

## 几何光学

一、(1) 北极圈（北纬  $66.5^\circ$ ）是北温带与北寒带的分界线。如果把地球视为一个理想的表面无凸凹的球体，那么北极圈以南的地区一年中每天都有日出日落，而北极圈以北的地区一年中至少有一天会出现极昼现象，天空中将悬挂着一个不落的太阳。

如果你站在一座 300 米的高山上（设想是从理想球体表面上突出的一小块高地），极昼分界线会北移（或南移）多少距离？

(2) 观赏夕阳余辉的游人总是感到太阳比平时扁一些（如图 1）。这是由光线在大气层中的折射而造成的。十六世纪的德国科学家开普勒曾经建立过一个简化的大气层光学模型，该模型中大气层是位于地表上方的一层 3.64 公里高的均匀介质，其折射率为 1.000292。

采用上述模型，试求在游人看来，当太阳下沿与地平线重合时，它的垂直角直径比水平角直径短多少？

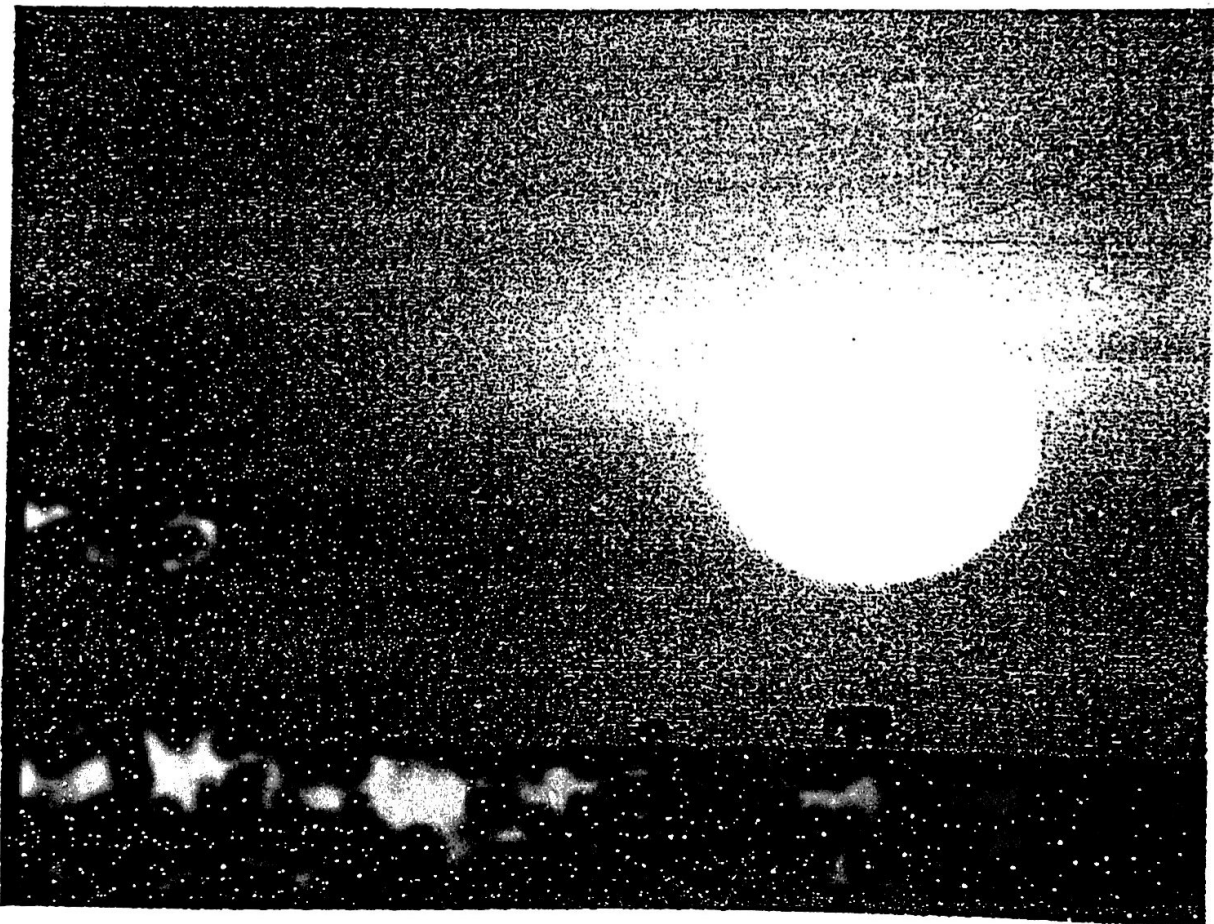


图 1

(3) 在一个晴朗的天气里，当太阳徐徐落入地平线时，天边有时候会形成一条暗带（如图 2a 所示）。而如果你此时正在视野开阔的高地，你可能饱尝眼福——看到太阳的圆盘被一分为二（如图 2b 所示）。

