近代物理测试题(一)

题一 研究双原子分子的转动光谱，组成分子的两个原子可视为质点，质量分别为 m_1，m_2 且两个原子的连接为刚性的，相距 r，角动量量子化条件为 $L^2 = l(l+1)\hbar^2$（L 为角动量，l 为一正整数）已知跃迁仅发生在两相邻能级间。

(1) 试求出此分子转动光谱的所有频率

(2) 实验测得 HCl 分子远红外吸收光谱（也属于转动光谱）有如下一些波长的谱线：12.03×10^{-5} m，9.60×10^{-5} m，8.04×10^{-5} m，6.87×10^{-5} m，6.04×10^{-5} m，试求 H 与 Cl 原子的平均距离 r。

常量：$\hbar = 1.055\times10^{-34}$ J·s；$M_{Cl} = 35.45$ g/mol；$M_H = 1.008$ g/mol.

题二 一束流强度为（即单位时间通过的粒子数）为 $10^6\ s^{-1}$，速度 $v=\frac{\sqrt{2}}{2}c$ 的 K_L^0 介子通过 Pb 砖后，变成 K_S^0 介子，Pb 的内部状态没有变化，入射 K_L^0 和出射 K_S^0 运动方向相同，能量无损失，若已知 K_L^0 的静质量为 500 MeV/c^2，且 K_L^0 比 K_S^0 的静质量大 3.5×10^{-6} eV/c^2，试求此过程中 Pb 砖受力的大小和方向

题三 (1) 一个电子在一半径为 R，总电荷为 Ze 的均匀带电球内绕中心 O 点运动，试用玻尔理论计算相应于在带电球内的哪些允许能级

(2) 作为 He 基态的简化模型，可以在玻尔模型的基础上作如下进一步假设：基态 He 中两个电子总能保持处于 He 原子的直径两端，且每个电子具有角动量 $\hbar$，试用此玻尔模型求出 He 的基态能及第一电离能

题四 为了用反应 $\nu + {}^{37}_{17}Cl \rightarrow {}^{37}_{18}Ar + e^-$ 来探测太阳中微子，在美国南达科达州做的实验中，用了 4.0×10^5 L 的 C_2Cl_4 做探测器，试估计每天可以探测到多少 ${}^{37}_{18}Ar$，结果保留两位有效数字。已知：

(1) 太阳常数为 $2\ cal/(min\cdot cm^2)$，其中 $1cal = 4.18J$；

(2) 太阳热能的 10% 被中微子带走，中微子平均能量为 1 MeV；

(3) 全部中微子中只有 1% 具有足够能量发生上述反应；

(4) 上述反应的截面为 $10^{-45}\ cm^2$（即对于一个 ${}^{37}_{17}Cl$，中微子只有打到某个特定区域才可能引发反应）

(5) C_2Cl_4 的密度为 $1.5g/cm^3$

(6) Cl 的原子量为 35.453

题五 射电天文学家观测到波长 21 cm 的谱线，是来自氢气的超精细辐射，对应于氢原子中两个超精细能级之间的跃迁。较高能级的自然寿命大约是 5×10^{14} s。如果辐射衰变的有限寿命是谱线增宽的唯一原因，试问氢的这条发射谱线的相对宽度 $\Delta\nu/\nu$ 是多少？而星际分子热运动所引起的相对展宽 $\Delta\nu/\nu$ 又是多少？设气体平均温度为 5K（保留一位有效数字）

题六 ${}^{214}Po$ 放出的 α 粒子运动动能为 7.68 MeV，在 Au (Z=79) 箔上发生散射，偏折角 $\theta = 150°$。试由卢瑟福理论计算此散射 α 粒子与 Au 核的最近距离 r_m。计算中认为 Au 始终静止，且忽略相对论效应。

题七 A. Einstein 于 1907 年研究过低温下固体的比热，他的模型和假设如下：晶格振动

的能量是量子化的，其能量取值为

$$\varepsilon = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad , \quad n\in N$$

能量子$\hbar\omega$称为声子。晶格振动能量在晶体中传播，就是声子在晶体点阵中的传播。振子的能量服从玻尔兹曼分布，即晶格中能量为 ε 的振子个数为 $m = m_0 e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$，又已知晶格中振子总个数为 $3N$.

