电磁学试题（三）

题一：如图1，长直螺线管中部套一导线围成的圆环，圆环的轴与螺线管的轴重合，圆环由电阻不同的两半环组成，阻值R_1、R_2未知。在两半环的接合点A、B间接三个内阻均为纯电阻的伏特表，且导线$A-V_0-B$准确地沿圆环直径安放，而$A-V_1-B$，$A-V_2-B$分置螺线管两边，长度不拘。螺线管中通有交变电流时发现，V_0示数5V，V_1 10V，问V_2示数。（螺线管外磁场及电路电感均忽略不计）

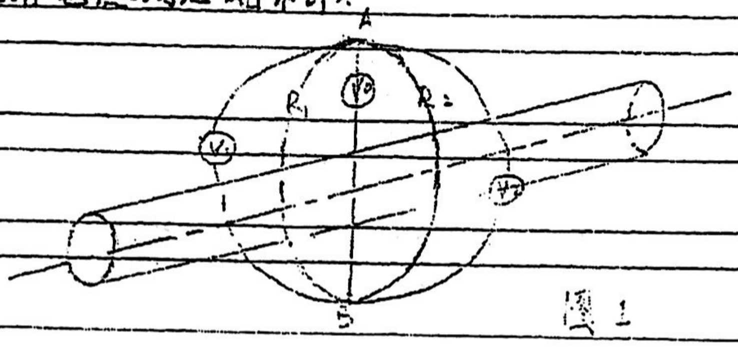


图1

题二：两个分别绕有N_1匝和N_2匝的圆线圈，半径分别为r_1、r_2且$r_2 \ll r_1$，设大圆的内电阻为R，求(1)两线圈在同轴共面位置的互感系数。(2)在小线圈中通以稳恒电流I，并使之沿轴线以速度v匀速运动，始终保持二者共轴，求两线圈中心相距为x时，大线圈中的感生电动势。(3)若把小线圈从共面移至很远处，求大线圈中通过的感生电量。（忽略所有自感。）

题三：如图2，一长为L的绝缘细杆在水平面内绕O轴转动。在以O为圆心，半径为L的范围内，充满了垂直于纸平面向里且磁感强度为B的均匀磁场。杆上距O点r_0处套一质量为m、带电量为q的小环。在t=0时，给杆和环一初始角速度ω_0，并从此刻起，在距O点r_0范围内的磁场开始以$\frac{dB}{dt}$的速率匀速变化。杆转动时环受一反比于转动半径的阻力，且比例系数

力L（即 $f = \frac{kL}{r}$），(1)求当小环刚脱离杆时的切向和径向速度。（环和杆间无电荷转移，且环径向运动摩擦不计）。在 $1 < r < r'$ 的范围内充满了磁感强度为 B_0，以O为圆心环状分布的匀强磁场，小环刚一脱离杆 r_0 范围内的B就停止变化，(2)问 B_0 为多大，能使小环恰好打到半径为 r' 的外壁上（环在此过程中可视为带电质点）。

$r_0 = 0.1m$，　$q = 4.5\times10^{-3}C$．　$\frac{dB}{dt} = 1.2T/S$　$k = 5.4\times10^{-5}N$．　$B = 10^4 T$

