静电场测试题(一)

题一 在空间中一点A有5Q的电量的固定电荷，在B点有电量为12Q的固定电荷，AB=13a，另有一点C，AC=5a，BC=12a，如图1.

(1) 以点C为球心，以r=a为半径作一球，试求在该球区域内，静电场强的平均值的大小

即 $\bar{E} = \dfrac{\sum_i \vec{E}_i \Delta V_i}{\sum_i \Delta V_i}$

(2) 以点C为球心，r=10a为半径作一球，试求在该区域内，静电场场强的平均值大小.同.

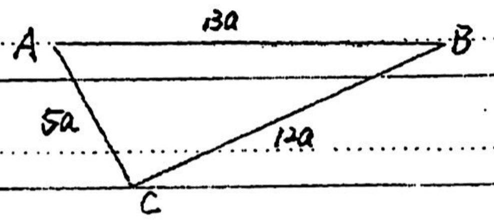


图1

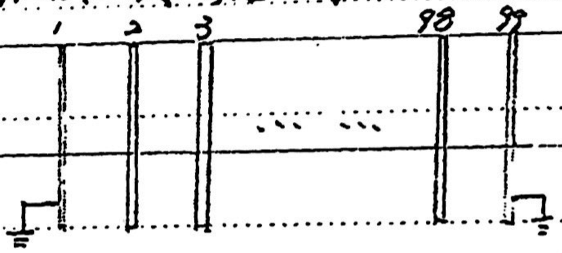


图2

题二 在空间中n个点依次放置n个点电荷 $q_1, q_2, q_3, q_4, \cdots, q_n$，对于点i，其余n-1个电荷在这一点上的电势和为$U_i$，若在这n个点上换上另n个点电荷 $q_1', q_2', q_3', \cdots, q_n'$，同理定义$U_i'$ $(i=1,2,\cdots,n)$

(1) 证明: $\sum_{i=1}^{n} q_i U_i' = \sum_{i=1}^{n} q_i' U_i$ $(n \geq 2)$

(2) 利用(1)中结论，证明真空中一对导体电容器的电容值与这两个导体的带电量无关.(这对导体带等量异号电荷)

题三 如图2，有99块平行放置的大正方形导体板，每块边长为L，相邻两板彼此相对的两个表面距离为d，$d \ll L$. 这些板从左至右顺序编号为1, 2, …, 99. 开始，第i块板上带

有$i Q_0$的净电荷，现将第1块与第99块导板接地，如图所示，忽略边缘效应。

(1) 第一块板上净电荷变为多少？

(2) 哪块板电势最高，其电势是多少？

题四 如图3，两个同轴导体圆筒，内筒半径为R，两筒间距为d，圆筒高均为L，且$L\gg R\gg d$。内筒经未知电容C_x与端电压V足够大的直流电源正极相连，外筒与电源负极相连。圆筒的中央轴线在铅垂线上。筒间A、B连线与轴线平行，且$AB=h$。一个质量为m，电量为$-Q$ $(Q>0)$的带电粒子从A点射出，其速率为v_0，速度方向垂直于由A与中心轴线所确定的平面。为使该带电粒子能经过B，试求所有可能的v_0和C_x的值。

