泄流

[PKU 国家集训队]

讨论一个泄流问题. 理想气体. (三维

(1) 在一个固定容积的气缸壁上开一个小孔. 求泄流出的分子速率分布

(2) $V_0=10^{-3}m^3$ $S_0=10^{-6}m^2$ $N_0=6.02\times10^{23}$

(2.1) 试求出 $N=\frac{1}{2}N_0$ 的 t $T_0=300K$ $R=8.31J/K$

(3) 试利用泄流建立两个维度之间速率分布的关系并由此推出k维球的体积、面积公式

解: (1) $f^*(v)=2\pi^2 v^3\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{4/2}e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$

(2) $dE=d\Gamma\bar{\varepsilon}^*=\frac{1}{4}n\bar{v}S_0dt\cdot 2kT$

由能量守恒

$d(nV_0\cdot\frac{3}{2}kT)+dE'=0$

由粒子数守恒

$d(nV_0)+\frac{1}{4}n\bar{v}S_0dt=0$

得出

$T=T_0\left(1+\frac{S_0\bar{v}_0t}{24V_0}\right)^{-2}$

$n=n_0\left(1+\frac{S_0\bar{v}_0t}{24V_0}\right)^{-6}$

于是 $n=\frac{1}{2}n_0$ $t=6599s$

(3)

卡诺热机

[题选 P204] [江四喜47.4] [26届决4]

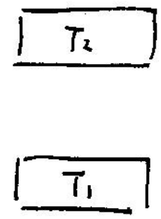
(1) 某空调器按可逆卡诺循环运转，做功装置功率为 P。

(i) 夏天室外 T_1，开空调后室内 T_2，已知 $Q_{漏} = A(T_1-T_2)$，求 T_2

(ii) 当 $T_1=30^\circ C$ 空调只有 $0.3P_0$，$T_2=20^\circ$，求 P_0 时仍为 $20^\circ C$ 的 T_1

(iii) 冬天将空调器吸热、放热反向，试求 $T_{外}=?$ 时 $T_2=20^\circ C$

(2) 原供暖设备以温度 T_0 的锅炉释放的热量向房间直接供暖，使室内温度保持恒温 T_1，高于室外温度 T_2。为提高能源利用率，拟在利用原有能源的基础上采用上述机器改进供暖方案。与直接供暖相比，能耗下降的理论极限为多少？



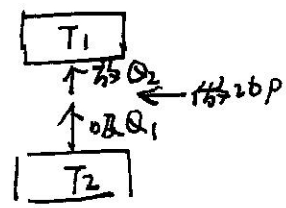
解 (1)(i) 在夏天时空调是一冷机

应该有热=

$$\frac{Q_1}{T_1}=\frac{Q_2}{T_2} \qquad Q_1+P=Q_2.$$

且 $Q_1=A(T_1-T_2)$. 因此

$$T_2=T_1+\frac{1}{2}\left(\frac{P}{A}-\sqrt{\left(\frac{P}{A}\right)^2+\frac{4T_1P}{A}}\right)$$



克劳修斯不等式

$$\sum\frac{Q_i}{T_i}\le 0$$

(ii) $$P|_{30\%}=A\cdot\frac{(T_1-T_2)^2}{T_2}=A\cdot\frac{100}{293}$$

$$P=\frac{10}{3}P|_{30\%}$$

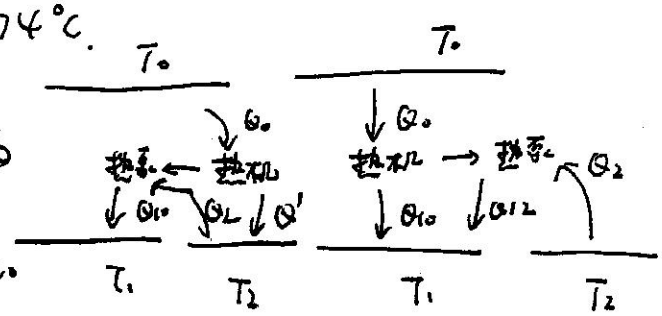
从而 $T_1=38.26^\circ C$

(iii) $T_1=T_2-\sqrt{\frac{P}{A}T_2}=-1.74^\circ C$.