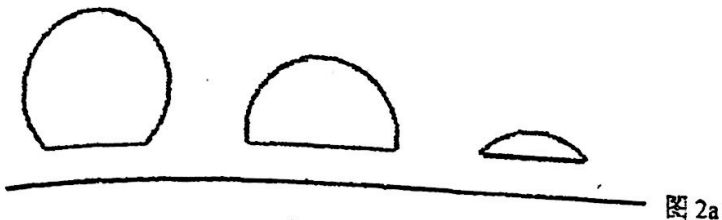


图 2a

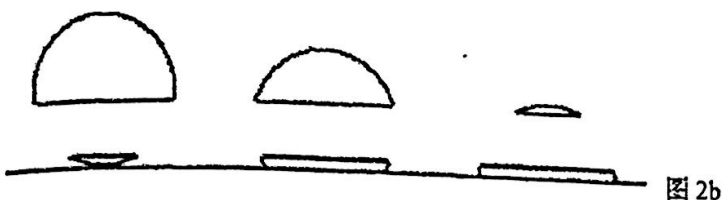


图 2b

这是由地表附近空气的折射率随高度发生剧变所致。为简化起见，设它的下降为跳跃式（如图 3 所示）：在地面上高度为  $h_1$  处出现介质分界面。

若  $h_1 = 50\text{m}$ ， $n_1/n_2 = 1.000010$ ，则图 2b 中暗带的角宽度是多少。

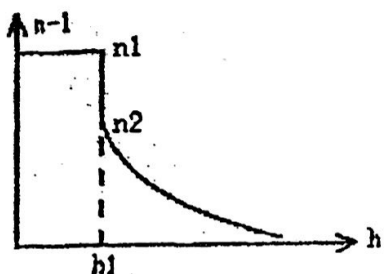


图 3

本题中需要的数据

地球半径： $6.37 \times 10^3 \text{ km}$

日地距离： $1.49 \times 10^8 \text{ km}$

太阳半径： $7.0 \times 10^3 \text{ km}$

二、彩虹是天空中最迷人的景色之一。牛顿在他的《光学讲义》中第一次完整地阐明了

彩虹形成的物理机制：

射入水珠的光线有的一次反射后折射，有的两次反射后折射，有的则经过三次或更多次反射后折射。由于水滴尺寸比它到观察者眼睛的距离小很多，在物理学上可把它视为一个点，因此不考虑它的尺寸，只要考虑入射光线与折射光线间的夹角。在这些夹角最大或最小之处折射光线通常较密集。因此这些最大角或最小角的区域，汇聚着各种不同颜色的光线。它势必具有呈现颜色的倾向。

下面我们考察彩虹的形成。

(1) 令平行光束照射在半径为  $R$  的水珠上，水珠的折射率为  $n$ 。考虑其中一条光线，令  $\rho$  为该光线到平行于它、且过水珠中心的直线间的距离。定义  $\zeta = \frac{\rho}{R}$ 。考虑在水珠内经过一

次反射后折射的光线，用 $\Gamma$ 表示入射光线所在直线和折射光线所在直线的夹角（如图4）。试将 $\Gamma$ 写作 $\zeta$ 的函数，并求出 $\Gamma$ 的最大值。

