# 实物粒子的波动性

光(波)具有粒子性

实物粒子具有波动性吗?

## 一.德布罗意假设

**L.V. de Broglie**（法，1892–1986）

从自然界的对称性出发，认为:

既然光(波)具有粒子性

→ 那么实物粒子也应具有波动性。

1924.11.29德布罗意把题为“量子理论的研究”的博士论文提交巴黎大学。

他在论文中指出：

一个能量为$E$、动量为 $p$ 的实物粒子同时具有波动性，它的波长$\lambda$、频率$\nu$和 $E$、$p$的关系与光子一样：

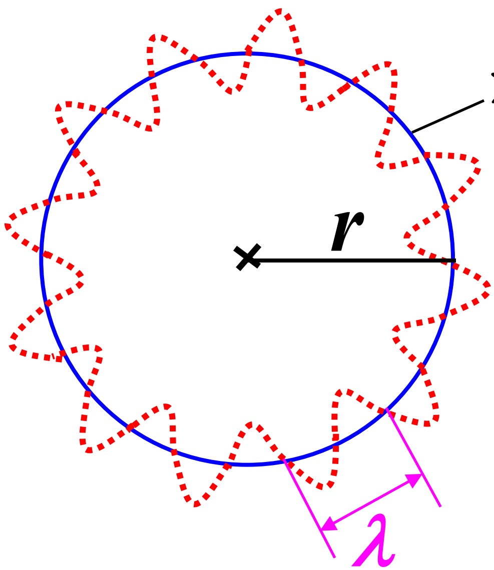
$$
\left.\begin{array}{ll}
E = h\nu & \nu = \dfrac{E}{h} \\[2ex]
p = \dfrac{h}{\lambda} & \lambda = \dfrac{h}{p}
\end{array}\right\}
$$

爱因斯坦－德布罗意关系式

与粒子相联系的波称为物质波或德布罗意波，

$\lambda$－德布罗意波长（de Broglie wavelength）

物质波的概念可以成功地解释粒子领域中令人困惑的轨道量子化条件。




稳定轨道 $2\pi r = n\lambda$

波长 $\lambda = \dfrac{h}{p}$

$$\left.\begin{array}{l} 2\pi r = n\lambda \\ \lambda = \dfrac{h}{p} \end{array}\right\} \rightarrow 2\pi r m \boldsymbol{v} = nh$$

（轨道角动量量子化条件）

论文获得了评委会的高度评价。

朗之万把德布罗意的文章寄给爱因斯坦，

爱因斯坦称赞说：

“揭开了自然界巨大帷幕的一角”

“瞧瞧吧，看来疯狂，可真是站得住脚呢”

经爱因斯坦的推荐，物质波理论受到了关注。

答辩会上，佩林问：

“这种波怎样用实验来证实呢？”

德布罗意答道：

“用电子在晶体上的衍射实验可以做到。”

算算电子的波长：$\lambda = \dfrac{h}{p} = \dfrac{h}{\sqrt{2m_0E}}$ （电子$v << c$）

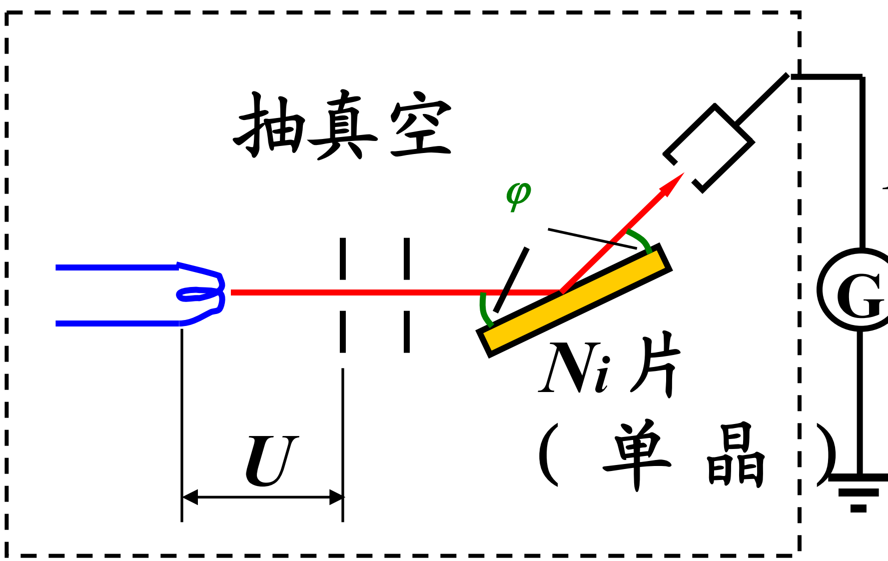
设加速电压为$U$（单位为伏特）

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_0eU}} \approx \frac{12.25}{\sqrt{U}}(\mathring{A})$$

$U$=100$V$ 时，$\lambda$=1.225Å － X射线波段

## 二.电子衍射实验

▲ 戴维孙(Davisson)革末(Germer)实验(1927)