$L = 0.5m$，　$m_{杆} = 1.5kg$，　$m = 0.5kg$　$\omega_0 = 120\ rad/s$　$r' = 1.0m$

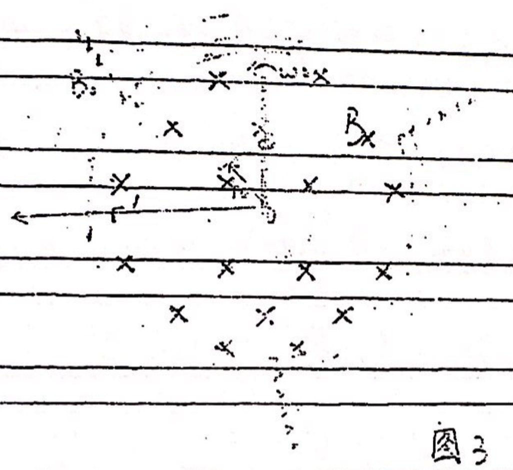


图3

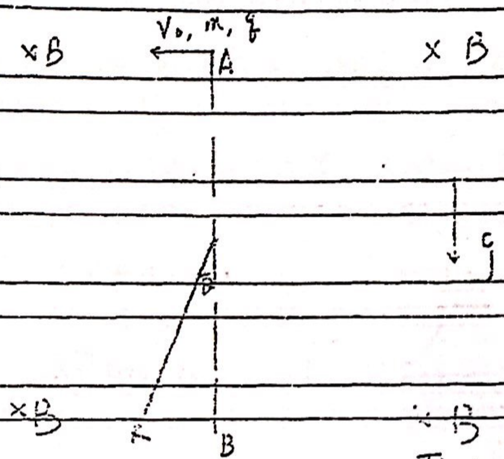


图4

题四：如图4，在竖直平面内有一半径为R的固定光滑绝缘圆环，在空间有垂直于环平面的水平匀强磁场B，质量为m，电量为q(q>0)的质点，开始时在圆环最高点A（在圆环外）并具有沿水平方向向左的速度 v_0，引入参数 λ，μ，定义 $\lambda = \frac{v_0^2}{Rg}$，$\mu = \frac{q^2B^2R}{m^2g}$．

(1)设质点能够沿环外从A到达B，为了使质点刚好能继续作圆周运动而不离开圆环，试求 μ，λ 应满足的关系．

(2)对上述 μ-λ 关系，试证无论 λ 取何值，质点在A必能贴着圆环作圆周运动．

(3)对上述 μ-λ 关系，为使质点在 $\pi > \theta > 0$ 时对圆环正压力N恒大于0，求 λ 的全部可取值．

题五．用于电风扇的异步电机由 $U_1 = 220V$ 电压供电时其工作转速为1800r/min，为使电（$r = r_0$ 额定）

扇不要嗡嗡地响声太大，经自耦变压器给电机供以$U_2=127V$的电压。此时其转速有多少？假设叶片的负载由排风量所决定，轴承的摩擦力可忽略不计，定子绕组内的电流只与所施加的电压有关，且气流速度v正比于叶片旋转功率。

题六：如图5所示为一电热水壶的简化电路图。由圆形铁芯和缠绕在其上的线圈构成一理想变压器，AB端接市电，EF端接一载流螺线管，管芯为铁磁性金属圆柱。金属圆柱内因涡电流而产热。忽略边缘效应，忽略涡电流产生的磁场，忽略所有线圈及导线的电阻。试问<1>求线圈1，2的自感及互感。<2>求证 $\frac{\tilde{U}_1}{\tilde{U}_2}=-\frac{n_1}{n_2}$，<3>设热传导效率为80%，求把2kg水由20°C加热到100°C至少需多少分钟？($C_水=4.2\times10^3 J/kg\cdot°C$)。

