



200道 物理学 难题

——附提示与解答

**200 Puzzling
Physics Problems**

——With Hints and Solution

彼特·纳德 吉拉·哈涅克 肯·瑞利/著

李 菘等/译



 **北京理工大学出版社**
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

责任编辑：范春萍

封面设计： 黄建军

200道 物理学 难题



本书是三位专注于物理难题的专家多年积累的成果，是欲强化自己对普通物理的理解的大学生和研究生，及欲参加各种物理竞赛，特别是参加奥林匹克物理竞赛的中学尖子生，不可多得的参考书。

ISBN 7-5640-0193-3



9 787564 001933 >

ISBN 7-5640-0193-3

定价：29.00元

200 道物理学难题

彼特·纳德
吉拉·哈涅克 编著
肯·瑞利

李 菘 徐永利 任世宏 译
吴金闪 刘文彪

李 菘 校

 北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

版权专有 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

200道物理学难题/[匈]纳德,[匈]哈涅克,[英]瑞利著;李菘等译. —北京:北京理工大学出版社,2004.2

ISBN 7-5640-0193-3

I. 2… II. ①纳…②哈…③瑞…④李… III. 物理学-解题
IV. O4-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第091340号

200 Puzzling Physics Problems

—With Hints and Solutions

© Cambridge University Press 2001

此中文版由剑桥大学出版社授权

北京市版权局著作权登记号 图字01—2003—1262号

出版发行/北京理工大学出版社

社 址/北京市海淀区中关村南大街5号

邮 编/100081

电 话/(010)68914775(办公室) 68912824(发行部)

网 址/http://www.bitpress.com.cn

电子邮箱/chiefedit@bitpress.com.cn

经 销/全国各地新华书店

印 刷/北京圣瑞伦印刷厂

开 本/787毫米×1092毫米 1/16

印 张/14.5

字 数/284千字

版 次/2004年2月第1版 2004年2月第1次印刷

印 数/1~5000册

责任校对/郑兴玉

定 价/29.00元

责任印制/李绍英

图书出现印装质量问题,本社负责调换

前 言

按照我们的经验，掌握物理定律最好的办法是在实际的问题中应用它们。然而，往往许多书本中的问题只能通过冗长而复杂的数学运算才能解决，这些运算机械而枯燥，对于学生来说是一件苦差事。有时候，即使是那些掌握了所有必要技能的最好的学生，也会感觉那样的问题不足以吸引他们，因为冗长乏味的计算使他们的创造力得不到充分的发挥。

这本书的目的就是要让大家知道，并非所有的物理问题都是如此，我们希望您会被下面这样的问题所吸引：

- 白天的长度与车辆靠哪边行驶有何关系？
- 为什么跳高中背越式要比跨越式更好？
- 老实泉喷泉的水穴在地下多深？
- 火星上最高的山能有多高？
- 观赏喷泉形成的水“钟”的形状是怎样的？
- 考虑摩擦力，立在笔尖上的铅笔将如何翻倒？
- 静止的伸向空中的绳子是否可以作为 UFO 存在的证据？
- 一个正电子掉入法拉第笼中，将如何运动？
- 月球上的跳高记录应该是多少？
- 为什么夜虫会不幸地被光源吸引？
- 太阳的光比月亮的光亮多少？
- 消防水龙解开得能有多快？
- 怎样安放两个磁铁，才能使两者相互之间的力偶不是大小相等方向相反？
- 需要多长时间才能使 8 t 重的西伯利亚猛犸象解冻？
- 食钛的小绿人吞食他们的星球，他们面临着怎样的危险？

- 一根均匀带电杆的电场方向如何？
- 产能电容问题中的陷阱是什么？
- N 维立方体的等效电阻是多大？
- 哪些因素决定着沙漏的周期？
- 单极发电机是怎样工作的？
- 盒子中的电子可以停在多深的地方？

这些问题，和其他 180 个问题一样，通过恰当地选择变量和坐标系，或者特异的思维方式，甚至一些“小聪明”和类比，就能够得到优美的解答。当灵感出现，或找到问题的关键时，常常只要几行的简单计算或者推论就可以得到答案。这使学生们有理由为自己感到兴奋。

仅有逻辑是不够的，如果没有对物理基本定律的理解，就无法想象那些富于创造力的步骤。也就是说，我们不鼓励在没有学习过足够深入的知识之前就试图来解决这些问题。尽管成功地求解这些题目是当然的首要目标，但仅靠逻辑来求答案是不行的。没有人能够在不懂得、不理解物理定律的情况下提出充满创造性的解法。因此，我们不鼓励大家在深入学习某一领域之前就来演算这些问题。那么您可能会问，有什么提示吗？我们在您解题的各个阶段给出的提示，相信会给您带来启发和兴奋。对于我们的一部分解答，大家肯定会说“真聪明”、“真漂亮”，而有些可能会得到“太明显了”或“太笨拙了”的评价。我们的目标是尽可能多地展示“技巧”来扩大大家解题的武器库。我们希望本书能给您带来快乐与帮助。如果您发现了与此类似的物理问题，恳请您发送给我们，以求与大家共享。

本书收集了我们多年教学中所遇到的 200 道难题。有些是我们自己发现的，有些出自《匈牙利高中数学物理》期刊，它已经有 100 多年的历史。也有一些问题选自匈牙利或国际物理奥林匹克竞赛，或剑桥大学入学考试题，经过重新改写后收录于本书中。同事们对本书的建议与评论使我们受益颇多。在此我们特别感谢 Masaaki Kato 有益的意见和建议以及 Alfonso Diaz-Jimenez 关于发射空间探测器的有意思的注释（见题解 17）。要确定国际化的“点子市场”中每一道题的原创者是不可能的，然而，我们还是要特别感谢那些最难的题目的原创者们，包括 Tibor Biro, Laszlo Holics, Frederick Karolyhazy, George Marx, Ervin Szegedi 和 Istvan Varga，以及其他认识的或不认识的，提出、记录和改进过这些难题的人们。

彼特·纳德 吉拉·哈涅克
布达佩斯 2000
肯·F·瑞利
剑桥 2000

如何使用本书

本书中收集的问题并不是按照主题词排列的，而是大致按照难度或者按照类似的解题方法排列的。因此，对有些问题而言，不能很好地归属为力学、热力学或电磁学。其实，自然界的秘密本就不应该由教科书中的哪一部分（力学或热力学等）来揭示，而是依赖于所用的处理方法和思想的来源。因而，界定我们所面对的是怎样类型的问题也成为我们解题任务的一部分。然而，作为信息导引，读者可以找到一个主题词列表，以及在此主题词下的或多或少有点关系的问题。有些问题还被列在不止一处的地方。其后还给出了物理基本常数的符号和数值，天文学数据，以及某些物质的性质。

大部分问题并不容易解答，有一些甚至有相当难度。我们鼓励您，我们的读者，独立解决这些问题。如果您成功了，您将体会到胜利的喜悦；如果您尚不能完成，您也千万不要放弃，去查看一下提示，继续完成。大多数情况下，提示会给您很大的启发，尽管做出完整的解答还要做很多工作。如果您完成了，需要检查答案；或者您完全放弃了，您可以参考最后一章的解答。

通过类似的方法解决的问题通常放在一起。如果一个问题还与其他部分的问题相关的话，我们会在提示与解答中做一个交叉索引。那些需要比较复杂的逻辑推理或数学运算来解决的问题，我们用一星或两星做了标记。

有些问题的解答会带来进一步的可能超出了本书范围的新问题。通常我们会在解答时指出需要进一步考虑的问题，但是我们不讨论关于此类问题的解答。

主题词与相应的问题

运动学: 1, 3, 5, 36, 37, 38*, 40, 41, 64, 65*, 66, 84*, 86*。

力学: 2, 7, 8, 12, 13, 24, 32*, 33, 34, 35, 37, 38*, 39*, 70*, 73*, 77, 78*, 79*, 80**, 82, 83, 85*, 90, 154*, 183*, 184*, 186*, 193*, 194。

引力: 15, 16, 17, 18, 32*, 81**, 87, 88, 109, 110*, 111*, 112*, 116, 134*。

机械能: 6, 7, 17, 18, 32*, 51, 107。

碰撞: 20, 45, 46, 47, 48, 71, 72*, 93, 144*, 194, 195。

刚体力学: 39*, 42**, 58, 60*, 61**, 94, 96*, 96, 97*, 98, 99*。

静力学: 9, 10*, 11, 14*, 25, 26, 43, 44, 67, 68, 69*。

绳、铰链: 4, 67, 81**, 100, 101*, 102**, 103*, 104*, 105**, 106*, 108**。

液体、气体: 19, 27, 28, 49*, 50, 70*, 73*, 74, 75*, 91*, 115**, 143, 200。

表面张力: 29, 62, 63, 129, 130*, 131*, 131*, 143, 199*。

热力学: 20, 21*, 133, 135**, 136, 145, 146*, 147, 148。

相变: 134*, 137*, 138, 140*, 141*。

光学: 52, 53, 54, 55, 56, 125*, 126, 127, 128*。

静电学: 41, 90, 91*, 92, 113*, 114, 117*, 118, 121, 122, 123*, 124*, 149, 150, 151*, 152, 155, 156, 157, 183*, 192*, 193*。

静磁学: 89**, 119, 120*, 153*, 154*, 172, 186*。

电路: 22, 23, 158, 159, 160*, 161, 162*, 163*, 164*, 165, 169, 170*, 172。

电磁学: 30, 31, 166, 167, 168*, 171*, 173*, 174*, 175*, 176, 177, 178*, 179, 180, 181*, 182*, 184*, 185*, 186*, 187*。

原子与粒子: 93, 188, 189*, 190*, 191, 194, 195, 196, 197*, 198*。

量纲分析、标度、估计: 15, 57, 58, 59*, 76*, 77, 126, 139, 142, 185*, 199*

*, **: 单星或双星标记表示本题需要困难的逻辑推导或者复杂的数学运算。

物理常数

万有引力常量, G	$6.673 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$
真空光速, c	$2.998 \times 10^8 \text{ m/s}$
基本电量, e	$1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$
电子质量, m_e	$9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$
质子质量, m_p	$1.673 \times 10^{-27} \text{ kg}$
玻尔兹曼常量, k	$1.381 \times 10^{-23} \text{ J/K}$
普朗克常量, h	$6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
阿伏伽德罗常量, N_A	6.022×10^{23}
气体常数, R	$8.315 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$
真空介电常量, ϵ_0	$8.854 \times 10^{-12} \text{ C/V} \cdot \text{m}$
库仑常数, $k = 1/4\pi\epsilon_0$	$8.987 \times 10^9 \text{ V} \cdot \text{m/C}$
真空磁导率, μ_0	$4\pi \times 10^{-7} \text{ V} \cdot \text{s}^2/\text{C} \cdot \text{m}$

天文学数据

平均地球半径, R	6371 km
日地距离 (一个天文学单位, Astronomical Unit, ua)	$1.49 \times 10^8 \text{ km}$
平均地球密度, ρ	5520 kg/m^3
重力加速度, g	9.81 m/s^2



物性常数

水的表面张力, γ	0.073 N/m
水的气化热, L	2256 kJ/kg (= 40.6 kJ/mol)
钢的抗拉强度, σ	500~2000 MPa

密度, $\rho/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$

氢气	0.0899	钛	4510
氦气	0.1786	铁	7860
空气	1.293	水银	13550
水 (4 °C)	1000	铂	21450

折射率, n

水	1.33
冰	1.31
玻璃	1.5~1.8
钻石	2.42

《200道物理学难题》旨在使学生在实际应用中增强对物理概念和物理定律的掌握。与其用费力而复杂的数学技巧来解决书中的问题，倒不如利用物理直觉来得简单。问题的选择仅限于经典（非量子）物理学，但难度却并不因此而降低。书中大多数问题都采用常见的非技术性语言进行表述，这要求学生必须自己选择正确的框架来分析问题，并确定利用物理学的哪个分支来解决问题。


一般而言，书中问题的难度适合出众的高中生、优秀的本科生，以及良好的硕士生的水平。

本书对准备参加普通物理考试的本科生和准备参加各种物理竞赛的高中生无疑是有益的，可用于自学、课堂练习或者研讨会。物理教授们亦可望从中找到一些具有挑战性的难题。尽管物理上有难度，但是本书对数学方面的要求很少，最多只是简单的微积分而已。这本题集不仅富于挑战性和指导性，而且富于趣味性。

彼特·纳德 (Peter Gnädig) 1971年毕业于布达佩斯罗兰德依亚托斯大学 (ELTE), 并于1980年于此获得理论粒子物理学博士学位。目前, 他是ELTE大学原子物理系的教师, 研究领域为高能物理学。从1985年开始, 他一直作为匈牙利物理奥林匹克参赛队的教练员之一参加国际物理奥林匹克竞赛。他是匈牙利全国物理联赛的组织者之一, 也是KOMAL杂志的物理编辑。KOMAL杂志是匈牙利有100年历史的中学数学物理期刊, 每月发布一些具有挑战性的物理问题。纳德教授曾经撰写过关于在物理学中应用概率论与矢量运算方面的教科书。

吉拉·哈涅克 (Gyula Honyek) 1975年毕业于布达佩斯罗兰德依亚托斯大学 (ELTE), 并于1975年于此获得博士学位。从那以后, 他一直是ELTE大学普通物理系的教师。1984年, 经过两年的继续教育, 他拿到了物理教师资格证, 1985年转任于ELTE教师培训学院。目前他任教于布达佩斯拉诺提文法学校。从1986年开始他就是匈牙利奥林匹克集训队的教练员与选拔者之一。他是KOMAL的编委之一, 同时也是匈牙利高中物理系列教科书的作者之一, 在各个水平的物理教学上都有丰富的经验。

肯·瑞利 (Ken Riley) 剑桥大学数学系毕业, 其后获得理论与实验核物理博士学位, 在布鲁克海文成为基本粒子物理的助理研究员, 并在剑桥卡文迪什实验室获得了讲师资格, 然后在卢瑟福实验室和斯坦福大学继续研究生涯。特别的是, 其间他还参与发现了一定数量的早期重子共振态。作为克莱尔学院的资深教员, 他在那里教授数学与物理课超过30年。他服务于许多各级各类关于高中生和本科生教学与考试的委员会。同时, 他也是《物理与工程用数学方法》(剑桥大学出版社) 一书的作者之一。