$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 eU}}$$

当满足 $2d\sin\varphi = k\lambda$，

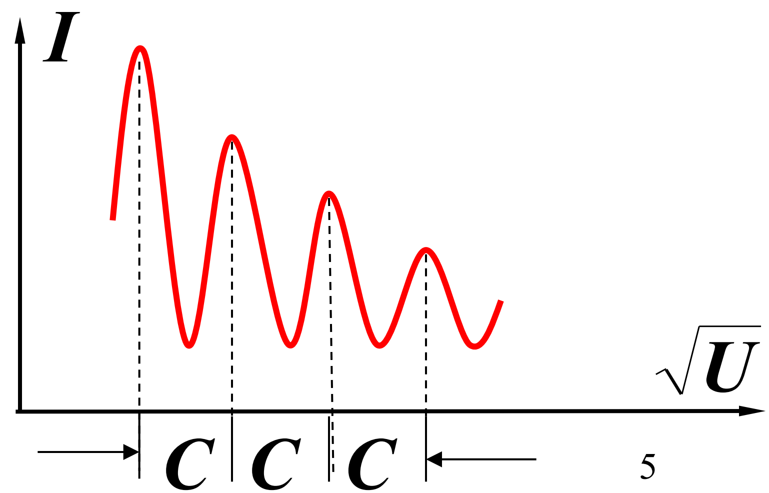
$k = 1，2，3\ldots$时，

可观察到 $I$ 的极大。

$$\sqrt{U} = \frac{k \cdot h}{2d\sin\varphi\sqrt{2em_0}} = k \cdot C$$

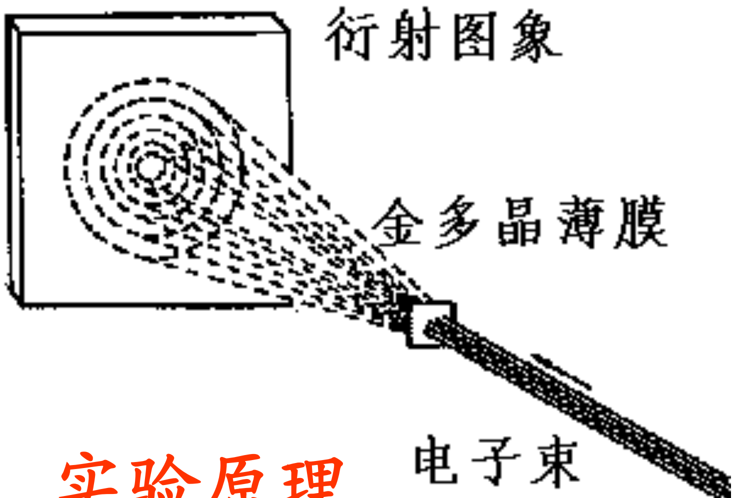
当 $\sqrt{U} = C，2C，3C\ldots$时，

可观察到电流$I$的极大。

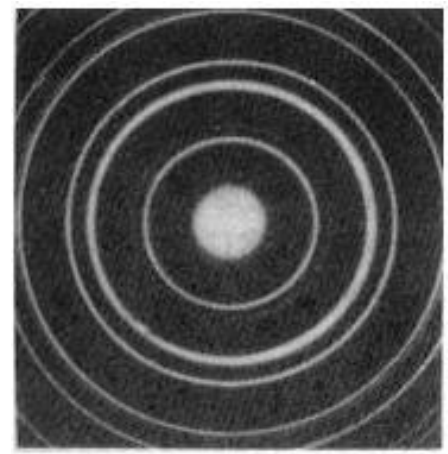


▲ 汤姆孙（G.P.Thomson）实验（1927）

电子通过金的多晶薄膜的衍射实验




实验原理



衍射图象

**1929年德布罗意获诺贝尔物理奖;**

**1937年戴维孙、汤姆孙共获诺贝尔物理奖。**

路易.德布罗意

Louis.V.de Broglie

法国人

1892 — 1986

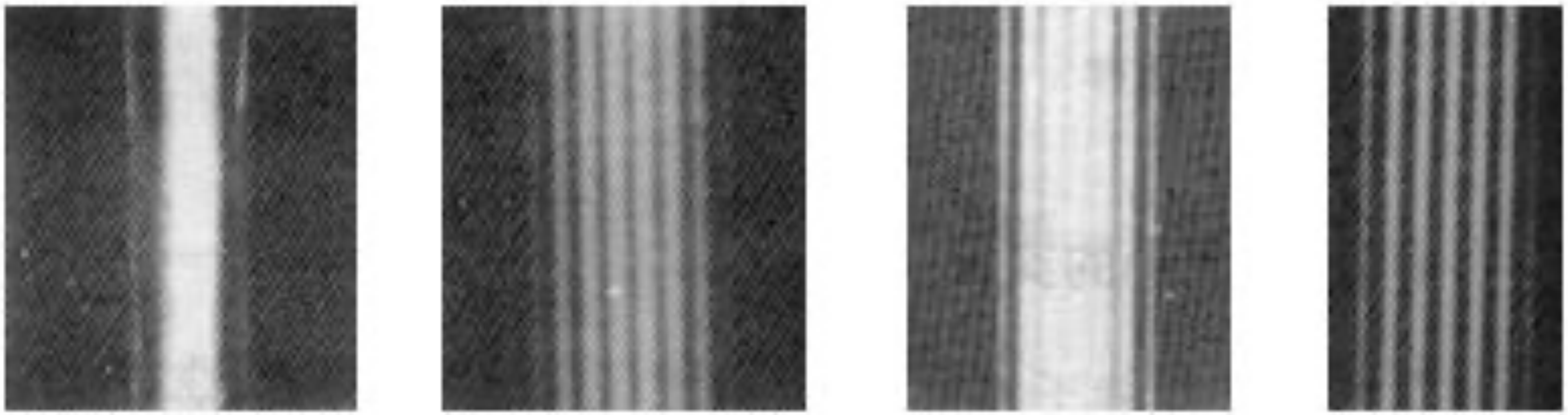
1929年获诺

贝尔物理奖

提出电子的波动性

▲ 约恩孙（Jonsson）实验（1961）

大量电子的单、双、三、四缝衍射实验:



单 缝　　双 缝　　三 缝　　四 缝

质子、中子、原子、分子…也有波动性。

$$\lambda = \frac{h}{mv} \propto \frac{1}{m},\quad m\uparrow \rightarrow \lambda\downarrow$$

宏观粒子 $m$ 大，$\lambda \rightarrow 0$，表现不出波动性。

例： $m = 0.01\text{kg}$， $v = 300\ \text{m/s}$ 的子弹

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{6.63\times10^{-34}}{0.01\times300} = 2.21\times10^{-34}\ \text{m}$$