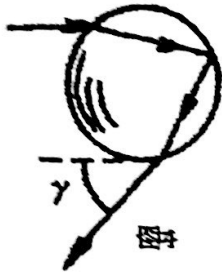


图4

(2) 现在考虑彩虹的具体形态。当背向太阳观察雨后的天空时往往会看到彩虹。彩虹宛如一个巨大的“轮子”。该轮的轴在通过太阳 $S$ 和观察者 $O$ 的假想直线 $SOO_1$ 上（如图5）。图中 $CD$ 是地平线， $\angle AOO_1 = \psi$ 是太阳在地平线上的角高， $O_1$ 称为对日点，位于水平线 $CD$ 下方。彩虹正是以 $O$ 为顶点的一个圆锥的底面圆周， $\gamma$ 为圆锥轴 $OO_1$ 与它任意一条母线之间的夹角。在水珠中，红光、紫光的折射率分别为 $n_{\text{红}}=1.331$ ， $n_{\text{紫}}=1.3435$ ，试分别求出红光、紫光所对应的 $\gamma$ 的值。

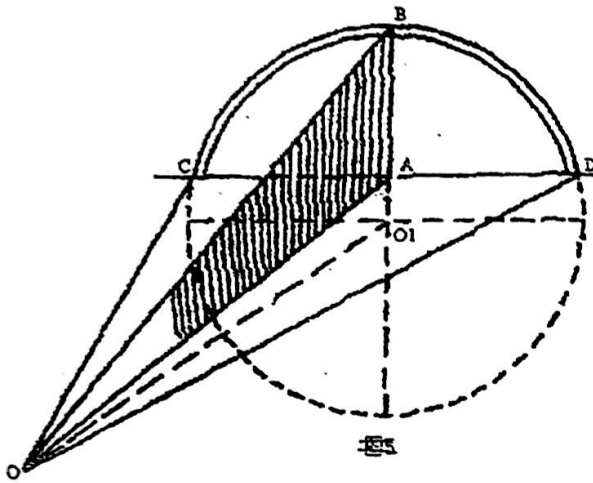


图5

(3) 假如太阳在地平线上的角高 $\psi=20^\circ$ ，则观察者看到的彩虹顶点的张角（图5中 $\angle AOB$ ） $\phi$ 和观察者看到彩虹底端的张角（图5中 $\angle AOD$ ） $\alpha$ 各为多少？

三、夜晚，皎洁的圆月高悬天空。人们偶尔会发现远处的玻璃窗里映衬着一前一后两个月亮。这是由于玻璃窗前后表面不平行而造成的。

设月光以 $30^\circ$ 入射角射向玻璃窗。玻璃窗的折射率为 $n$ ，且它的前后表面有很小的夹角 $\theta$ 。月光经过玻璃窗折射和反射可以生成多个像，求观察者看到的最亮的两个像间的角距离。

四、本题将讨论一个可以测出圆柱体玻璃棒折射率的小实验（如图6）：在一张纸上画一系列平行的直线，并将一根圆柱体玻璃棒放在纸上，与平行线夹角为 $\alpha$ （ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ）。

- (1) 在玻璃棒的正上方较远处观察，画图说明你会通过玻璃棒看到什么？  
 (2) 如何通过该实验求得圆柱体玻璃棒的折射率？

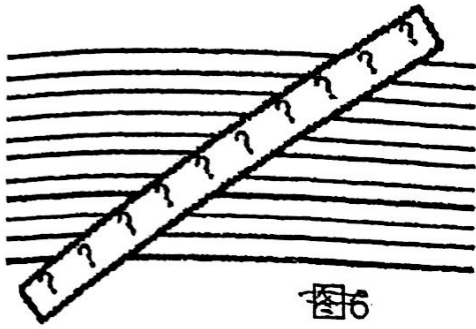


图6

图6

五、(1) 在图中，光线在直圆柱形光纤中传播。光线的入射点在端面上的中心 A 点，进入纤维后依次在 B、C、D 等点发生全反射。（如图 7）设光纤芯线和包层的折射率分别为  $n_1, n_2$  ( $n_2 < n_1$ )。整个光纤放在折射率为  $n_0$  的介质中。求入射角  $\varphi$  的最大值  $\varphi_M$ 。