(1) 证明在上述假设下，晶体比热，或声子气体比热为

$$C = 3N_A k\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^2\frac{e^{\hbar\omega/kT}}{(e^{\hbar\omega/kT}-1)^2}$$

(2) 当T很大时（常温），证明 C 为一近似常量，且求出此常量。可能用到公式：$e^x\approx 1+x$（当$|x|\ll 1$时

题八 某人设计了一个实验，打算从显微镜中目测一个小谐振子的量子基态，该谐振子直径为10^{-4} cm，质量为10^{-12}g的物体，在一根细丝末端振动，最大振幅为10^{-3} cm，频率1000 Hz（以下各题各数值结果只作数量级估计）

(1) 此系统的上述状态量子数为多少？

(2) 它的基态能量为多少？试与室温下空气分子平均动能 0.025eV 比较.

(3) 基态经典振幅为多少？与可见光波长比较.

(4) 此试验可能成功吗？

可能用到常量：$h=6.626\times10^{-34}$J·s，$u=1.661\times10^{-27}$kg，$c=2.998\times10^{8}$ m·s^{-1}，

$\varepsilon_0=8.854\times10^{-12}$ C^2·N^{-1}·m^{-1}，$e=1.602\times10^{-19}$C，$N_A=6.022\times10^{23}$ mol^{-1}

$m_e=0.9109\times10^{-30}$ kg

近代物理测试题(一)

参考解答

题一解.(1) 设转动角速度为ω,两原子到质心距离为r_1, r_2,则

$$r_1=\frac{m_2}{m_1+m_2}r \,,\quad r_2=\frac{m_1}{m_1+m_2}r$$

且 $$L=I\omega=(m_1r_1^2+m_2r_2^2)\omega$$

故转动动能 $$E=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{L^2}{2I}=\frac{l(l+1)(m_1+m_2)\hbar^2}{2m_1m_2r^2}$$

故相邻两能级差为: $$\Delta E=\frac{(l+1)(l+2)(m_1+m_2)\hbar^2}{2m_1m_2r^2}-\frac{(l+1)l(m_1+m_2)\hbar^2}{2m_1m_2r^2}=\frac{(m_1+m_2)\hbar^2}{m_1m_2r^2}(l+1)$$

从而,频率 $$\nu=\frac{\Delta E}{h}=\frac{(m_1+m_2)\hbar}{2\pi m_1m_2r^2}(l+1)$$ (l为正整数)

(2) 由(1)知,光谱频率为等差数列,则公差可知 $$\nu_d=\frac{(m_1+m_2)\hbar}{2\pi m_1m_2r^2}$$

另外,将题中波长转化为频率可知为: $2.49\times10^{12}Hz$, $3.12\times10^{12}Hz$, $3.73\times10^{12}Hz$, $4.35\times10^{12}Hz$, $4.96\times10^{12}Hz$。利用逐差法可求得: $\bar{\nu}_d=6.17\times10^{11}Hz$

$$\therefore\quad r=\sqrt{\frac{(m_1+m_2)\hbar}{2\pi m_1m_2\nu_d}}=0.129\ nm$$

题二解. 由于能量不变,则有:

$$E^2=m_{L0}^2c^4+p_L^2c^2=m_{S0}^2c^4+p_S^2c^2$$

由于 $\Delta m=m_{L0}-m_{S0}\ll m_{S0}$,可知 $\Delta p=p_S-p_L\ll p_L$,由上式,则

$$(m_{L0}+m_{S0})(m_{L0}-m_{S0})c^2=(p_S+p_L)(p_S-p_L)$$

即 $$\Delta p=\frac{\Delta mc^2}{p_L}\cdot m_{L0}$$

又 $$p_L=\frac{m_{L0}v}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

$\therefore \quad \Delta p = \frac{\Delta m c^2}{v}\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2} = \Delta m c^2$

故 $F = n\Delta p = n\Delta m c = 1.9\times 10^{-27} N$

且 $\Delta p > 0$，故 F 沿 入射粒子 运动 方向

题三解：(1) 电子受力

$$\begin{cases} F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Ze^2}{r^2} & (r \geq R) \\ F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Ze^2 r}{R^3} & (r \leq R) \end{cases}$$

