

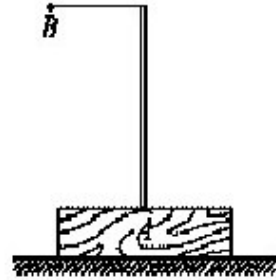
# 第十八届全国中学生物理竞赛决赛试题

## 理论部分

### 一、(15分)

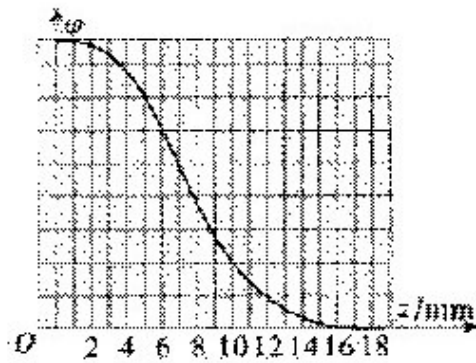
图中  $A$  是一带有竖直立柱的木块，总质量为  $M$ ，位于水平地面上。 $B$  是一质量为  $m$  的小球，通过一不可伸长的细绳挂于立柱的顶端。现拉动小球使绳伸竖直并处于水平位置，然后让小球从静止状态下摆。如在小球与立柱发生碰撞前，木块  $A$  始终未发生移动，则木块与地面之间的静摩擦因数至少为多大？

(设  $A$  不会发生转动)

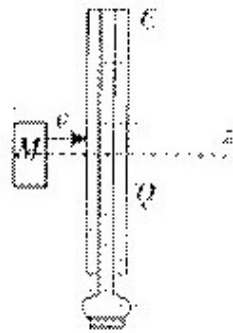


### 二、(15分)

圆形线圈的轴线  $z$  沿水平方向。有一用钕铁硼材料制成的圆柱形强磁体  $M$ ，其两端分别为  $N$  极和  $S$  极，将磁体  $M$  与线圈  $C$  共轴放置。磁体的对称中心置于  $z$  轴的原点  $O$ 。  $Q$  点是线圈  $C$  对称截面的圆心，当  $Q$  点位于  $z$  轴不同位置时，用实验的方法测得穿过线圈  $C$  的总磁通量  $\Phi$ 。由此测得的  $\Phi$  值沿  $z$  轴的分布函数图线如图  $a$  所示。图中横轴上  $z$  值是  $Q$  点的坐标。现令强磁体  $M$  沿线圈的轴线方向穿过该线圈  $C$ ，将  $C$  两端接一电阻，其阻值  $R=1000\Omega$ ，远大于线圈的电阻阻值。将接在电阻  $R$  两端的电压信号通过计算机实时处理[如图  $b$  所示]，可在计算机屏幕上显示出线圈  $C$  两端的电压信号如图  $c$  所示，信号可近似看做三角波形。

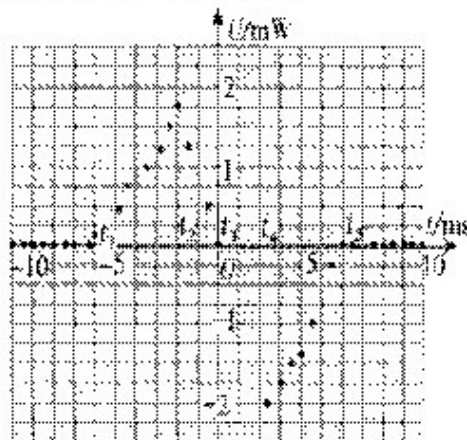


(a)



(b)

- (1) 试估算强磁体  $M$  通过线圈时的速度。(不计线圈中的感应电流对运动磁体的影响。)
- (2) 试求图  $c$  中， $t_1$  至  $t_3$  期间通过电阻  $R$  的电量。



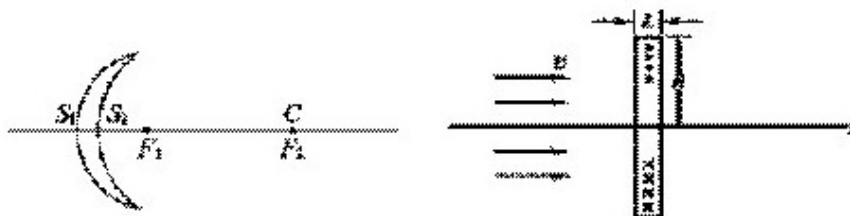
### 三、(20分)

有一薄透镜如图所示， $S_1$  面是旋转椭球面(椭圆绕长轴旋转而成的曲面)。其焦点为  $F_1$

和  $F_2$ ;  $S_2$  面是球面, 其球心  $C$  与  $F_2$  重合。已知此透镜放在空气中时能使从无穷远处位于椭圆长轴的物点射来的全部入射光线 (不限于傍轴光线) 会聚于一个像点上, 椭圆的偏心率  $e$ 。

(1) 求此透镜材料的折射率  $n$  (要论证);

(2) 如果将此透镜置于折射率为  $n'$  的介质中, 并能达到上述的同样要求, 椭圆应满足什么条件?



#### 四、(20分)

空间有半径为  $R$ 、长度  $L$  很短的圆柱形的磁场区域, 圆柱的轴线为  $z$  轴, 磁场中任一点的磁感应强度的方向沿以  $z$  轴为对称轴的圆的切线, 大小与该点离  $z$  轴的距离  $r$  成正比,  $B=Kr$ ,  $K$  为常数, 如图中“·”与“×”所示。电量为  $q$  ( $q>0$ )、质量为  $m$  的一束带电粒子流如图中一簇平行箭头所示, 以很高的速度  $v$  沿圆柱轴线方向穿过该磁场空间, 磁场区域外的磁场的大小可视为零。试讨论这束带电粒子流穿过磁场区域后的运动情况。

#### 五、(20分)

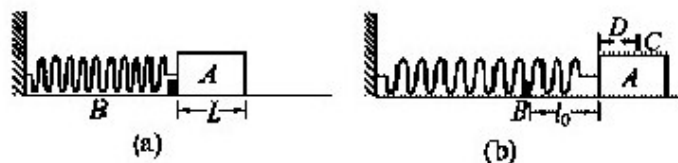
假设银河系的物质在宇宙中呈球对称分布, 其球心称为银心。距离银心相等处的银河系质量分布相同。又假设距银心距离为  $r$  处的物质受到银河系的万有引力和将以  $r$  为半径的球面内所有银河系物质集中于银心时所产生的万有引力相同。已知地球到太阳中心的距离为  $R_0$ , 太阳到银心的距离  $a=1.75 \times 10^9 R_0$ , 太阳绕银心做匀速圆周运动, 周期  $T=2.4 \times 10^8$  年。太阳质量为  $M_S$ , 银河系中发亮的物质仅分布在  $r \leq 1.5a$  的范围内。目前可能测得绕银心运动的物体距银心的距离不大于  $6a$ , 且在  $0 \leq r \leq 6a$  范围内, 物体绕银心运动的速率是一恒量。按上述条件解答:

- (1) 论证银河系物质能否均匀分布;
- (2) 计算银河系中发光物质质量最多有多少;
- (3) 计算整个银河系物质质量至少有多少;
- (4) 计算银河系中不发光物质 (即暗物质) 质量至少有多少。

上述计算结果均用太阳质量  $M_S$  表示。

#### 六、(25分)

如图  $a$  所示, 在水平光滑的桌面上有一木板  $A$ , 一端用弹簧与墙壁相连。桌面上有一固定挡板  $B$ , 当  $A$  与  $B$  接触时, 弹簧恰好为其原长。现将  $A$  从与  $B$  接触的位置向右拉一段距离  $l_0$  (弹簧在其弹性限度内), 用手握住。然后, 在  $A$  上面放一个小木块  $C$  (可视为质点), 见图  $b$ 。已知  $A$  的长度为  $L=0.7000\text{m}$ ,  $A$  的质量  $M=10.00\text{kg}$ ,  $l_0=1.000\text{m}$ ,  $C$  的质量  $m=0.01000\text{kg}$ ,  $C$  与  $A$  间的滑动摩擦因数  $\mu=0.4010$ , 弹簧的劲度系数为  $k=45.00\text{N/m}$ 。问: 将  $C$  放在  $A$  上什么地方 (用距  $A$  左端的距离  $D$  表示) 时, 握住  $A$  的手放开后,  $C$  能始终留在  $A$  上?



$A$  与  $B$  的碰撞为完全非弹性的。重力加速度  $g=9.800\text{m/s}^2$ , 忽略  $C$  对  $A$  运动的影响。忽

略弹簧质量，忽略空气阻力。（解答时可以使用计算器。）

### 七、（25分）

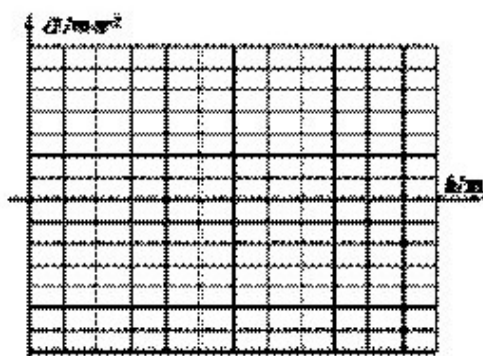
有一个用不会收缩也不会伸长的柔软的导热性能良好的材料制成的薄皮气球，球皮质量  $M=12.000\text{kg}$ ，气球的最大容积为  $V_f=12.500\text{m}^3$ 。当气球位于地面时，给气球充入  $n=500.00\text{mol}$  的氦气后，释放气球。问：该气球上升的最大高度为多少？气球上升过程中的加速度  $a$  与气球高度  $h$  的关系如何？在图中画出  $a-h$  图线并标明关键点的坐标数值。

已知氦的摩尔质量  $\mu_{\text{He}}=4.0026\times 10^{-3}\text{kg}\cdot\text{mol}^{-1}$ ，大气压强与地面高度  $h$  之间的关系为

$$p(h)=p_0e^{-\sigma h}$$

式中  $p_0=1.0000\times 10^5\text{Pa}$  为地面处的大气压强。 $\sigma=\mu_a g/RT$ ，其中  $\mu_a$  为大气的平均摩尔质量，其数值为  $28.964\times 10^{-3}\text{kg}\cdot\text{mol}^{-1}$ ， $g=9.800\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$  为重力加速度， $R=8.315\text{J}\cdot\text{mols}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  为气体普适恒量， $T$  为大气的温度。为了使问题简化，我们假设在气球上升的范围内，大气温度和氦气的温度都没有变化，其数值为  $T=289.64\text{K}$ ，由此，可求得  $\sigma=1.179\times 10^{-4}\text{m}^{-1}$ 。假设气球上升过程中气球与空气间的摩擦可忽略不计。

提示：在  $x\ll 1$  时，指数函数  $e^x$  可用下面的近似公式进行计算，即  $e^x=1+x$ 。



### 实验部分

#### 八、A题 测量铜管的内径

[仪器和用具]物理天平一台，盛有水的烧杯1个，细线1小团，给定长度的含蜡芯的铜管1根，铜（铜管材料）1小块，蜡（蜡芯材料）1小块。（已知水的密度  $\rho_0=1.00\times 10^3\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ 。）