(2) 方法1. 构造循环

因热机的低温热源可为室内或室外，有

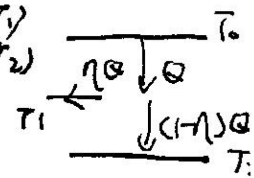
$$\frac{Q_0}{T_0}-\frac{Q_{10}}{T_1}\le 0 \qquad -\frac{Q_2}{T_1}+\frac{Q_2}{T_2}\le 0$$



$Q_1=Q_{10}+Q_{12}$

$$Q_0=\frac{T_0(T_1-T_2)}{T_1(T_0-T_2)}Q_1$$ 下降率为 $$\frac{Q_1-Q_0}{Q_1}\le\frac{T_2(T_0-T_1)}{T_1(T_0-T_2)}$$

方法2. 不管过程



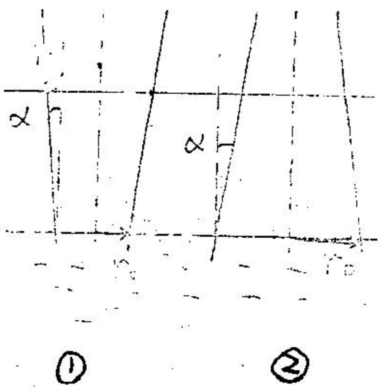
$$\frac{Q}{T_0}-\frac{\eta Q}{T_1}-\frac{(1-\eta)Q}{T_2}\le 0$$ 即可

表面张力

[题选 P207~209] [刘佳华　　] [罗子威自命题]

液体密度 ρ，张力系数为 σ，液体对两支半径为 r_0 的略呈圆锥形的细管完全浸润，圆锥的半顶角 α 很小。

求液体的上升高度。



解：分成 ①、② 两种情况

①：有几何关系

$r_1 = r_0 + h\alpha$

$r_2 = r_1/\cos\alpha \simeq r_1$

$P_{附} = \dfrac{2\sigma}{r_0 + h\alpha}$

当平衡时 $P_{附} = \rho g h$ 解得

$$h = \frac{-\rho g r_0 + \sqrt{\rho^2 g^2 r_0^2 + 8\rho g\alpha\sigma}}{2\rho g\alpha}$$

② 有几何关系

$r_1 = r_0 - h\alpha$

$r_2 = r_1/\cos\alpha \approx r_1$

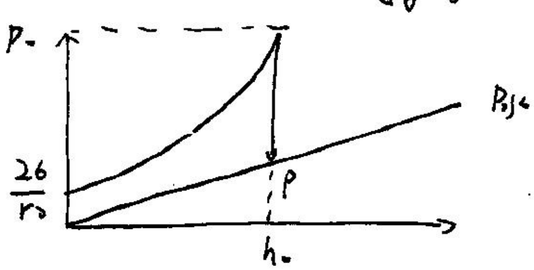
$P_{附} = \dfrac{2\sigma}{r_0 - h\alpha}$

当平衡时 $P_{附} = \rho g h$ 有

$$h = \frac{\rho g r_0 \pm \sqrt{\rho^2 g^2 r_0^2 - 8\rho g\alpha\sigma}}{2\rho g\alpha}$$

此时对② 可以进行一些讨论

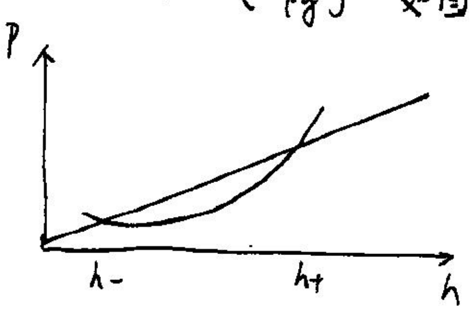
1° $\Delta < 0$ 即 $r_0 < \left(\dfrac{8\sigma\alpha}{\rho g}\right)^{\frac{1}{2}}$ 会无限制地上升. 有如图



若管有限长. 且由于管口曲率半径的不连续改变而出现一个稳定解

可设一"接触角"讨论

2° $\Delta > 0$. $r_0 > \left(\dfrac{8\sigma\alpha}{\rho g}\right)^{\frac{1}{2}}$ 如图