目 录

如何使用本书.....	(i)
主题词与相应的问题.....	(ii)
物理常数.....	(iii)
习题.....	(1)
提示.....	(43)
解答.....	(71)

200 道物理学难题



习 题



问题 1

三只小蜗牛所在的位置形成一个等边三角形，三角形的边长为 60 cm。第一只蜗牛出发向第二只蜗牛爬去，同时，第二只向第三只爬去，第三只向第一只爬去，每只蜗牛爬行的速度都是 5 cm/min。在爬行的过程中，每只蜗牛都始终保持对准自己的目标。经过多长时间蜗牛们会相遇？相遇的时候，它们各自爬过了多长的路程？它们经过的路线可以用怎样的方程来描述？若将蜗牛视为质点，那么在它们相遇前，绕着它们的最终相遇点转了多少圈？

问题 2

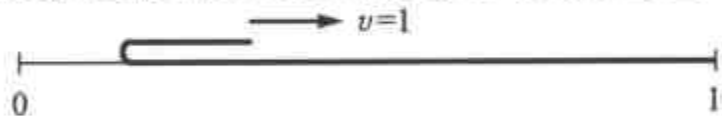
一个小物体在水平桌面的边沿，因受到一个力的作用，而从桌子的另一边掉落。已知桌子的宽度为 1 m，掉落前物体的运动时间为 2 s。问这个小物体有轮子吗？

问题 3

一艘小船在静止水中的速度为 3 m/s，一个船夫要驾此船渡河，同时需要在渡河时走过的距离最短。问在下面的情况下，船夫应该选择向哪个方向划船？情况 (i)：水流速度 2 m/s；情况 (ii)：水流速度 4 m/s。假设水流的速度在各处都是相同的。

问题 4

地上铺着一张长而薄的柔软地毯。地毯的一端折起，以恒定的速度将折起的一端向后拉，覆盖在地毯静止的部分之上。求地毯被拉起的部分质心的速度。如果地毯具有单位长度和单位质量，求拉动地毯运动部分所需的最小力量。



问题 5

4 只蜗牛在一个非常大的平台上各自做匀速直线运动，其运动路径的方向是随机的，（但是没有平行的，也就是说任何两只蜗牛都可能相遇），但是没有任何两条以上的蜗牛路径会相交于一点。如果 $(4 \times 3)/2 = 6$ 次可能相遇中的 5 次已经发生，我们是否可以预言第六次相遇也会发生？

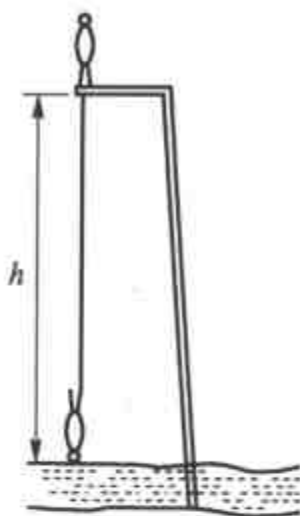
问题 6

两条各 20 g 的扁虫子爬一堵非常薄的墙，墙高 10 cm。一条虫子长 20 cm，另一条宽一些但长度只有 10 cm，当两条虫子的中点正好在墙头上的时候，哪一只克服重力做的功多一些？两条虫子做功总量的比是多少？

问题 7

一个身高 2 m 的人从湖边高 25 m 的平台上做蹦极跳，弹性绳的一端系在他的脚上，另一端固定在平台上，他从静立开始下落。弹性绳的长度和弹性选择为恰好当他的头触及湖面时，其速度减小为零。最终静止时，人的头高于水面 8 m。

- (i) 求没有被拉伸时的绳长。
 (ii) 求在跳下过程中的最大速度和加速度。



问题 8

一座冰山呈尖端向上的正金字塔形，露出水面 10 m 高。忽略水的运动造成的影响，求冰山做小幅度上下振动的周期。冰的质量密度为 900 kg/m^3 。

问题 9

汽车上用来悬吊 4 轮的弹簧是相同的。假设汽车车体为刚体，当它的右前轮停在 8 cm 高的人行道上时，车体在每个轮子处升高多少？如果两个右侧的轮子都停在人行道上呢？结论和车上坐了多少人以及人坐的位置有没有关系？

问题 10*

在维克多·雨果的小说《悲惨世界》中，主人公冉阿让是一个逃犯，他有能力利用两面直角相交的墙的墙角爬上墙头。求他在爬墙时最小需要用多大的力来推墙？同时，求他要完成这项技艺，他和墙面之间可能的最小摩擦系数。

问题 11

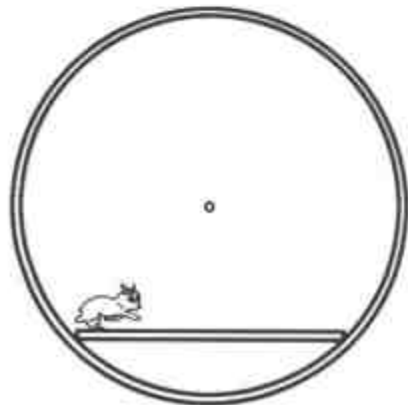
一个球，由两个不一样的匀质半球粘在一起。放在一个与水平面成 30° 角的斜面上。这个球在斜面上能保持平衡么？

问题 12

一个小弹性球竖直落到长的倾斜平面上，平面和水平面间的夹角为 α ，球相邻落地点之间的距离是否成等差级数增加？假设碰撞是完全弹性的，空气阻力可以忽略不计。

问题 13

仓鼠的笼子是一个转轮，笼子有一个无摩擦的中轴。一





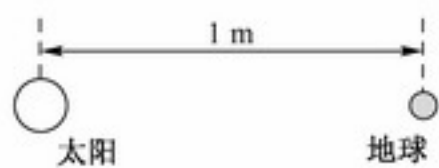
水平的平台固定在中轴之下，初始状态时，仓鼠在平台的一端。当平台被释放时，仓鼠开始跑，因为仓鼠的运动，平台和轮子保持相对固定，确定仓鼠是怎么运动的。

问题 14*

一辆支撑着的自行车，能够前后运动但不会翻倒。自行车的脚踏板在最高和最低的位置。一个学生蹲在车旁边，给在最低位置的脚踏板一个水平向后的力，问

- (i) 自行车向哪个方向运动？
- (ii) 飞轮转动的方向和后轮转动的方向相同还是相反？
- (iii) 较低的踏板相对地面如何运动？

问题 15



如果太阳系等比例地缩小，当地球和太阳间的平均距离为 1 m 的时候，1 年对应的时间有多长？假设各物体密度不变。

问题 16

如果双子星的一个的质量都等于太阳的质量，它们间的距离等于太阳和地球之间的距离，那么它们旋转的周期是多少？

问题 17

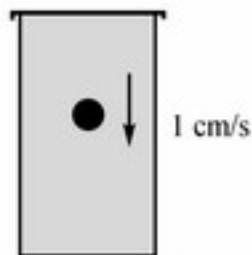
- (i) 将一颗地球卫星送上圆形轨道所需要的最小发射速度是多少？
- (ii) 将地球卫星送入两极轨道所需的能量要比赤道轨道高多少倍？
- (iii) 空间探测器离开地球引力场需要多大的初始速度？
- (iv) 对空间探测器而言，是离开太阳系需要的能量大还是撞击太阳需要的能量大？

问题 18

一枚火箭将要离开地球的重力场。它的主引擎中的燃料略少于所需要的量，因此必须要用到只能工作一小段时间的辅助引擎。问什么时候使用辅助引擎最好，是刚离开的时候？火箭相对于地球快要停止的时候？还是任何时候都没有区别？

问题 19

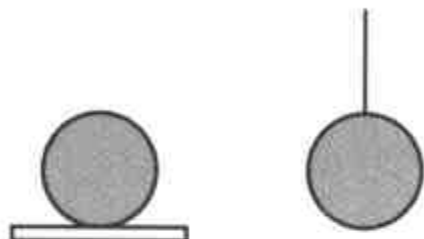
一个 1 cm^3 的钢球在一个装满蜂蜜的罐子里，以 1 cm/s 的速度下沉。如果蜂蜜的密度为 2 g/cm^3 ，则蜂蜜的动量为多大？



问题 20

温度为 T 的气体装在初始温度为 T_1 的容器中，是当 $T_1 < T$ 的时候，还是当 $T_1 > T$ 的时候，气体作用在容器壁上的压力较大？

问题 21*



两个相同的铁环，一个立在热绝缘的板上，另一个悬吊在热绝缘的线上。传给两个铁环等量的热能，问哪一个温度高一些？

问题 22

两个学生（不是学物理的） A 和 B ，住在大学宿舍的相邻寝室。为了节约，他们将天花板上的灯串联了起来，商定双方都安装 100 W 的灯泡，电费平分。但是双方都希望能让对方多付钱而使自己获得更好的照明，其中 A 安装了 200 W 的灯泡，而 B 安装了 50 W 的灯泡。请问在最后的期末测试中谁考得不好？

问题 23



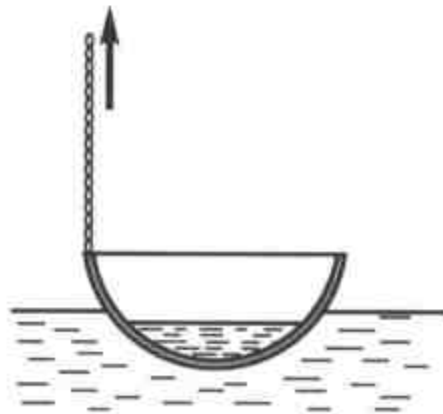
如果电压为 V 的电池接在黑箱的 I 端，如图所示，则接在 II 端的伏特计的读数为 $V/2$ 。如果电池接在 II 端，则 I 端的伏特计读数为 V 。已知黑箱中只有无源的电器元件，问他们是什么样子？

问题 24

一桶水用绳子悬挂在固定点上。水桶处于运动状态，整个系统像钟摆一样摆动。然而，水桶是漏的，桶中的水慢慢从底部漏出。问随着水的流失，摆的周期怎样变化？

问题 25

一个空的烧杯质量为 100 g ，半径为 30 mm ，烧杯壁厚忽略不计，其重心高于底面 100 mm 。问当烧杯中注入多少水的时候，烧杯处于最稳定的状态？



问题 26

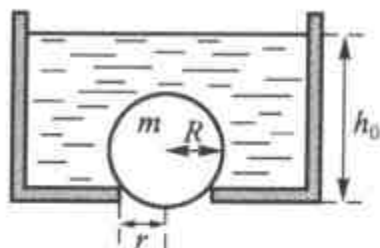
鱼汤盛在半径为 40 cm 的半球形铜碗内。铜碗放在湖



水中冷却,它漂浮在水上,浸入水中 10 cm。碗沿上的一点用链子固定,向上拉起 10 cm,问水是否会流入碗中。

问题 27

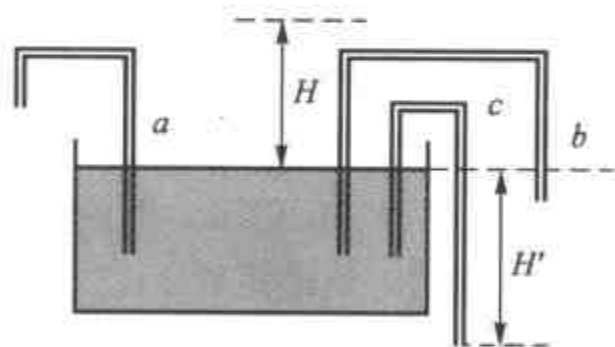
一个装满水的容器底部有一个半径为 r 的圆洞,洞由一个质量为 m 、半径为 R ($>r$) 的球堵住。容器中的水慢慢减少,当达到一个确定值 h_0 时,球从圆洞处升起,求 h_0 。



问题 28

肥皂泡中充满了氦气,漂浮在空气中,问肥皂泡的壁和其中充的氦气哪个更重?

问题 29



水通过浸润可以在毛细管壁中上升到高度 H 。三个“绞架”形的毛细管 a , b 和 c 使用相同的管子制成,管子的一端放入盛满水的大盘子,如图所示。

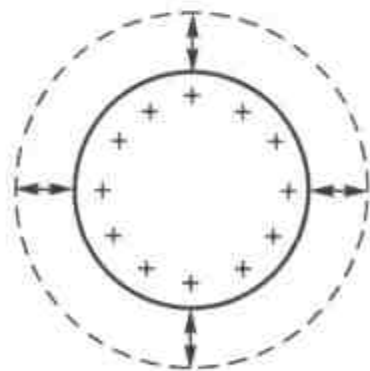
问水会从毛细管的另一端流出么?

问题 30

一个充电的球形电容,由于绝缘层的轻微漏电而缓慢地放电。问放电的电流产生的磁场大小和方向如何?

问题 31

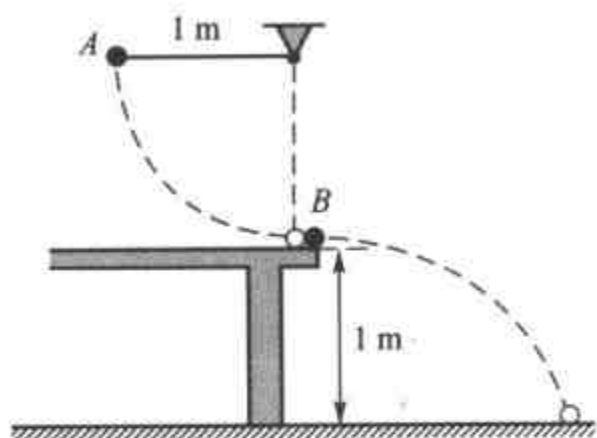
一个充电的导体球做辐射方向的“脉动”,即,其半径周期性地以固定的幅度变化(如图所示)。球表面上的电荷,作用和偶极天线相同,发出电磁辐射。问球发出的辐射是怎样的?