数据： $N_1=1000$匝，$\mu_{r2}=1000$，$S=10^{-4}m^2$（S为圆形铁芯横截面积。）

$N_2=100$匝，$n=1000$匝/m，$\rho_铁=9.71\times10^{-8}\ \Omega\cdot m$

$r=0.06m$，$h=0.15m$

$\mu_{r1}=1500$，$D=0.03m$

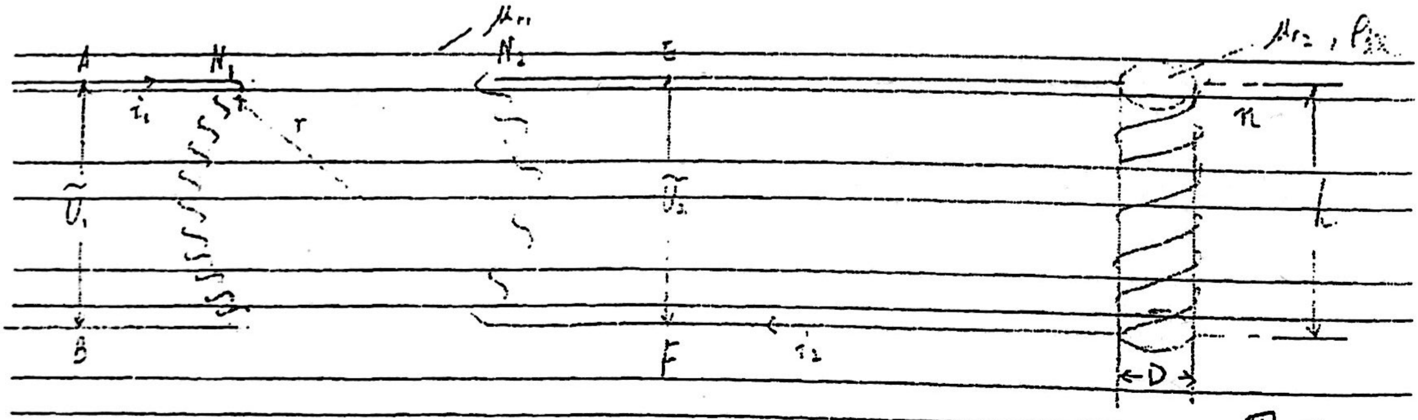


图5.

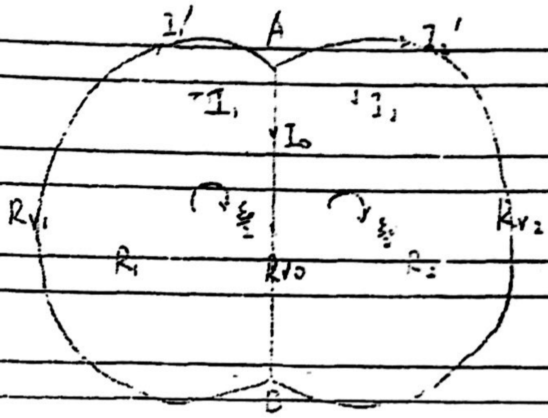
电磁学试题（三）

参考答案

题一解．因螺线管中通有交变电流，故回路中产生的感生电动势也是交变的，但可以仅限于研究某确定时刻感生电动势，电压和电流的瞬时值，这是因为在无电感电容的情况下，各量有效值间的关系和瞬时值间的关系相同。

(1) 当 $R_2 > R_1$，即 $\varphi_A > \varphi_B$ 时，回路中电流如图1所示

则
$$\begin{cases} I_0 R_{V0} + I_1 R_1 - \frac{\varepsilon_0}{2} = 0 \\ I_0 R_{V0} + I_1' R_{V1} - \frac{\varepsilon_0}{2} = 0 \\ \frac{\varepsilon_0}{2} - I_2 R_2 + I_0 R_{V0} = 0 \\ \frac{\varepsilon_0}{2} - I_2' R_{V2} + I_0 R_{V0} = 0 \end{cases}$$



$$\frac{\varepsilon_0}{2} = I_0 R_{V0} + I_1' R_{V1} = I_2' R_{V2} - I_0 R_{V0}$$

$\therefore$ $U_2 = I_2' R_{V2} = 20\,V$.

(2) 当 $R_2 < R_1$，则 $\varphi_A < \varphi_B$．I_0 反向，其它不变．则

$$\frac{\varepsilon_0}{2} = I_1' R_{V1} - I_0 R_{V0} = I_2' R_{V2} + I_0 R_{V0}$$

$\therefore$ $U_2 = I_2' R_{V2} = 0\,V$（此时 $R_2 = 0$ 即 R_2 段为超导体，$R_1 \neq 0$）

综上所述　$U_2 = 20\,V$ 或 $0\,V$

题二解：如图2．半径为 R 的线圈中通以 I 的电流，则中轴线上距圆心 x 处的磁感强度

$$B = \sum \Delta \vec{B}_{\parallel}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum^{2\pi R} \frac{I \Delta l}{R^2 + x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}} = \frac{\mu_0 R^2 I}{2(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