一般只取稳定解. 从而取 h_-

也可

$$E_p = \pi\rho g\left(\frac{1}{2}r_0^2h^2 - \frac{2}{3}r_0\tan\alpha\, h + \frac{1}{4}\tan^2\alpha\, h\right.$$

$$\left. + \pi\sigma\left(\frac{2r_0h}{\cos\alpha} - \frac{h^2\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\right)\right)$$

鲜橙多与水中的叶子

[蔡子星2014吧赛2]

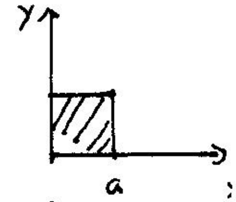
某天某人在湖边发呆，把手里的鲜橙多慢慢倒入水中，水中的叶子就因为表面张力动起来了。

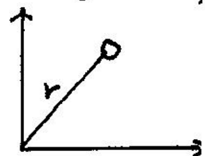
(a) 若 $\sigma=\sigma_0+k_1x+k_2y$ 求如图叶子的合力 $\vec{F}$

(b) 若 $\sigma=\sigma_0+br^2$ 求如图面积为 S 的叶子（圆形）合力 $\vec{F}$ $(S\ll r^2)$

(c) 糖在水中扩散系数为 D. 即 $dN=D\frac{\Delta n}{\Delta r}\Delta S\Delta t$，在原点持续滴入单位时间摩尔量为 J 的糖水，假设均匀扩散，求 $n(x)$

(d) 若 $\sigma=\sigma_0+an$，叶子质量非常小 $f=-kv$. 计算从 r_1 到 r_2 的 t





解：(a) $\vec{F}=a(k_1a+\frac{1}{2}k_2a^2)\vec{i}-\frac{1}{2}k_2a^2\vec{i}+k_2a^2\vec{j}=k_1a^2\vec{i}+k_2a^2\vec{j}$

(b) ① 类比磁偶极子

$$\vec{F}=(\vec{m}\cdot\nabla)\vec{B}$$

$$\vec{F}=\boxed{S\cdot\nabla\sigma}$$

② 表面能

$$W=-\sigma\cdot S$$

$$F=-\nabla W=S\cdot\nabla\sigma$$

$$F=2brS$$

(c) $\frac{dN}{dt}=J=D\cdot\frac{dn}{dr}\cdot2\pi r^2$ （扩散的方程）

可见有 $n(r)=\frac{J}{2\pi Dr}$

(d) 受合力为0 $F(r)=-kv+\frac{aJ}{2\pi Dr^2}S=0$

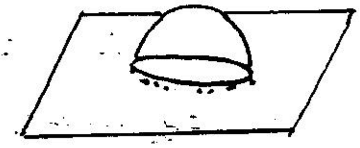
可见 $v=\frac{aJS}{2\pi kDr^2}=\frac{dr}{dt}$. 可得

$$t=\frac{2\pi kD}{3aJS}(r_2^3-r_1^3)$$

莱顿弗罗斯特现象

[APho 2009]

一个置于炽热平板上的(半球形)液滴与平板间会有一层很薄的蒸汽将其与平板隔开. 本题的任务就是估算这样一个液滴的寿命



假定液滴下的气流满足层流条件. 气体可看作热导率为K, 粘滞系数为η的牛顿流体. 液体的比汽化潜热为l. 对牛顿流体, 切应变 $F/A = \eta \times$ 切变速率 $\frac{dv}{dz}$. (F沿面积A切向). 对牛顿蒸汽流有 (v为中径面上的径向速度)

$$\frac{d}{dz}v = \frac{z}{\eta}\frac{d}{dz}P$$

(1) 求$v(z)$

(2) 计算流过r的圆柱面的Q_v. 高度b.

(3) 假设密度为ρ_v的蒸汽的产生速率是由炽热表面流向液滴的热流决定的. 试求$P(r)$. P_0为大气压. ΔT表示炽热表面与液滴间温度差

(4) 压强差产生净力. 试求b (液滴平衡. ρ_0)

(5) 试求总蒸发速率. 并估算液滴寿命.