问题 32*

男子跳高世界纪录保持者(室内运动会)在月球上能跳多高?

问题 33



小钢球 B 停放在高 1 m 的桌边上，另一个钢球 A 作为一个 1 m 长的单摆的摆锤，从单摆悬挂点的平面自由释放，并撞击 B 球，如图所示。两个球的质量是相同的，碰撞是完全弹性的。

考察 B 的运动直到它首次碰到地面：

- (i) 哪个球运动的时间较长？
- (ii) 哪个球移动的路径较长？

问题 34

一个小摆锤固定在一根长 50 cm 的绳子的一端。作为绳子的另一端做适当受迫运动的结果，摆锤以均匀速度 3 m/s 做半径为 50 cm 的竖直圆周运动。画出圆周轨道以 15° 为单位间隔，绳子两端的运动轨迹，在相同的端注明各点。

问题 35

点 P 位于斜面上方，它可以通过一根无摩擦的金属丝在重力的作用下，滑到斜面上。金属丝连接 P 和平面上一点 P' ，问怎样选取 P' 使得所需的时间最短？

问题 36

教堂时钟的分针是时针的两倍长，问在午夜后的哪个时间，分针的末端以最快的速度远离时针的末端？

问题 37

最大与地面成什么角度抛出石头，才能使石头在运动过程中始终远离抛掷石头的人？

问题 38*

一根直径 20 cm 的树干平放在水平的地上。一只懒惰的蚱蜢想跳过树干，求蚱蜢满足条件的最小离地速度（空气阻力忽略不计）。

问题 39*

一根直的刚性毛发平放在光滑的桌面上，毛发的两端都坐着一只跳蚤。如果毛发的质量 M 不是远远大于跳蚤的质量 m ，它们能否同时以相同的速度和起跳角度起跳，

变换位置而不在半空中撞在一起?

问题 40

一个喷泉有一个小的半球形的玫瑰（喷嘴），位于水池中水的表面，如图所示。玫瑰上有很多平均分布的小洞，通过这些小洞，水以相同的速度向不同的方向射出。喷头形成的水“钟”的形状是怎样的？



问题 41

一个质量为 m ，带电量为 Q 的粒子，受到重力和均匀水平电场（场强为 E ）力的合力作用。粒子以速度 v 从平行于场强的竖直平面上抛出，与水平面间的夹角为 θ ，求粒子在回到初始点水平高度前，在水平方向上行进的最大距离。

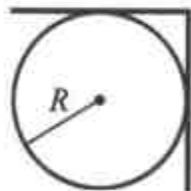
问题 42**

一根均匀的棍子，质量为 m ，长度为 l ，其两端被我的两个食指水平支撑着。同时我缓慢地移动我的两个手指，使它们在棍子的质心汇合，棍子在这个食指或者那个食指上滑动。若静摩擦系数为 $\mu_{\text{静}}$ ，动摩擦系数为 $\mu_{\text{动}}$ ，在此过程中我做了多少功？

问题 43

四块相同的砖叠放在桌边。是否可能将它们水平滑动，使得最上面的砖能够突出到全部砖体在桌外？如果砖的个数可以任意增加，最上面的砖位移的理论极限是什么？

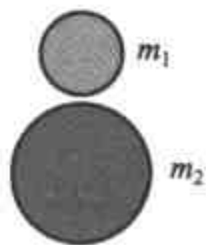
问题 44



一块板，沿中线折成直角，放置在水平固定的半径为 R 的圆柱体上，如图所示。圆柱体和板之间的静摩擦系数需要有多大，才能使板子不滑开？

问题 45

两个质量为 m_1 和 m_2 的塑料球叠放在一起（之间有很小的空隙），然后一起落在地面上。比率 m_1/m_2 为多大时，上面的小球最终获得总能量中的部分最大？要使上面的小球弹起得最高，质量的比率需为多少？

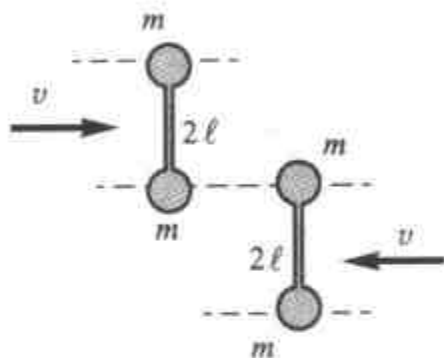


问题 46

一个玩具由三个悬挂着的钢球组成，球的质量分别为 M 、 μ 和 m ，球的中心在同一水平面上。将质量为 M 的球在它们共同所在的平面上拉起，当其中心上升到 h 高度时释放。如果 $M \neq m$ ，所有的碰撞都是弹性的，则如何选择 μ 才能使质量为 m 的球上升到尽可能高的高度？（忽略多次碰撞。）

问题 47

两个相同的哑铃在一个水平气垫桌上相向运动，如图所示。每一个哑铃都被看做两个质量为 m 的质点被一根长为 $2l$ 的无重杆相连。初始状态哑铃并不转动。描述哑铃弹性碰撞后的运动，画出哑铃质心运动速度关于时间的函数曲线。



问题 48

两个相同的光滑小石块 A 和 B 在结冰的湖上自由滑动。它们之间由一根轻质的长度为 $\sqrt{2}L$ 的弹性绳相连，弹性绳具有拉长一点就会崩紧的特性。在 $t=0$ 时刻， A 静止在 $x=y=0$ ，而 B 在 $x=L$ ， $y=0$ ，并以速度 V 向 y 方向运动。确定 A 和 B 在下列时刻的位置和速度：(i) $t=2L/V$ ；(ii) $t=100L/V$ 。

问题 49*

当一个空的长方形水池上方的水龙头打开后，经过时间 T_1 水池将被水注满。当水龙头关掉后，打开水池底部的塞子，则水池经时间 T_2 将水排空。如果水龙头和塞子都打开的话，将会发生什么现象？ T_1/T_2 的比率为多少时池中的水会溢出？作为特定的情况，令 $T_1=3 \text{ min}$ ， $T_2=2 \text{ min}$ 。

问题 50

一个圆柱形的容器，高为 h ，半径为 a ，容器中装了三分之二的液体。容器绕它竖直方向的轴以角速度 ω 旋转。忽略任何表面张力的效应，求使液体不溢出容器边缘的最大旋转角速度 Ω 的表达式。

问题 51

彼得站在汽车赛道旁，由汽车从静止加速到 100 km/h 使用的汽油为 xL ，推算出从 100 km/h 加速到 200 km/h 使用的汽油将为 $3xL$ 。彼得在物理课中学过动能与运动速度的平方成正比，假设汽油的化学能几乎全部转化为汽车的动能，即忽略了空气阻

力以及其他各种摩擦力的影响。

赛道旁有一条铁路，也懂得一些物理学的保罗，坐在一列与汽车加速方向相反，并以 100 km/h 的速度匀速行驶的火车上，透过车窗观看比赛的开始，他是这样推理的：既然第一阶段汽车从 100 km/h 加速到 200 km/h，而第二阶段汽车从 200 km/h 加速到 300 km/h，则第二阶段耗油为 $(300^2 - 200^2)/(200^2 - 100^2)x = (5/3)xL$ 。那么，彼得和保罗到底谁正确呢？

问题 52

在光具座上放置着相距 120 cm 的像屏和光源。当一个透镜在二者之间移动时，可以找到两个能够在屏幕上呈现清晰图像的位置；已知在两种情况下这两个图像的大小（线度）之比为 1:9。请问透镜的焦距是多少？哪一个成像更加明亮？请给出两种成像的亮度值之比。

问题 53

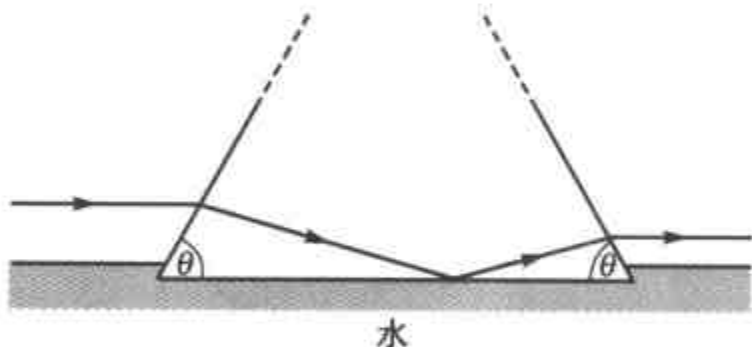
一个眼睛近视的人摘掉眼镜，然后透过自眼睛逐渐移远的眼镜观察一个静止不动的物体。他感到非常奇怪的是，开始时看到的物体逐渐变小，可是后来却又逐渐变大。请解释一下其中的原因。

问题 54

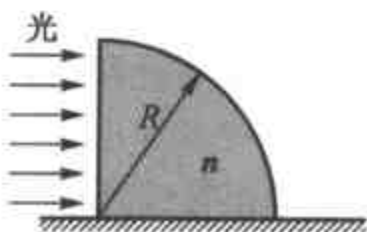
一个等腰三角形的玻璃三棱镜水平放置于水中，两个腰与底边的夹角均为 θ （如图）。一束位于水上、平行于水面并且垂直于棱镜轴的入射光线，在棱镜内部经由玻璃-水界面的反射，然后又折射回空气中。

取玻璃和水的折射系数分别为 $\frac{3}{2}$ 和 $\frac{4}{3}$ ，请

解释 θ 角至少应为 25.9° 。



问题 55



如图为一个四分之一圆柱形的玻璃棱镜，水平放置于桌面上，一束均匀、水平光线入射于其竖直平面。如果圆柱的半径为 $R = 5\text{ cm}$ ，并且已知玻璃的折射系数为 $n = 1.5$ ，那么光透过棱镜后将在桌面的什么位置形成一个光斑？

问题 56

在地球表面，太阳光是月亮光亮度的多少倍？已知月亮的反射率为 $\alpha = 0.07$ 。

问题 57

安妮和她的高个子男朋友安迪非常喜欢一起慢跑。在锻炼过程中他们逐渐发现，跑步时他们运动的速度相差不大，但是走起路来安迪却总是较快。用物理的观点该怎样解释跑和走的不同？

问题 58

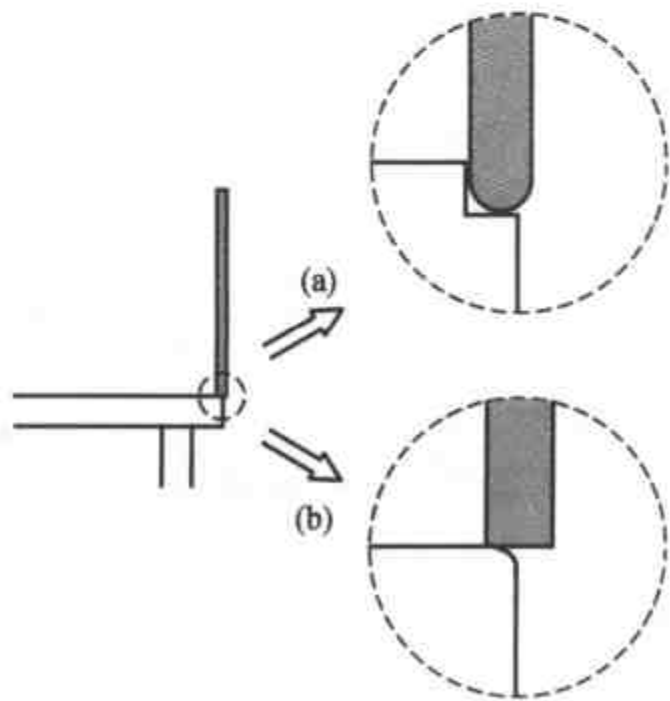
一个单摆和一个一端悬挂起来的均匀细杆自水平位置释放，如图所示。如果它们的长度相等，那么它们的周期之比是多少？



问题 59*

当一架直升机发动机的输出功率为 P 时，可以保持在空中盘旋。另外一架直升机完全是第一架的拷贝，但其线度只是前者的一半。请问要使第二架直升机保持盘旋，发动机的输出功率应为多少？

问题 60*



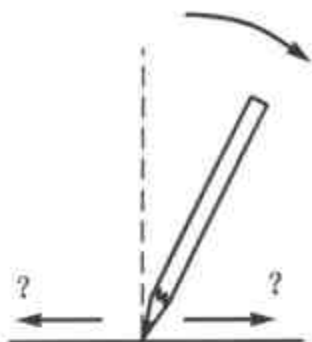
一根均匀木棒近于竖直地放置在桌子的一端，然后从静止释放。考虑以下两种极端情况，求出木棒离开桌面时它与竖直方向所成的角度。

(i) 桌面是光滑的（摩擦力可以忽略不计），但在桌子的一端刻有一个小槽（如图（a）所示）。

(ii) 桌面是粗糙的（摩擦力很大），并且棱角很锐利，也就是说桌边的曲率半径和木棒的端面相比非常小。木棒端面的一半突出桌子的边缘（如图（b）所示），这样保证了木棒由静止释放后将沿桌边旋转，木棒的长度远远大于它的直径。

问题 61**

一支铅笔笔尖向下竖直放置在桌面上，然后释放倾倒。笔尖运动的方向，相对于铅笔倾倒的方向，与摩擦系数之间的关系如何？铅笔尖会离开桌面吗（还是只有当铅笔“肩”与桌面接触时才会离开）？

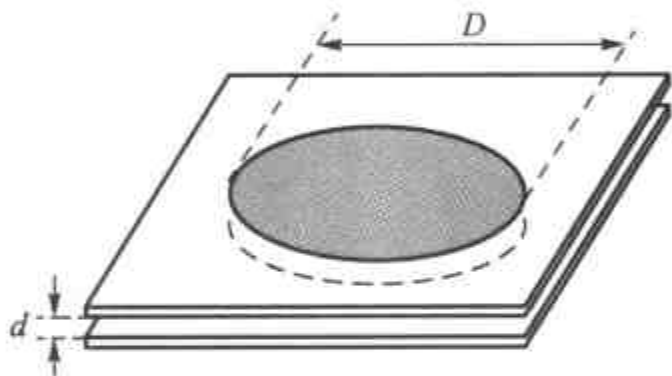


问题 62

半径为 R_1 和 R_2 的两个肥皂泡用稻草杆相连。空气从一个肥皂泡进入到另一个（请指出空气的流动方向），进而第三个独立的肥皂泡 R_3 形成。如果大气压为 p_0 ，肥皂泡的表面张力是多少？测量这三个半径不同的肥皂泡是一种确定液体表面张力的合适方法么？