(2) 上一问中的光线总在一个平面内传播，这种光线称为子午光线。相反，如果光线在光纤中传播时不保持在同一平面内，则称为斜光线。斜光线也可能在光纤内发生全反射。

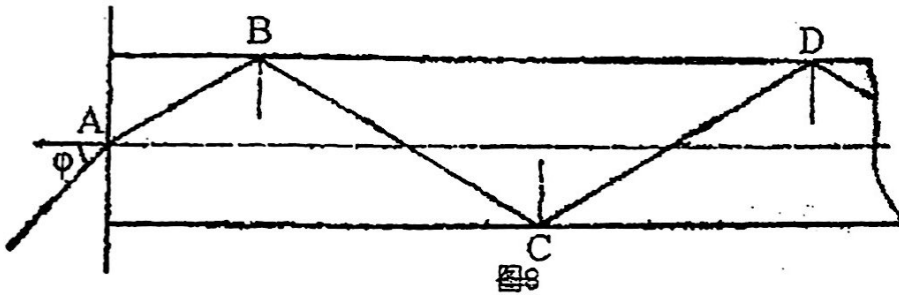


图7

图7

设有一束平行光射到光纤端面，入射角是  $\theta$ （如图 8）。设入射角  $\theta$  已经超过了  $\varphi_M$ ，试指出在端面上哪些区域入射的光线可以在光纤内发生全反射而传播。

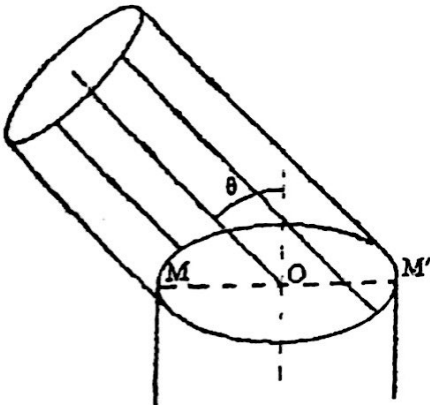


图9

图8

六、测定光速的天文方法之一基于 1728 年首先被布拉德雷发现的光行差现象。在地球上观测遥远的恒星发出的光线，如果直接将望远镜筒对准地球与恒星的连线是观察不到恒星的。事实上，由于地球在运动，望远镜必须倾斜一个很小的角度才能接收到恒星发出的光。

线。因为地球的运动方向一直在变化，所以地球上用望远镜看到的恒星似乎在运动。设在观测的时段内恒星与太阳相对静止。

(1) 若该恒星与太阳的连线恰好垂直于地球轨道平面，在地球上看来，一年内恒星像是做了一个圆周运动。已知圆周的角直径为  $\theta = 40.9''$ ，求光速  $c$ 。

(2) 若该恒星与太阳的连线与地球轨道平面夹角为  $\alpha$  (如图 9)，试问在地球上看来，一年内恒星做了何种轨道的运动？

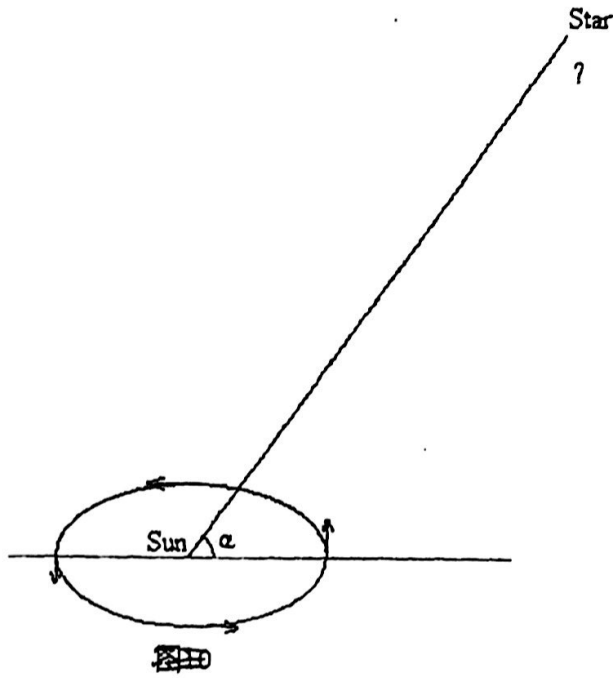
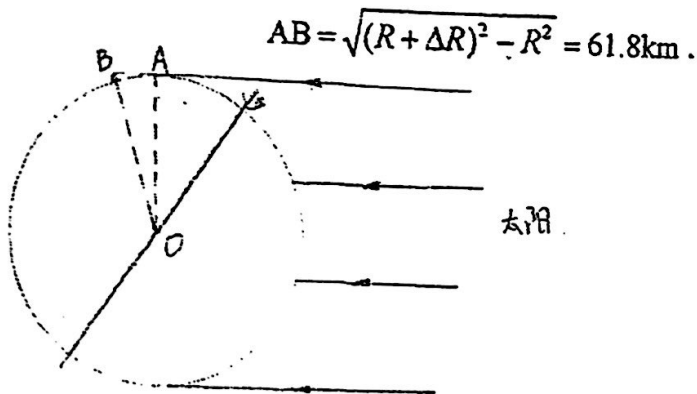