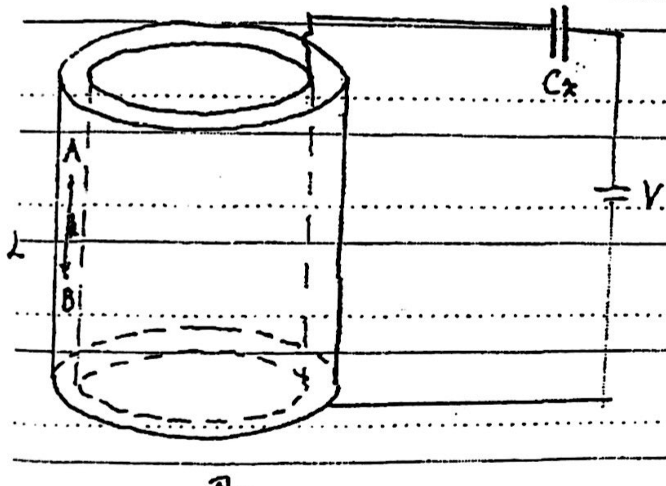


图3

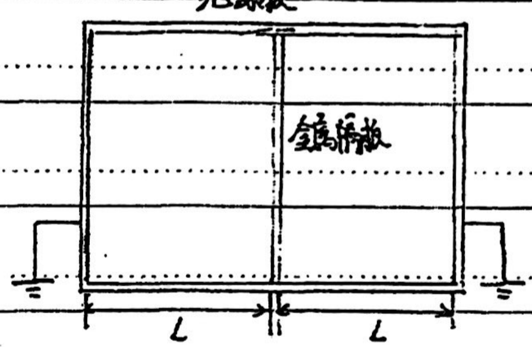


图4

题五 有一个平面正方形无限带电网络，每个格子边长均为r，线电荷密度为λ $(\lambda>0)$。有一带电电量为Q $(Q>0)$的质量为m的粒子恰好处于一个格子的中心。若给它某个方向的微扰，使其位移$\delta\vec{r}$，试求它受到电场力的大小，并描述它以后的运动。（提示：可能用到如下和式：$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$）

题六 对于一个孤立的或处于静电场中的导体，当它处于静电平衡时，满足两个性质：

1. 导体表面附近的E垂直于导体表面.

2. 导体表面附近E的大小与此处面电荷密度关系为$E=\sigma/\varepsilon_0$. 据此性质:

(1) 设有一根均匀带电直线段, 其长为a, 电荷线密度为λ. 试证明等势面为旋转椭球面(绕长轴旋转)

(2) 设有一个带电量为Q的导体, 该导体表面是由一个长短半轴分别为a, b, c的椭圆绕长轴旋转所形成的旋转椭球面. 其静电平衡时表面的电荷分布(用这一点到长轴距离h表示)

题七 如图4所示, 恒温矩形盒内装有理想气体, 当质量为m的隔板将盒二等分时, 两侧气体压强均为P_0. 隔板平行移动时无摩擦且不漏气. 设两侧气体经历准静态等温过程. 隔板是面积为A的金属板, 带电量为Q, 矩形盒上与它平行的两块板也是金属板, 面积也为A, 相距为$2L$, 固定并接地. 盒的其余部分绝缘, 忽略边缘效应.

(1) 试求隔板的平衡位置

(2) 试讨论平衡的稳定性, 若为稳定平衡, 试求其受到微扰后的振动频率(此频率很低)

静电场测试题(一)

参考解答

题一 解: (1) 我们设所指区域有体密度为ρ_0的均匀分布的电荷, 则

$$\because \quad \overline{E} = \frac{\sum_i E_i \Delta V_i}{\sum_i \Delta V_i} = \frac{\sum_i E_i \rho_0 \Delta V_i}{\sum_i \rho_0 \Delta V_i} = \frac{\sum \vec{F}_i}{\sum q_i} = \frac{\vec{F}}{q}$$

而我们易求得:

$$\vec{F} = \sqrt{\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{5Qq}{25a^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{12Qq}{144a^2}\right)^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{13Qq}{60a^2}$$

$$\therefore |\overline{E}| = \frac{F}{q} = \frac{13Q}{240\pi\varepsilon_0 a^2}$$

(2) 同上, 设ρ_0为所指区域体电荷密度, 则

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{5Q}{25a^2}\left[\frac{4}{3}\pi(5a)^3\rho_0\right]$$

$$F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{12Q}{144a^2}\left[\frac{4}{3}\pi(10a)^3\rho_0\right]$$