[要求]利用所给仪器用具测量铜管内直径  $d$

#### B题 测量平行光管中透镜 $L_c$ 的焦距

[仪器和用具]待测的已调好的平行光管1个（由一狭缝与凸透镜  $L_c$  组成，狭缝位于  $L_c$  的焦平面上），给定焦距的透镜  $L_1$  个，测微目镜1个，光源1套，白屏1个，独立的可调支架5个，各用具都装在独立的可调支架上。

[要求]不拆开平行光管，利用以上仪器用具测量平行光管的透镜  $L_c$  的焦距  $f_c$ 。

[说明]关于测微目镜及其使用，见测微目镜使用说明书。

测微目镜使用说明书

## 第十八届全国中学生物理竞赛决赛试题答案

一、当小球摆至与水平方向的夹角为  $\theta$  时, 小球的速度  $v$  如图由下式决定

$$mgl \sin \theta = \frac{1}{2} mv^2$$

设此时小球受到绳的拉力为  $T$ , 由于小球做圆周运动, 故有

$$T - mg \sin \theta = m \frac{v^2}{l}$$

设地面对木块的支持力为  $N$ , 作用与木块的摩擦力为  $f$ , 因木块处于静止状态, 有

$$T \sin \theta + Mg - N = 0$$

$$T \cos \theta - f = 0$$

设地面的静摩擦因数为  $\mu$ , 则有  $f \leq \mu N$

解以上各式, 得 
$$\mu \geq \frac{3m \sin \theta \cos \theta}{3m \sin^2 \theta + M} = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{a + 2 \sin^2 \theta}$$

式中

$$a = \frac{2M}{3m}$$

令

$$F(\theta) = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{a + 2 \sin^2 \theta}$$

$F(\theta)$  与  $\theta$  有关, 现要求不论  $\theta$  取何值, 木块 A 均不发生移动, 则静摩擦因数  $\mu$  的最小值  $\mu_{\min}$  等于  $F(\theta)$  的最大值  $F(\theta)_{\max}$ ,  $F(\theta)_{\max}$  可如下求得

$$\begin{aligned} F(\theta) &= \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{a(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + 2 \sin^2 \theta} \\ &= \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{a \cos^2 \theta + (a+2) \sin^2 \theta} \\ &= \frac{2}{\frac{a}{\tan \theta} + (a+2) \tan \theta} \\ &= \frac{2}{\left[ \sqrt{\frac{a}{\tan \theta}} - \sqrt{(a+2) \tan \theta} \right]^2 + 2\sqrt{a(a+2)}} \end{aligned}$$

从上式可看出, 当  $\sqrt{\frac{a}{\tan \theta}} = \sqrt{(a+2) \tan \theta}$  时, 即  $\tan \theta = \sqrt{\frac{a}{a+2}}$  时,  $F(\theta)$  达极大值, 其

值为 
$$F(\theta)_{\max} = \frac{1}{\sqrt{a(a+2)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2M}{3m} \left( \frac{2M}{3m} + 2 \right)}} = \frac{3m}{2\sqrt{M^2 + 3mM}}$$

故

$$\mu_{\min} = \frac{3m}{2\sqrt{M^2 + 3mM}}$$

二、(1) 当磁体  $M$  向线圈  $C$  靠拢时, 穿过线圈  $C$  的总磁通量  $\Phi$  随  $Q$  点的坐标  $z$  的改变而变化, 因而在线圈内产生感应电动势  $E$ , 其数值为

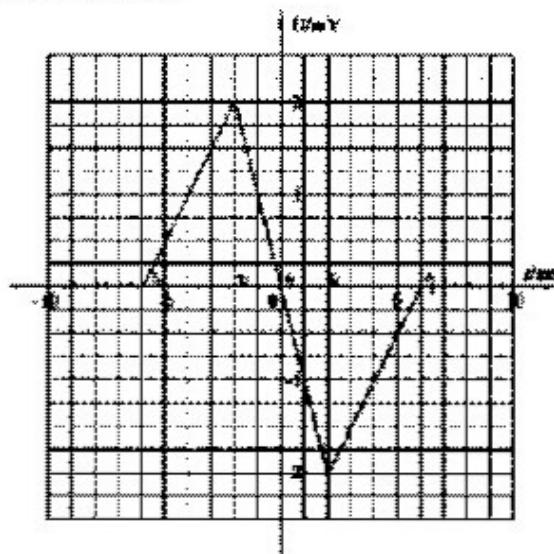
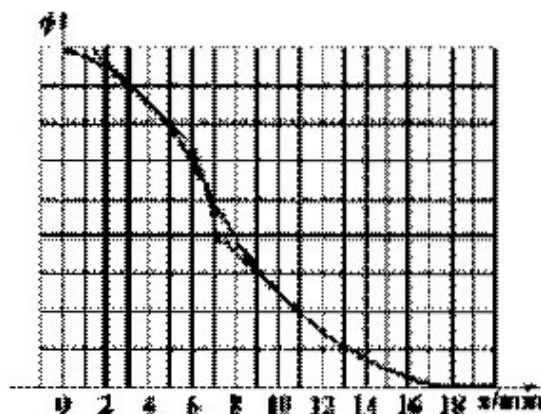
$$E = \left| \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right|$$

当磁体以速度  $v$  穿过线圈  $C$  时, 在  $\Delta t$  时间内  $z$  的改变量为  $\Delta z = v\Delta t$ , 代入上式得

$$E = \left| \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right| = \left| \frac{\Delta\Phi}{\Delta z} v \right|$$

所以  $E$  的大小与  $\Phi-z$  曲线各点的斜率的绝对值成正比,  $E$  的最大值与  $\frac{\Delta\Phi}{\Delta z}$  的最大值相对应。

用三角板与图 1 中的曲线的不同点相切, 在  $z=6\text{mm}$  处斜率最大, 此点应对应于电动势最大值。计算机实时测得的数据是电阻  $R$  两端的电压值  $U$ , 因其电阻值远大于线圈  $C$  的阻值, 因而从  $U=E$ , 图中的  $t_2$  时刻的  $U_M$  应对应于  $C$  位于  $z=6\text{mm}$  处的电压值。在  $t_1$  至  $t_2$  时间内, 随着磁体  $M$  向线圈  $C$  靠拢,  $\frac{\Delta\Phi}{\Delta z}$  的绝对值逐渐增大,  $t_2$  时刻以后, 从图 1 可见, 在  $0 \leq z \leq 6\text{mm}$  空间范围内, 磁通  $\Phi$  虽继续增大, 但磁通随空间的变化率却在减缓, 表明随着磁体



$M$  向前运动, 与  $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$  成正比的电压  $U$  逐渐减小。当磁体  $M$  的中点与线圈的  $Q$  点重合时, 总磁通  $\Phi$  增至最大, 但  $\frac{\Delta\Phi}{\Delta z}$  为零, 对应图 2 中  $t_3$  时刻的  $U$  值为零。当磁体  $M$  由左向右继续前

进,  $\phi$  的切线倾斜方向相反, 表明  $C$  中感应电动势反向, 流过电阻的电流反向,  $U$  数值变为负, 绝对值逐渐增大。根据对称性, 在  $t_4$  时刻, 应对应于线圈  $C$  的  $Q$  点位于  $z = -6\text{mm}$  处,  $\frac{\Delta\Phi}{\Delta z}$  的绝对值也是最大值, 对照图 1 此时刻, 对应电压的绝对值最大。 $t_4$  时刻以后, 磁体  $M$  远离线圈  $C$ , 感应电动势  $E$  绝对值逐渐减小至零。由图 2 可见,  $t_2$  至  $t_4$  时间间隔为  $4\text{ms}$ , 磁体  $M$  通过距离应等于两个磁通变化率最大值之间的距离  $\Delta s = 2 \times 6\text{mm} = 0.012\text{m}$ , 故

$$v = \frac{\Delta s}{t_4 - t_2} = 30\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(2) 通过电阻  $R$  的电流  $i$  为  $i = U/R$

由于  $U$  随时间  $t$  不断变化,  $i$  也随时间不断变化, 在很短时间间隔  $\Delta t$  内流过电阻  $R$  的电量  $\Delta Q$  为

$$\Delta Q = i\Delta t = \frac{U}{R} \Delta t$$

$U\Delta t$  表示图 2 中三角形面积内一个短时间间隔  $\Delta t$  的矩形面积, 在  $t_1$  到  $t_3$  时间间隔中流过电阻  $R$  的总电量  $Q$  应为所有这些  $\Delta Q$  之和, 即

$$Q = \sum \Delta Q = \frac{1}{R} \sum U\Delta t$$

等式右端的取和值就是图 2 中  $t_1$  到  $t_3$  所对应的三角形面积, 因三角形的顶点  $U_M = 2\text{mV}$ ,  $t_3 - t_1 = 6\text{ms}$ , 故三角形面积为

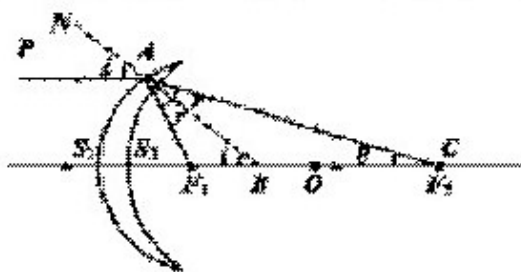
$$\frac{1}{2}[U_M(t_3 - t_1)] = 6 \times 10^{-6}$$

代入数据得

$$Q = 6 \times 10^{-9}\text{C}$$

三、(1) 根据题设, 所有平行于旋转长轴的入射光线经旋转椭球面和球面两次折射后全部都能会聚于同一像点, 可作出如下论证:

如果经椭球面折射后射向球面的光线都射向球心  $C$ , 即射向旋转椭球面的第二焦点  $F_2$ , 则可满足题设要求。光路图如图所示:  $PA$  为入射线,  $AC$  为经椭球面折射后的折射线,  $BN$  为  $A$  点处椭球面的法线,  $i$  为入射角,  $r$  为折射角。根据椭圆的性质, 法线  $BN$  平分  $\angle F_1AF_2$ ,



故  $AF_1$  与法线的夹角也是  $r$ 。由正弦定理可得

$$\frac{F_1A}{F_1B} = \frac{\sin i}{\sin r} = n, \quad \frac{F_2A}{F_2B} = \frac{\sin i}{\sin r} = n$$

从而可求得

$$n = \frac{F_1A + F_2A}{F_1B + F_2B} = \frac{2a}{2c} = \frac{1}{e}$$

$2a$  为长轴的长度,  $2c$  为焦点间的距离。即只要  $n$  满足以上条件, 任意入射角为  $i$  的平行于旋转椭球长轴的入射光线都能会聚于  $C$  (即  $F_2$ ) 点。

