磁场、电磁感应测试题（一）

题一 (1) 如图1，一带电量为 q ($q>0$)，质量为 m 的小球，放在一动摩擦因数为 μ 的水平面（即 xOy）上，初始坐标为 $(0,b)$ ($b>0$)。在竖直方向有一磁感强度为 B 的匀强磁场，小球以平行于 x 轴如图所示初速度 v_0 开始运动，试求小球运动到 x 轴上所用时间 t 和此时坐标 $(x_m, 0)$

（注：各量间有如下关系：$\frac{mv_0}{qB}=b$ 且 $\mu mg=\frac{qBv_0}{1+\frac{4}{\pi}}$，答案用 m, q, B, μ 表示）。

(2) 设现有一平行导轨位于此平面上，且AB与y轴重合，两导轨均平行于x轴，间距为 l，现有一光滑圆筒与导轨垂直放置，厚度可忽略。各导轨线电阻率均为 λ，AB电阻为0，圆筒电阻可忽略。已知由于某原因，小球到达 $(x_m,0)$ 后，速度只能沿负y方向，且大小不变。现有人希望圆筒能在静止的情况下接住球，于是当小球出发前很早，就在 $x=x_0$ 的位置以 v_0' 的初速度将圆筒沿导轨推出。试问 v_0' 为何值？($0<x_0<x_m$，不考虑导轨、AB及圆筒上电流产生的磁场，答案以 $m, q, B, \mu, x_0, m', \lambda, l$ 表示，m' 为圆筒质量）

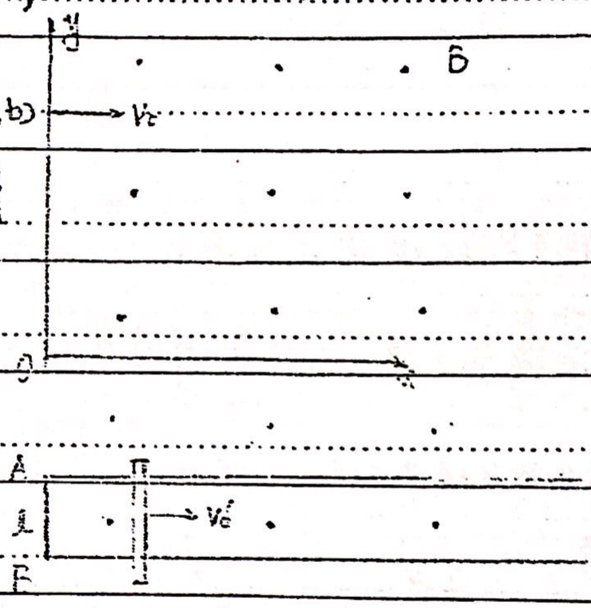
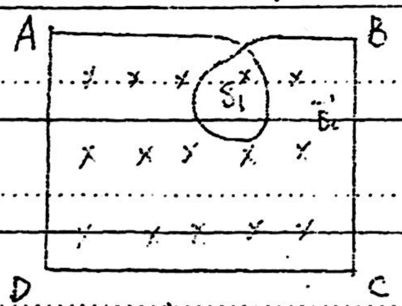


图1

（注：以下公式可能被用到：$\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{x=x_1}^{x_2}\frac{\Delta x}{x}=\ln\frac{x_2}{x_1}$ ($0<x_1<x_2$)）

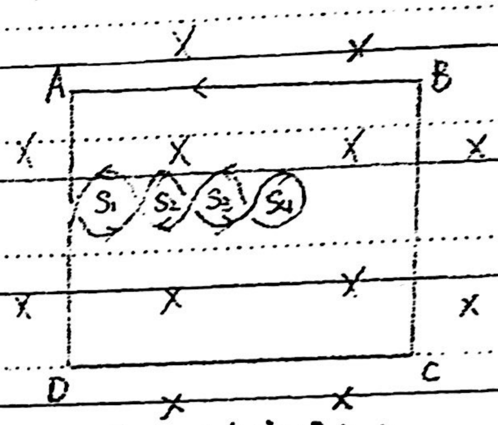
题二 (1) 如图2，现在移动A点，使 S_1 的面积以 $v_s=-\frac{dS_1}{dt}$ 的速率减小，忽略自感，试问回路中感应电动势 ε 的大小。