<1> 当大线圈中通有I_1的电流时,

$$B_0 = N_1 \cdot \frac{\mu_0 I_1}{2r_1}$$

$\because r_2 \ll r_1$, $\therefore \Phi_{12} = B_0 \cdot N_2 \pi r_2^2$

$$M = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi r_2^2}{2r_1}$$

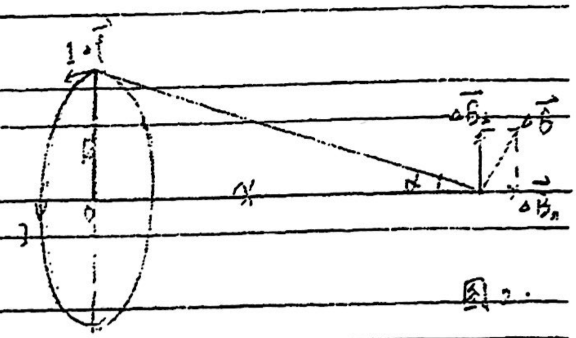


图2.

<2> 当两环中心相距x时

$$\Phi_{12} = \frac{\mu_0 \pi N_1 N_2 r_1^2 r_2^2 I_1}{2(x^2+r_1^2)^{3/2}}$$

$$M = \frac{\Phi_{12}}{I_1}$$

$$\Phi_{21} = MI$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -\frac{d\Phi_{21}}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{3\mu_0 \pi N_1 N_2 r_1^2 r_2^2 I v x}{2(r_1^2+x^2)^{5/2}}$$

<3> $\Delta q = I\Delta t$

$$Q = \sum \Delta q = \sum I\Delta t = \sum \frac{\varepsilon}{R}\Delta t = \frac{1}{R}\sum\left(-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\cdot\Delta t\right)$$

$$= \frac{1}{R}\left(\frac{\mu_0 \pi N_1 N_2 r_2^2 I}{2r_1} - 0\right) = \frac{\mu_0 \pi N_1 N_2 r_2^2 I}{2r_1 R}.$$

题三解. $\because$ $B\omega_0 r_0 q < m\omega_0^2 r_0$

$\therefore$ 带电小环将向外运动。

在运动过程中,系统受到感生电场所产生的电场力,阻力的共同作用,设在某时刻t,带电小环处于距转轴r处($r_0<r\le L$),径向速度为v_r,系统角速度为ω,分别考虑系统的能量和角动量,

$$2\pi r E = \pi r_0^2 \frac{dB}{dt}$$

$$\Delta W_{电} = qEr\omega\, dt = 2.7\times10^{-5} dt \quad (J)$$

$$\Delta W_{阻} = -\frac{kL}{r}\cdot r\omega\, dt = -2.7\times10^{-5} dt \quad (J)$$

$\because \Delta W_{电}+\Delta W_{阻}=0$，又洛仑兹力不作功

$\therefore$

$$\frac{1}{2}I\omega_0^2+\frac{1}{2}m r_0^2\omega_0^2=\frac{1}{2}I\omega^2+\frac{1}{2}m(r^2\omega^2+v_r^2) \qquad ①$$

$$M_{电}=qEr=-M_{阻}=-kL$$

$$M_{洛}=Bv_r qr=Bqr\frac{dr}{dt}$$

$\therefore$

$$\Delta L=M\Delta t=(M_{电}+M_{阻}+M_{洛})\Delta t=Bqr\,dr$$

$\therefore$

$$I\omega_0+mr_0^2\omega_0+\frac{1}{2}Bq(r^2-r_0^2)=I\omega+mr^2\omega \qquad ②$$