解:(1) $v(z) = \frac{z^2}{2\eta}\frac{dP}{dz} + c$

且 $z = b/2$ 时 $v=0$ 有 $v(z) = \frac{dP/dz}{2\eta}(z^2 - b^2/4)$

(2) $$Q_v = \int_{-b/2}^{b/2} 2\pi r\, v(z)\, dz = \frac{2\pi r}{\eta}\cdot\frac{\Delta P}{\Delta z}\left(\frac{z^3}{3} - \frac{b^2 z}{4}\right)\Big|_{-b/2}^{b/2}$$

$$= \frac{2\pi r \Delta P}{\eta \Delta z}\cdot\left(\frac{2(b/2)^3}{3} - \frac{b^3}{4}\right) = -\frac{\pi r \Delta P}{6\Delta z \eta} b^3$$

(3) $\rho Q l = \frac{\pi r^2 K \Delta T}{b}$ 于是

$$p(r) = P_0 + \left(\frac{3\eta K \Delta T}{\rho_v l b^2}\right)(R^2 - r^2)$$

(4) $$f = \int_0^R [p(r) - P_0]\, 2\pi r\, dr = \frac{3\pi\eta K \Delta T R^4}{2\rho_v l b^2}$$

$$= \frac{2}{3}\pi R^3 \rho_0 g$$

$$\Rightarrow b = b = \left(\frac{9\eta K \Delta T}{4\rho_0 \rho_v l g}\right)^{\frac{1}{4}}$$

p(r) 可改写为

$$p(r) = p_0 + \frac{4\rho_0 g}{3R}(R^2 - r^2)$$

$$\frac{d}{dr}p(r) = -\left(\frac{8}{3}\frac{\rho_0 g}{R}\right)r.$$

于是 流量为

$$Q\rho_v = \left(\frac{4\pi^4 k^3 \rho_v \rho_0 g (\Delta T)^3}{9\eta l^3}\right)^{\frac{1}{4}} R^{\frac{7}{4}}.$$

为了估算寿命

$$-Q\rho_v = \frac{d}{dt}\left(\frac{2}{3}\pi R^3 \rho_0\right)$$

积分后有

$$\tau = \frac{8}{5}\left(\frac{9\eta \rho_0^3 l^3}{4k^3\rho_v g(\Delta T)^3}\right)^{\frac{1}{4}} R^{5/4}$$

气液相变

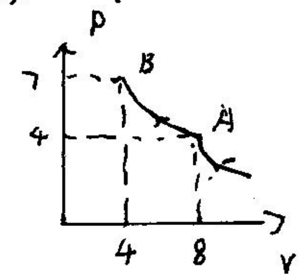
[C2X295] [题选P181] [国培2.64 2.12 2.23 2.16] [江四高48]

(1) 把质量为 $m_1=100g$ 的 N_2 与未知质量的 O_2 混合. 在 $T=77.4K$ 下做等温压缩. 混合的 $P-V$ 关系如图

(i) 确定 O_2 质量 m_2

(ii) 计算 $T=77.4K$ 时饱和 O_2 的压强 P_2

说明: $T=77.4K$ 是在标准大气压下液态氮的沸点,液态氧更高



解: 显然由于是压缩过程. 按如图方向变化.