(2) 如图3，B的变化率 $k=\frac{dB}{dt}$ 已知，忽略自感，试求感应电动势 ε' 的大小.（答案用k, S_1, S_2, S_3, S_4, S_{ABCD}表示）



磁场区域仅在ABCD内

图2



磁场存在空间各处

图3

题三 某电子显微镜的加速电压 $U=-512\,kV$，将静止电子加速后，其后电子进入非均匀磁场区. 该磁场区由一系列线圈 $L_1, L_2, L_3, \cdots, L_{1985}$ 产生，各线圈电流分别为 $I_1, I_2, I_3, \cdots, I_{1985}$. 设电子在此区域中的轨道为$\Gamma$. 今将电子换成质子，从 $-U$ 加速，要求质子进入磁场后依然沿Γ运动，则各线圈中电流 $I_1', I_2', I_3', \cdots, I_{1985}'$ 各为多少？忽略除电磁外的一切作用.

$e=1.60\times10^{-19}\,C$, $m_e=9.11\times10^{-31}\,kg$, $m_p=1.67\times10^{-27}\,kg$

题四 如图4，电磁铁两极为长方形平面，长度L远大于两极间距，两极区间中间除边缘外分布着均匀的磁场B_0. 而边缘部分磁感线有所弯曲. 现建立 $O\text{-}xyz$ 坐标如下，xOy 为磁极左端面，yOz 平分磁场区间. 现有一带电量为q $(q>0)$的粒子，从x轴上$(x_0,0,0)$处（其中$|x_0|$远小于两极间距），以平行于z轴的初动量p_0，从左侧进入场区（$p_0 \gg qB_0L$）

(1) 求通过场区后，粒子速度在yOz上的投影与z轴的夹角 θ_y（不考虑边缘的影响）

(2) 求通过场区后，粒子速度在xOz上的投影与z轴夹角 θ_x（只考虑左侧边缘的影响）

注：θ_x、…θ_y均很小，且不考虑重力作用.

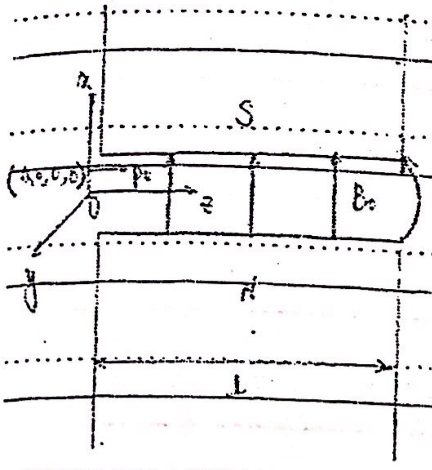


图4

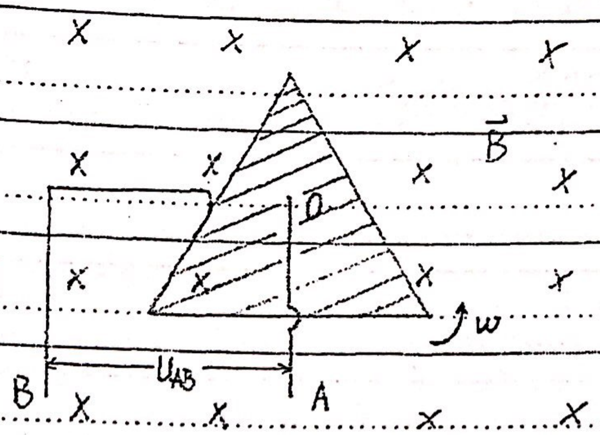


图5

题五 (1) 如图5为一内切圆半径为r的导体正三角形，置于磁感强度恒为$\vec{B}$的磁场中，现绕中心O作以ω为角速度的匀速转动，有一固定电刷与之边缘接触良好，现从中心O和电刷处引出两导线A、B，所有电阻忽略不计，求AB间平均电势差 $\overline{U_{AB}} = \dfrac{\Sigma(U_{AB}\cdot\Delta t)}{\Sigma(\Delta t)}$

(2) 现将上述装置的电动势整流并滤波，使之成为理想无内阻恒压源，$\varepsilon = |\overline{U_{AB}}|$，将此恒压源两端接在一个4维单位正方体电阻网络的(0,0,0,0)和(1,1,1,1)点上，且每单位长度上电阻为R，求电源输出功率P.