(2) 如果透镜置于折射率为  $n'$  的介质中, 则要求

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n}{n'} = \frac{1}{e}$$

即椭圆的偏心率  $e$  应满足 
$$e = \frac{n'}{n}$$

由于椭圆的  $e < 1$ ，如果  $n' > n$  就无解。只要  $n' < n$ ，总可以找到一个椭球面能满足要求。

四、设想沿距  $z$  轴为  $r$  的平行线运动的带电粒子进入磁场区，带电粒子受指向  $z$  轴的径向洛伦兹力  $f$  向轴偏转。

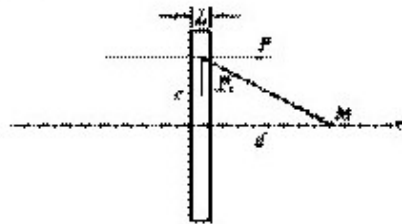
$$f = qvB$$

因粒子速度很快，粒子经过磁场区的时间  $\Delta t$  很短， $\Delta t = L/v$  粒子经磁场区所受的冲量

$$P_r \text{ 为 } P_r = f\Delta t = \frac{qvBL}{v} = qBL = qKLr$$

粒子逸出磁场区后将沿直线方向运动。运动的直线与  $z$  轴交于  $M$  点，因为粒子沿轴向运动的动量  $P$  经过磁场区域发生的改变可以忽略，由图可见

$$\frac{P}{P_r} = \frac{d}{r}$$



代入前式，得 
$$d = \frac{P}{P_r} r = \frac{mv}{qKL} r$$

由上式可见，粒子与  $z$  轴交点  $M$  的位置与粒子距轴的距离无关，因所有粒子均以速度  $v$  平行与  $z$  轴进入磁场区，受到洛伦兹力后，都折向  $M$  点，但平行  $z$  轴的速度分量基本不改变，所以粒子束经磁场区后，均会同时会聚于  $M$  点。

五、(1) 假定银河系物质集中分布在  $r \leq 1.5a$  的球体内，并设其质量为  $M(1.5a)$ ，则在  $1.5a \leq r \leq 6a$  范围内，质量为  $m$  的物体在银河系物质作用下做圆周运动时，有

$$G \frac{M(1.5a)m}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

得 
$$v = \sqrt{\frac{GM(1.5a)}{r}} \propto \sqrt{\frac{1}{r}}$$

即物体绕银心运动的速率  $v$  与  $\sqrt{\frac{1}{r}}$  成正比，与观察的结果不一致。

(2) 假定银河系物质均匀分布在  $r \leq 6a$  的球体内，可设银河系物质的密度为  $\rho$ ，则质量为  $m$  的物体在  $r \leq 6a$  范围内绕银心做圆周运动时有

$$G \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho m}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}\pi \rho G r^2} \propto r$$

即绕银心运动的速率  $v$  与离银心的距离  $r$  成正比，与观察的结果也不一致。

由以上分析可知，银河系物质在  $r \leq 6a$  整个区域内，不是均匀分布的。发亮的物质仅分布在  $r \leq 1.5a$  的球体内，在  $1.5a \leq r \leq 6a$  范围内的物质全部是不发亮的物质，即所谓“暗物质”。当然并不排斥在  $r \leq 1.5a$  的球体内也存在暗物质。

(3) 根据太阳绕银心运动的周期  $T$  和太阳到银心的距离  $r_s=a$ , 可求出半径为  $a$  的球面内的银河系物质的质量  $M(a)$ 。以  $M_s$  表示太阳的质量,  $v_s$  表示太阳绕银心运动的速度, 则有

$$G \frac{M(a)M_s}{a^2} = M_s \frac{v_s^2}{a}$$

而

$$v_s = \frac{2\pi a}{T}$$

由此得

$$M(a) = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2}$$

当质量为  $m$  的物体绕银心做半径为  $r$  的圆周运动时, 有

$$G \frac{M(r)m}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

若  $a \leq r \leq 6a$ , 根据观察结果

$$v = v_s$$

由以上各式得

$$M(a) = M_s \left(\frac{a}{R_0}\right) \left(\frac{T_0}{T}\right)^2$$

代入有关数据得

$$M(a) = (1.75 \times 10^9)^3 \left(\frac{1}{2.4 \times 10^8}\right)^2 M_s = 9.3 \times 10^{10} M_s$$

可知银河系中能发亮的物质质量的下限

$$M(1.5a) = \frac{M(a)}{a} \times 1.5a = 1.4 \times 10^{11} M_s$$

银河系物质质量的上限

$$M(6a) = \frac{M(a)}{a} \times 6a = 5.6 \times 10^{11} M_s$$

其中不发亮物质质量的上限

$$M(\text{暗}) = M(6a) - M(1.5a) = 4.2 \times 10^{11} M_s$$

六、1.A 的运动 根据题设, 不考虑 C 对 A 运动的影响, 故 A 的运动是四分之一周期的简谐运动。周期  $T$  为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}} = 2.962s, \quad \frac{T}{4} = 0.7405s \quad \text{①}$$

其位移  $l$  随时间变化为

$$l(t) = l_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad 0 \leq t \leq \frac{T}{4} \quad \text{②}$$

2.C 的运动 A 刚被释放时, 其加速度的方向向左, 大小为

$$a = \frac{kl_0}{M} = 4.5m/s^2$$

若 C 能随 A 一起运动, 则 C 应受到向左的力, 且其大小应为

$$F_0 = ma = m \frac{kl_0}{M} = 0.0450N$$



此力只能由 A、C 间的摩擦力提供，但该摩擦力的最大值为

$$\mu_0 mg = 0.401 \times 0.0100 \times 9.80 = 0.0393N$$

显然， $\mu_0 mg < F_0$ ，因此 C 不能随 A 一起运动，相对于 A 它将向右滑动。相对于桌面它将在滑动摩擦力的作用下向左做匀加速运动。设  $y(t)$  为  $t$  时刻 C 离其初始位置（对桌面）的距离，则有

$$y(t) = \frac{1}{2} \mu g t^2 \quad (3)$$

3. C 不被甩下的条件 若 C 在 A 上滑到 A 的右端以前能停止相对滑动，即二者达到（对桌面）相同的速度，则 C 就不会被甩下，否则就会被甩下。

下面先研究 C 和 A 达到相同速度时的时间及两者的距离。设  $t_1$  为 A 的速度  $V(t)$  与 C 的速度（对桌面） $v(t)$  相同的时刻，则

$$y(t_1) = \frac{1}{2} \mu g t_1^2 \quad (4)$$

$$v(t_1) = \mu g t_1 \quad (5)$$

$$l(t_1) = l_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}} t_1\right) \quad (6)$$

$$V(t_1) = l_0 \sqrt{\frac{k}{M}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{M}} t_1\right) \quad (7)$$

因  $t_1$  满足  $V(t_1) = v(t_1)$  (8)

即得  $\mu g t_1 = l_0 \sqrt{\frac{k}{M}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{M}} t_1\right)$  (9)

或  $\frac{M}{kl_0} \mu g \sqrt{\frac{k}{M}} t_1 = \sin\left(\sqrt{\frac{k}{M}} t_1\right)$  (10)

上式可改写为  $A \varphi_1 = \sin \varphi_1$

其中  $\varphi_1 = \sqrt{\frac{k}{M}} t_1$ ,  $A = \frac{M}{kl_0} \mu g = 0.8711$  (11)

由前式可以利用计算器用数值解法解出  $\varphi_1$  的值：

$\varphi$	$\sin \varphi$	$A \varphi$	
0.7	0.6442	>0.6098	由此可见 $0.8 < \varphi_1 < 0.9$
0.8	0.7174	>0.6969	
0.9	0.7833	<0.7840	
0.89	0.7770	>0.7753	由此可见 $0.89 < \varphi_1 < 0.90$
0.90	0.7833	<0.7840	
0.897	0.7815	>0.7814	由此可见 $0.897 < \varphi_1 < 0.898$
0.898	0.7821	<0.7822	
0.8973	0.78165	>0.78164	由此可见 $0.8973 < \varphi_1 < 0.8974$
0.8974	0.78171	<0.78173	

最后得 3 位有效数字的  $\varphi_1$  为  $\varphi_1=0.897$

$$\text{代入 } \varphi_1 = \sqrt{\frac{k}{M}}t_1, \text{ 可得 } t_1 = \sqrt{\frac{M}{k}}\varphi_1 = 0.423\text{s}$$

$$\text{与第一式比较可知 } t_1 < \frac{1}{4}T \quad (12)$$

这表明: 在  $\frac{1}{4}T$  内, C 和 A 存在有共同速度的解。将⑩代入④式和⑥式, 可求得从  $t=0$

$$\text{到 } t_1 \text{ 时间内 C 和 A 移动的距离 } y_1 = \frac{1}{2}\mu g t_1^2 \quad (13)$$

$$l_0 - l(t_1) = l_0 - l_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t_1\right) \quad (14)$$

⑭-⑬即为 C 在 A 上相对 A 滑行的距离

$$d = l_0 - l_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t_1\right) - \frac{1}{2}\mu g t_1^2 = 0.0256\text{m} \quad (15)$$

只要开始时 C 离 A 右端的距离大于等于  $d$ , C 就不会从后面甩下, 由此可知

$$D \leq L - d = 0.674\text{m} \quad (16)$$

4.C 没有前冲下去的条件 C 在 A 上向右滑行 0.0256m 后, C 相对于 A 静止, 此后 C

就和 A 以相同的速度向右运动, 直到 A 和 B 相碰, 这时  $t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{M}{k}}$ , 代入⑦式可求得

此时的共同速度

$$V\left(\frac{T}{4}\right) = \sqrt{\frac{k}{M}}l_0 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{M}} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{M}{k}}\right) = \sqrt{\frac{k}{M}} \cdot l_0 \quad (17)$$

碰后 A 停止。C 以  $V(T/4)$  为初速向前滑行, 靠摩擦减速, 到停止前滑行的距离为

$$s = \frac{[V(T/4)]^2}{2\mu g} \quad (18)$$

$$\text{由式⑰、⑱得 } s = \frac{k l_0^2}{2\mu g M} = 0.574\text{m} \quad (19)$$

只要 C 相对于 A 静止时距 A 左端的距离大于  $s$ , 碰后 C 就不会向前冲下。由此可知 C 不冲下的条件为

$$D \geq s - d = 0.548\text{m} \quad (20)$$

结论: 要使 C 始终留在 A 上, 开始时 C 离 A 的左端的距离必须符合要求  $0.548\text{m} \leq D \leq 0.674\text{m}$ 。

七、方法 1:

1. 先求 500.00mol 氦气在压强为  $p_0$ , 温度为  $T$  时的体积  $V_0$ 。已知理想气体的状态方程

$$\text{为 } pV = \frac{m}{\mu}RT = nRT$$

由此可求得 
$$V_0 = \frac{nRT}{p_0}$$

代入已知数据, 得 
$$V_0 = \frac{500.00 \times 8.315 \times 289.64}{1.000 \times 10^5} = 12.042(m^3)$$