在A点 O_2 开始液化. 在B点 N_2 开始液化

$$\begin{cases} P_{O_2}+P_{N_{21}}=4P_1 \\ P_{O_2}+P_{N_{22}}=7P_1 \end{cases}$$

并且对 N_2 有玻意耳定律

$$P_{N_{21}}\cdot 8V_0 = P_{N_{22}}\cdot 4V_0$$

从而解出

$$P_{N_{21}}=3P_1 \quad P_{O_2}=P_1 \quad P_{N_{22}}=6P_1$$

并且 $P_{N_{22}}=P_0 \Rightarrow P_1=P_0/6$ 有 $\Rightarrow P_{O_2}=\frac{P_0}{6}$

$$P_0\cdot 4V_0=\frac{m_1}{\mu_{N_2}}RT$$

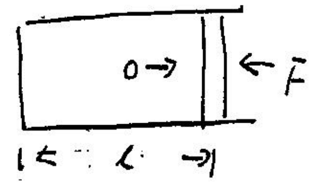
得出 $V_0=5.66\times10^{-3}m^3$. 从而

$$m_{O_2}=38.09g$$

绝热近似（力学系统的热学处理）

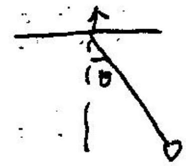
【经典例】

(1) 如图箱子，向左慢慢推。已知 $V_n \gg V_m$。



求 $l_0 \to l_0/2$ 时的 F

(2) 将绳子缓慢上拉，求 $\theta \to \frac{1}{2}\theta_0$ 时 l



(3) 对于螺旋运动，说明磁矩守恒

(4) LC 振荡，缓慢拉开电容 当 $W_0 \to 2W_0$ 时 $f \to ?$

解：(1) 一个思想：慢自由度对快自由度平均

物态方程：

$$F = \frac{2mV}{2l/V} = \frac{mV^2}{l}$$

热一定律

$$-F\,dl = d\left(\frac{1}{2}mV^2\right)$$

可以解出

$$Vl = \text{const}$$

于是当 $l = l_0/2$ 时 $V = 2V_0$ $F = \frac{m \cdot 4V_0^2}{l_0/2} = \frac{8mV_0^2}{l_0}$

(2) 当角度为 θ 时

$$F_T = mg\cos\theta + m\dot{\theta}^2 l$$

不妨令 $\theta = \theta_0\cos\omega t$。在一个周期内取平均，有

$$F_T = mg\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right) + ml\,\theta_0^2\omega^2\sin^2\omega t$$

$$\overline{F_T} = mg\left(1+\frac{\theta_0^2}{4}\right)$$

有热一定律

$$-\overline{F_T}\,dl = d\left(\frac{1}{2}mgl\theta_0^2\right) + mg\,dl\,(-1)$$

可以得出

$$\frac{3}{4}\frac{dl}{l} = \frac{d\theta_0}{\theta_0} \Rightarrow l^{\frac{3}{4}}\theta = \text{const}$$

即 $l = l_0\left(\frac{1}{2}\right)^{4/3}$

(3) 有物态方程 $r = \frac{mV}{qB}$

以及热一定律

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}d(mV^2) = EqV\Delta t = \frac{\Delta\phi qV}{2\pi r}$$

可得 $IS = m = \frac{q^2}{2m}r^2B$ 守恒。

对于螺旋运动，轻而易举 磁镜原理

(4) 频率 $f=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$　$W=\frac{1}{2}LI^2+\frac{1}{2}CU^2$

不妨令　$Q=Q_0\cos\omega t$ 则有

$$F=\frac{1}{2}EQ=\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}=\frac{Q_0^2\cos^2\omega t}{2\varepsilon_0 S}$$

慢自由度对快自由度取平均

$$\overline{F}=\frac{Q_0^2}{4\varepsilon_0 S}$$

即为物态方程，还有热一定律

$$\overline{F}\,d(l)=\frac{Q_0^2}{4\varepsilon_0 S}dl=d\left(\frac{Q_0^2 d}{2\varepsilon_0 S}\right)$$

可得到

$$J=\frac{E}{2\pi f}=\frac{Q^2}{2C}\Big/\frac{1}{\sqrt{LC}}=\frac{Q^2\sqrt{LC}}{2C}$$ 不变，即

当 $W\to\eta W$　$f\to\eta f$

其实上面这些题都在考查一个叫浸渐不变量的东西

当　$T\frac{d\lambda}{dt}\ll\lambda$ 时 对一维系统

$$\frac{dE}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}=\overline{\frac{\partial H}{\partial\lambda}}\frac{d\lambda}{dt}=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{\partial H}{\partial\lambda}dt$$

由哈密顿正则方程

$$dt=dq\,/(\partial H/\partial p)\qquad T=\int_0^T dt=\oint\frac{dq}{\partial H/\partial p}$$

$$\frac{dE}{dt}=\frac{d\lambda}{dt}\frac{\oint\frac{\partial H/\partial\lambda}{\partial H/\partial p}dq}{\oint\frac{dq}{\partial H/\partial p}}$$

并且　$E=H(\lambda)$　$\frac{\partial H}{\partial\lambda}+\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial\lambda}=0$　可见有

$$\frac{dE}{dt}=-\frac{d\lambda}{dt}\frac{\oint\frac{\partial p}{\partial\lambda}dq}{\oint\frac{\partial p}{\partial E}dq}\Rightarrow\frac{dI}{dt}=0\qquad I=\frac{1}{2\pi}\oint p\,dq\quad(E=C)$$

对谐振子而言　$I=E/\omega$