且 $\quad q = \frac{4}{3}\pi(10a)^3\rho_0$

$$\therefore |\overline{E}| = \frac{\sqrt{F_1^2+F_2^2}}{q} = \frac{\sqrt{109}\,Q}{480\pi\varepsilon_0 a^2}$$

题二 解: (1) 设 i点对j点所产生的电势为$a_{ij}q_i$, 则易知j点对i点产生电势为$a_{ji}q_j$, 而对于此二点系统, 我们有 $\quad U_{ij}q_j = U_{ji}q_i$

即 $\quad a_{ij}q_iq_j = a_{ji}q_iq_j$

$\therefore \quad a_{ij} = a_{ji}$, 且易知$a_{ij}$为只与位置有关参量

又 $U_i = a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + a_{i3}q_3 + \cdots + a_{in}q_n \quad$ (令$a_{ii}=0$)

则 $U_i' = a_{i1}q_1' + a_{i2}q_2' + a_{i3}q_3' + \cdots + a_{in}q_n' \quad$ (a_{ij}只与位置有关)

$\therefore \sum_{i=1}^{n} q_i U_i' = \sum_{i=1}^{n} q_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j'\right)$

$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} q_i q_j'$

$= \sum_{i=1}^{n} q_i' U_i$

$\therefore$ 原式成立

(2) 由(1)知 分别设两导体前后带电为 $\pm Q_1$，$\pm Q_2$. 则易知

$\sum_{i=1}^{n} q_i U_i' = Q_1 U_{21} - Q_1 U_{22} = Q_1(U_{21} - U_{22})$ （其中 U_{21}, U_{22} 为带 $\pm Q_2$ 时两导体电势）

同样 $\sum_{i=1}^{n} q_i' U_i = Q_2 U_{11} - Q_2 U_{12} = Q_2 (U_{11} - Q_{12})$

又二者相等. 则 $Q_1(U_{21} - U_{22}) = Q_2(U_{11} - Q_{12})$

$\therefore \quad C_1 = \frac{Q_1}{U_{11} - U_{12}} = \frac{Q_2}{U_{21} - U_{22}} = C_2$

即与导体带电量多少无关.

题三 解: (1) 设接地后第 k 板左边带电 Q_k，右边带电 Q_k' （$k = 1, 2, \cdots, 99$），第 k 板电势为 U_k.

则:

$$\begin{cases} Q_1 = Q_{99}' = 0 \\ Q_k' = -Q_{k+1} \quad (k = 1, 2, \cdots, 98) \\ Q_k + Q_k' = k^2 q_0 \quad (k = 2, 3, \cdots, 98) \end{cases}$$

由上試得: $Q_k = -Q_1' - \sum_{i=1}^{k-1} i^2 q_0 = -Q_1' - \left(\frac{1}{3}k^3 - \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{6}k - 1\right) q_0$

而 $U_k - U_{k-1} = \frac{Q_k}{C}$，则

$U_k = U_1 + \frac{1}{C}\sum_{i=2}^{k} Q_k \qquad (U_1 = 0)$

$$= -\frac{Q_1'}{C}(k-1) - \frac{q_0}{C}\sum_{i=2}^{k}\left(\frac{1}{3}i^3 - \frac{1}{2}i^2 + \frac{1}{6}i - 1\right)$$

$$= -\frac{Q_1'}{C}(k-1) - \frac{q_0}{C}\left(\frac{k^4}{12} - \frac{k^2}{12} - k + 1\right) \quad (k=1,2,\cdots,99)$$

由 $U_{99}=0$，则

$$-98\frac{Q_1'}{C} - \frac{q_0}{C}\left(\frac{99^4}{12} - \frac{99^2}{12} - 99 + 1\right) = 0$$

$$\therefore \quad Q_1' = -81674\, q_0$$

这便是板1上净电荷

(2) 电势最大板满足 $Q_k>0$，$Q_{k}'>0$. 因此，有

$$\begin{cases} \frac{1}{3}k^3 + \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{6}k - 81675 > 0 \\ -\frac{1}{3}k^3 + \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{6}k + 81675 > 0 \end{cases} \quad (k \in N^+)$$

