2)^2}{(m_\pi^2 - m_e^2)^2} = 0.18.$$

实验结果这一比值为

$$\gamma^{\text{exp}} = 8.1 \times 10^3.$$

(c) 对于 Λ^0 的半轻子衰变:

$$\begin{aligned} \Lambda^0 &\rightarrow p + \mu^- + \bar{\nu}_\mu \\ &\rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e, \quad \gamma' = \frac{\Gamma(\Lambda \rightarrow p \mu \nu)}{\Gamma(\Lambda \rightarrow p e \nu)}. \end{aligned}$$

同样可估计其 γ^1 值, 理论计算该值远小于 1.

$$\gamma_{\Lambda}^1 = 0.164,$$

$$\gamma_{\Lambda}^1 \text{exp} = 0.187 \pm 0.042.$$

说明 Λ 的衰变中, 与 $V-A$ 耦合理论相符合.

(钱剑明)

3041 (Wis, 1974, 1971)

列出中微子与反中微子的一般性质, 最初提出中微子存在假说的物理动机是什么? 人们第一次是怎样直接探测到中

微子的?

解: 中微子与反中微子的一般性质如下表:

名称 \ 性质	电 荷	自 旋	螺旋性	轻 子 数
中 微 子	0	$\frac{1}{2}$	- 1	+ 1
反中微子	0	$\frac{1}{2}$	+ 1	- 1

中微子与反中微子都是轻子, 它们只参与弱作用. 目前认为存在三种类型的中微子及其反中微子, 即电子中微子、 μ 子中微子和 τ 子中微子及其它们的反粒子.

为了解决 β 衰变过程中连续的电子能量与分立的原子核能级的矛盾, 1933年 Pauli 提出了 β 衰变中放出中微子的假说, 由于未探测到的中微子带走一部分能量, 导致了电子的连续能谱.

由于中微子只参与弱作用, 使得中微子直接探测工作极其困难. 莱尼斯(F. Reines)和柯文(C. L. Cowan)于1953年开始进行了这方面的实验工作, 他们的实验原理是利用中子衰变: $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$ 的逆过程 $\bar{\nu} + p \rightarrow n + e^+$, 由反应堆出来的 $\bar{\nu}$ 轰击质子, 若实验能探测到同时产生的中子和正电子, 则就直接证明了中微子的存在, 他们用了大约六年的时间完成这个实验, 并得到了肯定的结果. (钱剑明)

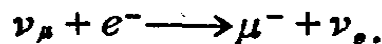
3042 (Wis, 1980)

(a) 目前认为存在几种类型的中微子? 中微子的自旋为何值? (b) 散射过程中中微子的哪些量守恒? 中微子与反中微子有何差别? 利用这些性质, 补上反应 $\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + ?$

中的未知粒子。(c)假定中微子质量严格为零,中微子有磁矩吗?中微子自旋取向如何?反中微子的自旋取向又怎样?(d)若中微子质量为 0.1eV ,则宇宙中温度为 3K 的中微子速度多大?

解:(a)目前已经发现二种类型的中微子,即电子中微子和 μ 子中微子及其它们的反粒子.理论上还预言存在第三种中微子: τ 子中微子及其反粒子.中微子的自旋为 $1/2$.

(b)在散射过程中,中微子的轻子数是守恒的.中微子与反中微子的差别为它们具有相反的轻子数,如果中微子质量为零,那么中微子与反中微子的螺旋性也是相反的.反应 $\nu_{\mu} + e^{-} \rightarrow \mu^{-} + ?$ 中的未知粒子为 ν_{e} .



(c)若中微子的质量严格为零,则中微子没有磁矩.中微子的自旋指向其运动的相反方向,反中微子的自旋指向其运动方向.

(d) 3K 中微子的动能为 $E_{\nu} = 3kT/2$,所以中微子的速度为

$$\beta = \sqrt{\frac{2E_{\nu}}{m}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3 \times 8.62 \times 10^{-5} \times 3}{0.1}} = 0.088,$$

相当于 $2.6 \times 10^7 \text{m/s}$,

(钱剑明)

3043 (Buf, 1981)

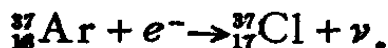
描述下列实验:(a)证明存在两种中微子:中微子反应截面很小.(b)写出高能中微子与质子和中子反应产生单个 π 介子的反应式.(c)定义螺旋性并给出中微子和反中微子

的螺旋性数值。(d)下列 μ^+ 的衰变能自然发生吗? 为什么?

(i) $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu$; (ii) $\mu^+ \rightarrow e^+ + e^- + e^+$.

解: (a) R. Davis 等人于 1955—1957 年通过测量反中微子与 ^{37}Cl 的作用截面证实了 $\bar{\nu}$ 与 ν 的不同.

对于 ^{37}Ar , 有下列电子俘获过程:



可以用人工办法实现此式的逆过程:



假如 $\bar{\nu}$ 与 ν 相同, 则下列过程也可以实现:



实验中将 4000 升 CCl_4 置于反应堆旁, 用堆中产生的反中微子流照射 CCl_4 足够长时间, 再从 CCl_4 中分离出气体 ^{37}Ar , 用灵敏仪器探测其 K 俘获放射性. 结果表明, 测得的截面远小于用 ν 照射时测到的截面 ($\approx 10^{-48} \text{cm}^2$), 从而证明了 $\bar{\nu}$ 不同于 ν , 也定量证明了中微子反应截面之小.

(b). $\nu_\mu + p \rightarrow \mu^- + p + \pi^+$,

$\nu_\mu + n \rightarrow \mu^- + n + \pi^+$,

$\rightarrow \mu^- + p + \pi^0.$

(c) 螺旋性定义为 $\mathcal{H} = \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{|\mathbf{p}| |\boldsymbol{\sigma}|}$

式中 \mathbf{p} 和 $\boldsymbol{\sigma}$ 分别为动量和自旋.

中微子是左旋的, $\mathcal{H} = -1$; 反中微子是右旋的, $\mathcal{H} = +1$.

(d) $\mu^+ \rightarrow e^+ + \gamma$, $\mu^+ \rightarrow e^+ + e^- + e^+$.

这两个反应均不能发生. 因为它们违背了电子轻子数和 μ 子轻子数分别守恒的定律. (唐子洲)

3044 (CCT, 1983)

测量电子中微子质量的一个灵敏方法是去测量：(a) 电子—中微子散射角分布；(b) β 衰变中的电子能谱；(c) 太阳的中微子流。

解：答案为(b)。 β 谱在接近最高能端时，由于中微子质量的存在而变化，从居里描绘上看，中微子质量的存在将使描绘的尾部改变。 (唐子洲)

3045 (CCT, 1983)

10^6 个 1GeV 的中微子穿过地时有多少发生了反应 ($\sigma = 0.7 \times 10^{-38} \text{cm}^2/n$, n 为核子； $R = 6000 \text{km}$ ； $\rho \approx 5 \text{g/cm}^3$ (A) = 20)。 (a) 全部， (b) ≈ 25 ， (c) 没有。

解：答案为(b)。总反应数： $N = \sigma N_0 N_s = \sigma N_0 N_s 2R$ ，

$$N_s = \rho \frac{N_A}{A} = 5 \times \frac{6.02 \times 10^{23}}{20} \times 20,$$

$$N = 0.7 \times 10^{-38} \times 10^6 \times 5 \times \frac{6.02 \times 10^{23}}{20} \times 20 \times 2$$

$$\times 6 \times 10^8 = 25.2.$$

(唐子洲)

3046 (CCT, 1983)

反应截面随 E 线性增长，当中微子能量为 1000GeV 时，需要多长的探测器才能在 10^6 个中微子中测到 1 个？ ($\rho \approx 5 \text{gcm}^{-3}$, (A) = 20)。 (a) 6km ， (b) 480m ， (c) 5m 。

解：答案为(b)。 $\sigma' = 1000\sigma$

$$l = 2R / (1000 \times 25) = 6000 \times 2 / (1000 \times 25) = 0.48 \text{km} \\ = 480 \text{m}.$$

(唐子洲)

3047 (Col, 1982)

在 South Dakota 的金矿中正在进行一个探测太阳中微子的实验，它是利用下述反应：



将测器中装有 4×10^5 升的 C_2Cl_4 。估计每天将有多少 Ar^{37} 原子产生，列出你的假设，你能如何改进这个实验？

解： $\nu + \text{Cl}^{37} \rightarrow \text{Ar}^{37} + e^{-}$ 反应的阈值为 0.81 MeV 。也就是说，可探测 $E_{\nu} > 0.81 \text{ MeV}$ 的中微子，当 CCl_4 被太阳中微子反应产生 Ar 收集和测量 Ar 的放射性即可。

设 CCl_4 的密度与水接近；单位体积内 Cl 核的数目为：

CCl_4 的分子量 $A = 12 \times 2 + 37 \times 4 = 172$ ，所以 $n = \frac{1}{A} \times 4$

$\times N_0 = \frac{1 \times 4}{172} \times 6.022 \times 10^{23} = 1.4 \times 10^{22} (\text{cm}^{-3})$ 。一般来讲，

中微子与物质相互作用截面是 E_{ν} 的函数，假定 $\sigma \approx 10^{-42} \text{ cm}^2/\text{Cl}$ 。

太阳中微子在地球表面的通量与各种太阳模型关系很大，假定 $E_{\nu} > 0.81 \text{ MeV}$ 的通量为

$F = 10^9 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ ，每天将测到的为 N_{ν} 。

$$N_{\nu} = V \cdot n \cdot \sigma \cdot F \cdot T = 4 \times 10^5 \times 1.4 \times 10^{22} \times 10^{-42} \times 10^9 \\ \times 24 \times 60 \times 60 \approx 4.8 \times 10^2 / \text{d}.$$

该实验由于只测量 $E_{\nu} > 0.81 \text{ MeV}$ 的中微子，而在太阳内部主要过程： $p + p \rightarrow {}^2\text{H} + e^{+} + \nu$ 的 E_{ν} 最大能量只有 0.42 MeV ，所以实验上观察不到。若用 Ga 或 In 作靶，即可测量较低能量的中微子。 (周平)

假设宇宙中充满了重中微子 ν_H (质量为 m_H) 它衰变成一个轻的中微子 ν_L (质量为 m_L) 和一个光子. $\nu_H \rightarrow \nu_L + \gamma$, 其寿命近似宇宙的年龄. 重中微子是在早期高温中产生的, 以后就冷却下来. 事实上, 它们主要是在静止中衰变

(a) 产生的光子是单能的. 并求出其能量.

(b) 当 $m_H \gg m_L$ 时, 求光子的能量. 由目前实验给出 $m_H \approx 50\text{eV}$. 且 $m_H \gg m_L$. 用什么特殊方法观测这些光子.

(c) 设重中微子的寿命短于宇宙年龄, 但也是冷下来且在衰变. 怎样改变你对 (b) 的回答.

解: (a) 重的中微子冷却后衰变. 因是静止粒子的两体衰变, 故每个粒子的动量一定, 即光子是单能的. 由能动量守恒,

$p_H = (0, im_H)$, $p_L(p_L, iE_L)$, $p_\gamma(p_\gamma, iE_\gamma)$, 对光子, $p_\gamma = E_\gamma$. 得到

$$E_L + E_\gamma = m_H, \quad (1)$$

$$E_\gamma = p_L, \quad (2)$$

$$E_L^2 = m_L^2 + p_L^2, \quad (3)$$

(1), (2) 代入 (3) 得

$$(m_H - E_\gamma)^2 = m_L^2 + E_\gamma^2, \quad E_\gamma = \frac{1}{2m_H}(m_H^2 - m_L^2),$$

$$(b) \text{ 当 } m_H \gg m_L \text{ 时, } E_\gamma \approx \frac{1}{2}m_H,$$

对于 $m_H = 50\text{eV}$, $E_\gamma \approx 25\text{eV}$, $\lambda \approx 495 \text{ \AA}$. 对这个波段的光子探测是相当困难的. 原则上讲, 任何测量真空紫外的方法都可测量这样的单个光子.

(c) 如果重的中微子寿命远小于宇宙的年龄, 它已在形成

后衰变成轻的中微子。重的中微子存在很少。探测就更困难。
(钱剑明)

3049 (Wis, 1978)

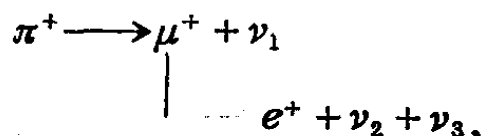
π^+ 的级联衰变: $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$, $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$, 指出宇称不守恒的证据。(a) 为验证宇称不守恒, 须测量哪个量? 画出这个量的分布或给出公式; (b) 两个衰变过程都破坏宇称守恒吗? 为什么?

解: (a) π^+ 介子在飞行中衰变, 选择朝前衰变的 μ^+ 子, 这种 μ^+ 子停止在碳吸收体内, 然后再发生衰变, 观察这些 μ^+ 子衰变放出 e^+ 的角分布, 可以验证宇称不守恒。观察相对于 μ^+ 原运动方向的 e^+ 分布得到的结果为: $dN/d\Omega = 1 - 1/3 \cos\theta$ 。显然这分布不满足空间反射不变性, 故宇称不守恒。

(b) 两个衰变过程都破坏宇称守恒, 因这两过程都是弱作用过程, 都有中微子放出。
(钱剑明)

3050 (Pri, 1980)

考虑下列衰变:



- (i) 如果 π 的动量为 p , μ 子的最大和最小动量是多少? 用 m_μ, m_π 和 p 表示. ($m_{\nu_1} = m_{\nu_2} = m_{\nu_3} = 0$) 且 $p \gg m_\pi, m_\mu$.
(ii) 如果 π 衰变中的中微子具有负的螺旋性, μ 子的螺旋性是怎样的. (iii) 已知 ν_2 和 ν_3 分别具有负的和正的螺旋性, e^+ 的螺旋性是多少? (iv) 什么量子数守恒显示 ν_1 和 ν_2 (ν_3) 分别和 μ 子及电子相联系? (v) π 衰变成电子: $\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_e$.

虽然对 μ 和电子衰变的动力学模式是相似的, 衰变到 μ 的速率却是电子的 10^4 倍. 试解释.

解: (i) π 介子的运动参数, 已知 p .

$$\beta\gamma = \frac{p}{m_\pi}, \quad \gamma = \frac{\sqrt{p^2 + m_\pi^2}}{m_\pi} \approx \left(1 + \frac{m_\pi^2}{2p^2}\right) \frac{p}{m_\pi}.$$

在 π 静止的坐标系中, $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_1$.

四动量守恒: $(0, im_\pi) = [(p_\mu^* + p_\nu^*), i(E_\mu^* + E_\nu^*)]$

$$E_\mu^* + E_\nu^* = m_\pi, \quad \text{又 } p_\mu^* = -p_\nu^*, \quad E_\nu^* = p_\nu^*,$$

$$m_\pi = \sqrt{p_\mu^{*2} + m_\mu^2} + p_\mu^*,$$

$$p_\mu^* = p_\nu^* = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi},$$

$$E_\mu^* = \sqrt{p_\mu^{*2} + m_\mu^2} = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi}.$$

换算质心系到实验室系:

$$p_\mu \cos\theta = \gamma p_\mu^* \cos\theta^* + \gamma\beta E_\mu^*.$$

当 $\theta = 0$ 时, p_μ 有极值:

$$\begin{aligned} \theta^* = 0^\circ, \quad (p_\mu)_{\max} &= p \left(1 + \frac{m_\pi^2}{2p^2}\right) \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi^2} + p \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi^2} \\ &= p + \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{4p}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta^* = 180^\circ, \quad (p_\mu)_{\min} &= -p \left(1 + \frac{m_\pi^2}{2p^2}\right) \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi^2} + p \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi^2} \\ &= \left(\frac{m_\mu^2}{m_\pi^2}\right) p - \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{4p}. \end{aligned}$$

(ii) 如果 π^+ 衰变中的中微子具有负螺旋性, 由总角动量守恒和动量守恒可知, 在 π^+ 静止的坐标系中, μ 一定具

有负的螺旋性.

(iii) 已知 ν_3 和 ν_2 具有正的和负的螺旋性, 还不能确定 e^+ 的螺旋性. 当 μ 慢化后静止衰变测量 μ 衰变的电子能谱发现, 峰值在 E_{\max} 处 (53 MeV), 说明电子和 ν_1, ν_3 是反向的. 若 μ 在慢化中不改变极化方向, 测量 e^+ 相对于 S_μ 方向的角分布为

$$\frac{dN_{e^+}}{d\Omega} \approx 1 - \frac{\alpha}{3} \cos\theta.$$

$\alpha \approx 1$. 说明 e^+ 沿 p_μ 反方向发射的几率大, e^+ 的螺旋性为正 ($+\beta_e$). 即电子是纵向极化的, 也说明在 π, μ 衰变中宇称不守恒.

(iv) 电子轻子数和 μ 子轻子数分别守恒把 ν_1, ν_3 和 ν_2 分别和 μ 子及电子联系起来, 因 ν_1, ν_2 和 ν_3 的电子轻子数分别为 0, 1, 0, μ 子轻子数分别为 1, 0, -1.

(v) 见 3040 题.

(吴为民)

3051 (CCT, 1983)

一束未极化的电子: (a) 可以用一个波函数来描述, 这个波函数是由自旋向上和向下分量相同的两部分构成; (b) 不能用波函数描述; (c) 不是上面的两种.

解: 答案为 (a).

(马 骥)

3052 (Wis, 1976)

s 和 p 分别为一个基本粒子的自旋与线动量矢量. (a) 写出 s 和 p 在宇称变换算符 \hat{P} 和时间反演算符 \hat{T} 下的变换式; (b) 根据 (a) 的回答, 建议在衰变 $A \rightarrow N + \pi$ 中观察违背时间反演的现象, 给出实验描述和重要假定.

解: (a) 宇称算符 \hat{P} 作用:

$$\hat{P}\mathbf{s}\hat{P}^{-1} = \vec{s}, \quad \hat{P}\mathbf{p}\hat{P}^{-1} = -\mathbf{p}.$$

时间反演算符 \hat{T} 作用:

$$\hat{T}\mathbf{s}\hat{T}^{-1} = -\mathbf{s}, \quad \hat{T}\mathbf{p}\hat{T}^{-1} = -\mathbf{p}.$$

(b) 观察极化 Λ 粒子衰变角关联

$$Q = \mathbf{s}_\Lambda \cdot (\mathbf{p}_N \times \mathbf{p}_\pi).$$

\mathbf{s}_Λ 为 Λ 粒子的自旋, \mathbf{p}_N 和 \mathbf{p}_π 分别为核子与 π 介子的线动量.

$$\begin{aligned} \hat{T}Q\hat{T}^{-1} &= \hat{T}\mathbf{s}_\Lambda\hat{T}^{-1} \cdot (\hat{T}\mathbf{p}_N\hat{T}^{-1} \times \hat{T}\mathbf{p}_\pi\hat{T}^{-1}) \\ &= -\mathbf{s}_\Lambda \cdot [(\mathbf{p}_N) \times (-\mathbf{p}_\pi)] = -Q, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= \langle \alpha | Q | \alpha \rangle = \langle \alpha | \hat{T}^{-1} \hat{T} Q \hat{T}^{-1} \hat{T} | \alpha \rangle \\ &= -\langle \alpha_T | Q | \alpha_T \rangle. \end{aligned}$$

若存在时间反演不变性, 则 $|\alpha_T\rangle$ 与 $|\alpha\rangle$ 描述同一个态, 故有:

$$\bar{Q} = \langle \alpha | Q | \alpha \rangle = -\langle \alpha_T | Q | \alpha_T \rangle = -\bar{Q},$$

所以 $\bar{Q} = 0$. 如图3.15所示. 实验上安排测量 π 介子和核子

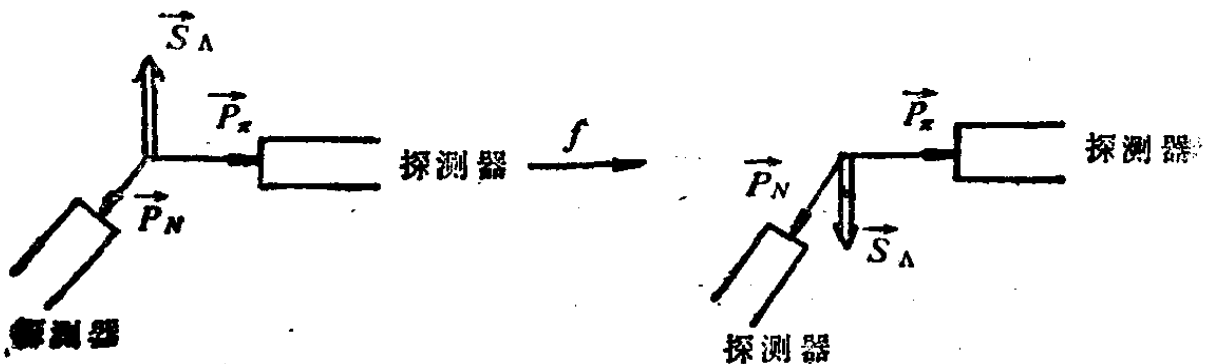


图3.15

的探测器相互垂直，其平面又与 Λ 粒子自旋垂直，观察 Λ 衰变事例，测量衰变事例数 $N(\uparrow)$ ，然后使 Λ 反向极化，在相同条件下观察 Λ 粒子衰变，测量衰变事例数 $N(\downarrow)$ 。若 $N(\uparrow) \neq N(\downarrow)$ ，则表示 $\Lambda \rightarrow \pi + N$ 过程中时间反演不变性遭到了破坏。

本实验要求 Λ 粒子严格极化。

(钱剑明)

3053 (Wis, 1972)

考虑衰变 $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$ ，描述在这一衰变中对宇称守恒的检验，什么情况影响这种检验的有效性？

解： $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$ 是非轻子衰变。已知 Λ^0 的自旋为 $\frac{1}{2}$ 和宇称为正， π^- 的宇称为负，自旋为零。

根据总角动量守恒，末态两粒子系统的轨道角动量可以为 0, 1。

当 $l=0$ ，末态系统的宇称为 $P(p)P(\pi^-)(-1)^0 = -1$ ，

$l=1$ ，末态系统的宇称为 $P(p)P(\pi^-)(-1)^1 = +1$ 。

若 Λ^0 衰变中宇称守恒，则 $l=0$ 是禁戒的，若 Λ^0 衰变中宇称破坏，这两种 l 值都是允许的，这时末态质子波函数可以写为

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi_s + \Psi_p \\ &= a_s Y_{0,0} \Psi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + a_p \left[\frac{2}{3} Y_{1,1} \Psi\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\frac{1}{3}} Y_{1,0} \Psi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right], \end{aligned}$$

式中： $\Psi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 和 $\Psi\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 是质子， $m = \pm \frac{1}{2}$ 的自旋波

函数 a_s 和 a_p 为 s 波和 p 波的振幅。

代入 $Y_{1,1}$, $Y_{1,0}$, $Y_{0,0}$ 值, 得到:

$$\begin{aligned} \Psi^* \Psi &\propto |a_s - a_p \cos \theta|^2 + |a_p|^2 \sin^2 \theta \\ &= |a_s|^2 + |a_p|^2 - 2R_s(a_s a_p^*) \cos \theta \\ &\propto 1 + \alpha \cos \theta, \\ \alpha &= 2R_s(a_s a_p^*) / (|a_s|^2 + |a_p|^2). \end{aligned}$$

若 A^0 是极化的, 则 p 或 π^- 的分布是 $1 + \alpha \cos \theta$ 形式 (在 A^0 静止的坐标系中. p 和 π^- 相差 180°). 若 A^0 非完全极化, 极化度为 P . 则有 π^- (或 p) 的角分布为 $(1 + \alpha P \cos \theta)$, θ 为 π^- 运动方向和 A^0 的极化方向之间的夹角。

利用协同产生中的极化 A^0 可进行上述测量:



强相互作用宇称守恒要求 A^0 是横向极化的, 且 A^0 的自旋方向垂直于产生平面. 实验上得到, 当入射 π^- 的动量稍大于 $1 \text{ GeV}/c$ 时, A^0 的极化度近似为 0.7 . 当我们选定 A^0 的产生平面 (即由入射 π^- 和 A^0 方向决定的平面, A^0 一定在这个平面内才能满足动量守恒). 测量 A^0 衰变的 π^- (或 p) 对这个平面上半部与下半部的计数不同 (即 $\theta = 0 \sim \frac{\pi}{2}$ 和 $\theta = \frac{\pi}{2} \sim \pi$). 即说明 A^0 衰变中宇称不守恒*.

上述过程以存在极化 A^0 才有 π^- 的不对称性, 当 A^0 的 $P=0$ 时, 上述检验无效. (杨保忠)

* 1957年, Eister 等测得, 当入射 π^- 的动量为 $910-1300 \text{ MeV}$ 时, $\alpha_p \approx 0.7$. ——编者注

Λ 粒子和质子的自旋为 $\frac{1}{2}$, π 介子自旋为 0. (a) 假定静止的 Λ 粒子沿 z 轴极化, 并发生衰变

$$\Lambda \rightarrow p + \pi.$$

求 π 介子的角分布. 若这过程中宇称守恒, 则 π 介子角分布将受到什么约束? (b) 怎样才能产生极化 Λ 粒子?

解: (a) 初态 Λ 粒子的自旋态为 $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$, 由角动量守恒知末态 πp 体系的轨道角动量量子数 $l=0, 1$.

对 $l=0$, 末态波函数为: $\Psi_s = a_s Y_{00} |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ 其中 a_s 为衰变中 s 波振幅, $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ 为质子状态, Y_{00} 为轨道运动波函数.

对 $l=1$, 末态波函数为

$$\Psi_p = a_p \left[\sqrt{\frac{2}{3}} Y_{11} |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} Y_{10} |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \right]$$

a_p 为衰变中 p 波振幅, $\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{3}}$ 为 Clebsh-Gordon 系数.

$$\text{由 } Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta, Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\varphi}$$

得:

$$\Psi_s = \frac{a_s}{\sqrt{4\pi}} |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle,$$

$$\Psi_p = -\frac{a_p}{\sqrt{4\pi}} \left[\sin\theta e^{i\varphi} |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + \cos\theta |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \right].$$

末态总波函数为

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left[(a_s - a_p \cos\theta) \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle - a_p \sin\theta e^{i\phi} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \right].$$

强度分布为

$$\begin{aligned} \Psi^* \Psi &\propto |a_s - a_p \cos\theta|^2 + |a_p \sin\theta|^2 \\ &= |a_s|^2 + |a_p|^2 - 2\text{Re}(a_s a_p^*) \cos\theta. \end{aligned}$$

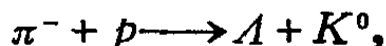
因此, π 介子的角分布为

$$I(\theta) = C(1 + \alpha \cos\theta),$$

其中 C, α 为常数.

若衰变过程中宇称守恒, 则 π 介子角分布要受到空间反射对称的限制, 此时 π 介子角分布应与产生平面上下对称.

(b) 极化 Λ 粒子可以由 π 介子轰击质子靶产生



其极化垂直于产生平面.

(钱剑明 范扬眉)

3055 (Pri, 1979)

(i) 众所周知, 宇称守恒在衰变 $\Lambda \rightarrow p\pi^-$ 中遭到破坏, 下列事实说明了这个问题. 如果 Λ 粒子完全极化, 比如沿 z 轴, 则质子角分布为

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega} = \Lambda(1 + \lambda \cos\theta).$$

给定 λ , 如果 Λ 是非极化的, 则质子纵向极化如何?

(ii) 对奇异数改变的超子衰变, 比如 $\Lambda \rightarrow p\pi^-, \Lambda \rightarrow n\pi^0$, $\Sigma^+ \rightarrow n\pi^+, \Sigma^+ \rightarrow p\pi^0, \Sigma^- \rightarrow n\pi^-, K^+ \rightarrow \pi^+\pi^0, K_s^0 \rightarrow \pi^+\pi^-, K_s^0 \rightarrow \pi^0\pi^0$ 等, 存在一个有大量根据的近似成立

的 $\Delta I = \frac{1}{2}$ 定则, 利用此定则, 预言 $K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0$, $K_s^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ 和 $K_s^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0$ 的相对衰变速率.

解: (i) 在 Λ^0 衰变中宇称遭到破坏, 而且衰变过程由振幅为 a_s 和 a_p 的 s 波和 p 波来描写. 根据衰变的螺旋性理论, 一个自旋为 $1/2$ 的超子沿 $\Omega = (\theta, \phi)$ 方向发射质子的静止衰变, 其衰变振幅为

$$f_{\lambda M}(\theta, \phi) = (2\pi)^{-1/2} \mathcal{D}_{M\lambda}^{1/2}(\phi, \theta, 0) a_{\lambda'}.$$

式中: M 和 λ' 分别表示 Λ^0 的自旋投影和质子的螺旋性. 我们用 a_+ 和 a_- 表示两种不同螺旋性衰变的振幅, 宇称守恒表明 $a_+ = -a_-$. 总衰变率:

$$W = |a_+|^2 + |a_-|^2.$$

从静止沿 z 轴极化 Λ^0 超子而来的衰变角分布

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\Omega} &= \frac{1}{W} \sum_{\lambda'} |f_{\lambda', 1/2}(\theta, \phi)|^2 \\ &= (2\pi W)^{-1} \sum_{\lambda'} |a_{\lambda'}|^2 [d_{1/2, \lambda'}^{1/2}(\theta)]^2 \\ &= (2\pi W)^{-1} [|a_+|^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + |a_-|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}] \\ &= A(1 + \lambda \cos \theta). \end{aligned}$$

式中 $d_{1/2, \lambda'}^{1/2}(\theta) = \mathcal{D}_{M\lambda'}^{1/2}(\phi, \theta, 0)$, $A = \frac{1}{4\pi}$, $\lambda = \frac{|a_+|^2 - |a_-|^2}{|a_+|^2 + |a_-|^2}$.

若宇称守恒, 则 $\lambda = 0$.

来自未极化 Λ^0 衰变样品的质子螺旋性的期待值为

$$\begin{aligned} P &= (2W)^{-1} \sum_M \int d\Omega \left\{ \frac{1}{2} |f_{1/2, M}|^2 - \frac{1}{2} |f_{-1/2, M}|^2 \right\} \\ &= (2W)^{-1} \sum_M \int d\Omega \sum_{\lambda'} \lambda' |f_{\lambda, M}|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2W)^{-1} \sum_M \sum_{\lambda'} \lambda' |a_{\lambda'}|^2 (2\pi)^{-1} \int d\Omega |d_{M, \lambda'}^{1/2}(\theta)|^2 \\
&= W^{-1} \sum_{\lambda'} \lambda' |a_{\lambda'}|^2.
\end{aligned}$$

这里我们利用了

$$\begin{aligned}
\sum_{M'} (d_{N M'}^J(\theta))^2 &= \sum_{M'} d_{M M'}^J(-\theta) d_{M, M}^J(\theta) \\
&= d_{M M}^J(\theta).
\end{aligned}$$

于是
$$P = \frac{1}{2} \frac{|a_+|^2 - |a_-|^2}{|a_+|^2 + |a_-|^2} = \frac{1}{2} \lambda.$$

(ii) 对于衰变:

$$K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0,$$

$$K_S^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-,$$

$$K_S^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0.$$

由于末态均为两个玻色子，总波函数应该是对称的， K 介子的自旋为零，末态总角动量为零，又 π 的自旋为零，末态 $I=0$ 。即空间波函数是对称的，两玻色子系统，总波函数是对称的，要求末态同位旋波函数是对称的， $I=0, 2$ 。弱衰变要求 $\Delta I = \frac{1}{2}$ ，故 $I=0, 1$ ，综合上述要求： $I=0$ 。

对 $K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0$ ，末态 $I_3=1$ ， $I \geq J_3$ 。故末态 $I=2$ ，违背 $\Delta I = \frac{1}{2}$ 的规则，是禁戒的。实验上给出：

$$\sigma(K_S^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-) / \sigma(K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0) \approx 455.$$

对于 $K_S^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ 和 $\pi^0 \pi^0$ 都满足 $\Delta I = \frac{1}{2}$ 规则。末态同位旋态应是 $|I, I\rangle_3 = |0, 0\rangle$ 。展开后有

$$\begin{aligned}
|I, I_3\rangle = |0, 0\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}} (|1, 1; 1, -1\rangle \\
&+ |1, -1; 1, 1\rangle - |1, 0, 1, 0\rangle) \\
&= \sqrt{\frac{1}{3}} (|\pi^+\pi^-\rangle + |\pi^-\pi^+\rangle - |\pi^0, \pi^0\rangle).
\end{aligned}$$

所以 $\frac{K_s^0 \rightarrow \pi^+\pi^-}{K_s^0 \rightarrow \pi^0\pi^0} = 2$. (钱剑明)

3056 (Buf, 1980)

(a) 描述 K^0 衰变中的 CP 不守恒实验并解释为什么这个实验特别合适? (b) $10\text{GeV}/c$ 的中性 K 介子束在飞行 20 米远以后, 求短寿命 K_s 和长寿命 K_L 的数目之比. ($\tau_{K_L} = 5 \times 10^{-8}\text{s}$, $\tau_{K_s} = 0.86 \times 10^{-10}\text{s}$)

解: (a) 1964 年, J. W. Cronin 等人在 K^0 介子产生后, 飞行 5.7 英尺时, 仍发现有极少数 K^0 介子衰变成 2π , 由于 K_s^0 的寿命如此之短, 以至在距 K_s 粒子产生处几个厘米后, 几乎所有的 K_s 都衰变光了. 在距束流产生点 5.7 英尺处应为纯的 K_L^0 束. 若 CP 守恒, K_L^0 应衰变成 3π . 实验上发现 K_L^0 衰变中有 2π 衰变产物, 这就意味着在 K^0 衰变中 CP 守恒破坏, 即存在着在空间反演和电荷共轭联合不变性破坏. 用 K^0 的衰变来检验 CP 守恒定律是因为 K^0 束是由 $\eta_{CP} = -1$ 的 K_2^0 和 $\eta_{CP} = 1$ 的 K_1^0 混合束, K_1^0 和 K_2^0 有不同的 CP 本征值, 故它们衰变成 3π 和 2π , 表现出有不同的寿命, 测量值:

$$R = \frac{K_L^0 \rightarrow \pi^+\pi^-}{K_L^0 \rightarrow \text{所有带电粒子}} \approx 2 \times 10^{-3}.$$

R 是 CP 破坏的一个量度. 因为 K_L^0 是和具有 $\eta_{pp} = -1$ 的 K_S^0 相对应. 应该只衰变道 3π . 实验上测到了 K_L^0 衰变到 2π , 即 $R \neq 0$. 而 $\eta_{pp}(\pi^+\pi^-) = +1$. 从而证明 K_L^0 衰变中有 CP 守恒破坏.

$$(b) M_{K^0} \approx 0.5 \text{ GeV}/c^2, p_{K^0} \approx 10 \text{ GeV}/c,$$

$$\beta\gamma \approx \frac{p_{K^0}}{M_{K^0}} = 20.$$

在 K^0 产生时, 长寿 K_L^0 和短寿 K_S^0 的强度相等.

$$I_{L_0} = I_{S_0}$$

$$\text{飞行 20 米后, } I_L = I_{L_0} e^{-t/\gamma\tau_L} = I_{L_0} e^{-\frac{20}{\beta\lambda c\tau}},$$

$$I_S = I_{S_0} e^{-\frac{20}{\beta\gamma c\tau_S}},$$

$$I_S/I_L = e^{-\frac{20}{\beta\gamma c} \left(\frac{1}{\tau_S} - \frac{1}{\tau_L} \right)} \approx e^{-38.7} \approx 1.6 \times 10^{-17},$$

可见在 20 米以后, 2π 衰变只可能是由 K_L^0 产生.

(唐子洲)

3057 (Col, 1984)

(忽略 CP 不守恒) 中性 K 介子 $|K^0\rangle$ 和 $|\bar{K}^0\rangle$ 可由态 $|K_L\rangle, |K_S\rangle$ 表示:

$$|K^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K_L\rangle + |K_S\rangle),$$

$$|\bar{K}^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K_L\rangle - |K_S\rangle).$$

$|K_L\rangle, |K_S\rangle$ 是寿命 $\tau_L = \frac{1}{\Gamma_L}, \tau_S = \frac{1}{\Gamma_S}$, 且不同的静止能量的态 $m_L c^2 \neq m_S c^2$. $t=0$ 时, 一个介子处于 $|\Psi(t=0)\rangle = |K^0\rangle$,

若在 t 时发现系统在 $|K^0\rangle$ 态的几率为 $P_0(t)$, 而在 $|\bar{K}^0\rangle$ 态的几率为 $\bar{P}_0(t)$, 以 $\gamma_L, \gamma_S, m_L c^2, m_S c^2$ 表述 $p_0(t) - \bar{p}_0(t)$.

解: 由题意知在 t 时刻的态:

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= e^{-iHt} |\psi(0)\rangle \\ &= e^{-iHt} \frac{1}{\sqrt{2}} (|K_L\rangle + |k_S\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [e^{-im_L t - \frac{\gamma_L t}{2}} |k_L\rangle + e^{-im_S t - \frac{\gamma_S t}{2}} |k_S\rangle] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ e^{-im_L t + \frac{\gamma_L t}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} (|k^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle) \right. \\ &\quad \left. + e^{-im_S t - \frac{\gamma_S t}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} (|k^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left[e^{-im_L t - \frac{\gamma_L t}{2}} + e^{-im_S t - \frac{\gamma_S t}{2}} \right] |K^0\rangle \right. \\ &\quad \left. + \left[e^{-im_L t - \frac{\gamma_L t}{2}} - e^{-im_S t - \frac{\gamma_S t}{2}} \right] |\bar{K}^0\rangle \right\}, \end{aligned}$$

$$P_0(t) = \frac{1}{4} \left[e^{-\gamma_L t} + e^{-\gamma_S t} + 2e^{-\frac{\gamma_L + \gamma_S}{2} t} \cos(m_L - m_S)t \right],$$

$$\bar{P}_0(t) = \frac{1}{4} \left[e^{-\gamma_L t} + e^{-\gamma_S t} - 2e^{-\frac{\gamma_L + \gamma_S}{2} t} \cos(m_L - m_S)t \right],$$

$$P_0(t) - \bar{P}_0(t) = e^{-\frac{\gamma_L + \gamma_S}{2} t} \cos(m_L - m_S)t. \quad (\text{杨永安})$$

3058 (Pri, 1981)

(a) 解释下列四个反应之一的优点在于能产生纯中性 K 束(即不因它的反粒子存在所污染):

$$\pi^- p \longrightarrow (\Lambda^0 \text{或} K^0), K^0 \text{或} \bar{K}^0,$$

(b) 上述方式产生的纯中性 K 束, 在 $t=0$ 时, 电荷反对称因子是多少? δ 由衰变到 $e^+ \pi^- \nu$ 的数相对于 $e^- \pi^+ \bar{\nu}$ 数给出:

$$\delta = \frac{N(e^+ \pi^- \nu) - N(e^- \pi^+ \bar{\nu})}{N(e^+ \pi^- \nu) + N(e^- \pi^+ \bar{\nu})}.$$

(c) 在 CP 守恒的近似下, 计算出 δ 相对于时间的函数, 并解释怎样利用 δ 与时间的相关性来得到长寿命 K_L^0 和短寿命 K_S^0 的质量差 Δm .

(d) 说明 CP 稍不守恒时, 对 δ 和时间关系有什么影响?

解: (a) 产生纯 K^0 束反应为

$$\pi^- p \longrightarrow \Lambda^0 K^0.$$

该过程为强作用, 满足各种守恒定律.

(b) 在 $t=0$ 时, 只有纯 K^0 束, 根据弱作用衰变规则, $|\Delta S|=1$, $|\Delta I|=|\Delta I_S|=\frac{1}{2}$.

$K^0 \longrightarrow \pi^- e^+ \nu$ 是允许衰变,

$K^0 \longrightarrow \pi^+ e^- \bar{\nu}$ 是禁戒衰变.

$$\delta(t=0) = \frac{N(e^+ \pi^- \nu) - N(e^- \pi^+ \bar{\nu})}{N(e^+ \pi^- \nu) + N(e^- \pi^+ \bar{\nu})} = 1.$$

$$(c) \quad t=0, \quad \left| K_L^0(0) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| K^0(0) \right\rangle$$

$$\left| K_S^0(0) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| K^0(0) \right\rangle$$

在 t 时刻为

$$\left| K_L^0(t) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| K^0(0) \right\rangle e^{-\left(i m_L t + \frac{\Gamma_L}{2} t\right)},$$

$$|K_S^0(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |K^0(0)\rangle e^{-(im_S t + \frac{\Gamma_S}{2} t)}$$

$$\begin{aligned} |K^0(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|K_S^0(t)\rangle + |K_L^0(t)\rangle) \\ &= \frac{1}{2} |K^0(0)\rangle \left[e^{-(im_S t + \frac{\Gamma_S}{2} t)} \right. \\ &\quad \left. + e^{-(im_L t + \frac{\Gamma_L}{2} t)} \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\bar{K}^0(t)\rangle &= \frac{1}{2} |K^0(0)\rangle \left[e^{-(im_S t + \frac{\Gamma_S}{2} t)} \right. \\ &\quad \left. - e^{-(im_L t + \frac{\Gamma_L}{2} t)} \right]. \end{aligned}$$

若设衰变几率: $N(K^0 \rightarrow \pi^- e^+ \nu) = N(K^0 \rightarrow \pi^+ e^- \bar{\nu})$, 则

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \frac{|e^{-(im_S + \frac{\Gamma_S}{2})t} + e^{-(im_L + \frac{\Gamma_L}{2})t}|^2}{|e^{-(im_S + \frac{\Gamma_S}{2})t} - e^{-(im_L + \frac{\Gamma_L}{2})t}|^2} \\ &\leftarrow \frac{-|e^{-(im_S + \frac{\Gamma_S}{2})t} - e^{-(im_L + \frac{\Gamma_L}{2})t}|^2}{+|e^{-(im_S + \frac{\Gamma_S}{2})t} - e^{-(im_L + \frac{\Gamma_L}{2})t}|^2} \\ &= \frac{2e^{-\frac{\Gamma_L + \Gamma_S}{2}t} \cos(\Delta m t)}{e^{-\Gamma_L t} + e^{-\Gamma_S t}} \end{aligned}$$

从测量 $\delta(t) \sim t$ 的振荡曲线, 可求得 $\Delta m = |m_L - m_S|$.

(d) 若 CP 守恒破坏, 但仅是微小的破坏, 设破坏参数为 ϵ , 有:

$$\begin{aligned} |K^0(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(1 + \epsilon) |K_S^0(t)\rangle + (1 - \epsilon) |K_L^0(t)\rangle] \\ &= \frac{1}{2} |K^0(0)\rangle \left[\left(e^{-(im_S + \frac{\Gamma_S}{2})t} + e^{-(im_L + \frac{\Gamma_L}{2})t} \right) \right. \end{aligned}$$

$$+ \varepsilon \left(e^{-\left(m_s + \frac{\Gamma_s}{2}\right)t} - e^{-\left(m_L + \frac{\Gamma_L}{2}\right)t} \right) \Bigg];$$

$$\begin{aligned} |K^0(t)\rangle &= \frac{1}{2} |K^0(0)\rangle \left[\left(e^{-\left(m_s + \frac{\Gamma_s}{2}\right)t} - e^{-\left(m_L + \frac{\Gamma_L}{2}\right)t} \right) \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon \left(e^{-\left(m_s + \frac{\Gamma_s}{2}\right)t} + e^{-\left(m_L + \frac{\Gamma_L}{2}\right)t} \right) \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{而 } \delta(t) &= \frac{\langle K^0(t) | K^0(t) \rangle - \langle K_0(t) | K^0(t) \rangle}{\langle K^0(t) | K^0(t) \rangle + \langle K_0(t) | K^0(t) \rangle} \\ &\approx \frac{2e^{-\frac{\Gamma_L + \Gamma_s}{2}t} \cos(\Delta mt)}{e^{-\Gamma_L t} + e^{-\Gamma_s t}} + R_s(\varepsilon). \end{aligned}$$

(黄晓舟)

3059 (Pri, 1982)

在 Weinberg-Salam 模型中, 弱作用是由三个重矢量玻色子: W^+ , W^- 和 Z^0 作为中间交换, 它们的质量为

$$M_W^2 = (\pi\alpha/\sqrt{2}) G \sin^2\theta,$$

$$M_Z^2 = M_W^2 / \cos^2\theta.$$

式中: α 是精细结构常数, θ 是混合角, G 是费米常数. 电子、正电子、中微子和 W, Z^0 之间的相互作用拉格朗日量为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} &= \frac{\sqrt{\pi\alpha}}{\sin\theta} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{\nu} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) e + \frac{1}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\cos\theta} Z_\mu [\nu \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu - \bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) e \right. \\ &\quad \left. + 4\sin^2\theta \bar{e} \gamma_\mu e \right\}. \end{aligned}$$

其中: ν 和 e 是狄拉克场, 考虑电子反中微子在电子上的弹

弹性散射： $\nu e^- \rightarrow \nu e^-$.

(i) 画出这一过程最低阶费曼图，标出每一条线。

(ii) 如果电子及电子反中微子的质量与 M_W 比较是很小的，则它们之间的相互作用可以用四费米子理论的有效拉格朗日量代替，写出正确的有效拉氏量，并化成下面形式：

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{G}{\sqrt{2}} [\bar{\nu} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu] [\bar{e} \gamma_\mu (A - B \gamma_5) e].$$

其中 A 和 B 是 θ 的函数。

注：如果 ψ_1 和 ψ_2 是反对易狄拉克场，则有：

$$\begin{aligned} & [\bar{\psi} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_2] [\bar{\psi}_2 \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi_1] \\ &= [\bar{\psi}_1 \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_1] [\bar{\psi}_2 \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi_2]. \end{aligned}$$

(iii) 什么实验能够确定出 A 和 B ？

解：(i) νe 弹性散射应包括两种，交换 Z^0 和交换 W^- ，它们的低阶费曼图为图 3.16。

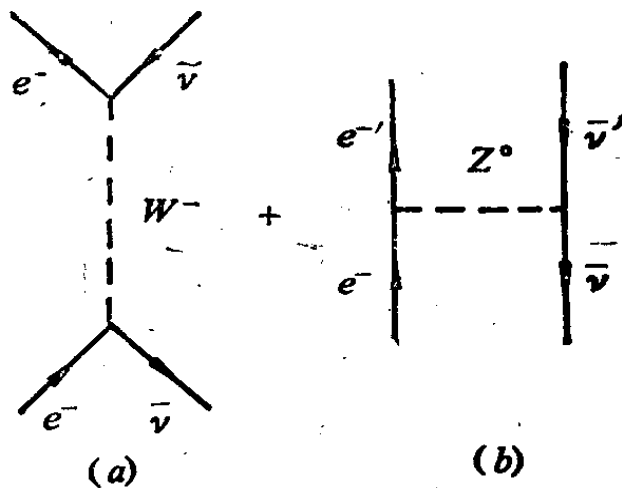


图 3.16

(ii) 据题给的拉氏量，可写出两图的拉氏量，对于图 3.16(a)：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(e\nu W) &= \left(\sqrt{\frac{\pi\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{\sin\theta} \right)^2 \left[\bar{\nu} r_\mu (1-r_\nu) e \right. \\ &\quad \left. \cdot \frac{g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu}{M_W^2 - k^2} \bar{e} r_\mu (1-r_\nu) \nu \right] \\ &= \frac{\pi\alpha}{2\sin^2\theta} \left[\bar{\nu} r^\mu (1-r_\nu) e \frac{g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu}{M_W^2 - k^2} \bar{e} r_\mu (1-r_\nu) \nu \right]. \end{aligned}$$

在低能时, $M_W^2 \gg k^2$, 上式可近似为

$$\mathcal{L}(e\nu W) = \frac{\pi\alpha}{2\sin^2\theta M_W^2} [\bar{\nu} r_\mu (1-r_\nu) e] [\bar{e} r^\mu (1-r_\nu) \nu].$$

因为 ν 和 e 是狄拉克场, 有:

$$[\bar{\nu} r^\mu (1-r_\nu) e] [\bar{e} r_\mu (1-r_\nu) \nu] = [\bar{\nu} r^\mu (1-r_\nu) \nu] [\bar{e} r_\mu (1-r_\nu) e]$$

拉氏量可改写成:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\nu e W) &= \frac{\pi\alpha}{2\sin^2\theta M_W^2} [\bar{\nu} r^\mu (1-r_\nu) \nu] [\bar{e} r_\mu (1-r_\nu) e] \\ &= \frac{G}{\sqrt{2}} [\bar{\nu} r^\mu (1-r_\nu) \nu] [\bar{e} r_\mu (1-r_\nu) e]. \end{aligned}$$

$$G = \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2} \sin^2\theta M_W^2}.$$

对于图 3.16(b), 可以写成有效拉氏量:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(e\nu z^0) &= \frac{\pi\alpha^2}{\sin^2\theta \cdot 4\cos^2\theta} \left[\bar{\nu} r^\mu (1-r_\nu) \nu \right. \\ &\quad \left. \cdot \frac{g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{M_z^2}}{M_z^2 - k^2} \cdot \bar{e} r^\nu (g_\nu - g_A r_\nu) e \right], \end{aligned}$$

式中: $g_\nu = -1 + 4\sin^2\theta$, $g_A = -1$.

当 $M_z^2 \gg k^2$ 时, 该式也可简化成四费米子直接相互作用形式:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(z\nu e^0) &= \frac{4\sin^2\theta\cos^2\theta M_z^2}{\pi\alpha} [\bar{\nu}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu][\bar{e}\gamma_\mu(g_v - g_A\gamma_5)e] \\
&= \frac{G}{2\sqrt{2}} [\bar{\nu}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu][\bar{e}\gamma_\mu(g_v - g_A\gamma_5)e]. \\
M_z^2 &= \frac{M_w^2}{\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{\sqrt{2}G\sin^2\theta\cos^2\theta}.
\end{aligned}$$

总的有效拉氏量应为两项之和:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{eff} &= \mathcal{L}(e\nu z) + \mathcal{L}(e\bar{\nu}z^0) \\
&= \frac{G}{\sqrt{2}} [\bar{\nu}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu][\bar{e}\gamma_\mu(1-\gamma_5)e] \\
&\quad + \frac{G}{2\sqrt{2}} [\bar{\nu}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu][\bar{e}\gamma_\mu(g_v - g_A\gamma_5)e] \\
&= \frac{G}{\sqrt{2}} [\bar{\nu}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu] \left[\bar{e}\gamma_\mu \left(1 + \frac{g_v}{2} - \gamma_5 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{g_A\gamma_5}{2} \right) e \right] \\
&= \frac{G}{\sqrt{2}} [\bar{\nu}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu][\bar{e}\gamma_\mu(A - B\gamma_5)e].
\end{aligned}$$

$$A = 1 + \frac{g_v}{2}, \quad B = 1 + \frac{g_A}{2}.$$

(iii) 可以测定 A 和 B 的实验很多, 较好的实验结果来自中微子散射实验. 例如: 由 $\nu_\mu e^-$, $\bar{\nu}_\mu e$ 散射实验和 $e^+e^- \rightarrow J^+J^-$ 的 1 电荷的不对称性实验, 可给出 g_v 和 g_A , 从而给出 A 和 B .

更直接的实验是 CERN 的 $p\bar{p}$ 对撞实验, 它们直接测量出:

$$M_W = (80.8 \pm 2.7) \text{ GeV}$$

$$M_Z = (92.9 \pm 1.6) \text{ GeV}$$

给出:

$$\sin^2 \theta = 0.224$$

(朱栋培 任勇)

3000 (Pri, 1980)

对现代弱作用理论进行的一种重要检验包含 μ 中微子对电子的散射:

$$\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-$$

低能情况下该过程可以用有效相互作用哈密顿密度表示:

$$H_{eff} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_\nu \gamma^\mu (1 + \gamma_5) \psi_e \bar{\psi}_e \{g_V \gamma_\mu + g_A \gamma_\mu \gamma_5\} \psi_\nu$$

其中: G_F 是费米常数, g_V 和 g_A 是无量纲参数. 令 $\sigma(E)$ 代表此过程的总截面, E 是质心系总能量, $E \gg m_e$. 假定靶电子是非极化的.

(i) 从纯量纲考虑, 定出 $\sigma(E)$ 怎样依赖于 E ?

(ii) 令 $\left. \frac{\partial \sigma}{\partial E} \right|_0$ 表示质心系前进方向的微分截面. 用

E, G_F, g_V 和 g_A 代表该项(详细计算);

(iii) 文字讨论(或许附以费曼图)这种过程怎样被认为是通过中性流的矢量玻色子作用产生的.

解: (i) 题设 $E \gg m_e$, E 为质心系总能量, 近似认为 $m_e \approx 0$, 不出现在最后的表达式中. 这时, 一级效应弱作用截面:

$$\sigma(E) \approx G_F^2 E^2, \quad K \text{ 是常数.}$$

利用 $[\sigma] = M^{-2}$, $[G_F] = M^{-2}$, $[E] = M$. 有 $K = 2$.

$$\sigma(E) \approx G_F^2 E^2.$$

(ii) 当 $E \gg m_e$. 近似 $m_e \approx 0$. 对 $\nu_\mu e \rightarrow \nu_\mu e$.