联立①.②两式，其中$I=\frac{1}{3}M_{杆}L^2$，并令$r=L$得

$$\omega=\frac{(I+mr_0^2)\omega_0+\frac{1}{2}Bq(L^2-r_0^2)}{I+mL^2}$$

$$v_r=\sqrt{\frac{(I+mr_0^2)\omega_0^2-(I+mL^2)\omega^2}{m}}$$

代入数据得 $\omega=84\ rad/s$ $\quad\therefore v_z=42m/s$

$$v_r=15\ m/s$$

(2) 小环在环形磁场B_0中运动时，

$\because F=0$，$\therefore$角动量守恒；$\because$洛兹伦力不作功，$\therefore$能量守恒

于是有 $v_z'\cdot r'=v_z\cdot L$

$$\frac{1}{2}m(v_r^2+v_z^2)=\frac{1}{2}m(v_z'^2+v_r'^2+v_z'^2)$$

在最远处时 $v_r'=0$，又由受力 $m\frac{dv_z'}{dt}=B_0v_r'q=B_0q\frac{dr}{dt}$

$\therefore$

$$mv_z=B_0q(r'-L)$$

$\therefore$ $$\frac{1}{2}m(v_r^2+v_z^2)=\frac{1}{2}m\left[\frac{L^2}{r'^2}v_z^2+\frac{B_0^2q^2(r'-L)^2}{m^2}\right]$$

解得 $$B_0=\frac{m\sqrt{v_r^2+v_z^2-\frac{L^2}{r'^2}v_z^2}}{q(r'-L)}=8.7\times10^{3}\,T$$

题四解：(1) 由机械能守恒，

$$v=\sqrt{v_0^2+4Rg}=\sqrt{(\lambda+4)Rg}$$

在B点刚好不掉下的前提为 $\frac{mv^2}{R}=Bvq-mg$

解得 $$\mu=\frac{(\lambda+5)^2}{\lambda+4}.$$

(2) 要质点能在A点贴着圆环运动，即要

$$Bv_0q+mg>\frac{mv_0^2}{R}$$

也即 $$\sqrt{\mu\lambda}+1>\lambda$$

i) 若 $0<\lambda\le1$，则上式显然成立

ii) 若 $\lambda>1$，则上式等于说 $\mu\lambda>(\lambda-1)^2$

而 $$\mu\lambda=\frac{\lambda(\lambda+5)^2}{\lambda+4}>\lambda(\lambda+5)=(\lambda-1)^2+(7\lambda-1)>(\lambda-1)^2$$

综上，无论λ取何值，质点均能满足要求.

(3) 由机械能守恒，在θ角位置

$$v=\sqrt{v_0^2+2Rg(1+\cos\theta)}=\sqrt{(\lambda+2+2\cos\theta)Rg}$$

$$N=Bvq-mg\cos\theta-\frac{mv^2}{R}$$

$$=\left[\sqrt{\mu(\lambda+2+2\cos\theta)}-(\lambda+2+3\cos\theta)\right]mg$$

要N恒大于0，即要 $$\frac{\lambda+5}{\sqrt{\lambda+4}}\sqrt{\lambda+2+2\cos\theta}>\lambda+2+3\cos\theta$$

i) 若 $\lambda+2+3\cos\theta\le0$，则上式恒成立.

(1)若 $\lambda+2+3\cos\theta>2$，则要求

$$(\lambda+5)^2(\lambda+2+2\cos\theta) > (\lambda+4)(\lambda+2+3\cos\theta)^2$$

即要求 $$(4\lambda+17)(\lambda+2) > 9(\lambda+4)\cos^2\theta + 2(2\lambda^2+8\lambda-1)\cos\theta$$

令 $f(\cos\theta) = 9(\lambda+4)\cos^2\theta + 2(2\lambda^2+8\lambda-1)\cos\theta$

$\because \begin{cases} 0<\theta<\pi \\ 2+\lambda+3\cos\theta>0 \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} -1<\cos\theta<1 & (\lambda\geq 1) \\ -\frac{\lambda+2}{3}<\cos\theta<1 & (\lambda\leq 1) \end{cases}$

i)当 $0<\lambda<1$ 时，$\because f(\theta)$ 开口向上，$\therefore f(\theta)_{max} = \max\{f(1), f(-\frac{\lambda+2}{3})\}$