问题 63

两个平行玻璃板之间充满一层水（如图所示）。玻璃板之间的距离为 d ，板间夹的“水盘”的直径为 $D \gg d$ 。两块板之间的相互作用力是怎样的？



问题 64

一只蜘蛛把一条长 1 m 的“超弹性”丝线的一端固定在一堵竖直的墙上，丝线上某处静止地趴着一条小毛虫。饥饿的蜘蛛，静止不动地呆在丝线的另一端，开始以 $v_0 = 1 \text{ cm/s}$ 的速度匀速拉动丝线。同时，小毛虫开始以 1 mm/s 的速度相对于丝线向墙的方向逃跑。小毛虫能够逃到墙上吗？

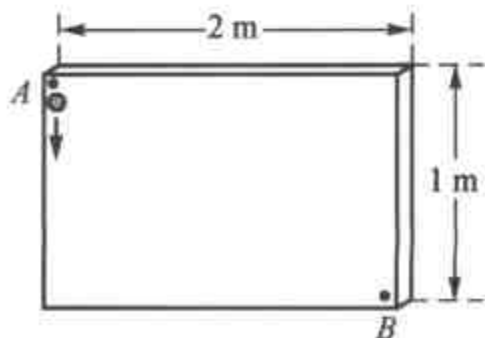


问题 65*

如果在上题中蜘蛛不是静止在丝线的一端，而是拉着丝线朝着远离墙面的方向运动，结果会有什么变化？

问题 66

把一些钉子水平钉在竖直放置的画板上。如图所示，一个小钢球从 A 点下落，经过画板上突出钉子（图中未画出）的反弹到达 B 点。

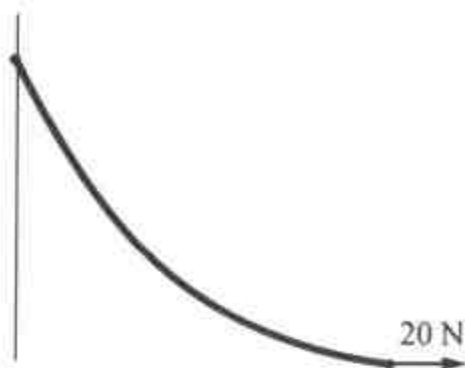


是否可能通过设置钉子的位置，来实现：

- (i) 从 A 点经钉子的反弹到 B 点比从直线路径 AB 无摩擦地滑动要快？
 (ii) 钢球到达 B 点的用时少于 0.4 s 吗？

问题 67

一根绳子的一端固定在竖直的墙面上，另一端施以 20 N 的水平拉力。绳子的形状如图所示，求绳子的质量。



问题 68

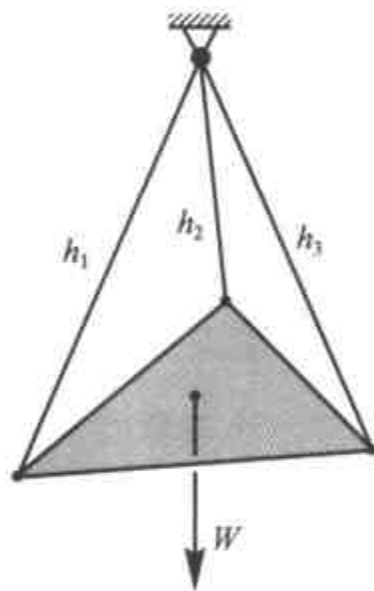
求解如图所示用一根细线悬挂圆规时，圆规张开多大的角度可以使其旋转点抬升得最高，假定圆规两臂的长度相等。



问题 69*

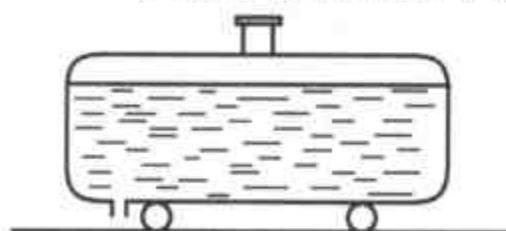
把长度分别为 h_1 、 h_2 、 h_3 的细绳系于一个质量均匀、质量为 W 的三角形板的三个顶点上，三个细绳的另一端固定在同一点上，如图所示。

请用细绳的长度、板的重量表示出每根绳子内部的张力。



问题 70*

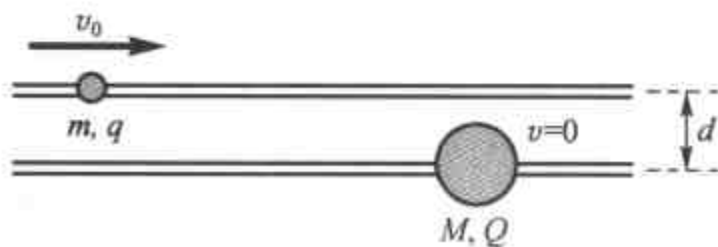
一个装满液体的罐车静止在水平路面上。罐车没有使用



刹车，同时可以在路面上无摩擦移动，如图所示。在罐车的后面底部有一出水孔，如果打开这个竖直的出水孔罐车将向哪个方向移动？罐车会保持这个移动方向吗？

问题 71

如图所示，两个相距为 d ，水平、平行放置的小木棍上各穿着一个小珠子，它们均可以在木棍上无摩擦地滑动。珠子的质量分别为 m 和 M ，并且分别带电 q 和 Q 。初始



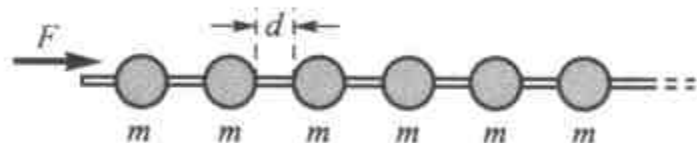


情况下，大质量 M 的珠子静止，而小质量 m 的珠子以速度 v_0 从远处接近大珠子。描述珠子接下来的运动。

问题 72*

在一根长的水平绳子上等距离地穿着许多质量相同的珠子，珠子可以在绳子上无摩擦地移动，初始情况下珠子静止，如图所示。

一个珠子在恒定外力 F 的作用下不断加速（向右）。请给出在以下两种情况下，经过很长时间后被加速珠子的速度和“激波”的波前。



- (i) 完全非弹性碰撞；
- (ii) 完全弹性碰撞。

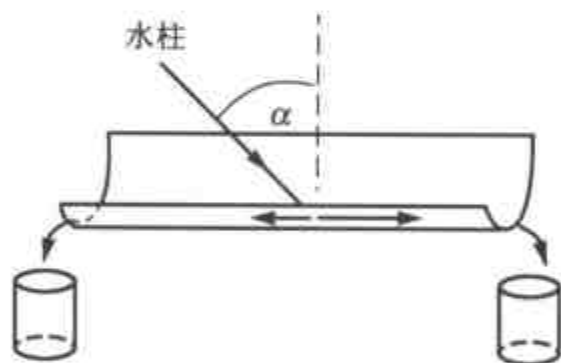
问题 73*

在一架称重仪器的平台上有一张桌子，桌子上放置一个大壶和一个啤酒桶，桶的水龙头在水壶正上方。描述水龙头打开后，啤酒从桶中流入壶中时秤的读数将怎样变化。

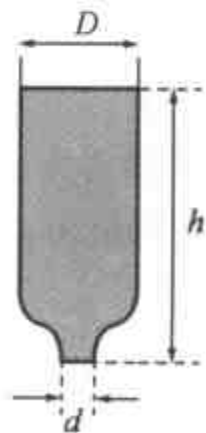
问题 74

一支水柱冲击水平放置的半圆柱形的水槽，并且水柱与水槽中心线位于同一竖直平面内，如图所示。

请给出由水槽两端流出的水量之比与水柱的入射角 α 之间的函数关系。

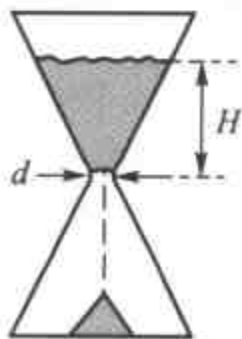


问题 75*



一个顶端开口、直径为 D 的玻璃管，其中装满高度为 h 的水。玻璃管的底部较狭窄，直径为 d ，被塞子封闭，如图所示。

当打开底端塞子后，水将从底部的孔流出，流速约为 $v = \sqrt{2gh}$ 。然而，这个速度只有经过时间 τ 后才可达到，试估计出这个时间 τ 的量级。若忽略黏性效应，当刚刚移开塞子时，最底层水的加速度是多少？



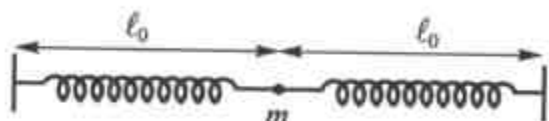
问题 76*

合理估计出如图所示沙漏中沙子全部流下所需要的时间。使用现实生活中的数据。

问题 77

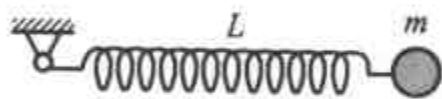
一个小球连接两个相同的自然伸展的轻弹簧，弹簧的远端都固定起来，并且两根弹簧位于一条直线上，如图所示。

现在把小球向垂直于弹簧初始直线的方向上拉开 1 cm，然后释放；后续的小球振动周期为 2 s。求出拉开的距离为 2 cm 时，小球的振动周期。弹簧的自然伸长长度为 $l_0 \gg 1$ cm，重力可以忽略不计。



问题 78*

一个原长 L 、弹性系数为 k 的轻、软弹簧一端悬挂在转轴上，另一端连接一个质量为 m 的球体。弹簧自水平、自然伸长状态释放，如图所示。

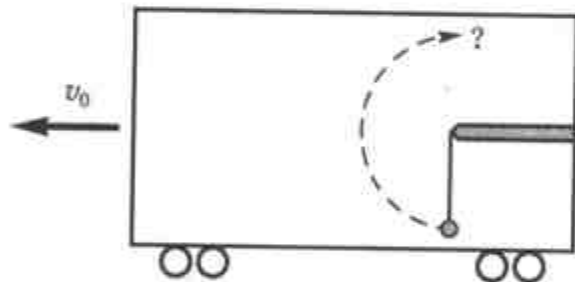


当弹簧达到竖直位置时，弹簧的长度是多少？（软弹簧意味着 $mg \gg kL$ ，因此弹簧内部的张力始终直接正比于其伸长量。）

问题 79*

火车安全测试的轨道上，车厢以速度 v_0 运动，一个质量为 m 的重物通过一根柔软的绳子悬挂起来，如图所示。

火车厢在强劲但恒定的刹车作用下停止，请问小球是否可能摆动 180° ，从而使拉紧的线绳达到竖直向上的位置？

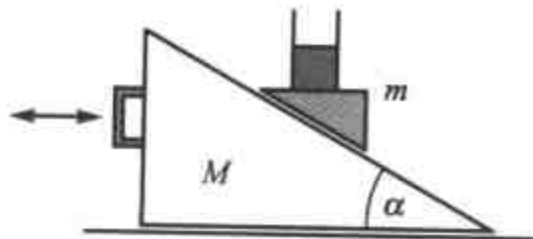


问题 80**

一个内装水的玻璃杯固定在楔形木块上，楔形木块可无摩擦地在一个倾角为 α 的斜面上滑动，如图所示。斜面的质量为 M ，楔形木块、玻璃杯和水的总质量为 m 。如果没有运动，水面将是水平的。在下列两种情况下：

(i) 斜面是固定的；

(ii) 斜面在水平方向上可以自由移动。



水面最后将和斜面成多大角度？并具体分析当 $m \gg M$ 时的情况。如果斜面的手柄被施以周期性的振动，但不会导致楔形木块离开斜面，情况将会怎样？

问题 81**

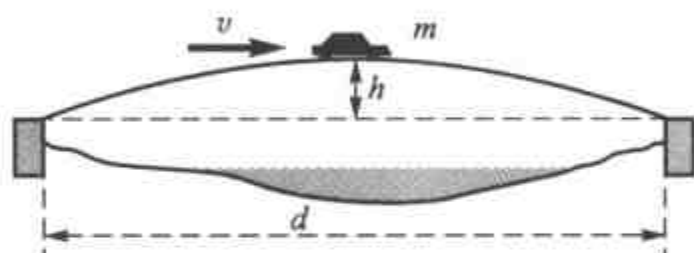
如果一个人发现有一根线纹丝不动地从地面竖直通到天空，是否可以认为这是 UFO 存在的证据？是否可以用熟知的物理规律来解释这一现象？这根线需要多长？

问题 82

有一架横跨宽度为 100 m 河流的抛物线形桥梁，其最高点高于河岸 5 m。质量为 1000 kg 的小汽车以匀速 20 m/s 通过桥梁。利用图中标出的量，计算小汽车在下列两种情况下作用于桥梁的力：

(i) 在桥的最高点上；(ii) 通过桥梁的 3/4 时。

(忽略空气阻力，取重力加速度 g 为 10 m/s^2 。)



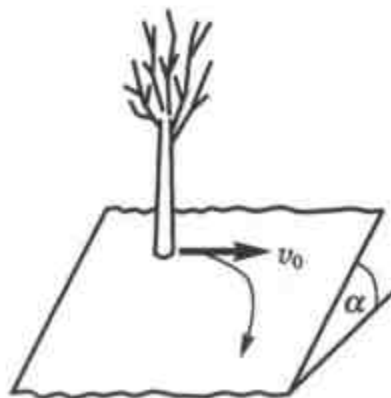
问题 83

一个 0.5 kg 的质点以 5 m/s 的恒定速度沿椭圆轨道运动，在经过长轴的端点时其惯性离心力为 10 N，经过短轴端点时惯性离心力为 1.25 N。请问这个椭圆的长、短轴分别为多少？