注：关于4维单位正方体电阻网络我们可与1，2，3维单位正方体电阻网络类比：

1维的即一根电阻为R的电阻丝；

2维的即四根电阻为R的电阻丝构成的正方形方框.

3维即12根电阻丝构成的立方体框架.

而(0,0,0,0)与(1,1,1,1)即为此4维正方体"对角线"上两点.

题六 一对圆形电容器平行板，半径为R，间距为d，现有一点P，在平行于两板且平分两极板所夹区域的平面（即中位面）上，到板中心O距离为$R+r$（$r>0$），已知极板面电荷密度为$\pm\sigma$，且$R>>r>>d$，试求P点场强大小E_P。

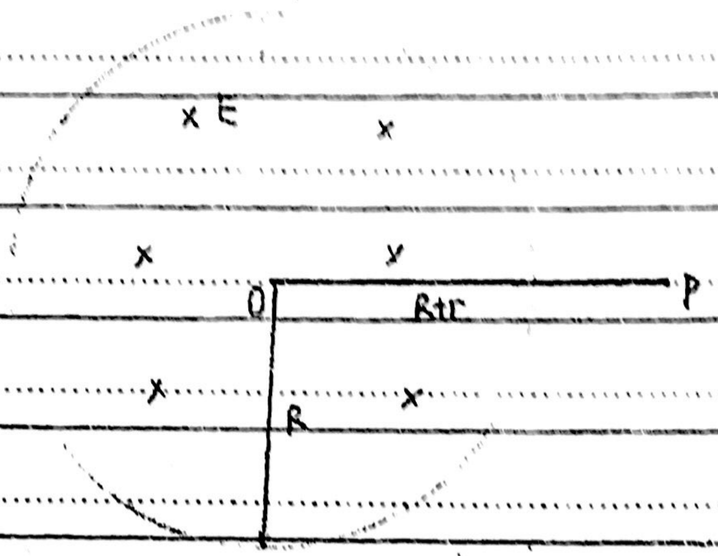


图6

磁场、电磁感应测试题(一)

参考解答

题一 解:(1) 由于f总沿 $\vec{v}$ 反方向,故t时刻有

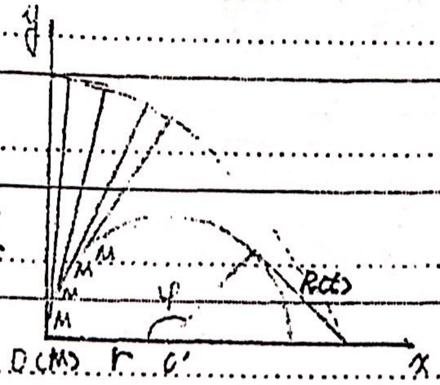


图1

$$v = v_0 - \mu g t$$

故t时刻,粒子做"圆周运动"的半径,即轨迹的曲率半径

$$R = \frac{mv}{qB} = \frac{mv_0}{qB} - \frac{\mu mg}{qB}t = b - \frac{\mu mg}{qB}t$$

且此半径线段绕转动中心M的旋转角速度

$$\omega = \frac{qB}{m} \text{,恒定}$$

如图1,我们现在求曲率中心M的运动轨迹,显然 $t=0$ 时,M,O重合,在 Δt 时间后,$(\Delta t \to 0)$

M向径方向移动了 $\Delta r = \frac{\mu mg}{qB}\Delta t$,然后运动方向转动 $\Delta\varphi = \omega\Delta t = \frac{qB}{m}\Delta t$ 的角度。

而下一个 Δt 时间内,M又将向径方向移动 $\Delta r = \frac{\mu mg}{qB}\Delta t$,再转动 $\Delta\varphi = \omega\Delta t$ 的角,如图1所示。

故而我们知,M的运动轨迹是一个圆,且

$$r = \frac{\Delta r}{\Delta\varphi} = \frac{\mu m^2 g}{q^2 B^2}$$

且M以 $O'(r,0)$ 为圆心,ω 匀速转动。

而粒子的位置即 $M(t)$ 沿径向伸长 $R(t)$ 处,设t时刻粒子运动到x轴,设 $\varphi = \frac{qB}{m}t$,如图

则 $R(t) = r\,tg\theta = -r\,tg\varphi$

$$\therefore \quad -\frac{\mu m^2 g}{q^2B^2}tg\varphi = b - \frac{\mu m^2 g}{q^2B^2}\varphi \text{,代入题中数据关系,则}$$

$$\varphi - tg\varphi = 1 + \frac{3}{4}\pi$$

而 $0 < \varphi < \pi$

$\therefore \quad \varphi = \frac{3}{4}\pi$

$\therefore \quad t = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{3\pi m}{4qB}$