因为  $V_0 < V_f$ , 可知气球体积未达到最大值, 在地面处其体积为  $V_0$ 。设此时它所受的重力为  $G$ , 浮力为  $F_{b0}$ , 则有 
$$G = (M + n\mu_{He})g = 137.21N$$

然后求浮力  $F_{b0}$ 。由于气球排开空气的体积、压强及温度均与氦气相同, 排开空气的摩尔数应等于氦气的摩尔数, 排开空气的质量为  $n\mu_a$ , 因而气球所受浮力为  $F_{b0} = n\mu_a g = 141.92N$

由  $F_{b0} > G$ , 可知气球将上升, 上升力  $F_0$  及加速度  $a_0$  分别为

$$F_0 = F_{b0} - G = 4.71N \quad \text{①}$$

$$a_0 = \frac{F_0}{M + n\mu_{He}} = 0.336m/s^2$$

2. 气球从地面 (高度  $h=0$ ) 上升时, 大气压强随高度  $h$  的增大而减小, 气体体积  $V$  (也就是排开空气的体积) 膨胀, 直至气体体积  $V=V_f$  时为止。在此过程中, 氦气的压强始终等于大气压强。根据题设, 其温度也始终等于大气的温度, 所以排开空气的摩尔数始终为 500.00, 所受浮力  $F_b$  也不变, 即  $F_b = F_{b0}$ 。

设  $V=V_f$  时气球的高度为  $h_1$ , 则在  $h=0$  到  $h=h_1$  的过程中, 气球所受的合力  $F_1$  为

$$F_1 = F_{b0} - G = F_0 = 4.71N$$

其加速度为

$$a_1 = a_0 = 0.336m/s^2$$

气球的运动为匀加速运动。氦气做等温膨胀, 由玻意耳定律得

$$p_0 V_0 = p_1 V_f = V_f p_0 e^{-\sigma h_1}$$

由上式可求得

$$h_1 = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{V_f}{V_0} = \frac{1}{1.179 \times 10^{-4}} \ln \frac{12.500}{12.042} = 316.6m$$

由动能定理可求得  $h=h_1$  时气球的动能  $E_{k1}$  为  $E_{k1} = F_1 h_1 = 1491J$

3. 气球上升至高度  $h_1$  后将继续上升, 气球的体积保持定值  $V_f$ , 不再膨胀, 其温度及压强也保持不变。大气压强  $p$  随高度  $h$  增大而减小,  $p = p_0 e^{-\sigma h}$ , 由理想气体状态方程可知气体的

密度  $\rho = \frac{m}{V} = \frac{H\rho}{RT}$ , 温度不变时  $\rho \propto p$ , 故气球上升时, 所受浮力将因大气密度  $\rho_a$  的减小

而减小, 气体所受合力将随  $h$  的增大而减小。因此, 气球做加速度大小逐渐减小的变加速运动。设高度为  $h$  处的浮力为  $F'_b$ ,  $h=0$  处大气密度为  $\rho_a$ , 则有

$$F'_b = V_f \rho_a g = V_f \rho_a g e^{-\sigma h}, \quad h > h_1. \quad \text{②}$$

气球受到的合力

$$F' = F'_b - G = V_f \rho_a g e^{-\sigma h} - G, \quad h > h_1$$

设气球上升到高度  $h_2$  时, 作用于气球的合力等于零, 则有

$$G = V_f \rho_a g e^{-\sigma h_2}$$

以  $\rho_a = \frac{n\mu_a}{V_0}$  代入, 得

$$G = n\mu_a g \frac{V_f}{V_0} e^{-\sigma h_2} \quad \text{③}$$

由此求得

$$h_2 = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{V_f n\mu_a g}{V_0 G} = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{V_f}{V_0} + \frac{1}{\sigma} \ln \frac{n\mu_a g}{G} = h_1 + \frac{1}{\sigma} \ln \frac{F_{b0}}{G}$$

代入有关数据, 得  $h_2 = 6.03 \times 10^2 \text{m}$

在气球从高度  $h_1$  升到  $h_2$  的过程中, 作用于气球的浮力  $F_b$  是变力, 利用③式可将②式改写为

$$F_b = V \rho_a g = V \rho_a g e^{-\sigma h_2} e^{-\sigma(h-h_2)} = G e^{-\sigma(h-h_2)}$$

作用于气体的合力为  $F' = F_b - G = G(e^{-\sigma(h-h_2)} - 1)$  ④

加速度  $a_2$  与  $h$  的关系为  $a_2 = g(e^{-\sigma(h-h_2)} - 1)$

在  $h$  由  $h_1$  到  $h_2$  的过程中, 对应的  $h-h_2$  则由  $-(h_2-h_1)$  到 0, 因为

$$\sigma(h_2-h_1) = 1.179 \times 10^{-4} \times (604 - 316.6) = 3.4 \times 10^{-2} \ll 1$$

可用近似关系式  $e^x = 1+x$  对  $F_b$  和  $a_2$  进行计算。故有

$$F' = \sigma G(h_2 - h) \quad \text{⑤}$$

即  $F'$  与高度  $h$  成线性关系。在计算气球上升过程中  $F'$  对气球所做的功时, 可以用合力的算术平均值进行计算。当  $h=h_1$  时, 合力最大, 由①式可知

$$F'_{\max} = F_0 = 4.71 \text{N}$$

当  $h=h_2$  时, 合力最小且等于零, 即  $F'_{\min} = 0$

设气球在  $h=h_2$  处的动能为  $E_{k2}$ , 则由动能定理可得

$$E_{k2} - E_{k1} = \frac{1}{2}(F'_{\max} + F'_{\min})(h_2 - h_1) = \frac{1}{2} F_0 (h_2 - h_1)$$

代入有关数据得  $E_{k2} - E_{k1} = 675 \text{J}$

$$E_{k2} = 1.491 \times 10^3 + 675 = 2.166 \times 10^3 \text{J}$$

在气球从  $h=h_1$  到  $h=h_2$  的过程中的加速度  $a_2$  近似与  $h-h_2$  成指数关系, 也可近似为与  $h$  成线性关系, 即  $a_2 \approx \sigma G(h_2 - h)$ , 在  $h=h_2$  处,  $a_2=0$ 。

4. 气球由高度  $h_2$  处继续上升时, 浮力小于重力, 合力的方向向下, 气球做减速运动, 气球克服合力做功, 以消耗自己的动能为代价。当气球的动能变为零时, 上升的高度达到最大值, 设此高度为  $H$ 。由⑤式可知, 向下的合力其大小与上升的高度也成线性关系。当  $h=h_2$  时, 合力等于零。当  $h=H$  时, 向下合力的大小为  $F''(H) = \sigma G(H - h_2)$ ,

$$\text{由动能定理} \quad E_{k2} = \frac{1}{2} F''(H - h_2) = \frac{1}{2} G \sigma (H - h_2)^2$$

$$\text{解得} \quad H = \sqrt{\frac{2E_{k2}}{G\sigma}} + h_2 = 517 + 603 = 1120 \text{m}$$

气球从  $h=h_2$  上升到  $H$  的过程中, 其加速度  $a_3$  与  $h$  也成线性关系, 但其方向变为向下, 在  $h=H$  处,  $a_3$  的大小为

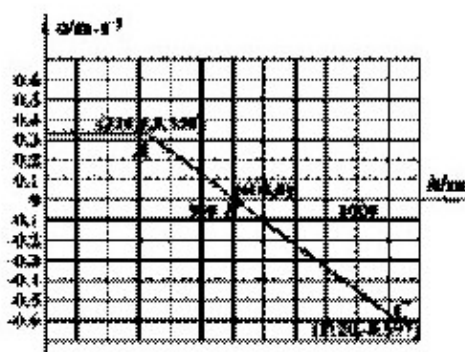
$$|a_3(H)| = \frac{F''(H)}{M + n\mu_{\text{总}}} \approx g \sigma (H - h_2)$$

代入有关数值, 得  $a_3(H) = -0.597 \text{m/s}^2$

5. 气球的加速度  $a$  与高度  $h$  的关系的图线如图所示。

方法 2: 直到求出  $h_2$  的数值和④式为止, 解法与第一种解法相同, 此后可求解如下:

④式在  $h_1 \leq h \leq H$  的范围内均适用,  $h=h_2$  处浮力与重力相互平衡,  $h < h_2$  时合力向上, 指向平衡点;  $h > h_2$  时合力向下, 也指向平衡点。



当  $\sigma(h-h_2) \ll 1$  时, 对  $e^{-\sigma(h-h_2)}$  可作近似计算, 得  $F' = -\sigma G(h-h_2)$

令  $x$  为气球相对于平衡点的位移  $h-h_2$ , 则有  $F' = -\sigma Gx$

由此可见气球的运动为简谐运动, 设气球到达最高点时的高度为  $H$ , 则振幅为

$$A = H - h_2$$

在  $h=h_1$  处,  $x=h_1-h_2$ , 动能等于  $E_{k1}$

由简谐运动的能量关系可得

$$\frac{1}{2} \sigma G (H - h_2)^2 = \frac{1}{2} \sigma G (h_1 - h_2)^2 + E_{k1}$$

$$(H - h_2)^2 = (h_1 - h_2)^2 + \frac{2E_{k1}}{\sigma G}$$

$$H = \sqrt{(h_1 - h_2)^2 + \frac{2E_{k1}}{\sigma G}} + h_2$$

以  $h_2 - h_1 = 286\text{m}$ ,  $E_{k1} = 1491\text{J}$ ,  $\sigma = 1.179 \times 10^{-4} \text{m}^{-1}$ ,  $G = 137.21\text{N}$  代入, 得

$$H = 516 + 603 = 1.12 \times 10^3 \text{m}$$

在  $h=h_1$  到  $h=H$  的过程中, 加速度

$$a = -\sigma g(h - h_2)$$

当  $h=H$  时, 其加速度为

$$a(H) = \sigma g(H - h_2) = 0.597 \text{m/s}^2$$

所得结果与第一种解法相同。

# 第十九届全国中学生物理竞赛决赛试题

## 理论部分

### 一、(15分)

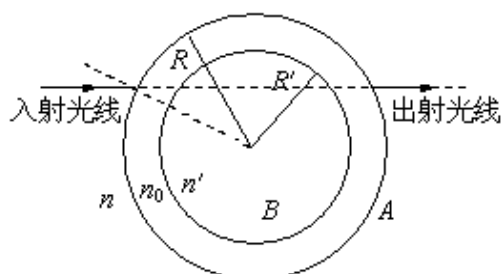
(1) 一根长为  $l_0$ 、横截面积为  $S$  的匀质圆柱体，在地面上静止时测得其密度为  $\rho_0$ 。当圆柱体沿轴线方向以速度  $v=0.9c$  相对于地面做匀速运动时，相对地面上的观测者计算其密度  $\rho$  等于多少？（ $c$  为光速）

(2) 有一个电子，已知它的德布罗意波（物质波）是波长为  $\lambda$ 、向  $x$  的正方向传播的平面波，它的动量  $p_x$  等于多少？它的坐标  $x$  如何？