解之得： $k=63$

第63板电势最高，且

$$U_{63} = -62\frac{Q_1'}{C} - \frac{q_0}{C}\left(\frac{63^4}{12} - \frac{63^2}{12} - 63 + 1\right) = 3751434\frac{q_0}{C} = 3751434\frac{q_0 d}{\varepsilon_0 L^2}$$

题四解：由于 $L \gg R \gg d$，故圆筒内各处电场大小可示为相等，且为

$$E = \frac{U}{d} = \frac{VC_x}{C_x + C}\cdot\frac{1}{d}, \quad 其中\ C = \frac{\varepsilon_0 \cdot 2\pi R L}{d}$$

要使粒子由A飞到B，首先粒子要能满足在水平面上作圆周运动的条件，即

$$\frac{mv_0^2}{R} = QE$$

另外有 $n\cdot\frac{2\pi R}{v_0} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (n=1,2,\cdots)$

从中有 $C_x = \frac{4n^2\pi^2\varepsilon_0 R^2 L m g}{VhQ - 2n^2\pi^2 R d m g}$，$v_0 = 2n\pi R\sqrt{\frac{g}{2h}} \quad (n \in N^+)$

又由于 $C_x>0$，则

$$VhQ-2n^2\pi^2 Rdmg>0$$

$$\therefore\ n\le\left[\sqrt{\frac{hVQ}{2\pi^2 Rdmg}}\right]$$

故所求为

$$\begin{cases} C_x=\dfrac{4n^2\pi^3\varepsilon_0 R^2 Lmg}{VhQ-2n^2\pi^2 Rdmg} \\ V_0=2nR\pi\sqrt{\dfrac{g}{2h}} \end{cases}\qquad \left(n=1,2,3,\cdots,\left[\sqrt{\frac{hVQ}{2\pi^2 Rdmg}}\right]\right)$$

题五解：易知，粒子在x方向上的受力只与粒子x方向上的微扰有关，在y方向上的受力，也只与y方向上的微扰有关，设粒子在x方向上有微小位移 d_x 则

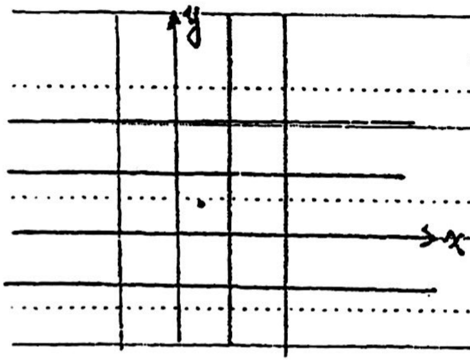


图1

$$\Delta F_x=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{Q\lambda}{2\pi\varepsilon_0\left(d_x+\frac{2i-1}{2}r\right)}-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{Q\lambda}{2\pi\varepsilon_0\left(-d_x+\frac{2i-1}{2}r\right)}$$

又由于 $d_x\ll r$，则

$$\Delta F_x\approx\sum_{i=1}^{\infty}\frac{Q\lambda}{2\pi\varepsilon_0\left(i-\frac{1}{2}\right)r}\left[1-\frac{2d_x}{(2i-1)r}\right]-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{Q\lambda}{2\pi\varepsilon_0\left(i-\frac{1}{2}\right)r}\left[1+\frac{2d_x}{(2i-1)r}\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{4Q\lambda d_x}{\pi\varepsilon_0(2i-1)r^2}\cdot\frac{1}{2i-1}$$

$$=-\frac{4Q\lambda d_x}{\pi\varepsilon_0 r^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(2i-1)^2}$$