且 $x_m = r(1+\cos\theta) + R(t)\sin\theta$

将 $\theta = \pi - \varphi = \frac{\pi}{4}$ 代入，则

$$x_m = (\sqrt{2}+1)\frac{\mu m^2 g}{q^2B^2}$$

(2) 设导轨~~当~~圆筒在 x 处时速度为 v. 则

$$\varepsilon = Blv$$

而回路电阻 $R = 2\lambda x$，从而 $I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{Blv}{2\lambda x}$

从而圆筒受阻力 $f = BlI = \frac{B^2l^2v}{2\lambda x}$

又 $-f = m'a = m'\frac{\Delta v}{\Delta t} = m'\frac{\Delta v}{\Delta x}v$

则 $-\frac{B^2l^2}{2\lambda x}v = m'\frac{\Delta v}{\Delta x}v$

从而 $\frac{\Delta x}{x} = -\frac{2\lambda}{B^2l^2}m'\Delta v$

由于开始时 $x = x_0$，$v = v_0'$，最后 $x = x_m$，$v = 0$，则

$$\sum_{x=x_0}^{x_m}\frac{\Delta x}{x} = -\frac{2\lambda}{B^2l^2}m'\sum_{v=v_0'}^{0}\Delta v$$，由题中公式，得：

$$\ln\frac{x_m}{x_0} = \frac{2m'v_0'\lambda}{B^2l^2}$$

$$\therefore \quad v_0' = \frac{B^2l^2}{2m'\lambda}\ln\frac{x_m}{x_0} = \frac{B^2l^2}{2m'\lambda}\ln\frac{(\sqrt{2}+1)\mu m^2 g}{q^2B^2x_0}$$

题二解：(1) 由法拉第电磁感应定律

$$\varepsilon = -B_0\frac{dS_1}{dt} = B_0 v s$$

(2) 由法拉第电磁感应定律得:

$$\varepsilon = k(S_{ABCD} - S_1 + S_2 - S_3 + S_4)$$

题三解: 带电粒子电量为 q, 速度为 $\vec{v}$, 动量为 $\vec{p}$, 则

$$q\vec{v}\times\vec{B} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$, 则

$$(q\vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{p} = \frac{d\vec{p}}{dt}\cdot\vec{p}$$

而 $\vec{p} = m\vec{v}$ 与 $\vec{v}$ 方向一致, 则 $(q\vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{p} = 0$.

$$\therefore \quad \frac{d\vec{p}}{dt}\cdot\vec{p} = 0$$

$$\therefore \quad |\vec{p}| = C$$

在轨道某一点建立自然坐标系, 则

$$q\vec{v}\times\vec{B} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = v\cdot\frac{d\vec{p}}{ds} = vp\cdot\frac{d(\vec{\tau})}{ds} = vp\cdot\frac{d\vec{\tau}}{ds}$$

其中 $\vec{\tau}$ 为轨迹切向单位矢量, s 为轨迹切向路程

要使轨道重合, 则在任一位置, 有

$$\frac{d\vec{\tau}_e}{ds_e} = \frac{d\vec{\tau}_p}{ds_p}$$, 即有

$$\frac{e}{p_e}\vec{\tau}_e\times\vec{B}_e = -\frac{e}{p_p}\vec{\tau}_p\times\vec{B}_p$$

又由于初态时, $\vec{\tau}_{e_0} = \vec{\tau}_{p_0}$, 由归纳法易知上式成立条件为

$$\vec{B}_p = -\frac{p_p}{p_e}\vec{B}_e$$

而又 $E_{ke} = -eU = 512\,keV = 8.192\times10^{-14}\,J$

而 $m_e c^2 = 8.183\times10^{-14}$ J，两者接近，故我们应考虑相对论效应，则

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{(eU+m_e c^2)^2 - m_e^2 c^4} = 4.733\times10^{-22}\ kg\cdot m/s$$