又在带电球表面，电子势能 $E_R = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{R}$，则在距球中心 x 处，有

$$E_x = E_R + \sum F\cdot\Delta r = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Ze^2}{r} - \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Ze^2}{R^3}(R^2-x^2) \qquad (x<R)$$

$$= -\frac{3}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{R} + \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Ze^2x^2}{R^3}$$

设电子在此处速度为 v，则

$$\begin{cases} m_e v x = n\hbar \\ m_e\frac{v^2}{x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Ze^2x}{R^3} \end{cases}$$

故有：

$$x^2 = \frac{n\hbar R}{e}\sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_0 R}{Zm_e}}$$

$$v^2 = \frac{ne\hbar}{m_e^2 R}\sqrt{\frac{Zm_e}{4\pi\varepsilon_0 R}}$$

$\therefore$ 电子能级为：

$$E = \frac{1}{2}m_e v^2 + E_x = \frac{Zen\hbar}{8\pi\varepsilon_0 R}\sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_0}{Zm_e R}} - \frac{3Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 R} + \frac{Zen\hbar}{8\pi\varepsilon_0 R}\sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_0}{Zm_e R}}$$

$$= \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(\frac{n\hbar}{e}\sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_0}{Zm_e R}} - \frac{3}{2}\right)$$

由于 $x^2 \leq R^2$，故

$$n \leq \left[\frac{eR}{\hbar}\sqrt{\frac{Zm_e}{4\pi\varepsilon_0 R}}\right]，且 n = 1, 2, 3, \cdots$$

(2) 设电子速度为 v，距中心原子核为 r，则

$$\begin{cases} m_e v r = \hbar \\ m_e \frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2e^2}{r^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{(2r)^2} \end{cases}$$

故 $r = \frac{16\pi\varepsilon_0\hbar^2}{7m_e e^2}$，$v = \frac{7e^2}{16\pi\varepsilon_0\hbar}$

故基态能量为 $E = 2\times\frac{1}{2}m_e v^2 - 2\times\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2e^2}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e^2}{2r} = -\frac{49m_e e^4}{256\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}$

代入数值，则：$E = -1.34\times10^{-17}J = -83.3eV$

考虑反应 $He \longrightarrow He^+ + e^-$，我们需要求出 He^+ 的基态能。

应用类氢原子玻尔理论易知此基态能为：

$$E' = -\frac{m_e e^4}{8\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2} = -8.72\times10^{-18}J = -54.4eV$$

故第一电离能即

$$\Delta E = E' - E = 28.9eV$$

∴ 比经典模型下，$E = -83.3eV$，$\Delta E = 28.9eV$

题四解：设地球表面中微子流密度为 n，则

$$n\cdot E_0 = 10\% w \quad (E_0\text{为中微子平均能量，}w\text{为太阳常数})$$

∴ $n = 5.22\times10^{12}\ min^{-1}\cdot cm^{-2}$

又 C_2Cl_4 中 Cl 原子个数 $N = 4N_A \cdot \frac{\rho V}{\mu} = 8.71\times10^{30}$

设 Cl 原子中 ^{37}Cl 个数占的比例为 x，则

$$37x + 35(1-x) = 35.453$$

$\therefore \quad x = 0.227,$

故总反应截面积：$S = xNS_0 = 1.98\times10^{-15}cm^2$

故每天可探测中微子个数为 $N' = Sntx1\%_0 = 0.15$（t为一天中分钟数）

题五解 由海森堡不确定性关系，则

$$\Delta E\Delta t \approx \frac{\hbar}{2}.$$

故 $h\Delta\nu\Delta t \doteq \frac{\hbar}{2}$

$\therefore \quad \Delta\nu \doteq \frac{1}{4\pi\Delta t} \approx 1.59\times10^{-16}Hz$

又 $\nu = \frac{c}{\lambda} = 1.4\times10^{9}Hz$

故 $\frac{\Delta\nu}{\nu} = 1\times10^{-25}$

而氢原子气体平均速率 $v = \sqrt{\frac{8KT}{\pi m_H}} \approx 3\times10^{2}\ m/s$

则多普勒效应改变为 $\Delta\nu \approx \nu\left(1+\frac{v}{c}\right) - \nu = \frac{v}{\lambda}$

故 $\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{v}{c} = 1\times10^{-6}$