又 $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots\right)-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots\right)$

$$=\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)$$

$$=\frac{3}{4}\times\frac{\pi^2}{6}$$

$$=\frac{\pi^2}{8}$$

$$\therefore\ \Delta F_x=-\frac{Q\pi\lambda}{2\varepsilon_0 r^2}d_x$$

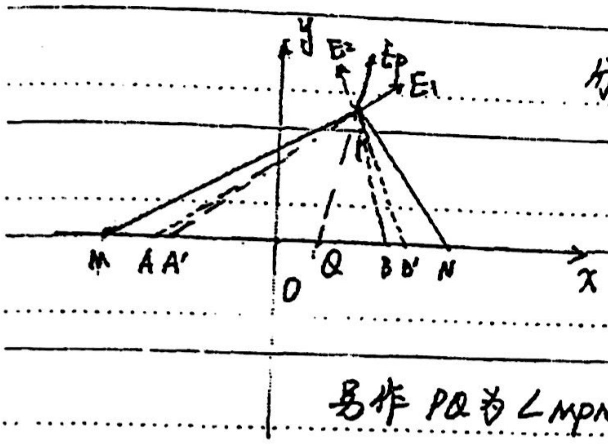
同理，$\Delta F_y=-\frac{Q\pi\lambda}{2\varepsilon_0 r^2}d_y$

故对于一微扰位移为 $\vec{d}$ 的粒子，有

$$\vec{F} = -\frac{Q\pi\lambda}{2\varepsilon_0 r^2}\vec{d} \qquad (Q\lambda>0)$$

故粒子做简谐振动， $\omega=\sqrt{\dfrac{Q\pi\lambda}{2\varepsilon_0 r^2 m}}$

六、解 (1) 如图2，MN为带电线段，线电荷密度为 λ，P为空间中任意一点，下面我们证明 E_P 平分 $\angle MPN$.



在MN上取两段小线元 AA', BB'，使得

$$\angle APA' = \angle BPB' = \Delta\theta$$

另作 PQ 为 $\angle MPN$ 平分线，且 A, B 满足 $\angle APQ = \angle BPQ = \theta$

设 $\angle APO=\varphi_1$，$\angle BPO=\varphi_2$，P到MN距离为 h，则

$$\Delta E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda|AA'|}{|PA|^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda\Delta\theta}{|PA|\sin\varphi_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda\Delta\theta}{h}$$

同理 $\Delta E_2 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{\lambda\Delta\theta}{h}$

$\therefore\ \Delta E_1 = \Delta E_2$，且 ΔE_1，ΔE_2 关于 PQ 对称.

故 ΔE 为 ΔE_1，ΔE_2 合场强必沿 PQ 方向.

又由于 MN 线段上各线元均可如此配对，故 $\vec{E_P}$ 平分 $\angle MPN$.

又由场强为等势面的法向，MN所激发的电场的等势面任一点的法向均沿此点与MN构成角的平分线，由椭圆性质知，此等势面必为旋转椭球面，且焦点为M.N.

(2) 由(1)，可将此导体带电等效为两焦点 MN 的均匀带电线段，线密度为 $\lambda=\dfrac{Q}{2c}$，在P处

$$\Delta E = 2\Delta E_1\cos\theta = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda\cos\theta\Delta\theta}{h} \qquad (\theta=\angle APQ=\angle BPQ)$$

$$\therefore\quad E_p=\sum_0^{\theta_0}\Delta E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 h}\sum_0^{\theta_0}\Delta\sin\theta$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 h}\sin\theta_0$$

又 $\because\quad \cos 2\theta_0=\frac{PM^2+PN^2-MN^2}{2PM\cdot PN}=\frac{a^2+e^2x^2-2c^2}{a^2-e^2x^2}$

$$\therefore\quad \sin\theta_0=\sqrt{\frac{c^2-e^2x^2}{a^2-e^2x^2}}=\frac{hc}{\sqrt{b^4+h^2c^2}}$$

$$\therefore\quad E_p=\frac{\lambda c}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{b^4+h^2c^2}}$$

$$\therefore\quad \sigma_p=\varepsilon_0 E_p=\frac{\lambda c}{2\pi\sqrt{b^4+h^2c^2}}=\frac{Q}{4\pi\sqrt{b^4+h^2c^2}}$$