$h$极小⇨宏观物体的波长小得实验难以测量

⇨“宏观物体只表现出粒子性”

▲两个自然尺度： $c$ 和 $h$

$c\to\infty$： 相对论 ⟶ 牛顿力学

$h\to0$： 量子物理 ⟶ 经典物理

（$\lambda\to0$： 波动光学 ⟶ 几何光学）

# 概率波与概率幅

## 一.对物质波的理解，概率波的概念

怎样理解物质波（德布罗意波）？

德布罗意：物质波是引导粒子运动的“导波”。

——本质是什么，不明确。

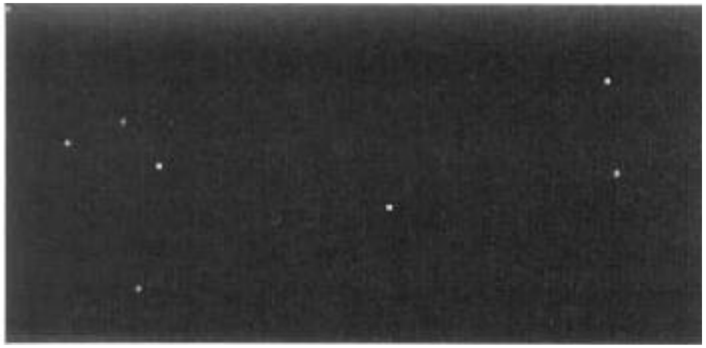
薛定谔：波是基本的，电子是“波包”。

但波包要扩散，而电子是稳定的。

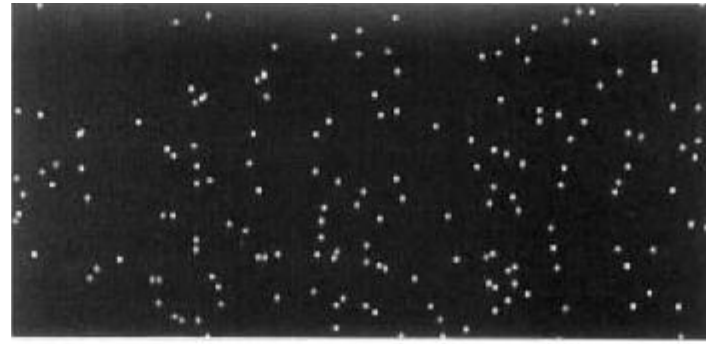
另一种理解：粒子是基本的，电子的物质波是大量电子相互作用形成的。

——被以下实验否定

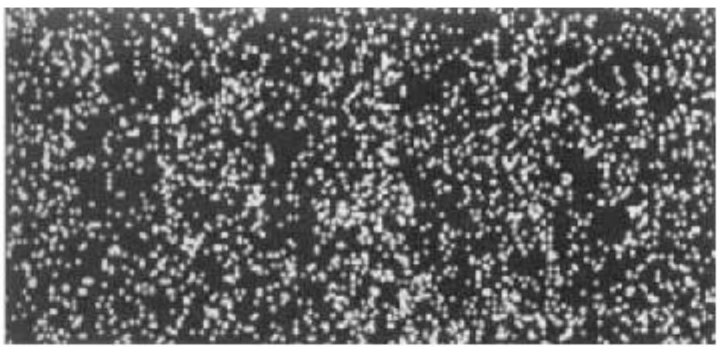
# 一个一个电子依次入射双缝的衍射实验:



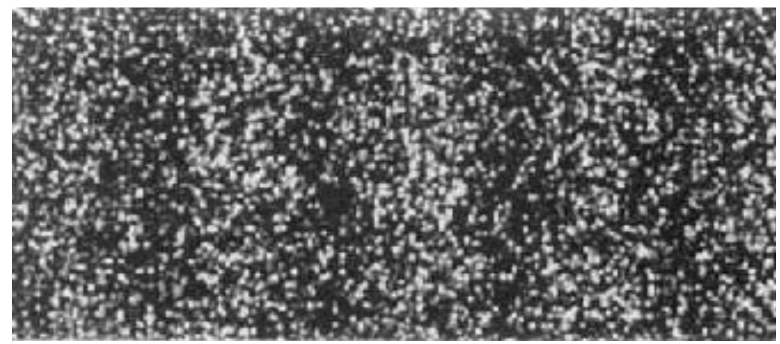
7个电子



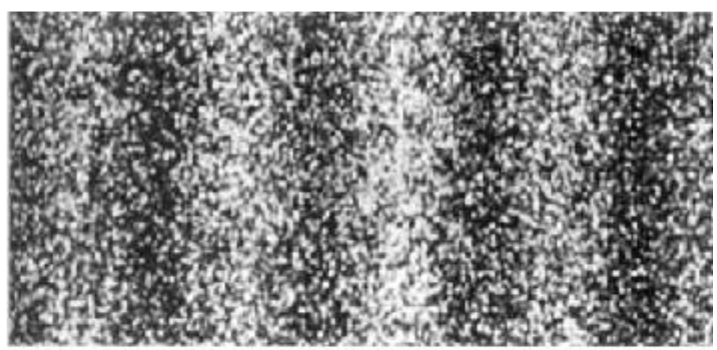
100个电子



3000



20000



70000

底片上出现一个个的点子 ⇨电子具有粒子性。随着电子增多，逐渐形成衍射图样 ⇨ 来源于“一个电子”所具有的波动性,而不是电子间相互作用的结果。

尽管单个电子的去向是概率性的，但其概率在一定条件下（如双缝），还是有确定的规律的。

玻恩（**M.Born**）：德布罗意波并不像经典波那样是代表实在物理量的波动，而是描述粒子在空间的概率分布的“概率波”。

## 二.波函数及其统计解释

### 1. 波函数（wave function）

要具体的应用物质波的概念，就要有物质波的波函数。

平面简谐波 $\xi(x,t)=A\cos(\omega t-kx)$

复数表示式 $\xi(x,t)=Ae^{-i(\omega t-kx)}$

物质波: 一维 $\Psi(x,t)$， 三维 $\Psi(\vec{r},t)$

### 2. 波函数的统计解释

物质波是“概率波”，它是怎样描述粒子在空间各处出现的概率呢?

