可形变网格的力学性质 (总分: 20)

这里，我们研究一种在悬挂重力场中的可形变网格。它具有与单摆类似的性质。这种网格只有一个自由度，也就是说，只有一种形变的方式。这种网格的构型可以完全用一个角度α 来描述。在 19 世纪，著名物理学家麦克斯韦研究过这样的结构。近年来又发现了，这样的网格系统具有很多令人惊奇的物理性质。

如图 1 所示， N^2 个全等的等边三角盘（图中的红色三角形）由短杆自由铰接，形成 $N \times N$ 网格（$N > 1$）。图中的铰接点用小圆圈表示。等边三角盘的边长和轻杆的长度都是 l。图中的四条双虚线代表四根长滑杆。位于边缘的 N 个顶点（灰色的圆圈）约束在长滑杆上，将长滑杆作为轨道，这些顶点可以在长滑杆上自由滑动。

这四根长滑杆相互铰接成菱形，菱形的两个顶角分别为 60°和 120°, 如图 1 所示。每个三角盘的质量为 M，密度分布是均匀的。系统的其它部分没有质量。这个网格系统的构型完全由角度 α 决定。角度 α 的取值范围是 $0^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ$（图 1 中显示了不同角度的一些例子）。系统像窗帘一样垂直悬挂。顶端的长杆沿水平方向固定。

我们按照图 2 选取坐标。令 $y = 0$ 为势能的零点。我们用数组 (m,n) 来标记三角盘， $m, n = 0, 1, 2, \cdots, N-1$ 分别代表三角盘在 x 和 y 方向上的次序。A(m,n), B(m,n) 和 C(m,n) 代表三角盘 (m,n) 的三个顶点的位置。左上角的顶点 A(0, 0)（图中的黑色大圆圈）是固定的。

整个系统的运动被约束在 x-y 平面。匀质等边三角盘相对于质心的转动惯量是 $I = Ml^2/12$。重力加速度是 g。使用 E_k 和 E_p 分别表示动能和势能。

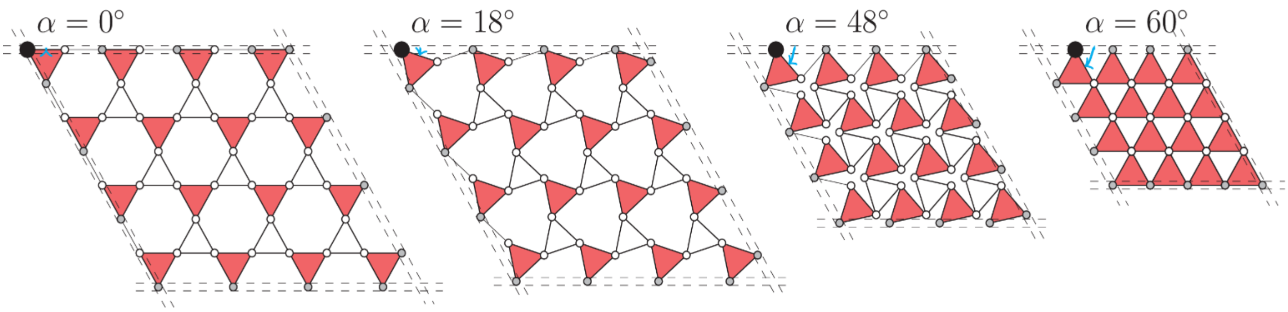

图 1

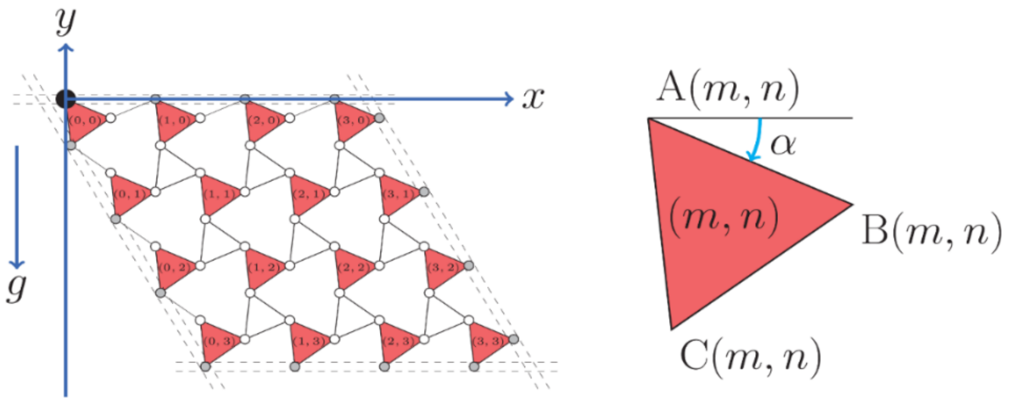

图 2

A 部分: 考虑 N=2 的情况 （如图 3 所示）:

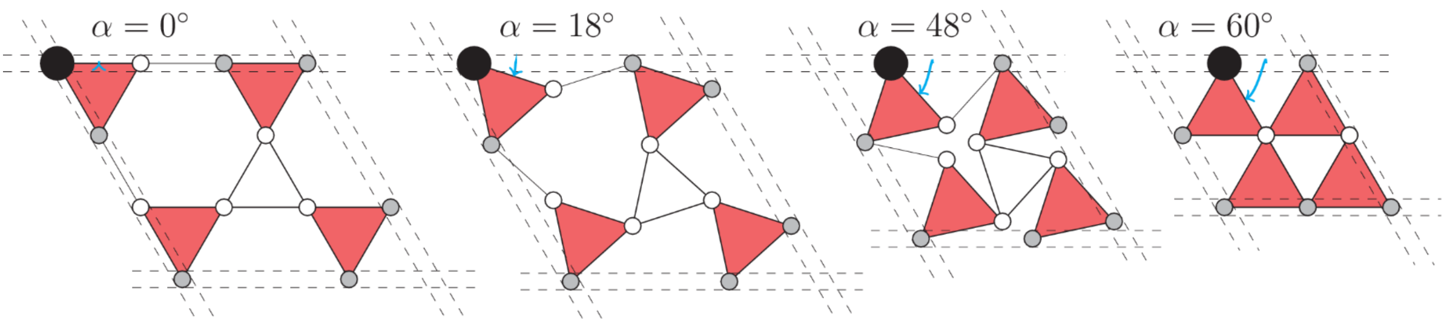

图 3

A1	令 $N=2$，求系统处于任意角度 α 时的势能 E_p 。	**2** 分

A2	令 $N=2$，求系统在引力场中处于平衡状态时的角度 α_E 的值。	**1** 分

A3	令 $N=2$，在平衡态时给一个微小的扰动下，系统会简谐振动。求系统动能，用 $\Delta\dot{\alpha} \equiv d(\Delta\alpha)/dt$ 等来表示。并求系统简谐振动的频率 f_E。	**5** 分

B 部分: 考虑任意的 N:

B1	对于任意的 N，求重力作用下系统的平衡角度 α'_E 。	**3** 分

B2	考虑 $N\to\infty$的极限情况。给角度 α 一个微小扰动，系统势能的变化 $\Delta E_p \propto N^{\gamma_1}$，系统的动能$E_k \propto N^{\gamma_2}$，振动频率$f'_E \propto N^{\gamma_3}$。求 γ_1, γ_2 和 γ_3 的值。	**3** 分