问题 84*

一名船员从一条笔直、宽度恒定的运河一侧出发，希望划向出发点的正对岸。河中水流的速度处处为 v ，而船员一直稳稳地划桨，若不计水流速度船速也将为 v 。他一直保持船头朝向目标，但水流把他冲向下游。如果船员一直保持这种划法而不会疲惫，水流将使得船向下游漂流多远？从静止于河岸的观者看来，船经历了怎样的运动轨迹？

问题 85**



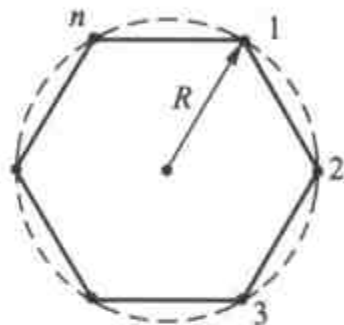
两个小孩站在一个开阔、倾斜的山坡上，山坡可以看成是一个平坦的斜面。地面上结了足够的冰，只要小孩受到一点点的作用力就会以恒定的速度滑向山下，如图所示。

一个小孩与另外一个小孩玩，他背靠在一棵大树上以 $v_0 = 1 \text{ m/s}$ 的速度水平推了对方一下。后者滑下了山坡，此间其速度的大小和方向均发生了变化。如果忽略空气阻力，并且假定摩擦力与速度无关，被推的小孩最终的速度为多大？

问题 86*

走私犯的船沿与笔直的海岸线垂直的方向以恒定速度 v 出发，海岸警卫队的快艇在距离走私船 a 处同时离开海岸。快艇始终以恒定速度朝走私船驶去，最终在距离海岸线为 a 时抓住罪犯。请问海岸警卫队快艇的速度是走私船速度的多少倍？

问题 87



质量为 m 的质点分别静止于正 n 边形的每一个顶点上，如图为 $n=6$ 的情况。

如果只考虑各个质点之间的万有引力作用，整个系统将如何运动？在 $n=2, 3, 10$ 的情况下质点之间要经过多长时间才会相撞？考虑一下极端情况 $n \gg 1$ ，而 $m = M_0/n$ ，其中 M_0 为整个系统的总质量。

问题 88

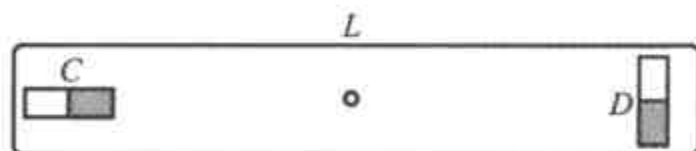
从一个半径为 R 的球形行星发射并返回火箭，要求返回时其速度矢量与发射时的速度矢量平行。行星表面发射和返回点处的半径间夹角为 θ 。如果绕行星表面运行的卫星周期为 T_0 ，求火箭的飞行需要多长时间？火箭离开行星表面的最大距离是多少？考虑一下你的答案是否适用于 $\theta \rightarrow 0$ 的极限情况。

问题 89**

两个相同的、磁矩为 μ 的小磁针粘在长度为 L 的木棍两端，一个标为 C ，与木棍平行；另一个与木棍垂直，标为 D ，如图所示。

(i) 请说明两个小磁针相互之间的作用的力偶不是大小相等、方向相反。

(ii) 忽略地球本身的磁场，定量地解释一下如果整个系统从重心位置悬挂起来将会怎样。



问题 90

一个质量为 m 、带电量为 q 的点电荷约束在一个很大的固定金属板上方很近的位置，当它们之间的距离为 d 时释放点电荷。请问这个带电质点到达金属板需要多长时间？重力的作用忽略不计。



问题 91*

一个直径 1 cm、总带电量 10^{-8} C 的均匀带电塑料球，用一根绝缘线绳悬挂起来，其最底端与一个盐水容器的水面相距 1 cm。结果我们看到，小球下面的水面涌起了一点。

请给出水平面涌起的高度，计算过程中可忽略水的表面张力，并且取盐水的密度为 1000 kg/m^3 。

问题 92

在一个薄的金属球壳内放置一个静止的点电荷，但点电荷不在中心位置。作用在点电荷上的力为多大？

问题 93

硼原子的原子量为 $A=10$ ，它与一束速度相同（非相对论速度）方向相反的未知粒子在加速器中相向对撞。硼原子最大的散射角为 30° ，请问构成粒子束的是何种原子？

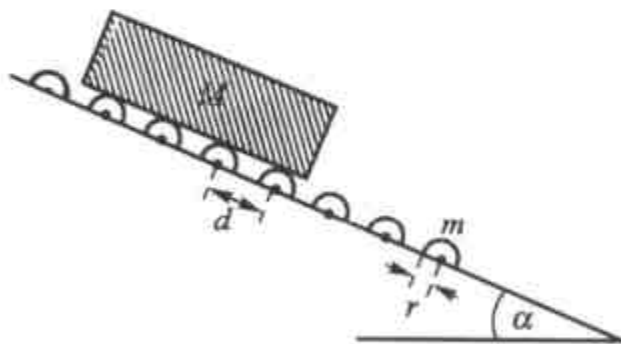
问题 94

一个无滑滚动的台球正面撞上一个同样的静止台球，请分析碰撞后两个球的运动。证明两球的终态和两球之间或球与桌面之间的滑动摩擦系数无关。（滚动摩擦可以忽略不计。）

问题 95*

在一个倾角为 α 的斜面上镶嵌着许多同样的滚筒，相邻滚筒间的距离为 d 。滚筒沿水平方向放置，为质量 m ，半径 r 的表面覆盖橡胶的圆柱形铁棍。质量为 M 、长度远大于 d 的厚木板在斜面的顶端释放，如图。

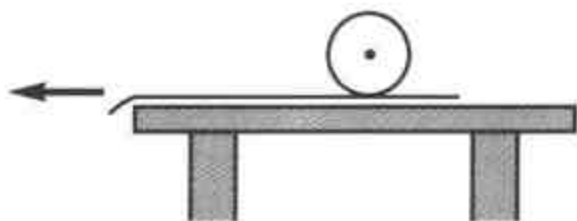
求木板的最终速度 v_{\max} ，忽略空气阻力和滚筒转轴处的摩擦。



问题 96

水平桌面上铺着一块桌布，桌布上放置一个钢球，如图所示。此时把桌布从钢球下面抽出，由于摩擦的作用球将产生滑动和滚动。

当球的运动变成无滑滚动时，其速度为多少？
（假定桌面足够大，小球不会从桌面上掉下来。）

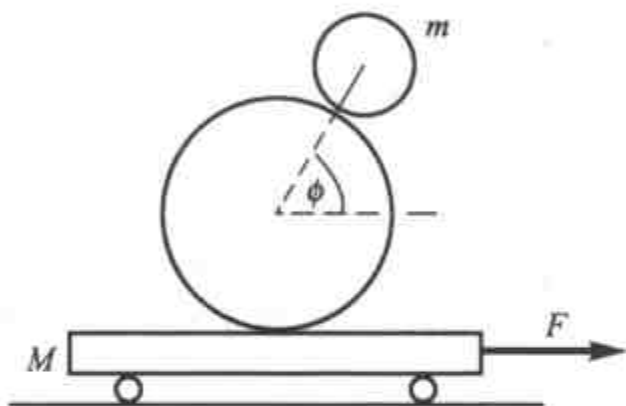


问题 97*

如果英国的交通规则由原来的左侧通行改为右侧通行，那么一天的长度是增加了、减少了还是不变？

问题 98

在一个基于物理学的杂技表演中，同样密度、半径分别为 r 和 $R = 2r$ 的两个圆球，被放置在一个质量为 $M = 6\text{ kg}$ 、长度为 $L = 2\text{ m}$ 的小车上，大球的中心位于小车的中间位置，小球的质量为 $m = 1\text{ kg}$ 。使两个球之间保持无滑滚动，并且大球相对于小车静止，同时两球心的连线与水平方向成固定角 $\phi = 60^\circ$ 。小车受到一个水平拉力，方向如图所示。



(i) 求外力 F 的大小。

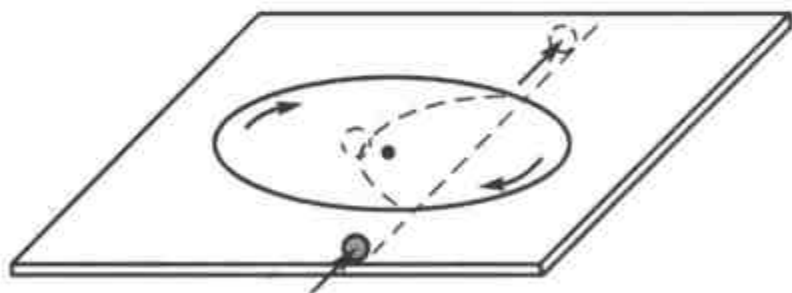
(ii) 两球经过多长时间将掉下小车？

问题 99**

在澳大利亚堪培拉的科技馆中可以看到下面的一套装置，在水平桌面的中心位置挖掉半径为 R 的一个圆盘，然后通过一个转轴重新安装到其原来的位置上。

如图，圆盘转动起来时，一个硬橡胶球在桌面上滚动。当小球到达圆盘时，将偏离其直线轨道而沿曲线运动。当小球离开圆盘时，又恢复到原来的轨迹，沿直线作无滑滚动。小球的最终速度，与初始速度相等。

分析一下，在运动过程中起作用的有哪些守恒原理？



问题 100

半径为 R 的细圆环，其材料的线密度为 ρ 、杨氏模量为 E 。当这个圆环以角速度 ω 沿其中心轴转动时，求出其周长的增量（假设非常微小）。



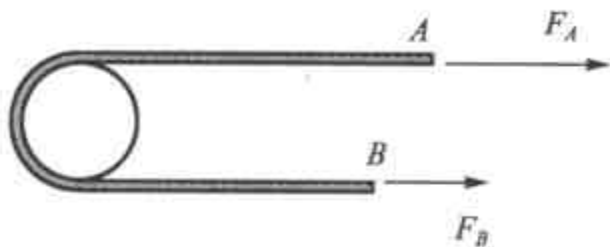
问题 101*

如图所示，一条不可伸长的轻绳半绕在固定圆柱的表面上。

作为摩擦力的结果，当两端所施加的力满足下列不等式时，绳子不会在圆柱上滑动。

$$\frac{1}{2}F_A \leq F_B \leq 2F_A$$

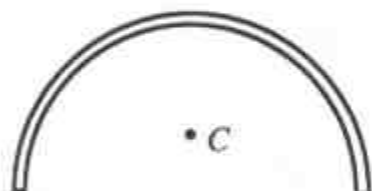
确定绳子与圆柱之间的摩擦系数。



问题 102**

查理是大学一年级学生，正在学习微积分。作为一个习题，他被要求计算如图所示一个半径为 R 的均匀半圆弧的质心位置 C 。

他的妹妹，詹妮，在上中学，正学习物理中的转动。她非常想看看哥哥的运算，但是她从来没有听说过微积分，当然很难理解这种运算了。她惟一搞明白的是这个问题本身。

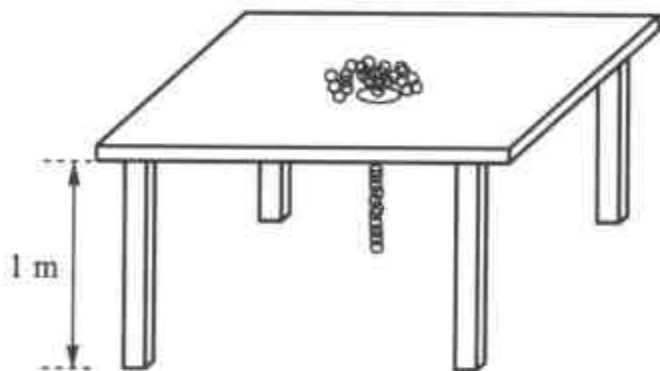


她想了一会儿，又计算了一会儿，然后大声叫起来：“我知道答案了，而且我不仅知道半圆质心的位置，还知道任意圆弧或者任意扇形的质心位置。”她是怎么做的呢？

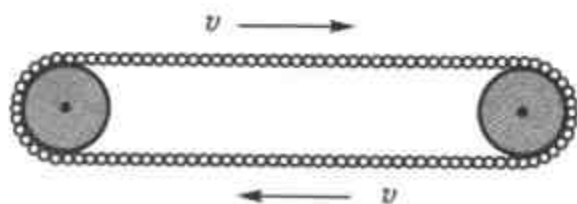
问题 103*

有一张桌子高 1 m，在其表面中间有一个洞。有一根长 1 m 的细的金项链自然地盘绕着放在洞口，如图中所示：

链条的一端被放进洞口一点点，然后松开。忽略摩擦，则其结果是，链条以不断增加的速度顺利地通过那个洞。经过多长时间链条的两端都到达地面？



问题 104*



一根可变形的、质量均匀分布的链条被紧紧绕在两个圆柱体上，其形状就像大型运动场的跑道形状一样，即，它由两个直的部分连接两个半圆形的部分而组成。圆柱体可以旋转，并且导致链条以速

度 v 运动。

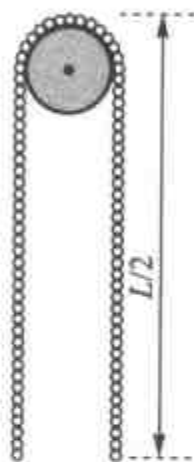
因为某种原因，链条突然脱离圆柱而滑开，并且垂直下落。请问在下落的过程中，链条的形状是如何变化的？

斯蒂夫认为，由于离心力的作用，链条取一个圆形。鲍伯接受这种观点，但是他认为由于离心力的作用，初始时的椭圆形的链条在经过圆形后还会变形，并且变为一个竖直的椭圆，其主轴与初始椭圆成适当的角度。他还预测这个过程是重复的，链条的形状会在上面的两种椭圆形之间周期变化。弗兰克猜测链条保持它原来的形状，但是对于他的猜测，他不能给出任何原因。请问谁是正确的？还是他们全都错了？