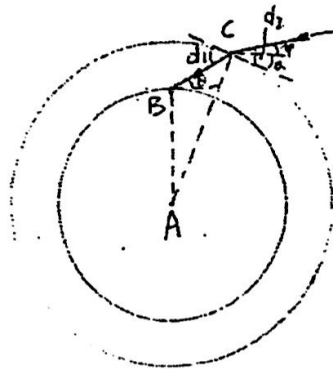
图 9

## 几何光学 解答

一、解：(1) 如图，由于高山的影响，北极圈上的一点 A 南移到了 B。在  $Rt\triangle OAB$  中，



(2) 如图，设太阳光以很小的角度  $\theta$  射向地表。相应的，图中  $\alpha$ 、 $d_1$ 、 $d_2$ 、 $\varphi$  均为小角。



在  $\triangle ABC$  中，由正弦定理

$$\frac{R}{\sin(\frac{\pi}{2} - d_1)} = \frac{R+h}{\sin(\frac{\pi}{2} + \theta)},$$

可化得，

$$d_1^2 - \theta^2 = \frac{2h}{R},$$

令  $\gamma = n - 1$ 。在折射界面，有

$$(1 + \gamma) \cos d_1 = \cos d_2,$$

从而，

$$d_1^2 - d_2^2 = 2\gamma,$$

$$\text{又} \because d_1 = \theta + \alpha,$$

$\therefore$

$$\varphi = d_2 - \alpha = \sqrt{\theta^2 + \frac{2h}{R} - 2\gamma} - \sqrt{\theta^2 + \frac{2h}{R} + \theta} = \sqrt{\theta^2 + 5.5886 \times 10^{-4}} - \sqrt{\theta^2 + 1.1429 \times 10^{-3} + \theta}.$$

取  $\theta = \theta_1 = 0$ ，得  $\varphi = \varphi_1 = -34.9'$  (太阳下缘对应的  $\varphi$ )。

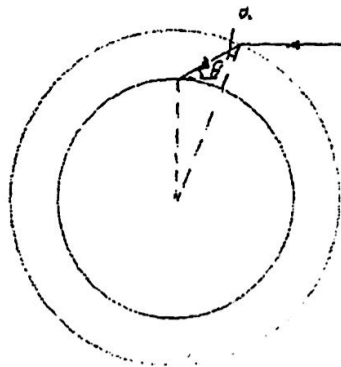
太阳之角直径  $\sigma = 2 \times 7.0 \times 10^5 / 1.49 \times 10^8 = 32.3'$ ，故太阳上缘对应的

$$\varphi = \varphi_2 = -34.9' + 32.3' = -2.6'$$

解得  $\theta = \theta_2 = 30.7'$ 。

故游人眼中，太阳竖直方向上的角直径  $\sigma_1 = \theta_2 - \theta_1 = 30.7'$ ，而水平方向上的角直径几乎不变，即  $\sigma_2 = \sigma$ 。所求  $\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2} = 5.0\%$ 。

(3)



如图所示，由正弦定理

$$\frac{R}{\sin \alpha} = \frac{R + h_1}{\cos \theta}$$

折射角  $\alpha$  满足  $\sin \alpha \leq \frac{1}{1 + \gamma}$  ( $\gamma = n_r / n_{\text{眼}} - 1$ ),

即

$$\cos \theta \leq \frac{1}{1 + \gamma} \frac{R + h_1}{R} = 1 - \gamma + \frac{h_1}{R},$$

$$|\theta| \geq \sqrt{2\gamma - \frac{2h_1}{R}} = \theta_m,$$

在  $-\theta_m < \theta < \theta_m$  时无光线入射，形成模糊带。带宽  $\delta = 2\theta_m = 14.3'$ 。

二、解：(1)  $\because \sin \alpha_1 = \zeta$ ,  $\sin \alpha_2 = \frac{\sin \alpha_1}{n} = \frac{\zeta}{n}$ ,