在质心系，如图3.17，有：

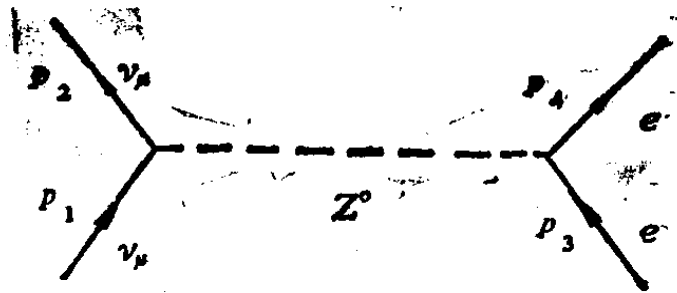


图 3.17

$$p_1 = p_3 = K = (p, \mathbf{p}),$$

$$p_2 = p_4 = p \approx (p, -\mathbf{p}),$$

$$d\sigma = \frac{d\Omega}{64\pi^2 S} |F|^2. \quad S = E^2.$$

物理不变振幅的平方：

$$|F|^2 = \frac{G_F^2}{2} T, [\bar{k}\gamma^\alpha (1 + \gamma_5) \bar{k}\gamma^\beta (1 + \gamma_5)] \times \frac{1}{2} T, [\bar{P}(g_V\gamma_\alpha + g_A\gamma_\alpha\gamma_5) P(g_V\gamma_\beta + g_A\gamma_\beta\gamma_5)],$$

式中利用了 $\sum_{p_s} \bar{u}u = \not{P} + m$, $\frac{1}{2}$ 因子是对动态电子自旋求平均，而中微子只有左旋，不再求平均。

$$T, [\bar{k}\gamma^\alpha (1 + \gamma_5) \bar{k}\gamma^\beta (1 + \gamma_5)] = 2T, [\bar{k}\gamma^\alpha \bar{k}\gamma^\beta (1 + \gamma_5)] \\ = 8(k^\alpha k^\beta - k^2 g^{\alpha\beta} + k^\beta k^\alpha + i\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} k_\gamma k_\delta).$$

最后一项交换指标 γ, δ 后变号，故为零，同时，对中微子 $k^2 = 0$ ，上式简化为

$$T, [\bar{k}\gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \bar{k}\gamma^\beta (1 + \gamma_5)] \\ = 16k^\alpha k^\beta.$$

$$\frac{1}{2} T, [\bar{P}(g_V\gamma_\alpha + g_A\gamma_\alpha\gamma) P(g_V\gamma_\beta + g_A\gamma_\beta\gamma_5)]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} T_r [g_V^2 \mathbf{P} \gamma_a \mathbf{P} \gamma_b + 2g_V g_A \mathbf{P} \gamma_a \mathbf{P} \gamma_b + g_A^2 \mathbf{P} \gamma_a \mathbf{P} \gamma_b] \\
&= 4(g_A^2 + g_V^2)^2 P_a P_b \\
|F|^2 &= \frac{G_F^2}{2} \cdot 16 \times 4 \times \left(\frac{S}{2}\right)^2 (g_A^2 + g_V^2) \\
&= 8G_F^2 S^2 (g_A^2 + g_V^2), \\
\sigma &= \int d\sigma = \int \frac{G_F^2}{8\pi^2} S (g_A^2 + g_V^2)^2 d\Omega = \frac{G_F^2 E^2}{2\pi} (g_A^2 + g_V^2)^2. \\
\frac{d\sigma}{dE} &= \frac{G_F^2 E}{\pi} (g_A^2 + g_V^2)^2.
\end{aligned}$$

即中微子反应截面在质心系中是各向同性的。与 E^2 线性增长，当 E 较大时，可得到较大的截面。

(iii) 这种弱作用相互交换的是中性的中间玻色子 Z^0 ，称为中性弱流相互作用。类似的中性流弱作用还有很多，例如：
 $\nu_\mu + N \rightarrow \nu_\mu + N$, $\nu_e + \mu \rightarrow \nu_e + \mu$. (任勇)

3061 (Pri, 1978)

弱相互作用的媒介子 Z^0 玻色子预期很重，其质量 $M_{Z^0} \gtrsim 80 \text{ GeV}$ 。(a) 已知弱相互作用和电磁相互作用内禀强度大致相同(如统一理论中所表现的那样)，并且带电流和中性流强度可比，证明上述值的合理性。(b) 估计 Z^0 的宽度及其寿命。(c) 实验上，能否用 e^+e^- 湮灭中的 Z^0 产生来确定 Z^0 衰变到中微子的分支比？如果可行的话，指出要测量什么及其怎样用测量值得到所求的分支比。

解：(a) 首先，将中间玻色子耦合与低能下相应的唯象流耦合相比较，可得：

$$\frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}$$

在Weinberg-Salam模型中，可以估计出 Z^0 质量为

$$M_Z = \left(\frac{e^2}{\sqrt{2}G_F} \right)^{1/2} \frac{1}{\sin 2\theta_W} = \frac{74.6}{\sin 2\theta_W} \text{ GeV} \gtrsim 80 \text{ GeV}.$$

对于下限值 80 GeV 而言， $\sin 2\theta_W \approx 1$ 。于是，有：

$$\text{电磁作用： } e = g \sin \theta_W \approx \frac{g}{\sqrt{2}},$$

$$\text{中性流作用： } \frac{g}{2 \cos \theta_W} \approx \frac{g}{\sqrt{2}},$$

$$\text{带电流作用： } \frac{g}{2\sqrt{2}}.$$

可见这三类相互作用的强度大致是同量级的。

(b) Z^0 与费米子的耦合一般可写成：

$$\mathcal{L}_{int}^Z = -\frac{g}{4 \cos \theta_W} \bar{f} \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) f Z_\mu,$$

其中 g_V 和 g_A 的值如下：

ν_e, ν_μ, \dots

$$g_V = 1,$$

$$g_A = 1;$$

e, μ, \dots

$$g_V = -1 + 4 \sin^2 \theta_W,$$

$$g_A = -1;$$

u, c, \dots

$$g_V = 1 - \frac{8}{3} \sin^2 \theta_W,$$

$$g_A = 1;$$

d, s, \dots

$$g_V = -1 + \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W,$$

$$g_A = -1.$$

考虑一般的衰变过程：

$$Z^0(P) \rightarrow f(p) + \bar{f}(q),$$

相应的 T 振幅为

$$T = -\frac{ig}{4\cos\theta_w} \bar{u}_\nu(p) \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) \nu_\rho(q).$$

对费米子自旋求和，对 Z^0 的三种极化求平均，对于夸克衰变道还需对夸克颜色求和，于是可得到：

$$\begin{aligned} \Sigma |T|^2 &= \frac{n4}{3} \left(\frac{g}{4\cos\theta_w} \right)^2 \left(-g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{M_Z^2} \right) [(g_V^2 + g_A^2) (p^\mu q^\nu \\ &\quad + p^\nu q^\mu - g^{\mu\nu} p \cdot q) - (g_V^2 - g_A^2) m^2 g^{\mu\nu}] \\ &= n \frac{4}{3} \left(\frac{g}{4\cos\theta_w} \right)^2 \left[(g_V^2 + g_A^2) (p \cdot q \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{M_Z^2} (P \cdot p) (P \cdot q)) + 3(g_V^2 - g_A^2) m^2 \right], \end{aligned}$$

其中： m 为费米子质量， n 为颜色数，在 Z^0 静止的坐标系中，注意到：

$$E = M_Z, \quad \mathbf{p} = 0,$$

$$E_p = E_q = \frac{1}{2} M_Z,$$

$$|\mathbf{p}| = |\mathbf{q}| = \frac{1}{2} [M_Z^2 - 4m^2]^{1/2},$$

则得：

$$\begin{aligned} \Sigma |T|^2 &= n \frac{4}{3} \left(\frac{g}{4\cos\theta_w} \right)^2 [(g_V^2 + g_A^2) M_Z^2 \\ &\quad + 2(g_V^2 - 2g_A^2) m^2]. \end{aligned}$$

如果忽略费米子质量 m ，则根据静止系中两体衰变几率公式：

$$d\Gamma = \frac{1}{32\pi^2} \frac{|\mathbf{p}|}{M_Z^2} \Sigma |T|^2 d\Omega,$$

容易得到：

$$\Gamma(Z^0 \rightarrow f\bar{f}) = \frac{n G_F M_Z^3}{24\sqrt{2}\pi} (g_V^2 + g_A^2).$$

将 g_V, g_A 的值代入, 有:

$$\Gamma(Z^0 \rightarrow \nu_e \bar{\nu}_e) = \Gamma(Z^0 \rightarrow \nu_\mu \bar{\nu}_\mu) = \frac{G_F M_Z^3}{12\sqrt{2}\pi};$$

$$\Gamma(Z^0 \rightarrow e^+ e^-) = \Gamma(Z^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-) = \frac{G_F M_Z^3}{12\sqrt{2}\pi} (1 - 4\sin^2\theta_W + 8\sin^4\theta_W);$$

$$\Gamma(Z^0 \rightarrow u\bar{u}) = \Gamma(Z^0 \rightarrow c\bar{c}) = \frac{G_F M_Z^3}{4\sqrt{2}\pi} \left(1 - \frac{8}{3}\sin^2\theta_W + \frac{32}{9}\sin^4\theta_W \right);$$

$$\Gamma(Z^0 \rightarrow d\bar{d}) = \Gamma(Z^0 \rightarrow s\bar{s}) = \frac{G_F M_Z^3}{4\sqrt{2}\pi} \left(1 - \frac{4}{3}\sin^2\theta_W + \frac{8}{9}\sin^4\theta_W \right);$$

将所有这些衰变几率加起来即得 Z^0 的总宽度:

$$\Gamma_{Z^0} = \frac{G_F M_Z^3}{12\sqrt{2}\pi} \cdot 8N_g \left(1 - 2\sin^2\theta_W + \frac{8}{3}\sin^4\theta_W \right).$$

其中 N_g 为费米子代数, 现在认为 $N_g = 3$, 而 Z^0 的寿命为

$$\tau = \frac{1}{\Gamma_{Z^0}}.$$

(c) 根据 (b) 式所求, 考虑到夸克颜色的贡献, 估计 Z^0 的总宽度和 $\Gamma_{\mu\mu}$:

$$\Gamma_{\nu\nu} : \Gamma_{\mu\mu} : \Gamma_{ee} : \Gamma_{dd} = 1 : (1 - 4\sin^2\theta_W + \frac{8}{3}\sin^4\theta_W) :$$

$$3\left(1 - \frac{8}{3}\sin^2\theta_W + \frac{32}{9}\sin^4\theta_W\right) : 3\left(1 - \frac{4}{3}\sin^2\theta_W + \frac{8}{9}\sin^4\theta_W\right)$$

$$\approx 1:0.5:1.8:2.3,$$

式中利用了目前 $\sin^2\theta_W = 0.2196$.

如果采用目前流行的 3 代轻子和夸克, 则有:

$$B_{\mu\mu} = \frac{\Gamma_{\mu\mu}}{\Gamma_Z} = \frac{1 - 4\sin^2\theta_W + \frac{8}{3}\sin^4\theta_W}{8 \times 3 \left(1 - 2\sin^2\theta_W + \frac{8}{3}\sin^4\theta_W\right)} \approx 3\%,$$

$$\Gamma_Z \approx 2.9 \text{ GeV}.$$

$\Sigma\Gamma_{\nu\nu} \approx 18\%$, Σ 对 ν_e, ν_μ, ν_τ 求和.

根据标准的 WS 模型, 轻子的代数 N 和夸克代数 N 是对应的, ν_i 又和 l_i 对应的, 如果求出了 Γ 就可求出代数, 求出 $B_{\mu\mu}$ 又可得到 $\Gamma_{\mu\mu}$. 利用代数 N 和 $\Gamma_{\mu\mu}$, 可求出 $\Gamma_{\nu\nu} \approx 2\Gamma_{\mu\mu}$, $\Sigma\Gamma_{\nu\nu} = 2N\Gamma_{\mu\mu}$.

在 e^+e^- 对撞产生 Z^0 的过程, 可直接测量 Γ_Z , 由于电子的辐射, 电子束的能量分散可能比 Γ_Z 还大, 这时可同时测量 $\Gamma_{\mu\mu}$ 和 Γ_h , 通过测量在共振区内的 μ 子对和强子数:

$$A_h = \int_{\text{共振区}} \sigma_h dE \approx \frac{6\pi^2}{M_Z^2} \frac{\Gamma_h \Gamma_{ee}}{\Gamma_Z} = \frac{6\pi^2}{M_Z^2} \frac{\Gamma_h \Gamma_{\mu\mu}}{\Gamma_Z},$$

$$A_\mu = \int_{\text{共振区}} \sigma_{\mu\mu} dE = \frac{6\pi^2}{M_Z^2} \frac{\Gamma_{\mu\mu}}{\Gamma_Z}$$

$$\frac{A_\mu}{A_h} = \frac{\Gamma_{\mu\mu}}{\Gamma_h}.$$

$$\text{对于 } N=3, \quad \Gamma_{\mu\mu}:\Gamma_h \approx 0.041;$$

$$N=4, \quad \Gamma_{\nu\nu}:\Gamma_h \approx 0.030;$$

$$N=5, \quad \Gamma_{\mu\mu}:\Gamma_{\lambda\lambda}\approx 0.024.$$

当测出 A_{μ} 和 A_{λ} , 求得 N_{exp} , 代入上式可得:

$$B_{\nu\nu} = \frac{\sum \Gamma_{\nu\nu}}{\Gamma_z} = \frac{2N\Gamma_{\mu\mu}}{\Gamma_z}, \quad \Gamma_z = 3N\Gamma_{\mu\mu} + \Gamma_{\lambda\lambda}.$$

(袁卡佳 杨保忠)

3062 (Pri, 1977)

利用电子的电磁相互作用, 一些实验通过电子对质子的散射来研究质子的电荷分布, 这是很容易理解的. 我们考虑类似的过程来研究中性 K 介子的电荷分布, 即:

$$K^0 + e \longrightarrow K^0 + e, \quad (\text{记幅值为 } A).$$

(a) 忽略 CP 破坏. 用 A 来表示下列过程的振幅:

$$K_L^0 + e \longrightarrow K_L^0 + e, \quad (\text{散射, 称为 } A_s);$$

$$K_L^0 + e \longrightarrow K_S^0 + e, \quad (\text{再生, 称为 } A_R).$$

(b) 考虑再生实验:

$$K_L^0 + e \longrightarrow K_S^0 + e,$$

其中, K^0 为入射束, 电子为靶, 在 高能 E_K 的情况下, 在正前方指的散射角为 0° , ($\mathbf{p}^{K_L} = \mathbf{p}^{K_S}$), 微分截面与能量的关系是怎样的, 即 $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{0^\circ}$ 随 E_K 的变化是怎样的? 说明你对

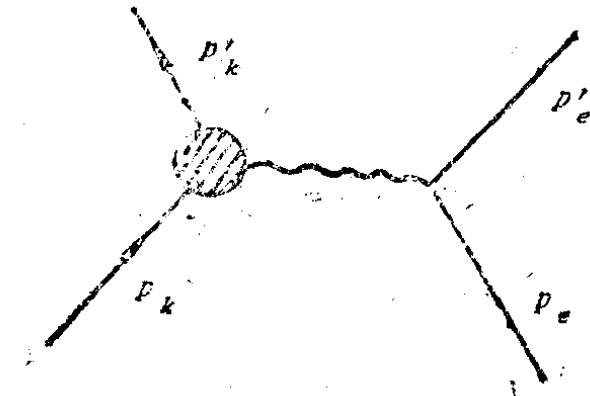


图 3.18

很高能量的定义。

解：考虑 Feynman 图 3.18 (见第 464 页)。

p_K, p'_K, p_e, p'_e 分别是初末态 K^0 和 e 的动量，并以 M 和 m 表示 K^0 和 e 的质量，则 S 矩阵元为

$$S_{fi} = \delta_{fi} - i(2\pi)^4 \delta(p_K + p_e - p'_K - p'_e) \frac{t_{fi}}{(2\pi)^6} \sqrt{\frac{m^2}{4E_K E'_K E_e E'_e}}$$

t_{fi} 是不变振幅，其值为

$$t_{fi} = ie^2 (2\pi)^3 \sqrt{4E_K E'_K} \bar{u}(p'_e) \gamma^\mu u(p_e) \frac{1}{q^2} \langle K^0 p'_K | j_\mu(0) | K^0 p_K \rangle,$$

$|K^0 p_K \rangle \approx A$, j_μ 为电流算符。

$$(a). \text{ 已知: } |K_S^0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0 \rangle + |\bar{K}^0 \rangle), \quad |K_L^0 \rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0 \rangle - |\bar{K}^0 \rangle), \text{ 不计 CP 破坏, 则 } K_L^0 \text{ 和 } K_S^0 \text{ 及 } K^0$$

有相同的质量，则：

$$\begin{aligned} \langle K_L^0 p'_K | j_\mu(0) | K_L^0 p_K \rangle &= \frac{1}{2} \{ \langle K^0 p'_K | j_\mu(0) | K^0 p_K \rangle \\ &+ \langle \bar{K}^0 p'_K | j_\mu(0) | \bar{K}^0 p_K \rangle \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{又 } \langle K^0 p'_K | j_\mu(0) | K^0 p_K \rangle &= \langle K^0 p'_K | c^{-1} c j_\mu(0) c^{-1} c | K^0 p_K \rangle \\ &= - \langle K^0 p_K | j_\mu(0) | K^0 p_K \rangle, \end{aligned}$$

故 $A_S = 0, \quad A_L = A$.

(b) 对初态电子自旋求平均，末态电子求和，得微分截面：

$$d\sigma = \frac{1}{2v_i} \frac{m^2}{4E_e E'_e E_K E'_K} (2\pi)^4 \delta(p_e + p_K - p'_e - p'_K)$$

$$\cdot \sum_{\text{自旋}} |t_{fi}|^2 \frac{d^3 p'_e d^3 p'_K}{(2\pi)^6}.$$

对 p'_e 和 E'_K 积分得

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{m}{32\pi^2} \frac{p'_K}{p_K} \frac{\sum_{\text{自旋}} |t_{fi}|^2}{m + E_K - (p_K E'_K / p'_K) \cos\theta'}$$

其中 θ' 是 p'_K 的方向角, 上式还要遵守下述条件:

$$p'_e + p'_K - p_e - p_K = 0$$

由此得:
$$m + \sqrt{M_L^2 + p_K^2} = \sqrt{m^2 + p_e^2} + \sqrt{M_S^2 + p'_K}$$

其中 M_S , M_L 各为 K_S^0 , K_L^0 的质量, 而

$$E_L = \sqrt{M_L^2 + p_K^2} = \sqrt{(M_S + \Delta M)^2 + p_K^2}$$

其中 ΔM 是 $M_L - M_S$, 当 $E_L^2 \gg M_S \Delta M$, 或 $E_L \gg \Delta M$ 时, 我们可以叫做高能 K_L^0 , 这样能量守恒公式变成:

$$m + \sqrt{M_S^2 + p_K^2} = \sqrt{m^2 + p_e^2} + \sqrt{M_S^2 + p'_K}$$

这是一个弹性散射过程.

对于向前散射 $p_K = p'_K$, $p_e = 0$,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}_0 = \frac{1}{32\pi} \sum_{\text{自旋}} |t_{fi}|^2$$

又知 $(2\pi)^3 \sqrt{4E_K E'_K} \langle K^0 p'_K | j_\mu(0) | K^0 p_K \rangle = (p_K + p'_K)_\mu F_K (p'_K - p_K)^2$, 其中 F_K 是 K^0 的电磁形状因子 $F_K(q^2) = q^2 g(q^2)$, 其中 $g(q^2)$ 在 $q^2 = 0$ 处无奇异, 则:

$$\begin{aligned} t_{fi} &= ie^2 \bar{u}(p'_e) \gamma^\mu u(p_e) g(p'_K - p_K)^2 (p'_K + p_K)_\mu \\ &= ie^2 \bar{u}(p'_e = 0) \mu(p_e = 0) 2E_K g(0) \\ &= \begin{cases} ie^2 2E_K g(0), & \text{当初末态电子自旋相同.} \\ 0, & \text{当初末态电子自旋不同.} \end{cases} \end{aligned}$$

于是得向前散射微分截面随能量的改变为

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_0 \propto E_K^2. \quad (\text{刘耀阳})$$

夸克模型中的非弹性中微子散射. 考虑中微子在自由、无质量的夸克上的散射. 为简化问题起见, 只讨论奇异数守恒的反应, 即只考虑 u, d 夸克间的跃迁. (a) 写出 ν 和 $\bar{\nu}$ 在 u, d, \bar{u} 和 \bar{d} 夸克上可能发生的带电流弹性散射(共四种); (b) 对其中之一计算截面. 例如 $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\nu d \rightarrow \mu^- u)$; (c) 利用螺旋性预言各反应的角分布; (d) 假定非弹性 ν (或 $\bar{\nu}$) 一核子散射截面由上述四种过程截面之和给出, 用夸克模型预言反中微子一核子和中微子一核子散射总截面之比: $\sigma^{\bar{\nu}N}:\sigma^{\nu N}$. (e) 实验上 $\sigma^{\bar{\nu}N}/\sigma^{\nu N} = 0.37 \pm 0.02$. 由此, 可得到关于核子的夸克/反夸克结构的什么推断?

解: (a) 四种带电流相互作用(图3.19)为

解: (a) 四种带电流相互作用(图3.19)为

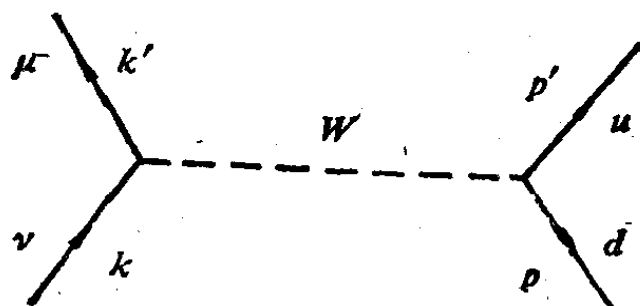


图 3.19

$$\nu_{\mu} d \longrightarrow \mu^{-} u,$$

$$\bar{\nu}_{\mu} \bar{d} \longrightarrow \mu^{+} \bar{u},$$

$$\nu_{\mu} \bar{u} \longrightarrow \mu^{-} \bar{d},$$

$$\bar{\nu}_{\mu} u \longrightarrow \mu^{+} d.$$

(b) 对于 $\nu_{\mu} d \longrightarrow \mu^{-} u$, 当忽略 m_{μ} , m_d 和 m_u 时, 在质心系中, 有:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 S} |F|^2,$$

S 为不变质量, 在上述反应中, $S = -(k+p)^2 = -2kp$.

$$|F|^2 = \frac{G_F^2}{2} T_r[\bar{k}' \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \gamma^\nu (1 - \gamma_5)] \\ \times \frac{1}{2} T_r[\bar{P}' \gamma_\mu (1 - \gamma_5) P \gamma_\nu (1 - \gamma_5)] \cos^2 \theta_0.$$

θ_0 为卡比玻混合角. $\frac{1}{2}$ 因子是对初态电子求平均.

$$T_r[\bar{k}' \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \bar{k} \gamma^\nu (1 - \gamma_5)] \\ = T_r[\bar{k}' \gamma^\mu k \gamma^\nu (1 - \gamma_5)^2] = 2T_r[\bar{k}' \gamma^\mu \bar{k} \gamma^\nu (1 - \gamma_5)] \\ = 2T_r[\bar{k}' \gamma^\mu \bar{k} \gamma^\nu] - 2T_r[\bar{k}' \gamma^\mu \bar{k} \gamma^\nu \gamma_5] \\ = 8[k'^\mu k^\nu + k'^\nu k^\mu + \frac{q^2}{2} g^{\mu\nu} - i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} k'_\rho k_\sigma].$$

同理, $T_r[\bar{P}' \gamma_\mu (1 - \gamma_5) P \gamma_\nu (1 - \gamma_5)]$
 $= 8[p'_\mu p_\nu + p'_\nu p_\mu + \frac{q^2}{2} g_{\mu\nu} - i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p'^\alpha p^\beta],$

式中: $q^2 = -(k-k')^2 = -2kk'$ 为四动量转移平方.

$$|F|^2 = 64 G_F^2 (k \cdot p) (k' \cdot p') \cos^2 \theta_0 = 16 G_F^2 S^2 \cos^2 \theta_0.$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} (vd \rightarrow \mu^- u)_{cm} = \frac{1}{64\pi^2 S} \times 16 G_F^2 S^2 \cos^2 \theta_0 \\ = \frac{G_F^2 S}{4\pi^2} \cos^2 \theta_0.$$

(c) 在强子弱作用中, 只有左旋的 u, d 夸克和 e^-, μ^- 才对反应有贡献, 也只有右旋的 \bar{u}, \bar{d} 和 e^+, μ^+ 才对反应有贡献. 在质心系中, 对反应过程 $vd \rightarrow \mu^- u$ 和 $\bar{v}\bar{d} \rightarrow \mu^+ \bar{u}$, 轨道角动量为零, 这时的角分布为各向同性, 正像上面所求的结果.

而在 $\nu\bar{u}\rightarrow\bar{d}u^-$ 和 $\bar{\nu}u\rightarrow u^+d$ 反应中(图3.20), 入射和出射两粒子的总自旋都为 1. 这时的角分布为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\nu\bar{u}\rightarrow u^-d)_{om} = \frac{G^2 S}{16\pi^2} \cos^2\theta_0 (1 + \cos\theta)^2.$$

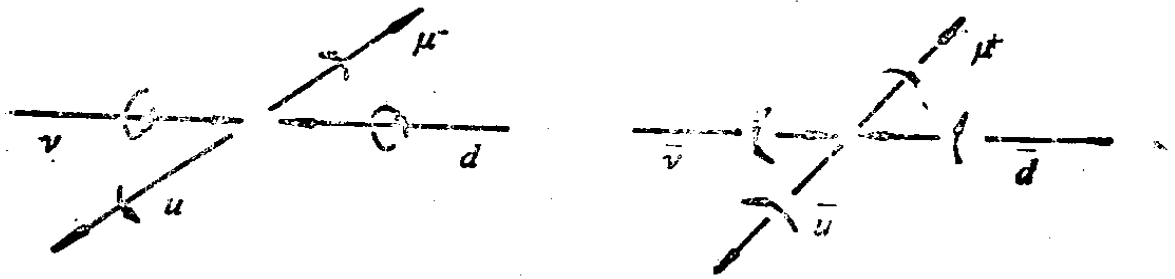


图 8.20

(d) 对 $\nu d\rightarrow\mu^-u$ 和 $\bar{\nu}u\rightarrow\mu^+d$ 反应(图3.21):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\nu d\rightarrow\mu^-u)_{om} = \frac{G_F^2 S}{4\pi^2} \cos^2\theta_0,$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\bar{\nu}u\rightarrow\mu^+d)_{om} = \frac{G_F^2 S}{4\pi^2} \cos^2\theta_0 \left(\frac{1 - \cos\theta}{2}\right)^2.$$

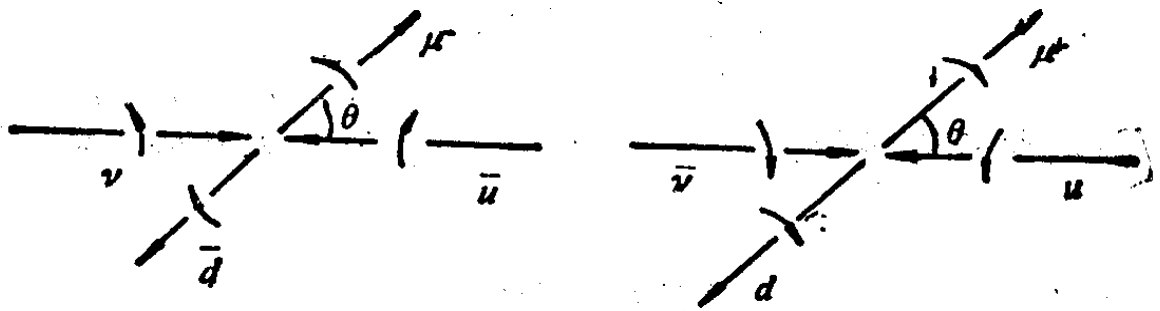


图 8.21

对角度积分有:

$$\sigma_1 = \sigma(\nu d\rightarrow\mu^-u)_{om} = \frac{G_F^2 S}{\pi} \cos^2\theta_0,$$

$$\sigma_2 = \sigma(\bar{\nu}u\rightarrow\mu^+d)_{om} = \frac{1}{3} \frac{G_F^2 S}{\pi} \cos^2\theta_0.$$

对于中子内含 udd , 有:

$$\sigma^{n^+}/\sigma^{n^-} = \frac{2\sigma_1}{\sigma_2} = 6.$$

对于质子内含 uud , 有:

$$\sigma^{p^+}/\sigma^{p^-} = \frac{\sigma_1}{2\sigma_2} = 3/2.$$

对于由相同质子和中子组成的靶, 有:

$$\sigma^{pN}/\sigma^{nN} = 3, \text{ 或 } \sigma^{nN}/\sigma^{pN} = \frac{1}{3}.$$

(e) 实验值 $\sigma^{nN}/\sigma^{pN} = 0.37 \pm 0.02$, 它和理论值 $\frac{1}{3}$ 很接近. 说明核子内主要是由夸克组成, 反夸克的成份很少. 设反夸克与夸克比为 α , 则:

$$\frac{\sigma^{nN}}{\sigma^{pN}} = \frac{\alpha + \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}\alpha} = \frac{3\alpha + 1}{\alpha + 3} = 0.37, \quad \alpha \approx 4 \times 10^{-2}.$$

说明反夸克很少.

(朱栋培 任勇)

3064 (Pri, 1981)

(1) 按照温伯格—萨拉姆模型, Higgs 玻色子 ϕ 与各种基本费米子 f 以下列方式耦合 (f : 夸克或轻子)

$$\frac{em_f}{m_W} \phi \bar{f} f,$$

其中: m_f 为费米子质量, e 为电子电荷, m_W 为 W 玻色子的质

量，假是 Higgs 衰变成已知的夸克和轻子，计算其寿命，用它的质量 m_H 表示，可以假定 m_H 比已知的夸克和轻子都重得多。

(2) 有些理论家认为 Higgs 的质量约为 10GeV 。如果真是这样的话，你认为在正负电子湮灭实验(图3.22)中可以观察到它吗？在共振时，讯号与本底强度比约为多大？

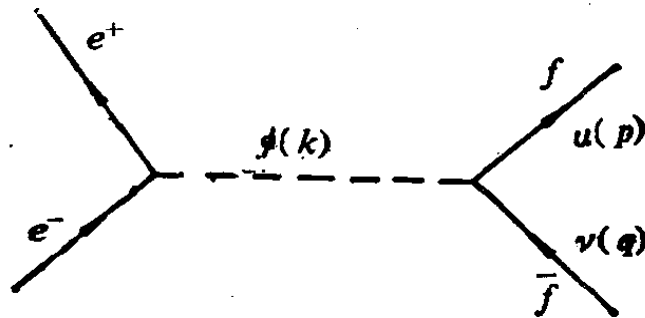


图 3.22

解：(1) 对于一种费米子末态来说，跃迁几率为

$$\Gamma_f = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p_0} \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2q_0} \cdot \frac{(2\pi)^4}{2k_0} \delta^4(k-p-q) |\overline{m}|^2,$$

$$\begin{aligned} \text{其中：} \quad |\overline{m}|^2 &= T_r \sum_{s,l} \left[\left(\frac{em_f}{m_W} \right)^2 \bar{u}_s(p) v_l(q) \bar{\phi} \phi \bar{v}_l(q) u_s(p) \right] \\ &= \left(\frac{em_f}{m_W} \right)^2 T_r [\not{P} \cdot \not{Q} - m_f^2] \\ &= 4 \left(\frac{em_f}{m_W} \right)^2 (p \cdot q - m_f^2), \end{aligned}$$

$$\text{利用 } p+q=K, \quad p \cdot q = \frac{K^2 - p^2 - q^2}{2} = \frac{m_H^2 - 2m_f^2}{2},$$

$$\begin{aligned} |\overline{m}|^2 &= 4 \left(\frac{em_f}{m_W} \right)^2 (m_H^2 - 4m_f^2) \cdot \frac{1}{2} \\ &= 2 \left(\frac{em_f}{m_W} \right)^2 \cdot m_H^2 \left(1 - \frac{4m_f^2}{m_H^2} \right). \end{aligned}$$

在H静止的坐标系中,

$$\begin{aligned}\Gamma_f &= \int \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^6 \cdot 4p_0 q_0} \cdot \frac{(2\pi)^4}{2m_H} \delta^4(K - p - q) |\overline{m}|^2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3p}{4p_0 q_0} \frac{1}{2m_H} \delta(m_H - p_0 - q_0) |\overline{m}|^2 \\ &= \frac{4\pi}{(2\pi)^2 \cdot 4q_0^2 \cdot 2m_H} \int q^2 dq \cdot \delta(m_H - 2q_0) |\overline{m}|^2,\end{aligned}$$

利用 $q dq = q_0 dq_0$ 得到:

$$\begin{aligned}\Gamma_f &= \frac{1}{8\pi m_H} \int \frac{q^2}{q_0^2} \frac{q_0}{q} dq_0 \delta(m_H - 2q_0) |\overline{m}|^2 \\ &= \frac{1}{8\pi m_H} \frac{2}{m_H} \cdot \frac{1}{2} \left[\left(\frac{m_H}{2} \right)^2 - m_f^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \cdot 2 \frac{e^2 m_f^2 m_H^2}{m_W^2} \left(1 - \frac{4m_f^2}{m_H^2} \right) \\ &= \frac{e m_f^2 m_H}{4\pi m_W^2} \left(1 - \frac{4m_f^2}{m_H^2} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2} \\ &\approx \frac{e^2 m_f^2 m_H}{8\pi m_W^2}.\end{aligned}$$

当 $m_H \gg m_f$ 时, $\Gamma = \sum \Gamma_f = \frac{e^2 m_H}{8\pi m_W^2} \sum a_f m_f^2$, 对轻子, $a_f = 1$.

对夸克 $a_f = 3$.

当 $m_H \approx 10 \text{ GeV}$ 时, $m_H \approx 2m_b$. 设 $m_W \approx 80 \text{ GeV}$, $m_u = m_c = 0.35 \text{ GeV}$, $m_s = 0.5 \text{ GeV}$, $m_d = 1.5 \text{ GeV}$, $m_b = 4.6 \text{ GeV}$, $m_e = 0.5 \times 10^{-3} \text{ GeV}$, $m_\mu \approx 0.11 \text{ GeV}$, $m_\tau = 1.8 \text{ GeV}$, 代入上式, 得:

$$\sum a_f m_f^2 \left(1 - \frac{4m_f^2}{m_H^2}\right) \approx \sum_{f \neq b} a_f m_f^2 + 3m_b^2 \left(1 - \frac{4m_b^2}{m_H^2}\right)^{3/2},$$

$$= 11.5 + 3.8 = 15.3 (\text{GeV}^2),$$

$$\Gamma = \frac{e^2 m_H}{8\pi m_W^2} \sum a_f m_f^2 \left(1 - \frac{4m_f^2}{m_H^2}\right)^{3/2} \approx 15.3 \times \frac{1}{2 \times 137} \cdot \frac{10}{80^2}$$

$$= 8.8 \times 10^{-5} (\text{GeV}),$$

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} = 11.36 (\text{MeV}^{-1}) = 7.6 \times 10^{-21} (\text{s}).$$

(2) 对 $e^+e^- \rightarrow f\bar{f}$ 有下列过程:

$e^+e^- \xrightarrow{\gamma, Z^0} f\bar{f}$ 和 $e^+e^- \xrightarrow{H} f\bar{f}$, 对 $\sqrt{S} = 10 \text{GeV}$, Z^0 交换可以略去, 对 $e^+e^- \xrightarrow{\gamma} f\bar{f}$ 过程有:

$$\sigma_{ff} \approx \frac{4\pi\alpha^2}{3S} Q_f^2,$$

$$\sigma(e^+e^- \xrightarrow{\gamma} f\bar{f}) = \frac{4\pi\alpha^2}{3S} \sum Q_f^2 \cdot a_f,$$

$a_f = 1$ (轻子), $a_f = 3$ (夸克). 代入电荷数,

$$\sigma(e^+e^- \xrightarrow{\gamma} f\bar{f}) = \frac{4\pi\alpha^2}{3S} \cdot \frac{20}{8} \approx 8\pi\alpha^2/S = \frac{8\pi\alpha^2}{m_H^2}, S = m_H^2$$

对于 $e^+e^- \xrightarrow{H} f\bar{f}$, 由上式可知, 在共振时 ($J_H = 0$)

$$\sigma(\dots \xrightarrow{H} f\bar{f}) = \pi^{*2} \cdot \frac{\Gamma_{ee}}{\Gamma} \approx \pi \frac{1}{p^{*2}} \cdot \frac{\Gamma_{ee}}{\Gamma}$$

作为近似估计,

$$\frac{\Gamma_{ee}}{\Gamma} = \frac{(0.5 \times 10^{-3})^2}{15.3} \approx 1.6 \times 10^{-8}, \quad p^{*2} \approx \frac{m_H^2}{4}$$

$$\sigma(e^+e^- \xrightarrow{H} f\bar{f}) : \sigma(e^+e^- \xrightarrow{\gamma} f\bar{f})$$

$$= \left(\frac{4\pi}{m_H^2} 1.6 \times 10^{-8} \right) \left(\frac{8\pi\alpha^2}{m_H^2} \right)^{-1}$$

$$\approx 0.8 \times 10^{-8} / \alpha^2 = 0.8 \times 137^2 \times 10^{-8} \approx 1.5 \times 10^{-4}.$$

e^+e^- 湮灭过程在 10 GeV 能区, 主要由光子湮灭道过程形成的本底, 它是通过 H_0 共振截面的近 10^4 倍. 实际上是无法探测到 M 产生的信号的. (任勇 杨保忠)

3065 (Pri, 1978)

宇称破坏: 在 SLAC, 用极化电子对非极化的质子散射实验显示, 与电子耦合的宇称破坏的中性流存在. (a) 为什么需要极化电子? 宇称破坏的标志是什么? (b) 估计其效应的幅值; (c) 在光通过物质时, 这个宇称破坏怎样显示出来.

解: (a) 要观察宇称破坏的效应, 必须测量赝标量项对相互作用的贡献. 即象电子或强子的旋量之类的项, 故必须用有固定螺旋性的电子与非极化的靶相互作用 (或相反, 靶极化, 或两者都极化). 宇称破坏的标志量是与电子旋量相联系的可测量值, 如散射截面随旋量的变化等. 宇称破坏项主要来自弱电相干效应.

(b) 电子-质子散射包括电磁散射和弱作用散射两个部分, 即交换光子的散射和交换 Z^0 的散射. 设它们的幅值分别为 A 和 B , 则:

$$\sigma \approx A^2 + |A \cdot B| + B^2.$$

在此能量标度内, $A^2 \gg B^2$, 故只有干涉项起作用. 电磁作用中宇称是守恒的. 宇称破坏的效应为 (只考虑一级效应):

$$\frac{|A \cdot B|}{A^2 + B^2} \approx \frac{|A \cdot B|}{A^2} \approx \frac{|B|}{|A|} \approx \frac{G_F}{e^2/q^2},$$

G_F 为费米耦合常数, e^2 为电子电荷的平方, q^2 为四动量转移

的平方. 代入 G, e^2 数值:

$$\left(\frac{G}{e^2/q^2}\right) \approx \left(\frac{(10^{-5}m_p^{-2})}{\left(\frac{4\pi}{137}\right)}\right) q^2 \approx 10^{-4}q^2/m_p^2$$

$$\approx 10^{-4}q^2(\text{GeV}^{-2}).$$

在 SLAC 的实验. $E_e \approx 20\text{GeV}$, $q^2 \approx 10 \sim 20\text{GeV}^2$. 所以宇称破坏的效应约为 10^{-3} 量级. 实验上实际测量不同螺旋性的人射电子的散射截面. 测量不对称性为

$$A = \frac{\sigma(\lambda = \frac{1}{2}) - \sigma(\lambda = -\frac{1}{2})}{\sigma(\lambda = \frac{1}{2}) + \sigma(\lambda = -\frac{1}{2})} \approx q^2[\alpha_1 + \alpha_2 f(y)].$$

α_1, α_2 是 A_e, V_e 和 A_q, V_q 相关的项, 它们既和质子的夸克组成有关, 又和弱中性流结构有关, $\sigma(\lambda = \frac{1}{2})$ 为入射电子的

螺旋度为 $\frac{1}{2}$ 的电子散射截面. $y = (E - E')/E$. E 和 E' 分别为入射和散射电子的能量. 由 A 的实验值, 可求出弱中性流参数.

(c) 在原子范围内的宇称破坏表现为当圆偏振光通过高 Z 物质时, 折射系数 n 对左旋光和右旋光有微小的不同. 对线偏振光, 偏振面有一个微小的转动.

$$\phi_{p,v} = \left(\frac{\omega L}{2c}\right) R_e(n_+ - n_-).$$

L 是物质厚度, ω 为光子频率, n_+ 和 n_- 表示左旋光和右旋光的折射系数. (注: 详细结果见: P. Q. Hung and J. J. Sakurai. *Ann. Rev. Nucl., Part Sci.* 31; 1981; 375)

(杨保忠)

现在有几个实验研究质子衰变. 理论上, 当质子内部的一个夸克交换一个重介子变成一个反夸克和一个反轻子时, 质子发生衰变. 设这个介子的自旋为 1, 另外, 在这个相互作用过程中, 电荷和颜色守恒, 且遵从 WS 模型中的 $SU(2) \times U(1)$ 对称.

(i) 期待在质子衰变中用四费米子相互作用有效拉氏量描述. 下列各项中哪些可能存在于有效拉氏量中? 对不存在的项, 是什么原理, 也就是守恒定律使之禁戒? (a) $u_R u_L d_R e^-_L$, (b) $u_R d_R d_L \nu_L$, (c) $u_R u_L d_L e^-_R$, (d) $u_L d_L d_L \nu_L$, (e) $u_R u_R d_R e^-_R$, (f) $u_L u_L d_R e^-_R$, (g) $u_L d_L d_R \nu_R$, (h) $u_L u_L d_R \nu_L$. 所有的费米子为进入的.

(ii) 考虑衰变 $p \rightarrow e^+ H$, 这里 H 是奇异数为零的强子态. 给出平均正极化度是和 H 态无关的. 极化度的定义为

$$p = \frac{\Gamma(p \rightarrow e^+_L H) - \Gamma(p \rightarrow e^+_R H)}{\Gamma(p \rightarrow e^+_L H) + \Gamma(p \rightarrow e^+_R H)}$$

(iii) 如果自旋为 1 的介子质量为 $5 \times 10^{14} \text{ GeV}$, 它和费米子的耦合是电磁耦合强度(正象大统一理论预言的一样), 给出质子的寿命是多少年?

解: (i) a, b, c, d, e 是允许的; f 因 $u_L u_L$ 不是同位旋单态, g 因没有 ν_R , h 因电荷不为零, 故这三个禁戒.

(ii) $p \rightarrow e^+ H$ 过程由下面等效相互作用拉氏函数描述,

$$\mathcal{L}_{eff} = [g_1 (\bar{d}_{\alpha R}^c \mu_{\beta R}) (\bar{\mu}_{\gamma L}^c e_L - \bar{d}_{\gamma L}^c \nu_L) + g_2 (\bar{d}_{\alpha L}^c \mu_{\beta L}) (\bar{\mu}_{\gamma R}^c e_R)] \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$$

其中: g_1, g_2 是等效偶合系数, c 表示电荷共轭, α, β, γ 是色

指标, $e_{\alpha\beta}$ 是全反对称矩阵. 所以 $p \rightarrow e_{\alpha}^{\dagger} H$ 的矩阵元正比于 g_1 , $e_{\beta}^{\dagger} H$ 的矩阵元正比于 g_2 , 并有相同的结构, 故有:

$$p = \frac{|g_1|^2 - |g_2|^2}{|g_1|^2 + |g_2|^2},$$

与 H 态的选择无关.

(iii), 因传播矢量介子, 它对跃迁矩阵元贡献该粒子质量 M^{-2} 因子, 由量纲考虑, 寿命的量纲是质量的倒数, 所以需要有一个质量量纲的量, 这个量就是质子的质量 m_p , 于是得质子寿命的量级为

$$\tau_p \approx \frac{M^4}{\alpha^2 m_p^5} \approx 3 \times 10^{31} \text{a.} \quad (\text{刘耀阳})$$

3067 (Ber, 1981)

现在普遍认为存在三种不同的中微子, 它们可以在中微子的产生和吸收中被区分出来, 我们分别称为 ν_e , ν_μ 和 ν_τ . 有人推测中微子有很小但有限的静止质量, 各种中微子的质量可能不同. 假定对于此题, 当各类中微子之间没有微扰相互作用时, 它们都有同样的非零静止质量 M_0 , 而现在有微扰相互作用. 假定微扰矩阵元对于每两种中微子都有同样的实值 $\hbar\omega_1$, 而对 ν_e , ν_μ 和 ν_τ 每个态都有零期望值.

(a) 零时刻产生了一个静止的中微子 ν_e , 作为时间的函数, 中微子在另外两个态的几率是多少?

(b) 现在正进行一个探测“中微子振荡”的实验, 中微子的飞行距离是 2000 米, 能量是 100 GeV, 实验灵敏度达到了准确地区别出与飞行起点相比 1% 的中微子改变了态. 设 M_0 为 20 eV, 可以探测到的 $\hbar\omega_1$ 的最小值是多少? 它对 M_0 的依赖关系如何? [与 (a) 无关]

解: (a) 令 $|\psi\rangle = a_1(t)|\nu_\alpha\rangle + a_2(t)|\nu_\beta\rangle + a_3(t)|\nu_\gamma\rangle$,
微扰矩阵为

$$H' = \begin{pmatrix} 0 & \hbar\omega_1 & \hbar\omega_1 \\ \hbar\omega_1 & 0 & \hbar\omega_1 \\ \hbar\omega_1 & \hbar\omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

根据微扰论, $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \hbar\omega_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$,

$$\begin{cases} ia'_1 = \omega_1(a_2 + a_3), & (1) \\ ia'_2 = \omega_1(a_1 + a_3), & (2) \\ ia'_3 = \omega_1(a_1 + a_2). & (3) \end{cases}$$

(2) - (3): $i(a_2 - a_3)' = \omega_1(a_3 - a_2)$, $a_3 - a_2 = Ae^{i\omega_1 t}$.

根据初始条件, $a_2(0) = a_3(0) = 0$, 所以 $A = 0$, $a_2 = a_3$.

原方程组变为: $\begin{cases} ia'_1 = 2\omega_1 a_2 \\ ia'_2 = \omega_1(a_1 + a_2) \end{cases}$ (4)

消去 a_1 , 得: $a_2'' + i\omega_1 a_2' + 2\omega_1^2 a_2 = 0$.

解得: $a_2 = A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{-i2\omega_1 t}$.

因 $a_2(0) = 0$, 所以 $A_1 + A_2 = 0$, $A_2 = -A_1$. 以 $a_2 = A_1(e^{i\omega_1 t} - e^{-i2\omega_1 t})$ 代入(4), 得:

$$a_1' = -i2\omega_1 A_1 (e^{i\omega_1 t} - e^{-i2\omega_1 t}),$$

所以 $a_1 = -2A_1 e^{i\omega_1 t} - A_1 e^{-2i\omega_1 t} i$.

因 $a_1(0) = 1$, 所以 $A_1 = -\frac{1}{3}$,

$$a_2 = a_3 = \frac{1}{3}(e^{-i2\omega_1 t} - e^{i\omega_1 t}).$$

在 t 时刻处于 $|\nu_\beta\rangle$ 和 $|\nu_\gamma\rangle$ 的几率

$$P(|\nu_e\rangle) = P(|\nu_\tau\rangle) = |a_2|^2 = \frac{1}{9} (e^{-i2\omega_1 t} - e^{i\omega_1 t}) (e^{i2\omega_1 t} - e^{-i\omega_1 t}) = \frac{2}{9} (1 - \cos 3\omega_1 t).$$

(b) 为简化问题, 只考虑两类中微子之间的振荡, 且混合角最大 $\theta = 45^\circ$. 由题3068给出:

$$P(\nu \rightarrow \nu, t) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{E_1 - E_2}{2} t \right) \\ = 1 - \sin^2 \left[1.27 \left(\frac{l}{E} \Delta m^2 \right) \right].$$

由题设: $1 - P = \sin^2 \left(1.27 \frac{\Delta m^2 l}{E} \right) = 0.01,$

$$\sin \left(1.27 \frac{\Delta m^2 l}{E} \right) = 0.1,$$

$$\Delta m^2 = \frac{E}{1.27l} \sin^{-1}(0.1) \approx \frac{100 \times 10^8}{1.27 \times 2000} \times 0.1 \\ = 3.94 (\text{eV}^2).$$

$E \gg M_0$ 时, Δm^2 与 M_0 无关.

(胡平)

3068 (Pri 1982)

假设相应于电子和 μ 子的 Dirac 中微子是两个质量分别为 m_1 和 m_2 的中微子的混合态:

$$\nu_e = \nu_1 \cos \theta + \nu_2 \sin \theta,$$

$$\nu_\mu = -\nu_1 \sin \theta + \nu_2 \cos \theta.$$

θ 为混合角, 哈密顿量的质量项为 $H = m_1 \bar{\nu}_1 \nu_1 + m_2 \bar{\nu}_2 \nu_2$.

(i) 试用 ν_e, ν_μ 表象下的哈密顿量矩阵元

$$H = \nu_l M_{ll'} \nu_{l'}, \quad l, l' = e, \mu$$

表示定态质量 m_1 和 m_2 及混合角 θ 。

(ii) 指出什么条件下有最大混合? 什么情况下没有混合?

(iii) 假定 $t=0$ 时为纯电子中微子 ν_e , 则 t 时刻发现 μ 子中微子的几率多大?

(iv) 假定中微子动量 $p \gg m_1$ 和 m_2 , 求振荡长度。

(v) 如果反应堆上的一个探测器测量到中微子振荡, 则振荡参数 $\Delta = |m_1^2 - m_2^2|$ 量级多大? (估计粒子能量和源与探测器之间的距离)。

(vi) 如果在 100 GeV 质子加速器实验室中观察到中微子振荡, 则 (v) 中结果怎样?

解: (i) 在 ν_e, ν_μ 表象下, 哈密顿量为

$$H = \begin{pmatrix} M_{ee} & M_{e\mu} \\ M_{\mu e} & M_{\mu\mu} \end{pmatrix}.$$

设 $M_{e\mu} = M_{\mu e}$, 则哈密顿量本征值为

$$m_1 = \frac{1}{2} \left[(M_{ee} + M_{\mu\mu}) - \sqrt{(M_{ee} - M_{\mu\mu})^2 + 4M_{e\mu}^2} \right];$$

$$m_2 = \frac{1}{2} \left[(M_{ee} + M_{\mu\mu}) + \sqrt{(M_{ee} - M_{\mu\mu})^2 + 4M_{e\mu}^2} \right].$$

设在 ν_e, ν_μ 表象, $\nu_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$,

$$\text{于是} \quad \begin{pmatrix} M_{ee} & M_{e\mu} \\ M_{\mu e} & M_{\mu\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = m_2 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

利用归一化条件 $a_1^2 + a_2^2 = 1$ 得:

$$a_1 = \frac{M_{e\mu}}{\sqrt{M_{e\mu}^2 + (m_2 - M_{ee})^2}},$$

$$a_2 = \frac{m_2 - M_{ee}}{\sqrt{M_{e\mu}^2 + (m_2 - M_{ee})^2}}.$$

而由
$$\begin{aligned} \nu_e &= \nu_1 \cos\theta + \nu_2 \sin\theta, \\ \nu_\mu &= -\nu_1 \sin\theta + \nu_2 \cos\theta, \end{aligned}$$

得:
$$\nu_2 = \nu_e \sin\theta + \nu_\mu \cos\theta,$$

而
$$\nu_2 = a_1 \nu_e + a_2 \nu_\mu,$$

所以
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{a_1}{a_2} = \frac{M_{\mu e}}{m_2 - M_{ee}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{M_{\mu e}}{\frac{1}{2} M_{ee} + \frac{1}{2} M_{\mu\mu} + \frac{1}{2} \sqrt{(M_{ee} - M_{\mu\mu})^2 + 4M_{\mu e}^2} - M_{ee}} \\ &= \frac{2M_{\mu e}}{M_{\mu\mu} - M_{ee} + \sqrt{(M_{ee} - M_{\mu\mu})^2 + 4M_{\mu e}^2}}. \end{aligned}$$

于是

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{2M_{\mu e}}{M_{\mu\mu} - M_{ee} + \sqrt{(M_{ee} - M_{\mu\mu})^2 + 4M_{\mu e}^2}}.$$

(ii) 显然当 $M_{\mu\mu} = M_{ee}$ 时, 有最大混合, 此时 $\theta = 45^\circ$, ν_1 和 ν_2 一比一混合. 当 $M_{\mu e} = 0$ 时, $\theta = 0$, 此时没有混合.

(iii) $t = 0$ 时, 纯电子中微子 ν_e 态是 ν_1 和 ν_2 的混合态:

$$\nu_e = \nu_1 \cos\theta + \nu_2 \sin\theta.$$

ν_e 态随时间变化为 $\psi_e(t)$, 则:

$$\begin{aligned} \psi_e(t) &= \nu_1 e^{-iE_1 t} \cos\theta + \nu_2 e^{-iE_2 t} \sin\theta \\ &= (\nu_e \cos\theta - \nu_\mu \sin\theta) e^{-iE_1 t} \cos\theta \\ &\quad + (\nu_e \sin\theta + \nu_\mu \cos\theta) e^{-iE_2 t} \sin\theta \\ &= (\cos^2\theta e^{-iE_1 t} + \sin^2\theta e^{-iE_2 t}) \nu_e \\ &\quad + \sin\theta \cos\theta (e^{-iE_1 t} + e^{-iE_2 t}) \nu_\mu. \end{aligned}$$

所以 t 时刻发现 ν_μ 的几率为

$$\begin{aligned}
P &= |\langle \nu_\mu | \psi_0(t) \rangle|^2 \\
&= \sin^2\theta \cos^2\theta | -e^{-iE_1 t} + e^{-iE_2 t} |^2 \\
&= \frac{1}{2} \sin^2 2\theta (1 - \cos(E_1 - E_2)t) \\
&= \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{E_1 - E_2}{2} t\right).
\end{aligned}$$

(iv) 利用 $E_1 - E_2 = \frac{E_1^2 - E_2^2}{E_1 + E_2} \approx \frac{1}{2E} [p_1^2 - m_1^2 - p_2^2 - m_2^2]$

$$= \frac{\Delta m^2}{2E}, \quad \Delta m^2 = m_1^2 - m_2^2,$$

$$\begin{aligned}
P &= \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{\Delta m^2}{4E} t\right), \\
&= \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{\Delta m^2}{4E} l\right). \quad (\text{速度 } \beta \approx 1, t \approx l)
\end{aligned}$$

当 l 用 $[m]$, Δm^2 用 (eV^2) , E 用 (MeV) 代入, 则

$$P = \sin^2 2\theta \sin^2\left(1.27 \frac{l}{E} \Delta m^2\right).$$

所以振荡周期为 $1.27 \frac{l}{E} \Delta m^2 = 2\pi$.