先回忆一下光的波粒二象性:

波动性：某处明亮，则某处光强大，即 $I$ 大。

粒子性：某处明亮，则某处光子多，即 $N$大。

光子数 $N \propto I \propto E_0^2$

$I$大，光子出现概率大;

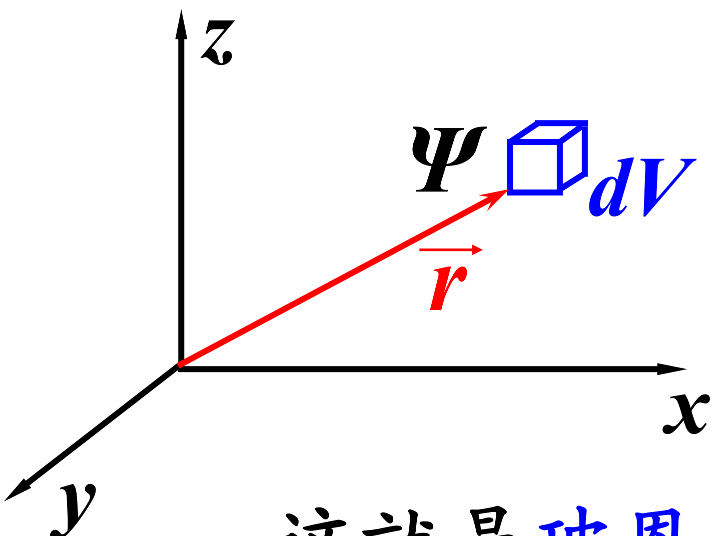
$I$小，光子出现概率小。

光子在某处出现的概率和该处光波振幅的平方成正比。

玻恩假设：物质波的波函数$\Psi$是描述粒子在空间概率分布的"概率振幅"。其模的平方：

$$|\Psi(\vec{r},t)|^2=\Psi(\vec{r},t)^*\Psi(\vec{r},t)$$

它代表$t$时刻，在$\vec{r}$端点处单位体积中发现一个粒子的概率，称为"概率密度"。




$t$时刻在$\vec{r}$端点附近d$V$内发现粒子的概率为：

$$|\Psi(\vec{r},t)|^2\,\mathrm{d}V$$

这就是玻恩在1926年给$\Psi$的统计解释。

$\Psi(\vec{r},t)$不同于经典波的波函数，它无直接的物理意义，有意义的是$|\Psi|^2$。

对单个粒子，$|\Psi|^2$给出粒子概率密度分布；

对大量粒子，$N|\Psi|^2$给出粒子数的分布；

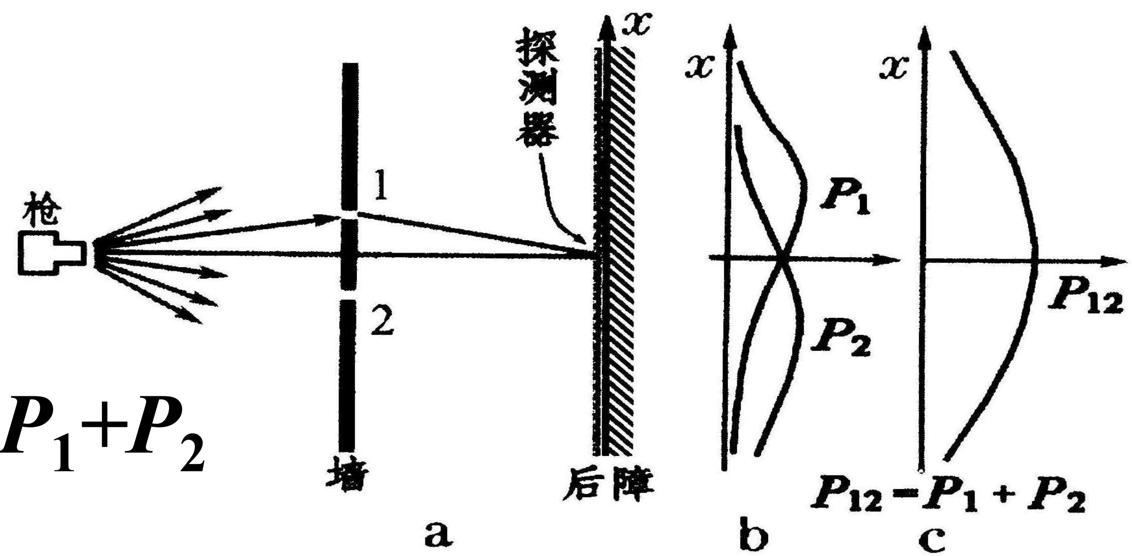
## 3.用电子双缝衍射实验说明概率波的含义

### （1）子弹穿过双缝

只开上缝→$P_1$

只开下缝→$P_2$

双缝 齐开→$P_{12}=P_1+P_2$

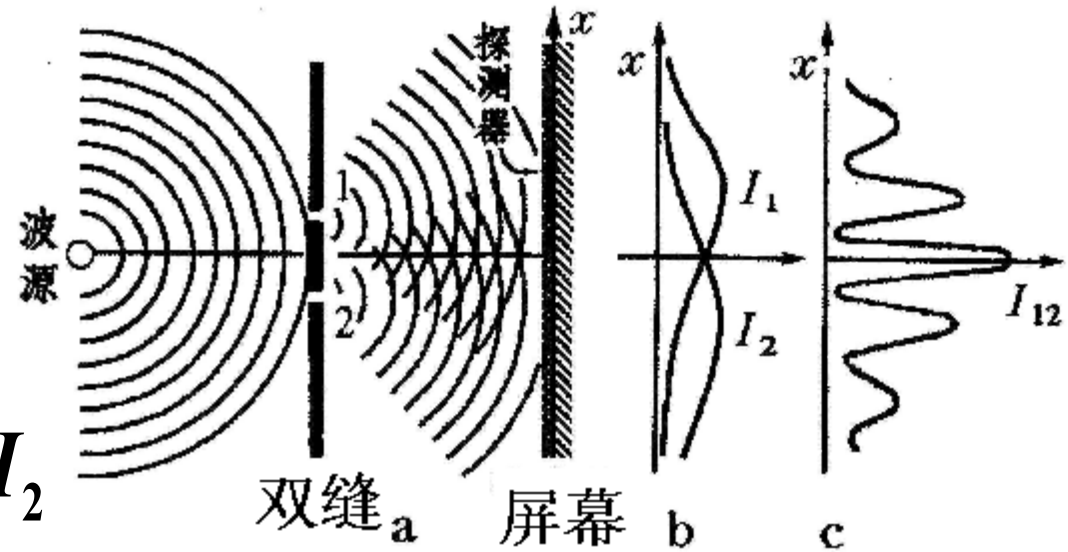


## （2）光波

只开上缝→光强 $I_1$

只开下缝→光强 $I_2$

双缝齐开→$I_{12} \neq I_1 + I_2$




通过上缝的光波用 $A_1(x)e^{i\omega t}$ 描述

通过下缝的光波用 $A_2(x)e^{i\omega t}$ 描述

双缝 齐开时的光波为 $(A_1 + A_2)e^{i\omega t}$