$\therefore \Gamma = 4\alpha_2 - \alpha_1 - \alpha_1 = 4\arcsin \frac{\zeta}{n} - 2\arcsin \zeta$ 。

令  $\frac{d\Gamma}{d\zeta} = \frac{4}{\sqrt{n^2 - \zeta^2}} - \frac{2}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = 0$ ，可得  $\zeta = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$ ，此时  $\Gamma = \Gamma_{\max} = 42^\circ 1'$ 。

(2) 根据分析可以知道  $\gamma = \Gamma_{\max}$ 。从而

$$\zeta_{\text{红}} = \sqrt{\frac{4 - n_{\text{红}}^2}{3}}, \quad \gamma = \Gamma_{\max} = 42^\circ 22'$$

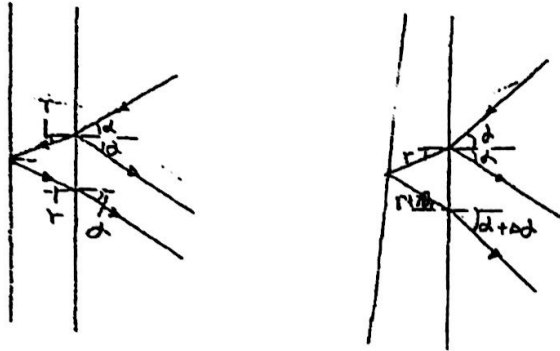
$$\zeta_{*} = \sqrt{\frac{4-n_{*}^2}{3}}, \quad \gamma = \Gamma_{\max} = 40^{\circ}34'.$$

(3) 由立体几何关系可知  $\cos\psi \cos\alpha = \cos\gamma$ , 故

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\cos\gamma}{\cos\psi}\right) = 38^{\circ}9',$$

$$\phi = \gamma - \psi = 22^{\circ}22',$$

三、解:



当玻璃窗两面没有夹角时

$$\sin\alpha = n\sin r,$$

而有夹角时

$$\sin(\alpha + \Delta\alpha) = n\sin(r + \theta),$$

$\Delta\alpha$  与  $\theta$  都很小, 故由以上两式可得

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta\alpha_1} = \frac{2n\cos r}{\cos\alpha} \theta,$$

同理

$$\Delta\alpha_2 = \frac{n\cos r}{\cos\alpha} \theta,$$

$$\because \alpha = 30^{\circ}, \quad \therefore \cos r = \sqrt{1 - \sin^2 r} = \sqrt{1 - \frac{1}{4n^2}},$$

$$\Delta\alpha = \Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2 = 2\theta \frac{n\cos r}{\cos\alpha} = 2\theta \sqrt{\frac{4n^2 - 1}{3}},$$

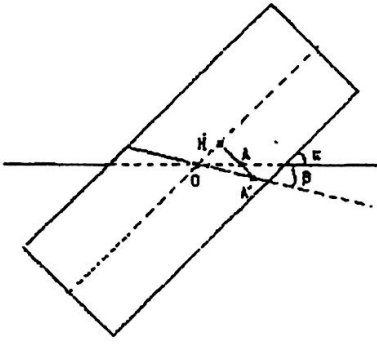
四、解: (1) 由于人眼在玻璃棒正上方较远处观察, 故只有小角度出射的光线才能被观察到. 可以将玻璃棒的上表面视为一个球面镜. 设玻璃棒半径为  $r$ , 取向上为正. 对纸上的物来说, 物距  $u = -2r$ . 设象距为  $v$ . 由球面镜成像公式

$$\frac{1}{v} - \frac{n}{u} = \frac{1-n}{-r},$$

解得  $v = \frac{2r}{n-2}$ , 从而放大率



$$m = \frac{nv}{u} = \frac{n}{2-n},$$



看到的图像如图所示. 随着  $n$  的增大, 图中  $\beta$  角也会增大.