(3) 将(2)中旋转椭球同一 x 轴坐标的各点上下平均分配到一个带电椭圆环对于 x 坐标的两点上，则设这段线元长 Δs，则

$$2\lambda_p\Delta s=2\pi h\sigma_p\Delta s$$

$$\therefore\quad \lambda_p=\pi h\sigma_p=\frac{Qh}{4\sqrt{b^4+h^2c^2}}$$

题乙解：(1) 设隔板在距左板 x 处，左、右空气压分别为 P_1、P_2，隔板左、右两面各带电 Q_1、Q_2，则

$$P_1x=P_0L=P_2(2L-x)$$

$$Q_1+Q_2=Q$$

$$\frac{Q_1}{\varepsilon_0\cdot\frac{A}{x}}=\frac{Q_2}{\varepsilon_0\frac{A}{2L-x}}$$

且隔板受力 $F=P_1S-P_2S-\frac{Q_1^2}{2\varepsilon_0A}+\frac{Q_2^2}{2\varepsilon_0A}$

化简得 $F=P_0LA\frac{2(L-x)}{x(2L-x)}-\frac{Q^2}{2L\varepsilon_0A}(L-x)$

令 $F=0$，则

$$x=L\text{ 或 }L\left(1\pm\sqrt{1-\frac{4\varepsilon_0P_0A^2}{Q^2}}\right)$$

故有:

1° $Q^2 \leq 4\varepsilon_0 p_0 A^2$ 时, $x = L$

2° $Q^2 \geq 4\varepsilon_0 p_0 A$ 时, $x = L$ 或 $L\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\varepsilon_0 p_0 A^2}{Q^2}}\right)$

(2) 设 x_0 为某一平衡位置, Δx 为隔板微位移. 则

$$\Delta F = p_0 L A \frac{2(L - x_0 - \Delta x)}{(x_0 + \Delta x)(2L - x_0 - \Delta x)} - \frac{Q^2}{2L\varepsilon_0 A}(L - x_0 - \Delta x)$$

当 $x_0 = L$ 时:

$$\Delta F = \left(\frac{Q^2}{2L\varepsilon_0 A} - \frac{2p_0 A}{L}\right)\Delta x$$

当 $x = L\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\varepsilon_0 p_0 A^2}{Q^2}}\right)$ 时,

$$\Delta F = \frac{Q^2}{\varepsilon_0 L A}\left(1 - \frac{Q^2}{4p_0\varepsilon_0 A^2}\right)\Delta x$$

此时, 讨论如下:

1° $Q^2 < 4\varepsilon_0 p_0 A^2$ 时. 对于唯一平衡位置 $x = L$, $\frac{\Delta F}{\Delta x} < 0$, 稳定.

且易知振动频率 $f = (2\pi)^{-1}\sqrt{\frac{1}{mL}\left(2p_0 A - \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}\right)}$

2° $Q^2 > 4\varepsilon_0 p_0 A^2$ 时, 对于 $x = L$ 处, $\frac{\Delta F}{\Delta x} > 0$. 不稳定.

而 $x = L\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\varepsilon_0 p_0 A^2}{Q^2}}\right)$ 处, $\frac{\Delta F}{\Delta x} < 0$. 稳定.

$$f = (2\pi)^{-1}\sqrt{\frac{Q^2}{m\varepsilon_0 L A}\left(\frac{Q^2}{4p_0\varepsilon_0 A^2} - 1\right)}$$

3° $Q^2 = 4\varepsilon_0 p_0 A^2$ 时, 平衡是随遇的.