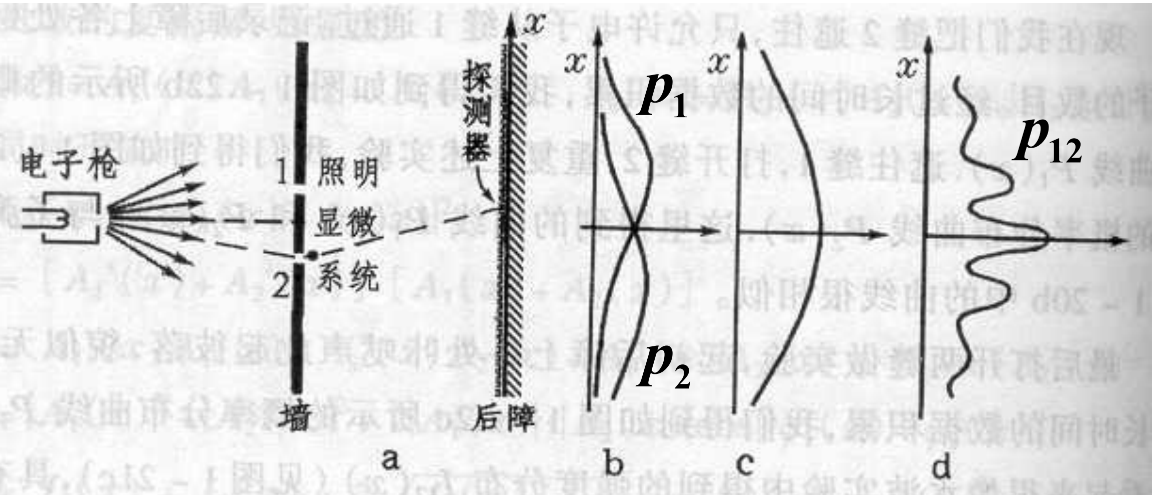
光强为 $I_{12} = |A_1 + A_2|^2 = |A_1|^2 + |A_2|^2 + \underbrace{|A_1^* A_2 + A_1 A_2^*|}_{\text{干涉项}}$

$= I_1 + I_2$ +干涉项

## （3）电子

通过双缝后，分布是d不是c。

电子的状态用波函数$\Psi$描述。




只开上缝时，电子有一定的概率通过上缝，

其状态用 $\psi_1(x)$描述，电子的概率分布为 $P_1 = |\Psi_1|^2$

只开下缝时，电子有一定的概率通过下缝，

其状态用 $\psi_2(x)$描述，电子的概率分布为 $P_2 = |\Psi_2|^2$

双缝齐开时，电子可通过上缝也可通过下缝，

通过上、下缝各有一定的概率，$\psi_1$、$\psi_2$ 都有。

总的概率幅为 $\Psi_{12}=\Psi_1+\Psi_2$

$$P_{12}=|\Psi_{12}|^2=|\Psi_1+\Psi_2|^2\neq|\Psi_1|^2+|\Psi_2|^2=P_1+P_2$$

出现了干涉。可见，干涉是概率波的干涉，是由于概率幅的线性叠加产生的。

即使只有一个电子，当双缝齐开时，它的状态也要用 $\Psi_{12}=\Psi_1+\Psi_2$ 来描述。

两部分概率幅的叠加就会产生干涉。

微观粒子的波动性，实质上就是概率幅的相干叠加性。衍射图样是概率波的干涉结果。

## 4. 统计解释对波函数提出的要求

根据波函数的统计解释，它应有以下性质：

▲ **有限性：** 在空间任何有限体积元$\Delta V$中找到粒子的概率 $(\iiint_{\Delta V} |\Psi|^2 \mathrm{d}V)$ 必须为有限值。

▲ **归一性：** 在空间各点的概率总和必须为1。

归一化条件：$\int_{\Omega} |\Psi(\vec{r},t)|^2 dV = 1$ ($\Omega$ – 全空间)