当 $\Delta m^2 \frac{l}{E} \ll 1$, 无振荡区;

$\Delta m^2 \frac{l}{E} \approx 1$, 明显振荡区;

$\Delta m^2 \frac{l}{E} \gg 1$, 平均效应区.

(v) 反应堆中微子, $E \approx 1MeV$, 实验距离 l 约几米

$$\Delta m^2 = \frac{E}{l} \approx 0.1 \sim 1 (\text{eV}^2).$$

(vi) 对 100 GeV 的 p , 打靶产生的 π , E_π 为几十 GeV. E_0 约为十几 GeV 的量级, 实验区距离约为 100 m. 所以

$$\Delta m^2 \approx \frac{E}{l} \approx 10 - 10^2 (\text{eV}^2).$$

[一个具体数据: $E_0 \approx 10 \text{ GeV}$, $L = 100 \text{ m}$,

$$\Delta m^2 = \frac{2\pi \cdot E}{1.27 \cdot l} \approx 5 \times 10^2 (\text{eV}^2)] \quad (\text{钱剑明})$$

3069 (Buf, 1981)

(a) 中子 n 和反中子 \bar{n} 也象 K^0 和 \bar{K}^0 一样是中性的互为反粒子. 为什么引入象 K_1^0 和 K_2^0 一样引入 n_1 和 n_2 的线性组合是没有意义的, 试解释. (b) 在乳胶和泡室中怎样区分 π , μ 和电子.

解: (a) n 和 \bar{n} 是一对反粒子, 它们有确定的重子数 B ($B(n) = 1$, $B(\bar{n}) = -1$), 在任何作用过程中 B 是守恒的, 即 n 和 \bar{n} 是强、电磁和弱作用的本征态. 它们若由 n_1 和 n_2 的线性组合, n_1 和 n_2 不是强、电磁和弱相互作用的本征态. 因 n 和 \bar{n} 的 B 不同, 故是没有意义的. 若有某种相互作用预言 B 不守恒, 这时 n_1 和 n_2 即有意义了, 这就是中子和反中子有振荡现象的原因.

(b) 单纯用乳胶和泡室在较宽的能量鉴别 e, μ, π 是困难的, 在低能区 ($E < 200 \sim 300 \text{ MeV}$). 可以利用电离不同来鉴别它们, 这时, 电子已近光速, 属最小电离. 对 μ 和 π , 当

E 相同时，它们的 v 不同， $-\left(\frac{dE}{dx}\right) \approx \frac{1}{v^2}$ ，数照片上径迹的电离密度可区别 π ， μ （因质量相差不大，也较困难）。

在高能区， $E > 1\text{GeV}$ 以上，区分它们就更困难了。可用 π 的核作用和的簇射来鉴别，但乳胶和泡室内物质的 Z 很小，故上述过程发生的几率不再太高时，鉴别 e, μ, π 往往要附加磁场、簇射量能器等共同综合鉴别它们。可以直接在泡室中设置一些簇射介质板，如铅或铁，电子簇射现象、 π 介子的核作用可以很易被区分， μ 子作用很微弱。

（何小东）

3070 (MIT, 1982)

中子-反中子振荡。如果重子数守恒， $n \longleftrightarrow \bar{n}$ 的跃迁，即“中子振荡”是禁戒的。在无磁场的自由空间，实验给出的中子振荡的时间量级是 $\tau_{n-\bar{n}} \geq 3 \times 10^6 \text{s}$ 。既然稳定原子核中存在着充足的中子，人们往往天真地认为有可能获得更好的 $\tau_{n-\bar{n}}$ 极限。本问题的目的是为了弄清实际极限如此坏的原因。

设 H_0 表示不存在 n 和 \bar{n} 相互作用时的哈密顿量，那么对于 n, \bar{n} 处于静止的态有：

$$H_0|n\rangle = m_n c^2 |n\rangle, \quad H_0|\bar{n}\rangle = m_n c^2 |\bar{n}\rangle.$$

设 H' 表示 n, \bar{n} 相互作用哈密顿量：

$$H'|n\rangle = \epsilon|\bar{n}\rangle, \quad H'|\bar{n}\rangle = \epsilon|n\rangle,$$

其中 ϵ 是实数，且 H' 不涉及自旋。

(a) 从 $t=0$ 时的一个中子开始，计算 t 时刻观察到反中子的几率。 $\tau_{n-\bar{n}}$ 指此几率等于50%时的 t 。通过 $\tau_{n-\bar{n}}$ 的实验限计算对 ϵ 的限制。（ $m_n c^2 = 940\text{MeV}$ ）

(b) 现在在地磁场 ($B_0 = 0.5\text{G}$) 中重新考虑此问题. 中子磁矩为 $\mu_n \approx -6 \times 10^{-18} \text{ MeV/G}$, 反中子磁矩反号. 从 $t=0$ 时的一个中子开始, 计算时刻 t 观察到反中子的几率. (提示: 计算到小量的最低级.) 不考虑可能的辐射跃迁.

(c) 有自旋的原子核存在磁场. 利用 (b) 部分简略并且定性地说, 为什么当 $\tau_{n-\bar{n}}$ 只是限制在 $\tau_{n-\bar{n}} \geq 3 \times 10^9 \text{ s}$, 在这样的原子核中中子是如此稳定.

(d) 无自旋的原子核平均磁场为零. 简略说明为什么中子振荡在这样的原子核中仍受到压制.

解: (a) $H = H_0 + H'$.

$$\begin{aligned} \text{因为 } H(|n\rangle + |\bar{n}\rangle) &= m_n(|n\rangle + |\bar{n}\rangle) + e(|n\rangle \\ &\quad + |\bar{n}\rangle) = (m_n + e)(|n\rangle + |\bar{n}\rangle); \\ H(|n\rangle - |\bar{n}\rangle) &= m_n(|n\rangle - |\bar{n}\rangle) - e(|n\rangle \\ &\quad - |\bar{n}\rangle) = (m_n - e)(|n\rangle - |\bar{n}\rangle), \quad (c=1). \end{aligned}$$

所以 $|n\rangle \pm |\bar{n}\rangle$ 是 H 的本征态, 记为 $|\pm\rangle$.

$$t=0 \text{ 时 } \Phi_0|n\rangle = \frac{1}{2}(|+\rangle + |-\rangle),$$

t 时刻波函数

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2}(|+\rangle e^{-i(m_n+e)t} + |-\rangle e^{-i(m_n-e)t}) \\ &= \frac{1}{2} e^{-im_n t} [e^{-iet} + e^{iet}] |n\rangle \\ &\quad + (e^{-iet} - e^{iet}) |\bar{n}\rangle] \\ &= e^{-im_n t} (\cos et |n\rangle \\ &\quad - i \sin et |\bar{n}\rangle), \quad (\hbar=1). \end{aligned}$$

在 t 时刻观察到反中子的几率为 $P = \sin^2 et$, 故

$$\sin^2 et |_{n-\bar{n}} = \sin^2 e \tau_{n-\bar{n}} = 1/2,$$

$$\varepsilon\tau_{n-\bar{n}} = \pi/4,$$

即

$$\varepsilon \leq \frac{\pi}{4} / 3 \times 10^6 = 2.62 \times 10^{-7} \text{s}^{-1}.$$

$$= 1.73 \times 10^{-28} \text{MeV}.$$

$$(b) H = H_0 + H' - \mu \cdot B.$$

$$\begin{aligned} H|n\rangle &= m_n |n\rangle + \varepsilon |\bar{n}\rangle - \mu_n B |n\rangle \\ &= (m_n - \mu_n B) |n\rangle + \varepsilon |\bar{n}\rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H|\bar{n}\rangle &= m_n |\bar{n}\rangle + \varepsilon |n\rangle + \mu_n B |\bar{n}\rangle \\ &= (m_n + \mu_n B) |\bar{n}\rangle + \varepsilon |n\rangle. \end{aligned}$$

(这里已假设 B 沿 z 方向, 且 n, \bar{n} 沿 z 方向极化, 即 $S_z(n) = 1/2$, $S_z(\bar{n}) = 1/2$, 此假定对问题的讨论无影响.)

设 H 的本征态为 $a|n\rangle + b|\bar{n}\rangle$, 因为

$$\begin{aligned} H(a|n\rangle + b|\bar{n}\rangle) &= [a(m_n - \mu_n B) + b\varepsilon] |n\rangle \\ &\quad + [b(m_n + \mu_n B) + a\varepsilon] |\bar{n}\rangle, \end{aligned}$$

所以

$$\frac{a(m_n - \mu_n B) + b\varepsilon}{a} = \frac{b(m_n + \mu_n B) + a\varepsilon}{b},$$

$$b^2 - a^2 = \frac{2\mu_n B}{\varepsilon} ab = Aab.$$

$$\left(\text{这里 } A = \frac{2\mu_n B}{\varepsilon} = \frac{6 \times 10^{-18}}{1.73 \times 10^{-28}} = 3.47 \times 10^{10} \right).$$

$$\text{又 } b^2 + a^2 = 1,$$

所以

$$\begin{cases} a \approx 1, \\ a \approx -1/A, \end{cases} \quad \begin{cases} a \approx -1/A, \\ b \approx 1. \end{cases}$$

所以 H 的两个本征态为

$$|+\rangle = \frac{1}{A} |n\rangle + |\bar{n}\rangle, \quad |-\rangle = |n\rangle - \frac{1}{A} |\bar{n}\rangle.$$

$$\begin{aligned} t=0 \text{ 时, } \Phi^0 = |n\rangle &= \frac{|+\rangle + A|-\rangle}{A + \frac{1}{A}} \\ &= \frac{A}{1+A^2} |+\rangle + \frac{A^2}{1+A^2} |-\rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t \text{ 时刻波函数, } \Phi &= \frac{A}{1+A^2} |+\rangle e^{-iE_+ t} \\ &\quad + \frac{A^2}{1+A^2} |-\rangle e^{-iE_- t}. \end{aligned}$$

(其中 $E_+ = m_n - \mu_n B + A\varepsilon$, $E_- = m_n - \mu_n B - \frac{\varepsilon}{A}$).

$$\begin{aligned} \text{所以 } \Phi &= e^{-i(m_n - \mu_n B)t} \left(\frac{A}{1+A^2} |+\rangle e^{-iA\varepsilon t} \right. \\ &\quad \left. + \frac{A^2}{1+A^2} |-\rangle e^{i\frac{\varepsilon}{A}t} \right) \\ &= \frac{1}{1+A^2} e^{-i(m_n - \mu_n B)t} \left[\left(e^{-iA\varepsilon t} + A^2 e^{i\frac{\varepsilon}{A}t} \right) |n\rangle \right. \\ &\quad \left. + \left(A e^{-iA\varepsilon t} - A e^{i\frac{\varepsilon}{A}t} \right) |\bar{n}\rangle \right]. \end{aligned}$$

故时刻 t 观察到 \bar{n} 的几率为

$$\begin{aligned} P &= \frac{A^2}{(1+A^2)^2} \left| e^{-iA\varepsilon t} - e^{i\frac{\varepsilon}{A}t} \right|^2 \\ &= \frac{A^2}{(1+A^2)^2} \left(2 - 2\cos\left(A\varepsilon - \frac{\varepsilon}{A} \right) t \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{4A^2}{(1+A^2)^2} \sin^2 \left(\frac{A^2-1}{2A} et \right)$$

$$\approx \frac{4}{A^2} \sin^2 \left(\frac{A}{2} et \right).$$

(c) 有自旋原子核中存在磁场, 对于 $\tau_{n-\bar{n}} \geq 3 \times 10^6 \text{s}$. 或者 $e \leq 1.73 \times 10^{-28} \text{MeV}$, $A = \frac{2\mu_n B}{e}$ 是一个很大的数, 所以观察到 \bar{n} 的几率 $\approx 1/A^2$ (几乎是零), 即 n 基本上不振荡而成 \bar{n} , 从而原子核相当稳定.

(d) 无自旋原子核虽然平均磁场 $\langle B \rangle = 0$, 但 B^2 的平均值 $\langle B^2 \rangle \neq 0$ (即原子核中磁场不是处处为零.) 所以观察到 \bar{n} 的几率 $\approx 1/\langle A^2 \rangle = \frac{e^2}{4\mu_n^2 \langle B^2 \rangle}$ 仍然是一个小量, 几乎为零.

因此, 这样的原子核中中子振荡仍然受压制. (王福强)

3071 (Pri, 1979)

有人猜测存在着磁荷 $g = ck/e$, 其质量 $\approx 10^4 \text{GeV}$ 的磁单极子.

(a) 假定给出一束这样的粒子, 怎样证明该束确由磁单极子组成? 尽可能现实.

(b) 磁单极子可能在宇宙线中产生, 设 $p \cdot p$ 对撞产生它, 求 $p + p \rightarrow M + \bar{M} + p + p$ 的阈能是多少?

(c) 鉴别宇宙线事例中磁单极子的实际方法是什么?

解: (a) 对磁单极子的鉴别应根据理论上预言的性质.

理论预言:

① 磁单极子的电离本领很大, 让束通过介质或固体径迹

室，它的比电离 $\frac{dE}{dx}$ 比单电 大很多倍。

②电荷束在沿磁场方向运动时不受力，磁单极子束沿磁场运动时会得到加速(或减速，视磁荷符号而定)。一个磁单极子通过 1 千高斯的磁场，可得到能量约 40MeV。把鉴别束通过 10kG 的磁场，即可加速到 400MeV，而对电荷束，则能量没变化。

③当磁单极子束通过一个环形线圈时，相当一个很大的磁通量在线圈中应产生很大的脉冲电流。

④电流束和磁单极子束通过垂直磁场时，两者偏转是不一样的，前者偏转到垂直于磁场的方向 $F = \frac{1}{c} v \times B$ ，后者则沿磁场方向(或逆磁场方向)偏转。

(b)对于 $p + p \rightarrow M + \bar{M} + pp$ ，设一个质子静止，(这是最常遇到的情况)。

$$E_p^{th} = \frac{(\sum m_i)^2 - m_p^2}{2m_p} \approx \frac{(2 \times 10^4 + 2)^2}{2} \approx 2 \times 10^8 (\text{GeV}).$$

若两个质子以同样的能量对头碰撞，这时每个质子的最小能量为

$$2E_p^{th} = 2m_q + 2m_p. \quad E_p^{th} = m_q + m_p \approx 10^4 (\text{GeV}).$$

(c)鉴别宇宙线事例中的磁单极子，可用(a)中的方法之一。一个可行的方案是用固体径迹探测器望远镜。当粒子在固体径迹室中产生很粗的径迹，几个探测器一起可鉴别很重的多电荷离子径迹和磁单极子径迹。前者是粒子速度的函数而后者几乎与速度无关。如加磁场，利用径迹偏转方向来鉴别，使结果更可靠些。

若磁单极子是长期宇宙线作用中产生的，也可以寻找，因

为它与物质相互作用很快损失能量，故它在宇宙线中产生后一定落在地表面。利用它在磁场作用下向磁极运动的特性，

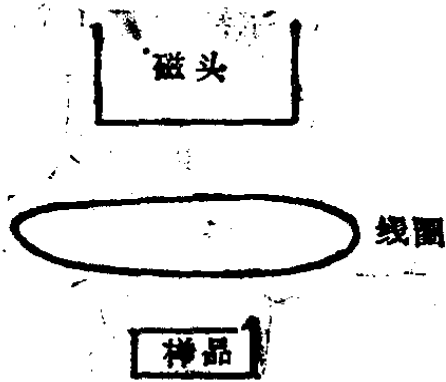


图3.23

把它吸附在磁极上，这样，可以在很多样品中收集，最后再把收集到的磁单极子转动（例如，用更强磁场的磁极头，在两磁极头之间放一个线圈，在磁单极子运动时，在线圈中产生脉冲电流）。更简单的办法是在用磁头收集磁单极时，在

样品和磁头中间加一个环形线圈(图3.23)，当样品的磁单极子跑向磁头运动时，线圈中即产生脉冲电流。

(杨保志 林 辰)

§ 3 强子结构和夸克模型(3072—3090)

3072 (Wis, 1981)

简述下列结论的证据(每个举一例说明)。(a)夸克(主要从介子和重子的结构方面说明)；(b)夸克的颜色自由度；(c)胶子。

解：(a)夸克理论的主要依据是高能电子对核子的散射，证明质子和中子内部电荷分布不均匀，即核子内部有结构。1961年盖尔曼等发现强子的 $SU(3)$ 对称性揭示了强子内部结构的规律性。由此建立了夸克理论。当时提出有 u, d, s 三种夸克，它们是带有一些量子数的有分数电荷的粒子。强子

由夸克组成，重子由三夸克组成，介子由正反夸克组成。夸克理论很好地解释了强子结构以及自旋、宇称。而且还预言了 Ω 粒子。实验发现 Ω 粒子是对夸克理论的有力支持。

(b) 颜色理论的提出主要是解决统计性的问题。按夸克理论， Δ^{++} 粒子应由三个 u 夸克组成。 Δ^{++} 的自旋为 $3/2$ ，要求三个 u 夸克自旋同向。在同一基态上存在三个自旋同向的费米子是和 Pauli 原理相违背的。对 Ω 粒子的解释还有同样的困难。1964 年 Greenberg 提出了夸克的“色”自由度，认为每种夸克还应有三种颜色。三个 u 夸克由于有不同的颜色自由度，虽自旋同向，并不违背 Pauli 原理。“色”自由度的提出很好地解释了 e^+e^- 对撞产生强子的相对截面 R 值。按 QED 理论，在 $E_{cm} < 3\text{GeV}$ 时， $R = \sum_i Q_i^2$ ， Q_i 为所产生的 i 夸克所带电荷，求和是对所能产生的夸克求和。理论值为 $\frac{2}{3}$ ，实验结果为 2，若引入“色”自由度，理论值应考虑三种颜色的贡献。 $R=2$ ，与实验值符合。

(c) QCD 理论描述强相互作用是通过传递胶子来实现的。理论上还预言夸克发射“硬胶子”辐射。在联邦德国 DESY 的 PETRA 正负电子对撞机上发现的强子终态，空间分布的三喷注现象是胶子存在的很好证据。正负电子对撞首先形成正反夸克对，其中一个夸克辐射一个胶子。夸克和胶子各在其原来的动量方向上碎裂成强子喷注，形成三喷注结构，由三喷注结构的相对事例率还可求出强相互作用的耦合常数 α_s 。

(钱剑明)

3073 (Wis, 1978)

根据夸克模型解释为什么不存在下列几种粒子。(a) 自

旋为 1 的重子；(b) 电荷为 +2 的反重子；(c) 电荷为 +1，奇异数为 -1 的介子；(d) 粲子数与奇异数相反的介子。

解：(a) 根据夸克模型重子由三个夸克组成。由于夸克的自旋为 1/2，故不可能组成自旋为 1 的重子。

(b) 反重子由三个反夸克组成。构成电荷为 +2 的反重子，则要求存在电荷为 +2/3 的反夸克，事实上夸克模型中没有这种反夸克。

(c) 介子由正反夸克组成，构成奇异数为 -1、电荷为 +1 的介子，则需一个 s 夸克及另一个电荷为 4/3 的夸克，事实上没有这种夸克，故不存在电荷为 +1、奇异数为 -1 的介子。

(d) 奇异数与粲子数相反的介子必由奇异夸克(或反奇异夸克)和反粲夸克(或粲夸克)构成。由于奇异夸克的奇异数与粲夸克的粲子数符号相反，故它们构成的介子必具有相同的奇异数与粲子数，不可能存在粲子数与奇异数相反的介子。
(钱剑明)

3074 (Wis, 1971)

盖尔曼-西岛公式给出了介子和重子的电荷 q 和一些量子数的关系： $q = e \left(I_3 + \frac{B}{2} + \frac{S}{2} \right)$ 。(a) 区分 I_3, B 和 S 并简述它们在讨论粒子相互作用中的作用；(b) 列表给出 p, \bar{p} 和 n 的这些量子数。

解： I_3 ：同位旋第三分量，表示同一同位旋中粒子的电荷状态。在强和电磁相互作用中 I_3 守恒，在弱作用中 I_3 不守恒。

B ：重子数，对介子 $B=0$ ，对重子 $B=1$ ，在任何相互作用中 $\Delta B=0$ 。重子数守恒，表示质子是稳定的。

S : 奇异数, 为表示奇异粒子协同产生而引进的量子数, 在强、电磁作用中 S 守恒, 说明奇异粒子必须协同产生, 在弱衰变中 S 不守恒, 故奇异粒子可衰变成普通粒子。

(b) 核子家族的 I_3 , B 和 S 值表如下:

量子数	p	\bar{p}	n	\bar{n}
I_3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
B	1	-1	1	-1
S	0	0	0	0

(林 辰)

3075 (Wis, 1979)

给出任意 5 个不同强子的量子数及它们的夸克组成。

解: 最普通的 5 个强子如下表所示:

强子名称	电荷(Q)	重子数(B)	自旋(J)	同位旋 I	I_3	夸克组成
n	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	udd
P	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	uud
π^-	-1	0	0	1	-1	$d\bar{u}$
π^0	0	0	0	1	0	$\frac{1}{2}(u\bar{u} - d\bar{d})$
π^+	+1	0	0	1	1	$u\bar{d}$

(孟国武)

3076 (Wis, 1973)

给出一个 $SU(3)$ 八重态的例子, 写出所有八个粒子的名字并给出它们公共的量子数。

解: 核子和超子组成八重态, 如图 3.24 所示。它们的公共量子数 $J^P = \frac{1}{2}^+$, $B=1$ 。

(钱剑明)

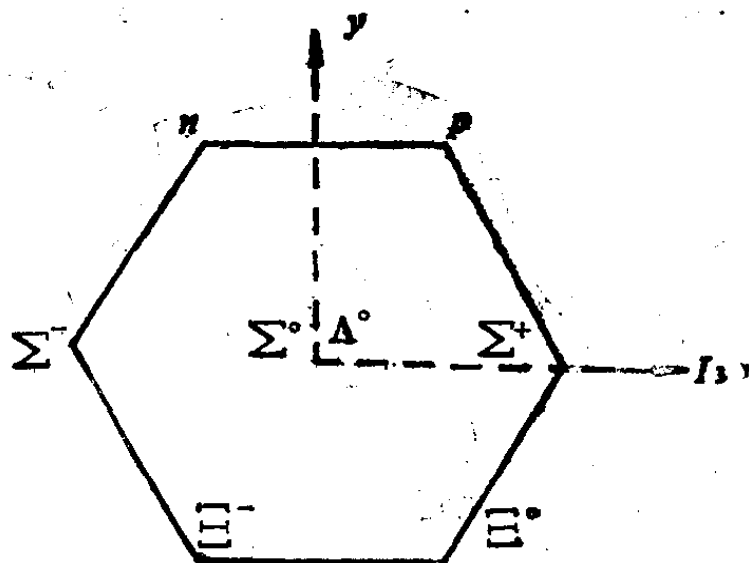


图3.24

3077 (Wis, 1980)

对下列二种情况，分别计算比值：

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{强子})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}$$

(a) 正负电子对质心系中的能量略低于产生粲夸克的阈能。

(b) 正负电子对质心系中能量高于产生粲夸克的阈能但低于产生底夸克的阈能。

解：由量子电动力学知：

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow q, \bar{q} \rightarrow \text{强子}) = \frac{4\pi\alpha^2}{s} Q_i^2.$$

其中 s 为 e^+e^- 在质心系中的能量平方， α 为耦合常数， Q_i 为所能产生的第 i 种夸克所带电荷（以 e 为单位），而

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s},$$

所以 $R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{强子})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}$

$$= \sum_i \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow q_i \bar{q}_i \rightarrow \text{强子})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = 3 \sum_i Q_i^2.$$

其中 \sum_i 为对所能产生的夸克求和。

(a) 能产生的夸克为 u, d, s 三种, 它们的电荷分别为 $2/3, -1/3, -1/3$. 所以 R 值为

$$R = 3 \sum_i Q_i^2 = 3 \times \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \right) = 2.$$

(b) 能产生的夸克为 u, d, s, c , c 夸克电荷为 $2/3$, 所以

$$R = 3 \sum_i Q_i^2 = 3 \times \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} \right) = \frac{10}{3} \approx 3.33.$$

(钱剑明)

3078 (Pri, 1978)

(a) 一般认为强子是由基本的、参与强相互作用的、自旋为 $\frac{1}{2}$ 的费米子夸克组成的束缚态。简要说明这一假设的证据。介子和重子的最低态是由 u, d, s 三个夸克组成的束缚态 (或用 p, n 和 Λ 表示)。它们形成一个 SU_3 三重态。(b) 说明在强相互作用中 Gell-Mann-Neeman $SU(3)$ 对称近似的意义, 这些对称破坏的程度如何? (c) 构成介子、重子最低态的 $SU(3)$ 多重态, 给出其夸克组成和相应的 J, P, I, Y, S, B 和 G 量子数。(d) 另外一个量子数“颜色”的证据是什么, 它是在强相互作用中严格对称的? 你认为有几种颜色? 哪些数据可决定这些数? (e) 现在已确定存在普适的 $SU(3)$ 单态 c 夸克, 带有 $\frac{2}{3}$ 电荷且在强相互作用中显示有新的量子数 C 。

构成 $C=1$ 的最低介子和重子态, 给出 J, P, I, Y, S 和 B 。

(f) $c=1$ 的介子的半轻子衰变模型如何 (也就是它的衰变链

态中有轻子和强子) ? (g) 用 F^* 和 F 分别表示有奇异数的 $J = 1$ 和 $J = 0$ 的粲介子, 设 $m_{F^*} > m_F + m_\pi$ (实验上还未证实), 预测的 $F^* \rightarrow \pi F$ 是什么? F^* 的主要衰变是什么?

解: (a) 支持夸克模型的证据是: ①电子对核子的深度非弹性散射资料证实核子有内部结构. ②强子的 $SU(3)$ 对称性, 可用夸克模型解释. ③可以用夸克模型给出强子反应截面之间的关系. ④夸克模型可解释核子的反常磁矩.

(b) 强相互作用中 $SU(3)$ 对称性近似的意义是: 具有相同自旋和宇称 (J^P) 的不同奇异数的各组同位旋多重态之间是有联系的, 是能够相互转化的, 它们实际上属同一原粒子 U 的不同电荷态 (I_3) 和不同的超荷态 (Y) 的超多重态.

若 $SU(3)$ 对称是完全的, 则同一超多重态的粒子应具有

表 1 $J^P = 0^-, 1^-$ 的介子夸克组成和量子数

	0^-	1^-	夸克组成	I	I_3	Y	B	S	G
八重态	π^+	ρ^+	$\bar{d}u$	1	+1	0	0	0	-1
	π^0	ρ^0	$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - \bar{d}d)$	1	0	0	0	0	-1
	π^-	ρ^-	$\bar{u}d$	1	-1	0	0	0	-1
	K^+	K^{*+}	$\bar{s}u$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	0	
	K^-	K^{*-}	$\bar{u}s$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	0	0	
	K^0	K^{*0}	$\bar{s}d$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	
	K_0	K^{*0}	$\bar{d}s$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	0	0	
	$\eta(549)$		$\frac{1}{\sqrt{6}}(\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s)$	0	0	0	0	0	+1
	$\omega(783)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u + \bar{d}d)$	0	0	0	0	0	-1	
单态	$\eta(958)$		$\frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s)$	0	0	0	0	0	+1
	$\psi(1020)$		$\bar{s}s$	0	0	0	0	0	-1

有相同的质量，实际上它们的质量差别较大，反应超对称性是不完全的。若用它们的质量差表示这种超对称性破坏的程度，例如，对 0^- 介子超多重态， $m_{\pi^+} = 135\text{MeV}$ ， $m_{K^0} = 498\text{MeV}$ ，可见破坏程度之大。

(c) 构成介子和重子最低的 $SU(3)$ 多重态。

对介子，可组成 0^- 和 1^- 的八重态和单态，它们都是 $I=0$ 的基态。它们的夸克组成和量子数见上页表1。

对重子，由三个夸克组成，最低的重子态为 $\frac{1}{2}^+$ 的八重态和 $\frac{3}{2}^+$ 的十重态，它们的 $I=0$ ，是基态，其性质见表2

表2 重子八重态 $\left(\frac{1}{2}^+\right)$ 和十重态 $\left(\frac{3}{2}^+\right)$ 的性质

J^P	粒子名称	夸克组成	I_1	I_3	Y	B	S
$\frac{1}{2}^+$	P	uud	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	0
	n	udd	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	1	0
	Σ^+	uus	1	1	0	1	-1
	Σ^0	$\frac{s}{\sqrt{2}}(ud + du)$	1	0	0	1	-1
	Σ^-	dds	1	-1	0	1	-1
	Ξ^0	uss	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	1	-2
	Ξ^-	dss	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	1	-2
	Λ^0	$\frac{s}{\sqrt{2}}(du - ud)$	0	0	0	1	-1
$\frac{3}{2}^+$	Δ^-	ddd	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	1	0
	Δ^0	ddu	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	1	0
	Δ^+	duu	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	0
	Δ^{++}	uuu	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	1	0

续表 2

J^p	粒子名称	夸克组成	I_1	I_3	Y	B	S
$\frac{3^+}{2}$	Σ^{*-}	sdd	1	-1	0	1	-1
	Σ^{0*}	sdu	1	0	0	1	-1
	Σ^{+*}	suu	1	1	0	1	-1
	Ξ^{*-}	ssd	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	1	-2
	Ξ^{0*}	ssu	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	1	-2
	Ω	$\bar{s}ss$	0	0	-2	1	-3

(d) 颜色自由度的引入, 是为了解释夸克模型统计上的困难。在夸克模型中, 每一夸克的自旋是 $\frac{1}{2}$, 因此, 应满足费米统计。结论之一是重子波函数对于任何两个夸克交换是反对称的。但是存在例如夸克成份为 sss 或 uuu 的重子, 这样的重子波函数对于夸克交换是对称的。为了解释这一矛盾, 可以假设还存在一个另外的自由度——“颜色”。据信存在有三种颜色。这可以通过 e^+e^- 对撞, 产生强子和 μ 子对的实验加以证实。产生强子和产生 μ 子对的截面之比:

$$R = \frac{\sigma(e^+ + e^- \rightarrow \text{强子})}{\sigma(e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-)}$$

在高能情况下, 等于它们产物的电荷平方之比。

$$R = \sum_i Q_i^2 = \text{所有可产生的夸克的电荷平方和。}$$

当 e^+e^- 质心系能量可激发三种味夸克时, 如果不存在色

$$R = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}.$$

如果每一夸克有三种颜色

$$R = 3 \left[\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \right] = 2,$$

这和实验结果是一致的。

(e) c 夸克和普通的夸克可以组成粲介子, 它们也有 0^- 和 1^- 两类, 其性质为表 3 所示, 只是普通介子中的 u 夸克换成 c 夸克. 对于 $C=1$ 的介子态 D^+ , D^0 , F^+ 和 D^{*+} , D^{0*} , F^{*+} 六种.

表3 含 c 夸克的介子性质表

J^P	名称	夸克组成	I	I_3	Y	S	C	B
0^-	D^0	$\bar{u}c$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	1	0
	D^+	$\bar{d}c$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	1	0	1	0
	$\overset{\vee}{D}^0$	$\bar{c}u$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	0	-1	0
	D^-	$\bar{c}d$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	0	-1	0
	F^+	$\bar{s}c$	0	0	+2	1	1	0
	F^-	$\bar{c}s$	0	0	-2	-1	-1	0
	η_c	$\bar{c}c$	0	0	0	0	0	0
1^-	D^{0*}	$\bar{u}c$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	1	0
	D^{+*}	$\bar{d}c$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	1	0
	$\overset{\vee}{D}^{0*}$	$\bar{c}u$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	0	-1	0
	D^{-*}	$\bar{c}d$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	0	-1	0
	F^{+*}	$\bar{s}c$	0	0	2	1	1	0
	F^{-*}	$\bar{c}s$	0	0	-2	-1	-1	0
	$J/4$	$\bar{c}c$	0	0	0	0	0	0

c 夸克和 u, d, s 夸克可组成 $J^P = \frac{1}{2}^+$ 和 $\frac{3}{2}^+$ 的粲重子. 对于只包括一个 c 夸克的重子, 实验上已有发现, 如 Λ_c 等, 理论上 $\frac{1}{2}^+$ 的粲重子应有九个, 它们的性质如表 4.

表4 $\frac{1}{2}^+$ 粲重子 ($c=1$) 的性质表

粒子	夸克组成	同位旋 I_1	I_3	Y	S	C	B
Σ_c^+	cuu	1	1	2	0	1	1
Σ_c^0	$\frac{1}{\sqrt{2}}c(ud+du)$	1	0	2	0	1	1
Σ_c^-	$cd\bar{d}$	1	-1	2	0	1	1
S^+	$\frac{1}{\sqrt{2}}c(uc+cu)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	-1	1	1
S^0	$\frac{1}{\sqrt{2}}c(ds+sd)$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	-1	1	1
T^0	css	0	0	0	-2	1	1
Λ_c^+	$\frac{1}{\sqrt{2}}c(ud-du)$	0	0	2	0	1	1
Λ_c^0	$\frac{1}{\sqrt{2}}c(us-su)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	-1	1	1
Λ_c^-	$\frac{1}{\sqrt{2}}c(ds-sd)$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	-1	1	1

相应的, 对 $\frac{3}{2}^+$ 的 $C=1$ 的重子也应存在, 理论上, 它应该有六种, 夸克组成分别是 (ddc) , (duc) , (uuc) , (cds) , (css) 和 (cus) . 它们在实验上还未找到预计它们的量子数, 除 $J = \frac{3}{2}$ 外, 其它量子数应分别和 Σ_c^0 , Σ_c^+ , Σ_c^{*+} , S^0 , T^0 和 S^+ 相同.

(f) $c=1$ 的介子半轻子衰变模式为 c 夸克的半轻子衰变:

$$c \longrightarrow s, l^+ \nu_c, \quad \text{幅值为} \approx \cos\theta_c,$$

$$c \longrightarrow d, l^+ \nu_c, \quad \text{幅值为} \approx \sin\theta_c.$$

例如: $D^0 \longrightarrow K^- e^+ \nu_c$, 卡皮玻允许衰变,

$\pi^- e^+ \nu_e$, 卡皮玻禁戒衰变.

(g) 若 F^* 存在, 且 $m_{F^*} > m_F + m_\pi$, 则 $F^* \rightarrow \pi^0 F$ 是主要的衰变道, 它是强衰变满足守恒律, 例如:

F^* 的 $J^{PC} = 1^{--}$, F 的 $J^{PC} = 0^{-+}$, 对 π , $J^{PC} = 0^{-+}$.

$F^* \rightarrow \pi^0 F$, $P(\pi^0)P(F)(-1)^1 = -1$,

$C(\pi^0)C(F) = 1$.

F^* 另外的可竞争的衰变道为 $F^* \rightarrow \gamma + F$, 为电磁衰变, 两者的大小由作用常数和相空间因子决定.

(杨保忠 任 勇)

3079 (Pri, 1978)

设想完成了一个测量下列“单举”过程的实验: $a + N \rightarrow \mu^+ + \mu^- + \text{其他}$, 其中 $a = p, \pi^+$ 或 π^- , N 是中子数和质子数相等的核靶. 测出这三个截面作为 m, s 的函数, m 为 μ 子对的不变质量, s 为质心系中能量的平方. 下面的问题, 用以考查你对用来描述这些过程的最普通的模型的理解程度. (Drell-Yan 的夸克-反夸克湮灭模型)

(a) 在最简单的夸克图象中, 比值:

$$\frac{d\sigma_{pN}(m, s)}{dm} : \frac{d\sigma_{\pi^+N}(m, s)}{dm} : \frac{d\sigma_{\pi^-N}(m, s)}{dm}$$

预期为多少?

(b) 精确的实验表明这一比值中每个都不为零, 为解释这一点, 怎样修正 (a) 的答案?

(c) 在考虑到修正的情况下, 请预期这一比值 (对固定的 s) 和 m 的关系为何?

(d) 如果引入色的概念, 预期的比值有何变化?

(e) Drell 和 Yan 的一个重要论断是无标度的概念, 用一个公式或草图解释之.

(f) 从数据中, 怎样确定 π^+ 的夸克组成.

(g) 怎样估计质子的反夸克成份.

解: (a) 根据 Drell Yan 模型, 这类过程是夸克和反夸克湮灭成轻子对的过程. 量子电动力学可以计算, 当两 μ 系统质心系能量的平方 $s_{\mu\mu} \gg m_{\mu}^2, m_0^2$ 时, 可忽略 m_{μ}, m_0 的影响.

$$\sigma(\mu^+\mu^- \rightarrow \gamma \rightarrow Q_i\bar{Q}_i) = \frac{4\pi}{3S_{\mu\mu}} \alpha^2 Q_i^2,$$

Q_i 为夸克的电荷数, α 为精细结构常数, 据细致平衡原理:

$$\sigma(Q_i\bar{Q}_i \rightarrow \gamma \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi Q_i^2}{3s^2} \alpha^2 = Q_i^2 \sigma_0,$$

q^2 为两夸克质心系中的总能量的平方, $q^2 = S_{\mu\mu}$. 即 $q^2 = S_{\mu\mu} = m^2$. m 为 $\mu^+\mu^-$ 质心系 (即 $Q\bar{Q}$ 质心系) 的总能量. 从简单夸克图象得:

$$\sigma(u\bar{u} \rightarrow u^+u^-) \approx \frac{4}{9} \sigma_0,$$

$$\sigma(d\bar{d} \rightarrow \mu^+\mu^-) \approx \frac{1}{9} \sigma_0,$$

对 $PN \rightarrow u^+u^- + x$, 因 p, N 内不含反夸克, 故

$$\frac{d\sigma(s, m)}{dm} = 0.$$

当相同的 s, m 时:

$$\sigma(\pi^+ N) = \sigma \left[(u\bar{d}) + \frac{1}{2}(uud + udd) \right] = \sigma(\bar{d}d) \cdot \frac{6}{2},$$

$$\sigma(\pi^- N) = \sigma \left[(\bar{u}d) + \frac{1}{2}(uud + udd) \right] = \sigma(u\bar{u}) \cdot \frac{3}{2}.$$

所以有 $\frac{d\sigma_{pN}(s,m)}{dm} : \frac{d\sigma_{\pi^+ N}(s,m)}{dm} : \frac{d\sigma_{\pi^- N}(s,m)}{dm}$

$$= 0:1:4.$$

(b) $\frac{d\sigma_{pN}(m,s)}{dm}$ 不为零, 说明中子和质子内有反夸克存在. 设 p 和 n 的反夸克所占比例为 α , $\alpha \ll 1$, 正夸克占 $(1 - \alpha)$.

$$\begin{aligned} \sigma_{pN} &= 2\alpha\bar{u}[2u(1-\alpha) + u(1-\alpha)] + 2(1-\alpha)u[2\alpha\bar{u} \\ &\quad + \alpha\bar{u}] + \alpha\bar{d}[(1-\alpha)d + 2(1-\alpha)d] \\ &\quad + d(1-\alpha)(\alpha\bar{d} + 2\alpha\bar{d}) \end{aligned}$$

$$= 12\alpha(1-\alpha)\sigma(u\bar{u}) + 6\alpha(1-\alpha)\sigma(d\bar{d})$$

$$= 6\alpha(1-\alpha)[2\sigma(u\bar{u}) + \sigma(d\bar{d})];$$

$$\sigma_{\pi^+ N} = \bar{d}[(1-\alpha)d + 2(1-\alpha)d] + u[2\alpha\bar{u} + \alpha\bar{u}]$$

$$= 3(1-\alpha)\sigma(\bar{d}d) + 3\alpha\sigma(u\bar{u})$$

$$= 3[(1-\alpha)\sigma(d\bar{d}) + \alpha\sigma(u\bar{u})]$$

$$= 3\sigma(d\bar{d}) + 3\alpha[\sigma(u\bar{u}) - \sigma(d\bar{d})];$$

$$\sigma_{\pi^- N} = 3\sigma(u\bar{u}) + 3\alpha[\sigma(d\bar{d}) - \sigma(u\bar{u})].$$

$$\frac{d\sigma_{pN}(m,s)}{dm} : \frac{d\sigma_{\pi^+ N}(m,s)}{dm} : \frac{d\sigma_{\pi^- N}(m,s)}{dm}$$

$$= 6\alpha(1-\alpha) : \left(\frac{1}{3} + \alpha\right) : \left(\frac{4}{3} - \alpha\right)$$

$$= 18\alpha(1-\alpha) : (1 + 3\alpha) : (4 - 3\alpha).$$

令 $\alpha = 0.01$, 上述比值就变化很大, 为:

$$0.18 : 1.03 : 3.97.$$

可见上述截面之比，特别是 $\frac{d\sigma_{pN}(s, m)}{dm}$ 对反夸克的含量是很灵敏的。

(c) 详细的推导公式是复杂的，要涉及核子的结构函数（即核子或介子内的夸克分布和夸克的动量分布等），当考虑核内夸克的动量是等分的。在夸克和反夸克质心系内，对头碰时有：

$$\sigma(Q, \bar{Q}_i \rightarrow \mu^+ \mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3m^2} Q_i^2, \quad \frac{d\sigma}{dm} \approx m^{-3} \alpha^2 Q_i^2,$$

$m^2 \approx q^2$ ， q^2 为夸克的四动量平方，即 σ 随 m^2 下降，这和实验结果是一致的。

(d) 引入色的概念，对预期的比值不会引起变化。

(e) 无标度假设是指在一定能量标度下，可忽略较小能量对物理过程的影响。例如，当我们考虑二级电磁过程时， $d\sigma_{em} = \alpha^2 f(s, q^2, m_i)$ 。该式是一般形式， s 为质心系总能量平方， q^2 为四动量转移平方， m_i 为带电粒子质量。当 s 和 $|q^2| \gg m_i^2$ 时，在 $d\sigma$ 中取 $m_i = 0$ 是一个很好的近似，这时有：

$$d\sigma = \alpha^2 f(s, q^2).$$

例如在 $Q, \bar{Q}_i \rightarrow \mu^+ \mu^-$ 过程，当 $m \gg m_\mu$ 和 m_μ 时，取 $m_\mu \approx m_0 \approx 0$ ，这时有

$$\sigma(Q, \bar{Q}_i \rightarrow \mu^+ \mu^-) \propto \frac{Q_i^2}{m^2}.$$

(f) 从 $\frac{d\sigma_{\pi^+ N}}{dm} : \frac{d\sigma_{\pi^- N}}{dm} = 1:4$ 和实验值比较相符。说明

($u\bar{d}$) 和 π^- ($\bar{u}d$) 的夸克组成设想是正确的。

(g) 从(b)的计算，则可由实验值给出质子的夸克成份中反夸克的比值。

(任 勇)

强子结构的口袋模型认为, 强子是带色夸克作为自旋 $\frac{1}{2}$ 的狄拉克粒子在半径为 R 的球形空腔内独立运动所构成的. 夸克在这一空腔内的禁闭是由于下列原因: 夸克满足狄拉克方程, 但其质量与位置有关, $r < R$ 时, $m = 0$; $r > R$ 时, $m = \infty$. 夸克的能量算符包含一项 $\int d^3x m(x) \bar{\psi} \psi$, 为使能量不出现发散, 要求在 $m(X) = \infty$ 的地方, (即 $X > R$ 时). 狄拉克波函数满足 $\bar{\psi} \psi = 0$. 这可由选择一适当的边界条件达到.

(a) 证明边界条件: (1) $\psi(X=R) = 0$, (2) $i\hat{e} \cdot \boldsymbol{\gamma} \psi(X=R) = \psi(X=R)$, (其中 \hat{e} 为径向单位矢量), 都可导致在 $X=R$ 处 $\bar{\psi} \psi = 0$. 物理上成立的是哪一个?

(b) 自由无质量狄拉克方程的 S 波通解可写成:

$$\psi = N \begin{pmatrix} j_0(kR) x \\ i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{x} j_1(kR) x \end{pmatrix}.$$

$x = 2$ 分量旋量, j_l = 球贝塞尔函数, N = 归一化常数.

我们约定 $\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\sigma}$ = 泡利矩阵.

从 $x = R$ 处的边界条件得出决定 R 的关系式, (不必解出方程).

解: (a) 条件 1, $\psi(X=R) = 0$, 导致 $\bar{\psi} \psi = 0$ 是显然的.

对于条件 2, 我们有 (在 $|\mathbf{x}|=R$ 处)

$$\begin{aligned}\bar{\psi}\psi &= (i\hat{\mathbf{x}}\cdot\boldsymbol{\gamma}\psi)^\dagger\beta(i\hat{\mathbf{x}}\cdot\boldsymbol{\gamma}\psi) \\ &= (-i\psi^\dagger\hat{\mathbf{x}}\cdot\boldsymbol{\gamma}\beta)\beta(i\hat{\mathbf{x}}\cdot\boldsymbol{\gamma}\psi) \\ &= \psi^\dagger\beta(\hat{\mathbf{x}}\cdot\boldsymbol{\gamma})(\hat{\mathbf{x}}\cdot\boldsymbol{\gamma})\psi,\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}(\hat{\mathbf{x}}\cdot\boldsymbol{\gamma})(\hat{\mathbf{x}}\cdot\boldsymbol{\gamma}) &= \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{x}} \\ -\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{x}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{x}} \\ -\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{x}} & 0 \end{pmatrix} \\ &= -1,\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\bar{\psi}\psi &= -\psi^\dagger\beta\psi = -\bar{\psi}\psi, \\ \bar{\psi}\psi &= 0, \quad (X=R \text{ 处}).\end{aligned}$$

这两个条件中后者是在物理上成立的. 狄拉克方程是由四个偏微分方程构成的. 每个方程中对坐标的偏微商都是一阶, 所以, 狄拉克方程需要四个边界条件. 由于在无穷远处, 波函数应趋于零. 这相当于对方程组的一半解作了限制, 即相当于两个边界条件, 但还需要两个边界条件. $\psi(X=R)=0$ 相当于四个边界条件, 而

$$\hat{\mathbf{x}}\cdot\boldsymbol{\gamma}\psi(X=R) = \psi(X=R),$$

$$\text{即 } i\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{x}} \\ -\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{x}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \text{ 也即 } i(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{x}})\beta = \alpha,$$

只有两个方程, 它建立了大分量同小分量之间的关系. 因此, 可以说条件 2 才是物理上允许的. 从 (b) 的解的显式可以看出, 由于大小分量包含不同阶的贝塞尔函数, 因而不可能同时为零, 条件 (1) 是不合适的.

$$(b) \quad \alpha = i(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{x}})\beta,$$

$$j_0(kR)x = i \cdot i (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{x}) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{x}) j_1(kR)x,$$

$$j_0(kR) = -j_1(kR).$$

即为所求的方程.

(任 勇)

3081 (Pri, 1980)

强子结构的口袋模型认为, 强子是带色夸克作为自旋 $\frac{1}{2}$ 的狄拉克粒子在一半径为 R 的球形空腔内独立运动所构成的. 为得到某一强子态的波函数, 需把各个夸克“轨道”组合以给出“白色”和恰当的自旋值和味量子数(同位旋、电荷、奇异数).

在一相当好的近似下, “上”夸克和“下”夸克质量为零. 可以很容易地得到最低能量(S -波)口袋轨道波函数, 用狄拉克旋量表出,

$$\psi = N \begin{pmatrix} j_0(kr)x \\ ij_1(kr)\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{x} \end{pmatrix}.$$

$x = 2$ 分量旋量, $k = 2.04/R$, $j_l =$ 球贝塞尔函数.

(i) 最低态重子(质子和中子)相当于把三个夸克放入这一轨道. 你怎样构造质子和中子的波函数, 即, 放入哪些夸克, 什么样的自旋波函数才能给出正确的质子和中子的量子数, 且服从泡利原理?

(ii) 磁矩算子定义为
$$\boldsymbol{\mu} = \int_{|\mathbf{x}| < R} d^3x \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{J}_{\text{电磁}},$$

其中 $\mathbf{J}_{\text{电磁}}$ 是通常的狄拉克电流算符. 把这个算子用夸克组份的自旋算符表示. (可不必要算出含贝塞尔函数的积分).

(iii) 证明 $\mu_n/\mu_p = -2/3$.

计算时可能需要下列 Clebsch-Gordon 系数:

$$\left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \left| 1, 1; \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$\left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \left| 1, 0; \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

解：如果不计及色自由度，最低态重子对于夸克交换是完全对称的，由于其同位旋第三分量 $I_3 = \frac{1}{2}$ ，可以断定其

夸克组成为 uud ，由三个同位旋 $\frac{1}{2}$ 的粒子组成一个同位旋

$\frac{1}{2}$ 的系统，对于 ud 交换，不可能完全对称（即不可能有 uud

+ udu + duu 形式，否则会导致十重态， $I = \frac{3}{2}$ ）。因此，波函

数必有 $uud-udu$ 形式成份。但是前面说过，最低态重子对于夸克交换完全对称。因此，这一项应乘上一个对交换夸克 2 和夸克 3 反对称的自旋波函数 $(\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow)$ ，这样我们得到了对于交换夸克 2, 3 波函数对称的形式：

$$u\uparrow(1)u\uparrow(2)d\downarrow(3) - u\uparrow(1)d\uparrow(2)u\downarrow(3)$$

$$- u\uparrow(1)u\downarrow(2)d\uparrow(3) + u\uparrow(1)d\downarrow(2)u\uparrow(3).$$

而且满足对同位旋性质的要求。下面要做的是将该波函数进行对称化，使得其对于交换夸克 1 和夸克 2，夸克 1 和夸克 3 波函数也保持不变。交换夸克 1 和夸克 2 得（夸克标号由顺序表明）：

$$u\uparrow u\uparrow d\downarrow - d\uparrow u\uparrow u\downarrow - u\downarrow u\uparrow d\uparrow + d\downarrow u\uparrow u\uparrow,$$

交换夸克 1 和夸克 3 得：

$$d\uparrow u\uparrow u\uparrow - u\downarrow d\uparrow u\uparrow - d\uparrow u\downarrow u\uparrow + u\uparrow d\downarrow u\uparrow,$$

和原来的波函数相加并归一化：

$$\frac{1}{\sqrt{18}}(2u \uparrow u \uparrow d \downarrow + 2u \uparrow d \downarrow u \uparrow + 2d \downarrow u \uparrow u \uparrow$$

$$-u \uparrow u \downarrow d \uparrow -u \uparrow d \uparrow u \downarrow -u \downarrow u \uparrow d \uparrow -u \downarrow d \uparrow u \uparrow \\ -d \uparrow u \uparrow u \downarrow -d \downarrow u \downarrow u \uparrow).$$

色函数对交换任意两个夸克反对称，形式为

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(RGB - RBG + GBR - GRB + BRG - BGR)$$

记 $\psi_{\uparrow} = N \begin{pmatrix} j_0(kr) x(\uparrow) \\ i j_1(kr) \sigma \cdot \hat{r} x(\uparrow) \end{pmatrix}, \quad x(\uparrow) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$

$\psi_{\downarrow} = N \begin{pmatrix} j_0(kr) x(\downarrow) \\ i j_1(kr) \sigma \cdot \hat{r} x(\downarrow) \end{pmatrix}, \quad x(\downarrow) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

为计入轨道波函数，只需将上面表达式中的 \uparrow 改为 $\psi(\uparrow)$ ， \downarrow 改为 $\psi(\downarrow)$ 即可。最后结果为

$$\frac{1}{6\sqrt{3}}(RGB - RBG + GBR - GRB + BRG - BGR)$$

$$\times (2u\psi_{\uparrow}u\psi_{\uparrow}d\psi_{\downarrow} + 2u\psi_{\uparrow}d\psi_{\downarrow}u\psi_{\uparrow} + 2d\psi_{\downarrow}u\psi_{\uparrow}u\psi_{\uparrow} \\ - u\psi_{\uparrow}u\psi_{\downarrow}d\psi_{\uparrow} - u\psi_{\uparrow}d\psi_{\uparrow}u\psi_{\downarrow} - u\psi_{\downarrow}u\psi_{\uparrow}d\psi_{\uparrow} \\ - u\psi_{\downarrow}d\psi_{\uparrow}u\psi_{\uparrow} - d\psi_{\downarrow}u\psi_{\uparrow}u\psi_{\downarrow} - d\psi_{\downarrow}u\psi_{\downarrow}u\psi_{\uparrow}).$$

中子的波函数可通过用同位旋降算符作用在质子波函数上得到，结果是：

$$\frac{1}{6\sqrt{3}}(RGB - RBG + GBR - GRB + BRG - BGR)$$

$$\times (2d\psi_{\downarrow}d\psi_{\downarrow}u\psi_{\uparrow} + 2d\psi_{\downarrow}u\psi_{\downarrow}d\psi_{\downarrow} + 2u\psi_{\uparrow}d\psi_{\downarrow}d\psi_{\downarrow} \\ - d\psi_{\downarrow}d\psi_{\downarrow}u\psi_{\uparrow} - d\psi_{\downarrow}u\psi_{\downarrow}d\psi_{\downarrow} - d\psi_{\downarrow}d\psi_{\downarrow}u\psi_{\uparrow} \\ - d\psi_{\downarrow}u\psi_{\downarrow}d\psi_{\downarrow} - u\psi_{\uparrow}d\psi_{\downarrow}d\psi_{\downarrow} - u\psi_{\uparrow}d\psi_{\downarrow}d\psi_{\downarrow}).$$

上面得到的是自旋向上的质子和中子的波函数，自旋向下的情况可以通过将上述式中 \uparrow 改为 \downarrow 得到。

(ii) 狄拉克电流算子定义为:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= Q\bar{\psi}^* \boldsymbol{\gamma} \psi = Q\bar{\psi}^* \beta \boldsymbol{\alpha} \psi = Q\psi \dagger \boldsymbol{\alpha} \psi \\ &= Q\psi \dagger \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \psi. \end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}$ 为泡利矩阵. 将 ψ 的形式代入, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{EM} &= QN \dagger N (j_0(kr) x \dagger, -ij_1(kr) x \dagger (\vec{\sigma} \cdot \hat{r})) \\ &\quad \times \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_0(kr) x \\ ij_1(kr) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{r}) x \end{pmatrix} \\ &= iQ|N|^2 j_0(kr) j_1(kr) x \dagger [\boldsymbol{\sigma}, (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{r})] x \\ &= iQ|N|^2 j_0(kr) j_1(kr) x \dagger (-2i\boldsymbol{\sigma} \times \hat{r}) x \\ &= 2Q|N|^2 j_0(kr) j_1(kr) x \dagger (\boldsymbol{\sigma} \times \hat{r}) x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \boldsymbol{\mu} &= \int_{|\mathbf{x}| < R} d^3x \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{J}_{EM} \\ &= \int_{|\mathbf{x}| < R} d^3x \cdot Q|N|^2 j_0(kr) j_1(kr) x \dagger [r\vec{\sigma} - (\hat{r} \cdot \vec{\sigma}) \hat{r}] x. \end{aligned}$$

对角度部分积分后, 显然方括号中后一项贡献为零, 故:

$$\boldsymbol{\mu} = 4\pi Q|N|^2 \left[\int_{r < R} d\mathbf{r} \cdot r^3 j_0(kr) j_1(kr) \right] x \dagger \boldsymbol{\sigma} x.$$

(iii) 磁矩在一个自旋向上的质子中的期待值是:

$$\begin{aligned} \langle p \uparrow | \boldsymbol{\mu} | p \uparrow \rangle &= \frac{Q}{18} \left[4 \times \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right) \right. \\ &+ 4 \times \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right) + 4 \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right) \\ &\left. + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right) \right] \end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right) \Bigg]$$

$$= Q.$$

同样:

$$\langle n \uparrow | \mu | n \uparrow \rangle = \frac{Q}{18} \left[3 \times 4 \times \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \right) \right. \\ \left. + 6 \times \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \right) \right] = -\frac{2}{3} Q.$$

故 $\mu_n / \mu_p = -\frac{2}{3}$. (任 勇)

3082 (Pri, 1979)

最近的论文涉及到从 e^+e^- 对撞实验中发现了胶子存在的实验证据。这些工作不可避免地有所重做。要求你更好地完成这一工作。

(i) 根据量子色动力学理论(基于 $SU(3)$ 规范场) 什么是胶子? 胶子有多少种? 它们的电荷是多少? 自旋是多少?