而又 $m_p c^2 \gg |eU|$，则

$$P_p = m_p\cdot\sqrt{\frac{2E_{kp}}{m_p}} = \sqrt{2E_{kp}m_p} = 1.654\times10^{-20}\ kg\cdot m/s$$

$\therefore\ \vec{B_p} = -34.9\,\vec{B_e}$

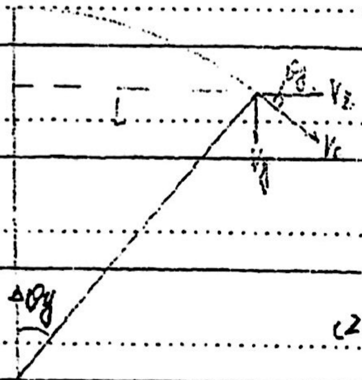
又对于无论何种线圈，均有 $B\propto I$

$\therefore\ I_i' = -34.9\ I_i\quad (i=1,2,\cdots,1985)$

题四解：(1) 若忽略边缘效应，则粒子做圆周运动曲率半径为：

$$R = \frac{mv_0}{qB_0} = \frac{P_0}{qB_0} \gg L$$

由几何关系，如图2，则



$$R\sin\theta_y = L$$

$$\therefore\ \sin\theta_y = \frac{L}{R} \ll 1$$

$$\therefore\ \theta_y = \frac{L}{R} = \frac{qB_0L}{p_0}$$

(2) 如图2所示，$V_y = V_0\sin\theta_y = \frac{qB_0L}{p_0}\cdot v_0 = \frac{qB_0L}{m}$

图2

考虑左侧边缘有 $B_z\neq0$，故在x方向上，我们有

$$F_x = qV_yB_z$$

即 $$a_x = \frac{qV_yB_z}{m} = \frac{q^2B_0L}{m^2}B_z$$

而在 Δt 时间内：

$$\Delta V_x = a_x \Delta t = \frac{q^2 B_0 L}{m^2} B_z \Delta t$$

由于 V_0 很大，θ_y 很小，则 $V_z \approx V_0$，故

$$\Delta t = \frac{\Delta z}{V_0}$$

则 $$\Delta V_x = \frac{q^2 B_0 L}{m^2 V_0} B_z \Delta z$$

考虑到 $V_{x_0} = 0$，以有

$$V_x = \frac{q^2 B_0 L}{m^2 V_0} \sum_{z=L}^{+\infty} (B_z \Delta z)$$

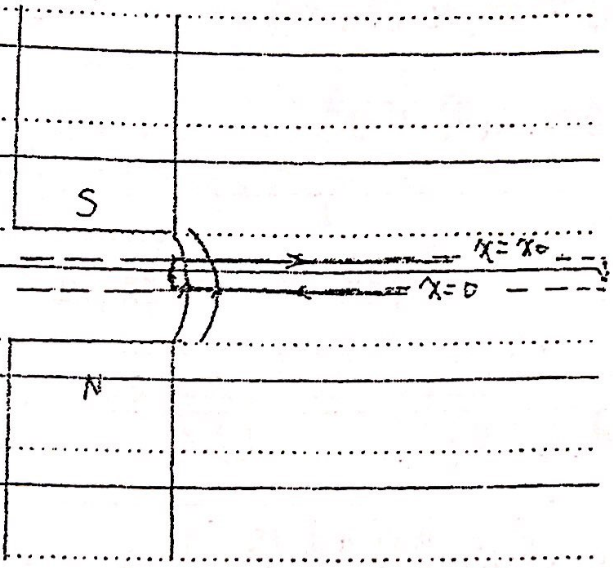


图3

我们如图3取回路，

由安培环路定律，在此回路上：

$$\sum_{z=L}^{+\infty} B_z \cdot \Delta z + B_0 x_0 = 0$$

$$\therefore \sum_{z=L}^{+\infty} B_z \Delta z = -B_0 x_0$$

$$\therefore \theta_x = \frac{V_x}{V_0} = -\frac{q^2 B_0^2 L_0}{p_0^2} x_0$$

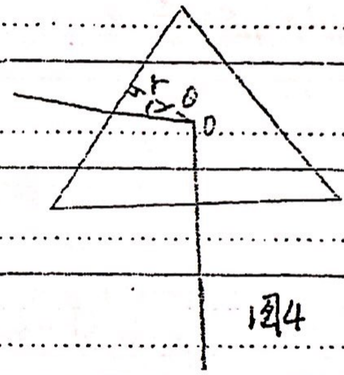


图4

题五解：(1) 设某一时刻电刷位置如图4所示，则此时刻：

$$\varepsilon = \frac{1}{2} B\omega (r\sec\theta)^2 = \frac{1}{2} B\omega r^2 \sec^2\theta$$