若 $\int_{\Omega} |\Psi(\vec{r},t)|^2 dV = A$，则 $\int_{\Omega} \left|\frac{1}{\sqrt{A}}\Psi(\vec{r},t)\right|^2 dV = 1$

$\frac{1}{\sqrt{A}}$ ——归一化因子

▲ 单值性：　波函数应单值，从而保证概率密度在任意时刻、任意位置都是确定的。

▲ 连续性：势场性质和边界条件要求波函数及其一阶导数（反映概率流）是连续的。

玻恩（M.Born，英籍德国人，1882—1970）由于进行了量子力学的基本研究，特别是对波函数作出的统计解释，获得1954年诺贝尔物理学奖。

## 5.自由粒子的波函数

自由粒子$\vec{F}_{外}=0 \longrightarrow E=\text{const.}$，$\vec{p}=\text{const.}$

$\longrightarrow \nu=\dfrac{E}{h}=\text{const.}$，$\lambda=\dfrac{h}{p}=\text{const.}$

对沿+x传播的单色平面波，有：

$$\xi_{(x,t)}=\xi_0 e^{-i2\pi(\nu t-\frac{x}{\lambda})} \quad \text{(Re)}$$

类比自由粒子沿+x方向的运动，波函数可写成：

$$\Psi(x,t)=\Psi_0 e^{-i2\pi(\nu t-\frac{x}{\lambda})}=\Psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-px)},$$

式中 $\hbar=\dfrac{h}{2\pi}$， $\Psi(x,t)$不需要取实部。

自由粒子在三维空间中运动的波函数:

$$\Psi(\vec{r},t)=\Psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}(E\cdot t-\vec{p}\cdot\vec{r})}$$

通常写成:

$$\Psi(\vec{r},t)=\Psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}}\cdot e^{-\frac{i}{\hbar}E\,t}=\Psi(\vec{r})e^{-\frac{i}{\hbar}E\,t}$$

$$\Psi(\vec{r})=\Psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}}$$ —— 空间波函数（振幅波函数）

自由粒子 $|\Psi|^2=|\Psi_0|^2=\mathrm{const.}$

即严格限制了粒子的动量 $(\vec{p}=\mathrm{const.})$, 则其位置就完全不确定了(各处概率相等)。

## 三. 对波粒二象性的理解

**粒子性**

◆ "原子性" 或 "整体性"