(2)  $\alpha$  与  $\beta$  角都较容易测量.

$$\because AH = OH \times \tan(\alpha + \beta), \quad A'H = OH \times \tan \alpha,$$

$$\therefore m = \frac{A'H}{AH} = \frac{\tan(\alpha + \beta)}{\tan \alpha} = \frac{n}{2-n},$$

$$\therefore n = \frac{2 \tan(\alpha + \beta)}{\tan(\alpha + \beta) + \tan \alpha}.$$

五、解: (1) 如图所示, 有

$$n_0 \sin \varphi = n_1 \cos \theta,$$

$$\sin \theta > \frac{n_2}{n_1},$$

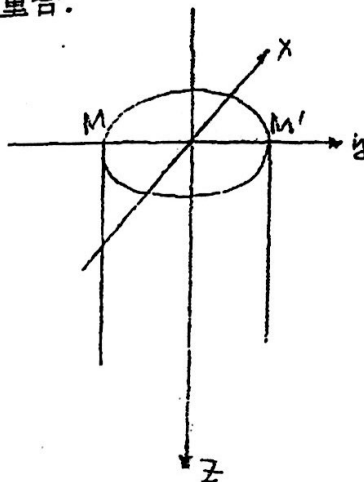
$$\text{故 } \sin \varphi < \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_0},$$

当  $n_1^2 - n_2^2 > n_0^2$  时,  $\varphi_M = 90^\circ$ ,

$$\text{当 } n_1^2 - n_2^2 \leq n_0^2 \text{ 时, } \varphi_M = \arcsin \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_0}.$$

(2) 所有光的折射角  $\alpha$  满足  $\sin \alpha = \frac{n_0 \sin \theta}{n_1}$ . 如图建立  $Oxyz$  坐标系,  $O$  在截面圆心,  $MM'$

在  $y$  轴上. 且  $z$  轴与圆柱轴线重合.



设入射光的入射点为  $(x_0, y_0, 0)$ ，折射光的方向量为  $\mathbf{v} = (0, \sin \alpha, -\cos \alpha)$ 。

设折射光射到界面上时，入射点为  $(x', y', z')$ ，则  $x' = x_0$ ， $y' = \sqrt{R^2 - x_0^2}$  ( $R$  为芯线半径)，

此处法线的方向矢量为  $\mathbf{v}' = (\frac{x_0}{R}, \frac{\sqrt{R^2 - x_0^2}}{R}, 0)$ 。

$\mathbf{v}$  与  $\mathbf{v}'$  的夹角即为入射角  $\beta$ ，

$$\cos \beta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'}{|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{v}'|} = \frac{\sqrt{R^2 - x_0^2}}{R} \sin \alpha,$$

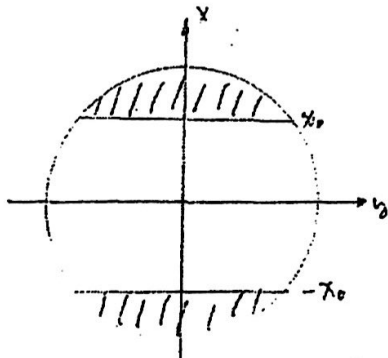
$$\because \text{要求 } \sin \beta \geq \frac{n_2}{n_1}, \text{ 则 } \cos \beta \leq \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_1},$$

$$\therefore \frac{\sqrt{R^2 - x_0^2}}{R} \sin \alpha \leq \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_1},$$

化简得

$$|x_0| \geq x_{0\min} = R \frac{\sqrt{n_0^2 \sin^2 \theta - n_1^2 + n_2^2}}{n_0 \sin \theta},$$

能全反射的入射点区域为两块弓形区域，如图所示。



六、解：(1) 由于日地距离远小于日星距离，可以认为恒星光垂直于地球轨道面入射到地球上。设地球运动速度为  $v$  ( $v \ll c$ )。

对地球来说，恒星光就不是垂直于地球轨道面入射了，而是光速  $c$  与  $v$  的合成，有一定的偏离，这个偏离角即恒星运动圆周的角半径  $\frac{\theta}{2}$ 。由于  $v$  很小，可以使用经典速度合成公式，

得

$$\frac{v}{c} = \frac{\theta}{2}.$$

$$\text{又} \because \text{日地距离 } r = 1.49 \times 10^8 \text{ km}, \therefore v = \frac{2\pi r}{T} = 2.97 \times 10^5 \text{ m/s}.$$

计算得  $c = 2.99 \times 10^8 \text{ m/s}$ 。

(2) 从地球上观测到的恒星光入射方向依旧是光速  $c$  与  $-v$  合成矢量的方向. 如图所示, 合成矢量的末端为一个圆周. 将该圆周投影到“天球”上, 则圆变成了椭圆.

即, 在地球上看来, 一年内恒星的运动轨道为一个椭圆.