$$f(1) = 4\lambda^2+25\lambda+34$$

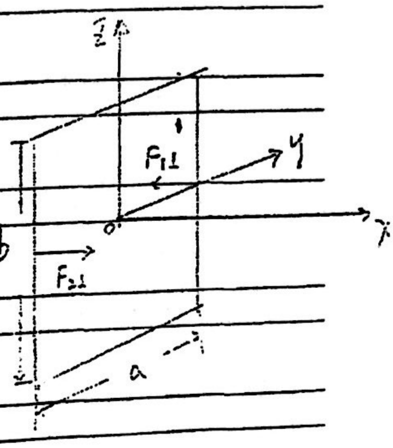
$$f(-\frac{\lambda+2}{3}) = 3\lambda^2+15\lambda+9$$

对于 $0<\lambda<1$，恒有 $(4\lambda+17)(\lambda+2) > f(\cos\theta) =$ 右边.

ii)当 $\lambda\geq 1$ 时 $2\lambda^2+8\lambda-1>0$ $\therefore f(\theta)_{max} = f(1) = 4\lambda^2+25\lambda+34$. 不等式恒成立.

综上，当 $\lambda>0$ 时，无论 λ 取何值，质点都能贴着圆环左半圆周运动.

题五解．交流异步电机是由能形成旋转磁场的绕组的定子和实心金属圆柱体或鼠笼型的转子组成。单相交流电机的旋转场是由相互垂直的定子绕组里的正弦电流移相 90° 形成的，且合成磁场向量的旋转频率与供电频率相等。



先考虑作用在转子上的力矩，为简单起见，设转子由 n 匝长方形金属框架组成，且边长各为 a、b，初始时，磁感应向量 B 垂直于 yz 平面内并以角速度 ω 绕框架逆时针旋转。则

$$\Phi = nB_\perp S = nBab\cos\omega t$$

$$\varepsilon_{(t)} = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = nB_0 S\omega_0 \sin\omega_0 t$$

$$F_{12} = F_{22} = nB_0 I b = nB_0 \cdot \frac{\varepsilon(t)}{R} \cdot b = \frac{n^2B_0^2 S b\omega_0}{R}\sin^2\omega_0 t$$

一个周期内M的平均值 $\overline{M} = \frac{n^2B_0^2S^2\omega_0}{2R}$、

实际上，表达式中的角速度是一个相对值，即框架追旋转磁场角速度的差值。设ω为框架角速度，则 $\overline{M_p} = \frac{n^2B_0^2S^2}{2R}(\omega_0-\omega)$。又磁感强度B与流过定子绕组电流的幅值I成正比，而依题意，I与电源电压成正比，所以

$$\overline{M_p} \propto B_0^2(\omega_0-\omega) \propto I^2(\omega_0-\omega) \propto U^2(\omega_0-\omega) \propto U^2(f_0-f)$$

现考虑对转子起制动作用的力，即叶片排挤空气流所产生的力。假设风扇形成气流的面积为S，气流速度为v，则风扇发出的功率

$$P = \frac{\Delta E_K}{\Delta t} = \frac{\rho S v^3}{2}$$

∵气流速度正比于叶片旋转频率，又功率与力矩有关即 $P = M\omega$。

∴叶片所受制动力矩 $M_T = \frac{\rho S v^3}{2\omega} \propto \omega^2 \propto f^2$

电扇平稳工作时，转动力矩与制动力矩相等，即

$$kU^2(f_0-f) = f^2$$

$$k = \frac{f_1^2}{U_1^2(f_0-f_1)}$$ （其中 $U_1=220V$，$f_1=\frac{1800}{60}=30Hz$，$f_0=50Hz$）

从而 $$f_2^2 + \frac{U_2^2 f_1^2}{U_1^2(f_0-f_1)}f_2 - \frac{U_2^2 f_0 f_1^2}{U_1^2(f_0-f_1)} = 0$$