(ii) 各种类型的夸克或味道称为 u 夸克、 d 夸克等等, 根据 QCD 理论, 每个味道的夸克有几种类型? 它们的电荷是什么? QCD 对夸克数目有限制吗? 目前事实表明, 实际上有几种变道的夸克? 叙述其证据. 弱作用是否给出目前夸克味道的数目, 还是预言更多? 测量 $e^+e^- \rightarrow$ 强子在各种能量下与味道数有关的强子总截面是怎样的?

(iii) 在较高能区, e^+e^- 对撞产生强子形成二个喷注, 令人振奋, 根据夸克—胶子图象(图3.25), 怎样解释这一现

象？在更高的能区，发现 e^+e^- 对撞形成强子三喷注，这更令人高兴，怎么解释这个现象？

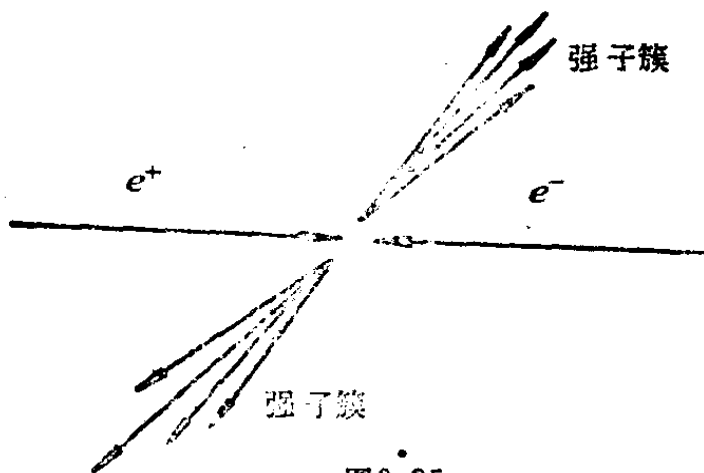


图3.25

解：(i) 据量子色动力学，强子由夸克组成，夸克之间的相互作用通过胶子场实现的，类似光子在电磁作用中的作用一样，胶子是夸克之间强相互作用的传播子。胶子共有8种，其电荷为零，自旋为1，是矢量胶子。

(ii) 据 QCD 理论，每种夸克有三种颜色，同一味道的三种颜色的夸克具有相同的电荷。夸克的特征之一是带有分数电荷。QCD 对夸克的种类数有弱限制(夸克超过16种会破坏渐近自由)。从弱作用也未对夸克味道有限制，但宇宙学要求中微子约为3~4种，根据轻子、夸克对称性，要求夸克最多为6~8个味道。在不同能量下，测量强子总产生截面为

$$R(E) = 3 \sum_i Q_i^2.$$

R 为强子的相对产生截面，定义为： $R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{强子})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}$ ，

Q_i 为 i 夸克的电荷，因子3是三种颜色的贡献 \sum_i 对该能量

下能产生的所有夸克求和。

(iii) e^+e^- 对撞产生强子末态有二喷注现象可用夸克模型来解释： e^+e^- 对撞首先产生一对正反夸克，能量较高，正反夸克带有动量 \mathbf{p} 和 $-\mathbf{p}$ 。当夸克碎裂成强子时，强子在 \mathbf{p} 方向的动量投影之和 $\sum p_{\parallel} = p$ ，在垂直于 \mathbf{p} 方向的动量投影之和 $\sum p_{\perp} = 0$ ，即夸克和反夸克的碎裂的强子分别成喷注，其喷注轴即为夸克的动量方向。同时，测量喷注轴相对于束流方向的角分布，证明夸克为自旋 $\frac{1}{2}$ 的费米子。

三喷注现象可用 QCD 理论的硬胶子发射解释，当高能时，类似电子发射光子一样，夸克发射胶子，这时胶子和原来两个夸克各碎裂成一个强子喷注，形成强子终态三喷注现象，从三喷注事例率可求出强相互作用耦合常数 α_s 。

(杨保忠)

3083 (Pri, 1977)

观测到长寿命的窄共振态 ($J/\psi, \psi'$)，引进了新的粲数。目前，通过测量轻子对的不变质量又发现几个高质量共振态 (r, r' 其质量近似 $10\text{GeV}/c^2$)。这些现象若引进新的 b 量子数：

(a) 粗略估计 b 夸克的质量。

(b) 如果这种夸克带有 $-\frac{1}{3}$ 电荷，怎样改进盖尔曼-西岛公式，使它包括新的量子数。

(c) 按一般的带色的夸克模型，当能区在 b 夸克产生阈以上时，估计此值：

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{强子})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}$$

(d) 若 b 夸克带的电荷不是 $-\frac{1}{3}$ 而是 $\frac{2}{3}$, 在 e^+e^- 对撞机上产生 γ 生 ($b\bar{b}$ 束缚态) 的截面有什么变化? 它到轻子对的分支比有什么变化? 在强子对撞中, 它的产生截面有何变化? (可以简单讨论最后这个问题).

解: (a) 忽略 b 夸克之间的结合能,

$$m_b \approx \frac{1}{2} M_\gamma \approx 5 \text{ GeV}.$$

(b) 盖尔曼-西岛公式, 对 u, d, s 三种夸克,

$$Q = I_3 + \frac{1}{2} (B + S).$$

令 c 夸克的粲数为 $+1$, b 夸克的 b 数为 -1 , 这时盖尔曼-西岛公式可写成:

$$Q = I_3 + \frac{1}{2} (B + S + c + b).$$

例如: 对 c 夸克, $Q(c) = \frac{1}{2} (B_c + c) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$;

对 b 夸克, $Q(b) = \frac{1}{2} (B_b + b) = -\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$.

(c) 当某一夸克产生后, 对 R 的贡献为

$$R_i = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow Q_i \bar{Q}_i)}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-)} = 3 Q_i^2.$$

Q_i 为第 i 夸克所带电荷, 因子 3 是三种夸克颜色的贡献. 对于质心能量大于 b 夸克开放阈时, 可产生 u, d, s, c, b 五种味道的夸克.

$$R = 3 \sum_i Q_i^2 = 3 \left[3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \right] = \frac{11}{3}.$$

(d) 根据共振态的布赖特-维格纳公式:

$$\sigma = \frac{\pi(2J+1)}{m^2} \frac{\Gamma_{ee}\Gamma}{(E-m)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$$

J, m 为 γ 粒子的自旋和质量, Γ 为共振态总宽度, Γ_{ee} 为到 e^+e^- 的部分宽度.

γ 到 e^+e^- 的部分宽度为

$$\Gamma_{ee}(\gamma \rightarrow e^+e^-) = 16\pi \frac{\alpha^2 Q_b^2}{m_b^2} |\psi(0)|^2.$$

$\psi(0)$ 为基态波函数, Q_b, m_b 为 b 的电荷和质量, α 为精细结构常数. 当 $E = m$ 时,

$$\sigma = \frac{12\pi\Gamma_{ee}}{m^2\Gamma} \propto Q_b^2.$$

当 b 夸克的电荷从 $-\frac{1}{3}$ 变为 $\frac{2}{3}$ 时, σ 增加到 4 倍, 所以总截面和到轻子道的部分衰变宽度都增加到 4 倍.

用强子对撞的产生截面变化中没有共振出现, 因为强子对撞过程是反应过程 ($h + \bar{h} \rightarrow \gamma + x$), 而非形成反应过程产生 ($e^+ + e^- \rightarrow \gamma$).

(杨保忠 范扬眉)

5084 (Wis, 1975).

最近发现的 ψ 粒子* ($M = 3.1 \text{ GeV}/c^2$) 和 ψ^* 粒子 ($M = 3.7 \text{ GeV}/c^2$) 具有下列相同的量子数: $J^P = 1^-, C = -1$ (电荷共轭), $I = 0$ (同位旋), $Q = 0$.

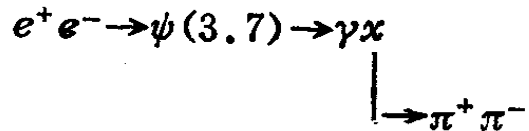
• 现在的正式名称为 J/ψ 粒子. ——编者注

指出下列衰变哪些是由强作用，哪些由弱作用，哪些由电磁作用引起？哪些是严格禁戒的？如果是强作用禁戒或严格禁戒，指出选择定则。 $\psi \rightarrow \mu^+ \mu^-$ ， $\psi \rightarrow \pi^0 \pi^0$ ， $\psi^* \rightarrow \psi \pi^+ \pi^-$ ， $\psi^* \rightarrow \psi + \eta'$ ($0.96 \text{ GeV}/c^2$)。

解： $\psi \rightarrow \mu^+ \mu^-$ 是由电磁作用引起的。 $\psi^* \rightarrow \psi \pi^+ \pi^-$ 是强作用衰变。而衰变 $\psi \rightarrow \pi^0 \pi^0$ 是强相互作用禁戒的。 ψ 的 C 宇称为 -1 ，而末态两个 π^0 的 C 宇称为 $+1$ ，这衰变破坏了强相互作用过程中的 C 宇称守恒定律。衰变模式 $\psi^* \rightarrow \psi + \eta'$ ($0.96 \text{ GeV}/c^2$) 是严格禁戒的，这种衰变违背了能量守恒定律。
(钱剑明)

3085 (Wis, 1976)

在 SPEAR ($e^+ e^-$ 对撞束贮存环) 观察到几个叫 ψ , x 的态。 ψ 态具有光子的量子数 ($J^P = 1^-$, $I^G = 0^-$)，质量为 3.1 和 $3.7 \text{ GeV}/c^2$ 。观察到下述反应：



其中： $E_\gamma = 0.29 \text{ GeV}$ 。 x 的质量、自旋、宇称、同位旋、 G 宇称和电荷共轭可能是什么？假定 γ 辐射是电偶极 $E1$ 跃迁。 x 到 2π 是强衰变。

解： x 粒子的质量，在 ψ 静止的坐标系中：

$$E_x + E_\gamma = m_\psi c^2,$$

$$E_x = 3.7 \text{ GeV} - 0.29 \text{ GeV} = 3.41 \text{ GeV}.$$

由动量守恒知： $p_x = p_\gamma = 0.29 \text{ GeV}/c$ ， $E_x^2 = p_x^2 c^2 + m_x^2 c^4$ ，

$$m_x = \sqrt{E_x^2 - p_x^2 c^2 / c^2} = \sqrt{3.41^2 - 0.29^2} \text{ GeV}/c^2$$

$$= 3.40 \text{ GeV}/c^2.$$

求 x 的其它量子数. 据 $\psi \rightarrow \gamma x$ 为 $E1$ 跃迁, 据选 $E1$ 跃迁选择定则. ψ 和 x 的宇称相反, 自旋改变为 $0, \pm 1$, 故 x 可能的自旋值 $J = 0, 1, 2$, 宇称为正.

$x \rightarrow \pi^+ \pi^-$ 为强衰变. x 的宇称为正, 宇称守恒要求:
 $P(\pi^+) \cdot P(\pi^-) (-1)^l = (-1)^{2+l} = (-1)^l = 1, l = 0$ 或 2 , 即 x 的自旋值只能是 $J = 0, 2$.

$$x \rightarrow \pi^+ \pi^-. \quad C(x) = (-1)^{l+s} = (-1)^l = +1.$$

另外, π 的 G 宇称为正, 由 G 宇称守恒可知

$$G(x) = G(\pi^+) \cdot G(\pi^-) = +1.$$

对于具有 C 宇称的介子, 其同位旋 I 和 G, C 的关系有:

$$G(x) = (-1)^I C(x), \quad C(x) = G(x) = 1.$$

故有: $(-1)^I = +1, \quad I = 0$ 或 2 .

因还未发现 $I = 2$ 的介子, 应取 $I = 0$. x 的完整的量子数可能为

$$m_x = 3.40 \text{ GeV}/c^2, \quad I^G(J^P)C = 0^+(0^+) + \text{或} 0^+(2^+) +.$$

(由 γ 的角分布知 $x(3.40)$ 的自旋 $J = 0$ —— 校者注).

(胡 平)

3086 (Pri, 1980)

在 $\psi(3095)$ 和 $\psi'(3684)$ 之间存在三个 $c\bar{c}$ 束缚态:
 $x_0(3410), J^{PC} = 0^{++}; x_1(3510), J^{PC} = 1^{++}; x_2(3555), J^{PC} = 2^{++}$. 式中括号内是用 MeV 表示的质量.

(i) 下列衰变各是什么多极跃迁?

$$\psi' \longrightarrow \gamma + x_{0,1,2}$$

(ii) 设 ψ' 是由正负电子对撞产生, $\psi' \rightarrow \gamma + x$ 中, 光子相对于束流方向的角分布是怎样的?

(iii) 对 (ii) 的条件, 是否可以用它的角分布来决定 x_0 .

态的字称。

(iv) 对 x_0 和 x_1 态, 下面的各衰变道是很大, 很小, 或禁戒?

$$\begin{array}{cccc} \pi^0\pi^0, & \gamma\gamma, & p\bar{p}, & \pi^+\pi^-\pi^0, \\ 4\pi^0, & D^0\bar{K}^0, & e^+e^-, & \psi\eta^0. \end{array}$$

(v) x 的强衰变图象是通过一个由少数胶子组成的中间态实现的, 胶子再通过相互作用产生轻夸克. 如果胶子是无质量的和 $J^P = 1^-$, 对于 $x_{0,1,2}$ 纯胶子中间态最少胶子数是多少? 如何估计上述三个态的相对强子衰变宽度?

解: (i) $|\Delta J| = 0, 1$, 宇称改变, 故为电偶极跃迁.

(ii) 对电偶极跃迁, 其跃迁部分宽度:

$$\Gamma(2^3S_1 \rightarrow \gamma 2^3P_J) = \left(\frac{16}{243}\right) \alpha (2J+1) k^3 |\langle 2P | \gamma | 2S \rangle|^2,$$

$$\begin{aligned} \Gamma(2^3S_1 \rightarrow \gamma_0 2^3P_0) : \Gamma(2^3S_1 \rightarrow \gamma_1 2^3P_1) : \Gamma(2^3S_1 \rightarrow \gamma_2 2^3P_2) \\ = k_0^3 : 3k_1^3 : 5k_2^3. \end{aligned}$$

式中: k 为光子的动量 ($\hbar = 1$). 可以计算角分布为

$$\psi' \rightarrow \gamma_1 + x_0, \quad \gamma_1 \text{ 的角分布为 } 1 + \cos^2\theta;$$

$$\psi' \rightarrow \gamma_2 + x_1, \quad \gamma_2 \text{ 的角分布为 } 1 - \frac{1}{3}\cos^2\theta;$$

$$\psi' \rightarrow \gamma_3 + x_3, \quad \gamma_3 \text{ 的角分布为 } 1 + \frac{1}{13}\cos^2\theta.$$

(iii) 从上面可以看到, γ_1, γ_2 和 γ_3 有不同的角分布. 实验上可测定 γ 的角分布, 定出 $x_{0,1,2}$ 的自旋角动量. 但还必须根据它的衰变来定出各种量子数. 如对 X_0 态, 它衰变到 $\pi^+\pi^-$ 和 K^+K^- , $J^P = 0^+, 1^-, 2^+ \dots$ 从角分布知 $J^P = 0^+$, 又 $C(\pi^+\pi^-) = (-1)^L$, 故 $J^{P^0} = 0^{++}$. 对 x_1 态, 不存在 $\pi^+\pi^-$ 或 K^+K^- 末态, 这时 $J^P = 0^-, 1^+, 2^-$, 从角分布知 $J = 1$, 故为

1^{++} , 只用角分布, 不能完全确定 J^P .

(iv) $x_1 \rightarrow \pi^0 \pi^0$ 禁止, $\pi^0 \pi^0$ 只能组成 0^+ , 1^- , 2^+ 态, 故角动量、宇称守恒不能同时满足:

$x_0 \rightarrow \pi^0 \pi^0$ 满足所有守恒律. 但测量上有困难. $\psi' \rightarrow \gamma x_0 \rightarrow \gamma \pi^0 \pi^0 \rightarrow \gamma \gamma \gamma \gamma \gamma$. 同时测量 5 个 γ , 又要测出各种不变质量分别满足上述条件, 目前还未测到 $x_0 \rightarrow \pi^0 \pi^0$ 事例.

$x_1 \rightarrow \gamma \gamma$ 禁戒, $x_0 \rightarrow \gamma \gamma$, 是电磁允许跃迁, 但因 x_0 有强衰变道, 故 $x_0 \rightarrow \gamma \gamma$ 很小.

$x_0, x_1 \rightarrow p \bar{p}$, 是允许衰变. 但相空间远比 $x_0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ 小, 相对衰变宽度也很小.

$x_0, x_1 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$, 禁戒, G 宇称不守恒;

$x_0, x_1 \rightarrow \pi^0 \psi$, 禁戒, C 宇称不守恒;

$x_0, x_1 \rightarrow D^0 \bar{K}^0$, 弱衰变, 衰变道很小;

$x_0 \rightarrow e^+ e^-$, 高阶效应电磁衰变, 很小;

$x_1 \rightarrow e^+ e^-$, 电磁衰变, C 宇称禁戒;

$x_0, x_1 \rightarrow \eta \psi$, 禁戒, 能量不守恒.

(v) 胶子的量子数为 $J^P = 1^-$, 是矢量胶子, 胶子系统的总波函数要求对称. 对两胶子系统只能组成 0^{++} 和 2^{++} ; 对三胶子系统可组成 1^{++} . 所以 x_0, x_2 由两胶子中间态强衰变, x_1 为三胶子中间态强衰变. 因为强相互作用衰变几率正比于 α_s^n , α_s 为强作用耦合常数. 在 J/ψ 能量时 $\alpha_s \approx 0.2$, n 为中间态胶子的个数, 粗略估计, x_1 的强衰变宽度要比 x_0, x_2 小 α_s 倍. QCD 理论给出 $\Gamma(x_0 \rightarrow \text{强子}) : \Gamma(x_2 \rightarrow \text{强子}) : \Gamma(x_1 \rightarrow \text{强子}) = 15 : 4 : 0.5$. (杨保忠)

目前发现了带有新量子数的粲粒子, D^+ 就是一个, 它是在 e^+e^- 对撞中, 在质心系能量为 4.03GeV 时产生的. 测量 $K^-\pi^+\pi^-$ 质量谱观察到在 $M_{K\pi\pi} = 1.87\text{GeV}$ 有一峰, 三体衰变 Dalitz 图显示近似均匀分布.

(a) 用最简单的夸克模型, 介子是由夸克和反夸克组成的束缚态, 说明 D^+ 不是原来的奇异粒子共振态(如 K^{*+}).

(b) $(K\pi\pi)$ 终态的 J^P 是什么?

(c) 从同样的实验中观测到 $K^-\pi^+$ 质量谱可知, 另一个 D^0 粒子质量, 很接近 D^+ 的质量, 试问 $K\pi$ 的 J^P 值是多少?

(d) 设两粒子是一同位旋多重态, 你认为上述衰变是什么相互作用?

(e) 若认为 $K^0 \rightarrow 2\pi$ 是典型的奇异数改变, 粲数守恒弱衰变. 估计 D^0 的寿命, 设分支比为:

$$\frac{B(D^0 \rightarrow K^-\pi^+)}{B(D^0 \rightarrow \text{所有道})} \approx 0.05,$$

$$\tau_{K^0} \approx 10^{-10} \text{ s}.$$

解: (a) 根据夸克模型, K 介子由 s 夸克和 u 夸克组成, 奇异介子均由 s 夸克与普通夸克组成, 弱衰变才能改变夸克味道. s 夸克变成 u 或 d 夸克, 这时奇异介子衰变成普通介子. 强或电磁作用不能改变夸克味道, 上述 $D^+ \rightarrow K\pi\pi$ 是弱衰变, 若 D^+ 中含 s 夸克, 这时衰变产物中不应有 K 介子, 故 D^+ 中不含 s 夸克, 必须有一种新夸克, 它在弱衰变中变成 s 夸克, 故在末态中有 K 介子.

(b) 据 Dalitz 图. $K\pi\pi$ 系统 $J=0$. 三粒子系统总角动

量为零。所以 D^+ 的自旋为零。设两 π 的相对角动量为 l ， K 相对于两 π 的轨道角动量为 l' ，又 K, π 粒子自旋为零，则 $J = l + l' = 0$ ， $l = -l'$ ，有 $|l| = |l'|$ ，故

$$p(K\pi\pi) = (-1)^{l+l'} p^2(\pi) p(K) = (-1)^3 = -1.$$

(c) 对 $K\pi$ 系统。

$$p(K\pi) = (-1)^l p(\pi) p(K) = (-1)^l, \text{ 即}$$

$$J^P = 0^+, 1^-, 2^+ \dots$$

若知 $J(D) = 0$ ，则 $l = 0$ ， $p(K\pi) = 0^+$ 。

(d) 若 D^+, D^0 为同位旋多重态，必然有相同的 J^P 值。但上述 $K\pi\pi$ 和 $K\pi$ 系统分别是奇宇称和偶宇称。只有弱衰变中宇称不守恒，才会出现上述现象。故上述衰变是弱相互作用。

(e) $D^0 \rightarrow K\pi$ 和 $K_S^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$ 都是改变夸克味道的衰变，且都是 $\Delta S = 1$ 玻允许衰变，可认为相互作用矩阵元是一样的，它们的寿命不同是相空间引起的，对两体衰变，忽略末态两粒子的质量差。

$$\Gamma(D_1^0 \rightarrow K^-\pi^+) = f_D^2 \cdot m_D \cdot m_K^2 \left(1 - \frac{m_K^2}{m_D^2}\right)^2$$

$$= f_D^2 \frac{m_K^2}{m_D^3} (m_D^2 - m_K^2)^2;$$

$$\Gamma(K_S^0 \rightarrow 2\pi) = f_K^2 m_K m_\pi^2 \left(1 - \frac{m_\pi^2}{m_K^2}\right)^2$$

$$= f_D^2 \cdot \frac{m_\pi^2}{m_K^3} (m_K^2 - m_\pi^2)^2.$$

式中： f_D 和 f_K 是与衰变有关的常数。又知 $K_S^0 \rightarrow 2\pi$ 的分支比近似 100%， $f_K \approx f_D$ 。

$$\frac{\tau_D}{\tau_K} = B(D \rightarrow K^- \pi^+) \left(\frac{f_K}{f_D} \right)^2 \frac{m_K^2 m_D^2 (m_K^2 - m_\pi^2)^2}{m_K^6 (m_D^2 - m_K^2)^2}$$

$$\tau_{D^0} = 0.05 \times 4.18 \times 4.9 \times 10^{-3} \times 10^{-10} \approx 10^{-13} \text{ (s)}.$$

目前实验测量值 $\tau_{D^0} \approx (4.4 \pm \begin{smallmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{smallmatrix}) \times 10^{-13} \text{ s}.$

(杨保忠)

3088 (Pri, 1977)

粒子物理近来的发展是发现带粲数, 没有奇异数的介子 (称为 D^+, D^0 和它们的反粒子), 其质量约为 $1870 \text{ MeV}/c^2$.

(a) 已知粲夸克是带 $\frac{2}{3}$ 电荷, 给出 D^+, D^0 的夸克组成?

(b) D 介子弱衰变为一般的介子 ($\pi, K \dots$). 给出下列衰变分支比的比值:

$$\frac{BR(D^0 \rightarrow K^+ K^-)}{BR(D^0 \rightarrow K^- \pi^+)}, \quad \frac{BR(D^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)}{BR(D^0 \rightarrow K^- \pi^+)},$$

$$\frac{BR(D^0 \rightarrow K^+ \pi^-)}{BR(D^0 \rightarrow K^- \pi^+)}.$$

(c) 怎样说明 D 介子是弱衰变.

(d) 当碰撞束质心能量为 4.03 GeV 时, 产生一个质量为 $1868.3 \text{ MeV}/c^2$ 的 D^+ 和质量为 $2008.6 \text{ MeV}/c^2$ 的 D^{*-} 介子. D^{*-} 介子衰变成 $D^0 (m = 1868.3 \text{ MeV}/c^2)$ 和一个 π^- . D^{*-} 在实验室的最大动量是多少? π^- 呢?

解: (a) D^+ 和 D^0 的夸克组成: $D^+ : c\bar{d}, D^0 : c\bar{u}.$

(b) D 介子的衰变, 实质是介子内夸克通过弱衰变改变夸克味道. D 介子的主要衰变方式由 c 夸克的衰变决定, 设 θ_c 为混合角 (图 3.26).

- ① $c \rightarrow s u \bar{d}$, 其幅值 $\approx \cos^2 \theta_c$.
- ② $c \rightarrow s u \bar{s}$, $\approx \cos \theta_c \sin \theta_c$.
- ③ $c \rightarrow d u \bar{d}$, $\approx -\sin \theta_c \cos \theta_c$.
- ④ $c \rightarrow d u \bar{s}$, $\approx -\sin^2 \theta_c$.

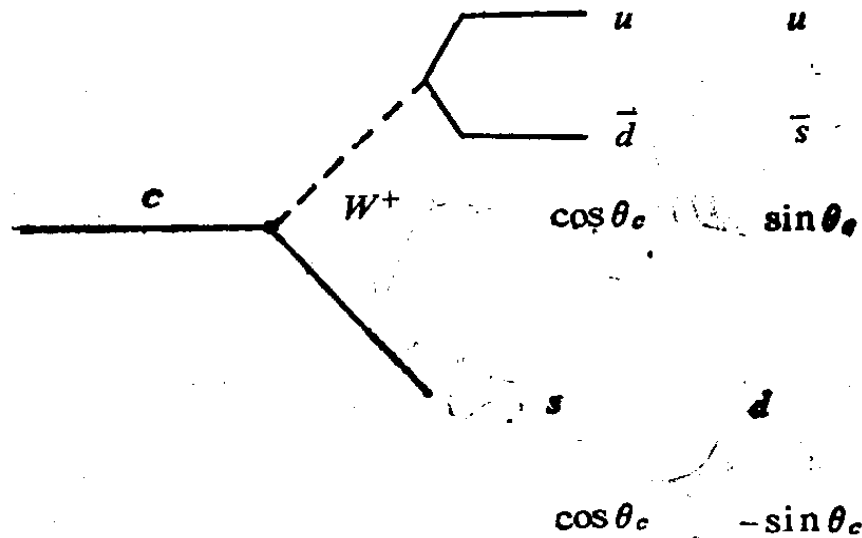


图3.26

$D^0 \rightarrow K^- + \pi^+$ 相当于模式① 是卡皮玻允许衰变.

$D^0 \rightarrow K^+ + K^-$ 相当于模式② 是一级卡皮玻禁戒衰变.

$D^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$, 相当于模式③, 也是一级卡皮玻禁戒衰变.

$D^0 \rightarrow K^+ \pi^-$, 相当于模式④, 是二级卡皮玻禁戒衰变.

式中 θ_c (卡皮玻混合角) 的实验值给出 $\text{tg}^2 \theta_c \approx 0.05$.

$$\frac{BR(D^0 \rightarrow K^+ K^-)}{BR(D^0 \rightarrow K^- \pi^+)} = \text{tg}^2 \theta_c \approx 0.05,$$

$$\frac{BR(D^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)}{BR(D^0 \rightarrow K^- \pi^+)} = \text{tg}^2 \theta_c \approx 0.05,$$

$$\frac{BR(D^0 \rightarrow K^+ \pi^-)}{BR(D^0 \rightarrow K^- \pi^+)} = \text{tg}^4 \theta_c \approx 2.5 \times 10^{-3}.$$

(c) 在 D^0 衰变中, 粲数 C 改变, 只有弱衰变才改变夸克的味道, 所以上述 D^0 的衰变均为弱作用衰变.

(d) 两束对撞, 故质心系和实验室系是一致的, 有:

$$E_{D^*} + \sqrt{p_D^2 + m_D^2} = 4.03, \quad p_{D^*} = p_D,$$

$$p_{D^*}^2 + m_D^2 = E_{D^*}^2 + 4.03^2 - 2 \times 4.03 \cdot E_{D^*},$$

$$E_{D^*} = \frac{4.03^2 + E_{D^*}^2 - m_D^2}{2 \times 4.03} = 2.08 \text{ GeV}, \quad p_{D^*} = 0.54 \text{ (GeV/c)}.$$

由此求出实验室系 D^* 粒子运动参数:

$$\beta = \frac{p}{E} = 0.26, \quad \gamma = \left(\frac{m}{E}\right)^{-1} = 1.04.$$

在 D^{*-} 静止的坐标系中, D^{*-} 衰变成 D^0 和 π^- 利用上面结果有:

$$E_{\pi}^* = \frac{m_{D^0}^2 + m_{\pi}^2 - m_{D^*}^2}{2m_{D^*}} = 0.145 \text{ (GeV)},$$

$$p_{\pi}^* = \sqrt{E_{\pi}^{*2} - m_{\pi}^2} \approx 37 \text{ (MeV/c)}.$$

在实验室系, 当 π 介子沿 D^* 运动方向时, 运动的最大动量是:

$$(P_{\pi})_{\max} = \gamma(P_{\pi}^* + \beta E_{\pi}^*)$$

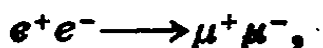
$$= 1.04(37 + 0.26 \times 145) \approx 78 \text{ (MeV/c)},$$

即 D^{*-} 的最大动量为 540 MeV/c , π^- 的最大动量 78 MeV/c .

(杨保忠)

3089 (Pri, 1980)

在 e^+e^- 对撞实验中, 一个窄共振在 $E_{\text{cm}} = 9.5 \text{ GeV}$ 时, 在两个反应中都观察到(它的宽度小于束流能量分散):



$e^+e^- \longrightarrow$ 强子.

测量这些反应的积分截面为

$$\int \sigma_{\mu\mu}(E) dE = 8.5 \times 10^{-33} \text{cm}^2 \cdot \text{MeV};$$

$$\int \sigma_h(E) dE = 3.3 \times 10^{-31} \text{cm}^2 \cdot \text{MeV}.$$

利用 Breit-Wigner 共振公式, 求共振态衰变到 $\mu\mu$ 和衰变到强子的部分宽度 $\Gamma_{\mu\mu}$ 和 Γ_h .

解: Breit-Wigner 公式为

$$\sigma_h(E) = \frac{(2J+1)\pi}{M^2} \frac{\Gamma_{ee} \Gamma_h}{(E-M)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}},$$

$$\sigma_{\mu\mu}(E) = \frac{(2J+1)\pi}{M^2} \frac{\Gamma_{\mu\mu} \Gamma_{ee}}{(E-M)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}.$$

M 和 J 为共振粒子的质量和自旋, Γ , Γ_{ee} 和 $\Gamma_{\mu\mu}$ 为共振粒子衰变总宽度, 衰变到电子和衰变到 μ 子的部分宽度.

$$\Gamma = \Gamma_{ee} + \Gamma_{\mu\mu} + \Gamma_{\tau\tau} + \Gamma_h.$$

由轻子相互作用普适性并不考虑空间, $\Gamma_{\mu\mu} = \Gamma_{\tau\tau} = \Gamma_{ee}$.

$$\Gamma = 3\Gamma_{\mu\mu} + \Gamma_h.$$

对 $M = 9.5 \text{GeV}$ 的共振态, $J = 1$. 有:

$$\begin{aligned} \int \sigma_{\mu\mu} dE &= \frac{3\Gamma_{\mu\mu}^2}{M^2} \int \frac{dE}{(E-M)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \\ &= \frac{6\pi^2 \Gamma_{\mu\mu}^2}{M^2 \Gamma} = 8.5 \times 10^{-33} \text{cm}^2 \cdot \text{MeV}; \end{aligned}$$

$$\int \sigma_h dE = \frac{3\Gamma_{\mu\mu}\Gamma_h\pi}{M^2} \int \frac{dE}{(E-M)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$$

$$= \frac{6\pi^2\Gamma_{\mu\mu}\Gamma_h}{M^2\Gamma} = 3.3 \times 10^{-31} \text{cm}^2 \cdot \text{MeV}.$$

两式相除得: $\Gamma_h = 38.8\Gamma_{\mu\mu}$,

$$\Gamma = \Gamma_h + 3\Gamma_{\mu\mu} = 41.8\Gamma_{\mu\mu}.$$

代入上式得:

$$\Gamma_{\mu\mu} = \frac{M^2}{6\pi^2} \frac{\Gamma}{\Gamma_h} \times 3.3 \times 10^{-31} \text{cm}^2 \cdot \text{MeV},$$

$$= 1.38 \times 10^{-8} (\text{MeV})$$

$$= 1.38 (\text{keV}), \left(1 \text{cm} = \frac{1}{0.198 \times 10^{-10}} \text{MeV}^{-1} \right).$$

$$\Gamma_h = 38.8\Gamma_{\mu\mu} = 53.5 (\text{keV}),$$

$$\Gamma = 41.8\Gamma_{\mu\mu} = 57.7 (\text{keV}).$$

(钱剑明)

3090 (Pri, 1979)

设自然界存在着重的, 自旋为1的夸克 Q^+ 和反夸克 Q^- . 非相对论的粲子素模型很好地描述了 J/ψ 家族, 用类似的模型预言中性 $Q\bar{Q}$ 共振态的谱, 画出它的几个最低能级, 标出其自旋宇称, 电荷共轭宇称, 并画出相应地电磁多极跃迁.

解: 目前流行的处理重夸克素的非相对论粲子素模型是给出强相互作用位势, 作为近似, 它是一种中心势, 故波函数角度部分即为球谐函数. 考虑夸克禁闭等, 一种较好的势

形式是所谓 Cornell 模型; $V(r) = -\frac{k}{r} + \frac{r}{a^2}$. 这种库仑势加

线性势的含意在于, 库仑势暗含渐近自由, 线性势包含夸克禁闭. 在考虑到自旋相关效应以后, 可利用数值计算方法求出能级秩序. 它们的量子数求法: $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$, $\mathbf{J} = \mathbf{S} + \mathbf{L}$.

宇称 P : $P(Q^+Q^-) = P(Q^+)P(Q^-) (-1)^l \approx (-1)^l$, 这里应用了自旋为 1 的玻色子, $P(\bar{Q}) = P(Q)$.

宇称 C : $P(Q^+Q^-) = (-1)^{l+s}$, $S_1 = S_2 = 1$.

			J^{PC}
$L = 0,$	$\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 = 0,$	n^1S_0	0^{++}
	$\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 = 1$	n^3S_1	1^{+-}
	$\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 = 2$	n^5S_2	2^{++}
$L = 1,$	$\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 = 0$	n^1P_1	1^{--}
	$\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 = 1$	n^3P_0	0^{-+}
		n^3P_1	1^{-+}
		n^3P_2	2^{-+}
	$\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 = 2$	n^5P_1	1^{--}
		n^5P_2	2^{--}
n^5P_3		3^{--}	

这里借用光谱符号, $n^{2s+1}S_J$ 态, $n^{2s+1}P_J$ 态, n 表示主量子数, $2s+1$ 表示自旋单态、三重态、五重态, J 表示总角动量, 它们的能级秩序如下图 3.27 所示.

这里各种 P 态的能级秩序和自旋相关项有关, 故给出的秩序只是一种可能性, 具体情况可以由详细的势计算给出. 但从上面的能级情况可看出, 它比自旋为 $\frac{1}{2}$ 的粲夸克及反夸克

组成的粲子素谱复杂, 多了 5S_2 和 5P_J 两组能谱. 根据电

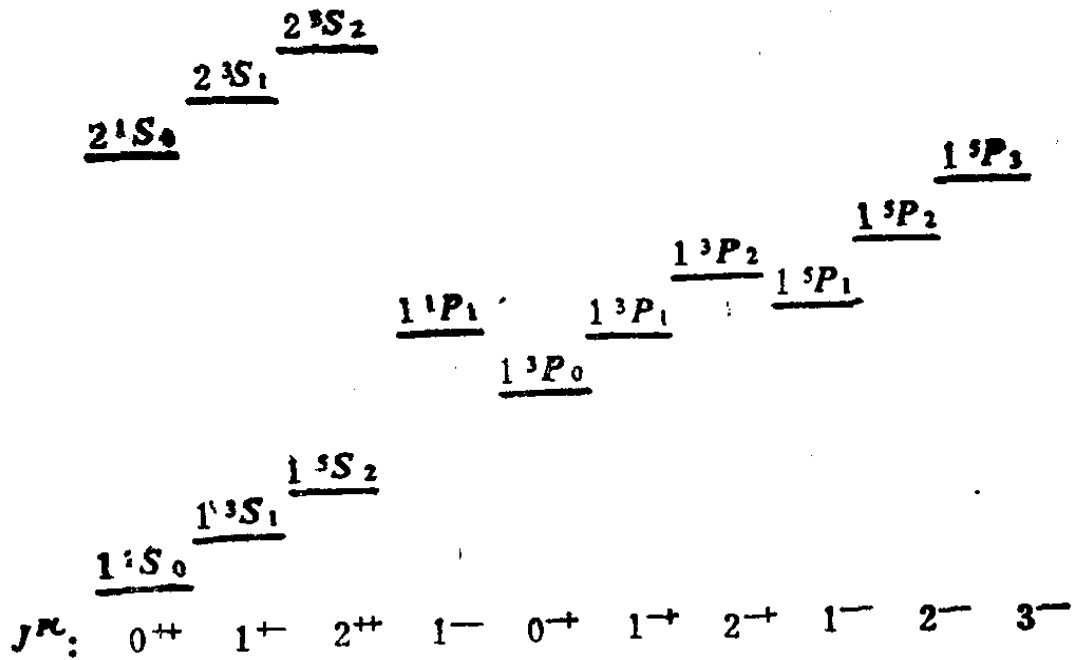


图3.27 $S=1$ 的 ($Q\bar{Q}$) 系统能级秩序 (只划出S和P态)

磁跃迁选择定则, 可得到表中的各类跃迁.

各能级之间的 γ 跃迁 (设能量是允许的)

能级传递	ΔJ	ΔP	ΔC	跃迁类型
$2^3S_1 \rightarrow 1^3P_J$	0,1	-1	-1	$E1$
$1^3P_J \rightarrow 1^3S_1$	0,1	-1	-1	$E1$
$2^5S_2 \rightarrow 2^3S_1 \rightarrow 2^1S_0$	1	1	-1	$M1(E2)$
$1^5S_2 \rightarrow 1^3S_1 \rightarrow 1^1S_0$	1	1	-1	$M1(E2)$
$2^5S_2 \rightarrow 1^3S_1$	1	1	-1	$M1(E2)$
$2^3S_1 \rightarrow 1^1S_1$	1	1	-1	$M2(E2)$
$2^5S_2 \rightarrow 1^5P_J$	0,1	-1	-1	$E1$
$1^5P_J \rightarrow 1^5S_2$	0,1	-1	-1	$E1$
$2^1S_0 \rightarrow 1^1P_1, 1^5P_1$	1	-1	-1	$E1$
$1^1P_1, 1^5P_1 \rightarrow 1^1S_0$	1	-1	-1	$E1$
$2^5S_2 \rightarrow 1^1P_1$	1	-1	-1	$E1$
$1^1P_1 \rightarrow 1^5S_2$	1	-1	-1	$E1$

这里P态之间的电磁跃迁未计入. 因它们之间的能级秩序不确定. $2^1S_0 \rightarrow 1^5P_{2,3}$ 之间的高阶跃迁也未列入 ($M2, E3$). 另外, $5S_2 \rightarrow 1S_0, 3S_1 \rightarrow 5P_2, 1P_1$ 等均为C宇称禁戒跃迁.

(黄晓舟)

第四篇 工具、实验方法及其它

§ 1 高速粒子运动学(4001—4061)

4001 (Ber, 1981)

正在 SLAC 研制的加速器能产生用于对撞的电子和正电子束。在实验室中粒子能量为 50GeV ，每束包含 10^{10} 个粒子，并且可当作在实验室中半径 $1\mu\text{m}$ ，长 2mm 的均匀带电圆柱。(a) 对于同粒子束一起运动的观察者，它的长度和半径是多少？(b) 对于实验室系观察者和随粒子运动的观察者，两束互相完全穿过各需多长时间？(c) 画图表示在实验室中测量两束重叠时半径与磁场强度的关系，当半径 $1\mu\text{m}$ 时，以高斯为单位， B 的值是多少？(d) 用冲量近似估计在实验室中束流表面电子在互相穿过时被偏转的角度。

解：(a)
$$\gamma = \frac{E}{m_0 c^2} = \frac{50 \times 10^9}{0.5 \times 10^9} = 1 \times 10^5.$$

对同粒子束一起运动的观察者，粒子束长度：

$$L_0 = \gamma L = 1 \times 10^5 \times 2 \times 10^{-3} = 200\text{m},$$

宽度

$$r_0 = r = 1\mu\text{m}.$$

迎面来的粒子速度

$$\beta' = \frac{2\beta}{1 + \beta^2},$$

迎面粒子束长度

$$L' = L_0 \sqrt{1 - \beta'^2}.$$

其中:

$$\beta' = \frac{2\beta}{1 + \beta^2},$$

$$\sqrt{1 - \beta'^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{2\beta^2}{1 + \beta^2}\right)^2} = \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2} = \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{r^2}\right)}{1 + \left(1 - \frac{1}{r^2}\right)} = \frac{1}{2r^2 - 1},$$

$$L' = \frac{L_0}{2r^2 - 1} = \frac{200}{2 \times (10^5)^2 - 1} = 1 \times 10^{-8} \text{ m} = 0.01 \mu\text{m}.$$

迎面粒子束宽度 $r' = r_0 = 1 \mu\text{m}$.

(b) 对实验室系观察者, 每个粒子的速度:

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{r^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{10^5}\right)^2} \approx 1.$$

互相穿过所需时间 $t = \frac{L}{v} = \frac{2 \times 10^{-8}}{1 \times 3 \times 10^8} = 6.67 \times 10^{-12} \text{ s}$

对同粒子一起运动的观察者, 迎面粒子速度

$$\beta' = \frac{2\beta}{1 + \beta^2} \approx \beta \approx 1.$$

互相穿过所需时间

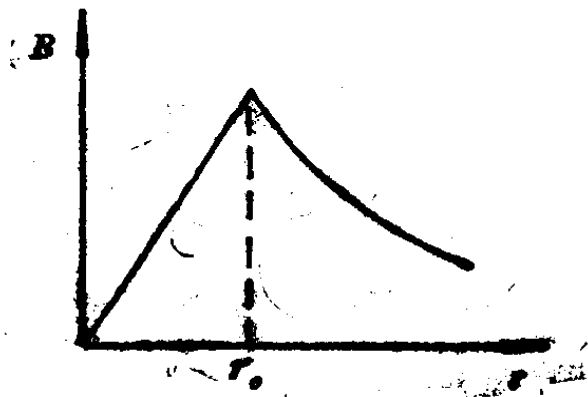


图 4.1

$$\begin{aligned} t' &= \frac{L_0 + L'}{v'} \\ &= \frac{200 + 1 \times 10^{-8}}{3 \times 10^8} \\ &= 6.67 \times 10^{-7} \text{ s} \end{aligned}$$

(c) 如图 4.1 所示, 当 r 小于粒子束半径时,

$$B = 2y \frac{r_0^2 L}{4eN} \beta r,$$

$r < r_0$, 当 r 大于粒子束半径时, $B = 2x \frac{4eN}{L} \cdot \beta \cdot \frac{1}{r}$, $r \geq r_0$;

α 因子是考虑两对撞系的贡献. 当 $r = r_0 = 1 \mu\text{m}$ 时,

$$B = \frac{4 \times 4.8 \times 10^{-10} \times 20^{20}}{2 \times 10^{-1}} \times 1 \times \frac{1}{10^{-4}} \approx 2 \times 10^5 \text{ (Gs)}.$$

(d) $F \cdot \Delta t = \Delta P = m_0 \gamma v_{\perp}$

$$F \cdot \Delta t = \frac{ev_0 B}{c} \Delta t, \quad v_{\perp} = \frac{ev_0 B \Delta t}{m_0 \gamma (c)},$$

$$\theta \approx \frac{v_{\perp}}{v_0} = \frac{eB \Delta t}{m_0 \gamma (c)} = \frac{4.8 \times 10^{-10} \times 2 \times 10^7 \times 6.67 \times 10^{-12}}{9.1 \times 10^{-28} \times 1 \times 10^5 \times 3 \times 10^{10}}$$

$$= 0.0022 \text{ rad} \approx 8'.$$

(胡平 范扬眉)

4002 (Ber, 1980)

在观察到的一个产生相对论介子的基本过程中, 发现介子在磁场 B 中的轨迹是 $(\rho B)_1 = 2.7$ 特斯拉·米的曲线. 经过介质损失了相当一部分能量后, $(\rho B)_2 = 0.34$ 特斯拉·米, 同时用飞行时间谱仪测得“慢”粒子的速度 $v_2 = 1.8 \times 10^8$ m/s. (a) 求介子的静止质量 (以电子质量为单位) 和减速前后的动能 (以 MeV 为单位) (2 位有效数字). (b) 如果“慢”粒子在飞行 4 米中有 50% 的几率发生衰变, 计算这种粒子在其静系中的固有半衰期, 及在能量减少以前, 粒子衰变 50% 时粒子在实验室中飞行的距离.

解: (a) “慢”粒子的运动参数为

$$\beta_2 = \frac{1.8 \times 10^8}{3 \times 10^8} = 0.6,$$

$$\gamma_2 = (1 - \beta_2^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{5}{4}.$$

由粒子在磁场中的轨迹，可求出粒子的动量：

$$p_2 = 0.3(B\rho)_2 = 0.3 \times 0.34 = 0.102 \text{ (GeV)}.$$

由相对论公式 $p = \beta\gamma m_0$ 可求出粒子质量：

$$m_0 = \frac{p_2}{\gamma_2 \beta_2} = \frac{0.102}{0.6 \times \frac{5}{4}} \approx 0.14 \text{ (GeV)}.$$

由 $(B\rho)_1$ 可求 p_1 ：

$$p_1 = 0.3(B\rho)_1 = 0.3 \times 2.7 = 0.81 \text{ (GeV)}.$$

“快”和“慢”粒子的动能 T_1 和 T_2 为

$$T_1 = \sqrt{p_1^2 + m_0^2} - m_0 \approx 680 \text{ (MeV)},$$

$$T_2 = \sqrt{p_2^2 + m_0^2} - m_0 \approx 33 \text{ (MeV)}.$$

(b) 求 τ_0 和 l_1 ：

$$\tau = \tau_0 \gamma.$$

$$\tau_0 = \frac{l}{\beta_2 \gamma_2 c \ln 2} = \frac{4}{0.6 \times \frac{5}{4} \times 3 \times 10^8} = 0.693$$

$$\approx 2.6 \times 10^{-8} \text{ (s)}.$$

“快”粒子的运动参数：

$$\beta_1 = \frac{p_1}{E_1} = \frac{0.81}{0.68 + 0.14} \approx 0.99,$$

$$\gamma_2 = \frac{T_1 + m_0}{m_0} = \frac{0.68 + 0.14}{0.14} \approx 5.9,$$

$$l_1 = \tau_0 \cdot \beta_1 \gamma_1 c \ln 2 = 2.6 \times 10^{-8} \times 0.693 \times 0.99 \times 5.9 \\ \times 3 \times 10^8 \approx 32 \text{ (m)}.$$

即粒子在未损失能量前衰减 50% 时，粒子在实验室中飞过的距离为 32 米。

(胡平)

4003 (Wis, 1972)

普林斯顿同步加速器(PPA)近来用于加速高度电离的氮离子。如果 PPA 能产生名义上总能量为 3GeV 的质子，带 6 个正电荷的 ^{14}N 离子的最大动能为多少？

解：被加速的粒子进入同步加速器后，由磁场 B 约束，受射频加速，所能达到的最大能量受磁量的最大值的限制。

$$B_m = \frac{p_m}{|q|\rho},$$

$$\frac{p_p}{p_N} = \frac{|q|_p}{|q|_N}, \quad p_N = 6p_p.$$

由质壳条件： $E_p^2 = p_p^2 + m_p^2$,

$$p_p^2 = (3^2 - 0.938^2) = 8.1 (\text{GeV})^2,$$

$$p_p \approx 2.85 \text{GeV}.$$

对 ^{14}N , $p_N = 6 \cdot p_p \cdot c = 17.1 \text{GeV}$,

$$\begin{aligned} T_N &= \sqrt{p_N^2 + m_N^2} - m_N = \sqrt{292.4 + 172.7} - 13.14 \\ &= 21.57 - 13.14 = 8.43 (\text{GeV}). \quad (\text{林 展}) \end{aligned}$$

4004 (Pri, 1978)

(a) μ 子的静止寿命为 10^{-6}s 。若它在高空大气中产生 (10^4m 以上), μ 子须具有多大能量才能到达地面? $m_\mu = 100 \text{MeV}$ 。

(b) 在零级近似下, 设地磁场伸延到 10^4m 以上高空, 地磁场数值为 1 高斯, 方向为地轴的方向, 一个具有能量为 E , 在赤道垂直入射的 μ 子, 受地磁场偏转有多大, 偏向什

么方向?

(c) 宇宙线中的高能质子可以通过和 3K 的背景辐射光子碰撞损失能量, 这个过程是 $p + \gamma \rightarrow p + \pi$, 若使该过程发生, 质子的阈能是多少?

解: (a) 设 μ 子的能量为 E , 且 $E = \gamma m$, $\tau_0 \gamma = \tau$,
 $l = \gamma \beta \tau_0 (c)$, 有:

$$E = \frac{em_0}{\beta \tau_0 (c)} \approx \frac{10^4 \times 0.1}{10^{-6} \times 3 \times 10^8} = 3.3 (\text{GeV}).$$

(b) 设 μ 子的能量很高, $p \approx E$,

$$p = 0.3B(T) R(\text{m}),$$

$$R = \frac{p}{0.3B} = \frac{1}{3} p \times 10^5$$

$$\approx \frac{1}{3} E \times 10^5.$$

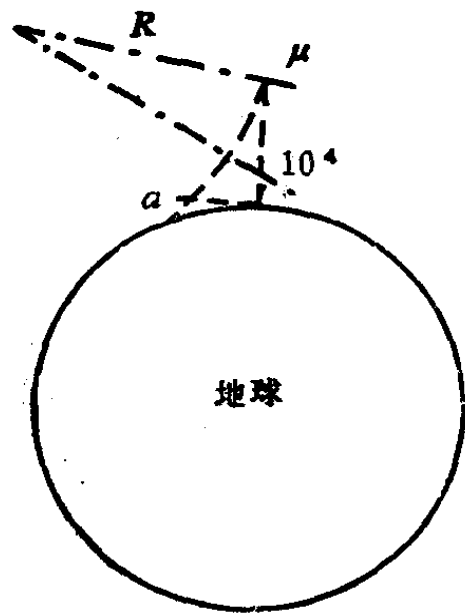


图 4-2

设粒子到达地面时偏离为 a ,
 从图 4.2 中可知:

$$\frac{a}{(a^2 + 10^8)^{1/2}} \approx \frac{\frac{1}{2} \left((a^2 + 10^8)^{1/2} \right)}{R}$$

$$a^2 + 10^8 = 2aR,$$

$$a^2 - 2aR + 10^8 = 0, \quad \text{则:}$$

$$a = R \pm \sqrt{R^2 - 10^8} = 3.3 \times 10^4 E - \sqrt{3.3^2 \times 10^8 E^2 - 10^8}$$

$$= 3.3E \times 10^4 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{3.3^2 E^2}} \right)$$

$$= 3.3E \times 10^4 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{11E^2}} \right)$$

$$\approx 3.3 \times 10^4 E \left(1 - 1 + \frac{1}{2 \times 11 \times E^2} \right)$$

$$= \frac{3.3 \times 10^4}{2 \times 11} \frac{1}{E} = 1.5 \times 10^3 \cdot \frac{1}{E} \text{ (m)}, \text{ (} E \text{ 为 GeV, } E^2 \gg 1 \text{).}$$

当 $E = 20 \text{ GeV}$ 时, $a = 75$ 米, μ^- 偏向西方, μ^+ 偏向东方.