问题 105**

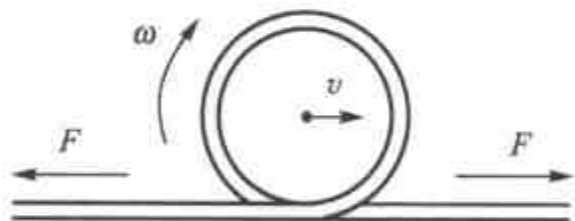
一根重的、可变形的、无弹性的长为 L 的链条被近乎对称地放在一个可以绕固定转轴旋转的轻质滑轮上面，如图中所示：

请问在链条离开滑轮的时候，它的速度是多少？



问题 106*

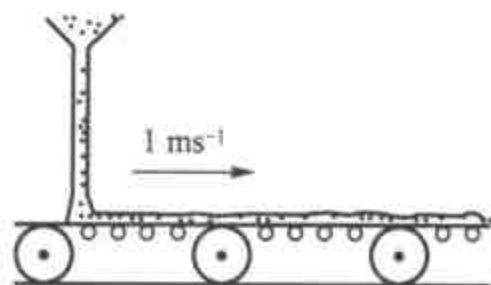
一根单位长度质量为 ρ 的、长而重的可弯曲的绳子由恒力 F 拉着伸展开来。一个突然的动作导致了在绳子的一端形成了一个环。在类似于横波传播的方式下，这个环沿着绳子以速度 v 运动（滚动），如图所示：



- (i) 计算环的速度 v 。
- (ii) 确定角速度为 ω 的环所携带的能量、动量和角动量。这些量之间有什么关系？

问题 107

沙子以 50 kg/s 的速率垂直地落在一个以 1 m/s 的速度水平运动的传送带上，如图中所示，请问带动传送带的发动机的最小的输出功率是多少？由发动机产生的功率占多大比例？

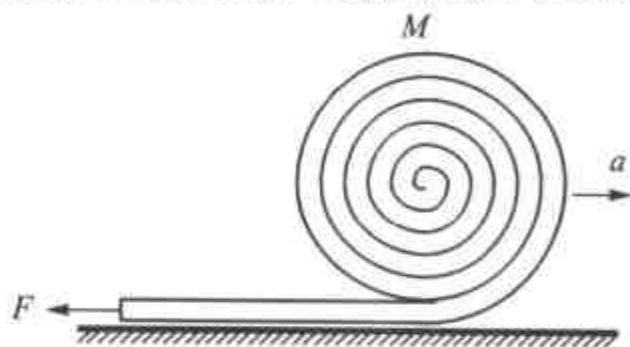


问题 108**

一根长为 L 、质量为 M 的灭火水龙带被盘绕成半径为 R ($R \ll L$) 的一卷。水龙带沿着平坦的地面以初始速度 v_0 (角速度 v_0/R) 滚动，同时，水龙带的自由端固定在地面上一点。水龙带逐渐展开成为直线。

(i) 水龙带完全展开需要多长时间?

(ii) 水龙带展开的速度不断增加, 并且其加速度 a 是一个矢量, 方向与速度的方向一致。而另一方面, 水平外力 (摩擦力加上在水龙带固定端产生的张力) 矢量合成的结果指向与加速度相反的方向。这两个事实是如何与牛顿第二定律符合的? (为了简化分析, 假设整卷水龙带的初始动能远远大于其势能 ($v_0 \gg \sqrt{gR}$), 这样, 重力的效应可以忽略。进一步设想可以认为水龙带是完全柔软的, 并且水龙带形变所需的功、空气阻力和滚动阻力都可以忽略。)



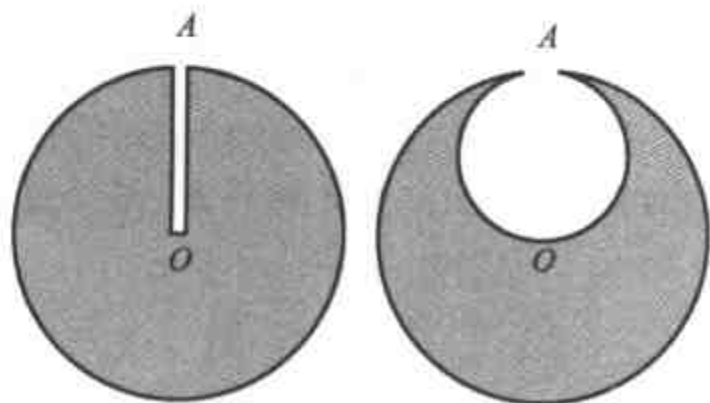
问题 109

把地球考虑为球对称的, 则地球的表面和地下 100 km 处, 哪个地方的重力加速度较大? 地球的平均密度是 $5\,500\text{ kg/m}^3$, 地壳的密度是 $3\,000\text{ kg/m}^3$ 。(地壳的厚度可以认为至少有 100 km。)

问题 110*

宇宙事件测试学会给它的一个专家发送了下面的简短报告:

一艘噬钛的小绿人的宇宙飞船发现了一个完全呈球形的小行星。从小行星的表面上 A 点到其中心的 O 点, 他们钻了一个很窄的试验用的矿井, 从而证明了整个小行星由均匀的钛组成。在表面上那一点, 突然发生了一个事件, 一个小绿人从小行星的表面掉进了试验井里。他毫无阻碍地掉了下去, 一直到达 O 点, 在那儿他因为撞击而去世了。然而, 工作仍然在继续, 小绿人们开始秘密地挖掘钛金属, 在这个过程中, 他们在小行星的内部形成了一个直径为 AO 的球形腔, 如图中所示:



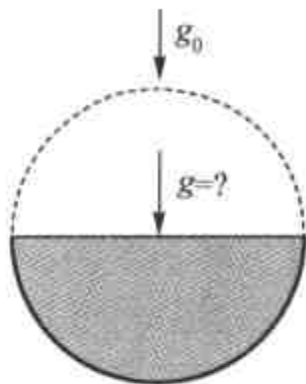
然后, 第二个事件发生了, 另一个小绿人也类似地从 A 点掉到了 O 点, 死了。

宇宙事件测试学会要求这个专家计算撞击速度的比值, 及这两个不幸的小绿人从 A 点掉到 O 点所用时间的比值。这个专家会在其答复中给出什么样的图像呢?

问题 111*

上面问题中噬钛的小绿人继续着它们的开采。它们毁灭环境的行为的结果是，不久以后，小行星的一半被开采光了，如图所示，仅仅留下了一个规则的半球体。从小行星上开采的部分被运走了。

如果原来的球形的小行星表面的重力加速度为 $g_0 = 9.81 \text{ cm/s}^2$ ，请问余下的半球的圆形表面的中心位置的重力加速度是多大？



问题 112*

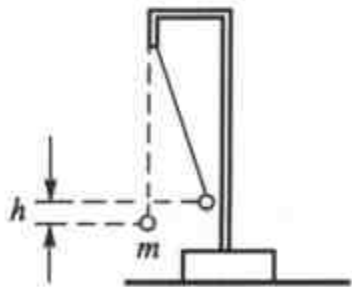
噬钛的小绿人发现了另一个质量均匀分布、半径为 10 km 的钛金属小行星。它们开始开采，并且将开采的部分运到小行星的表面。小绿人绕着小行星的赤道钻了一个宽度 1 m 的矿井，它们通过这个矿井来开采金属，直到它们将小行星完全切割成了两半。然后，事故发生了，将小行星分成两个半球体的支柱断裂了，小行星塌了下来。

宇宙事件测试学会的专家们需要计算在小行星坍塌之前，作用在支柱上的总的作用力是多少？请帮助他们。

问题 113*

一个半径为 R 的金属球，沿着一个平面被切成两部分，这个平面距离球中心的最小距离是 h ，金属球均匀带电，总带电量为 Q 。需要多大的力才能把球的这两部分合在一起？

问题 114



一个带正电的质量为 m 的小球，被一根绝缘线悬起，线的质量可以忽略不计。另一个带正电的小球从距离很远的地方缓慢地运动，直到它到达第一个小球初始的位置。结果第一个小球的相对于原来的位置升高了 h 。这个过程中做了多少功？

问题 115**

氢气以高压贮存在一个小的球形容器中。氢气被导入一个轻质气球中，因而内部压强慢慢变得与外界大气压相等。在容器处于最后的状态时，气球能够吊起这个容器吗？假定气体的温度恒为常数。

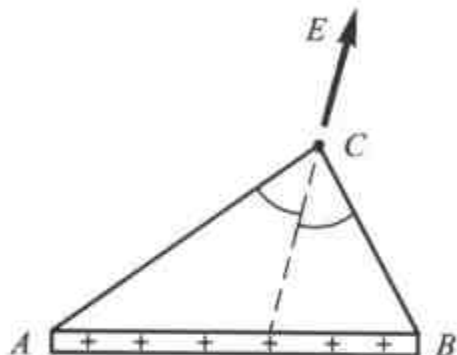


问题 116

在古时候，人们通常认为地球是扁平的。想象地球真的不是一个半径为 R 的球，而是一个厚度为 H 的无限大的盘子。如果要想体验与真正地球表面一样的重力加速度，那么需要的 H 值是多大？（假定这两种模型中地球密度均匀而且相等。）

问题 117*

电荷均匀地分布在一根细长的绝缘棒 AB 上。请说明在任一点 C 上（如图所示），由棒产生的电场方向指向沿角 ACB 的角平分线方向。



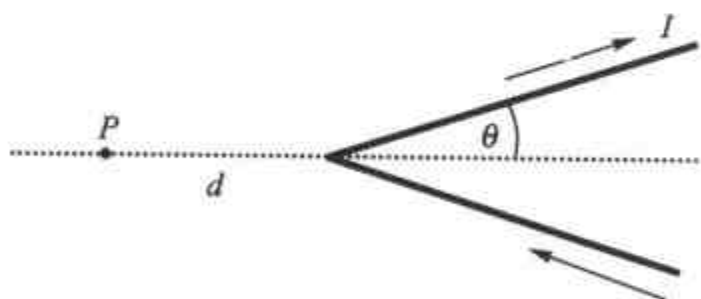
问题 118

利用上一题的结论，确定垂直于这个长的带电棒且包含它的一个端点的平面上的电场的大小和方向。

问题 119

在 19 世纪初期，荷载电流的金属线所产生的磁场无论在实验方面还是理论方面都是物理学研究的焦点。一种特别有趣的情况是一根通有恒定电流 I ，被弯成张角为 2θ 的“V”字型的非常长的导线。

根据安培的计算，对“V”字型之外、但在对称轴上且距“V”字型顶点为 d 的一点 P 的磁场强度 B ，正比于 $\tan(\theta/2)$ 。然而，对于同样的情况，比奥和萨瓦尔却指出 P 点的磁场可能正比于 θ 。实际上，他们试图通过测量小磁针的振荡周期作为“V”



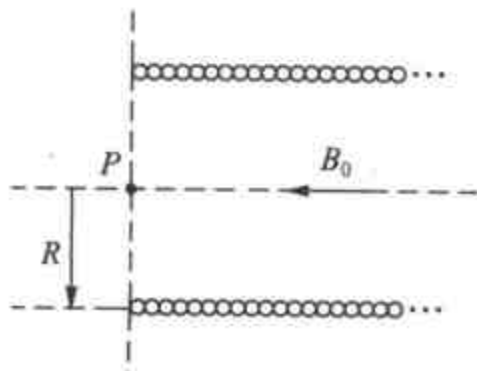
字型张角的函数来判断这两种可能性哪种是正确的。然而，对于一定范围内的 θ 值，预测的这两种情况的差别太小了以至于无法测出。

- (i) 哪个公式是正确的？
- (ii) 找出这个公式中的比例系数，并且猜测在另一种情况下最可能的因子。

问题 120**

一直流电流沿着一个长度为 L ，半径为 R ($L \gg R$) 的螺线管流动，在螺线管内部产生了大小为 B_0 的磁场。

- (i) 计算线圈末端，也就是图中所示的 P 点的磁



场强度。

(ii) 求线圈末端，也就是图中所示以 P 点为中心的半径为 R 的虚拟圆盘的磁通量。

(iii) 画出 P 点附近的磁力线。

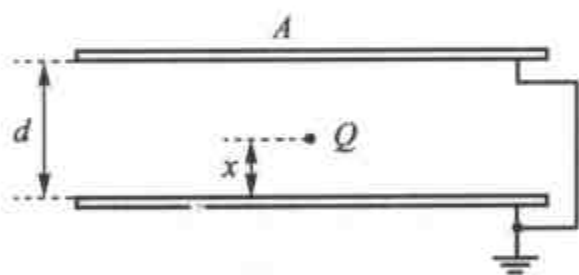
问题 121

两个平行并且靠近的绝缘板，使每个板的内表面均匀地带 $+Q$ 的电量。需要多大的力才能使这两个平行板结合在一起？

问题 122

两个平行板电容器仅仅板（很薄）间距不同；电容器 AB 的板间距为 5 mm ，其电容为 20 pF ，另一个电容器 CD 的板间距为 2 mm 。平行板 A 和 C 带电量为 $+1\text{ nC}$ ，同时板 B 和 D 每个带电量为 -1 nC 。当电容器 CD 沿中线平行滑入电容器 AB 之间且不接触到 AB 时，其电压 V_{AB} 和 V_{CD} 有什么不同？当 CD 在 A 和 B 之间但不在中心的情况下，结果会有什么不同？

问题 123*



平行板电容器两板间的距离为 d ，每个平板的面积为 A 。如图所示，电容器的两个板都是接地的，在它们之间有一个小物体带电量为 Q ，与其中一个板的距离为 x 。请问每一个板上将会积累多少电荷？

问题 124*

一个点状电偶极子被放置在上题讨论的电容器的两个接地的平板之间。偶极子的动量矢量 \mathbf{p} 垂直于板面并且距离平板的距离分别为 x 和 $d-x$ 。积聚在每个平板上的电量同 x 之间的关系如何？（忽略边缘效应。）

问题 125*

图中所示介质在一定区域： $x > 0$ ， $y > 0$ 的折射率随着 y 的变化而变化。一束细的光束沿着 x 方向垂直入射到介质表面上，并沿着一个圆弧形路径穿过介质。

请问折射率随着 y 是如何变化的？圆弧所对应的





圆心角最大可能为多大?