### 二、(25分)

在折射率为  $n$  的介质  $A$  中有一半径为  $R$  的球形气泡，气体的折射率为  $n_0$ 。现在在气泡中再放一个与气泡同心的由透明介质  $B$  构成的球，并令一均匀平行光束射向气泡。

(1) 如果任意一条在介质  $A$  中射向气泡表面的入射光线在通过各介质界面时的入射角和折射角都满足  $\sin\theta \approx \theta$  的条件，且该光线再进入介质  $A$  时能沿原入射光线方向行进，如图所示，求介质  $B$  的折射率  $n'$  和  $B$  球的半径  $R'$  必须满足的关系式。



(2) 如果两球面间的介质不是气体而是一种透明液体（其折射率仍用  $n_0$  表示），并要求任何入射角和折射角的数值都不大于  $0.1\text{rad}$ ，则符合此条件的入射光束占外球面上的光束的百分比为多少？

### 三、(20分)

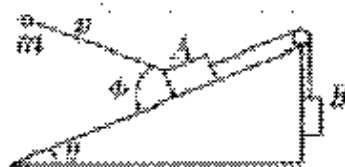
历史上曾有人利用在地球位于其公转轨道的不同位置处从地球上测得的木星的卫星周期，首次求出了光电传播速度。现已知离木星最近的一个卫星——木星 I 的周期  $T_0=42.5\text{h}$ ，在地球公转轨道上各处从地球上测得的木星 I 的所有周期值中，最大的比  $T_0$  多  $15\text{s}$ ，最小的比  $T_0$  少  $15\text{s}$ 。假定地球、木星的公转轨道是同一平面内的圆轨道，木卫 I 绕木星的运动轨道也是该平面内的圆轨道；地球的轨道半径  $R_E=1.5 \times 10^8\text{km}$ ，木星的轨道半径  $R_J=7.8 \times 10^8\text{km}$ ，木卫 I 的轨道半径  $R_1=4.2 \times 10^5\text{km}$ 。

(1) 试分析论证：测得木卫 I 周期对大值和最小值时，相对木星而言，地球位于其公转轨道的何处附近以及地球、木星和木卫 I 的运动对测量周期的影响。

(2) 利用这些数据并作合理近似求出光的传播速度  $c$ 。

### 四、(25分)

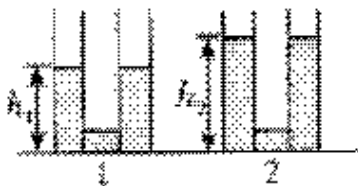
如图所示，在倾角为  $\theta$  的固定斜面顶端有一轻质定滑轮，跨过滑轮的轻绳两端分别与物体  $A$ 、 $B$  相连，物体  $A$  位于斜面上，连接  $B$  的轻绳竖直下垂， $A$ 、 $B$  均处于静止状态。已知  $A$ 、 $B$  的质量分别为  $m_A=0.15\text{kg}$ ， $m_B=0.10\text{kg}$ ， $A$  与斜面间的动摩擦因数和静摩擦因数均为  $\mu=0.2$ ， $\theta=30^\circ$ 。现在有一质量  $m=0.010\text{kg}$  的子弹沿与斜面成  $\varphi$  角的方向射入  $A$ ，射入前的速度  $v=20\text{m/s}$ ，射入后子弹留在  $A$  中，射入过程的时间极短。当  $\varphi=45^\circ$  时，试定量说明子弹射入后系统运动的全过程。滑轮转轴处的摩擦不计， $g$  取



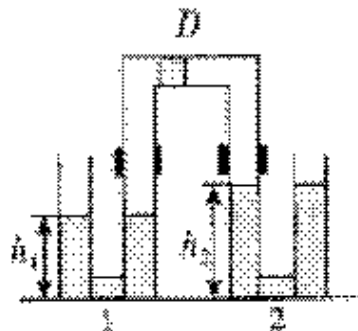
$10\text{m/s}^2$ 。如果  $\varphi$  不是  $45^\circ$ ，而是  $45^\circ$  到  $90^\circ$  之间的任意角，则射入过程结束时的速度如何？

五、(25分)

如图 *a* 所示，有两个截面为  $S$  的相同 *U* 形管 1、2，其内分别装有高度为  $h_1$  和  $h_2$ 、密度为  $\rho$  的液体。现用同样截面的导管将两者在大气中密接起来，如图 *b* 所示。导管中有一活塞  $D$ ，它把管中气体分成长度皆为  $L_0$  的两部分，每部分中气体的压强皆为大气压  $p_0$ 。活塞与管壁间的最大静摩擦力为  $F$ 。现向 *U* 形管 1 开口端缓慢注入一定量的同种液体，达到平衡时 *U* 形管 2 的左侧液面高度变为  $h_3$ 。试求注入液体的体积。



(a)



(b)

六、(30分)

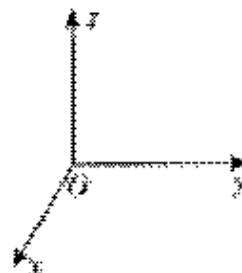
在空间某区域中，可能存在匀强电场和匀强磁场，也可能只存在两者之一，或都不存在。现在此区域中，建立  $Oxyz$  坐标系如图所示。

(1) 已知一质量为  $m$ 、电荷量为  $q$  的质子 1 以大小为  $v_1$  的速度在该区域中沿  $z$  轴正方向运动时，测得其加速度  $a_1=0$ 。试根据质子 1 运动提供的信息，判断该区域中电场强度  $E$  和磁感应强度  $B$  的大小和方向有哪些可能。把判断出的结论写出来。写时要求：若不存在电场和磁场，用  $E=0$  或  $B=0$  表示；若存在电场或磁场，电场强度和磁感应强度的大小分别用它在  $Oxyz$  坐标系中的分量  $E_x$ 、 $E_y$ 、 $E_z$  或  $B_x$ 、 $B_y$ 、 $B_z$  来表示。电场强度和磁感应强度的方向凡是可用它与坐标轴正方向之间的夹角来表示的都用它们来表示，规定夹角是由坐标轴正方向沿小于（或等于） $180^\circ$  的夹角转到要考查的矢量方向（在本小题中，不要求写出理由或推理过程）

(2) 简要写出得出以上结论的理由和推理过程。

(3) 现又知另一质子 2 以大小为  $v_2 = \sqrt{2}v_1$  的速度在该区

域中的  $yz$  平面内沿与  $y$  轴正方向和  $z$  轴正方向都成  $\alpha=45^\circ$  的方向运动时，测得此时质子 2 的加速度大小为  $a_2$ ，方向沿  $x$  轴的负方向。试再结合质子 2 运动提供的信息，对上面第 1 小题中你所得的各种结论作进一步的分析，最后判断出该区域中电场强度  $E$  和磁感应强度  $B$  的大小和方向有哪些可能。把最后判断出的结论写出来。写时电场强度和磁感应强度的大小和方向的表示方法与第 1 小题的要求相同。（本小题不要求写出理由或推理过程）



## 第十九届全国中学生物理竞赛决赛试题解答

一、

(1) 对于地面上的观测者, 圆柱体沿运动方向上的长度

$$l = l_0 \sqrt{1 - (v/c)^2} = l_0 \sqrt{1 - 0.81} = 0.435l_0 \quad \text{①}$$

$$\text{圆柱体的质量 } m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad \text{②}$$

$$\text{圆柱体的密度 } \rho = \frac{m}{V} = \frac{m_0}{V \sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad \text{③}$$

式中  $V$  为圆柱体的体积。垂直于运动方向的横截面积  $S$ , 在运动过程中不发生改变, 有

$$V = Sl = Sl_0 \sqrt{1 - (v/c)^2}$$

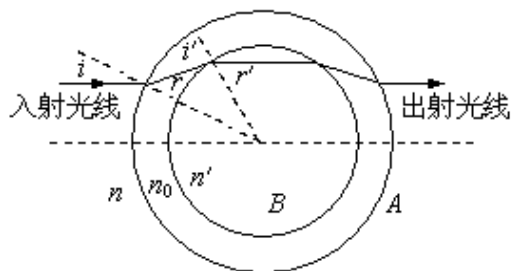
$$\text{所以 } \rho = \frac{m_0}{Sl_0} \left[ \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right]^2 = \frac{\rho_0}{1 - (v/c)^2} = 5.26\rho_0$$

$$(2) \text{ 根据德布罗意关系 } p_x = \frac{h}{\lambda}$$

现  $\Delta p_x = 0$ , 根据不确定关系  $\Delta x \Delta p_x > h$ , 即电子的坐标  $x$  取各值都有可能, 坐标  $x$  值不确定。

二、

(1) 图中取入射光线中的一根任意的入射光线。根据题设条件, 出射光线与入射光线在同一直线上, 通过球心  $O$  作一与此入射光线平行的直线。由于入射光线和出射光线是左右对称的, 光学系统 (球形气泡和球形介质  $B$ ) 又是左右对称的, 在  $B$  球中的光线一定与入射光线平行, 因而光路图中如图所示。



用  $i$  和  $r$  分别表示在  $A$  和气泡的界面上的入射角和折射角,  $i'$  和  $r'$  分别表示在气泡和  $B$  球的界面上的入射角和折射角, 则根据折射定律和  $\sin\theta \approx \theta$  的近似, 得

$$ni = n_0 r \quad \text{①}$$

$$n_0 i' = n' r' \quad \text{②}$$

$$\text{对 } \triangle QPO \text{ 应用正弦定理, 可得 } i' = \frac{R}{R'} r = \frac{n}{n_0} \frac{R}{R'} i \quad \text{③}$$



由几何关系得  $i' = r + r' - i$  ④

由①②③④式可解得  $n$  和  $R$  应满足的关系式为

$$n' = \frac{n_0 n}{n - (R'/R)(n - n_0)} \quad ⑤$$

此关系式与  $i$  无关, 即满足题设要求的任一入射光线经过 4 次折射后都将沿原方向进入介质中, 就像气泡和 B 球不存在似的。

注: 如果运用单球面折射的物像距公式逐面进行计算, 所得结果应与⑤式相同, 因为球面折射公式的形式相对物距、像距和球面半径的正负号规定有关, 写出的公式中的正负号很可能不同, 但只要能正确使用, 结果肯定一样。

(2)  $i$ 、 $r$ 、 $i'$  和  $r'$  的数值各不相同, 只要其中数值最大的角满足  $\theta=0.1\text{rad}$  的要求, 其他角一定满足  $\theta<0.1\text{rad}$  的要求, 至于哪个角数值最大, 有下列两种情况:

(a)  $n_0 < n$ , 光路如图 a 所示, 显然  $i$  最大。  $i'=0.1\text{rad}$

由③式可知, 与之相应的  $i$  的数值为

$$i = \frac{n_0 R'}{n R} \times 0.1\text{rad} \quad ⑥$$

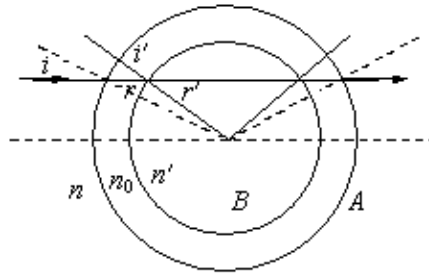
符合条件的入射平行光束的截面积为

$$A = \pi(Ri)^2 = 0.01\pi\left(\frac{n_0}{n} R'\right)^2 \quad ⑦$$

以至外球面的平行光束的截面积  $A_0 = \pi R^2$ , 故所求百分比为

$$\frac{A}{A_0} = 0.01\left(\frac{n_0 R'}{n R}\right)^2 \times 100\%$$

(b)  $n_0 > n$ , 光路如图 b 所示, 由图可看出  $r'$  最大。由②③式可得



$$r' = \frac{n_0 i'}{n'} = \frac{n_0}{n'} \frac{n}{n_0} \frac{R}{R'} i$$

令  $r'=0.1\text{rad}$ , 则有  $i = \frac{n' R'}{n R} \times 0.1\text{rad}$  ⑧

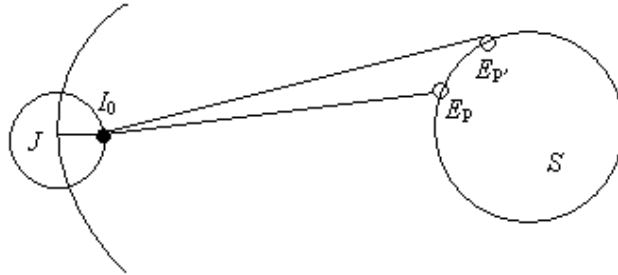
故所求百分比

$$\frac{A'}{A_0} = 0.01\left(\frac{n' R'}{n R}\right)^2 \times 100\% \quad ⑨$$

$$\text{把③式代入得 } \frac{A'}{A_0} = 0.01 \left( \frac{n_{J0} R'}{nR - nR' + n_0 R'} \right)^2 \times 100\% \quad \text{⑩}$$

三、

(1) 木星总是处在地球轨道之外，故可由木星向地球轨道作两条切线，当地球运行到切点附近时，从地球上测得的木卫 I 的周期取极值。在其中一个切点处，地球运动是背离木星的测得的周期是最大值；在另一切点处，地球运动则趋向木星，测得的周期是最小值。与木星和木卫 I 比较，地球的公转运动是影响测量结果的主要因素。现论述如下：



如图所示，用  $S$  表示太阳， $J$  表示木星， $E$  表示地球， $I$  表示木卫 I， $E_p$  和  $E_p'$  代表地球在其公转轨道  $C_E$  上的两个不同位置（图中的  $JE_p'$  连线为由木星到地球轨道的切线， $E_p'$  为切点， $E_p$  为相对于  $E_p'$  地球在一个时段  $\Delta t = T_0$  之前的位置）。设太阳的质量为  $m_s$ ，地球的质量为  $m_E$ ，公转速度为  $v_E$ ，角速度为  $\omega_E$ ，周期为  $T_E$ ，木星的相应各量分别为  $m_J$ 、 $v_J$ 、 $\omega_J$  和  $T_J$ ，由万有引力定律和向心力公式有

$$G \frac{m_s m_E}{R_E^2} = m_E \frac{v_E^2}{R_E} \quad G \frac{m_s m_J}{R_J^2} = m_J \frac{v_J^2}{R_J}$$

$$\text{由此得 } v_E = \sqrt{\frac{Gm_s}{R_E}} \quad v_J = \sqrt{\frac{Gm_s}{R_J}}$$

$$\frac{\omega_E}{\omega_J} = \frac{v_E R_J}{v_J R_E} = \sqrt{\left(\frac{R_J}{R_E}\right)^3} = 12$$

$$\frac{T_E}{T_J} = \frac{2\pi R_E}{v_E} \frac{v_J}{2\pi R_J} = \sqrt{\left(\frac{R_E}{R_J}\right)^3} = \frac{1}{12}$$

对于一段时间  $\Delta t = T_0 = 42.5 \text{ h}$  内，木卫 I 绕其轨道一周回到“原处”，而木星转过的圆心角为

$$\frac{42.5}{12 \times 365 \times 24} \times 360^\circ = 0.15^\circ, \text{ 很小；}$$

$$\text{地球转过的圆心角为 } \frac{42.5}{365 \times 24} \times 360^\circ = 1.75^\circ, \text{ 也很小。}$$

这些结果表明：(a) 地球、木星的运行速度量值同数量级；(b) 经历  $T_0$  时段后，地球、木星转过很小角度，其运动方向几乎不变，故  $T_0$  可视为很小的时段；(c)  $R_J$  比  $R_E$  大得比较多，故相对于木—地连线  $E_p'$ （或  $E_p$ ），地球沿纵向运动，木星近似沿横向运动，故在经历  $\Delta t = T_0$  的很小时段后，木星运动相对于木—地距离的改变几无贡献，木卫 I 回到“原处”，对木卫 I 到地球距离改变更无贡献，地球的运动几乎是木卫 I—地球间距离改变的唯一因素，且在切点处最大，地球背离木星运动时距离的增量为正，趋向木星运动时距离的增量为负。距离的增量正是木卫 I 周期差时段内光经过的路程。

(2) 设在时刻  $t$ , 木卫 I 位于图中  $I_0$  处 (注意此时为木蚀), 则位于  $E_p$  处的地球观察到木卫 I 的时刻为  $t_1$ , 要比  $t$  晚一小段时间  $\delta$ ,  $\delta$  等于光从  $I_0$  处传到  $E_p$  处所需的时间, 经过一个周期  $T_0$  后的  $t'$  时刻, 木卫 I 绕木星运动一周后又回到  $I_0$  处, 此时地球已经运动到  $E_p'$  处, 地球观察到木卫 I 的时刻  $t'_1$  比  $t'+T_0$  晚一小段时间  $\delta'$ ,  $\delta'$  是光由  $I_0$  传到  $E_p'$  所需的时间, 而  $t'_1 - t_1$  正是地球在切点附近测得的木卫 I 的周期, 于是

$$T_1 = t'_1 - t_1 = t' - t + \delta' - \delta = T_0 + \delta' - \delta$$

$$T_1 - T_0 = \delta' - \delta = \frac{(E_p E_{p'})}{c} = \frac{2\pi R_Z T_0}{T_Z c}$$

由此得  $c = 3.1 \times 10^8 \text{ m/s}$

对于地球在另一切点趋向木星运动的情况, 类似的处理可给出完全相同的结果。

四、

(1) 子弹摄入 A 的过程。

在此过程中, 子弹的速度突变, 它与 A 之间产生一个冲力。此冲力使子弹的动量发生改变。现分别讨论垂直于斜面和平行于斜面两个方向的情况。

垂直于斜面方向: A 保持不动, 子弹的分动量由  $mv_0 \sin \varphi \rightarrow 0$ 。设冲力在此方向的分力大小的平均值为  $F_N$ , 作用时间为  $\Delta t$ , 考虑到重力在此方向的分力远小于冲力, 则有

$$F_N \Delta t = mv_0 \sin \varphi$$

在此方向 A 所受的力, 除子弹给它的冲力外, 还有斜面给它的正压力 (设为  $F_N'$ ) 和重力的分力。由于 A 保持不动, 可知三力平衡。同样忽略重力的分力, 则有

$$F_N' = F_N$$

平行于斜面方向子弹的分动量也发生突变, 设子弹与 A 之间的冲力在此方向的分力大小为  $F$ , 则  $F$  的冲量为  $F \Delta t$ 。A 在此方向还受到阻碍它沿斜面向上运动的摩擦力  $F_f$  和重力的分力。同样忽略重力的分力, 则射入过程中的最大摩擦力为

$$F_{f\max} = \mu F_N'$$

摩擦力  $F_f$  的冲量为

$$F_f \Delta t \leq F_{f\max} \Delta t = \mu F_N' \Delta t = \mu mv_0 \sin \varphi$$

射入开始时, 子弹和 A 组成的系统沿此方向的动量为  $mv_0 \cos \varphi$ , 摩擦力的冲量使系统动量减少, 如果  $mv_0 \sin \varphi \geq mv_0 \cos \varphi$ , 则摩擦力的冲量将使 A 和子弹的动量减为零, 即子弹陷入 A 中保持静止, A 也保持不动, 以上条件要求

$$\tan \varphi \geq \frac{1}{\mu} = 5, \text{ 即 } \varphi \geq 78.7^\circ$$

现在  $\varphi = 45^\circ < 78.7^\circ$ , 所以射入过程结束时, 系统的动量大于零, 子弹和 A 将一起向上滑动。设其速度为  $v$ , 则由动量定理可得

$$mv_0 \cos \varphi - (m + m_A)v = F_{f\max} \Delta t = \mu mv_0 \sin \varphi$$

$$\text{解得 } v = \frac{mv_0 (\cos \varphi - \mu \sin \varphi)}{m + m_A}$$

代入数据, 得  $v = 0.5\sqrt{2}m/s = 0.71m/s$

(2) 射入过程结束后的运动。

A 的运动: 当 A 以初速度  $v$  向上运动时, 由于 B 的速度为零, 绳子将松弛, 张力为零。A 和子弹在重力和摩擦力作用下做初速度为  $v$  的匀减速运动,  $t$  时刻的加速度、速率和沿斜面上滑的距离分别为

$$a = -(g \sin \theta + \mu g \cos \theta)$$

$$v_A = v - (g \sin \theta + \mu g \cos \theta)t$$

$$s_A = vt - \frac{1}{2}(g \sin \theta + \mu g \cos \theta)t^2$$

B 的运动: 绳子张力为零, B 自由落体, 其速率和下滑的距离分别为

$$v_B = gt$$

$$s_B = \frac{1}{2}gt^2$$

当  $s_A = s_B$  时, 绳子被拉直, 此时  $t = t_1$ , 则有

$$vt_1 - \frac{1}{2}(g \sin \theta + \mu g \cos \theta)t_1^2 = \frac{1}{2}gt_1^2$$

$$\text{可解得 } t_1 = \frac{2v}{(1 + \sin \theta + \mu \cos \theta)g}$$

代入数据得  $t_1 = 0.086s$

$$\text{设 B 下降距离为 } H_1, \text{ 则 } H_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 = 0.037m$$