(c) 光子的能量 $E_r = \frac{3}{2} kT$, $k = 8.6 \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1}$,

则:

$$E_r = 8.6 \times 10^{-5} \times \frac{3}{2} \times 3 = 3.87 \times 10^{-4} \text{ eV}.$$

反应式: $\gamma + p = p + \pi$.

阈能 E_p^{th} 为: p, r 对头撞时 (令 $c = 1$),

$$(E_p^{th} + E_r)^2 - (P_p^{th} - E_r)^2 \approx m_p^2 + 4E_p^{th} E_r = (m_p + m_\pi)^2,$$

所以 $E_p^{th} = \frac{(m_p + m_\pi)^2 - m_p^2}{4E_r} = \frac{m_\pi^2 + 2m_p m_\pi}{4E_r}$.

$$m_p = 0.938 \text{ GeV}, \quad m_\pi = 0.140 \text{ GeV},$$

$$E_r = 3.87 \times 10^{-4} \text{ eV} = 3.87 \times 10^{-13} \text{ (GeV)},$$

$$E_p^{th} = \frac{0.14^2 + 2 \times 0.938 \times 0.14}{4 \times 3.87 \times 10^{-13}} \approx 1.82 \times 10^{11} \text{ (GeV)}.$$

(杨保忠)

4005 (Col, 1982)

一个 μ 子的质量约为 $100 \text{ MeV}/c^2$, 它的静止寿命约为 $2 \mu\text{s}$. μ 子要有多少能量才能完成环绕地球的旅行? 假定地磁场足以保持它在轨道上. 实际上地磁场有这么强吗?

解: 要使 μ 子能环绕地球一周, 它的运动寿命至少应等

于所需的时间, 记 μ 子的静止寿命为 τ_0 , 则有:

$$\begin{cases} \tau_0 \gamma = \frac{2\pi R}{\beta}, \\ E_\mu = m_\mu \gamma. \end{cases} \quad (1)$$

$$E_\mu = m_\mu \gamma. \quad (2)$$

$$p_\mu = m_\mu \gamma \beta = \frac{2\pi R}{\tau_0} m_\mu, \text{ 其中 } R \text{ 为地球半径,}$$

$$E_\mu = m_\mu \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi R}{\tau_0}\right)^2} = 6.7 \times 10^0 \text{ (MeV).}$$

即 μ 子要完成绕地球一周, 需能量 $6.7 \times 10^0 \text{ MeV}$. 所需磁场的计算:

$$E_\mu \gg m_\mu, \quad E_\mu \approx p_\mu,$$

因 $p = 0.3B\rho$, $B(\text{kg})$, $\rho(\text{cm})$, $p(\text{MeV})$, 所以

$$B = \frac{p_\mu}{0.3\rho} = \frac{6.7 \times 10^0}{0.3 \times 6.4 \times 10^8} = 3.48 \times 10^{-2} \text{ (kg)}$$

$$\approx 35 \text{ (Gs)}.$$

地球表面的平均地磁强度约为零点几个高斯, 所以实际的地球磁场不能维持 μ 子环绕地球运动而将飞出地球. (周平)

4006 (Wis, 1981)

(a) 静止质量为 940 MeV , 半衰期为 13 分钟的中子, 距离地球 5000 光年, 这个中子须具有多大能量才能在第一个半衰期结束时到达地球? (b) 设静止的 π^+ 介子自发衰变 $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$, 现探测到 μ^+ 的动能为 40 MeV , μ^+ 的质量为 106 MeV , 中微子质量为零, 求 π^+ 的静止质量.

解: (a) 设中子能量为 E , 中子速度为 β , $\tau_{1/2}$ 为中子静止时的半衰期, 则要求中子在到达地球以前飞行时间为 $\tau_{1/2}\gamma$, 飞行距离:

$$\beta\gamma\tau_{1/2} = 5000,$$

$$\beta\gamma = 2.02 \times 10^8,$$

中子能量为

$$E = \sqrt{P^2 \times m^2} = m_0 \sqrt{\beta_2 r^2 + 1} = 1.9 \times 10^{11} (\text{MeV}).$$

$$(b) \pi^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu.$$

设 μ^+ 的动量为 p , 故 μ^- 的动量为 $-p$, 中微子的能量为 $E_\nu = p$, 由能量守恒得

$$p + E_\mu = m_\pi,$$

其中 μ 子的能量为

$$E_\mu = T_\mu + m_\mu = 110 \text{ MeV},$$

由 $p = \sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2}$ 得 π 介子的质量为

$$m_\pi = E_\mu + p = E_\mu + \sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2} = 139.4 (\text{MeV}).$$

(钱剑明)

4007 (Wis, 1977)

一对正负电子在云室中垂直于磁场的平面内产生曲率半径为 3 厘米的径迹(图4.3). 已知磁场强度为 0.11 特斯拉, 求产生正负电子对的 γ 射线能量.

解: 正负电子各自的动量大小为

$$p = 0.3B\rho,$$

其中 p 以 MeV 为单位, B 以 kg 为单位, ρ 以 cm 为单位.

$$p = 0.3B\rho = 0.3 \times 1.1 \times 3 = 0.99 (\text{MeV}).$$

正负电子各自的总能量为

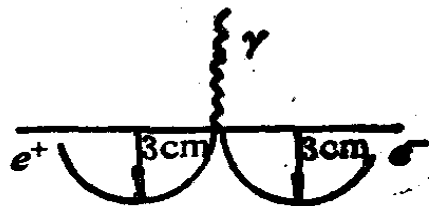


图 4.3

$$E = \sqrt{p^2 + m_e^2} = \sqrt{(0.99)^2 + (0.51)^2} = 1.1 \text{ (MeV)}.$$

所以，产生此正负电子对的 γ 射线能量近似为

$$E_\gamma = 2E = 2.2 \text{ (MeV)}. \quad (\text{钱剑明})$$

4008 (CCT, 1983)

新发现的介子， $\tau = 5 \times 10^{-13} \text{ s}$ ，以下列方式衰变： $D^0 \rightarrow K^+ \pi^-$ (质量 1.86 GeV)。它们是在泡室中产生，能量为 1.86 GeV 。要观察到 50% 以上的衰变，需要多高的分辨率？(a) 0.0011 mm ，(b) 0.44 mm ，(c) 2.2 mm 。

$$\text{解： } I = I_0 e^{-t/\tau}, \quad 0.5 = e^{-t/\tau}, \quad t = \tau \ln 2, \quad \tau = t_0 \gamma,$$

$$\gamma = \frac{E}{M} = 10, \quad \tau = 10\tau_0, \quad \beta \approx 1,$$

$$d = (c)t = (c)10\tau_0 \ln 2 = 0.1 \text{ cm} = 1 \text{ mm}.$$

分辨率要好于 d ，故答案为 (b)。 (唐子州)

4009 (CCT, 1983)

从分析谱仪出来的能量为 2 GeV 的准直 K 束，它飞行多远时， K 束流强衰减到原来的 10% 。设 $\tau_0 = 1.2 \times 10^{-8} \text{ s}$ 。(a) 0.66 km ，(b) 33 m ，(c) 8.3 m 。

$$\text{解： } I = I_0 e^{-t/\tau}, \quad \tau = \tau_0 \gamma, \quad E = m_K \gamma, \quad \text{则：}$$

$$\gamma = E/m_K = 2/0.493 \approx 4, \quad \tau = 4\tau_0 = 4.8 \times 10^{-8} \text{ s}.$$

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{3.88}{4} = 0.97.$$

$$I/I_0 = e^{-t/\tau} \text{ 故 } t = \tau \ln 10 = 4.8 \times 10^{-8} \times 2.3 = 1.1 \times 10^{-7} \text{ s}.$$

$$l = \beta(c)t = 3 \times 10^8 \times 0.97 \times 1.1 \times 10^{-7} \approx 32 \text{ (m)}. \quad \text{答案为 (b)}$$

(唐子州)

4010 (CCT, 1983)

质子的康普顿波长约为: (a) 10^{-6}cm , (b) 10^{-13}cm ,
(c) 10^{-24}cm .

$$\text{解: } \lambda = \frac{1}{m_p} = \frac{1}{938} (\text{MeV}^{-1}) \approx 0.21\text{fm},$$

$$\lambda = 2\pi\lambda = 1.3\text{fm} \approx 1\text{fm}.$$

$$\text{(或 } \lambda = \frac{\hbar}{m_p c} = \frac{c\hbar}{m_p c^2} \approx \frac{197\text{MeV}\cdot\text{fm}}{938} \approx 0.21\text{fm},$$

$$\lambda = 2\pi\lambda = 1.3\text{fm} \approx 10^{-13}\text{cm}.) \quad \text{(唐子州)}$$

4011 (CCT, 1983)

在两体弹性碰撞中: (a) 所有粒子轨道必须在质心系中同一平面上, (b) 参加反应的粒子螺旋性不变, (c) 角分布总是对称的.

解: 答案为(a). 动量守恒定律要求如此. (唐子州)

4012 (Col, 1976)

一个运动的质子和静止质子相撞, 产生一个静止质量为 M 的粒子加两个质子, 求入射质子的最小能量. 如果两质子以等速相反的方向相对撞, 相应的能量又是多少?

解: 反应式:



设运动的质子能量为 E_p , 动量为 p_p .

不变质量为

$$S = (E_p^{ih} + m_p)^2 - P_p^{ih^2} = 2m_p^2 + 2m_p E_p^{ih} = (2m_p + M)^2,$$

有

$$\begin{aligned} E_p^{ih} &= \frac{1}{2m_p} [(2m_p + M)^2 - 2m_p^2] \\ &= \frac{1}{2m_p} (2m_p^2 + 4m_p M + M^2) \\ &= m_p + 2M + \frac{M^2}{2m_p}. \end{aligned}$$

当两个等速运动的质子对头碰撞时，

$$S = (E_p^{ih} + E_p^{ih})^2 + (\mathbf{p}_p^1 + \mathbf{p}_p^2)^2 = (2E_p^{ih})^2 = (2m_p + M)^2,$$

$$E_p^{ih} = m_p + \frac{M}{2},$$

$$T^{ih} = E_p^{ih} - m_p = \frac{M}{2}. \quad (\text{周 平})$$

4013 (Buf, 1980)

一个静止质量为 m_0 ，动能为 $2m_0$ 的相对论粒子与一静止质量为 $2m_0$ 的粒子碰撞并与它粘合在一起。(a) 求复合粒子的静止质量，(b) 求复合粒子的速度。

解：(a) 设复合粒子的静止质量为 M ，速度为 β ，束流粒子的动能为 T ，动量为 p_m 。

$$S = (3m_0 + 2m_0)^2 - [(3m_0)^2 - m_0^2] = 25m_0^2 - 8m_0^2 = 17m_0^2,$$

复合粒子质量 $M = \sqrt{s} = \sqrt{17}m_0$ 。

(b). 复合粒子的动量，由动量守恒得：

$$p_M = p_{m_0} = \sqrt{(3m_0)^2 - m_0^2} = \sqrt{8} m_0,$$

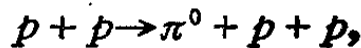
$$E_M = [p_M^2 + M^2]^{1/2} = \sqrt{17 + 8} m_0 = 5M_0.$$

$$M \text{ 的速度 } \beta = \frac{p_M}{E_M} = \frac{2}{5} \sqrt{2},$$

$$v = \beta(c) = 1.7 \times 10^{10} \text{ (cm/s)}. \quad \text{(唐子州)}$$

4014 (Wis, 1977)

一个质子轰击一个静止的质子产生反应:



求质子的阈能.

$$\text{解: } S = 2m_p^2 + 2m_p E_p^{i\hbar} = (2m_p + m_\pi)^2,$$

$$E_p^{i\hbar} = \frac{1}{2m_p} [(2m_p + m_\pi)^2 - 2m_p^2]$$

$$= \frac{1}{2m_p} (2m_p^2 + 4m_\pi m_p + m_\pi^2)$$

$$= m_p + 2m_\pi + \frac{m_\pi^2}{2m_p} \quad \left(\text{其中 } m_\pi = \frac{1}{7} m_p \right)$$

$$= m_p \left(1 + \frac{2}{7} + \frac{1}{98} \right) = \frac{127}{98} m_p$$

$$\approx \frac{9}{7} m_p.$$

$$\text{阈动能 } T_p^{i\hbar} \approx 2m_\pi.$$

(钱剑明)

4015 (Chi, 1979)

在 高能质子-质子碰撞中, 一个或二个质子可能“衍生”成一个质子和几个带电 π 介子的系统, 反应为

$$(1) \quad p + p \rightarrow p + (p + n\pi),$$

$$(2) \quad p + p \rightarrow (p + n\pi) + (p + m\pi).$$

这里 m, n 表示产生的 π 的数目.

在实验室坐标系中, 一个总能量为 E 的入射质子(炮弹)撞击一个静止的质子(靶). 求入射质子的能量. 它是:

(a) 反应 (1) 的最小能量, 反应中靶分解成一个质子和 4 个 π .

(b) 反应 (1) 的最小能量, 反应中炮弹分解成一个质子和 4 个 π .

(c) 反应 (1) 的最小能量, 反应中两个都分解成一个质子和 4 个 π .

解: 设炮弹和靶质子的能量—动量四维矢量分别为 $\mathbf{p}, (iE)$ 和 $(0, im_p)$

系统在质心系中总能量的平方(设为 s)由下式给出:

$$\begin{aligned} S &= -[(\mathbf{p}, E) + (0, m_p)]^2 \\ &= (E + m_p)^2 - |\mathbf{p}|^2 \\ &= E^2 + 2Em_p + m_p^2 - |\mathbf{p}|^2 \\ &= 2m_p^2 + 2Em_p. \end{aligned}$$

因为根据质壳关系 $E^2 = |\mathbf{p}|^2 + m_p^2$.

当所有反应产物在质心系中均为“静止”时, 所需的入射粒子能量最小(阈能).

(a) 这种情况下:

$$S = (2m_p + 4m_\pi)^2.$$

所以 $E_{\min} = m_p + 8m_\pi + 8\frac{m_\pi^2}{m_p} = 2.225\text{GeV}.$

(b) 实际上由于两个质子是全同的, 无法区别反应后是哪个质子分解. 所以 E_{\min} 同样也是 $2.225\text{GeV}.$

(c) 此时 $S = (2m_p + 8m_\pi)^2$

$$E_{\min} = m_p + 16m_\pi + 32 \frac{m_\pi^2}{m_p} = 3.847 \text{ GeV}. \quad (\text{林 辰})$$

4016 (CCT, 1983)

从加速器出来的质子与氢碰撞，产生反质子的最小能量是多少？(a) 6.6 GeV, (b) 3.3 GeV, (c) 2 GeV.

解：产生反质子的反应为

$$p + p \rightarrow \bar{p} + p + p + p,$$

$$(\sum E_i)^2 - (\sum P_i)^2 = (\sum E_i^*)^2,$$

$$(E_{i_h} + m_p)^2 - E_{i_h}^2 + m_p^2 = (4m_p)^2,$$

$$E_{i_h}^2 + m_p^2 + 2m_p E_{i_h} - E_{i_h}^2 + m_p^2 = 16m_p^2,$$

所以

$$E_{i_h} = 7m_p \approx 6.6 \text{ GeV}.$$

答案为(a).

(唐子州)

4017 (Wis, 1975)

γ 射线与静止电子相互作用产生正负电子对，求 γ 射线阈能。

解：由电子轻子数守恒，反应式为

$$\gamma + e^- \longrightarrow e^+ + e^- + e^-,$$

$$S = (E_\gamma + m_e)^2 - p_\gamma^2 = m_e^2 + 2m_e E_\gamma = (3m_e)^2,$$

$$E_\gamma = \frac{(3m_e)^2 - m_e^2}{2m_e} = 4m_e \approx 2.044 \text{ (MeV)}. \quad (\text{钱剑明})$$

4018 (Wis, 1975)

考虑一束 π 介子轰击质子靶，产生 K^- 的阈值是多少？

解: $\pi^- + p \rightarrow k^- + k^+ + n$, 设 π^- 能量为 $E_\pi^{i\hbar}$, 动量为 $p_\pi^{i\hbar}$, 根据四动量守恒和质能关系式:

$$\begin{aligned} S &= (E_\pi^{i\hbar} + m_p)^2 - p_\pi^{i\hbar 2} = (2m_k + m_n)^2 \\ &= m_p^2 + m_\pi^2 + 2m_p E_\pi^{i\hbar}, \end{aligned}$$

所以

$$E_\pi^{i\hbar} = \frac{(2m_k + m_n)^2 - m_p^2 - m_\pi^2}{2m_p} \approx 1.175 \text{ (GeV)}.$$

(胡 平)

4019 (Wis, 1973)

一个质量为 m 的粒子, 它的动能是静能的两倍, 与一个质量相等的静止粒子碰撞成为一个新粒子. 只用这些条件, 算出新粒子的静止质量.

解: 设产生的新粒子质量为 $M_{\text{新}}$, 由不变质量可求出:

$$\begin{aligned} S &= (E + m)^2 - p^2 = 2m^2 + 2mE \\ &= 2m^2 + 6m^2 = 8m^2 = M_{\text{新}}^2, \quad E = m + T = 3m, \end{aligned}$$

所以 $M_{\text{新}} = \sqrt{8} m = \sqrt{2} \cdot 2m = 2.83m$. (胡 平)

4020 (CCT, 1983)

1000 GeV 的质子打一个静止质子, 产生质量的自由能量是多少? (a) 41.3 GeV, (b) 1000 GeV, (c) 500 GeV.

解: 由洛伦兹不变量: $(\sum E_i)^2 - (\sum p_i)^2 = E^{*2}$,

$$(E_1 + m_2)^2 - p_1^2 = E^{*2},$$

$$E_1^2 + 2m_2 E_1 + m_2^2 - p_1^2 = E^{*2},$$

$$E^{*2} = 2m_2 E_1 - m_2^2 - m_1^2,$$

$$E \gg m_1, m_2, \text{ 所以 } E^* \approx \sqrt{2m_2 E_1} = \sqrt{2 \times 0.938 \times 1000} \\ = 41.3 (\text{GeV}).$$

答案为 (a).

(唐子州)

4021 (Wis, 1972, 1971)

CERN 的质子交叉储存环 (ISR) 实现能量为 30 GeV 的质子—质子对撞。一个质子加速器加速质子轰击静止质子，为了得到与 ISR 相同的质心系能量，这个加速器须把质子加速到多大能量？

解：对 pp 对撞和 p 打静止靶，有相同不变质量。设 m_p 为质子的质量，打静止靶时， p 的能量为 E_p ，对撞时两质子能量 $E_1 = E_2 = 30 \text{ GeV}$ 。则有：

$$S = (E_p + m_p)^2 - p_p^2 = 2m_p^2 + 2m_p E_p = (E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 \\ = (30 + 30)^2 = 60^2,$$

$$E_p = \frac{60^2 - 2m_p^2}{2m_p} \approx 1.92 \times 10^3 (\text{GeV}). \quad (\text{钱剑明})$$

4022 (Wis, 1971)

求 α 粒子被 ^{16}O 核散射 180° 后动能的相对变化。

解：设入射 α 粒子动能为 E ，动量为 p ，散射 α 粒子的动能为 E' ，动量为 p' ， m_α 为 α 粒子的质量，用非相对论近似有：

$$p = \sqrt{2m_\alpha E}, \quad p' = \sqrt{2m_\alpha E'}.$$

设 ^{16}O 的反冲动量为 p_0 ，由动量守恒知：

$$p_0 = p + p' = (\sqrt{2m_\alpha E} + \sqrt{2m_\alpha E'}).$$

由能量守恒得

$$E = E' + \frac{1}{2M} \left(\sqrt{2m_\alpha E} + \sqrt{2m_\alpha E'} \right)^2,$$

其中: M 为 ^{16}O 的质量, 以 $M \approx 4m_\alpha$ 代入上式得

$$E = E' + \frac{1}{4} \left(\sqrt{E} + \sqrt{E'} \right)^2 = \frac{5}{4} E' + \frac{1}{2} \sqrt{EE'} + \frac{1}{4} E,$$

解得 $E' = \frac{9}{25} E.$

α 粒子的相对动能变化为

$$\frac{E - E'}{E} = \frac{16}{25}. \quad (\text{钱剑明})$$

4023 (Chi, 1980)

一束动能为 T 的 π^+ 介子中产生一些反向运动的 μ^+ 介子。 μ 是反应: $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \gamma$ 的产物, 其中 $m_\pi = 139.57 \text{ MeV}$, $m_\mu = 105.66 \text{ MeV}$, $m_\gamma = 0.0 \text{ MeV}$, 求 T 的可能范围。

解: 如果在 π^+ 的质心系中 μ^+ 的速度大于 π^+ 在实验室系的速度, 就有可能在实验室系中观察到 μ^+ 往回运动。设 p_μ 为 μ^+ 在质心系中的动量, 有:

$$m_\pi = \sqrt{\bar{p}_\mu^2 + m_\mu^2} + \bar{p}_\gamma.$$

因为中微子在质心系中动量与 \bar{p}_μ 相同, 而中微子质量为零。

$$\bar{p}_\mu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi},$$

$$E_\mu = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi},$$

$$\bar{\beta}_\mu = \frac{\bar{p}_\mu}{E_\mu} = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2},$$

所以 β_π 的上限等于 $\bar{\beta}_\mu$,

$$E_\pi = \frac{m_\pi}{\sqrt{1 - \bar{\beta}_\mu^2}} = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\mu},$$

$$(T_\pi)_{\max} = E_\pi - m_\pi = \frac{(m_\pi - m_\mu)^2}{2m_\mu} = 5.44 \text{ MeV},$$

$$T_\pi < 5.44 \text{ MeV}. \quad (\text{林 展})$$

4024 (Wis, 1970)

下列过程是否可能, 说明理由. (a) 一个单光子撞击一个静止电子, 将其能量全部传递给电子; (b) 一个单光子转变成一对正负电子; (c) 一个快正电子与一个静止电子湮灭产生一个光子.

解: (a) 不可能. 设光子能量为 E_γ , e^- 的能量 E_e .
 $\gamma + e^- \rightarrow e^-$. 不变质量平方:

$$S = (E_\gamma + m_e)^2 - p_\gamma^2 = 2m_e E_\gamma + m_e^2 = E_e^2 - p_e^2 = m_e^2.$$

$$2E_\gamma m_e = 0, \text{ 因 } E_\gamma \neq 0, m_e \neq 0, \text{ 则反应不成立.}$$

(b) 不可能. 设 γ 能量为 E , 产生的正负电子能量分别为 E_1 和 E_2 . 由反应 $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$ 前后不变质量相等得到:

$$\begin{aligned} S &= E_\gamma^2 - p_\gamma^2 = 0 = (E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 \\ &= 2m_e^2 + 2(E_1 E_2 - p_1 p_2 \cos \theta). \end{aligned}$$

θ 为 \mathbf{p}_1 和 \mathbf{p}_2 之间的夹角. $m_e \neq 0$, $E_1 > p_1$, $E_2 > p_2$, 有:

$$2m_e^2 + 2(E_1 E_2 - p_1 p_2 \cos \theta) > 0, \text{ 故反应不成立.}$$

(c) 不可能, 证明方法同 (b). (钱剑明)

4025 (Col, 1981)

(a) 证明电子-正电子对不能由一个孤立光子产生——即对产生只能在一个粒子的附近。(b) 设这个粒子是一个铅原子核, 从数量上证明在估算对产生阈值能量时, 忽略反冲核的动能是合理的。

解: (a) 见题4024.

(b) 当有核参加时, 核参与能量动量守恒. 当忽略核的反冲能时, 有:

$$E_{\gamma}^{+h} = 2m_0 = 1.022(\text{MeV}).$$

由动量守恒可知核的动量 (Pb 核) 是:

$$p_{\text{pb}} = p_{\gamma}^{+h} = E_{\gamma}^{+h}, \text{ 因 } E_{\gamma}^{+h} \ll m_{\text{pb}},$$

所以:
$$T_{\text{pb}} = \frac{P_{\text{pb}}^2}{2m_{\text{pb}}} = \frac{E_{\gamma}^{+h^2}}{2m_{\text{pb}}} = \frac{E_{\gamma}^{+h}}{2m_{\text{pb}}} \cdot E_{\gamma}^{+h}$$

已知 Pb 的质量 $m_{\text{pb}} \approx 200m_p \approx 1.88 \times 10^5(\text{MeV})$, 故

$$T_{\text{pb}} \approx \frac{1.022}{2 \times 1.88 \times 10^5} E_{\gamma}^{+h} \approx 2.7 \times 10^{-6} E_{\gamma}^{+h}.$$

由此看出, 忽略铅核的动能是合理的。

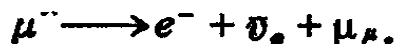
(周平)

4026 (Wis, 1976)

(a) 写出 μ^- 粒子的衰变方程, 说明涉及到的所有粒子。

(b) 一个静止 μ^- 粒子发生衰变, 从 μ^- 衰变中产生的一个轻子能使静止质子转变成中子吗? 如果能, 说明原因, 特别是从能量角度说明。

解: (a) μ^- 粒子的衰变方程为



e^- 为电子, $\bar{\nu}_e$ 为反电子中微子, ν_μ 为 μ 子中微子.

(b) 显然 μ^- 衰变产生的电子及反电子中微子只要能量达到或超过阈能的话, 可以使静止的质子转变成中子, 其反应为

$$e^- + p \longrightarrow n + \nu_e, \quad (1)$$

$$\bar{\nu}_e + p \longrightarrow e^+ + n. \quad (2)$$

式(1)的反应阈能为 $E_1 \approx m_n - m_p - m_e \approx 0.8 \text{ (MeV)}$, 而(2)式反应的阈能为: $E_2 \approx m_n - m_p + m_e \approx 1.8 \text{ (MeV)}$.

由于 μ^- 衰变有较大能量放出, ν_μ 获得的最大能量大约为 $m_\mu/2 \approx 53 \text{ MeV}$. 此时 e^- 和 $\bar{\nu}_e$ 两粒子总能量为最小, 约为 53 MeV . 由此至少有一个轻子 (e^- 或 $\bar{\nu}_e$) 能量超过阈能. 因此, 从 μ^- 衰变中产生的一个轻子能使质子转变成中子.

(钱剑明)

4027 (Col, 1985)

用两台加速器通过过程 $e^- + e^+ \rightarrow Z^0$ 产生中性中间矢量玻色子 Z^0 . Z^0 的质量是: $M_{Z^0} = 92 \text{ GeV}/c^2$. (a) 求对撞情形时电子束的最小能量. 下面假定用 e^+ 束去碰撞静止的 e^- . (b) e^+ 的能量需多少? (c) 在实验室中产生的 Z^0 的能量和速度多大. (d) 若 Z^0 立即衰变 $Z^0 \rightarrow \mu^+ + \mu^-$, 求实验室系中 μ^- 子的最大能量.

解: (a) 在 $e^+ e^-$ 对撞机中, 质量中心系与实验室系重合, 故电子 (e^+ , e^-) 束阈动能 $= MZ^0/2 = 46 \text{ GeV}$.

(b) 由不变质量的条件:

$$(E_e^+ + m_e)^2 - p_e^2 = 2m_e^2 + 2m_e E_e^+ \geq m_{Z^0}^2,$$

知:
$$E_e^+ \approx \frac{m_{Z^0}^2 - 2m_e^2}{2m_e} \approx \frac{m_{Z^0}^2}{2m_e}$$

$$= 8.30 \times 10^6 \text{ GeV.}$$

(c) 质量中心系的运动速度为 β , 则:

$$\beta = \frac{p_{e^+}}{E_{e^+} + m_e} \approx 1 - \frac{m_e}{E_{e^+}} + O\left(\frac{m_e^2}{E_{e^+}^2}\right),$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \sqrt{\frac{E_{e^+}}{2m_e}} = \frac{m_{z^0}}{m_e}.$$

故 Z^0 的速度与光速仅差 6×10^{-11} (相对比例), 而 Z^0 能量等于 $m_{z^0} \cdot \gamma = \frac{m_{z^0}^2}{2m_e} = E_{e^+}^{th}$.

(d) 在 Z^0 随动系中看, μ 子的衰变几率是各向同性分布的, 而在实验室系中, 最大能量的 μ 子必然是沿着 z^0 运动方向飞行的.

在 Z^0 系中, μ 子: $\gamma_\mu = \frac{E_\mu}{m_\mu} = \frac{m_{z^0}}{2m_\mu}$, 在实验室系看:

$$\gamma_{z^0} = \frac{m_{z^0}}{2m_e},$$

由公式: $\gamma^{LAB} = \gamma_\mu \gamma_{z^0} (1 + \beta_\mu \cdot \beta_{z^0}) \approx 2\gamma_\mu \gamma_{z^0}$

知: $E_\mu^{LAB} = m_\mu \gamma^{LAB} = \frac{m_{z^0}^2}{2m_e} = E_{e^+}^{th}$.

从物理观点看, 因 Z^0 运动速度接近光速 (极相对论) 而放出的 μ 粒子静质量相比于动能非常小, 故朝前发射的 μ 子静质量视为 0, 类似于光子, 它将带走 Z^0 的全部能量和动量.

(王力军)

4028 (MIT, 1982)

下面的基本粒子反应可以在实验室中静止的质子靶上产生: $K^- + p \rightarrow \pi^0 + \Lambda^0$, 求 K^- 入射能量的一个特殊值, 使得

产生的 Λ^0 在实验室中静止. 答案应用静止质量 M_π , M_{Λ^0} , M_p , M_{Λ^0} 表示.

解: 在实验室系中, 反应前后能、动量守恒, 所以

$$\begin{cases} E_k + E_p = E_{\pi^+} + E_{\Lambda^0}, \\ \mathbf{p}_k + \mathbf{p}_p = \mathbf{p}_{\pi^+} + \mathbf{p}_{\Lambda^0}. \end{cases}$$

因 p 和 Λ^0 均静止, 故上两式可化为

$$\begin{cases} E_k + M_p = E_{\pi^+} + M_{\Lambda^0}, & (1) \\ \mathbf{p}_k = \mathbf{p}_{\pi^+}. & (2) \end{cases}$$

由质能关系有:
$$\begin{cases} E_{\pi^+}^2 = p_{\pi^+}^2 + M_{\pi^+}^2, & (3) \\ E_k^2 = p_k^2 + M_k^2. & (4) \end{cases}$$

由(2), (3)消去 p_{π^+} 得:
$$E_{\pi^+}^2 = p_k^2 + M_{\pi^+}^2,$$

再与(4)消去 p_k^2 得:
$$E_{\pi^+}^2 = E_k^2 - M_k^2 + M_{\pi^+}^2, \quad (5)$$

由(1), (5)消去 E_{π^+} 得:

$$E_k + M_p = \sqrt{E_k^2 - M_k^2 + M_{\pi^+}^2} + M_{\Lambda^0}.$$

最后解得:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{M_{\pi^+}^2 - M_k^2 - (M_p - M_{\Lambda^0})^2}{2(M_p - M_{\Lambda^0})} \\ &= \frac{(M_{\Lambda^0} - M_p)^2 + M_k^2 - M_{\pi^+}^2}{2(M_{\Lambda^0} - M_p)}. \quad (\text{吴欣}) \end{aligned}$$

4029 (CUS, 1980)

K^+ 介子能通过下列光生反应产生:



(a) 给出在实验室系(质子静止系)此反应能够发生时光子的最小能量. ($M_{K^+} = 494 \text{ MeV}/c^2$, $M_{\Lambda^0} = 1116 \text{ MeV}/c^2$).

(b) 如果靶质子不是自由的, 而是束缚在核内, 则质子

在核中的运动(费米运动)使得 (a) 中的反应能在较低的人射光子能量下发生. 请假定一个合理的费米运动能量值, 并计算最小光子能量.

(c) 在运动的 Λ^0 衰变为质子和一个 π^- 介子 ($M_{\pi^-} = 140 \text{ MeV}/c^2$). 假如 Λ^0 具有初速 $0.8c$, 计算: (i) 实验室系中 π^- 所能达到的最大动量, (ii) 实验室系垂直于 Λ^0 运动方向的最大动量分量.

解: (a) 我们用与表示粒子相同的字母来表示其四动量, 有:

$$S = - (p_\gamma + p_p)^2 = m_p^2 + 2m_p E_\gamma^{iA} = (m_p + m_{\Lambda^0})^2,$$

或

$$E_\gamma^{iA} = \frac{(m_p + m_{\Lambda^0})^2 - m_p^2}{2m_p}$$

$$= 913 \text{ MeV}.$$

(b) 我们假定质子以费米动量 $p_F = 200 \text{ MeV}$ 向光子运动, 则:

$$S = - (p_\gamma + p_p)^2 = m_p^2 + 2E_\gamma (m_p + p_F),$$

于是
$$E_\gamma = E_\gamma(p_F = 0) \cdot \frac{m_p}{m_p + p_F} = 750 \text{ (MeV)}.$$

(c) 在 Λ^0 静止的参考系,

$$m_{\Lambda^0} = \sqrt{p^{*2} + m_p^2} + \sqrt{p^{*2} + m_\pi^2},$$

或

$$(m_{\Lambda^0} - E_\pi^*)^2 = E_\pi^{*2} + m_p^2 - 2m_{\Lambda^0} E_\pi^*.$$

亦即

$$E_\pi^* = (m_{\Lambda^0}^2 + m_p^2 - m_\pi^2) / 2m_{\Lambda^0} = 173 \text{ MeV},$$

$$p_{\pi} = \sqrt{E_{\pi}^{*2} - m_{\pi}^2} = 101 \text{ (MeV)},$$

$$(p_{\perp}^{\text{max}})_{\text{lab}} = p_{\pi}^*,$$

$$(p_{\parallel}^{\text{max}})_{\text{lab}} = \gamma_{\Delta} \cdot (p_{\pi}^* + \beta_{\Delta}^* E_{\pi}^*)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{0.36}} (101 + 0.8 \times 173)$$

$$= 399 \text{ (MeV)}. \quad (\text{杨永安})$$

4030 (Col, 1985)

ρ^- 介子是质量 769 MeV, 宽度 154 MeV 的介子共振态.

实验上可用 π^- 介子打击氢靶得到: $\pi^- \rho \rightarrow \rho^0 n$.

(a) 5 GeV 的 ρ^0 的寿命和平均衰变距离是多少?

(b) 为得到 ρ^0 , π^- 的阈能是多少?

(c) 若产生反应的截面 $1 \text{ mb} = 10^{-27} \text{ cm}^2$, 液体氢靶 30 cm 长, 平均每个人射 π^- 可能产生多少 ρ ? (液氢密度 0.07 克/立方厘米).

(d) ρ^0 几乎立刻衰变成 $\pi^+ + \pi^-$. ρ^0 能量 5 GeV, 朝前产生, 求实验室系中 π^+ 和 π^- 之间最小夹角.

$$\text{解: (a) } \gamma = \frac{E_{\rho}}{m_{\rho}} = \frac{5}{0.769} \approx 6.50 \quad \tau = \frac{\hbar}{\Gamma} = \frac{6.58 \times 10^{-22}}{154}$$

$$= 4.2 \times 10^{-24} \text{ (s)}.$$

在实验室中衰变的寿命为

$$\tau = \gamma \tau_0 = 3.7 \times 10^{-23} \text{ (s)},$$

$$l = \tau \beta c = \tau_0 \gamma \beta c = \tau_0 c \sqrt{\gamma^2 - 1}$$

$$= 4.2 \times 10^{-24} \times 3 \times 10^{10} \sqrt{6.50^2 - 1}$$

$$\approx 8.1 \text{ (fm)}.$$

$$(b) S = (E_{\pi^+}^{*+} + m_{\rho})^2 - p_{\pi^+}^2 = m_{\rho}^2 + m_{\pi}^2 + 2m_{\rho}E_{\pi} = (m_{\rho} + m_{\pi})^2,$$

所以

$$E_{\pi^+}^{*+} = \frac{1}{2m_{\rho}} [(m_{\rho} + m_{\pi})^2 - m_{\pi}^2 - m_{\rho}^2]$$

$$= \frac{1}{2 \times 938} [769 + 940)^2 - 140^2 - 938^2]$$

$$= 1077 (\text{MeV}).$$

(c) 每入射一个 π^- 产生 ρ 的事例数:

$$N = \rho l \sigma N_0 / A$$

$$= 0.07 \times 30 \times 10^{-27} \times 6.023 \times 10^{23}$$

$$= 1.3 \times 10^{-18}, \quad (N_0 = 6.023 \times 10^{23}, A = 1).$$

(d) 在 ρ^0 静止的坐标系中:

$$p_{\pi^+}^* = p_{\pi^-}^* = p^*, \quad E_{\pi^+}^* = E_{\pi^-}^* = E^*,$$

所以 π^+ 或 π^- 的速度: $\beta^* = \frac{p^*}{E^*},$

$$E^* = \frac{1}{2} m_{\rho} = 384.5 (\text{MeV}).$$

$$p^* = \sqrt{E^{*2} - m_{\pi}^2} = \frac{1}{2} \sqrt{m_{\rho}^2 - 4m_{\pi}^2}$$

$$= 358 (\text{MeV}),$$

$$\beta^* = \frac{p^*}{E^*} \approx 0.93.$$

5 GeV 的 ρ^0 运动速度:

$$\beta_{\rho} = \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)^{1/2} = 0.99.$$

$$\beta_{\rho} > \beta_{\pi}.$$

所以这时, 所有衰变粒子在实验室中都是向前的, 当 π^+ 和

π^- 沿原来 ρ^0 运动方向衰变时, 这时两 π 的夹角最小 $\theta = 0^\circ$.
(王力军)

4031 (Col, 1978)

(a) Ω^- 是由 $K^- + p \rightarrow \Omega^- + K^+ + K^0$ 反应发现的. 如果质子静止, 用各个粒子的静止质量表示, 问产生 Ω^- 的阈能是多少?

(b) 若 K^0 以 $0.8c$ 的速度飞行中衰变成两 π , 计算 π 与 K 介子在实验室系的最大夹角. 请用 π 和 K 的质量表示答案.

解: (a) 由不变质量公式:

$$S = (E_k^{*k} + m_p)^2 - p_k^{*k2} = m_k^2 + m_p^2 + 2m_p E_k^{*k} = (m_\Omega + 2m_k)^2,$$

$$E_k^{*k} = \frac{1}{2m_p} [(m_\Omega + 2m_k)^2 - m_p^2 - m_k^2].$$

(b) K^0 的质心相对于实验室系的运动速度, $\beta = 0.8$, 在 K^0 的质心系中, 求 π 的速度.

$$E_\pi^* = \frac{m_k}{2}, \quad p_\pi^* = \frac{1}{2} \sqrt{m_k^2 - 4m_\pi^2},$$

$$\beta_\pi^* = \frac{p_\pi^*}{E_\pi^*} = \sqrt{1 - \left(\frac{2m_\pi}{m_k}\right)^2} \approx 0.82.$$

在实验室系中:

$$p_\pi \cos \theta = \gamma (p_\pi^* \cos \theta^* + \beta E_\pi^*) = \gamma p_\pi^* \left(\cos \theta^* + \beta \frac{E_\pi^*}{p_\pi^*} \right)$$

$$= \gamma p_\pi^* \left(\cos \theta^* + \frac{\beta}{\beta_\pi^*} \right),$$

$$p_\pi \sin \theta = p_\pi^* \sin \theta^*,$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta^*}{\gamma \left(\cos \theta^* + \frac{\beta}{\beta_x^*} \right)}$$

$$\text{令 } \frac{d(\operatorname{tg} \theta)}{d\theta^*} = 0, \quad \frac{1 + \frac{\beta}{\beta_x^*} \cos \theta^*}{\gamma \left(\cos \theta^* + \frac{\beta}{\beta_x^*} \right)^2} = 0,$$

$$\text{有 } \cos \theta^* = -\frac{\beta_x^*}{\beta}.$$

分三种情况讨论:

$$(1) \quad \beta_x^* < \beta, \quad (\operatorname{tg} \theta)_{\max} = \frac{\sqrt{1 - (\beta_x^*/\beta)^2}}{\gamma \left(\frac{\beta_x^*}{\beta} + \frac{\beta}{\beta_x^*} \right)}$$

$$= \frac{1}{\gamma \sqrt{\left(\frac{\beta}{\beta_x^*} \right)^2 - 1}},$$

$$\theta_{\max} = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\gamma \sqrt{\left(\frac{\beta}{\beta_x^*} \right)^2 - 1}} \right).$$

$$(2) \quad \beta_x^* = \beta, \quad P_x \cos \theta \geq 0, \quad \text{所以 } \theta_{\max} \Rightarrow \frac{\pi}{2}, \quad \text{当 } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ 时,}$$

一个粒子向前, 一个粒子静止.

$$(3) \quad \beta_x^* > \beta, \quad \text{有 } |\cos \theta^*| > 0, \quad \text{故 } \cos \theta^* = -\frac{\beta_x^*}{\beta} \text{ 不成立.}$$

$$\text{当 } \theta^* \rightarrow \pi \text{ 时, } \operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta^*}{\gamma \left(\cos \theta^* + \frac{\beta}{\beta_x^*} \right)} \rightarrow -0, \quad \theta \rightarrow \pi,$$

即 $\theta_{\max} = \pi$.

这时一个粒子沿 K^0 的相反方向飞出 (在实验室系)。该题：
 $\beta = 0.8$, $\beta_* = 0.82$, $\beta_* > \beta$, 属于第(3)种情况, 即 $\theta_{\max} = \pi$ 。
 (杨永安)

4032 (CUS, 1983)

反应 $p + p \rightarrow \pi^+ + D$ 是高能物理研究早期的一个重要反应。在此反应中, 来自加速器的高能质子打在静止的质子上而产生 π^+ 介子和氘核。

(a) 计算实验室系入射质子的阈动能 T^* 。即 T^* 为实验室系能使反应发生的最小动能。以质子质量 m_p , π^+ 介子质量 m_π 和氘核质量 m_D 表示 T^* 。令 $m_p = 938 \text{ MeV}/c^2$, $m_D = 1874 \text{ MeV}/c^2$, $m_\pi = 140 \text{ MeV}/c^2$, 估计 T^* 值。

(b) 假定反应在质心系中是各向同性的, 即在立体角元 $d\Omega = d\phi^* \cdot d(\cos\theta^*)$ 中产生一个 π^+ 的几率为常数, 不依赖于角度。试找出实验室系每单位立体角产生 π^+ 的归一化几率。以 $\cos\theta_{lab}$, 质心速度 βc , π^+ 在实验室系的速度 βc , 以及在质心系的动量 p^* 表示。

(c) 在象 $p + p = \pi^+ + D$ 那样的二体吸热反应中, 可以发生这样的情况, 即一种反应产生在实验室系单位立体角的几率在 $\theta \neq 0$ 的某角度是奇异的。这与 (b) 中得到的结果有何联系? 请作简单评论, 不需导出所有有关的运动学问题。

解: (a) 设入射质子阈能为

$$E^* = T^* + m_p,$$

则由能—动量方程, 有:

$$(E^* + m_p)^2 - p^2 = (m_\pi + m_D)^2,$$

式中: p 为入射质子动量。

由 $E^{*2} = p^2 + m_p^2$ 可化为

$$2m_p^2 + 2m_p E^* = (m_\pi + m_D)^2,$$

于是
$$E^* = \frac{(m_\pi + m_D)^2 - 2m_p^2}{2m_p},$$

所以
$$\begin{aligned} T^* &= E^* - m_p \\ &= \frac{(m_\pi + m_D)^2 - 2m_p^2}{2m_p} - m_p \\ &= \frac{(140 + 1874)^2 - 2 \times (938)^2}{2 \times 938} - 938 \\ &\approx 286.1 \text{ (MeV)}. \end{aligned}$$

(b) 令 $\frac{dp}{d\Omega^*}$, $\frac{dp}{d\Omega}$ 分别表示在质心系和实验室系每单位

立体角的归一化几率。由题得知：

$$\frac{dp}{d\Omega^*} = \frac{1}{4\pi},$$

于是
$$\frac{dp}{d\Omega} = \frac{dp}{d\Omega^*} \frac{d\Omega^*}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi} \frac{d\cos\theta^*}{d\cos\theta}.$$

将洛仑兹变换用于动量的平行分量 $p_{//}$, 垂直分量 p_{\perp} , 以及能量 E , 有:

$$\begin{aligned} p_{\perp}^* &= p_{\perp}, \\ p_{//}^* &= \bar{\gamma}(p_{//} - \bar{\beta}E), \\ E^* &= \bar{\gamma}(E - \bar{\beta}p_{//}). \end{aligned}$$

式中: $\bar{\beta}$ 、 $\bar{\gamma}$ 为质心运动的相应量。

由 $p_{//} = p \cos\theta$, $p_{\perp} = p \sin\theta$, $p_{//}^* = p^* \cos\theta^*$, $p = p^* \sin\theta^*$. 得

$$p^* \sin\theta^* = p \sin\theta, \quad (1)$$

$$p^* \cos\theta^* = \bar{\gamma}(p \cos\theta - \bar{\beta}E), \quad (2)$$

$$E^* = \bar{\gamma}(E - \bar{\beta}p \cos\theta). \quad (3)$$

将(2)式对 $\cos \theta$ 取微分并注意到 p' , E' 与 θ 无关, 得:

$$\begin{aligned} p^* \frac{d \cos \theta^*}{d \cos \theta} &= \bar{\gamma} \left(p + \cos \theta \frac{dp}{d \cos \theta} - \bar{\beta} \frac{dE}{d \cos \theta} \right) \\ &= \bar{\gamma} \left(p + \cos \theta \frac{dp}{d \cos \theta} - \bar{\beta} \frac{dE}{dP} \frac{dP}{d \cos \theta} \right). \end{aligned}$$

由
$$\frac{dE}{dP} = \frac{d}{dp} \sqrt{p^2 + m^2} = \frac{p}{E} = \beta,$$

得
$$p^* \frac{d \cos \theta^*}{d \cos \theta} = \bar{\gamma} \left(p + \cos \theta \frac{dp}{d \cos \theta} - \bar{\beta} \beta \frac{dp}{d \cos \theta} \right).$$

将(3)式对 $\cos \theta$ 微分: (4)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dE}{d \cos \theta} - \bar{\beta} p - \bar{\beta} \cos \theta \frac{dp}{d \cos \theta} \\ &= \beta \frac{dp}{d \cos \theta} - \bar{\beta} p - \bar{\beta} \cos \theta \frac{dp}{d \cos \theta}, \end{aligned}$$

所以
$$\frac{dp}{d \cos \theta} = \frac{p \bar{\beta}}{\beta - \bar{\beta} \cos \theta}. \quad (5)$$

代(5)入(4) \Rightarrow

$$\begin{aligned} p^* \frac{d \cos \theta^*}{d \cos \theta} &= \bar{\gamma} \left[p + \frac{(\cos \theta - \bar{\beta} \beta) \bar{\beta} p}{\beta - \bar{\beta} \cos \theta} \right], \\ p^* \frac{d \cos \theta^*}{d \cos \theta} &= \bar{\gamma} P \left[\frac{\beta - \bar{\beta} \cos \theta + \bar{\beta} \cos \theta - \bar{\beta}^2 \beta}{\beta - \bar{\beta} \cos \theta} \right] \\ &= \frac{\bar{\gamma} p \beta (1 - \bar{\beta}^2)}{\beta - \bar{\beta} \cos \theta} \\ &= \frac{p}{\bar{\gamma} \left(1 - \frac{\bar{\beta}}{\beta} \cos \theta \right)}. \end{aligned}$$

所以
$$\frac{dp}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi} \frac{d \cos \theta^*}{d \cos \theta}$$

$$= \frac{p}{4\pi \bar{\gamma} p' (1 - \beta^* \cos \theta / \beta)},$$

或
$$\frac{dp}{d\Omega} = \frac{m_\pi \beta r}{4\pi \bar{\gamma} p^* (1 - \beta^* \cos \theta / \beta)}.$$

(c) 当 $1 - \frac{\bar{\beta}}{\beta} \cos \theta = 0$ 时, $\frac{dp}{d\Omega}$ 是奇异的. 当 π 介子

在质必系中向后出射时, 显然 $\beta < \bar{\beta}$. 如果入射质子能量不太高, 使在实验室系中 π 介子也能向后出射, 此时实验室系显然存在一个 θ 角, 使上述条件得到满足. 从物理上来说, 这个角对应于“逆转”角, 即在实验室系可能达到的最大角度. 在这个角度, 实验室系和质心系间的角度变换确实是奇异的. 对足够高的人射能量, π 介子亦可在实验室系中向后出射, 但在 $\frac{dp}{d\Omega}$ 中, 此种所谓的雅可比峰将不会出现.

(杨永安)

4033 (Buf, 1982)

反应 ${}^3\text{He}(n, p)$ 的 Q 值是 0.770MeV , 由此及 ${}^3\text{H}$ 发射 β 粒子的最大动能为 0.018MeV , 计算中子与 ${}^1\text{H}$ 原子之间的质量差(用原子单位表示). ($1\text{amu} \cdot c^2 = 931\text{MeV}$)

解: 反应方程为



$$Q = [M({}^3\text{He}) + M(n) - M({}^3\text{H}) - M({}^1\text{H})]c^2 = 0.770\text{MeV}. \quad (1)$$

由 ${}^3\text{H}$ 衰变 ${}^3\text{H} \longrightarrow {}^3\text{He} + e^- + \nu,$

$$E_{\max} = [M({}^3\text{H}) - M({}^3\text{He})]c^2 = 0.018\text{MeV}. \quad (2)$$

利用式(2)代入式(1)得:

$$[M(n) - M(^1\text{H})]c^2 = 0.770 + 0.018 = 0.788(\text{MeV})$$

$$= 8.46 \times 10^{-4}(\text{amu}). \quad (\text{周 平})$$

4034 (Ber, 1974)

假设一个缓慢运动的反质子和一个质子碰撞，湮灭成 2 个 π^+ 和 2 个 π^- ($m_\pi = 140\text{MeV}$)。求：(a) 每个 π 介子的平均动能是多大？(MeV) (b) 这时 π 的动量值是多少？(MeV) (c) π 的速度是多少？(以 c 为单位) (d) 如果对撞产生两个光子*，求每个光子的波长是多少？(cm)

解：(a) $p + \bar{p} \rightarrow 2\pi^+ + 2\pi^-$ ，
据题意， $T_p \approx 0$ 。设每个 π 介子的平均动能 T_π ，

$$T_\pi \approx \frac{1}{4} (2m_p - 4m_\pi) = \frac{1}{2} (m_p - 2m_\pi)$$

$$\approx (938 - 2 \times 140) \times \frac{1}{2} = 329(\text{MeV}).$$

(b) π 介子的动量 \bar{p} 为

$$p = \sqrt{E^2 - m_\pi^2} = \sqrt{(T + m_\pi)^2 - m_\pi^2} = \sqrt{T^2 + 2Tm_\pi}$$

$$= 448(\text{MeV}).$$

(c) π 介子的平均速度 β 为

$$\beta = \frac{p}{E} = \frac{p}{T + m_\pi} \approx \frac{448}{329 + 140} \approx 0.96.$$

(d) $\bar{p} + p$ 产生两个光子，每个光子的能量为

$$E_\gamma = \frac{1}{2} (2m_p) = 938(\text{MeV}),$$

* 原题是两个质子。——编者注

$$E_\gamma = (\hbar\omega) = \frac{(c\hbar)}{t},$$

$$\kappa = \frac{(c\hbar)}{E_\gamma} = \frac{197.3 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{938.3 \text{ MeV}} = 0.21 (\text{fm}),$$

$$\lambda = 2\pi\kappa = 1.3 (\text{fm}). \quad (\text{张伟杰})$$

4035 (CUS, 1981)

考虑康普顿散射过程，一个波长为 λ 的光子被一个初始静止的自由电子所散射。令 λ' 为被散射到 θ 方向的光子的波长。(a) 计算 λ' ，用 λ, θ 及普适常数来表示，(b) 计算反冲电子的动能。

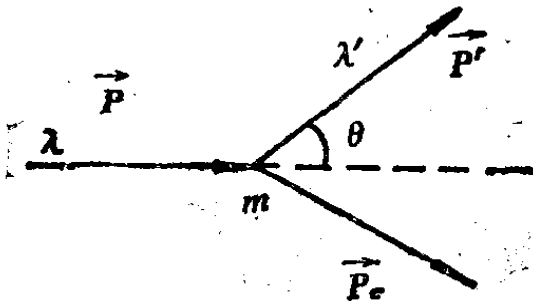


图4.4

解：(a) 如图4.4所示，由能量守恒有：

$$pc + mc^2 = p'c + \sqrt{p_e^2 c^2 + m^2 c^4},$$

式中： m 为电子静质量。

由动量守恒有：

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{p}_e,$$

上列两式分别移项取平方有：

$$(pc - p'c + mc^2)^2 = p_e^2 c^2 + m^2 c^4, \quad (1)$$

$$(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 = p_e^2. \quad (2)$$

(1) - (2) $\times c^2$ 得

$$pp' - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' = (p - p')mc,$$

即

$$pp'(1 - \cos\theta) = (p - p')mc,$$

故

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{mc} (1 - \cos\theta)$$

或
$$\frac{h}{p'} - \frac{h}{p} = \frac{h}{mc} (1 - \cos\theta),$$

所以
$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos\theta),$$

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{mc} (1 - \cos\theta).$$

(b) 由(a), 已有:

$$\frac{1}{p'c} = \frac{1}{pc} + \frac{1}{mc^2} (1 - \cos\theta),$$

即

$$\begin{aligned} p'c &= \frac{1}{\frac{1}{pc} + \frac{1}{mc^2} (1 - \cos\theta)} \\ &= \frac{mc^2}{1 - \cos\theta + \frac{mc}{p}}. \end{aligned}$$

故反冲电子动能有:

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - mc^2 \\ &= pc - p'c \\ &= pc - \frac{mc^2}{1 - \cos\theta + \frac{mc}{p}} \\ &= \frac{pc(1 - \cos\theta)}{1 - \cos\theta + \frac{mc}{p}} \\ &= \frac{(1 - \cos\theta) \frac{hc}{\lambda}}{1 - \cos\theta + \frac{mc\lambda}{h}}. \end{aligned}$$

(杨永安)

4036 (Wis, 1975)

频率为 3×10^{10} Hz 的光子与一个静止电子发生 90° 散射, 求出射光子的频率(电子的 Compton 波长为 2.4×10^{-12} m).