问题 126

一个光盘 (CD) 大约包含 650 MB 字节的信息量。用最普通的尺子估计 CD 上的 1 bit (比特) 信息的尺度大小。用一束激光证实你的估计。你能估计一个信息单位的形状吗?

问题 127

用一个 300 线/mm 的衍射光栅分析垂直入射光的一条特殊的谱线, 发现位于 24.46° 的一条线包含红色 (640~750 nm) 和蓝/紫色 (360~490 nm) 的混合成分。还有没有其他的一些角度可以观察到相同的现象?

问题 128*

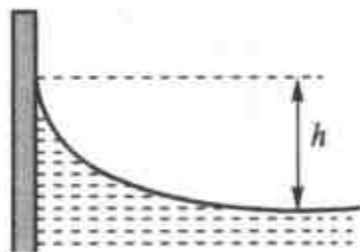
一束细的平行单色激光束垂直入射到一个衍射光栅上。当光栅绕着一个轴旋转时 ($\phi < 90^\circ$), 它在观察屏上产生的干涉花样将怎样变化?

(i) 轴平行于光栅的刻线; (ii) 轴垂直于光栅的刻线。

问题 129

两个漂浮的物体由于表面张力的作用而互相吸引, 无论它们是浮在水面上还是浮在水银上。请解释其中的原因。

问题 130*



一个干净的玻璃缸里的水形成一个凹透镜形状, 如图所示。

计算凹透镜中心和边缘的高度差 h 。水的表面张力 $\gamma = 0.073 \text{ N/m}$ 。

问题 131*

有没有可能存在一个 (球形的) 水滴, 它能够在不吸收热或不损失内 (热) 能的情况下蒸发?

问题 132**

在一个密闭容器中有各种大小的液滴, 液体不依附在容器壁上。经过足够长的时间, 发现最小尺度的液滴变得更小了, 同时较大尺度的液滴变得更大了, 直到最后容

器中只剩下一个大的液滴。怎样解释这种现象？

问题 133

一个水平的无摩擦活塞，其质量和热容可以忽略，将一个垂直的绝缘柱状容器分成两半。柱状容器的每一半包含 1 mol 标准温度和压强 p_0 下的气体。如图所示，现在一个重量为 W 的重物悬挂在活塞上。它将活塞拉下，经过几个回合的振荡后停止下来。当 W 很大时，气缸下部分的压缩气体最终占据多大的体积？



问题 134*

在地球上，可能的最高的山脉能够有多高？火星上的呢？

问题 135**

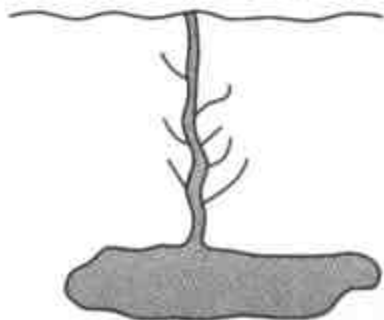
一个高为 152 cm 的下半部封闭的直玻璃管中充满了空气。它的上半部是水银并且玻璃管的顶部是敞开的。气体被缓慢地加热，到所有的水银被推出管子外面时传递给气体的热量是多少？画图表明在这个过程中封闭气体的摩尔热随它的体积是如何变化的（大气压是 760 mm 汞柱）。

问题 136

火山现象在冰岛是很常见的，但是冰川覆盖了其面积的 11% 。这就是冰川下的火山爆发也会经常发生的原因，如同 1996 年 10 月在欧洲最大的冰川瓦特纳约库下面发生的情况。在火山爆发的地点，冰川厚度有 500 m ，而且冰川是比较光滑和平坦的。在经过一天的火山活动之后，火山爆发的显著标志是在冰帽的表面上出现一个很深的盆状凹坑，形状如同一个深度 100 m 、直径 1 km 的倒立圆锥。请解释这个凹坑的形成。当时，在冰的凹坑下面将会看到什么情况？试图预言一下后面发生的事情。

问题 137*

在黄石国家公园，最著名的间歇喷泉是老实泉喷泉。这个间歇喷泉可以看做一个很大的地下空穴，并且有一个很窄的通道通到地表。作为残余火山活动的结果，喷泉周围的地是热的，并将空穴内的水煮沸。在达到沸腾之后，窄通道内的水喷涌而出，在 4 min 之内，约有 44 t 的水蒸气喷出喷泉。喷射之后，地下的泉水在 $20 \sim 30 \text{ min}$ 之内会重新填满空穴和窄通道使水位达到地面，上面的情况会重复自身的过程。喷泉每隔 90 min 喷发一次。



地质实验表明在这个地区地下深度每增加 1 m, 温度升高 1°C , 这就确定了地下空穴所处的最小深度。如果认为空穴处于这个最小的深度处, 那么它的容积有多大?

问题 138

在一个大的湖面上方的空气温度为 -2°C , 同时湖水温度为 0°C 。假设只考虑温度条件, 应用下面所给的数据, 估计在湖面上形成一个 10 cm 厚的冰层需要多长时间。
数据:

水的热导率	$\lambda_w = 0.56 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$
冰的热导率	$\lambda_i = 2.3 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$
冰的熔解热	$L_i = 3.3 \times 10^5 \text{ J/kg}$
水的密度	$\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$
冰的密度	$\rho_i = 920 \text{ kg/m}^3$

问题 139

如果解冻一只 5 kg 的火鸡需要两天时间, 那么估计一下, 要使一头重 8 t 的西伯利亚猛犸解冻需要多久。

问题 140*

将一块温度为 -10°C 、质量为 0.6 kg 的冰块放入一个 1 m^3 的密闭空容器中, 容器温度也是 -10°C 。然后, 将容器温度升高到 100°C 。相对于只将空的容器升高到这个温度所必需的热量, 需要的热量增加了多少?

问题 141*

一个有坚固器壁的容器一半充着水, 另一半充着空气。空气的初态为标准温度标准压强。容器是封闭的并被缓慢加热。容器中的水什么时候开始沸腾? 当温度升高时, 水以何种状态存在?

问题 142

在温度 T 下, 玻璃橱窗中有两个长度均为 l 、处于张力 F 下的蜘蛛网。由于受到空气分子的冲击而随机振动。如果网 A 的质量是网 B 质量的两倍, 这些运动的振幅比值是多少?

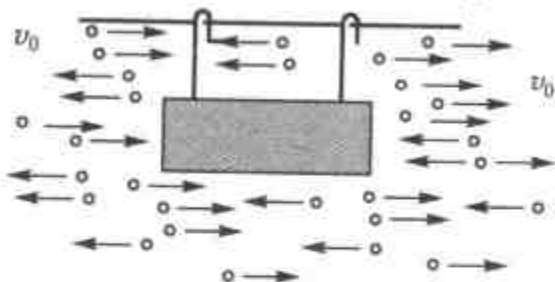
问题 143

夜间的户外, 经常有水蒸气聚集在蜘蛛网上, 我们可以在上面看到非常小的相同

的水滴组成的周期性的线。找出这些水滴之间的最小距离。

问题 144*

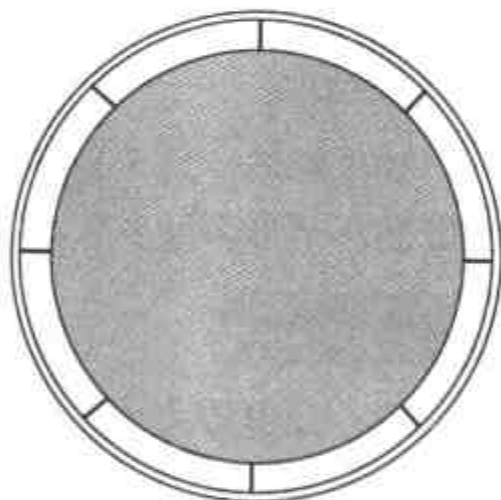
设想有一个圆柱体，它可以沿平行于其对称轴的直线无摩擦地运动。如图所示。微小的粒子以速度 v_0 水平地运动，从左侧和右侧均匀地冲击柱体。圆柱体右端的碰撞是完全弹性碰撞，而圆柱体左端的碰撞是完全非弹性碰撞，尽管碰撞过后粒子不粘附在柱体上。问在下列情况下，圆柱体的速度会是什么样？



(i) 在一段较长时间之后；(ii) 在一段非常长的时间之后。

问题 145

一个全部黑色的球形空间探测器位于距离太阳系很远处。由于位于探测器内部的强度为 I 的核能源的加热作用，探测器表面温度为 T 。现在探测器被封闭在一个薄的热防护罩中，防护罩两边均为黑色并且通过几个绝缘棒附着于探测器表面。试确定探测器新的表面温度；若使用 N 个这样的防护罩，也来确定一下表面的温度。



问题 146*

两个绝热容器中盛放着相同质量的水。其中一个容器中的水的温度是 T_1 ，而另一个容器中水的温度是 T_2 ($T_2 > T_1$)。当这个系统被用来做热机时它能做的功最大是多少？在整个做功过程中认为水的比热是常数。

问题 147

同样处于标准状态下 ($T \approx 273 \text{ K}$ 和 $P \approx 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$) 的 2 mol 氮气和 3 mol 氧气，它们的位置是相邻的，如果移走它们之间的隔板使它们相互混合，这时熵的变化是多少？

问题 148

缓慢地向 10 L 的容器中充气，容器中的压强增加到 10 倍的大气压。如果泵中活塞位移对应的体积是 1 L ，那么在这个过程中做了多少功？容器和泵的器壁都是好的热导体，因此可以认为温度是常数。



问题 149

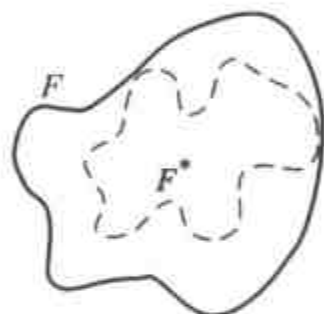
与地球电势相比，一个遥远的行星具有非常高的电势。从地球上发射了一艘金属制的太空飞船想要降落在该行星上。这个任务危险吗？当宇航员打开太空飞船的门，踏上这个行星表面时会发生什么样的情况？

问题 150

当一个球形电容器的表面如图所示凹进去，以致它的体积减少了 3% 时，它的电容量将变化多少个百分点？



问题 151*



一个封闭体，它的表面 F 是由金属箔做成的，相对于“无穷远”其电容为 C 。现在箔表面凹进，新的表面 F^* 完全在原表面的内部或者在原表面上，如图所示。

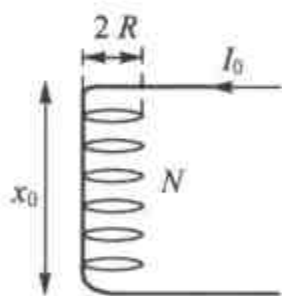
证明变形体的电容小于 C 。

问题 152

平行板电容器的面积为 A ，初始时两板间隔为 d 。两板与电压 V_0 相连接。如果要把电容器的两个极板拉开到 $2d$ ，需要做多少功？在这个过程中，电容器的能量改变了多少？

问题 153*

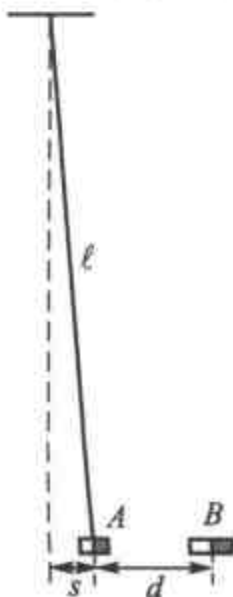
有一个 N 匝的螺旋状弹簧（如图所示），半径为 R ，长度为 x_0 ，弹性系数为 k ，当电流 I_0 流过弹簧时，弹簧的长度改变了多少？



问题 154*

一个非常短的磁铁 A ，质量为 m ，被一根长度为 $l = 1 \text{ m}$ 的线水平地悬挂着。移动另一个非常短的磁铁 B 慢慢地靠近 A ，保持磁铁的磁极相互之间始终在同一水平线上。当两个磁铁间的距离为 $d = 4 \text{ cm}$ 时，磁铁 A 离初始位置的距离为 $s = 1 \text{ cm}$ ，磁铁 A 自发地吸引移动向 B 。

(i) 磁铁间的相互作用力和距离的关系为 $F_{\text{magnet}}(x) = \pm K/x^n$ ，正负号取决于两个磁铁磁极的相对指向。用给定的数据，找到系数 n 的值。



(ii) 磁铁 B 被放在一个垂直放置的玻璃管里，玻璃管的下端是封住的。磁铁 A 也放入玻璃管中，在 B 的上面，并使得两个磁铁相互排斥。磁铁 A 在玻璃管中有掉转方向的趋势，但由于玻璃管的限制，不能反向。求出两个磁铁静态平衡时所分开的距离。

问题 155

一个电池组包含 N 个相同的电池，每个电池的电动势为 \mathcal{E} 。当使用这个电池组连接一个电阻来给一个电容充电时，分 N 步来给电容充电的方法真的能减少能量的损耗吗？分 N 步充电的方法也就是先连接电容和一个电池充电，然后连接两个电池继续充电，这样一直到连接 N 个电池充电，而不是一次使用整个电池组给电容充电。

问题 156

一个“能量产生装置”，包括一个平行板电容器，两个极板的空间几乎充满了相对介电系数为 $\epsilon > 1$ 的油。计算当两极板带电量为 $\pm Q$ 时，电容器所储存的能量。两极板中间的油不能直接接触极板。现在，把油移出来，使得空气充满两极板的中间，这时重新计算储存的能量，可以看到能量增加了。试解释这一现象。