题六解 α粒子显然将作一双曲线运动，其速度在无穷远处为

$$v_0 = \sqrt{\frac{2E_k}{m_\alpha}} = 1.92\times10^{7}\ m/s$$

设α粒子双曲线运动轨迹的三基本几何量为a,b,c.则在顶点处A:

$$m_\alpha\frac{v_A^2}{P} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Ze^2}{(a+c)^2}$$

$$p = \frac{b^2}{a}$$

又易知θ为两渐近线张角，故 $c = \frac{a}{\sin\frac{\theta}{2}}$

又 $$E=\frac{1}{2}m_\alpha V_A^2+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2Ze^2}{a+c}$$

$$c^2=a^2+b^2$$

可知所求最小距离 $r_m=a+c=\frac{1+\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 E}=3.01\times10^{-14}\,m$

题七解：(1) 首先，我们求下列和式：

$$\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-\beta n}=1+e^{-\beta}+e^{-2\beta}+\cdots=\frac{1}{1-e^{-\beta}}\quad(\beta>0)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}ne^{-\beta n}=\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=i}^{+\infty}e^{-\beta j}=\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{e^{-\beta i}}{1-e^{-\beta}}=\frac{e^{-\beta}}{(1-e^{-\beta})^2}$$

则所有振子总数应为：

$$3N=\sum_{n=0}^{+\infty}m_0e^{-(n+\frac{1}{2})\hbar\omega/kT}\qquad(令\ \beta=\frac{\hbar\omega}{kT})$$

则 $$3N=m_0e^{-\frac{\beta}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-n\beta}$$

$$\therefore\quad m_0=3Ne^{\frac{\beta}{2}}(1-e^{-\beta})$$

而振子总能量

$$E=\sum_{n=0}^{+\infty}m_0(n+\tfrac{1}{2})\hbar\omega\,e^{-(n+\frac{1}{2})\hbar\omega/kT}$$

$$=3N\hbar\omega(1-e^{-\beta})\sum_{n=0}^{+\infty}(n+\tfrac{1}{2})e^{-n\beta}$$

$$=\frac{3}{2}N\hbar\omega\frac{1+e^{-\beta}}{1-e^{-\beta}}$$

设T有微小改变量 ΔT，则

$$\Delta\beta=\frac{\hbar\omega}{k(T+\Delta T)}-\frac{\hbar\omega}{kT}\doteq-\frac{\hbar\omega}{kT^2}\Delta T$$

又 $$\frac{1+e^{-\beta-\Delta\beta}}{1-e^{-\beta-\Delta\beta}}=\frac{(1+e^{-\beta})}{(1-e^{-\beta})}\cdot\frac{1-\Delta\beta\frac{e^{-\beta}}{1+e^{-\beta}}}{1+\Delta\beta\frac{e^{-\beta}}{1-e^{-\beta}}}\approx\frac{1+e^{-\beta}}{1-e^{-\beta}}\left(1-\Delta\beta\frac{2e^{-\beta}}{1-e^{-2\beta}}\right)$$

$$\therefore\quad\Delta E=3Nk\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^2\frac{e^{-\hbar\omega/kT}}{(1-e^{-\hbar\omega/kT})^2}\Delta T$$

$$\therefore \quad C=\frac{\Delta E}{n\Delta T}=3N_Ak\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^2\frac{e^{\hbar\omega/kT}}{(e^{\hbar\omega/kT}-1)^2}$$

(2) T很大时，$\hbar\omega/kT\to0$，我们可知 $e^{\hbar\omega/kT}\approx1+\frac{\hbar\omega}{kT}$

$$\therefore \quad C\approx3N_Ak\,e^{\hbar\omega/kT}\approx3N_Ak=3R$$

可见C为一常量.

题八解：(1) 振子能级间隔为 $\Delta E=h\nu=6.6\times10^{-31}J$

振子最大能量 $E=\frac{1}{2}m\omega^2A^2=2.0\times10^{-18}J$

∴ 量子数 $N=\frac{E}{\Delta E}=3\times10^{12}$

(2) $E_0=h\nu=6.6\times10^{-31}J=2\times10^{-12}eV$

可见 $E_0\ll0.025eV$

(3) $\frac{1}{2}m\omega^2A_0^2=E$

$\therefore \quad A_0=6\times10^{-12}m$

由于可见光波长为 400 nm ~ 700nm，故 A_0 远小于可见光波长.

(4) 不可能，由于照明光波波长远大于要观察的线度，不可能看到清晰的像.