◆ 具有集中的能量 $E$ 和动量 $\vec{p}$

◆ 不是经典粒子！抛弃了"轨道"概念！

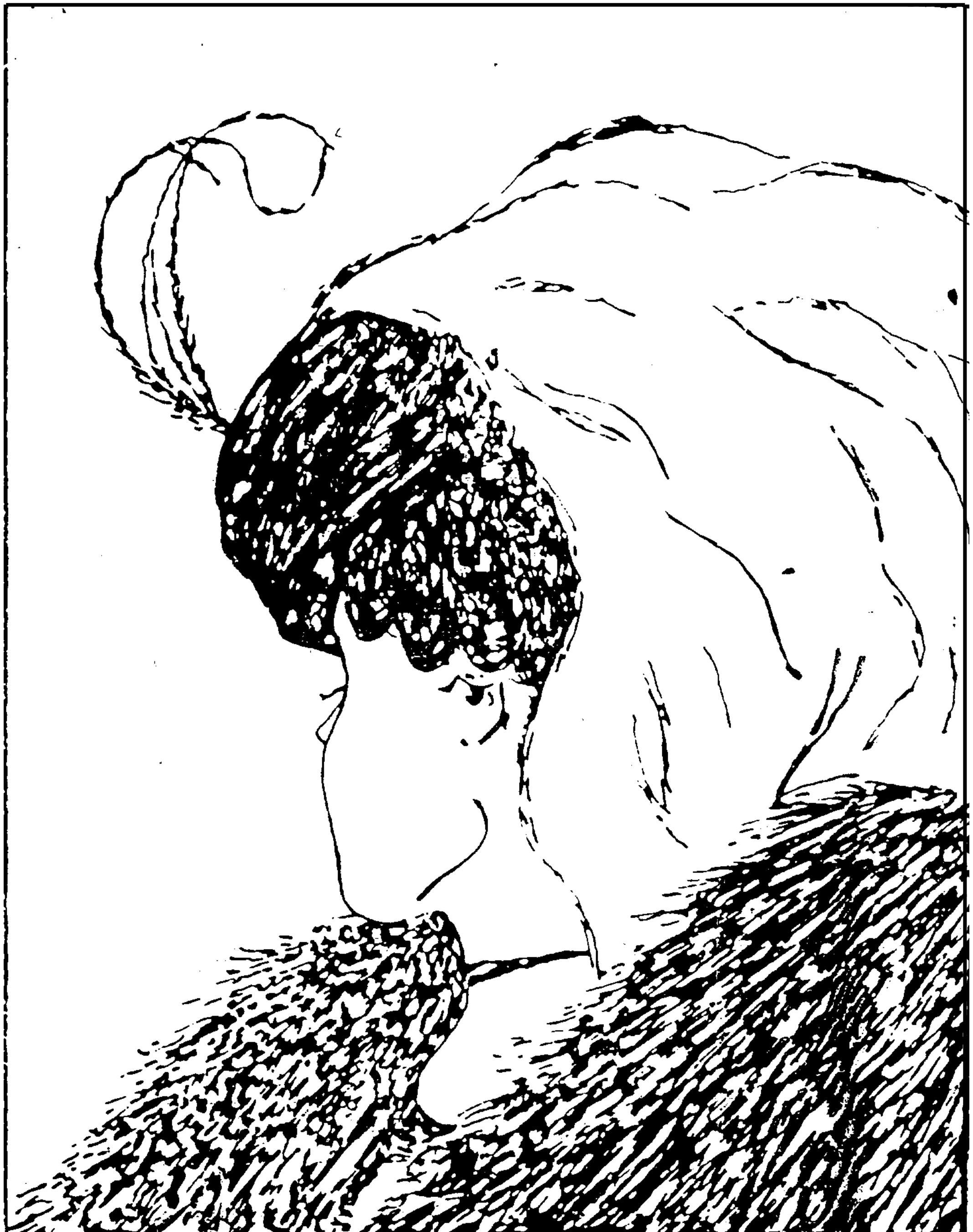
**波动性**

◆ "弥散性" "可叠加性" 干涉 衍射 偏振

◆ 具有波长 $\lambda$ 和波矢 $\vec{k}(=\frac{2\pi}{\lambda}\hat{n})$

◆ 不是经典波！不代表实在的物理量的波动。

▲ 微观粒子在某些条件下表现出粒子性，在另一些条件下表现出波动性，而两种性质虽寓于同一客体体中，却不能同时表现出来。



你看到了什么？

少女？

老妇？

两种图象不会同时出现在你的视觉中。

## 不确定关系（uncertainty relation）

经典力学中，可用“轨道”来描写粒子的运动，那么轨道的概念在多大程度上适用于微观世界?

海森伯 ( W. Heisenberg，德国人) 于1927年，根据对一些理想实验的分析和德布罗意关系，得出“不确定关系”（以前称为“测不准关系”）：

粒子在同一方向的坐标和动量不能同时确定。

例如，若 $\Delta x$ 表示粒子坐标的不确定范围，

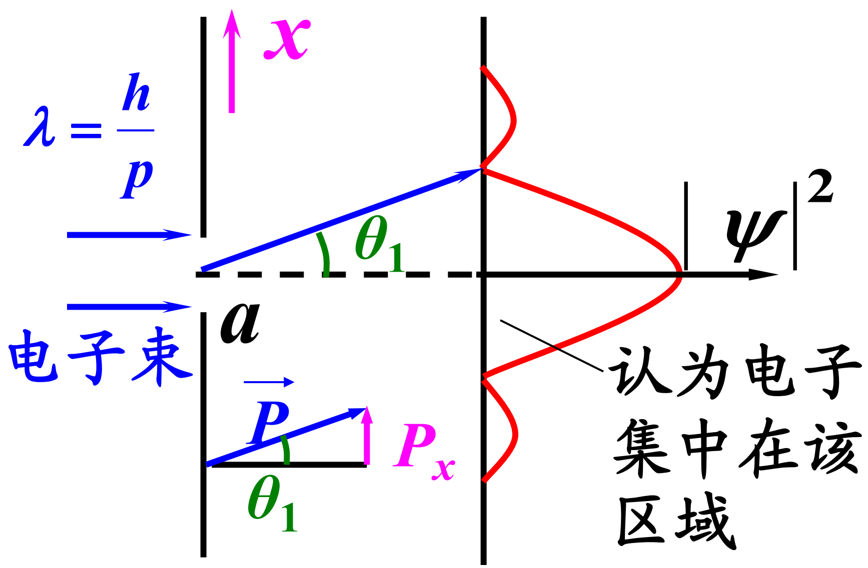
$\Delta p_x$ 表示粒子动量的不确定范围，

则有 $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h$ 的不确定关系。

## 一.不确定关系的粗略推导

以电子单缝衍射为例来分析:

一束动量为$p$的电子通过宽度为$a$的狭缝时,




$x$ 方向位置不确定范围

$\Delta x = a$，动量的$x$分量

满足 $0 \le P_x \le P\sin\theta_1$，

$x$ 方向动量不确定范围

$$\Delta P_x = P\sin\theta_1 = \frac{h}{\lambda}\cdot\sin\theta_1$$

衍射关系 $a\cdot\sin\theta_1 = \Delta x\cdot\sin\theta_1 = \lambda$

$$\therefore\ \Delta x\cdot\Delta P_x = \frac{\lambda}{\sin\theta_1}\cdot\frac{h}{\lambda}\sin\theta_1 = h$$

把其余明纹考虑在内，有：

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h \quad （同时测量）$$

严格的理论给出不确定性关系：

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\Delta x \cdot \Delta p_x \\ \Delta y \cdot \Delta p_y \\ \Delta z \cdot \Delta p_z\end{array}\right\} \geq \frac{\hbar}{2}}$$

一般写为：

$$\boxed{\Delta q \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}} \quad \left(\hbar = \frac{h}{2\pi}\right)$$

该关系使微观粒子运动“轨道”概念失去了意义。

存在不确定关系的一对物理量互称共轭物理量。

不确定关系是微观粒子固有属性决定的，与仪器的精度和测量方法的缺陷无关。

## 二.能量与时间的不确定性关系

能量和时间也是一对共轭物理量，有:

$$\boxed{\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}}$$

推导如下： $E = (p^2c^2 + m_0^2c^4)^{1/2} = mc^2$

$$\Delta E = \frac{1}{2}(p^2c^2 + m_0^2c^4)^{-1/2} 2pc^2\Delta p$$

$$= \frac{pc^2\Delta p}{E} = \frac{p\Delta p}{m} = \upsilon \cdot \Delta p = \frac{\Delta q}{\Delta t} \cdot \Delta p$$

$$\therefore \quad \Delta E \cdot \Delta t = \Delta q \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

▲ 能级的自然宽度和寿命:

设体系处于某能量状态的寿命为$\Delta t = \tau$，

则该状态能量不确定程度$\Delta E$（能级自然宽度）

为:
$$\Delta E \geq \frac{\hbar}{2\Delta t} = \frac{\hbar/2}{\tau} = \frac{3.3\times10^{-16}(\mathrm{eV\cdot s})}{\tau\,(\mathrm{s})}$$