$$\therefore \overline{U_{AB}} = \frac{\sum \varepsilon \Delta t}{\sum \Delta t} = \frac{\sum_{t=0}^{\frac{\pi}{3\omega}} \varepsilon \Delta t}{\frac{\pi}{3\omega}} = \frac{1}{2} B\omega r^2 \frac{\sum_{\theta=0}^{\frac{\pi}{3}} \sec^2\theta \cdot \frac{\Delta\theta}{\omega}}{\frac{\pi}{3\omega}} = \frac{3}{2\pi} B\omega r^2 \sum_{\theta=0}^{\frac{\pi}{3}} \sec^2\theta \Delta\theta$$

注意到 $tg(\theta+\Delta\theta) - tg\theta = \frac{\sin(\theta+\Delta\theta-\theta)}{\cos(\theta+\Delta\theta)\cos\theta} = \frac{\sin\Delta\theta}{\cos(\theta+\Delta\theta)\cos\theta}$，而 $\Delta\theta \to 0$ 时，有

$$\Delta(tg\theta) = \sec^2\theta \cdot \Delta\theta$$

$$\therefore \sum_{\theta=0}^{\frac{\pi}{3}} \sec^2\theta \Delta\theta = tg\frac{\pi}{3} - tg 0 = \sqrt{3}$$

$$\therefore \overline{U_{AB}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} B\omega r^2$$

(2) 我们如下分析此电阻网络:

由对称性,我们如下分类:

$$\xrightarrow{I}\ \underset{(0,0,0,0)}{0}\ \xrightarrow{I}\ 1\ \xrightarrow{I}\ 2\ \xrightarrow{I}\ 3\ \xrightarrow{I}\ \underset{(1,1,1,1)}{4}$$

1: 坐标中有1个"1"的; 2: 坐标中有2个"1"的; 3: 坐标中有3个"1"的

0, 4 类点只有1个; 1, 3类点有 $C_4^1=4$ 个; 而 2类点有 $C_4^2=6$ 个.

故而 0, 1类点间有4条棱; $I_{01}=\frac{I}{4}$; 1, 2类点间有 $2\times6=12$ 条棱, $I_{12}=\frac{I}{12}$;

同理, $I_{23}=\frac{I}{12}$, $I_{34}=\frac{I}{4}$.

$\therefore\ U_{04}=I_{01}R+I_{12}R+I_{23}R+I_{34}R=\frac{2}{3}IR$

$\therefore\ R_{AB}=\frac{U_{04}}{I}=\frac{2}{3}R$

$\therefore\ P=\frac{\varepsilon^2}{R_{AB}}=\frac{81B\omega r^2}{8\pi^2R}$

题六解: 我们用磁场来类比, 引入假想磁荷, 则定义

$$F=\frac{1}{4\pi\mu_0}\cdot\frac{q_{m1}q_{m2}}{r^3}\vec{r}$$

且 $H_1=\frac{F}{q_{m2}}=\frac{1}{4\pi\mu_0}\cdot\frac{q_{m1}}{r^3}\vec{r}$, 下面我们通过磁偶极子与环电流找到联系:

对于一 $\pm q_m$ 磁偶极子, 磁矩 $\vec{p_m}=q_m\vec{l}$, 而对于一个电流为I的线圈, 磁矩 $\vec{p_m'}=\mu_0 I\vec{S}$, 当 $\vec{p_m}=\vec{p_m'}$ 时:

$$q_m l=\mu_0 IS$$

对于此题, 我们认为上下两极板带磁荷面密度为 $\pm\sigma_m$, 则对于 ΔS 面积中的上下磁荷, 我们看成磁偶极子, 则就用环电流代替, 则

$\sigma_m \Delta S \cdot d = \mu_0 I \Delta S$

$\therefore \quad I = \frac{\sigma_m d}{\mu_0}$

于是该两带磁荷板带可等效为许多小电流元的叠加，而这样电流源在内部抵消，最后只剩下最外层一大圈，且 $I = \frac{\sigma_m d}{\mu_0}$

而P点处磁场强度我们由于 $R>>r$，故可认为由一距P距离为 r 的无限长通电I导线所产生，则

$$H_P = \frac{B}{\mu_0} = \frac{I}{2\pi r} = \frac{\sigma_m d}{2\pi\mu_0 r}$$

由于电、磁场在引入磁荷后形式上是一样，则

$$E_P = \frac{\sigma d}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

注：以下是关于磁偶极子与载流线圈等价性的严格推导。

1. 对于磁偶极子，如图5我们分析它在P点产生场强。（利用 $l<<r$）

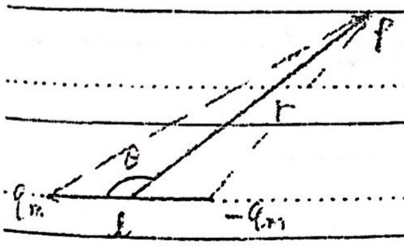


图5

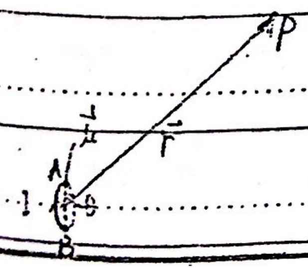
$$\vec{H}_+ = \frac{1}{4\pi\mu_0}\cdot\frac{q_m}{(r^2+l^2/4-rl\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}\cdot\left(-\frac{\vec{l}}{2}+\vec{r}\right)$$

$$\vec{H}_- = \frac{1}{4\pi\mu_0}\cdot\frac{-q_m}{(r^2+\frac{l^2}{4}+rl\cos\theta)^{3/2}}\left(\frac{\vec{l}}{2}+\vec{r}\right)$$

$$\therefore \vec{H} = \vec{H}_+ + \vec{H}_- = \frac{1}{4\pi\mu_0}\cdot\frac{q_m}{r^3}\vec{l} + \frac{q_m}{4\pi\mu_0}\cdot\frac{1}{r^3}\left[\left(1+\frac{3l}{2r}\cos\theta\right)-\left(1-\frac{3l}{2r}\cos\theta\right)\right]\vec{r}$$

$$= \frac{1}{4\pi\mu_0}\cdot\frac{\vec{P}_m}{r^3} + \frac{3}{4\pi\mu_0}\cdot\frac{\vec{P}_m\cdot\vec{r}}{r^5}\vec{r}$$

2. 对于载流线圈，如图6我们分析它在P产生场强：



我们分析以圆心对称的两个电流微元AB对P的合场强。

则

$$d\vec{H}=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{Id\vec{l}\times(-\vec{l_0}+\vec{r})}{(r^2+l_0^2+2l_0r\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{-Id\vec{l}\times(\vec{l_0}+\vec{r})}{(r^2+l_0^2-2l_0r\cos\theta)^{3/2}}$$

$$\therefore\ d\vec{H}=\frac{2}{4\pi}\cdot\frac{Id\vec{l}\times\vec{l_0}}{r^3}-\frac{6}{4\pi}\cdot\frac{1}{r^3}\cdot\frac{l_0}{r}\cos\theta\cdot Id\vec{l}\times\vec{r}$$

$$=\frac{2}{4\pi}\cdot\frac{Id\vec{l}\times\vec{l_0}}{r^3}-\frac{6}{4\pi}\cdot\frac{l_0\cos\theta}{r^4}\cdot Id\vec{l}\times\vec{r}$$

$$=\frac{2}{4\pi r^3}\cdot Id\vec{l}\times\vec{l_0}-\frac{6(\vec{r}\cdot\vec{l_0})}{4\pi r^5}Id\vec{l}\times\vec{r}$$

设 $\vec{m}=I\vec{S}$，我们将上式利用矢积式进行积分，有

$$\vec{H}=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\vec{m}}{r^3}+\frac{3}{4\pi}\cdot\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^5}\vec{r}$$

要上述两者等价，则

$$\vec{m}=\frac{\vec{P_m}}{\mu_0}$$

$$\therefore\ \vec{P_m}=\mu_0\vec{m}$$

这就是等价的条件．在此题中，$P_m=6\Delta S d$，$m=I\Delta S$，故

$$6\Delta S d=I\Delta S\cdot\mu_0$$

$$\therefore\ I=\frac{6d}{\mu_0}$$