设此时 A、B 的速度分别为  $v'_A$  和  $v'_B$ , 则

$$v'_A = v - (g \sin \theta + \mu g \cos \theta)t_1 = \frac{1 - \sin \theta - \mu \cos \theta}{1 + \sin \theta + \mu \cos \theta}v$$

$$v'_B = gt_1 = \frac{2v}{1 + \sin \theta + \mu \cos \theta}$$

代入数据得  $v'_A = 0.14m/s$ ,  $v'_B = 0.86m/s$

(3) 绳中出现冲力的过程。

由 (2) 结果可以看出,  $v'_B > v'_A$ 。因绳子不能伸展, 绳子张力将出现冲力, 此冲力使 A、B 的速率变为一样, 设此共同速率为  $v'$ 。由于绳中张力的数值处处相同, A、B 所受冲力的冲量大小相等, 因而有

$$m_B(v'_B - v') = (m_A + m)(v' - v'_A)$$

$$\text{可求得 } v' = \frac{m_B v'_B + (m_A + m)v'_A}{m_A + m_B + m}$$

代入数据得  $v' = 0.41 \text{ m/s}$

A、B 速率相等后的运动。

由于绳子不能伸长，A、B 的速度大小、加速度大小和运动距离都相同。设绳的拉力为  $F_T$ ，加速度大小为  $a'$ ，则

$$F_T - (m + m_A)g \sin \theta - \mu(m + m_A)g \cos \theta = (m + m_A)a'$$

$$m_B g - F_T = m_B a'$$

$$\text{解得 } a' = \frac{m_B - (m + m_A)g \sin \theta - \mu(m + m_A)g \cos \theta}{m + m_A + m_B} g$$

代入数据得  $a' = -0.31 \text{ m/s}^2$

负号表示 A、B 做匀减速运动。设经过时间  $t_2$  后二者速度变为零，则

$$t_2 = \frac{v'}{|a'|} = 1.31 \text{ s}$$

设 B 下降距离为  $H_2$ ，得

$$H = H_1 + H_2 = (0.27 + 0.037)m = 0.31 \text{ m}$$

A、B 速度为零后，由下列数据

$$m_B g = 1.00 \text{ N}$$

$$(m_A + m)g \sin \theta = 0.80 \text{ N}$$

$$\mu(m_A + m)g \cos \theta = 0.28 \text{ N}$$

可以看出，A、B 都将保持不动。

$45^\circ < \varphi < 90^\circ$  的情况：在讨论子弹射入过程中，已知：

$$\varphi < 78.7^\circ \text{ 时，A 的速度 } v = \frac{mv_0(\cos \varphi - \mu \sin \varphi)}{m + m_A} = 0.71 \text{ m/s}$$

$\varphi \geq 78.7^\circ$  时，A 保持不动。

五、

(1) 设加入 U 形管 1 中的液体体积为  $V$ ，则这部分液体在 U 形管中的长度为  $x = \frac{V}{S}$

令  $h_{1L}$ 、 $h_{1R}$  分别表示 U 形管 1 中左右两侧液面的高度， $h_{2R}$  表示 U 形管 2 右侧液面的高度，根据液体不可压缩性，由图可知

$$2h_1 + x = h_{1L} + h_{1R}$$

$$h_{2R} + h_3 = 2h_2$$

令  $p_L$  和  $p_R$  分别代表系统达到新的平衡后活塞 D 左、右两侧的气体压强，由平衡条件可得

$$p_0 + \rho g h_{1L} = p_L + \rho g h_{1R}$$

$$p_R + \rho g h_3 = p_0 + \rho g h_{2R}$$

$$p_L = p_R + \frac{F}{S}$$

以  $L_L$ 、 $L_R$  分别代表系统达到新的平衡后活塞 D 左、右两侧气柱的长度。若将中间密封气体视为理想气体，运用玻马定律可以分别得到

$$p_0 L_0 = p_L L_L = p_R L_R$$

因为在液体注入前后管子各部分的长度是不变的，因此可有关系式

$$h_1 + h_2 + 2L_0 = h_{1R} + h_3 + L_L + L_R$$

(2) 最后解得

$$\begin{aligned} x &= h_{1L} + h_{1R} - 2h_1 = 2(h_2 - h_1 - h_3) + \frac{F}{\rho g S} + 2H_{1R} \\ &= 4(h_2 - h_3 + L_0) + \frac{F}{\rho g S} - \frac{2p_0 L_0}{p_0 + 2\rho g(h_2 - h_3)} - \frac{2p_0 L_0}{p_0 + 2\rho g(h_2 - h_3) + F/S} \end{aligned}$$

要注入液体的体积应为

$$V = 4S(h_2 - h_3 + L_0) + \frac{F}{\rho g} - \frac{2Sp_0 L_0}{p_0 + 2\rho g(h_2 - h_3)} - \frac{2Sp_0 L_0}{p_0 + 2\rho g(h_2 - h_3) + F/S}$$

六、

(1) ①  $E=0$ ,  $B=0$ 。

②  $E=0$ ,  $B_x=0$ ,  $B_y=0$ ,  $B_z$  可为任意值。

③  $E_z=0$ ,  $E_x$  可为任意值,  $E_y$  可为任意值, 即  $E$  与  $z$  垂直;  $B_x$  可为任意值,  $B_y$  可为任意值,

但  $v_1 \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$ ,  $B_z$  可为任意值,  $B$  与  $E$  垂直且与  $z$  轴正方向的夹角

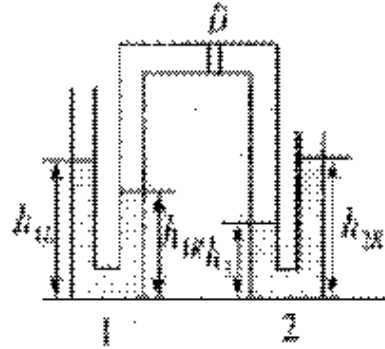
$$\gamma_B = \arcsin \frac{E}{v_1 B}。$$

(2) 由于质子 1 的加速度  $a_1=0$ , 故作用于质子 1 的电场力与洛伦兹力的合力为零。

(i) 当该区域中既无电场又无磁场时, 作用于质子 1 的电场力与洛伦兹力的合力都为零。故有第一种可能, 即  $E=0$ ,  $B=0$ 。

(ii) 当该区域中无电场有磁场时, 因质子 1 沿  $z$  轴正方向运动, 只要磁场方向沿  $z$  轴, 作用于质子 1 的电场力为零, 洛伦兹力亦为零。故有第二种可能, 即  $E=0$ ,  $B_x=0$ ,  $B_y=0$ ,  $B_z$  可为任意值。

(iii) 当该区域中存在磁场, 而只要磁场的方向不沿  $z$  轴, 质子 1 便受到洛伦兹力的作用, 故该区域中必存在电场, 才可能使质子 1 没有加速度。由于洛伦兹力与  $z$  轴垂直, 故只有电场强度  $E$  也与  $z$  轴垂直时, 电场力和洛伦兹力的合力才可能等于零, 故有  $E_z=0$ , 但  $E_x$ ,  $E_y$  可以为任意值。由于洛伦兹力垂直于  $z$  轴与  $B$  构成的平面, 故电场强度  $E$  亦垂直于  $z$  轴与  $B$



构成的平面，即与  $B$  垂直。当  $B$  的大小和方向不同时， $B$  的三个分量  $B_x$ 、 $B_y$  和  $B_z$  亦不同。 $E$  的方向与  $x$  轴正方向的夹角  $\alpha_E$  便取  $0 \sim 360^\circ$  间的不同的值，使  $E$  与  $B$  保持相互垂直。但洛伦兹力只决定于  $B$  的垂直于  $z$  轴的分量，亦即只决定于  $B_x$  和  $B_y$ 。由  $B_x$  与  $B_y$  作用于质子 1 的洛伦兹力和电场力的合力为零，可得  $v_1 \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$ 。若  $B$  与  $z$  轴正方向的

夹角为  $\gamma_B$ ，则由  $qE = av_1 B \sin \gamma_B$ ，可得  $\gamma_B = \arcsin \frac{E}{v_1 B}$ ，同时与  $E$  垂直。这便是第三种

可能。

(3) (i)  $E=0$ ， $B_x=0$ ， $B_y=0$ ， $B_z = -\frac{ma_2}{v_1 q}$ 。 $B$  的方向与  $z$  轴正方向的夹角  $\gamma_B=180^\circ$ 。

(ii)  $E_x$  可为不等于零的任意值， $E_y=0$ ， $E_z=0$ 。 $E$  的方向与  $x$  轴正方向的夹角  $\alpha_E=0$ ，

或  $\alpha_E=180^\circ$ 。 $B_x=0$ ， $B_y = \frac{E_x}{v_1}$ ， $B_z = -\frac{ma_2}{v_1 q}$  ( $B$  在  $O-yz$  平面内)。

当  $\alpha_E=0$  时， $B$  与  $z$  轴正方向的夹角  $\gamma_B$  可在  $90^\circ \sim 180^\circ$  之间，即  $90^\circ < \gamma_B < 180^\circ$ 。

当  $\alpha_E=180^\circ$  时， $B$  与  $z$  轴正方向的夹角  $\gamma_B$  可在  $180^\circ \sim 270^\circ$  之间，即  $180^\circ < \gamma_B < 270^\circ$ 。

## 第 20 届全国中学生物理竞赛决赛试题

### 理论部分

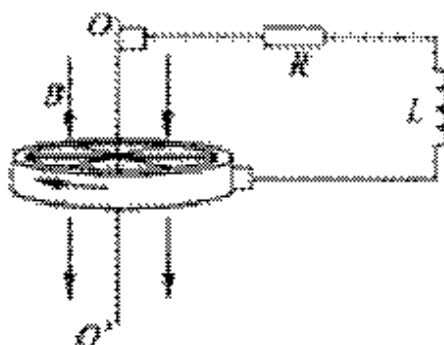
一、5 个质量相同的匀质球，其中 4 个半径均为  $a$  的球，静止放在半径为  $R$  的半球形碗内，它们的球心在同一平面内，另 1 个半径为  $b$  的球放在 4 球之上。设接触面都是光滑的，试求碗的半径  $R$  满足什么条件时下面的球将相互分离。

二、一人造卫星绕地球做椭圆运动，地心是椭圆的一个焦点，在直角坐标系中，椭圆的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$a$  和  $b$  分别是椭圆的长半轴和短半轴，为已知常数。当该人造卫星在轨道的远地点时，突然以很大的能量沿卫星运行方向从卫星上发射出一个质量为  $m$  的太空探测器，这探测器在地球引力作用下做双曲线运动，此双曲线的焦点位于地心，实半轴的长度正好等于原来椭圆远地点到地心的距离。试问在发射时，给探测器的能量为多大？设地球的质量为  $m_E$ 、万有引力常量  $G$  为已知，不计地球以外星体的影响。

三、如图所示，金属飞轮具有  $n$  条辐条，每条辐条长  $l$ ，可绕转轴  $OO'$  旋转。飞轮处在匀强磁场中，磁场方向与转轴平行，磁感应强度为  $B$ 。转轴与飞轮边缘通过电刷与电阻  $R$ 、电感  $L$  连成闭合回路。飞轮及转轴的电阻和转动过程的摩擦均不计。