即 $$f_2^2 + 15f_2 - 750 = 0$$

∴ $$f_2 = 21\ Hz$$（舍去负根）

∴当用自耦调压器给电机供以 $U_2=127V$ 电压时，叶片转速为 $n_2 = 21\times60 = 1260\ r/min$

题六解.(1)∵是理想变压器，∴忽略磁漏. 由磁介质中的安培环路定理，当线圈中通

电流I_1时 $H_1 = \frac{N_1 I_1}{2\pi r}$ $B_1 = \frac{\mu_0 \mu_{r1} N_1 I_1}{2\pi r}$ $\Phi_{11} = N_1 B_1 S$

$$L_1 = \frac{\Phi_{11}}{I_1} = \frac{\mu_0 \mu_{r1} N_1^2 S}{2\pi r} = 0.50H \quad (1)$$

同理 $$L_2 = \frac{\Phi_{22}}{I_2} = \frac{\mu_0 \mu_{r1} N_2^2 S}{2\pi r} = 5.0\times10^{-3}H \quad (2)$$

又 $$\Phi_{21} = N_2 B_1 S$$

$$M = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 \mu_r N_1 N_2 S}{2\pi r} = 0.050H \quad (3)$$

(2)当线圈缠绕方向 原副线圈中电流方向如图所示，取回路绕行方向与电流方向一致.

则 $$\tilde{U}_{AB} = \tilde{U}_1 = jL_1\omega\tilde{I}_1 + jM\omega\tilde{I}_2 \quad (4)$$

$$\tilde{U}_{EF} = \tilde{U}_2 = -jL_2\omega\tilde{I}_2 - jM\omega\tilde{I}_1 = \tilde{I}_2\cdot\tilde{Z} \quad (5)$$

$$\frac{\tilde{U}_1}{\tilde{U}_2} = -\frac{L_1\tilde{I}_1 + M\tilde{I}_2}{L_2\tilde{I}_2 + M\tilde{I}_1}$$

由第一问得 $$\frac{M}{L_1} = \frac{N_2}{N_1}, \quad \frac{M}{L_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

∴ $$\frac{\tilde{U}_1}{\tilde{U}_2} = -\frac{\tilde{I}_1 + \frac{N_2}{N_1}\tilde{I}_2}{(\frac{N_2}{M})\tilde{I}_2 + \frac{N_2}{M}\tilde{I}_1} = -\frac{N_1}{N_2}. \quad (6)$$

(3).套在铁芯上的载流螺线圈的自感为

$$L = \mu n^2 V = \frac{\pi\mu_0\mu_{r2} n^2 D^2 h}{4}$$

由(5)式得 $$\tilde{I}_2 = \frac{\tilde{U}_2}{\tilde{Z}} = \frac{-\frac{N_2}{N_1}\tilde{U}_1}{jL\omega}$$

则铁芯中磁感强度 $$B = \mu n\tilde{I}_2 = \frac{\frac{n_2}{n_1}\tilde{U}_1 j}{2\pi f n V} = \frac{n_2 U_1}{2\pi f n n_1 V}\cos(\omega t+\varphi) = B_0\cos(\omega t+\varphi)$$

把铁芯分解成许多同轴的薄圆柱筒，其中任一圆筒的半径为r，厚为dr.

则该圆柱筒中产生的感生电动势 $$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(B\pi r^2)}{dt} = \pi r^2\omega B_0\sin(\omega t+\varphi)$$

该圆筒电阻为 $$R = \frac{\rho\cdot2\pi r}{h\,dr}$$

则圆筒瞬时热功率 $dP = \frac{\varepsilon^2}{R} = \frac{1}{2\rho}\pi\omega^2 r^3 h B_0^2 \sin^2(\omega t+\varphi)\cdot dr$

$= \left[\frac{2}{\rho}\pi^3 f^3 h B_0^2 \sin^2(\omega t+\varphi)\right]\cdot r^3 dr$

整个圆柱体瞬时功率 $P_{(t)} = \sum_{r=0}^{\frac{D}{2}} dP$

$= \frac{1}{32\rho}\pi^3 f^2 D^4 h B_0^2 \sin^2(\omega t+\varphi)$

一个周期内平均热功率 $\overline{P} = \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T} P_{(t)}\, dt$