解: 设电子是自由电子, 则散射光子波长与散射角之间的关系为

$$\lambda' = \lambda_0 + \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta),$$

λ_0 为入射光子波长, $\frac{h}{mc}$ 为电子的 Compton 波长 λ_c , 90°

散射光子的波长为 $\lambda' = \lambda_0 + \lambda_c$, 所以

$$\frac{c}{\nu'} = \frac{c}{\nu_0} + \lambda_c.$$

90° 散射光子的频率 ν' 为

$$\begin{aligned} \nu' &= \frac{c}{\lambda_0 + c/\nu_0} = \frac{3 \times 10^8}{2.4 \times 10^{-12} + 3 \times 10^8 / 3 \times 10^{10}} \\ &= 2.4 \times 10^{10} \text{ (Hz)}. \end{aligned} \quad (\text{钱剑明})$$

4037 (Wis, 1980; MIT, 1980; Col, 1981; Chi, 1979; CCT, 1983)

考虑光子和运动着的电子对头碰撞的 Compton 散射, 求朝后散射光子 ($\theta = 180^\circ$) 的能量, 假定光子能量为 2eV , 电子能量为 1GeV . [注: 各校题目只是给出的 E_0 和 E_1 不同].

解: 选坐标沿电子运动方向为正, 电子光子组成的四动量为 p , 则有:

反应前 $\vec{P} = [(p_e + p_\gamma), i(E_e + E_\gamma)]$, p_e, p_γ 方向相反

反应后 $\vec{P} = [(p_e' + p_\gamma'), i(E_e' + E_\gamma')]$.

$$\vec{P} = \vec{P}', \quad -p_\gamma + p_e = p_e' + p_\gamma', \quad (1)$$

$$E_\gamma + E_e = E_\gamma' + E_e'. \quad (2)$$

对光子: $E_\gamma = p_\gamma$, 对电子 $E^2 = p^2 + m^2$. 并利用 $E_e \gg m_e$,

②-①得到:

$$E_\gamma + \frac{m_e^2}{E_e + p_e} = \frac{m_e^2}{E_e' + p_e'}, \quad E_e + p_e \approx 2E_e.$$

$$E_e' = \frac{m_e^2}{4E_\gamma E_e + m_e^2} E_e \approx 970.3 \text{ (MeV)},$$

$$E_\gamma' = E_e + E_\gamma - E_e' \approx E_e - E_e' \approx 29.7 \text{ (MeV)}.$$

另一解法: 电子光子系统的不变质量:

$$M^2 = -(\vec{P}_e + \vec{P}_\gamma)^2 = m_e^2 + 2E_\gamma(p_e + E_e) \approx m_e^2 + 4E_e E_\gamma.$$

$$\beta_e = \frac{\sum p_i}{\sum E_i} \approx \frac{p_e}{E_e} \approx 1,$$

$$\gamma = \frac{\sum E_i}{M} = \frac{(E_e + E_\gamma)}{(m_e^2 + 4E_e E_\gamma)^{1/2}} \approx E_e / \sqrt{m_e^2 + 4E_e E_\gamma}.$$

碰撞前 $p_\gamma^* = (-p_\gamma, iE_\gamma^*)$, (质心系)

$p_\gamma = (-p_\gamma, iE_\gamma)$. (实验室系)

$$E_\gamma^* = \gamma(E_\gamma + \beta p_\gamma) = E_\gamma \gamma (1 + \beta),$$

$$p_\gamma^* = \gamma(-p_\gamma - \beta E_\gamma) = -E_\gamma \gamma (1 + \beta).$$

碰撞时, 在质心系光子动量改变 180° , $p_\gamma^{*1} = p_\gamma^*$, $E_\gamma^{*1} = E_\gamma^*$.

变换到实验室坐标中有:

$$E_\gamma^1 = \gamma(E_\gamma^* + \beta p_\gamma^{*1}) = \gamma E_\gamma^* (1 + \beta) = \gamma^2 (1 + \beta^2) E_\gamma,$$

$$\approx 4\gamma^2 E_\gamma = 4E_e \frac{E_e^2}{m_e^2 + 4E_e E_\gamma} = 29.7 \text{ (MeV)}. \quad (\text{杨保志})$$

4038 (Wis, 1970)

(a) 两个能量分别为 E 和 ε 的光子相对撞, 证明动量为零的坐标系的速度为 $\beta = \frac{E - \varepsilon}{E + \varepsilon}$. (b) 如果两光子对撞产生正负电子对, $\varepsilon = 1\text{eV}$, 求能 E 的最小值为多少?

解: (a) 设动量中心系相对于实验室系的运动速度为 β , $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, 并选定能量为 E 的光子方向为正, 在质心系中有 $\mathbf{p}_E^* + \mathbf{p}_\varepsilon^* = 0$.

$$\begin{aligned} p_E^* &= \gamma(p_E - \beta E) = \gamma E(1 - \beta), \\ p_\varepsilon^* &= \gamma(-p_\varepsilon - \beta\varepsilon) = -\gamma\varepsilon(1 + \beta), \\ \gamma E(1 - \beta) - \gamma\varepsilon(1 + \beta) &= 0, \\ \beta &= \frac{E - \varepsilon}{E + \varepsilon}. \end{aligned}$$

又解: 系统的质心运动速度 $\beta = \frac{\sum \mathbf{p}_i}{\sum E_i}$.

对于上述两光子系统, $\mathbf{p}_1 = E$, $\mathbf{p}_2 = -\varepsilon$, $\sum E_i = E + \varepsilon$.

所以 $\beta = \frac{E - \varepsilon}{E + \varepsilon}$, β 的方向与 \mathbf{p}_1 同向.

(b) 设二光子的四动量为 \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 , 则不变质量 M

$$\begin{aligned} M^2 &= -(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 = (E + \varepsilon)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 \\ &= (E + \varepsilon)^2 - (E - \varepsilon)^2 = 4E\varepsilon. \end{aligned}$$

要产生一对正负电子, 应 $M \geq 2m_e$,

$$E_{\min} = \frac{4m_e^2}{4\varepsilon} = \frac{m_e^2}{\varepsilon} \approx 261(\text{GeV}).$$

要产生正负电子对, E 最小为 261GeV . (杨保忠)

4039 (CUS, 1985)

宇宙中存在黑体微波辐射, 其光子能量平均为 $\langle E \rangle \approx 10^{-3} \text{eV}$. 光子密度为 $\approx 300/\text{cm}^3$. 很高能量的 γ 射线可与这些光子对撞产生正负电子对, 产生截面近似为 $\sigma_T/3$, σ_T 为非相对论电子—光子散射截面 $\left[\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \right]$.

(a) 什么样能量的 γ 射线在宇宙中由于上述过程限制了寿命?

(b) 在产生 e^+e^- 对以前, γ 射线走过的平均距离是多少?

(c) 这个平均距离与宇宙的尺度相比如何?

(d) 若有超高能质子 ($E \gg 10^{20} \text{eV}$) 在同样的微波辐射中, 什么样的物理过程限制了它的寿命? (设质子—光子散射几率很小, 可不考虑).

解: (a) 设高能 γ 光子能量为 E_1 , 动量为 \mathbf{p}_1 , 微波辐射的光子能量、动量分别为 E_2, \mathbf{p}_2 . 则:

$$(E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 \geq (2m)^2.$$

又由 $E_1 = p_1, E_2 = p_2,$

得 $2E_1E_2 - 2\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 \geq (2m)^2.$

设 \mathbf{p}_1 与 \mathbf{p}_2 间夹角为 θ , 则:

$$E_1E_2(1 - \cos\theta) \geq 2(m)^2.$$

所以 $E_1 \geq \frac{2m^2}{E_2(1 - \cos\theta)}.$

显然当 $\theta = \pi, \cos\theta = -1$ 时, E_1 最小, 故

$$E_1 \geq E_{1\min} = \frac{m^2}{E^2}$$

$$= \frac{(0.5 \times 10^6)^2}{10^{-8}} = 2.5 \times 10^{14} (\text{eV}).$$

$$(b) \text{ 平均自由程 } l \approx \frac{1}{\rho\sigma} \approx \frac{1}{\rho \cdot \sigma_T / 3} \approx \frac{1}{3 \times 10^2 \times 2 \times 10^{-28}}$$

cm $\approx 10^{22}$ cm $\approx 10^4$ 光年.

(c) 宇宙的尺度 $R \approx 10^{10}$ 光年, 所以

$$l \ll R.$$

(d) 从能量考虑, ν, p 系统的不变质量.

$$\begin{aligned} s = -p^2 &= \left(\sum_i E_i \right)^2 - \left(\sum_i \Gamma_i \right)^2 \\ &= m_p^2 + 2E_\nu E_\gamma + 2\mathbf{p}_\nu \cdot \mathbf{p}_\gamma = m_p^2 + 2E_\nu (E_\gamma + p_\nu) \\ &\approx m_p^2 + 2E_\nu E_\gamma = 1.28 \times 10^{18} (\text{eV}). \end{aligned}$$

$$M = \sqrt{s} = 1.13 \times 10^9 (\text{eV}).$$

即质心系总能量为 $1.13 \times 10^9 \text{eV}$.

题设: $\nu p \rightarrow \nu p$ 散射可以忽略, 由重子数守恒, 产物中必须有重子数为 1 的粒子, 只有光生 π 反应可以产生:

$$\nu p \rightarrow \pi^0 p \text{ 或 } \pi^+ n. \quad (\text{杨永安})$$

4040 (Ber, 1981)

考虑 π 的光产生: $\gamma + p \rightarrow p + \pi^0$, 质子的静止能为 938 MeV, π^0 为 135 MeV. (a) 如果在实验室中, p 静止, 求该反应能产生的 γ 射线阈能.

(b) 3K 的各向同性黑体辐射, 光子的平均能量为 10^{-3} eV. 考虑 p 和 γ 对头碰撞时, 求产生该反应的最小质子能量. (c) 根据结果 (b), 请粗略估算宇宙线中高能质子的能谱.

解: (a) 该反应的不变质量:

$$S = -(\sum p_i)^2 = (E_\gamma + m_p)^2 - p_\gamma^2 = m_p^2 + 2E_\gamma m_p$$

产生 π^0 的阈能为

$$m_p^2 + 2m_p E_r^{th} = (m_p + m_{\pi^0})^2,$$

所以

$$E_r^{th} = \frac{(m_p + m_{\pi^0})^2 - m_p^2}{2m_p} = \frac{m_{\pi^0}^2 + 2m_p m_{\pi^0}}{2m_p}$$

$$= m_{\pi^0} + \frac{m_{\pi^0}^2}{2m_p} \approx 145 \text{ (MeV)}.$$

(b) E_p 和 E_r 为光子和质子能量, 对头碰时:

$$S = -\left(\sum p_i\right)^2 = (E_p + E_r)^2 - (p_p + p_r)^2$$

$$= E_p^2 + E_r^2 + 2E_r E_p - p_p^2 - p_r^2 - 2p_p \cdot p_r$$

$$= m_p^2 + 2E_r E_p - 2E_r p_p$$

$$= (m_p + m_{\pi^0})^2.$$

$$E_p - p_p = \frac{(m_p + m_{\pi^0})^2 - m_p^2}{2E_r} = 1.36 \times 10^{14} \text{ (MeV)}.$$

◆ $A = 1.36 \times 10^{14} \text{ (MeV)}.$

$$E_p^2 + A^2 - 2AE_p = E_p^2 - m_p^2,$$

$$E_p = \frac{1}{2A} [A^2 - m_p^2] \approx \frac{A}{2} = 0.68 \times 10^{14} \text{ (MeV)}.$$

(c) 由于 3K 的背景辐射光子密度很大, 高能宇宙线质子和该光子作用不断损失能量, 故高能质子能谱的上限即为 E_p 值, 能量高于 E_p 的质子不可能存在于宇宙线中.

(杨保忠)

4041 (Col, 1984)

τ/ψ 粒子的质量是 3.097 GeV , 总宽度为 63 keV , 动量为 100 GeV 的 τ/ψ 粒子衰变为: $\tau/\psi \rightarrow e^+ + e^-$. (a) τ/ψ 粒子在衰变前平均走过的距离是多少? (b) 若对称衰变 (e^+ 和 e^- 在

实验室中动量相等)。求实验室中电子的能量是多少? (c) 电子和 $\frac{\tau}{\psi}$ 粒子运动方向的夹角, 在实验室系为多大?

解: (a) $\frac{\tau}{\psi}$ 的 $\Gamma = 63 \text{ keV}$.

$$\tau_0 = \frac{\hbar}{\Gamma} = \frac{6.58 \times 10^{-16}}{63 \times 10^3} = 1.045 \times 10^{-20} (\text{s}),$$

$$\beta\gamma = \frac{p}{m}, \quad l = \beta\gamma\tau_0(c) = 1.045 \times 10^{-20}$$

$$\times \frac{100}{3.097} \times 3 \times 10^8 = 1.012 \times 10^{-10} (\text{m}).$$

$$(b) \quad E_0 = E_{e^+} + E_{e^-} = 2E_{e^-}.$$

$$\text{所以 } E_{e^-} = \frac{1}{2}E_0 = \frac{1}{2}\sqrt{p_J^2 + m_J^2} = \frac{1}{2}\sqrt{100^2 + 3.097^2}$$

$$= 50.024 (\text{GeV}).$$

$$(c) \text{ 由动量守恒有: } 2p_e \cos \theta = P_J,$$

$$\cos \theta = \frac{p_J}{2p_e} = \frac{p_J}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{E_{e^-}^2 - m_{e^-}^2}} = \frac{50}{\sqrt{50.024^2 - 0.5^2 \times 10^{-6}}}$$

$$\approx 0.9995.$$

(管怀群)

4042 (Col, 1977)

一个负 Ξ^- 粒子衰变成 Λ^0 和 π^- , $\Xi^- \longrightarrow \Lambda^0 + \pi^-$, Ξ^- 沿 x 方向运动, 具有动量 2 GeV^* . 衰变情况是在 Ξ^- 静止的坐标系中, Λ^0 与 Ξ^- 的原运动方向为 30° 角, 计算出在实验室中, π^- 和 Λ^0 的动量和夹角, 静止能: $M_{\Xi^-} = 1.3 \text{ GeV}$, $M_{\Lambda} = 1.1 \text{ GeV}$, $M_{\pi} = 0.14 \text{ GeV}$.

解: Ξ^- 运动参数 β, γ 和 E_{Ξ^-} 有:

• 原题用 BeV. 编者注

$$E_{\Xi} = \sqrt{p_{\Xi}^2 + m_{\Xi}^2} = 2.39 \text{ (GeV)},$$

$$\beta_{\Xi} = \frac{p_{\Xi}}{E_{\Xi}} = \frac{2}{2.39} \approx 0.84, \quad \gamma_{\Xi} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_{\Xi}^2}} = 1.84,$$

在 Ξ^- 静止的坐标系中:

$$p_{\pi}^* = -p_{\Lambda}^*, \quad \sqrt{p_{\pi}^{*2} + m_{\Lambda}^2} = (M_{\Xi} - E_{\pi}^*),$$

$$E_{\pi}^* = \frac{M_{\Xi}^2 + m_{\pi}^2 - m_{\Lambda}^2}{2M_{\Xi}} = 0.192 \text{ (GeV)},$$

$$E_{\Lambda}^* = M_{\Xi} - E_{\pi}^* = 1.108 \text{ (GeV)},$$

$$p_{\pi}^* = p_{\Lambda}^* = 0.132 \text{ (GeV)}.$$

设 p_{Λ}^* 与 Ξ 的运动方向夹角为 $\theta_{\Lambda}^* = 30^\circ$, 则 $\theta_{\pi}^* = 210^\circ$.

$$p_{\pi} \sin \theta_{\pi} = p_{\pi}^* \sin \theta_{\pi}^* = 0.132 \times \sin(210) = -0.064 \text{ (GeV)},$$

$$p_{\pi} \cos \theta_{\pi} = \gamma p_{\pi}^* \cos \theta_{\pi}^* + \gamma \beta E_{\pi}^* = 0.086 \text{ (GeV)},$$

$$\text{tg} \theta_{\pi} = -0.767, \quad \theta_{\pi} = -37.5^\circ,$$

$$p_{\Lambda} \sin \theta_{\Lambda} = p_{\Lambda}^* \sin \theta_{\Lambda}^* = p_{\Lambda}^* \sin 30^\circ = 0.66 \text{ (GeV)},$$

$$p_{\Lambda} \cos \theta_{\Lambda} = \gamma p_{\Lambda}^* \cos \theta_{\Lambda}^* + \gamma \beta E_{\Lambda}^* = 1.92 \text{ (GeV)},$$

$$\text{tg} \theta_{\Lambda} = 0.034, \quad \theta_{\Lambda} = 1.9^\circ.$$

同时求出在实验室中 p_{Λ} 和 p_{π} 值为

$$p_{\pi} = \sqrt{0.086^2 + 0.064^2} = 0.11 \text{ (GeV)},$$

$$p_{\Lambda} = \sqrt{1.92^2 + 0.066^2} \approx 1.92 \text{ (GeV)}.$$

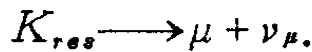
Λ 和 π 在实验室中的夹角 $\theta = |\theta_{\pi}| + |\theta_{\Lambda}| = 39.4^\circ$.

(管怀群)

4043 (Ber, 1975)

已知静止能量为 494 MeV 的 K 介子可衰变成静止能量为 106 MeV 的 μ 子和零静能的中微子。求 K 介子静止时衰变生成 μ 子和中微子的动能。

解：衰变反应是：



设衰变后 μ 子的动量为 p ，则由动量守恒可知，中微子的动量为 $-p$ （因衰变前 K 子静止），据相对论质能关系， μ 子和中微子的能量分别是：

$$E_{\mu} = \sqrt{p^2 + m_{\mu}^2}, \quad E_{\nu_{\mu}} = p.$$

衰变后系统不变质量是 $E_{\mu} + E_{\nu} = p + \sqrt{p^2 + m_{\mu}^2}$ ，它应该等于衰变前 K 介子不变质量即其静能 m_k ，于是：

$$p + \sqrt{p^2 + m_{\mu}^2} = m_k.$$

解这个方程得到：

$$p = \frac{m_k^2 - m_{\mu}^2}{2m_k}.$$

代入数据可得： $T_{\nu_{\mu}} = E_{\nu} = p = 236 \text{ (MeV)}$ ，

$$T_{\mu} = \sqrt{p^2 + m_{\mu}^2} - m_{\mu} = 152 \text{ (MeV)}. \quad (\text{黄晓舟})$$

4044 (CCT, 1983)

π ($m = 140 \text{ MeV}$) 衰变成 μ 和中微子，在 π 的静止参照系中，发射出 μ 子的最大动量是多少？(a) $30 \text{ MeV}/c$ ，(b) $70 \text{ MeV}/c$ ，(c) $2.7 \text{ MeV}/c$ 。

解： $\pi \longrightarrow \mu + \nu_{\mu}$ 。设 m_{π} ， m_{μ} 为 π 和 μ 的质量， p_{μ} ， p_{ν} 为在 π 静止系里 μ 和 ν 的动量， T_{μ} 和 T_{ν} 为 μ 子和中微子的动能。有：

$$\begin{cases} m_{\pi} = m_{\mu} + T_{\mu} + T_{\nu}, \\ 0 = p_{\mu} + p_{\nu}. \end{cases}$$

对中微子 $|p_{\nu}| = T_{\nu}$ ，对 μ 子 $T_{\mu} = \sqrt{p_{\mu}^2 + m_{\mu}^2} - m_{\mu}$ ，故

$$m_{\pi} = m_{\mu} + \sqrt{p_{\mu}^2 + m_{\mu}^2} - m_{\mu} + p_{\mu},$$

$$p_u = \frac{m_\pi^2 - m_\rho^2}{2m_\pi} = \frac{140^2 - 106^2}{2 \times 140} \approx 30 \text{ (MeV/c)}.$$

答案为(a).

(唐子州)

4045 (CUS, 1982)

η' 介子(令 M 表其质量)可衰变为一个 ρ^0 介子(质量为 m)和一个光子(质量为 0);
 $\eta' \rightarrow \rho^0 + \gamma$, 在 η' 静止的参考系衰变是各向同性的.

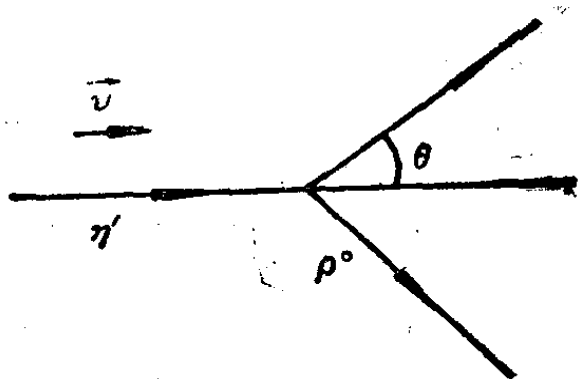


图 4.5

今假定一单能 η' 介子束在实验室系以速度 v 运动, 令 θ 为衰变光子与束流的夹角(图4.5). 令 $p(\theta)d(\cos\theta)$ 为 $\cos\theta$ 值在 $(\cos\theta, \cos\theta + d\cos\theta)$ 内的归一化几率.

(i) 计算 $p(\theta)$.

(ii) 令 $E(\theta)$ 表示实验室系出射角为 θ 的光子能量, 计算 $E(\theta)$.

解: 设 η' 粒子静止的参考系中各量带“*”号表示, 不带“*”号的为实验室系的量. 对光子有:

$$p^* \cos\theta^* = \gamma(p \cos\theta - \beta E),$$

$$E^* = \gamma(E - \beta p \cos\theta).$$

式中:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

所以

$$\cos\theta^* = \frac{\cos\theta - \beta}{1 - \beta \cos\theta},$$

(i) 由 $p^*(\theta^*) d \cos \theta^* = p(\theta) d \cos \theta,$

而 $p^*(\theta^*) = \frac{1}{2},$

所以
$$p(\theta) = \frac{1}{2} \frac{d \cos \theta^*}{d \cos \theta}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta \cos \theta)^2}.$$

(ii) 由 $E^* = \gamma E (1 - \beta \cos \theta),$

$$E = \frac{E^*}{\gamma (1 - \beta \cos \theta)}.$$

在 η' 静止系, 由能-动量守恒知:

$$E^* = \frac{M^2 - m^2}{2M},$$

所以 $E(\theta) = \frac{(M^2 - m^2)}{2M} \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta}. \quad (\text{杨永安})$

4046 (Wis, 1972)

K_L^0 介子 ($M = 498 \text{ MeV}$) 在飞行中衰变成 $\pi^+ \pi^-$ ($m = 140 \text{ MeV}$). K_L^0 的动量与 M_0 的比值为 $\frac{p}{M} = 1$, 求实验室系中 π 介子的最大横动量及最大纵动量.

解: 实验室系中 K_L^0 的速度为 $v_0 = \frac{p}{E} = \frac{p}{\sqrt{p^2 + M^2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (\text{取 } c = 1), \quad \text{即 } \beta_0 = v_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{所以 } \gamma_0 = \sqrt{2}.$$

设质心系中 π 介子的动量为 p^* , 则

$$M = 2\sqrt{p^{*2} + m^2},$$

$$p^* = \frac{1}{2} \sqrt{M^2 - 4m^2} = 206 \text{ (MeV)},$$

$$E^* = \sqrt{p^{*2} + m^2} = 249 \text{ (MeV)},$$

实验室系中 π 介子的纵动量为

$$\begin{aligned} p_l &= \gamma_0 (p_l^* + \beta_0 E^*) \\ &= \gamma_0 (p^* \cos \theta^* + \beta_0 E^*), \end{aligned}$$

所以最大纵动量 $p_{l \max}$ 为

$$\begin{aligned} p_{l \max} &= \gamma_0 (p^* + \beta_0 E^*) \\ &= \sqrt{2} \left(206 + \frac{1}{\sqrt{2}} \times 249 \right) = 540.4 \text{ (MeV)}. \end{aligned}$$

横动量 $p_t = p_t^* = p^* \sin \theta^*$.

最大横动量 $p_{t \max} = p^* = 206 \text{ (MeV)}$. (钱剑明)

4047 (Wis, 1979)

(a) 粲重子 D^0 在泡室中飞行 8 毫米后衰变, 衰变产物的总能量为 20 GeV , D^0 的静止质量为 1.86 GeV , 求 D^0 在其静止坐标系中的寿命. (b) 如果观察一组 D^0 衰变, 在 D^0 静止系中, 试比较衰变到分支比为 1% 的模式与衰变到分支比为 40% 的模式的期望时间分布.

解: (a) 衰变前 D^0 的能量为 20 GeV , 所以质心系的 γ 值为

$$\gamma = \frac{E}{m_0} = \frac{20}{1.86} = 10.75.$$

粲重子速度(以 c 为单位)为

$$\beta = \sqrt{\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}} = 0.996.$$

实验室系中 D^0 的寿命为

$$\tau = \frac{l}{\beta(c)} = \frac{3 \times 10^{-3}}{0.996 \times 3 \times 10^8} = 1.0 \times 10^{-11} (\text{s}).$$

所以 D^0 的本征寿命为

$$\tau_0 = \frac{\tau}{\gamma} = 9.3 \times 10^{-13} \text{s}.$$

(b) D^0 的衰变常数 $\lambda = \frac{1}{\tau} = 1.07 \times 10^{12} \text{s}^{-1}$.

不管是 D^0 的什么衰变，其期望时间分布均以 $f(t) \approx e^{-\lambda t} = \exp(-1.07 \times 10^{12} \times t)$ 随时间变化，即分支比为 1% 的 D^0 衰变模式与分支比为 40% 的 D^0 衰变模式具有同样的期望时间分布。
(钱剑明)

4048 (Wis, 1978)

粲介子 D^0 衰变 $D^0 \rightarrow K^- \pi^+$, D 、 K 、 π 的质量分别为 1.8, 0.5, 0.15 GeV. (a) 求 D^0 静止系中 K 介子的动量. (b) “用中微子 ν_μ 产生了单个 K^- 介子表示发现 D (介子) 产生”. 此叙述是对或错? 解释你的回答.

解: (a) $D^0 \rightarrow K^- \pi^+$. 在 D^0 静止系中, K^- 与 π^+ 以相同的动量值 p 反向飞出. 所以

$$\sqrt{p^2 + m_K^2} + \sqrt{p^2 + m_\pi^2} = m_D,$$

D^0 静止系中 K 介子能量为

$$E_K = \sqrt{p^2 + m_K^2} = \frac{m_D^2 + m_\pi^2 - m_K^2}{2m_D} = 0.84 (\text{GeV}).$$

K 介子的动量为

$$p = \sqrt{E_K^2 - m_K^2} = 0.67 (\text{GeV}).$$

(b) 不对. K^- 介子中含 s 夸克, Ξ^- , Ω^- , K^* 等粒

子也可衰变成单个 K^- ，这些粒子也可通过中微子反应产生。
(钱剑明)

4049 (Wis, 1980)

静止的带电 π 介子的平均寿命为 2.6×10^{-8} s。由加速器产生的一束单能 π 介子通过 10m 距离后，有 10% 的 π 介子发生衰变，求 π 介子的动能和动量。

解：设最初有 N_0 个 π 介子，速度为 β (以光速 c 为单位)。则通过 l 距离后 π 介子数目为

$$N(l) = N_0 e^{-\lambda l / \beta c}$$

其中 λ 为运动 π 介子的衰变常数。

$$\lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\tau_0}, \quad \tau_0 = 2.6 \times 10^{-8} \text{ s},$$

$$N(l) = N_0 e^{-\frac{l \sqrt{1-\beta^2}}{\tau_0 \beta c}},$$

$$\gamma \beta = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{l}{\tau(c) \ln \frac{N_0}{N(l)}}$$

$$= \frac{10}{2.6 \times 10^{-8} \times 3.0 \times 10^8 \times \ln \frac{1}{0.9}} \approx 12.$$

π 介子动量为

$$p = m_0 \gamma \beta = 1.7 \text{ (GeV/c)}$$

π 介子动能为

$$T = E - m = \sqrt{p^2 + m_0^2} - m_0 \approx 1.7 \text{ (GeV)}.$$

(钱剑明)

4050 (Wis, 1973)

质子打薄靶时产生了中性介子，每个介子衰变为两个 γ ，向前发射的光子能量为 120 MeV，向后发射的光子能量为 60 MeV. (a) 求介子的 $\beta = \frac{v}{c}$ ，(b) 求介子的静能 (近似).

解： 设这个中性粒子运动的速度参数为 β, γ ，显然运动方向为向前发射光子的方向.

$$(a) \quad E_1 = \gamma(E^* + \beta p^*) = \gamma E^*(1 + \beta),$$

$$E_2 = \gamma(E^* - \beta p^*) = \gamma E^*(1 - \beta).$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{1 + \beta}{1 - \beta} = \frac{120}{60} = 2,$$

$$\beta = \frac{1}{3}, \quad \gamma = \frac{3}{\sqrt{8}}.$$

$$(b) \quad m = \frac{E}{\gamma} = \frac{E_1 + E_2}{\gamma} = 60\sqrt{8} \approx 170 \text{ (MeV)}. \quad (\text{胡 平})$$

4051 (Wis, 1979)

质量 $M = 3 \text{ GeV}/c^2$ ，动量 $p = 4 \text{ GeV}$ 的粒子沿 x 轴运动，它衰变成两个光子，在粒子静止的坐标系中，光子角分布是各向同性的，即 $dp/d(\cos \theta^*) = \frac{1}{2}$. 求光子 x 方向动量分量为 p_x 的几率 $\frac{dp}{dp_x}$ 及 x 方向动量分量的最大值与最小值.

解： 由动量守恒知质心系中两个光子以相同能量 E^* 反向飞出，显然 $2E^* = M$ ，所以

$$E^* = 1.5(\text{GeV}).$$

在粒子静止的坐标系中光子动量为

$$p^* = E^* = 1.5(\text{GeV}).$$

在实验室系中，粒子运动速度为 β ，则

$$p = \frac{M\beta}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$\beta = \frac{p}{\sqrt{M^2 + p^2}} = 0.8,$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{5}{3}.$$

实验室系中，光子 x 方向动量分量为

$$p_x = \gamma(p_x^* + \beta E^*) = \gamma(p^* \cos \theta^* + \beta E^*).$$

p^* , θ^* 分别为质心系中光子的动量和光子与 x 轴的夹角。所以

$$\begin{aligned} p_{x\max} &= \gamma(p^* + \beta E^*) \\ &= \frac{5}{3}(1.5 + 0.8 \times 1.5) = 4.5(\text{GeV}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{x\min} &= \gamma(-p^* + \beta E^*) \\ &= \frac{5}{3}(-1.5 + 0.8 \times 1.5) = -0.5(\text{GeV}). \end{aligned}$$

粒子质心系中，两光子的角分布是各向同性的，即

$$dp/d(\cos \theta^*) = \frac{1}{2}, \text{ 而}$$

$$dp_x = \gamma p^* d(\cos \theta^*) = 2.5 d(\cos \theta^*),$$

所以

$$\frac{dp}{dp_x} = \frac{dp}{2.5 d(\cos \theta^*)} = 0.2. \quad (\text{钱剑明})$$

一个中性的 π^0 衰变成 2γ , 设 π^0 的总能量为 E . (a) 如果衰变过程产生的 2γ 在沿原来 π^0 运动的方向上背对背飞出. 求 γ 射线能量是多少? (b) 如果两 γ 与原来 π^0 运动方向成相同的角发射. 求两 γ 的夹角为多少? (c) 设 $m_\pi = 135$ MeV, $E = 1$ GeV. 求出上面 (a), (b) 问题的数值.

解: (a) 设两 γ 的动量和能量分别为 $p_{\gamma_1}, p_{\gamma_2}$ 和 $E_{\gamma_1}, E_{\gamma_2}$, π^0 的动量为 p_π , 能量为 E , 有:

$$E = E_{\gamma_1} + E_{\gamma_2}, \quad (1)$$

$$p_{\gamma_1} - p_{\gamma_2} = p_\pi. \quad (2)$$

对 π^0 有 $E^2 = p_\pi^2 + m_\pi^2, \quad (3)$

对 γ_1 和 γ_2 有 $E_{\gamma_1} = p_{\gamma_1}, E_{\gamma_2} = p_{\gamma_2}. \quad (4)$

把(3)和(4)代入(1), (2)式, 解得:

$$E_{\gamma_1} = p_{\gamma_1} = \frac{1}{2} \left(E + \sqrt{E^2 - m_\pi^2} \right), \quad (5)$$

$$E_{\gamma_2} = p_{\gamma_2} = \frac{1}{2} \left(E - \sqrt{E^2 - m_\pi^2} \right). \quad (6)$$

(b) 因两光子与 π^0 成等角度 θ , 则有:

$$\begin{cases} E = 2E_\gamma, & (7) \\ 2p_\gamma \cos \theta = p_\pi. & (8) \end{cases}$$

用(3), (4)式的关系代入(7), (8)式, 有:

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{E^2 - m_\pi^2}}{E}. \quad (9)$$

两 γ 的夹角 $\theta_{2\gamma}$ 为

$$\theta_{2\gamma} = 2\theta = 2 \cos^{-1} \left(\frac{\sqrt{E^2 - m_\pi^2}}{E} \right). \quad (10)$$

(c) 把 $m_\pi = 135\text{MeV}$, $E = 1\text{GeV}$ 代入(5), (6), (10) 得:

问题(a)中 $E_{\nu_1} = \frac{1}{2} \left(10^8 + \sqrt{10^8 - (135)^2} \right) \approx 995.4 \text{ (MeV)},$

$$E_{\nu_2} = \frac{1}{2} \left(10^8 - \sqrt{10^8 - (135)^2} \right) \approx 4.6 \text{ (MeV)}.$$

问题(b)中 $\theta_{2\nu} = 2 \cos^{-1} \left(\frac{\sqrt{10^8 - (135)^2}}{10^8} \right) \approx 15.5^\circ.$

(管怀群)

4053 (Ber, 1982)

一个 π^0 介子在其静止系中各向同性地衰变成两个光子。对于动量 $p = 280\text{MeV}$ 的 π^0 , 求实验室系中光子的角分布与实验室极角余弦的关系。 π 的静能是 140MeV 。

解: 在 π 粒子质心系中, 一个特定的光子的角分布是各向同性的, 并满足归一化条件: $\int W_0(\cos \theta^*, \phi^*) d\Omega^* = 1.$

一个 π^0 衰变为两个光子, $\int W(\cos \theta^*, \phi^*) d\Omega^* = 2, W$ 与 $\theta^*,$

ϕ^* 无关, $W(\cos^*, \phi^*) = \frac{2}{4\pi} = \frac{1}{2\pi}.$

对 ϕ^* 积分, 有:

$$W(\cos \theta^*) = 1.$$

而

$$W(\cos \theta) = W(\cos \theta^*) \frac{d\cos \theta^*}{d\cos \theta},$$

$$\frac{d\cos \theta^*}{d\cos \theta} = \frac{p}{\gamma \cdot p^* \left(1 - \frac{\beta_0}{\beta_m} \cos \theta \right)}$$

根据洛仑兹变换, $p \sin \theta = p^* \sin \theta^*,$

$$\sin \theta^* = \frac{\sin \theta}{\gamma_0 (1 - \beta_0 \cos \theta)}, \quad \text{光子 } \beta_\mu = 1.$$

所以

$$W(\cos \theta) = 1 \cdot \frac{p}{\gamma_0 p^* \left(1 - \frac{\beta_0}{\beta_\mu} \cos \theta\right)}$$

$$= \frac{p^* \sin \theta^* / \sin \theta}{\gamma_0 p^* (1 - \beta_0 \cos \theta)}$$

$$= \frac{1}{\gamma_0^2 (1 - \beta_0 \cos \theta)^2}$$

质心速度

$$\beta_0 = \frac{p_\pi}{\sqrt{p_\pi^2 + m_\pi^2}} = \frac{280}{\sqrt{280^2 + 140^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} = \sqrt{5},$$

所以

$$W(\cos \theta) = \frac{1}{\left(\sqrt{5}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}} \cos \theta\right)^2}$$

$$= \frac{1}{5 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}} \cos \theta\right)^2} \quad (\text{胡 平})$$

4054 (Col, 1982)

中性 π^0 介子衰变成 2γ , $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$. 寿命约 10^{-16}s , 而 π^0 可由 $\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$ 产生, 这些粒子的静止质量为: $m(\pi^-) = 140\text{MeV}$, $M(\pi^0) = 135\text{MeV}$, $m(p) = 938\text{MeV}$, $m(n) = 940\text{MeV}$. (a) 若 p 及 π^- 在反应前均静止, π^0 的出射速度多大? (b) 出射中子的动能多大? (c) 若 π^0 静止时的寿命是 10^{-16}s , 则在衰变前它在实验室中走了多远? (d) π^0 衰变中出射 γ 的

最大能量多大？

解：(a), (b), 设 T_{π^0} 和 T_n 分别为 π^0 和 n 的动能, 由动量能量守恒得到:

$$T_{\pi^0} + T_n = (m_{\pi^0} + m_p - m_{\pi^+} - m_n) = (938 + 140 - 940 - 135) = 3(\text{MeV}), \quad (1)$$

$$(m_{\pi^0} + T_{\pi^0})^2 - m_{\pi^0}^2 = (m_n + T_n)^2 - m_n^2. \quad (2)$$

解(1), (2)得到:

$$T_n = \frac{9 + 6m_{\pi^0}}{2(m_{\pi^0} + m_n) + 6} = 0.38(\text{MeV}),$$

$$T_{\pi^0} = 3 - 0.38 = 2.62(\text{MeV}).$$

$$(c) \quad T_{\pi^0} = \frac{m_{\pi^0}}{\sqrt{1 - \beta^2}} - m_{\pi^0}, \quad \beta = \left(1 - \frac{m_{\pi^0}^2}{(T_{\pi^0} + m_{\pi^0})^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 0.194,$$

$$l = v\tau = \beta(c)\tau_0\gamma = 0.194 \times 3 \times 10^8 \times 10^{-10} \times (1 - 0.194^2)^{-\frac{1}{2}} = 5.9 \times 10^{-9}(\text{m}).$$

(d) 解法 I: 在 π^0 静止的坐标系中有:

$$E_{\gamma_1}^* = E_{\gamma_2}^* = \frac{1}{2}m_{\pi^0}.$$

在实验室系中, 有:

$$p_x = \gamma p_x^* + r\beta E_{\gamma_1}^*,$$

$$E = \gamma\beta p_x^* + rE_{\gamma_1}^*.$$

因 $p_x = p_{\gamma} \cos \theta = E_{\gamma} \cos \theta$, 得 $E = E^* \frac{1}{\gamma(1 - \cos \theta \cdot \beta)}$

$$= \frac{m_{\pi^0}}{2\gamma} (1 - \beta \cos \theta)^{-1}.$$

$$(E_{\gamma})_{\max} = \frac{m_{\pi^0}}{2\gamma} (1 - \beta)^{-1} = 82.1(\text{MeV}).$$

解法 II: 当两 γ 中一个沿 π^0 方向飞出时, 该 γ 能量为最大, 据能量动量守恒:

$$\begin{aligned} p_{\gamma_1} - p_{\gamma_2} &= p_{\pi^0}, \\ E_{\gamma_1} + E_{\gamma_2} &= E_{\pi^0}. \end{aligned}$$

对光子 $p_{\gamma} = E_{\gamma}$, 得

$$\begin{aligned} E_{\gamma_1} &= \frac{1}{2}(E_{\pi^0} - p_{\pi^0}) = \frac{1}{2}(E_{\pi^0} - \sqrt{E_{\pi^0}^2 - m_{\pi^0}^2}) \\ &= 82.1(\text{MeV}). \end{aligned} \quad (\text{管怀群})$$

4055 (Chi 1982)

费米实验室的高能中微子束是由单能 π^+ (或 K^+ 束) 衰变得到的: $\pi^+ \rightarrow \mu + \nu_{\mu}$. π^+ 介子和 μ^+ 子的质量分别为 140 MeV 和 106 MeV. (a) 求 π^+ 静止的坐标系中中微子的能量? 在实验室系, 衰变中微子能量取决于衰变角度(图 4.6). 如果

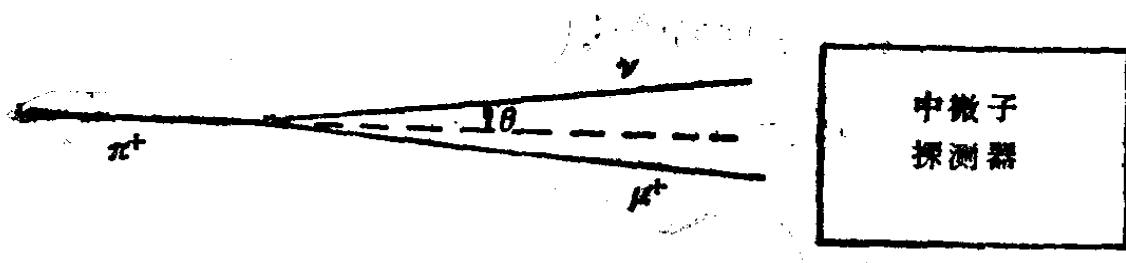


图 4.6

π^+ 束具有 200 GeV 的能量. (b) 求在向前方向 ($\theta = 0^\circ$) 产生中微子的能量; (c) 求使中微子具有最大能量一半值的角度 θ .

解: (a) 设质心系中微子能量为 E_{ν}^* , 它应等于 μ 子的动量值. 由能量守恒有:

$$\sqrt{E_{\nu}^{*2} + m_{\mu}^2} + E_{\nu}^* = m_{\pi^0},$$

所以
$$E_{\gamma}^* = \frac{m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^0}^2}{2m_{\pi^+}} = \frac{140^2 - 106^2}{2 \times 140} = 30 \text{ MeV}.$$

(b) 对 200 GeV 的 π^+ 子束, $\gamma = \frac{E}{m} = \frac{200}{0.140} \approx 1430$, $\beta \approx 1$, 在前进方向上, $\theta^* = 0^\circ$, 于是:

$$E_{\gamma} = \gamma(E_{\gamma}^* + \beta p_{\gamma}^*) \approx 2\gamma E_{\gamma}^* = 2 \times 1430 \times 30 \approx 86 \text{ GeV}.$$

(c) 在前进方向由 (b) 得到的能量是最大值, 设其一半的角度在实验室及质心系分别为 $\theta_{1/2}$ 和 $\theta_{1/2}^*$, 则:

$$\gamma(E_{\gamma}^* + \beta p_{\gamma}^* \cos \theta_{1/2}^*) = \frac{1}{2} \gamma(E_{\gamma}^* + \beta p_{\gamma}^*).$$

所以 $\cos \theta_{1/2}^* \approx 0$, $\sin \theta_{1/2}^* \approx 1$.

$$p_{\gamma} \cos \theta_{1/2} = \gamma(p_{\gamma}^* \cos \theta_{1/2}^* + \beta E_{\gamma}^*) \approx \beta \gamma E_{\gamma}^* \approx \gamma E_{\gamma}^*.$$

$$p_{\gamma} \sin \theta_{1/2} = p_{\gamma}^* \sin \theta_{1/2}^* = p_{\gamma}^* = E_{\gamma}^*.$$

故
$$\text{tg} \theta_{1/2} = \frac{p_{\gamma} \sin \theta_{1/2}}{p_{\gamma} \cos \theta_{1/2}} = \frac{E_{\gamma}^*}{\gamma E_{\gamma}^*} = \frac{1}{\gamma},$$

所以
$$\theta_{1/2} \approx \frac{0.140}{200} = 0.0007 \text{ rad} \approx 2.4'.$$

注: 为说明上述近似是合理的, 一开始先不把 β 用 1 代入. 由:

$$\gamma(E_{\gamma}^* + \beta p_{\gamma}^* \cos \theta^*) = \frac{1}{2} \gamma(E_{\gamma}^* + \beta p_{\gamma}^*),$$

$$\cos \theta^* = \frac{\beta - 1}{2\beta}, \quad (\theta^* \text{ 稍大于 } 90^\circ),$$

$$\sin \theta^* = (1 - \cos^2 \theta^*)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\beta} (3\beta^2 + 2\beta - 1)^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{tg} \theta_{1/2} = \frac{\sin \theta_{1/2}}{\cos \theta_{1/2}} = \frac{\sin \theta_{1/2}^*}{\gamma (\cos \theta_{1/2}^* + \beta)} = \frac{1}{\gamma} \frac{(3\beta^2 + 2\beta + 1)^{\frac{1}{2}}}{\beta - 1 + 2\beta^2}$$

$$= \frac{1}{\gamma} \frac{(3\beta^2 + 2\beta - 1)^{1/2}}{2\beta^2 + \beta - 1} \approx \frac{1}{\gamma} \quad (\text{黄晓舟})$$

4056 (Ber, 1976)

粒子物理学现在感兴趣的是高能弱相互作用，这可以通过研究高能中微子反应来实现，通过 π 介子和 K 介子飞行中衰变可产生中微子束。假定 200GeV 的 π 介子以下列方式衰变以产生中微子束： $\pi \rightarrow \mu + \nu$ 。已知 π 介子的寿命是 $\tau_{\pi} = 2.60 \times 10^{-8}\text{s}$ (在 π 静止系)，其静能是 139.6MeV 。 μ 子静止能量为 105.7MeV ，中微子没有质量。(a) 计算 π 介子衰变前飞行的平均距离；(b) 计算 μ 子在实验室中 (相对于 π 子方向) 的最大角度；(c) 计算中微子可能具有的最大及最小动量。

解：(a) 相对论延时因子 $\gamma = \frac{E}{m} = \frac{p}{m} = \frac{200000}{139.6} = 1430$,

实验室 π 子寿命 $\tau = \tau_0 \gamma = 2.6 \times 10^{-8} \times 1430 = 3.72 \times 10^{-5}(\text{s})$

π 子以近于光速运动，则衰变前平均飞行距离为

$$l = (c) \tau = 3 \times 10^8 \times 3.72 \times 10^{-5} = 1.12 \times 10^4(\text{m}) .$$

(b) 如图4.7所示。

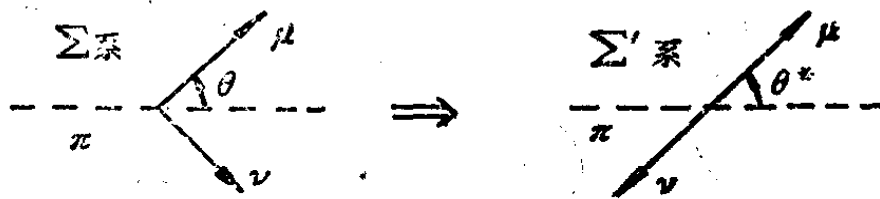


图 4.7

将实验室系变换到 π 静止系，参见4055题的结果， Σ' 系中 μ 子和 ν 子都具有相同的动量值为

$$p^* = \frac{m_{\pi}^2 - m_{\mu}^2}{2m_{\pi}} = 30\text{MeV} .$$

于是在 Σ 系中可得:

$$p_x = \gamma(p_x^* + \beta E^*) \approx \gamma(P^* \cos \theta^* + E^*), \quad (\beta \approx 1)$$

$$p_y = p_y^* = p^* \sin \theta^*.$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{p_y}{p_x} = \frac{\sin \theta^*}{\gamma \left(\cos \theta^* + \frac{E^*}{p^*} \right)}.$$

利用微分求极值得到 $\cos \theta^* = -\frac{p^*}{E^*}$ 时, $\operatorname{tg} \theta$ 有极大值。

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} \theta)_{\max} &= \frac{1}{\gamma} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{p^*}{E^*}\right)^2}}{\left(-\frac{p^*}{E^*} + \frac{p^*}{E^*}\right)} = \frac{1}{\gamma} \frac{p^*}{m_p} \\ &= \frac{1}{1.43 \times 10^3} \times \frac{30}{105.7} \approx 0.0002, \end{aligned}$$

$$\theta_{\max} \approx 2 \times 10^{-4} \text{ (rad)} \approx 0.011^\circ.$$

(c) 中微子具有的最大和最小动量. π 的运动参数

$$\beta = \frac{p_x}{E_x} \approx \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2}.$$

$$\begin{aligned} p_{\max} &\approx \gamma(p_x^* + \beta E_x^*) = \gamma p^* (1 + \beta) \\ &\approx 2\gamma p^* = 2 \times 1.43 \times 10^3 \times 30 \\ &= 8.58 \times 10^4 \text{ (MeV)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{\min} &= \gamma(-p_x^* + \beta E_x^*) = -\gamma p^* (1 - \beta) \\ &= -\frac{p^*}{\gamma \cdot 2} = -\frac{30}{2 \times 1.43 \times 10^3} \end{aligned}$$

$$\approx -1.1 \times 10^{-2} \text{ (MeV)}.$$

这时, 中微子沿 π 运动方向的反方向射出, 带有 0.011 MeV 的动量.

(黄晓舟)

一束能量 E_0 的 π 粒子沿 z 轴入射, 其中一些 π 衰变为一个 μ 子和一个中微子, 中微子出现在相对 z 轴为 θ_0 的角度. 设中微子是无质量的.

(a) 由 θ_0 确定中微子的能量并证明, 如果 $E_0 \gg m_\pi$, $\theta_0 \ll 1$. 有:

$$E_\nu \approx E_0 \frac{\left[1 - \left(\frac{m_\mu}{m_\pi}\right)^2\right]}{\left[1 + \left(\frac{E_0}{m_\pi}\right)^2 \theta_0^2\right]}.$$

(b) 在质心系中这个衰变是各向同性的. 确定 θ_m 角, 使得有一半中微子满足 $\theta_0 < \theta_m$.

解: (a) 记 μ 子相对 z 轴的出射角为 θ , 由能量和动量守恒得:

$$\begin{cases} E_0 = E_\mu + E_\nu = \sqrt{p_\mu^2 + m_\mu^2} + E_\nu, \\ \sqrt{E_0^2 - m_\pi^2} = p_\mu \cos \theta + p_\nu \cos \theta_0, \\ p_\mu \sin \theta + p_\nu \sin \theta_0 = 0. \end{cases}$$

因为中微子设为无质量, 所以 $p_\nu = E_\nu$, 代入方程可解得

$$\begin{aligned} E_\nu &= \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2[E_0 - \sqrt{E_0^2 - m_\pi^2} \cos \theta_0]} \\ &= \frac{m_\pi^2}{2E_0} \frac{1 - \left(\frac{m_\mu}{m_\pi}\right)^2}{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{m_\pi}{E_0}\right)^2} \cos \theta_0}. \end{aligned}$$

当 $E_0 \gg m_\pi$, $\theta_0 \ll 1$, ..

$$\begin{aligned}
\sqrt{1 - \left(\frac{m_\pi}{E_0}\right)^2} \cos \theta &\approx \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{m_\pi}{E_0}\right)^2\right] \left[1 - \frac{\theta^2}{2}\right] \\
&\approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{m_\pi}{E_0}\right)^2 - \frac{1}{2} \theta^2, \\
E &\approx \frac{m_\pi^2}{E_0} \times \frac{1 - \left(\frac{m_\pi}{E_0}\right)^2}{\left(\frac{m_\pi}{E_0}\right)^2 + \theta^2} \\
&= E_0 \frac{1 - \left(\frac{m_\pi}{E_0}\right)^2}{1 + \left(\frac{E_0}{m_\pi}\right)^2 \theta^2}.
\end{aligned}$$

(b) 设 π 的运动速度为 β . 中微子在质心系中运动方向与 z 轴夹角为 θ_0 . $\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{m_\pi}{E_0}\right)^2}$, 因为中微子在任何系中都以光速运动, 由相对论速度变换公式得:

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{\cos \theta_0 + \beta}{1 + \beta \cos \theta_0}, \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \sin \theta_0}{1 + \beta \cos \theta_0}, \end{cases}$$

$$\text{tg } \theta = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \sin \theta_0}{\cos \theta_0 + \beta}.$$

这是一个单调的变换关系, 因为在质心系中衰变是各向同性的, 所以一定有一半中微子 $\theta_0 < 90^\circ$, 而 $\theta_0 = 90^\circ$ 对应的实验室系角度 θ 应满足:

$$\text{tg } \theta = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta},$$

$$\theta = \text{arctg } \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta} = \text{arctg } \frac{m_\pi}{\sqrt{E_0^2 - m_\pi^2}}.$$

这样在实验室系中也必然有一半中微子满足 $\theta, < \theta_0$, 即,

$$\theta_m = \theta_0 = \arctg \frac{m_\pi}{\sqrt{E_0^2 - m_\pi^2}}. \quad (\text{周 平})$$

4058 (Ber, 1979)

(a) 设 Fermi 实验室动量为 400 GeV 的质子束产生的 π 的最可几动量是 π 的速度等于质子的速度, 求 π 介子的动量为多少? $m_\mu = 0.14 \text{ GeV}$, $m_p = 0.94 \text{ GeV}$.