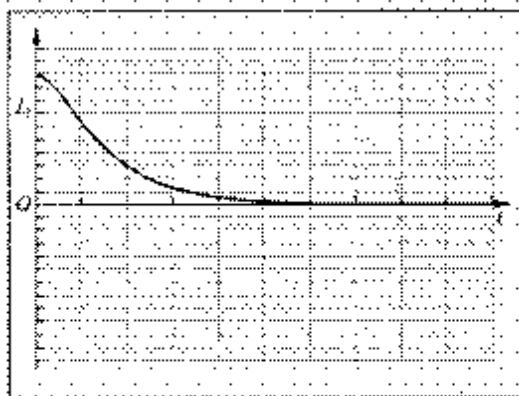
1. 现用一恒定的外力矩  $M$  作用于飞轮，使它由静止开始转动，求当飞轮转动达到稳定时，转动角速度  $\Omega_0$  和通过电阻  $R$  的电流  $I_0$ ；

2. 在飞轮转速达到稳定后，突然撤去外力矩  $M$ ，则飞轮的角速度  $\Omega$  和通过电阻  $R$  的电流  $I$  都将随时间变化。当  $R$  取不同值时，角速度随时间变化的图线和电流随时间变化的图线  $I(t)$  将不同。

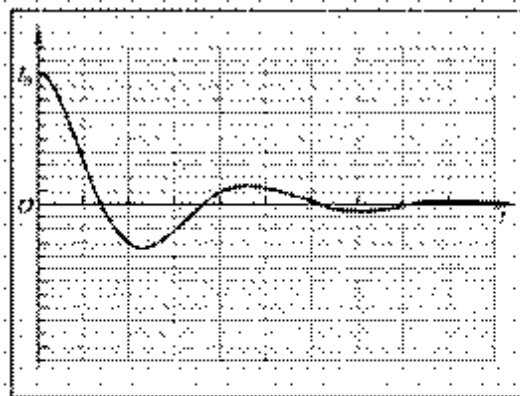
现给出了  $\Omega(t)$  图线各 6 条（附本题后），各图中都把刚撤去外力矩  $M$  的时刻作为起始时刻，即  $t=0$  的时刻，此时刻的角速度  $\Omega=\Omega_0$ ，电流  $I=I_0$ 。角速度  $\Omega$  各图的纵坐标单位相同，电流  $I$  各图的纵坐标单位相同，各图的时间轴横坐标的单位均相同。试从这些图线中选出可能正确表示飞轮的角速度  $\Omega$  随时间变化的图线  $I(t)$ ，以及与所选图线对应的最接近正确的电流  $I$  随时间变化的图线  $I(t)$ 。把你选出的图线  $\Omega(t)$  与对应的  $I(t)$  图线在下面的图线符号之间用直的实线连接起来。

注意：只有全部连接正确的才能得全分，连对但不全的可得部分分，有连错的得零分。

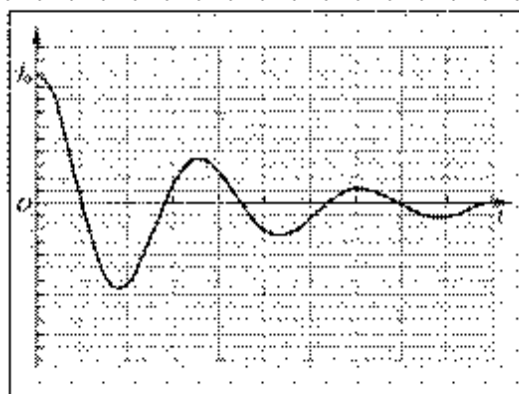




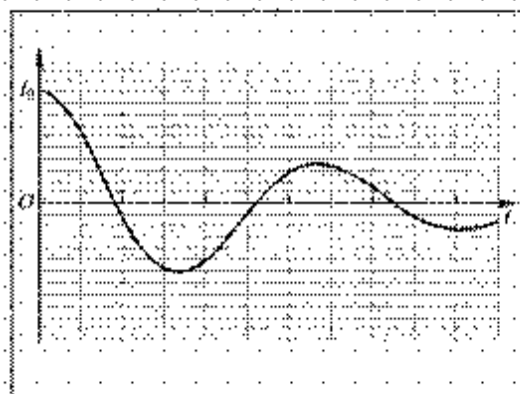
I-A



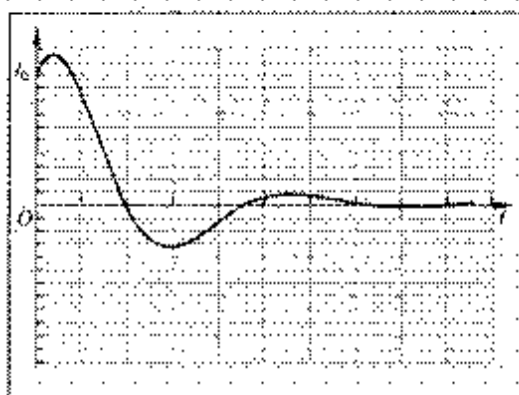
I-B



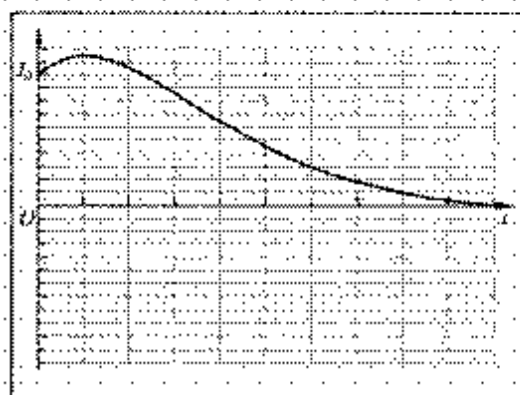
I-C



I-D



I-E



I-F

Ω-1

Ω-2

Ω-3

Ω-4

Ω-5

Ω-6

I-A

I-B

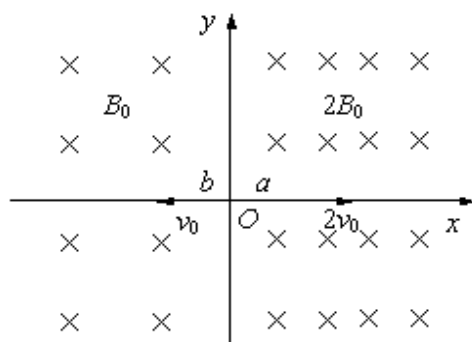
I-C

I-D

I-E

I-F

四、如图所示， $y$ 轴右边存在磁感强度为  $2B_0$  的匀强磁场， $y$ 轴左边存在磁感强度为  $B_0$  的匀强磁场，它们的方向皆垂直于纸面向里。在原点  $O$  处，一个带正电的电荷量为  $q$ ，质量为  $m$  的粒子  $a$ ，在  $t=0$  时以大小为  $2v_0$  的速度沿  $x$  轴方向运动，在粒子  $a$  开始运动后，另一质量和电荷量都与  $a$  相同的粒子  $b$  从原点  $O$  以大小为  $v_0$  的初速度沿负  $x$  轴方向开始运动。要想使  $a$  和  $b$  能在运动过程中相遇，试分析和计算它们出发时的时间差的最小值应为多大，并求出与此对应的相遇地点的坐标。设整个磁场区域都处在真空中，且不考虑重力及  $a$ 、 $b$  两粒子之间的相互作用力。



五、一位近视眼朋友不戴眼镜时，能看清的物体都在距眼睛  $a=20\text{cm}$  以内。他发现，如果在眼前靠近眼睛处放一个有小圆孔的卡片，通过小圆孔不戴眼镜看远处的物体时也能看得清晰些。

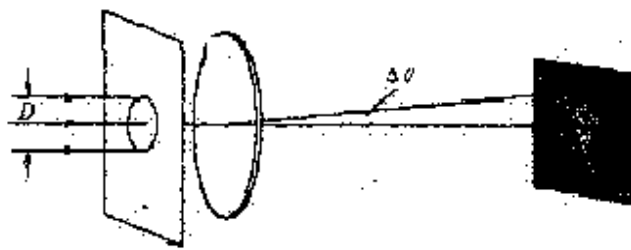
1. 若小圆孔直径为  $D$ ，试根据几何光学原理求出当近视眼直视远处的一个点物时，眼的视网膜上产生的光斑的直径。

2. 再考虑小圆孔的衍射效应，求小圆孔直径最恰当的大小。

[提示]1. 人眼是一个结构比较复杂的光学系统，在本题中，可将人眼简化成一个焦距  $f$  可调的薄透镜和一个可成像的视网膜，透镜的边缘为瞳孔，两侧介质均为空气，视网膜与透镜的距离为  $b$ 。

2. 小圆孔的存在对透镜成像的影响介绍如下：在几何光学中，从远处物点射向透镜的、平行于光轴的平行光束会聚于透镜的焦点上，这就是像。如果在透镜前放一直径为  $D$  的小圆孔，则将发生光的衍射，在焦点处像屏上将出现如图所示的衍射图样，其中央是一个明亮的圆斑，圆斑外周是一组亮度逐渐减弱的亮暗相间的同心圆环，由于这些圆环亮度比中央圆斑弱得多，观察时可以不予考虑。中央圆斑的半径对薄透镜中心的张角  $\Delta\theta$  的大小与  $D$  有关。理论计算得到

$$\Delta\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$



六、设地球是一个半径为  $6370\text{km}$  的球体。在赤道上空离地面一千多公里处和赤道共面的圆与赤道形成的环形区域内，地磁场可看作是均匀的，其磁感强度为  $B=3.20 \times 10^{-6}\text{T}$ 。某种带电宇宙射线粒子，其静质量为  $m_0=6.68 \times 10^{-27}\text{kg}$ ，其电荷量为  $q=3.20 \times 10^{-19}\text{C}$ ，在地球赤道上空的均匀地磁场中围绕地心做半径为  $R=7370\text{km}$  的圆周运动。

已知在相对论中只要作用于粒子的力  $F$  的方向始终与粒子运动的速度  $v$  的方向垂直，则运动粒子的质量  $m$  和加速度  $a$  与力  $F$  的关系仍为  $F=ma$ ，但式中的质量  $m$  为粒子的相对论质量。问：

1. 该粒子的动能为多大？

2. 该粒子在圆形轨道上运动时与一个不带电的静质量为  $m_2=4m_0$  的静止粒子发生碰撞，并被其吸收形成一个复合粒子，试求复合粒子的静质量  $m_1$ 。

参考答案：

1.  $R > \sqrt{25b^2 + 50ab - 23a^2} + a$

2.  $\Delta E = G \frac{m_g m}{2a} \cdot \frac{2a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a + \sqrt{a^2 - b^2}}$

3.  $I_0=2M/2B \quad \Omega_0=4MR/4B^2 \quad \Omega-1 \text{ ----- } I-A \quad \Omega-5 \text{ ----- } I-B \quad \Omega-6 \text{ ----- } I-C$

4.  $\Delta t=0.0802\pi m/qB_0 \quad x_p=-0.968mv_0/qB_0 \quad y_p=-4.25mv_0/qB_0$

5.  $D=(b/a)D \quad D_0=0.54 \times 10^{-3} \text{m}$

6.  $E_k=1.74 \times 10^{-9} \text{J} \quad m_1=46.4 \times 10^{-27} \text{kg}$