$= \frac{n_2^2 U_1^2}{8\pi\rho n^2 n_1^2 h}\cdot\frac{1}{T}\sum_{0}^{T}\left[\frac{1-\cos(2\omega t+2\varphi)}{2}\right]\cdot dt$

$= \frac{n_2^2 U_1^2}{16\pi\rho n^2 n_1^2 h}$

代入数据得 $\overline{P} = 6.6\times10^2\ W$

把水烧开至少需热 $Q = C_水 m\Delta T = 6.72\times10^5\ J$

∴需时 $t = \frac{Q}{\eta\cdot\overline{P}} = 1.28\times10^3\ S = 21$分钟

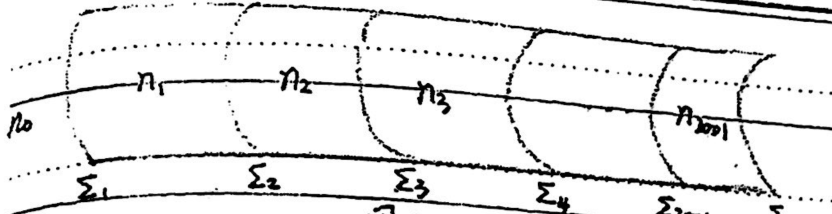


图3

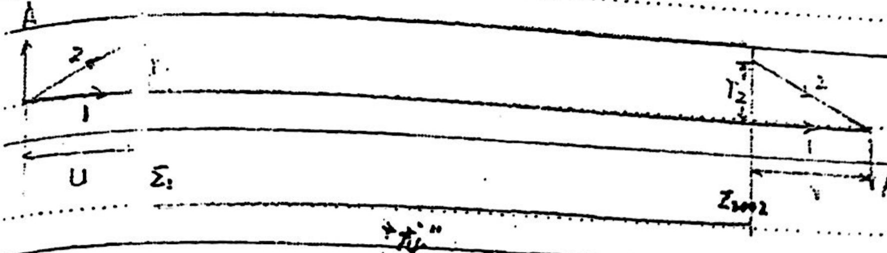


图4

题四 如图5，一束强激光通过一三棱镜，此三棱镜底角为α，底边长为$2h$，厚度为w，折射率为n，密度为ρ，设此三棱镜不发生转动，光线总平行于x轴入射，空气折射率$n_a=1$，反射光不计，平行激光束光强分布如下，

$$I(y)=\begin{cases} I_0-\dfrac{|y|}{4h}I_0 & (|y|\le 4h) \\ 0 & (|y|>4h) \end{cases}$$

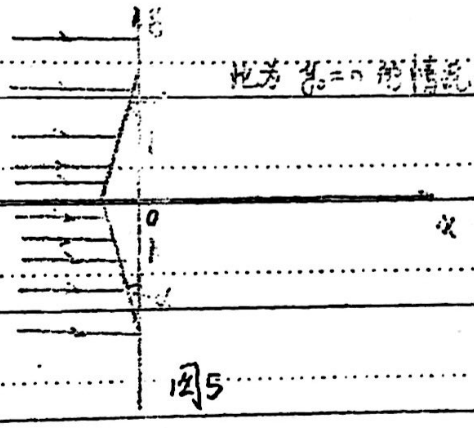


图5

(1) 试求平行光通过棱镜后的偏转角 θ

(2) 设y_0为三棱镜底点的坐标的y分量，当$|y_0|\le 3h$时，试求激光作用在x、y方向的分力，（I_0，θ，h，w，y_0表示）

(3) 不考虑重力影响，将镜移到$y_0=\dfrac{h}{20}$处释放，求其振动周期。（只考虑y方向）

题五 已知飞机场跑道上空气折射率随高度y变化为$n=n_0(1+\alpha y)$，其中$\alpha=1.5\times10^{-6}\ m^{-1}$，某人站在跑道，设此人眼距地面高$h=1.7m$，试求他能看到的跑道长。

题六 如图6，在OO上有A、B、C三个平面镜，镜的几何大小可忽略，且I为A、B两平 镜的