(b) 设 π 在 400m 的管道中衰变产生中微子有多少份额的 π 衰变? $\tau_\pi^0 = 2.6 \times 10^{-8} \text{ (s)}$.

(c) 在 π 静止的观察者看来, 衰变管道有多长?

(d) $\pi \rightarrow \mu + \nu_\mu$, ($m_\nu = 0$), 求在 π 静止的坐标系中,

$$\frac{q}{c} = \frac{M^2 - m^2}{2M}, \quad M \text{ 为 } \pi \text{ 质量, } m \text{ 为 } \mu \text{ 质量.}$$

(e) 中微子探测器距衰变点平均是 1.2km, 问需要多大的探测器才能探测到在 π 静止的坐标系中, 产生在前半球的所有中微子.

解: (a) $p = \gamma\beta m_0, \quad \gamma\beta = \frac{p}{m_0},$

$\gamma\beta$ 相等有 $\frac{p_p}{m_p} = \frac{p_\pi}{m_\pi},$

$$p_\pi = \frac{m_\pi}{m_p} p_p = \frac{0.14}{0.94} \times 400 \approx 60 \text{ (GeV)}.$$

(b) $\tau = \gamma\tau_0, \beta \approx 1, \quad \gamma \approx \frac{60}{0.14} \approx 425, \text{ 所以}$

$$\frac{N}{N_0} = \left(1 - e^{-\frac{L}{\tau \cdot c}}\right) = \left(1 - e^{-\frac{L}{\tau_0 \gamma c}}\right) \approx (1 - e^{-0.12})$$

$$\approx 0.114.$$

(c) 在 π 静止的坐标系中, 看衰变管道的长度:

$$l' = \frac{400}{425} \approx 0.94 \text{ (m)}.$$

(d) 在 π 静止的坐标系中, 设 μ 子的能量为 E_μ , 动量为 q , 则中微子的动量和能量均为 q , 这时有:

$$\begin{aligned} E_\mu + q &= M, \quad \sqrt{q^2 + m^2} = M - q, \\ q^2 + m^2 &= M^2 + q^2 - 2Mq, \quad q = \frac{M^2 - m^2}{2M}. \end{aligned}$$

(e) 根据题 4057, 对能量为 E 的 π , 衰变 ν 的半张角为

$$\begin{aligned} \theta_{1/2} &= \arctg \frac{m_\pi}{\sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2}} = \arctg \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \\ &\approx \arctg \frac{1}{\gamma}. \end{aligned}$$

中微子探测器的线度:

$$L = 2d \operatorname{tg} \theta_{1/2} = \frac{2d}{\gamma} = \frac{2 \times 1200}{425} = 5.65 \text{ (m)}. \quad (\text{杨保忠})$$

4059 (Buf, 1982)

考虑 K^0 的衰变: $K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$, 并假定以下跃迁矩阵元:

$$T_{if} = \frac{G}{\sqrt{8E_+ E_- E}} \cdot \frac{p_+ (p_+ + p_-)}{MK}.$$

证明: K^0 静止的坐标系中, K^0 的寿命为

$$\tau = \left[\frac{G^2}{8\pi \hbar^4 c} \sqrt{\frac{m_K^2}{4} - \mu^2} \right]^{-1}.$$

其中 E_k , E_+ 和 E_- 分别为 K^0 , π^+ 和 π^- 的相对论能量, p_k , p_+ 和 p_- 为其相应的四动量, M_k 是 K 介子的质量, G 是耦合常数, μ 是 π 介子质量.

解: 跃迁几率为

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} |T_{if}|^2 \rho(E).$$

因为是在 K^0 介子静止的坐标系, 有:

$$E_k = m_k c^2, \quad E_+ = E_- = \frac{1}{2} m_k c^2,$$

$$p_k = \left(0, i \frac{E_k}{c}\right) = (0, i m_k c),$$

$$p_+ + p_- = \left(p_+ + p_-, i \frac{E_+ + E_-}{c}\right) = (0, i m_k c).$$

代入 T_{if} 式有:

$$\begin{aligned} |T_{if}|^2 &= \frac{G^2 [p_k \cdot (p_+ + p_-)]^2}{8 E_k E_+ E_- m_\pi^2} \\ &= \frac{G^2 \cdot m_k^4 \cdot c^4}{8 M_k c^2 \cdot \frac{M_k^2}{4} c^4 \cdot m_\pi^2} \\ &= \frac{G^2}{2 m_k c^2}. \end{aligned}$$

对两体衰变, $\rho(E) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d}{dE} \int p_1^2 dp_1 d\Omega,$

代入 $dE = dE_1 + dE_2$. $p_1 + p_2 = 0$, $p_1 dp_1 = p_2 dp_2$.

$$\begin{aligned} \rho(E) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3 c^2} \cdot \frac{E_1 E_2 p_1}{E_1 + E_2} \int d\Omega \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3 c^2} \frac{m_k^* c^2}{4} \cdot 4\pi \cdot \sqrt{\frac{m_k^2}{4} - \mu^2} \cdot c. \end{aligned}$$

$$= \frac{m_p c}{8\pi^2 \hbar^3} \sqrt{\frac{m_p^2}{4} - \mu^2},$$

代入得:
$$w = \frac{2\pi}{\hbar} \cdot \frac{G^2}{2m_p c^2} \cdot \frac{m_p c}{8\pi^2 \hbar^3} \sqrt{\frac{m_p^2}{4} - \mu^2}$$

$$= \frac{G^2}{8\pi \hbar^4 c} \sqrt{\frac{m_p^2}{4} - \mu^2}.$$

$$\tau = \left[\frac{G^2}{8\pi \hbar^4 c} \sqrt{\frac{m_p^2}{4} - \mu^2} \right]^{-1}.$$

(柯小东)

4060 (CUS, 1984)

质子放射性衰变的可能性是现代很感兴趣的一个课题, 探测质子衰变的一个典型实验是建造一个很大的水库, 其中放入一些装置来探测质子衰变产物所引起的切伦柯夫辐射。

(a). 假定造了一个容有 10^7kg 水的水库. 如果质子平均寿命 τ , 为 10^{32} 年, 一年可望观测到多少次衰变? 假定探测器效率为 100%, 且束缚在核中的质子与自由质子具有同样的衰变率. (b). 质子衰变的一种可能模式为 $p \rightarrow \pi^0 + e^+$. 中性 π 介子 π^0 立即 (在 10^{-16} 秒内) 衰变为两个光子, $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$. 计算从静止质子衰变而得的光子能量的最大值和最小值. 质子质量 = 938MeV , 正电子质量 = 0.51MeV , π^0 质量 = 135MeV .

解: (a) 首先计算 10^7kg 水的质子数. 每一个 H_2O 分子有 10 个质子和 8 个中子, 于是总质量的 $\frac{10}{18}$ 为质子总质量.

一个质子的质量为 $\frac{1}{6.02 \times 10^{23}} \text{g}$. 故

$$\text{总质子数} = 10^4 \times 10^3 \times 10^3 \text{g} \times \frac{10}{18} \times 6.02 \times 10^{23} / \text{g}$$

$$\approx 3.34 \times 10^{33}.$$

$$\begin{aligned} \text{每年衰变个数} &= \frac{3.34 \times 10^{33}}{\tau_p} = \frac{3.34 \times 10^{33}}{10^{32}} \\ &= 33.4/\text{年}. \end{aligned}$$

(b) 先计算 π^0 介子的能量. 能量和动量守恒给出

$$M_p = E_{\pi^0} + E_{e^+}, \quad (1)$$

$$p_{\pi^0} = p_{e^+}. \quad (2)$$

将(1)移项平方得:

$$M_p^2 + E_{\pi^0}^2 - 2M_p E_{\pi^0} = E_{e^+}^2.$$

注意到 $E_{\pi^0}^2 = M_{\pi^0}^2 + p_{\pi^0}^2$, $E_{e^+}^2 = M_{e^+}^2 + p_{e^+}^2$, 并利用(2)式

$$\begin{aligned} \text{得} \quad E_{\pi^0} &= \frac{M_p^2 + M_{\pi^0}^2 - M_{e^+}^2}{2M_p} \\ &= \frac{938^2 + 135^2 - 0.5^2}{2 \times 938} \end{aligned}$$

$$\approx 479 \text{ (MeV)}.$$

由于在 π^0 质心系 γ 光子的能量 E' 和动量 p' 为

$$E' = p' = \frac{M_{\pi^0}}{2},$$

故由实验室系与质心系间的 Lorentz 变换公式, 有:

$$\begin{aligned} E_{\gamma} &= \gamma_{\pi^0} (E' + p' \beta_{\pi^0} \cos \theta) \\ &= \frac{M_{\pi^0}}{2} \gamma_{\pi^0} (1 + \beta_{\pi^0} \cos \theta). \end{aligned}$$

$$\text{当 } \cos \theta = 1 \text{ 时得 } E_{\gamma, \max} = \frac{M_{\pi^0}}{2} \gamma_{\pi^0} (1 + \beta_{\pi^0})$$

$$= \frac{1}{2} E_{\pi^0} (1 + \beta_{\pi^0}),$$

$$\text{当 } \cos \theta = -1 \text{ 时得 } E_{\gamma, \min} = \frac{M_{\pi^0}}{2} \gamma_{\pi^0} (1 - \beta_{\pi^0})$$

$$= \frac{1}{2} E_{\pi^+} (1 - \beta_{\pi^+}).$$

由

$$\gamma_{\pi^+} = \frac{E_{\pi^+}}{M_{\pi^+}} = \frac{479}{135} = \sqrt{1 - \beta_{\pi^+}^2},$$

得

$$\beta_{\pi^+} \approx 0.9595.$$

所以

$$(E_{\gamma})_{\max} = \frac{1}{2} \times 479 (1 + 0.9595)$$

$$\approx 469.3 \text{ (MeV)},$$

$$(E_{\gamma})_{\min} = \frac{1}{2} \times 479 (1 - 0.9595)$$

$$\approx 9.7 \text{ MeV}.$$

(杨永安)

4061 (Col, 1981)

研究飞行 π 介子 (实验室能量 E_{π}) 的 $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_{\mu}$ 模式衰变, 在 π 的质量中心系中, μ 的螺旋度 $h = \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\beta} / s\beta = 1$. 其中 \mathbf{S} 是 μ 自旋, 对给定的 E_{π} 只有一个实验室能量 $E_{\pi}^{(0)}$ 使得 μ 在实验室系中有零螺旋度平均值. (a) 求 E_{π} 与 $E_{\pi}^{(0)}$ 关系; (b) 在非相对论极限, 找出 E_{π} 的最小值使得在实验室系中可能有零螺旋度的 μ 子.

解: (a) 为研究自旋在 Lorentz 变换下的变换性质构造 4-矢量 S_{α} , S_{α} 在粒子静止的坐标系中有极限: $(\mathbf{S}, 0)$, 式中 \mathbf{S} 是自旋. 在下面的推导中用下标 π 表示 π 粒子的静止系, μ 表示 μ 粒子的随动系相对于 π 系的量.

从 Lorentz 变换, 可知在 π 系中 μ 子自旋 4-矢量是: $S'_{\alpha} = (\mathbf{S}', iS'_0)$. 其中: $\mathbf{S}' = \mathbf{S} + (\gamma_{\mu} - 1)(\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\beta}_{\mu}) \boldsymbol{\beta}_{\mu}$,

$$S'_0 = \gamma_{\mu} (\boldsymbol{\beta}_{\mu} \cdot \mathbf{S}) = \gamma_{\mu} \beta_{\mu} s h_{\mu} = \gamma_{\mu} \beta_{\mu} s.$$

变换到实验室系, $s_{\alpha}^{LAB} = (\mathbf{S}'', i s''_0)$, 则

$$s'_0 = \gamma_\mu (s'_0 + \beta_\mu \cdot S') = \gamma_\mu \gamma_\pi \cdot s (\beta_\pi^2 + \beta_\mu \cdot \beta_\pi) \cdot \beta_\pi^{-2} \\ = r \beta_\pi s h$$

故 $h = \gamma_\mu \gamma_\pi (\beta_\pi^2 + \beta_\mu \cdot \beta_\pi) \cdot \beta_\pi^{-1} \beta^{-1} \gamma^{-1}$, 式中 β, γ 是相对于实验室系 μ 子的量.

$$h = 0 \text{ 给出 } \beta_\mu \cdot \beta_\pi = -\beta_\pi^2,$$

由相对论关系知: $\gamma = \gamma_\mu \cdot \gamma_\pi (1 + \beta_\mu \cdot \beta_\pi)$, 故实验室系中 μ 子能量:

$$E_\mu^{(0)} = m_\mu \gamma = m_\mu \gamma_\mu \gamma_\pi \cdot (1 - \beta_\pi^2) = m_\mu \gamma_\pi / \gamma_\mu = m_\mu E_\pi / m_\pi \gamma_\pi.$$

由在质心系中静止粒子两体衰变的能能量守恒的条件:

$$\begin{cases} \mathbf{p}_\pi = -\mathbf{p}_\mu, \\ E_\pi + p_\mu = m_\pi. \end{cases}$$

得
$$E_\mu = m_\mu \gamma = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi},$$

故
$$\gamma = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi m_\mu},$$

得
$$E_\mu^{(0)} = \frac{2m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2} \cdot E_\pi.$$

(b) 由前式: $\beta_\mu \cdot \beta_\pi = -\beta_\pi^2$ 或 $\beta_\mu \cdot \cos \theta = -\beta_\pi$,

有 $\beta_\mu \geq \beta_\pi$ 或 $\gamma_\mu \geq \gamma_\pi$. 即

$$\frac{E_\pi}{m_\pi} \geq \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi m_\mu},$$

故
$$E_\pi^{min} = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\mu}. \quad (\text{王力军})$$

§ 2 射线与物质相互作用 (4062—4085)

4062 (CCT, 1983)

高能 μ 子在物质中的能量损失主要是由于与 (a) 核子, (b) 核, (c) 电子的碰撞。

解: 答案为 (c)。因为 μ 子主要通过与物质的电子相互作用损失能量, 使电子电离或激发到原子的高能级。

(唐子洲)

4063 (CCT, 1983)

一束 μ^- 能被物质吸收, 因为 μ^- 可以 (a) 发射一个光子变成电子; (b) 被一质子吸收, 质子进入激发态; (c) 被一原子俘获, 进入围绕核的束缚轨道。

解: 答案为 (c)。 μ^- 可以被原子俘获在电子轨道上, 形成 μ 原子。

(唐子洲)

4064 (CCT, 1983)

在通过一个辐射长度后, 一个 1 GeV 的电子失去了 (a) 0.368 GeV, (b) 0, (c) 0.632 GeV 能量。

解: 答案为 (c)。 $E = E_0 e^{-x/\lambda}$, λ 为辐射长度, 所以

$$E = E_0 e^{-1} = 0.368 \text{ GeV}, \Delta E = 1 - 0.368 = 0.632 \text{ GeV}.$$

(唐子洲)

4065 (CCT, 1983)

一个相对论质子, 穿过 1 cm 厚的闪烁体时失去 1.8 MeV

的能量，最可能的机制是哪一个？(a) 电离，激发；(b) 康普顿效应；(c) 对产生。

解：答案为 (a)。因为质子在穿过介质时主要以电离和激发的方式损失能量。 (唐子洲)

4066. (CCT, 1983)

相对论量带电粒子在单位厚度 (g^{-1}cm^2) 物质中的平均能量损失为：(a) 500 eV；(b) 10 keV；(c) 2 MeV。

解：答案为 (c)。 $\left(-\frac{dE}{dx}\right) \approx (1 \sim 2) \text{MeV/gcm}^{-2}$ 。

(唐子洲)

4067 (CCT, 1983)

电子的临界能量是：(a) 其辐射损失与电离损失相等时的能量；(b) 电子使原子电离时的能量；(c) 可以进行核反应的阈能。

解：答案为 (a)。电子的能量增加到使其韧致辐射与电离损失相等时，其能量为临界能量。 (唐子洲)

4068 (CCT, 1983)

低能情况下重离子的失散主要是由于 (a) 有限动量；(b) 电离涨落状态；(c) 多次散射。

解：答案为 (c)。多次散射使离子前进方向改变，从而造成其失散。 (唐子洲)

4069 (CCT, 1983)

“费米坪”是由于 (a) 密度效应，(b) Lorentz 收缩。

(c) 相对论质量增加引起的。

解：答案为(a)。因为电离损失的增加和介质电子的密度有关，故在固体中， $\gamma > 10$ 以后， $\frac{dE}{dx} \approx$ 常数，对气体介质，

$\gamma > 100$ 时， $\frac{dE}{dx} \approx$ 常数。

(唐子洲)

4070 (CCT, 1983)

能量为 E ，速度为 v 的带电粒子在单次碰撞中，在能量间隔 dE' 中，损失能量为 E' 的几率正比于：

$$(a) \frac{E'}{E} dE', \quad (b) E dE', \quad (c) \left(\frac{1}{vE'} \right)^2 dE'.$$

解：答案为(c)。以与电子为例，单次碰撞中带电粒子损失能量只与粒子的速度和碰撞距离 b 有关， $E' = \frac{2z^2 e^4}{m_0 v^2 b^2}$ ， v 和 z

是带电粒子的速度和电荷数， m_0 为电子质量， b 为碰撞距离。

设介质中电子是均匀分布的，则 $dE' = -\frac{z^2 e^4}{m_0 v^2 b^2} db =$

$$-A \frac{db}{v^2 b^3}, \quad db = \frac{-v^2 b^3}{A} dE'. \quad \text{电子在 } b \text{ 到 } b+db \text{ 之间的几}$$

率为 $d\sigma \approx 2\pi b db$ ，代入 $b^2 = A/v^2 E'$ ， $d\sigma \approx 2\pi b \cdot \frac{v^2 b^3 dE'}{A}$

$$= \frac{2\pi v^2 b^4}{A} dE' = \frac{2\pi v^2 A dE'}{A v^4 E'^2} = 2\pi A \cdot \frac{dE'}{v^2 E'^2}$$

所以 $d\sigma \approx \left(\frac{1}{vE'} \right)^2 dE'.$

(唐子洲)

4071 (CCT, 1983)

高能带电粒子在物质中的散射主要是由于与 (a) 电子, (b) 核, (c) 夸克的作用。

解: 答案为 (a)。高能电子在和核韧致作用产生高能光子, 高能光子和电子作用形成电磁簇射, 是其在物质中的主要过程。高能强子在和核的作用下产生强子簇射是其在物质中的主要过程。而高能 μ 子则是与电子的电离激发是其在物质中的主要过程。 (范扬眉 唐子洲)

4072 (CCT, 1983)

带电粒子在厚为 x 的物质中的平均散射角随 (a) x^2 , (b) \sqrt{x} , (c) x 增加。

解: 答案为 (b)。 $|\bar{\theta}| = \frac{KZx^{1/2}}{pv} \propto x^{1/2}$ 。 (唐子洲)

4073 (Chi, 1979)

考虑一个 2cm 厚的塑料闪烁体直接耦合到一增益为 10^6 的光电倍增管表面的 10GeV 的粒子束射入闪烁体。(a) 如果束粒子是一个 μ 子, 估计光电倍增管阳极收集的电荷。(b) 假设可以探测到阳极上小到 10^{-12} 库仑的信号。如果束粒子是中子, 估计它从闪烁体中的质子上弹性散射的最小角度, 使它仍能被探测到。(c) 与 (b) 相同, 但是是从碳核上弹性散射。

解: (a) 从 μ 子的电离损失曲线估计, 对于 10GeV 的 μ 子, 在 2cm 的塑料闪烁体中大约损失 4MeV 的能量, 而闪烁体中每 100eV 的能量会产生一个光子。所以一个 μ 子在闪烁体中大约产生 4×10^4 个光子。

大约有 50% 的光子会进入光电倍增管，而大约 10% 的光子会打出光电子。对 10^6 的增益，阳极上将有 2×10^9 个电子，电荷量为 3.2×10^{-10} 库仑。

(b) 如图 4.8 所示，对于中子在实验室系中很小角度的散

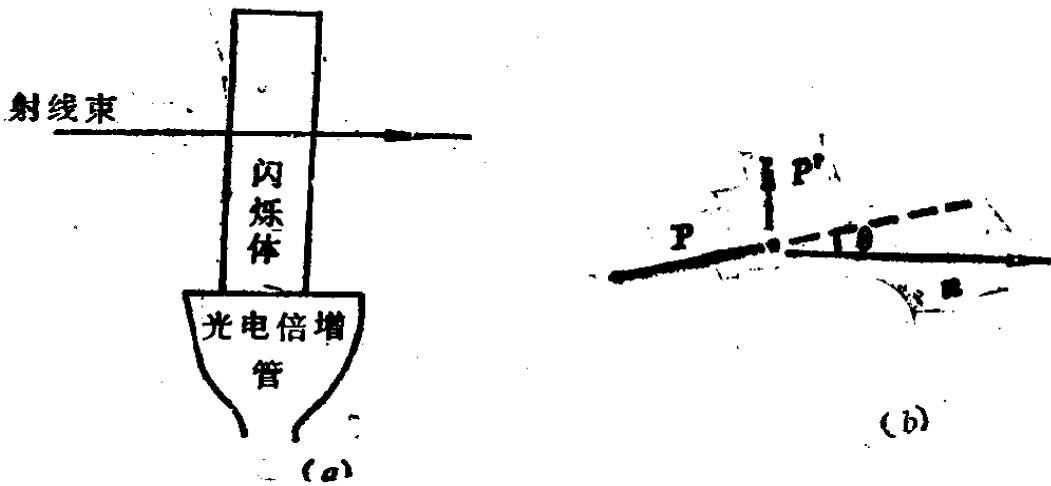


图 4.8

射。其动量改变垂直于它的运动方向为 $p\theta$ 。反冲质子所获得的动量即为 $p\theta$ ，则反冲质子的动能为 $\frac{p^2\theta^2}{2m_p}$ 。

由于 4MeV 的能量相应于 3.2×10^{-10} 库仑的电量，所以 10^{-12} 库仑的阈相应于阈吸收能量 12.5keV。对于这么小能量的质子，它的动能将完全损失在闪烁体中。所以我们可以认为产生的反冲质子的能量至少必须为 12.5keV。

$$\begin{aligned} \theta_{\min}^2 &= \frac{2m_p}{p_n^2} \times 12.5 \times 10^3 = \frac{2 \times 10^9}{(10^{10})^2} \times 12.5 \times 10^3 \\ &= 2.5 \times 10^{-7} (\text{rad})^2. \end{aligned}$$

上式中 m_p 取为 $10^9 \text{ eV}/c^2$ ， $\theta_{\min} = 5.0 \times 10^{-4} (\text{rad})$ 。

(c) 对于碳核其最小角度也可类似计算：

$$\theta_{\min}^2 (\text{碳}) = \frac{2m_c}{p_n^2} \times 12.5 \times 10^3 = \frac{2 \times 12 \times 10^9}{(10^{10})^2} \times 12.5 \times 10^3$$

$$= 3 \times 10^{-6} (\text{rad})^2.$$

$$\theta_{\min}(\text{碳}) = 1.73 \times 10^{-3} (\text{rad}). \quad (\text{林 辰})$$

4074 (CCT, 1983)

一个 100 瓦, 效率为 3 % 的灯泡每秒种可发出多少可见光子? ($\approx 5000 \text{ \AA}$). (a) 10^{19} (b) 10^9 (c) 10^{33} .

解: 答案为 (a). $E = h\nu = hc/\lambda$, $\lambda \approx 5000 \text{ \AA}$,
 $E \approx 2.4 \text{ eV}$,

$$N = \frac{W}{E} = \frac{100 \times 0.03 \times 10^7}{2.4 \times 1.6 \times 10^{-12}} \approx 0.78 \times 10^{19} \approx 10^{19} (\text{光子}).$$

4075 (Col, 1979)

计算 50keV 的 X 射线通过 1cm 的人体肌肉组织(无骨)的吸收大约是多少?

解: 由于人体的绝大部分是水, 故计算通常可按水来处理, 即密度 $\rho \approx 1 \text{ g/cm}^3$, 且 50keV 的 X 射线通常的吸收系数 $\mu \approx 0.221 \text{ cm}^2/\text{g}$, 故通过 1cm 厚的人体, X 射线的吸收为 $1 - e^{-\mu d} = 1 - e^{-0.221} = 20\%$.
 (管怀群)

4076 (Wis, 1975)

能量分别为 0.3eV, 3eV, 3keV 和 3MeV 的光子与物质发生作用, 上述不同能量的光子, 下列哪种作用最重要?
 (a) 电子对效应, (b) 光电效应, (c) 康普顿散射, (d) 瑞利散射, (e) 电离, (f) 喇曼散射.

解: 0.3eV 光子与物质发生作用主要是喇曼效应; 3eV 光子与物质作用主要瑞利散射及喇曼散射; 3keV 光子与物质作用主要是光电效应; 3MeV 光子与物质作用主要是康普顿散射.

4077 (Col, 1982)

讨论能量小于 10MeV 的 γ 射线与物质的相互作用, 列出在这一能区重要的相互作用形式, 描述每一种作用的物理机制并画出每种相互作用的能量的函数对总截面的相对贡献。

解: 能量小于 10MeV 的光子与物质的相互作用形式主要是光电效应、康普顿散射和电子对产生。

(1) 光电效应: 单个光子把它的全部能量交给一个原子中的电子, 电子的动能 E_e 等于光子的能量 E_γ 减去电子的结合能 ($E_e \approx E_\gamma - E_{\text{结合}}$)。动量守恒要求自由电子不能全部吸收光子成为光电子, 必须由原子核的反冲来保持动量守恒。光电效应产生在内层电子(主要是 K 和 L 层), $\sigma_{\text{光电}} \propto Z^5$, 并且在 $0.511\text{MeV} > E_\gamma < \epsilon_e$ 时 $\sigma_{\text{光电}} \propto E_\gamma^{-7/2}$, 在 $E_\gamma > 0.511\text{MeV}$ 时 $\sigma_{\text{光电}} \propto E_\gamma^{-1}$ 。所以在低能和高 Z 物质中光电效应是主要的。

(2) 康普顿散射: 光子被电子弹性散射, 由能量动量守恒可得出

$$E_e = E_\gamma \left(1 + \frac{mc^2}{E_\gamma (1 - \cos \theta)} \right)^{-1},$$

$$E_\gamma' = E_\gamma \left(1 + \frac{E_e}{mc^2} (1 - \cos \theta) \right)^{-1}.$$

E_e 为电子能量, E_γ 和 E_γ' 为散射前后光子的能量, θ 为光子的散射角, $\sigma_{\text{康}} \propto ZE_\gamma^{-1} \ln E_\gamma$ ($E_\gamma > 0.5\text{MeV}$)。在几百 keV 到几 MeV 的能区, 康普顿效应占主导地位。

(3) 电子对产生: 当 $E_\gamma > 2m_e c^2$ 时, 光子在核的库仑场中可产生正、负电子对, 电子对的动能为: $E_+ + E_- = E_\gamma$,

$-2m_0c^2$. 在低能时, $\sigma_{\text{电子偶}}$ 随 E , 增加而增加, 高能时, 近似为常数. 在 $E, >4\text{MeV}$ 的区域, 以电子对产生起主要作用. 图4.9给出各种相互作用和 E , 的关系. (管怀群)

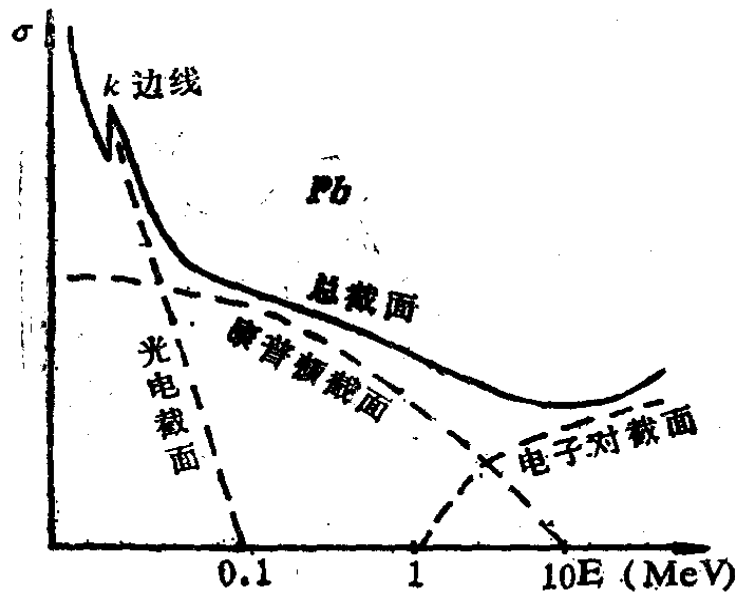


图4.9

4078 (Wis, 1976, 1978)

快中子可由观测反冲质子在某种(光学透明的)碳氢化合物上产生的闪烁现象来测定. 假定有一块 5cm 厚的闪烁体, 其中碳原子与氢原子的密度相同, 每种均为 4×10^{22} 个/cm³. (a) 能量约 5MeV 的中子垂直入射在闪烁板上, 有多大部分将通过该板而不与碳或氢核发生作用? (b) 有多大部分的人射中子会产生反冲质子? (假定 $\sigma_H = 1.5b, \sigma_C = 1.0b$). (注: $1b = 10^{-24}\text{cm}^2$).

解: (a) 当中子数为 N , 在通过厚度为 Δx 时, 由于中子和物质相互作用, 中子数的改变 ΔN 为

$$\Delta N = -(\sigma_H n_H + \sigma_o n_o) \Delta x.$$

通过 d 厚度时, 不发生作用的中子数为

$$N = N_0 e^{-(\sigma_H n_H + \sigma_o n_o) d}.$$

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{N}{N_0} = e^{-(\sigma_H + \sigma_n) n d} = e^{-(1.5 + 1.0) \times 10^{-24} \times 10^{23} \times 4} \\ &= e^{-0.5} = 60.5\%. \end{aligned}$$

(b) 与物质发生作用的中子数为

$$\eta' = \frac{N_0 - N}{N_0} \approx 39.5\%.$$

其中只有和 p 发生作用才有反冲质子.

$$\text{故} \quad \eta'' = \eta' \cdot \frac{1.5}{1.5 + 1.0} = \frac{3}{5} \eta' = 23.7\%.$$

(杨永安)

4079 (Wis, 1974)

快中子在铅中的平均自由程近似为 5cm, 求中子与铅作用的总截面(铅的质量数为 200, 密度为 10 g/cm³).

解: 单位体积中的铅原子数为

$$n = \frac{\rho}{A} \times N_0 = \frac{10}{200} \times 6.022 \times 10^{23} = 3.01 \times 10^{22} (\text{cm}^{-3}).$$

中子在铅中的平均自由程 $l = \frac{1}{n\sigma}$, σ 为中子与铅原子

作用截面:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{nl} = \frac{1}{3.01 \times 10^{22} \times 5} = 6.64 \times 10^{-24} (\text{cm}^2) \\ &= 6.64 (\text{b}). \end{aligned}$$

(钱剑明)

4080 (Wis, 1970)

放置镉版, 把慢中子束强度减弱到原来的 5% (镉的质量数为 112, 镉板密度为 $8.7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$). 镉吸收截面为 2500 靶, 求所需镉板厚度.

解: 中子束流经过厚度为 t 的镉板后的强度变化为 $I(t) = I_0 e^{-n\sigma t}$, I_0 为中子束流原来的强度, n 为镉板镉原子数密度, σ 为镉俘获截面.

$$n = \frac{\rho}{A} \times N_0 = \frac{8.7}{112} \times 6.022 \times 10^{23} = 4.7 \times 10^{22} (\text{cm}^{-3}).$$

所需镉板厚度为

$$t = \frac{1}{n\sigma} \ln \frac{I_0}{I(t)} = \frac{1}{0.7 \times 10^{22} \times 2500 \times 10^{-24}} \ln \frac{1}{0.05} \\ = 0.025 (\text{cm}). \quad (\text{钱剑明})$$

4081 (Wis, 1978)

一束中子通过密度为 $4 \times 10^{22} \mu/\text{cm}^3$ 的氢靶后被探测器 C 记录 (图 4.10). 在恒定中子通量下, 空靶时 C 记录到 5×10^5 中子事例, 当靶中充满氢时, 在同样时间内 C 记录到 4.6×10^5 中子事例. 估算 $n-p$ 散射截面和它的统计误差.

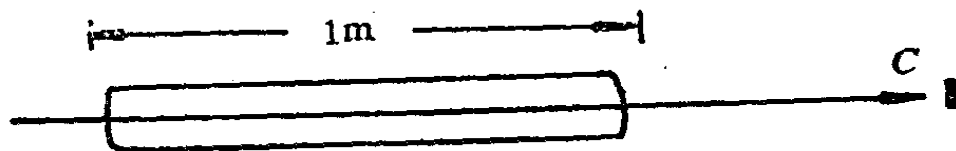


图 4.10

解: 设 $n-p$ 作用总截面为 σ , 则 N_0 个中子通过厚度为 t 的氢靶后中子数为 $N(t) = N_0 e^{-n\sigma t}$, n 为氢靶中氢原子密度 $n = 4 \times 10^{22} \mu/\text{cm}^3$.

空靶时 C 记录到的中子事例数为 N' ，C 对中子探测效率为 η ，入射中子数为 N_0 ，则 $N' = \eta N_0$ 。有靶时 C 记录到的中子数为 N'' ，

$$N'' = \eta N(t) = \eta N_0 e^{-n\sigma t},$$

所以
$$\frac{N''}{N'} = e^{-n\sigma t}.$$

$n-p$ 散射截面 σ 为

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{nt} \ln \frac{N'}{N''} = \frac{1}{4 \times 10^{22} \times 100} \ln \frac{5 \times 10^5}{4.6 \times 10^5} \\ &= 2.08 \times 10^{-26} \text{cm}^2. \end{aligned}$$

由误差传递公式得：

$$\begin{aligned} (\Delta\sigma)^2 &= \left(\frac{\partial\sigma}{\partial N'}\right)^2 (\Delta N')^2 + \left(\frac{\partial\sigma}{\partial N''}\right)^2 (\Delta N'')^2 \\ &= \frac{1}{(nt)^2} \left[\left(\frac{\Delta N'}{N'}\right)^2 + \left(\frac{\Delta N''}{N''}\right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{(nt)^2} \left[\frac{1}{N'} + \frac{1}{N''} \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta\sigma &= \frac{1}{nt} \sqrt{\frac{1}{N'} + \frac{1}{N''}} \\ &= \frac{1}{4 \times 10^{22} \times 100} \sqrt{\frac{1}{4.6 \times 10^5} + \frac{1}{5 \times 10^5}} \\ &\approx 5 \times 10^{-28} (\text{cm}^2). \end{aligned}$$

所以
$$\sigma = (2.08 \pm 0.05) \times 10^{-26} (\text{cm}^2)$$

$$= (20.8 \pm 0.5) (\text{mb}).$$

(钱剑明)

4082 (Col, 1981)

一束宽能谱中子沿着一个很长的石墨晶体轴向入射(如

图4.11)。实验发现快中子都从棒的侧面逃逸，只有慢中子从棒的顶端出射，简单解释并估计从棒的顶端出射的中子(其速度最大值不必引入符号)。

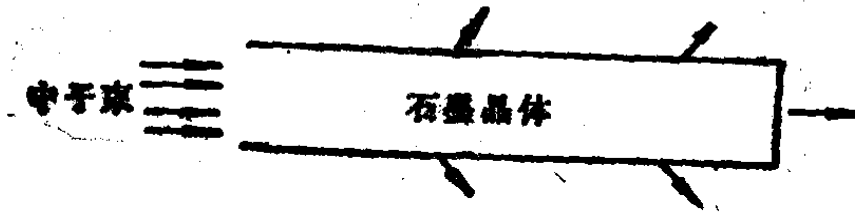


图 4.11

解：石墨晶体是一个冷中子过滤器，高能中子总是与石墨晶体中的核产生弹性碰撞而改变方向，最后逃逸出石墨棒，但由于中子的波动性，当中子的波长与石墨晶体中的晶格大小可以比较时，中子在晶体内发生相干现象，有：

$$m\lambda = 2d \sin \theta \quad m = 1, 2, 3 \dots$$

特别是当 $\lambda > 2d$ 时，除 $\theta = 0^\circ$ 外，不可能有相干散射，这时中子可以不受偏转地通过晶体，而石墨晶体中的碳核对中子的吸收截面很小，所以 $\lambda > 2d$ 的中子衰减也很少。石墨棒是一种多晶，晶格方向是杂乱无章的。高能中子通过弹性碰撞改变方向而最后逃逸出石墨棒，热中子也因遇到各种取向的晶体而会有布喇格散射改变方向最后也从棒的侧面逃逸。只有 $\lambda > 2d$ 的冷中子不受阻碍地从棒端出来。对石墨， $\lambda > 2d = 6.69 \text{ \AA}$ 。

估计中子的最大速度：

$$\begin{aligned} v_{\max} &= \frac{p}{m} = \frac{h}{m\lambda} = \frac{2\pi\hbar c^2}{\lambda mc^2} \\ &= \frac{3 \times 10^{10} \times 197 \times 10^{-19} \times 2\pi}{6.69 \times 10^{-8} \times 940} \end{aligned}$$

$$\approx 0.59 \times 10^5 (\text{cm/s}) = 590 (\text{m/s}),$$

即从石墨棒末端出来的中子最大速度为 590m/s.

(杨保忠)

4083 (Col, 1975)

3MeV 的电子中微子在物质中的平均自由程.

解: 应为 10^{17}g/cm^2 . 因为 3MeV 的中微子和物质的作用截面 $\sigma \approx 10^{-41} \text{cm}^2$, 物质的原子密度 $n \approx 10^{28} \text{cm}^{-3}$, 物质的质量密度 $\rho \approx 1 \text{g/cm}^3$. 因而中微子在物质中的平均自由程为

$$l = \frac{\rho}{n\sigma} \approx 10^{18} \text{g/cm}^2 \approx 10^{17} \text{g/cm}^2. \quad (\text{周平})$$

4084 (CUS, 1983)

当高能带电粒子通过介质时, 如果它的运动速度大于电磁波在介质中的传播速度, 就会产生切伦柯夫辐射. (a) 导出粒子速度 $v = \beta c$, 介质折射率 n , 及发生切伦柯夫辐射的方向与粒子飞行方向的夹角 θ 之间的关系式. (b) 在一个大气压和 20°C 时, 氢气具有折射率 $n = 1 + 1.35 \times 10^{-4}$. 电子 (质量为 $0.5 \text{MeV}/c^2$) 穿过此氢气介质时, 能产生切伦柯夫辐射所需最小动能是多少? 以 MeV 表示. (c) 一台切伦柯夫辐射粒子探测器是由一条充满一个大气压、 20°C 氢气的长管道和一个光学系统组成的. 该光学系统能探测到辐射光并测量出辐射角度 θ , (精确到 $\delta\theta = 10^{-3}$ 弧度). 一束动量为 $100 \text{GeV}/c$ 的带电粒子通过计数器, 由于动量已知, 从效果上讲切伦柯夫辐射角的测量就是对粒子静质量 m_0 的测量. 对 $m_0 \approx 1 \text{GeV}/c$ 的粒子, 用切伦柯夫计数器测定 m_0 的相对误差 (即 $\delta m_0/m_0$) 是多少? (精确到一级小量).

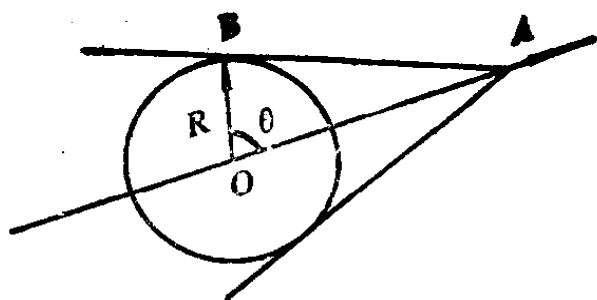


图 4.12

解: (a) 如图 4.12, 当粒子从 O 点经过 t 秒到 A 点时, 在 O 点时的辐射形成一个以 O 为球心、 $R = \frac{c}{n}t$ 为半径的球面, 故切伦柯夫辐射的波阵面是一个锥面。该图是它的剖面, 显然, 在

$$\Delta AOB \text{ 中, } \overline{OB} = R = \frac{c}{n}t, \overline{OA} = vt = \beta ct, \cos \theta = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{1}{\beta n}.$$

(b) 由 $\cos \theta \leq 1$ 得 $\beta \geq \frac{1}{n}$. 所以

$$\beta_{\min} = \frac{1}{n} = \frac{1}{1 + 1.35 \times 10^{-4}} \approx 1 \approx 1.35 \times 10^{-4}.$$

而

$$\begin{aligned} \gamma_{\min} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 + \beta)(1 - \beta)}} \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{2 \times 1.35 \times 10^{-4}}} \approx 60.86. \end{aligned}$$

故总能量

$$E_{\min} = T_{\min} + m_0 c^2 = \gamma m_0 c^2 = m_0 c^2 \times 60.86,$$

所以

$$\begin{aligned} T_{\min} &= m_0 c^2 \times 59.86 = 0.5 \times 59.86 \text{ MeV} \\ &= 29.93 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

(c) 由 $\cos \theta = \frac{1}{\beta n}$ 得

$$-\sin \theta d\theta = -\frac{1}{n\beta^2} d\beta,$$

$$d\beta = n\beta^2 \sin \theta d\theta.$$

而

$$\gamma = \frac{E}{m_0 c^2} = \frac{\sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}}{m_0 c^2},$$

由题设

$$\frac{m_0 c^2}{pc} \approx \frac{1 \text{ GeV}}{100 \text{ GeV}} = 0.01,$$

所以 $\gamma \approx p/m_0 c$. 这里 p 是给定的, 于是:

$$d\gamma = \frac{p}{c} \left(-\frac{1}{m_0^2} \right) dm_0.$$

又由 $1 + \beta \approx 2$, 得 $\beta \approx 1 - \frac{1}{2r^2}$,

所以

$$d\beta = \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-2 \right) \frac{d\gamma}{\gamma^3} = \frac{d\gamma}{\gamma^3}.$$

从而得到

$$-\frac{p}{c} \frac{dm_0}{m_0^2} \cdot \frac{1}{\gamma^3} = n\beta^2 \sin \theta d\theta.$$

利用

$$\frac{p}{m_0 c} \approx \gamma \text{ 及 } n = \frac{1}{\beta \cos \theta}.$$

可得

$$\frac{dm_0}{m_0} \approx \beta r^2 \tan \theta d\theta.$$

由 $\gamma = 100$, $\beta = 1 - \frac{1}{2 \times 10^4} = 1 - 0.5 \times 10^{-4}$, $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$

$= \frac{1}{n\beta}$, 即 $\theta^2 \approx 1.7 \times 10^{-4}$, 所以 $\tan \theta \approx \theta = 1.304 \times 10^{-2}$,

于是 $\frac{dm_e}{m_0} \approx 10^4 \times 1.3 \times 10^{-2} \times 10^{-3} = 0.13$. (杨永安)

4085 (Col, 1984)

一个动量为 $1.0 \text{ GeV}/c$ 的质子穿过高压气体, 气体的折射率可以通过气压的改变而变化. (c) 质子能产生 Cerenkov

辐射的最小折射率是多少？(b) 当气体的折射率为 1.6 时，Cerenkov 辐射将在什么角度出射？

解：(a) 由题知
$$p = \frac{m_0 \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

$$\beta = \left(\sqrt{1 + \left(\frac{m_0}{p} \right)^2} \right)^{-1} \approx 0.729.$$

所以能产生 Cerenkov 辐射的气体最小折射率为

$$n_{\min} = \frac{1}{\beta} = 1.37.$$

(b) 设出射角为 θ ，则

$$\cos \theta = \frac{1}{\beta n} \approx 0.86, \quad \theta \approx 31^\circ. \quad (\text{周平})$$

§ 3 探测技术和实验方法(4086—4105)

4086 (CCT, 1983)

在气体中由电离辐射产生一对自由离子的平均能量为：
(a) 与电离电位相等；(b) 在 20eV ~ 40eV；(c) 近似等于 11.5 eV.

解：答案为 (b)。产生一对自由离子的平均能量大于电离电位，因为还要有一部分能量作为离子的动能。(唐子渊)

4087 (CCT, 1983)

在 E/p 低时，电子在气体中的漂移速度 v_d ，严格遵守关系 $v_d \propto E/p$ ，这可用下列事实来解释：(a) 电子得到的能量 $\varepsilon = eE \int ds$ ，(b) 电子在与气体分子的非弹性碰撞中完全热

化, (c) 反应截面与电子速度无关。

解: 答案为 (c)。电子在电场中运动, 得到的平均速度 $\bar{v} = \frac{eE}{2m_e} \tau$, τ 为二次作用之间的平均时间。当反应截面与电

子速度无关时, $\tau \propto \frac{\sigma}{p}$ 。 σ 为反应截面, 这时有:

$$v_{Dr} \propto \frac{e\sigma}{2m_e} \frac{E}{p} \propto \frac{E}{p}$$

当 $\sigma = \sigma(v)$ 时, 情况就复杂了。

(唐子洲)

4088 (CCT, 1983)

平均电离势是下述不同能量范围内的平均; (a) 原子激发能级; (b) 分子结合能; (c) 电子壳层能量。

解: 答案为 (b)。平均电离功是产生一对正负离子所需的平均能量, 是分子结合能的平均。

(唐子洲)

4089 (CCT, 1983)

正比计数器对带电粒子的效率最终由 (a) 信噪比, (b) 总电离, (c) 初级电离决定的。

解: 答案为 (c)。因为当初级电离太少时, 由于统计涨落, 有一定的几率带电粒子不会产生初级电离, 由此引起失效。

(唐子洲)

4090 (CCT, 1983)

正比计数器中, 单能 X 射线谱经常出现两个峰, 这是由于: (a) 荧光辐射的逃逸; (b) 俄歇效应; (c) 康普顿散射。

解: 答案为 (c). 逃逸效应造成两个峰, 能量高的一个是 X 射线全能峰, 能量低的是由于 X 射线飞出探测器造成的. (唐子洲)

4091 (CCT, 1983)

一个盖革计数器, 外圆筒直径 10mm, 接地中间有一根直径 50 μ m, 加高压 +2000V 的丝, 求丝上的电场为 (a) 200²V/cm, (b) 150kV/cm, (c) 1.5 \times 10⁶V/cm.

解: 答案为 (b). 在此情况中, $E(r) = V/r \ln \frac{R}{r}$,

$$\text{所以 } E(R) = \frac{2000}{2.5 \times 10^{-4} \ln(2 \times 10^2)} = 0.015 \times 10^7 (\text{V})$$

$$= 150 (\text{kV/cm}).$$

(唐子洲)

4092 (CCT, 1983)

4091题中, 筒壁上的电场为: (a) 0V/cm, (b) 377V/cm, (c) 754V/cm.

解: 答案为 (c). $E(r) = V/r \ln R/r, E(R_0) = V/R \ln R/r$
 $= \frac{2000}{0.5 \ln 200} = 754 (\text{V/cm}).$ (唐子洲)

4093 (CCT, 1983)

限制正比计数器时间分辨的原因是什么? (a) 放大器的信噪比; (b) 阳极上信号产生速度小 (上升时间长); (c) 电离的无规分布及由此造成的漂移时间的不同.

解: 答案为 (c). 初级电离地点的任意性, 使不同位置产生的初级电子到达阳极的时间不同, 阳极讯号多是由最早

到达阳极的电子雪崩产生的，故引起较大的涨落，使分辨时间变差。
(唐子洲)

4094 (CCT, 1983)

在自淬灭盖革计数器中，什么机制使得放电扩展？(a) 从阴极上由紫外光打击次级电子，(b) 在阳极丝附近由紫外光电离气体，(c) 产生亚稳态且接着退激发。

解：答案为(b)。(杨保忠)

4095 (CCT, 1983)

纯 NaI 是很好的闪烁体吗？(a) 不是，(b) 只在很低的温度下才是，(c) 是。

解：答案为(b)。(唐子洲)

4096 (CCT, 1983)

双晶谱仪的优点是什么？(a) 快，(b) 在光探测器中给出高幅度输出，(c) 价格低。

解：答案为(b)。双晶闪烁体的优点在于可以抑制康普顿和逃逸峰，增加全能峰幅度。(唐子洲)

4097 (CCT, 1983)

带电粒子穿过 NaI(Tl) 闪烁体，能量损失为 $\frac{dE}{dx}$ ，光输出 $\frac{dL}{dx}$ 。(a) 与 $\frac{dE}{dx}$ 成正比，(b) $\frac{dE}{dX}$ 很高时出现饱和，(c) $\frac{dE}{dx}$ 高时出现饱和， $\frac{dE}{dx}$ 低时减小。

解：答案为(c)。NaI(Tl)并不是线性很好的晶体，它的光输出和粒子种类及粒子能量损失有关，在能量损失很小时，光输出偏离直线较大，当 $\frac{dE}{dX}$ 很大时，又出现饱和现象。
(唐子洲)

4098 (CCT, 1983)

NaI 探测器测量单能 γ 射线，发生在康普顿边缘和光电峰之间的事例。(a) 在薄探测器时占优势，(b) 在厚探测器时占优势，(c) 都不会占优势。

解：答案为(c)。一般情况下，总是在光电峰和康普顿边缘之间发生的事例少，在谱上呈谷状，在薄和厚探测器时都不会占优势。
(唐子洲)

4099 (CCT, 1983)

有机闪烁体发光是由于(a) 离开原来位置的 σ 电子能级，(b) 振动能级，(c) 转动能级之间的跃迁。

解：答案为(a)。实际上，有机闪烁体的发光快成份是由 3S_1 到离开原来位置的 1S_0 态之间的跃迁。
(唐子洲)

4100 (CCT, 1983)

一个总能量为 1.4 GeV 的质子穿过两个相隔 10m 的闪烁计数器，飞行时间是多少？(a) 300ms, (b) 48ns, (c) 33ns.

解：答案为(b)。质子的质量 $m_p \approx 0.938 \text{ MeV}$, $E = m_p \gamma$,

$$\gamma = \frac{E}{m_p} = \frac{1.4}{0.938} \approx 1.49, \quad \beta = 1 \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 0.74,$$

$$t = \frac{10}{0.74 \times 3 \times 10^8} \approx 45 \text{ ns.}$$

(唐子洲)

4101 (CCT, 1983)

4100 题中的粒子如果是电子, 那么飞行时间是多少?
(指飞行 10m 距离). (a) 330ns, (b) 66ns, (c) 33ns.

解: 答案为(c). 对 140GeV 的电子, $E \gg m_e$, $\beta \approx 1$,

所以 $t \approx \frac{X}{V} = \frac{10}{c} \approx 33 \text{ ns.}$ (唐子洲)

4102 (CCT, 1983)

你如何探测 500MeV 的 γ 射线? (a) 氢泡室, (b) 簇射探测器(BGO), (c) 盖革计数器.

解: 答案为(b). BGO 晶体辐射长度小, 可以做成全吸收电磁簇射量能器. BGO 晶体探测光子效率最高.

(唐子洲)

4103 (Wis, 1973)

如何测量下列粒子的平均寿命: (1) U^{238} , $\tau = 4.5 \times 10^9 \text{ a}$;
(2) A^0 超子, $\tau = 2.5 \times 10^{-10} \text{ s}$; (3) ρ^0 介子, $\tau = 10^{-22} \text{ s}$.

解: (1) 用比放射性法测定 U^{238} 寿命, $-\frac{dN}{dt} = \lambda N$, 其中

衰变率可用计数法直接测量, 已知样品的放射性原子核总数, 就可以求得 λ , 寿命 $\tau = \frac{1}{\lambda}$.

(2) 测 A^0 超子寿命要采用径迹法. 用气泡室拍摄 A^0 衰

变的照片, $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$, 在强磁场中, 根据 p, π^- 的径迹, 可以求出它们的动量, Λ^0 的动量就是它们的动量之和. 已知 Λ^0 的质量, 根据 Λ^0 的衰变距离, 就可以求出 Λ^0 的平均寿命.

(3) 测 ρ^0 介子的寿命要用不变质量法, 即从不变质量谱的测量得到其质量的自然密度, 再根据测不准关系 $\Delta E \Delta \tau \approx \hbar$ 推算出粒子的寿命. (胡平)

4104 (Pri, 1977)

在 e^+e^- 储存环中观测到的粲粒子在强子-强子相互作用中未被观测到过. 检测这类粒子的途径之一是观测其轻子衰变中的 μ 子. 例如, 考虑粲粒子 c : 具有下述衰变方式 $c \rightarrow \mu \nu$, 不幸的是, 由于存在由 π 衰变产生的 μ 子, 实验变得复杂了. 考虑费米实验室做的一个实验(图4.13), 用 400 GeV

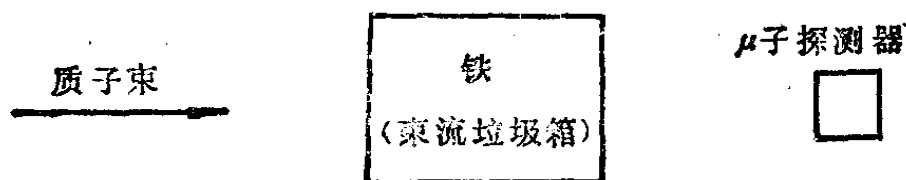


图 4.13

的质子轰击厚铁靶(束流垃圾箱):

进入探测器的 μ 子, 有些是 π 衰变产生的, 另一些是 c 衰变产生的(忽略其他过程). 从下列假设出发, 计算 c 衰变产生的 μ 子与 π 衰变产生的 μ 子数目之比.

- (a) 一旦 π 介子在束堆中发生反应就立即消失.
- (b) π 与 c 的能谱从最小能量到最大能量都是平坦的.
- (c) c 的质量为 $2\text{GeV}/c^2$, 其寿命 $\ll 10^{-10}\text{s}$.

(d) 可以不计 μ 子在铁中的能量损失.