假定原子中某一激发态的寿命 $\tau \sim 10^{-8}\,\mathrm{s}$，

则其能级宽度为: $\Delta E \sim 3.3\times10^{-8}\,\mathrm{eV}$

理论上计算平均寿命 ⇨ 估计能级宽度

实验上测量能级宽度 ⇨ 估计不稳态的寿命

## 三.不确定性关系的应用举例

不确定关系常常可用来做数量级的估算

**例1.**设子弹 $m = 0.01\text{kg}$，枪口直径$d = 0.5\text{cm}$，试用不确定关系估算子弹出枪口时的横向速度。

**解:** 子弹出枪口时的横向位置不确定量

$$\Delta x = d = 0.05\,\text{cm}$$

设子弹出枪口时的横向速度的不确定量为$\Delta v_x$，

则 $\Delta x \cdot m\Delta v_x \geq \hbar/2 \rightarrow \Delta v_x = \hbar/2m\Delta x = 1.1\times 10^{-30}\,\text{m/s}$

（取等号估算）

∴宏观现象中，不确定关系的影响可以忽略。

**例2.** 证明原子中电子运动不存在“轨道”。

设：电子$E_k = 10\text{eV}$，则 $v = \sqrt{\dfrac{2E}{m}} = 10^6 \text{ m/s}$。

原子线度$\Delta r \sim 10^{-10}\text{ m}$，$\Delta p_r \geq \dfrac{\hbar}{2\Delta r}$

$$\Delta v_r = \frac{\Delta p_r}{m} \geq \frac{\hbar}{2m \cdot \Delta r} \approx 6 \times 10^5 \text{ m/s} \sim v$$

∴ 原子中电子轨道概念不适用。

**例3.** 证明原子核中不可能禁锢电子。

**证:** 设电子禁锢在原子核内，取核$\Delta r \approx 10^{-14}\text{m}$，

则其动量不确定值 $\Delta p \geq \dfrac{\hbar}{2\Delta r} \approx 5.28\times10^{-21}\ \mathrm{kg\cdot m/s}$

电子动量 $p$ 不可能小于它的不确定度。

$$E=\sqrt{p^2c^2+m_0^2c^4} \geq \sqrt{(\Delta p)^2c^2+m_0^2c^4}$$

$$\approx 1.58\times10^{-12}\ \mathrm{J} \approx 10\mathrm{MeV}$$

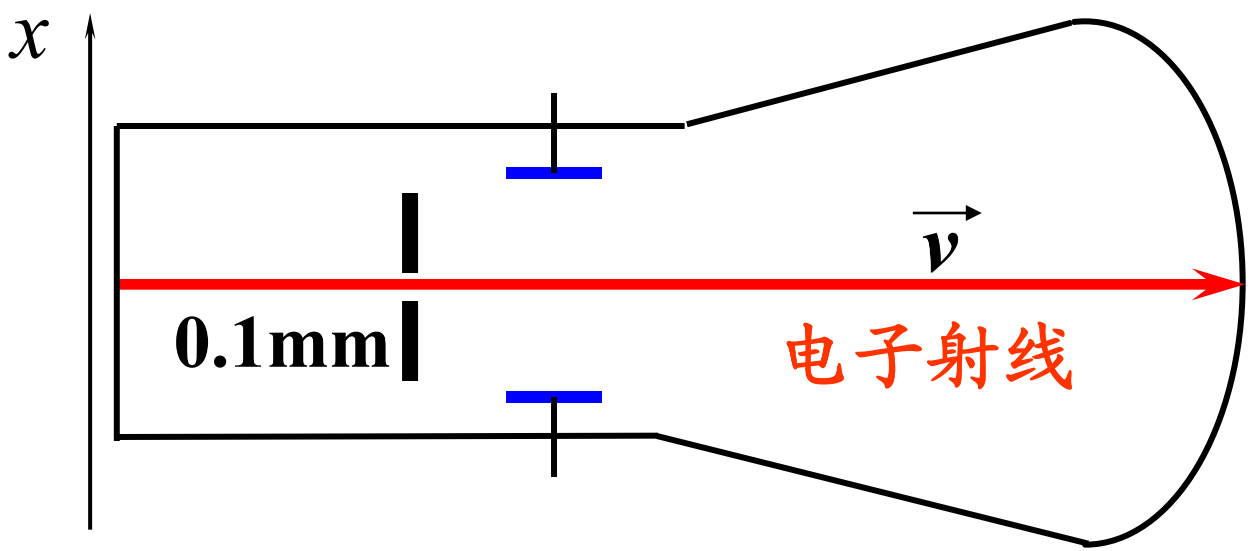
$$E_k=E-m_0c^2=10-0.5=9.5\mathrm{MeV}$$

这样大的动能足以击碎原子核，∴电子不能禁锢在原子核中。质子、中子在核内的动能只是上面计算值的约百万分之一，所以可以禁锢在核中。

## 例4. 示波管中电子的运动是否有轨道的概念?

设：加速电压$U$=$10^2$V，电子准直直径为0.1mm，

即：$\Delta\ x = 0.0001\text{m}$。




电子获得动能$E_k = eU$ =100eV，此能量远小于电子的静止能0.51MeV，是非相对论情形。

所以有 $$\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 = eU$$

由此得 $$\boldsymbol{v} = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\times1.6\times10^{-19}\times10^2}{9.1\times10^{-31}}} \approx 10^7\ \mathrm{m/s}$$

数量级估算: $$\Delta\boldsymbol{v}_x \sim \frac{h}{m\cdot\Delta x} \sim \frac{10^{-34}}{10^{-31}\times10^{-4}}$$

$$= 10\,\mathrm{m/s} \ll \boldsymbol{v} = 10^7\ \mathrm{m/s}$$

∴电子的横向弥散可以忽略，轨道有意义。

1932年诺贝尔物理学奖获得者

——海森伯

- 德国人
- Werner Karl Heisenberg
- 1901-1976
- 量子力学的创立