(e) 可以忽略由 μ 子探测器的几何形状带来的影响.

(f) p - p 非弹性散射截面为 30mb , 在非弹性散射中带电 π 介子的多重性平均为 8 .

计算要具体. 说明做了哪些假定, 设 c 的总产生截面为 $10\mu\text{b}$ /每个 Fe 核, 且 c 10% 的衰变成 $\mu\nu$, 给出在 $E_s = 100\text{GeV}$ 时的上述比值.

解: 设入射质子束通量为 ϕ_0 , 题设靶为束流垃圾箱, 故靶应该很厚, 足以阻止所有质子束及质子产生的次级粒子 (μ, ν 除外). p 在 Fe 中的吸收引起束流衰减的规律是:

$$\phi = \phi_0 e^{-\sigma_{pp} N_p x}$$

$\sigma_{pp} = 30\text{mb}$, N_p 为单位体积内靶内质子数, 这里略去 p 和 n 的作用, 实际上, 高能 p 和核子的相互作用与电荷无关. 令 $\sigma_{pp} = \sigma_{pn}$. 且 pp 和 pn 产生的带电 π 的多重数是一样的. 对 ^{56}Fe ,

$$N_p = N_n = \frac{7.8 \times 28}{56} \times 6.022 \times 10^{23} \approx 2.34 \times 10^{24}/\text{cm}^3.$$

令 $x = 10\text{m} = 1 \times 10^3 \text{cm}$.

$$\ln\left(\frac{\phi_0}{\phi}\right) = (\sigma_{pp} N_p + \sigma_{pn} N_n) x = 2\sigma_{pp} N_p x = 140,$$

$\phi = 1.6 \times 10^{-61} \phi_0$, 即 p 束全部停止在靶内.

下面计算产生 c 夸克的数目.

题设 $\sigma_{p-Fe}(c) = 10\mu\text{b}$, $\sigma_{pp} = 30\text{mb}$. ($\sigma_{pp} = \sigma_{pn}$). 对 ϕ_0 产生 c 夸克的总数为

$$N_c \approx \frac{10 \times 10^{-8} \phi_0}{30 \times 56} = 5.95 \times 10^{-6} \phi_0.$$

τ_c 的大小远小于 10^{-10}s . 所以, 在靶内 c 夸克全部衰变.

由 c 夸克衰变产生的 μ 子总数:

$$N_{\mu_0} = 0.1 N_c = 5.95 \times 10^{-7} \phi_0.$$

下面计算由 π 衰变产生的 μ 子总数, 这个计算较复杂, 因为在不同的靶位置, 产生的 π 介子数不同, π 产生后, 一部分和核子相互作用损失, 一部分在飞行中衰变, 只有飞行中衰变的部分才产生 μ 子. π 介子与核子的相互作用截面, 在 高能时有 $\sigma_{\pi N} = \frac{2}{3} \sigma_{NN} \approx 20 \text{ mb}$. 在 x 到 $x + \Delta x$ 处, N_π 的

变化:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta N_\pi}{\Delta x} &= 8(\sigma_{pp} N_p + \sigma_{pn} N_n) \phi_0 - \left[\frac{\lambda}{c \gamma \beta_\pi} + (N_p \sigma_{p\pi} + \sigma_{n\pi} N_n) \right] N_\pi \\ &= 16 \sigma_{pp} \phi - \left(\frac{\lambda}{\beta_\pi \gamma_\pi c} + 2 \sigma_{\pi p} N_p \right) N_\pi. \end{aligned}$$

解方程得到 $N_\pi(x)$,

$$\begin{aligned} N_\pi(x) &= \frac{16 \sigma_{pp} N_p}{2 \sigma_{\pi p} N_p + \frac{\lambda}{\beta_\pi \gamma_\pi c} - 2 \sigma_{pp} N_p} \phi_0 \\ &\quad \times (e^{-2 \sigma_{pp} N_p x} - e^{-(2 \sigma_{\pi p} N_p + \frac{\lambda}{\beta_\pi \gamma_\pi c}) x}). \end{aligned}$$

π 介子在 x 处衰变的数目为

$$\begin{aligned} \Delta N_\pi(x, \lambda) &= \frac{16 \sigma_{pp} N_p \frac{\lambda}{\gamma_\pi \beta_\pi c} \phi_0}{2 \sigma_{\pi p} N_p + \frac{\lambda}{\gamma_\pi \beta_\pi c} - 2 \sigma_{pp} N_p} \\ &\quad \times (e^{-2 \sigma_{pp} N_p x} - e^{-(2 \sigma_{\pi p} N_p + \frac{\lambda}{\beta_\pi \gamma_\pi c}) x}) dx. \end{aligned}$$

$$\text{令 } \lambda' = \frac{\lambda}{\gamma_\pi \beta_\pi c}, \quad B = 2 \sigma_{pp} N_p, \quad B' = 2 \sigma_{\pi p} N_p + \lambda',$$

$$A = \frac{16\sigma_{pp}N_p\lambda'\phi_0}{2\sigma_{\pi p}N_p + \frac{\lambda}{\gamma_\pi\beta_\pi c} - 2\sigma_{pp}N_p}$$

$$= \frac{8B\lambda'\phi_0}{B^1 - B}$$

在靶内, π 衰变的总数:

$$N_\pi(\lambda) = \int_0^x \Delta N_\pi(x, \lambda) dx = A\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{B^1}\right)$$

$$= A \cdot \frac{B^1 - B}{B^1 \cdot B} = \frac{8\lambda^1\phi_0}{B^1}$$

题设 μ 子能谱是均匀分布, 且 μ_+ 和 μ_- 有相同的角分布. 这大大简化了问题的计算 (实际上低能 μ 子大于高能 μ 子). 由于 $B(\pi \rightarrow \mu\nu) \approx 100\%$, 所以有 $N_{\mu\pi} \approx N_\pi(\lambda)$.

对于 $E_\pi = 100\text{GeV}$, $E_\pi > 100\text{GeV}$. $\beta_\pi \approx 1$, $\gamma_\pi > 714$.

$$\lambda^1 = \frac{\lambda}{\gamma_\pi\beta_\pi c} \approx \frac{1}{2.6 \times 10^{-8} \times 714 \times 3 \times 10^{10}}$$

$$\approx 1.8 \times 10^{-6}/\text{cm},$$

$$\sigma_{pp}N_p = 30 \times 10^{-27} \times 2.34 \times 10^{24} \approx 7.02 \times 10^{-2}/\text{cm},$$

$$\sigma_{pp}N_{pp} \gg \lambda^1,$$

$$N_\pi(\lambda) \approx \frac{8\lambda^1\phi_0}{2N_p(\sigma_{pp} - \sigma_{\pi p})} = \frac{8 \times 1.8 \times 10^{-6}}{2 \times 2.34 \times 10^{24} \times 10 \times 10^{-27}}$$

$$\approx 6.2 \times 10^{-4}.$$

有
$$\frac{N_{\mu_0}}{N_{\mu\pi}} = \frac{5.95 \times 10^{-7}}{6.2 \times 10^{-4}} \approx 0.97 \times 10^{-3} \approx 10^{-3}.$$

(杨保忠)

4105 (Pri, 1980)

有人建议用实验研究 $p\bar{p}$ 湮灭产生窄的强子态, 贮存于

环内的 \bar{p} 将和垂直注入环内的氢气碰撞。通过改变贮存环内束流的动量来研究截面与质心系能量的依赖关系。对于某一终态，截面将会出现一共振峰。假设用这种方法产生一个质量为 3GeV ，宽度为 100keV 的强子态，问：(i) 怎样的束流动量才能产生这种态？(ii) 该实验的目的之一是研究粲子素，从该共振实验中，可预期得到哪些 J^P 值的共振态，而这些态在 e^+e^- 对撞中不能产生。(iii) 如果束流的动量分散为 0.1% ，这时共振态在质心系能量和截面曲线上有一个峰，这个峰的宽度是多少？(iv) 用氧气代替氢气，展宽多大？(v) 假定氢气流厚 1mm ，密度为 10^{-9}g/cm^3 ，有 10^{11} 个反质子在半径为 50m 的环中转圈，每 cm^2 截面每秒多少事例发生？每秒有多少 $p\bar{p}$ 事例发生。(vi) 如果宽度为 100keV 的共振态到 $p\bar{p}$ 的分支比为 10% ，预期 $p\bar{p}$ 总截面在峰值处是多少？

解：(i) 在实验室中，因气流速度很低， p 近似静止。

$$p + \bar{p} \longrightarrow M,$$

$$S = (E_p^{lab} + m_p)^2 - p_p^2 = 2m_p^2 + 2m_p E_p^{lab} = M^2,$$

所以
$$E_p^{lab} = \frac{M^2 - 2m_p^2}{2m_p} = \frac{3^2 - 2 \times 0.938^2}{2 \times 0.938} = 3.86\text{GeV}.$$

$$p_p^{lab} = \sqrt{E_p^{lab 2} - m_p^2} \approx 3.74(\text{GeV}).$$

(ii) 在 e^+e^- 对撞中，因 e^+e^- 湮灭成虚光子，光子的 $J^P = 1^-$ ，所以，只能产生 $J^P = 1^-$ 的共振态，对 $p\bar{p}$ 反应，它可以产生各种态，如：

$$\begin{aligned} p\bar{p} \text{ 自旋 } \quad S=0, \quad l=0, \quad J^P=0^+, \\ S=1, \quad l=0, \quad J^P=1^-, \\ S=1, \quad l=1, \quad J^P=0^-, 1^-, 2^-, \\ l=2, \quad J^P=1^+, 2^+, 3^+. \end{aligned}$$

所以除 $J^P = 1^-$ 态以外，它可产生 0^- , 0^+ , 1^+ , 2^- , 2^+ , 3^+ ... 共振态。

$$(iii). \Delta p = 0.001 p,$$

$$P^2 = \frac{M^4}{4m_p^2} - M^2,$$

$$2p\Delta p = \frac{M^3\Delta M}{m_p^2} - 2M\Delta M,$$

$$\begin{aligned} \text{所以} \quad \Delta M &= 2m_p^2 p^2 \left(\frac{\Delta p}{p} \right) / (M^3 - 2m_p^2 M) \\ &= \frac{2 \times 0.938^2 - 3.74^2 \times 0.001}{33 - 2 \times 3 \times 0.938^2} \\ &= 1.13 \times 10^{-3} (\text{GeV}). \end{aligned}$$

$\Delta M \gg \Gamma$ ，即实验上得到的线宽主要由 Δp 引起。

(iv) 用 O_2 代替 H_2 时， p 在氧核内有费米运动动能，这时因费米运动沿各方向运动，故会使共振峰变宽，对 ^{16}O 核，质子的最大费米动量为

$$p_s \approx \frac{h}{R_0} \left(\frac{9\pi z}{4A} \right)^{1/3} \approx \frac{\hbar}{R_0} \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{1/3} \approx 200 \text{ MeV}/c.$$

它比 \bar{p} 的动量分散 $\Delta p = 3.47 \text{ MeV}$ 大很多，把上式 $\left(\frac{\Delta p}{p} \right)$ 用费米动量代入，使谱线更宽，故用 O_2 代替 H_2 是不可取的。

(v) 求亮度 B 。 \bar{p} 的运动参数 $\beta = 0.97 \approx 1$,

$$B = N_\lambda \cdot N_{\text{靶}} = \frac{10^{11} \times 3 \times 10^{10}}{2\pi \times 50 \times 10^2} \times 0.1 \times 10^{-9} \times 6.023 \times 10^{23}$$

$$\approx 5.75 \times 10^{30} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

$p\bar{p}$ 碰撞事例率, 设 $\sigma_{p\bar{p}} \approx 30 \text{ mb} = 3 \times 10^{-26} \text{ cm}^2$,
 $N = \sigma B = 5.75 \times 10^{30} \times 3 \times 10^{-26} \approx 1.73 \times 10^5 (\text{s}^{-1})$.

(vi) 求共振峰的 σ

$$\sigma = \frac{(2J+1)}{(2J_p+1)(2J_{\bar{p}}+1)} \pi \lambda^2 \frac{\Gamma_{p\bar{p}} \Gamma}{(E-M)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$$

在共振峰时 $E = M$. 设共振态自旋 $J = 0$,

$$\sigma(J=0) = \pi \lambda^2 \frac{\Gamma_{p\bar{p}}}{\Gamma}$$

题设 $\frac{\Gamma_{p\bar{p}}}{\Gamma} = 0.1$, $\lambda = P^{*-1}$ 为折合波长.

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{E^2 - m_p^2}} = 0.85 (\text{GeV}^{-1}).$$

$$\sigma = \pi \lambda^2 \frac{\Gamma_{p\bar{p}}}{\Gamma} \approx 3.14 \times 0.85^2 \times 0.1 \approx 0.23 (\text{GeV}^{-2})$$

$$= 89.5 (\mu\text{b}). \quad (\text{杨保忠})$$

§ 4 误差和统计(4106—4118)

4106 (Col, 1975)

已知 α 的有效位数是: 4, 8, 12, 20.

解: 为 8, $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137.03604(11)}$. (王力军)

4107 (Chi, 1980)

假如放射源每秒计算平均为 4 次, 求在一秒钟内记录到 8 次的几率是多少?

解: 对小数目计数, 满足泊松分布:

$$p(8) = \frac{4^8}{8!} e^{-4} = 0.03. \quad (\text{黄晓舟})$$

4108 (Wis, 1973)

利用 X 射线及 X 射线探测器可检测铝质滤光板的均匀性, 将铝板放置在 X 射线中, 使其平面与 X 射线束垂直, 在铝板不同点进行了 6 次测量, 由这 6 次测量获得的计数分别为: 1.00×10^4 , 1.02×10^4 , 1.04×10^4 , 1.04×10^4 , 1.08×10^4 , 1.1×10^4 .

- (a) 计算这些测量的标准误差.
- (b) 由这些测量数据, 对铝板的均匀性得出什么结论?
- (c) 已知 $N_t = N_0 e^{-\mu t}$, N 的误差与 t 的误差有何关系?
- (d) 给定一组测量计数值, t 的百分误差是在 t 大时还是 t 小时较大?

解: (a) 计数 N 的标准误差为 \sqrt{N} , 故这 6 次测量的标准误差分别为

$$1.00 \times 10^2, 1.01 \times 10^2, 1.02 \times 10^2, 1.03 \times 10^2, 1.04 \times 10^2, 1.05 \times 10^2.$$

(b) 由于这 6 次测量的 $N \pm \sqrt{N}$ 区间互相错开, 已超出 3 倍方差, 故铝板均匀性较差.

(c) N 的误差与 t 的误差由误差传递公式联系:

$$N = N_0 e^{-\mu t},$$

$$(\Delta N)^2 = \left(\frac{\partial N}{\partial t} \right)^2 (\Delta t)^2 = \mu^2 N^2 (\Delta t)^2,$$

所以 $\Delta N = \mu N \Delta t$.

(d) $\frac{\Delta t}{t} = \frac{1}{\mu t} \frac{\Delta N}{N} \times 100\%$, 对一组给定的计数值来说.

t 小时 t 的百分误差较大. (钱剑明)

4109 (CCT, 1983)

用重建电子对质量的办法, 测量了 25 个 $J \rightarrow e^+ e^-$ 事例, 仪器测量精度 $\Delta m/m = 1\%$. 平均质量为 3.100 GeV . 求误差是多少? (a) 6.2 MeV , (b) 1.6 MeV , (c) 44 MeV .

解: 答案为 (a). $\frac{\Delta m}{m}$ 实际上是一次测量的精确度, Δm 可

以认为是一次测量的误差. 对 25 次测量为:

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{\sqrt{25}} = \frac{\frac{\Delta m}{m} m}{5} = \frac{0.01 \times 3.1 \times 10^3}{5} = 6.2 \text{ MeV}.$$

(唐子洲)

4110 (Col, 1982)

在充以 1 大气压的空气中的云室内, 5 MeV α 粒子显出

4cm 长的径迹, 大约需观察多少个径迹才可能有一次机会发现由于与核碰撞引起的大角度锐弯折?

解: 核半径 $R = r_0 A^{1/3}$, $r_0 = 1.2 \text{fm}$, 故面积 σ 为

$$\sigma = \pi R^2 = 4.3 \times 10^{-25} \text{cm}^2.$$

云室内核密度 $n = \frac{N_A}{22.4(l)} = 2.69 \times 10^{19} \text{cm}^{-3}.$

平均自由程 $\lambda = \frac{1}{n\sigma} = 8.6 \times 10^4 \text{cm}^2.$

故, 需观察 $\frac{8.6 \times 10^4}{4} \approx 22000$ 次事件平均才有一次机会看

到由于与核碰撞而引起大角散射.

(王力军)

4111 (CUS, 1984)

正的 μ 介子 (μ^+) 衰变为一个正电子和两个中微子:

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu.$$

其平均寿命为 2 微秒. 考虑沿某坐标系 z 轴极化的静止 μ^+ 介子, 极化度为 p , 假如我们将观察局限于 μ 子衰变而得的最高能正电子, 这些正电子出射具有角分布 $I(\cos\theta) d\Omega = (1 + p \cos\theta) \frac{d\Omega}{4\pi}$, 这里 θ 为正电子运动方向与 z 轴夹角, $d\Omega$ 为

正电子出射方向的立体角元.

(a) 假定 $p = +1$. 则在观察到的前 6 个正电子中, 3 个朝前半球 ($\cos\theta > 0$), 3 个朝后半球 ($\cos\theta < 0$) 出射的几率是多少?

(b) 假定 p 接近于 1, 但不知其准确值, 试想通过比较正电子向前出射的数目 (N_f) 和向后出射的数目 (N_b) 来测定 p , 需要观察多少 μ 子衰变 N ($N = N_f + N_b$) 才能使测定 p 的

精确度为 $\pm 1\%$?

解: (a) 对任意 p 值, 正电子向前出射几率为

$$p_f = 2\pi \int_0^1 (1 + p \cos \theta) \frac{d \cos \theta}{4\pi} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{p}{2}\right).$$

向后出射几率为

$$p_b = 2\pi \int_{-1}^0 (1 + p \cos \theta) \frac{d \cos \theta}{4\pi} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{p}{2}\right).$$

当 $p=1$ 时, 有 $p_f = \frac{3}{4}$, $p_b = \frac{1}{4}$. 故所求几率由二项分布公

式为

$$\frac{6!}{3!3!} \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{135}{1024} \approx 0.132.$$

(b) 我们从测量 $p_f = \frac{N_f}{N}$ 来估计 p , 由 p_f 的误差:

$$\Delta p_f = \sqrt{\frac{p_f(1-p_f)}{N}}, \quad (\text{根据二项式分布})$$

又由

$$p_f = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{p}{2}\right),$$

所以

$$\Delta p_f = \frac{1}{4} \Delta p = \frac{1}{4} \times 0.01 = 0.0025.$$

从而

$$N = \frac{p_f(1-p_f)}{(\Delta p_f)^2} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{1}{4}}{0.0025^2} = 30000. \quad (\text{杨永安})$$

4112 (CUS, 1983)

大气中的二氧化碳含有近于稳定不变的放射性¹⁴C沉积, 该沉积是由次级宇宙射线与大气中的氮相互作用而源源不断

地产生所造成的。当一个有机生物体死亡时，它的碳中就含有大气的 ^{14}C 沉积，但随着时间的流逝， ^{14}C 的含量就由于放射性衰变而减少，这就是放射性碳测年技术的基础。在下面的问题中可以假定大气中 $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$ 比值为 10^{12} ， ^{14}C β^- 衰变的半衰期为 5730 年。(a) 设想用放射性碳测定年代法测定碳样品的年龄。要使年龄的测定精度为 ± 50 年，(标准偏差 50 年)需要多少克碳样品，假定样品年龄为 5000 年，用 100% 探测效率的探测器记数一小时，且没有本底。(b) 重复 (a) 部分，但此处假定探测器存在本底，起因于探测器自身的放射性以及宇宙线等，精确测定其本底计数率为每小时 4000 次计数。

解：考虑统计误差对测定年代的影响，利用

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

有
$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = N e^{-\lambda t},$$

$$\Delta A = -\lambda^2 N_0 e^{-\lambda t} \Delta t = -\lambda A \Delta t,$$

$$\frac{\Delta A}{A} = -\lambda \Delta t.$$

要求 Δt 为 50 年，又 $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$,

$$\frac{\Delta A}{A} = -\lambda \Delta t = \frac{\ln 2 \cdot \Delta t}{T_{1/2}}.$$

又从统计计数 $\frac{\Delta A}{A} = \frac{1}{\sqrt{A}}$ ，所以

$$A = \left(\frac{T_{1/2}}{50 \ln 2} \right)^2 = \left(\frac{5730}{50 \times \ln 2} \right)^2 = 2.73 \times 10^4 (\text{h}^{-1}).$$

设碳样品重为 x 克， $t = 5000$ 年时，每小时衰变 2.73×10^4 。

$$A = \lambda N = \frac{\lambda x}{12} \cdot N_A \cdot 10^{-12} e^{-\lambda t},$$

所以

$$\begin{aligned} x &= \frac{12A}{\lambda N_A} \times 10^{12} \times e^{\lambda t} \\ &= \frac{12 \times 2.73 \times 10^4 \times 10^{12} \times 5730 \times 365 \times 24}{\ln 2 \times 6.023 \times 10^{23}} \\ &\quad \times e^{\frac{\ln 2 \cdot 5000}{5730}} = 72.1 \text{ (g)}. \end{aligned}$$

(b) 当有本底时, 这时探测器计数为

$$A + A_B \quad A_B \text{ 为本底计数率}$$

统计误差为 $\sqrt{A + A_B}$, 由题设, 本底计数已精确测定, 故可忽略本底的统计涨落, 相对误差为

$$\frac{\Delta A}{A} = \sqrt{\frac{1}{A} + \frac{A_B}{A^2}} = \left(\frac{\ln 2 \cdot \Delta t}{T_{1/2}} \right) = C,$$

$$C^2 A^2 - A - A_B = 0.$$

所以

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2C^2} \left(1 + \sqrt{1 + 4C^2 A_B} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{T_{1/2}}{\ln 2 \cdot \Delta t} \right)^2 \left\{ 1 + \left[1 + 4 \times 4 \times 10^3 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left(\frac{\ln 2 \cdot \Delta t}{T_{1/2}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \times 2.73 \times 10^4 [1 + (1 + 16 \times 10^3 \times 3.66 \\ &\quad \times 10^{-5})^{\frac{1}{2}}] = 3.08 \times 10^4 \text{ (h}^{-1}\text{)}. \end{aligned}$$

$$m = \frac{3.09 \times 10^4}{2.73 \times 10^4} \times 72.1 = 81.4 \text{ (g)}. \quad \text{(杨永安)}$$

4113 (CCT, 1983)

一个 Cerenkov 探测器,对每个人射粒子可以产生 20 个光子. 光电倍增管光阴极转换效率为 10%. 管子中一个光电子将产生一个信号. 入射 1000 个粒子,漏计数为: (a) 没有, (b) 8, (c) 130.

解: 答案为 (c). 题设一个光子在光阴极上产生光电子的效率是 10%. 若不考虑产生光子的统计性,即每次粒子产生 20 个光子,这 20 个光子在光阴极上产生 N 个光电子的几率为

$$W(N) = \frac{N_0!}{N!(N_0 - N)!} p^N (1 - p)^{N_0 - N},$$

($N_0 = 20, p = 0.1$).

不产生光电子的几率:

$$W(0) = \frac{N_0!}{N_0!} p^0 (1 - p)^{N_0} = (1 - p)^{N_0} = 0.9^{20} = 0.122.$$

对 1000 个人射粒子,漏计数为 122,当考虑产生光子的统计性后, $W(0)$ 还要大,故为 (c). (唐子洲)

4114 (Wis, 1970)

一个辐射源放出二种辐射, A 和 B , 并通过一个可以区分它们的探测器探测. 在一确定的时间间隔内,观察到 1000 个 A 计数和 2000 个 B 计数. 设产生 A 和 B 的过程是独立的,

测量比值 $r = \frac{N_A}{N_B}$ 的统计误差是多少?

解: 由于 A, B 的产生是独立的,且探测器可以区分 A 和 B . 这相当于两个探测器分别探测 A 源和 B 源. N_A 和 N_B 的统计误差为

$$\frac{\sigma^2(N_A)}{N_A^2} = \frac{1}{N_A}, \quad \frac{\sigma^2(N_B)}{N_B^2} = \frac{1}{N_B},$$

$$\frac{\sigma(r)}{r^2} = \frac{\sigma^2(N_A)}{N_A^2} + \frac{\sigma^2(N_B)}{N_B^2} = \frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_B},$$

$$\frac{\sigma^2(r)}{r} = \sqrt{\frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_B}} = \sqrt{\frac{1}{1000} + \frac{1}{2000}} = 3.87\%.$$

(林 辰)

4115 (CUS, 1982)

利用闪烁计数器研究一种 β 放射性同位素的样品。该计数器能够探测出衰变电子并精确测定每个单独衰变的寿命。

(a) 令 τ 表示平均衰变时间。样品包含 N 个原子， N 值很大。每次衰变探测到的几率为 ε 。计算计数器的平均计录率。可以假定 τ 比任何测量时间要长得多。在一个测量 τ 的实验中，一小时记数为 10,000 次。计数器的探测效率独立测定为 0.4, N 为 10^{23} 。 τ 的测量值为多少？ τ 值的统计误差（标准偏差）为多少？ (b) 设闪烁器中两个连续事件发生在时间 t 到 $t+dt$ 内的几率为 $P(t)dt$ 。计算 $P(t)$ ，以 t , ε , N , τ 表示。

解：(a) 计数率为 $R = G\varepsilon/\tau$ ，由给定数据得 $\tau = 0.4 \times 10^{10}$ 小时 $\approx 4.5 \times 10^{14}$ 年。相对误差为 (总计数) $^{1/2}$ 。于是：

$$\frac{\Delta\tau}{\tau} = \frac{1}{\sqrt{10^4}}, \quad \Delta\tau \approx 4.5 \times 10^{12} \text{ 年}.$$

(b) 两次计数间的平均时间为 $t = \tau/\varepsilon N$ 。故

$$P(t) = \frac{1}{t} e^{-t/\tau} = \frac{\varepsilon N}{\tau} e^{-\varepsilon N t/\tau}. \quad (\text{杨永安})$$

4116 (CCT, 1985)

最小电离的带电粒子穿过约 1 mg cm^{-2} 气体，能量损失

有涨落，半高宽度除以最可几能量损失(相对半高宽)约为：
(a)100%，(b)10%，(c)1%。

解：答案应为(b)。最小电离的带电粒子通过 1mg cm^{-2} ，损失约 2keV 能量，气体平均电离能约为 30eV 。

$$\eta = 2.354 \left(\frac{\varepsilon F}{E_0} \right)^{1/2} = 2.354 \left(\frac{30F}{2000} \right)^{1/2} \approx 29F^{1/2}\%$$

$F < 1$ 称为法诺因子。

(唐子洲)

4117 (CCT, 1983)

能量为 ε 的 X 射线被正比计数器吸收，平均产生 \bar{n} 对离子对。均方根涨落 σ 为：(a) $\sqrt{\bar{n}}$ ，(b) $\sqrt{F\bar{n}}$ ， $F < 1$ ，(c) $\pi \ln \bar{n}$ 。

解：答案为(b)。

(唐子洲)

4118 (CCT, 1983)

一块 1cm 厚的闪烁体，在其中损失每 100eV 的能量产生一个可见光子。它由一个传输效率为 10% 的光导连接在一个光电倍增管上(阴极转换效率 10%)，使光子转换成电子。对于上题中的质子，脉冲高度的涨落 σ 是多少？(a) 21.2% ，(b) 7.7% ，(c) 2.8% 。

解：答案为(b)。 $\Delta E = 1.8\text{MeV} = 1.8 \times 10^6\text{eV}$ ，

$$n_0 = \frac{1.8 \times 10^6}{100} = 1.8 \times 10^4 \text{ 个}$$

光电子数： $N = 1.8 \times 10^4 \times 0.1 \times 0.1 = 180$ 个

$$\sigma = \frac{\sqrt{N}}{N} = 1/\sqrt{N} = 1/\sqrt{180} = 7.5\%$$

(唐子洲)

§ 5 粒子束和加速器(4119—4131)

4119 (Col, 1978)

(a) 论述回旋加速器、稳相加速器和同步加速器的工作原理。它们之间的重要的不同点是什么？是什么限制了从每种加速器可能获得的最大能量？(b) 论述直线加速器（例如象 SLAC 那样）的基本工作原理。和环形加速器相比，直线加速器的优点和缺点是什么呢？(c) 近年来为什么要建造对撞束加速器（交叉储存环）？它和传统的固定靶加速器比起来有什么优点和缺点？

解：(a) 回旋加速器主要由两块 D 形电极构成，在电极内部粒子只受主导磁场的作用作圆周运动，这个主导磁场是恒定的。两块电极上加有相位相差 180° 的高频场，使粒子在通过两电极的间隙时受到加速。若忽略间隙，粒子的回旋周期可由 $T_c = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{zeB}$ 来估计。由于 B 不变，随着能量

即 m 的增大，粒子的回旋周期也会变长，粒子到达电极间隙时相对高频场的相位就会改变，多圈这样的相移累积就可能使粒子在经过间隙时落入减速区，失去加速作用，这样粒子就只可能在落入减速区前的有限的圈数里获得加速，而所能实现的高频场的幅值自然就限制了粒子能获得的最大能量。

稳相加速器克服了上述不足，它通过调节高频场频率的方法使粒子的运动和高频场同步，这样上述限制极限能量的因素就不复存在，从原理上说，稳相加速器并没有能量上限。但是，稳相加速器的磁场主要分布在一整个圆面上，这个圆的

半径比粒子的最终轨道半径还要大一些，因此磁铁重量很大，并且磁铁的重量随着粒子的最终能量差不多成三次方增加，所以实际上受磁铁大小的限制不可能建造能量很高的稳相加速器。

在同步加速器中，使粒子偏转的磁场不再是恒定的，它随粒子能量的改变而同步变化，使粒子围绕一条固定的轨道作回旋运动，加速电压的频率和粒子在这条中心轨道上的回旋频率相同或是它的整数倍以保证谐振加速。它进一步克服了稳相加速器中限制粒子能量的因素，因而可以把粒子加速到很高能量。由于高能量的粒子受向心加速度的作用要辐射电磁场，即产生同步辐射，而且同步辐射的功率和粒子能量的四次方成正比，所以当辐射功率大到一定程度以后一圈中获得的能量将全部辐射出去，这个新的因素限制了同步加速器的能量上限。

比较这三种加速器可以看到，在回旋加速器中磁场的大小和高频场的频率都是不变的，在稳相加速器中磁场仍是不变的，但高频场的频率随粒子能量同步变化，但粒子的轨迹仍然是类似于螺线的轨迹，而在同步加速器中，磁场大小和高频加速场的频率都是调变的，粒子固定在一个轨道上运动。

(b) 在象 SLAC 那样的大型电子加速器中，用一定结构的波导作为加速管，这种结构使其中的微波场的相速等于光速，这样馈入微波功率以后，经过初步加速的电子便能和其中的电磁场同步前进，从而不断受到加速电场的作用，到另一端时就获得了能量。和环形加速器比起来，直线加速器有许多优点：电子粒子沿直线轨道运动，粒子的入射和出射都比较容易。同时由于是直线轨道，辐射损失可以忽略不

计，尤其适合于把电子加速到很高能量。建造直线加速器可以逐步加长，提高最终能量，灵活性较大。它的缺点是加速器可能会很长，而且和同能量的回旋式加速器相比，它的造价要高。

(c) 如果用静止质量为 m ，能量为 E 的运动粒子来撞击静止的同种粒子，有效作用能为 $\sqrt{2mE}$ ，而如果是两束同样的粒子束对撞，则有效作用能为 $2E$ 。显然能量越高，打静止靶方法的有效作用能所占的比例越小。由于粒子能量的提高有种种困难，所以近年来建造了对撞机，这样在不提高加速器极限能量的情况下，大大增加了有效作用能。这是对撞机的主要优点，但由于受加速器束流强度和粒子密度的限制，对撞机的亮度比打静止靶的亮度要低，这是对撞机的弱点。

(周 平)

4120 (Col, 1975)

(a) 简要描述并比较回旋加速器和同步加速器。说明为什么不用；(b) 回旋加速器把质子加速到 2GeV ？(c) 同步加速器把电子加速到 30GeV ？

解：(a) 在回旋加速器中，粒子受到的作用是基本均匀的磁场的偏转和两个 D 形电极间隙处的电场的加速， D 形电极上的高频场的频率是固定的，两个电极的相位相差 180° 。正常情况下，粒子到达 D 形盒间的间隙时总是受到加速作用，随着粒子能量的不断增大，它在恒定磁场中的回旋半径也不断增大，同时随着质量的变大它的回旋频率也不断减小，因此到达 D 形电极间隙时相对高频场的相位也会不断变化。而同步加速器偏转磁场不再是恒定不变的，它按照粒子的能量变化而调变，使粒子始终在一条固定的轨道上运动，而粒子

在轨道上的一处或几处受到与粒子运动谐振的高频电场的加速，能量不断提高。

回旋加速器和同步加速器相比，主要不同是回旋加速器的偏转磁场是基本均匀的，粒子的回旋半径和受加速的相位是不断改变的，同步加速器中粒子的轨道固定，加速相位也是不变的。

(b) 根据前面所述，在回旋加速器中，粒子的轨道半径和加速相位随着粒子能量的增加而不断变化，当所加速的能量和粒子的静止能量接近时，相移量就很可观了，由于每圈相移的迭加，最终会使粒子在到达D形电极间隙时落入高频电场的减速区，因而能量不能继续提高。质子的静止质量约为1GeV，要用回旋加速器使质子加速到2GeV必须使质子在落到减速区之前达到2GeV，而这样所要求的加速电压是不可能达到的。

(c) 同步加速器不存在回旋加速器中的相移问题，因而可以使粒子加速到较高能量，但到一定能量后，由于粒子受到很大的向心加速度作用，会辐射出电磁波而损失能量，使得每圈实际加速的能量减少，粒子的能量越高、质量越小这种辐射(即同步辐射)就越大，到一定能量时粒子每圈由于同步辐射损失的能量就会等于受加速作用而获得的能量，也就丧失了加速的功能。由于电子的静止质量仅为0.511MeV，因而想用同步加速器把电子加速到30GeV必须加大加速器的直径，或提高加速电压，但两者都是很困难的。(周平)

4121 (Col, 1975)

位于Batavia的500 GeV加速器的半径为： 10^2m ， 10^3m ， 10^4m ， 10^5m 。

解：应为 10^8m 。在磁场 B 中质子的回旋半径 R 为 $R = \frac{mv}{eB}$ 。500GeV 的质子 $v \approx c$ ，而加速器中磁场， B 为 $1 \sim 2\text{T}$ ，因而 $R \approx 10^8\text{m}$ 。 (周 平)

4122 (Col, 1983)

在一个现代质子同步加速器(粒子加速器)中，平衡轨道附近的质子的稳定性是由保持粒子在平衡轨道(半径为 R)上的磁场来提供的，这个磁场是非均匀的，常常表示为 $B_z = B_0 \left(\frac{R}{r}\right)^n$ ，且与 θ 无关。其中 z 是垂直于平衡轨道平面(即竖直方向)的坐标，在平衡轨道处 $z = 0$ ， B_0 是保持粒子在半径为 R 的平衡轨道上所需的恒定场， r 是粒子的实际径向位置(即 $\rho = r - R$ 粒子相对平衡轨道的水平位移)， n 是某个常数。对于特定的 n 值推导水平和竖直 β 振荡的频率。对于什么范围内的 n 值，粒子才能在水平和竖直方向都围绕平衡轨道作稳定的振荡？

解：粒子的运动方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(m \frac{dr}{dt} \right) - mr \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 &= eE_r + eB_z r \frac{d\theta}{dt} - eB_0 \frac{dz}{dt}, \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(mr^2 \frac{d\theta}{dt} \right) &= eE_\theta + eB_r \frac{dz}{dt} - eB_z \frac{dr}{dt}, \\ \frac{d}{dt} \left(m \frac{dz}{dt} \right) &= eE_z + eB_\theta \frac{dr}{dt} - eB_r r \frac{d\theta}{dt}. \end{aligned} \right\} (1)$$

在粒子的轨道上，没有电场。由于磁场是与 θ 无关的，可以得到：

$$E_\theta = E_r = E_z = B_\theta = 0.$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(m \frac{dr}{dt} \right) - mr \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 &= eB_z r \frac{d\theta}{dt}, \\ \frac{d}{dt} \left(m \frac{dz}{dt} \right) &= -eB_r r \frac{d\theta}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$r = R + \rho$, ρ 和 z 为一阶小量, 以下只保留一阶小量,

$$B_z(r, z) = B_0 \left(\frac{R}{r} \right)^n \approx B_0 \left(1 - n \frac{\rho}{R} \right),$$

由 $\nabla \times B = 0$, 可得 $\frac{\partial B_r}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial r}$,

$$\begin{aligned} B_r(\rho, z) &\approx B_r(\rho, 0) + \left. \frac{\partial B_r}{\partial z} \right|_{z=0} \cdot z \\ &= \left(\frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \Big|_{z=0} \cdot z \approx -n \frac{B_0}{R} z. \end{aligned}$$

当 $r = R$ 即在平衡轨道上时, 方程为

$$-mR \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = eB_0 R \frac{d\theta}{dt},$$

即
$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{eB_0}{m}.$$

记 $\frac{d\theta}{dt} = -\omega_0$, 并代入 $r = R + \rho$ 和 B_z 和 B_r 的近似式, 只保

留零阶小量, 方程变为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \rho}{dt^2} &= -\omega_0^2 (1-n) \rho, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= -\omega_0^2 n z. \end{aligned} \right\}$$

由此方程组可以看出, 径向在 $n < 1$ 时有稳定的振荡, 其频率为

$$\omega_p = \sqrt{1-n} \omega_0 = \sqrt{1-n} e \frac{B_0}{m}.$$

竖直方向在 $n > 0$ 时有稳定的振荡，其频率为

$$\omega_z = \sqrt{n} \omega_0 = \sqrt{n} e \frac{B_0}{m}.$$

显然只有满足 $0 < n < 1$ ，粒子才能在水平和竖直两个方向都围绕平衡轨道作稳定的振荡。 (周 平)

4123 (Col, 1980)

一高能加速器产生两束反向运转的质子，这两束质子然后对头碰撞，每一束能量都是 30GeV 。(i) 在质心系中，碰撞的总能量是多少？(ii) 如果质子轰击一个静止的氢靶，给出同 (i) 的质心系总能量，那么常规质子加速器所需要的能量是多少？(iii) 如在这台加速器中 p - p 碰撞的反应率是 $10^4/\text{s}$ ，那么在 5m 长管道中质子与剩余气体碰撞几率也是这个数值时，管中所需的真空度是多少？加速器周长为 1000m ， $\sigma_{p\text{-air}} = 10^{-25}\text{cm}^2$ ，束面积为 1mm^2 。

解：(i) 质心系总能量，因为是几乎对头碰，

$$s \approx (E_p^1 + E_p^2)^2 \approx (2E_p)^2, \quad \sqrt{s} = 2E_p = 60\text{GeV}.$$

(ii) 当打静止靶时，要得到相同的变质量

$$s = (E_p^1 + m_p)^2 - p_p^1{}^2 = 2m_p E_p^1 + 2m_p^2,$$

所以
$$E_p^1 = \frac{(s - 2m_p^2)}{2m_p} \approx \frac{s}{2m_p} \approx 1800\text{GeV}.$$

(iii) 对 p - p 对撞机。由于两 p 束同电荷，在同一磁场下运动方向相反，因此很难实现完全对头对撞，两束在碰撞点有夹角，例如 CERN 的机器， $\alpha = 14.77^\circ$ ，并且束团密集，近似连续分布，对于这样的 p - p 对撞机(图4.14)有：

$$L = \frac{I_1 \cdot I_2}{e^2 \cdot ch \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}, \quad I_1 = n_1 ec \cdot s, \quad I_2 = n_2 ec \cdot s, \quad \text{且 } n_1 = n_2 = n.$$

n 为单束质子中单位体积内的质子数。

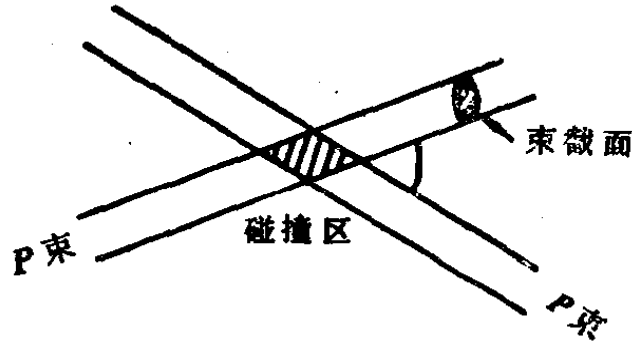


图 4.14

$$N_{p-p} = \sigma_{pp} L = \frac{n^2 \cdot s^2 \cdot \sigma_{pp} c}{h \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$$

$$n = \left(\frac{N_{p-p} \cdot h \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{s^2 \cdot \sigma_{pp}} \right)^{1/2} = \left(\frac{10^4 \times 0.1 \times 0.13}{10^{-25} \times 3 \times 10^{10} \times 10^{-20}} \right)^{1/2}$$

$$= 6.58 \times 10^{10} / \text{cm}^{-3}.$$

质子束与残余空气的相互作用

$$N_{p-a} = \sigma_{p-a} \cdot n_p \cdot s \cdot c \cdot n_a \cdot e.$$

n_a 为单位体积内空气的数目:

$$n_a = \frac{N_{p-a}}{\sigma_{p-a} \cdot s \cdot c \cdot \ln p} = \frac{10^4}{10^{-25} \times 10^{-2} \times 3 \times 10^{10} \times 500 \times 6.58 \times 10^{10}}$$

$$= 1.03 \times 10^9 / \text{cm}^{-3}.$$

要求残余气体气压:

$$p = \frac{N \times 22.4 \times 10^3}{N_0} = \frac{1.03 \times 10^9 \times 22.4 \times 10^3}{6.022 \times 10^{23}}$$

$$= 3.8 \times 10^{-11} (\text{atm}).$$

(周 平)

4124 (CUS, 1981)

假设在实验室中产生一束能量为 E 的质子 (这里 $E \gg m_p c^2$), 并且可选择或是制造一个单质子机, 在其中, 此束质子可打一固定的靶; 或是将此束质子分为两束 (每束能量为 E) 而做成一个对撞机.

(a) 从以下几个方面讨论这两种选择的相对优点: (i) 产生粒子的阈能, (ii) 反应事件率, (iii) 产生粒子的角分布及相应的探测装置.

(b) 考虑 $p + p$ 碰撞而获得 Z^0 粒子 ($Mc^2 \approx 90 \text{ GeV}$) 的阈产生. 两种机器所需能量 E (阈值) 各为多少?

(c) 质子能量为 E , 两种机器所产生的 π 介子最大能量各为多少?

解: (a) (i) (下面的讨论中取 $c = 1$) 由反应前后的四动量守恒, 有:

$$-S = (p_1 + p_2)^2 = (p'_1 + p'_2 + p)^2.$$

式中: p_1, p_2 为两质子的初始四动量, p'_1, p'_2 为两质子末态四动量, p 为量为 M 的新产生粒子的四动量, 于是:

$$S = -(p'_1 + p'_2 + p)^2 = -(p_1 + p_2)^2 + (E'_1 + E'_2 + E_M)^2 \geq (2m_p + M)^2.$$

对打靶装置,

$$S = -(p_1 + p_2)^2 = (E + m_p)^2 - p_1^2 = (E + m_p)^2 - (E^2 - m_p^2) = 2m_p(E + m_p).$$

从而
$$E \geq m_p + 2M + \frac{M^2}{2m_p},$$

$$E_{\pi M} = m_p + 2M + \frac{M^2}{2m_p}.$$

对对撞装置,

$$S = -(p_1 + p_2)^2 = (2E)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 = 4E^2.$$

从而
$$E \geq m_p + \frac{M}{2}, \quad E_{\text{阈}} = m_p + \frac{M}{2}.$$

显然当 $M \gg m_p$ 时, $E_{L\text{阈}} \gg E_{\text{阈}}$, 因此就提供能量来产生新粒子而言, 对撞机要有效得多. (ii) 由于固定靶能提供大量的束缚在核中的质子, 故打靶装置的事件率要多得多. (iii) 打靶装置: 绝大多数末态粒子都是朝前出射的, 探测器的安排必须考虑这种粒子分布的高度方向性, 并要考虑束流粒子产生的本底.

对撞机: 由于总动量为零, 产生粒子是各方向都有, 探测器必须覆盖 4π 立体角的绝大部分.

(b) 利用(a) (i)中导出的式子可得 ($m_p = 0.94\text{GeV}$),

$$E_{L\text{阈}} = 4489\text{GeV}, \quad E_{\text{阈}} = 45.94\text{GeV}.$$

(c) 对撞机: 由能量守恒, 有:

$$2E = \sqrt{m_p^2 + p_1^2} + \sqrt{m_p^2 + p_2^2} + \sqrt{m_\pi^2 + p_\pi^2} \quad (1)$$

$$E_\pi = \sqrt{m_\pi^2 + p_\pi^2}$$

由动量守恒,

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_\pi = 0, \quad \text{或} \quad \mathbf{p}_2 = -(\mathbf{p}_\pi + \mathbf{p}_1). \quad (2)$$

显然当 E_π 取得极大值时, 末态三粒子动量应在同一直线上, (2)代入(1)有:

$$2E = \sqrt{m_p^2 + p_1^2} + \sqrt{m_p^2 + (\dot{p}_\pi + p_1)^2} + \sqrt{m_\pi^2 + p_\pi^2}.$$

$$\text{所以 } 0 = \frac{p_1 dp_1}{\sqrt{m_p^2 + p_1^2}} + \frac{(p_\pi + p_1)(dp_\pi + dp_1)}{\sqrt{m_p^2 + (p_\pi + p_1)^2}} + \frac{p_\pi dp_\pi}{\sqrt{m_\pi^2 + p_\pi^2}},$$

$$\diamond \frac{dp_\pi}{dp_1} = 0 \text{ 得}$$

$$-\frac{p_1}{\sqrt{m_p^2 + p_1^2}} = \frac{p_\pi + p_1}{\sqrt{m_p^2 + (p_\pi + p_1)^2}},$$

故

$$p_\pi = -2p_1, \quad p_2 = p_1.$$

从而

$$2E = 2\sqrt{m_p^2 + p_1^2} + \sqrt{m_\pi^2 + (2p_1)^2},$$

$$\left(2E - \sqrt{m_\pi^2 + (2p_1)^2}\right)^2 = 4(m_p^2 + p_1^2),$$

所以

$$4E^2 - 4EE_{\pi \max} + m_\pi^2 + 4p_1^2 = 4m_p^2 + 4p_1^2.$$

$$E_{\pi \max} = \frac{4E^2 + m_\pi^2 - 4m_p^2}{4E} \approx E, \quad (\text{当 } E \gg m_p).$$

打靶装置：假如我们忽略所有粒子的静质量，则生成 π 介子的最大能量为 $E_{\pi \max} \approx E_p = E$. (杨永安)

4125 (CUS, 1982)

一个电子(质量 m , 电量 e) 在一垂直于一个匀强磁场的平面中运动、如果忽略辐射能耗, 则轨道是半径为某值 R 的圆. 令 E 表示电子总能量, $E \gg mc^2$, 即可用相对论运动学. (i) 用上述参量表示出所需场强 B . 当 $R = 30\text{m}$, $E = 2.5 \times 10^9 \text{eV}$ 时, 计算 B 的数值, 以高斯为单位, 为此应知道某些基本常数的数值. (ii) 实际上, 由于磁场 B 的加速, 电子要辐射电磁能. 假定每周损失的能量 ΔE 与 E 相比为小量, 用参量表示出比值 $\frac{\Delta E}{E}$ 的解析表达式, 然后就上面给定的 R 和 E 的值估计出它的数值来.

解: (i) 由 $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$.

式中:

$$\mathbf{p} = \gamma M \mathbf{v},$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

由于 $|v| = \text{常数}$,

$$\left| \frac{dv}{dt} \right| = \frac{v^2}{R},$$

得
$$B = \frac{cp}{eR} = \frac{1}{eR} \sqrt{E^2 - (mc^2)^2} \approx \frac{E}{eR}.$$

当 $E = 2.5 \times 10^9 \text{ eV}$, $R = 30 \text{ m}$ 时, 可得:

$$B \approx 2800 \text{ Gs}$$

(ii) 电子辐射功率为

$$p = \frac{2}{3} \frac{e^2 c}{R^2} \left(\frac{v}{C} \right)^4 \gamma^4, \quad \gamma = \frac{E}{mc^2},$$

所以
$$\Delta E = \left(\frac{2\pi R}{v} \right) \cdot p = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{R} \left(\frac{v}{C} \right)^3 \left(\frac{E}{mc^2} \right)^4,$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta E}{E} &= \frac{4\pi}{3} \left(\frac{v}{C} \right)^3 \left(\frac{e^2}{mc^2 R} \right) \left(\frac{E}{mc^2} \right)^3 \\ &= \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right) \frac{\hbar c}{mc^2 \cdot R} \left(\frac{E}{mc^2} \right)^3 \approx 4.6 \times 10^{-5}. \end{aligned}$$

注: 在实用上, 可简化计算.

(i) $p(\text{GeV}/c) = 0.3 B(\text{T}) R(\text{m}),$

$$B = \frac{p}{0.3R} = \frac{2.5}{0.3 \times 30} \approx 0.28(\text{T}) = 2800 \text{ Gs}.$$

(ii) 电子每周辐射能量

$$\Delta E(\text{keV}) \approx 88 \frac{E^4(\text{GeV})}{R(\text{m})}.$$

$$\frac{\Delta E}{E} = 88 \cdot \frac{E^3(\text{GeV})}{R(\text{m})} \times 10^{-6} = 88 \times \frac{2.5^3}{30} \times 10^{-6} \approx 4.6 \times 10^{-5}.$$

(杨永安)

4126 (Wis, 1976)

画出回旋加速器磁铁的剖面简图，磁极直径1m，并有轭铁和线圈。如果极间距离为10cm，所需场强为2T (= 20kGs)，求所需线圈的安匝数。 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{J}/(\text{A}^2 \cdot \text{m})$ 。

解：如图4.15所示。

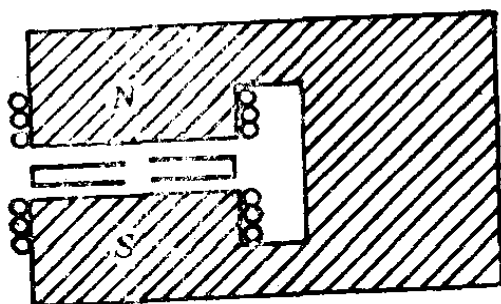


图 4.15

$$\Phi = \frac{NI}{R} = BS, \quad R = \frac{d}{\mu_0 S}, \quad \frac{NI}{\frac{d}{\mu_0 S}} = BS,$$

$$NI = \frac{Bd}{\mu_0} = \frac{2 \times 10 \times 10^{-2}}{4\pi \times 10^{-7}} = 1.59 \times 10^5 \text{安} \cdot \text{匝}.$$

(胡 平)

4127 (Wis, 1977)

一般地，当产生一束离子或电子时，在束内的空间电荷产生了束轴与束表面间的电势差。一束10mA的50keV的质子($v = 3 \times 10^6 \text{m/s}$)沿一真空管运动，束管有一直径为1cm的圆形截面。计算上述电势差。假定电流密度在束的直径上是

均匀的。

$$\text{解: } I = \int j \cdot ds = \int_0^R j \cdot 2\pi r dr = \pi R^2 \cdot j = \pi R^2 \cdot \rho v,$$

$$E \cdot 2\pi r l = \frac{l}{\epsilon_0} \cdot \pi r^2 \rho, \quad E = \frac{r}{2\epsilon_0} \cdot \frac{I}{\pi v R^2},$$

$$\Delta V = \int_0^R E(r) dr = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 v R^2} \int_0^R r dr = \frac{I}{4\pi\epsilon_0 v},$$

代入题设 v , R , ϵ_0 值, 得

$$\Delta V = 30 \text{ (V)}. \quad (\text{孟国武})$$

4128 (Col, 1975)

地平面上宇宙线通量: 1/年, 1/分, 1/毫秒, 1/微秒,
立体角⁻¹, 厘米⁻²

解: 1/(分·厘米²·立体角). 海平面时, 宇宙线总通量为
1.1 × 10²/(米²·秒·立体角), 其中硬成份为 0.8 × 10²/(米²·
秒·立体角), 软成份为 0.3 × 10²/(米²·秒·立体角).

(唐子洲)

4129 (Col, 1975)

在大加速器中, 粒子通量是 10⁴, 10⁸, 10¹³, 10¹⁸/每个
脉冲.

解: 一般质子加速器为 10¹⁸/脉冲. (唐子洲)

4130 (CCT, 1983)

哪种粒子在磁场中弯转时发射出最强的同步辐射光?

(a) 质子, (b) μ 子, (c) 电子.

解: 答案为 (c). 在弯转磁场中, 粒子运动一周的同步

辐射能量 $\delta E = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{\rho} \beta^3 \gamma^4$, $\gamma = \frac{E}{m}$, m 为粒子质量, e 为粒子电荷, ρ 为曲率半径, 可见 m 愈小同步辐射光愈强.

(唐子洲)

4131 (CCT, 1983)

一个 400 GeV 的粒子在 15 千高斯磁场中的弯转半径是: (a) 8.8 km, (b) 97 m, (c) 880 m.

解: 答案为 (c). 当 p 以 MeV 为单位, B 以 kGs 为单位, R 以 cm 为单位时, 有: $R = \frac{p}{0.3B}$, 所以

$$R = \frac{400 \times 10^3}{0.3 \times 15} = 8.8 \times 10^4 \text{ cm} = 880 \text{ m}. \quad (\text{唐子洲})$$