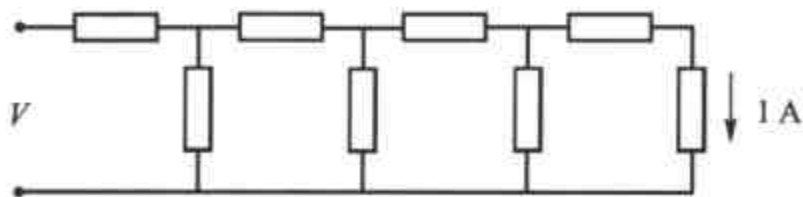
问题 157

相对介电系数为 ϵ_r 的绝缘层慢慢地滑过平行板电容器的两个极板中间，并完全充满两个极板间的空间。如果电容器的 (i) 电量，或 (ii) 电压在整个过程中保持不变，问有多大的力作用在绝缘层上？

在情况 (i) 和 (ii) 中，绝缘层是如何影响电容的能量的？

问题 158

如图，一个有限电阻链上的每个电阻都为 1Ω 。流过最后一个电阻的电流为 1A 。

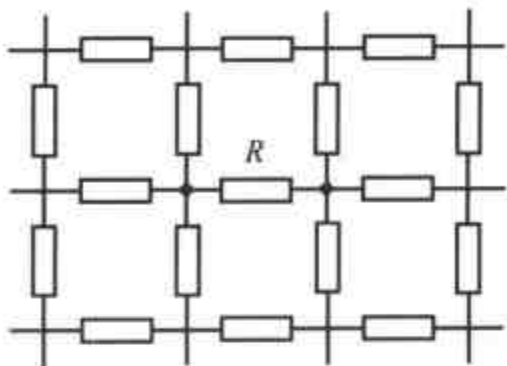


问电阻链的输入端的电压为多少？电阻链的等效电阻是多大？如果再增加一个或两个电阻，等效电阻如何变化？把所得到的结果和“无穷长”链的等效电阻做比较。

问题 159

如图所示，在“无穷大”格子中的所有元件有相同的电阻值 R 。问相邻的两个格点之间的等效电阻是多少？

如果把格子中的所有元件都换成电容为 C 的电容器，那么相邻的两个格点之间的等效电容是多少？如果格子中的所有元件都是电感系数为 L 的电感，那相邻的两个格点之间的等效电感是多少？



问题 160*

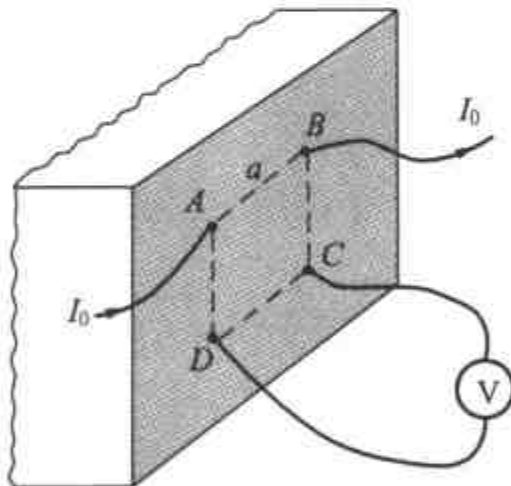
一个格子形状为规则多面体（如正四面体，正六面体，正十二面体等等），由许多相同的 $1\ \Omega$ 电阻组成。问两个相邻格点之间的等效电阻是多少？

问题 161

前面的两个问题都是关于含有相同电阻的电学网络的计算（无穷大格子或规则多面体）。如果连接相邻两个格点的电阻被移走，试找到相邻两个格点之间的等效电阻？

问题 162*

一个平面把空间分为两个部分。一半充满了均匀的导电介质，而物理学家在另一半空间里工作。他们在平面上画出一个边长为 a 的正方形的轮廓，并用精细的电极使一电流 I_0 在正方形的两个相邻角，一个流入一个流出。同时，他们测量另两个角之间的电势差 V 。如图所示。问物理学家们如何用这些数据来计算均匀介质的电阻率？



问题 163*

给你一个很大而又复杂的电路，其中包含许多电阻和其他的无源组件，希望测出电路中某个特定电阻的阻值而不把它分离出来（即，不把它从电路中拿出来）。现在提供一个电池组、一个安培表、一个电压表，它们的质量都很好。你怎样来进行测量呢？

问题 164*

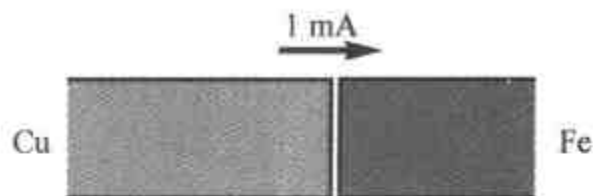
一个立方体，每条边都是 $1\ \Omega$ 的电阻。问立方体的体对角线的两个端点之间的等

效电阻为多少?

考察一下一维, 二维和四维的“立方体”。试找到一个 n 维的普适公式。

问题 165

1 mA 的电流流过一根导线, 导线的一段是铜一段是铁, 两部分以相同的截面积焊接起来, 如图所示。



在两种金属的边界上, 有多少电荷积累起来? 对应于多少基本电荷?

问题 166

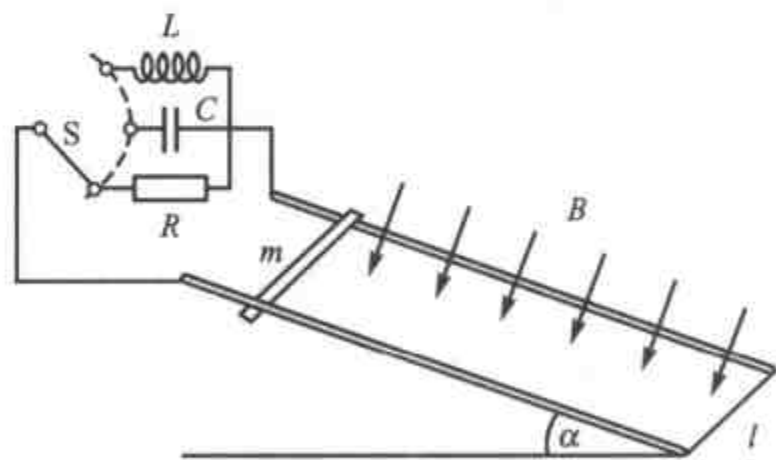
地球的磁场可近似为偶极子的磁场, 在北极磁感应强度为 $6 \times 10^{-5} \text{ T}$ 。在伦敦上方, 磁感应强度为 $5 \times 10^{-5} \text{ T}$, 磁倾角为 66° 。

巨型喷气机的翼展为 80 m, 机身全长为 60 m, 高度为 8 m。当飞机以 720 km/h 的速度在下述各处水平飞行时, 估计一下在它表面所能测得的电势差:

- (i) 在北极上方;
- (ii) 在赤道上方朝北;
- (iii) 沿赤道向东;
- (iv) 伦敦上方朝向西北。

问题 167

一个磁感应强度为 B 的均匀磁场, 垂直于一轨距为 ℓ 的导轨, 轨道与水平面有 α 的倾角。一根无摩擦的导体棒, 质量为 m , 横跨在两根铁轨上, 如图所示。



如果由导体棒和轨道组成的电路在以下几种不同情况下被闭合, 当从静止开始放开导体棒后, 棒将会如何运动呢?

- (i) 一个阻值为 R 的电阻;
- (ii) 一个电容为 C 的电容;
- (iii) 一个电感为 L 的线圈?

问题 168*

一轨距为 ℓ 的水平导轨, 其电阻可以忽略, 导轨一端与一个电容为 C 、所充电压为 V_0 的电容相连接。该装置的电感可以忽略。整个系统放入均匀的竖直的磁感应强

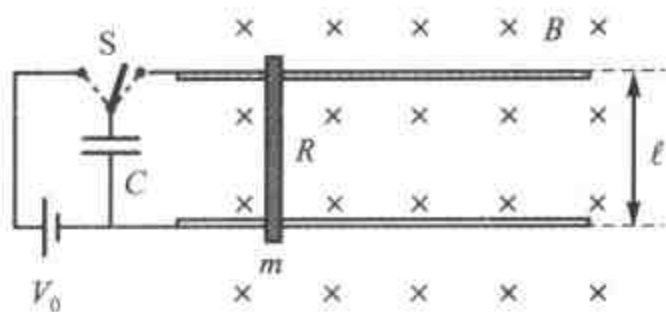


度为 B 的磁场中，如图所示。

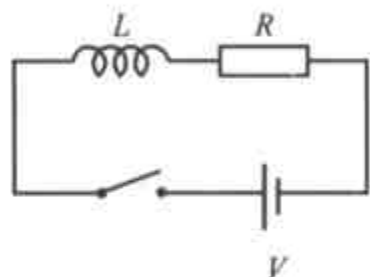
一根无摩擦的质量为 m 电阻为 R 的导体棒垂直于轨道放在导轨上。电容的极性选择令导体棒当开关翻转时与电容相排斥。问

(i) 导体棒的最大速度是多少？

(ii) 在什么样的情况下，这个“电磁枪”的效率达到最大？



问题 169



一个电阻和一个电感串联，并通过一个开关连接到一个电池上。

当开关闭合以后，问：

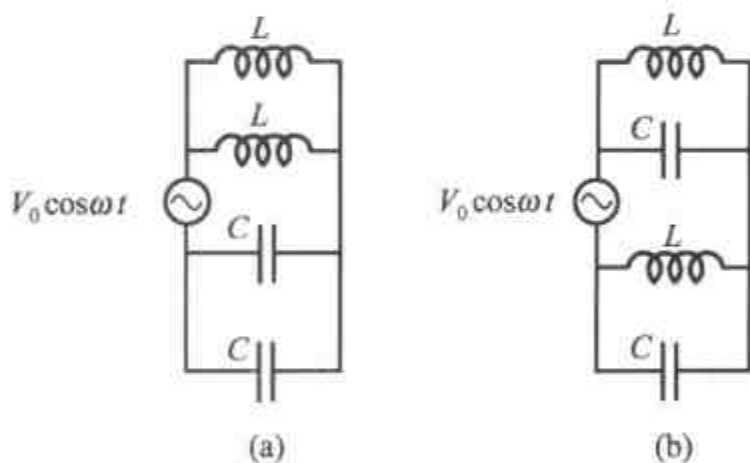
(i) 当线圈里所储存磁场能的增长率最大时，流过它的电流是多大？

(ii) 什么时候电阻损耗的焦耳热以最快速率变化？

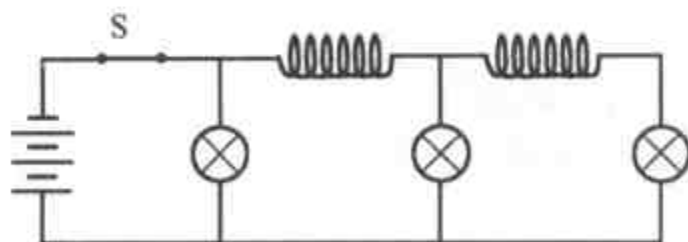
问题 170*

(i) 定性画出图中两个电路中从电源汲取的电流的大小作为 $x = \omega / \omega_0$ 的函数，其中 $\omega_0 = (LC)^{-1/2}$ 。

(ii) 用图 (a) 中三个或更多的元件，组成 5 个新的电路，每个都表现为电流共振（在某个频率能从电源汲取的最大电流），振动频率不同。



问题 171*



图中所示的电路包括三个相同的灯泡和两个线圈，连接到一个直流电源。线圈的电阻可以忽略。

过了一段时间，开关 S 打开。问之后的瞬间三个灯的相对亮度如何？

问题 172

螺线管的圈数是为了提供一个给定的沿其轴线的磁感应强度而设计的，它充满了两个固定半径的同心圆筒之间的空间。如何选择所使用的直径 d 而使得线圈的热损耗

最小?

问题 173*

一个固体金属圆柱体以角速度 ω 绕它的对称轴转动。圆柱体处于与它的轴线平行的均匀磁场 B 中。圆柱体中的总的电荷分布是怎样的? 是否存在一个角速度使得电荷分布处处为零?

问题 174*

在固定在圆柱体上的转动参考系中, 考虑前一个问题的结果。在这个转动参考系中描述电场和磁场。

(假定转动的角速度远远小于回旋频率 $\omega_0 = eB/m$, 其中 e 和 m 分别是基本电荷和电子质量。)

问题 175*

36

杰克和吉尔被安排了与问题 173 类似的任务。他们要计算当在一个均匀磁场中转动时, 在一根金属的自行车辐条上, 而不是一个金属圆柱体中, 形成的电荷分布。辐条绕垂直于它一端的轴转动。

吉尔知道问题 173 的解, 她简单地运用了它。忽略了电子质量, 她得到电荷密度为 $\rho = 2\epsilon_0 B\omega$ 。杰克的解则是基于一根自行车辐条是一根细长的金属棒的事实; 因此他把这个问题考虑成一维的。在距离转动轴 r 处的感生电场为 $E(r) = rB\omega$ 。

截取一段很短的长度为 Δr 的自行车辐条, 运用高斯定律, 杰克得到电荷密度为: $(\rho/\epsilon_0)A\Delta r = \Delta EA = B\omega\Delta r \times A$, 其中 A 为辐条的横截面。从方程他得出: $\rho = \epsilon_0 B\omega$, 这只有吉尔所得值的一半。

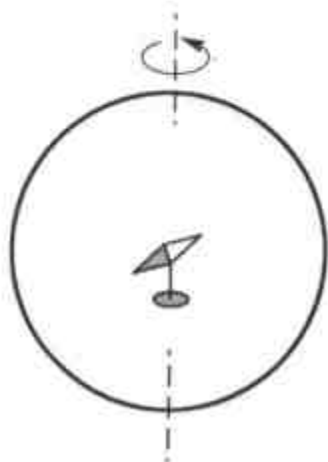
评论这两种不同的结果。

问题 176

一个半径为 $r = 0.1 \text{ m}$ 的金属圆环以恒定的角速度绕竖直的直径转动。如图所示, 一个可自由地绕竖直轴转动的小磁针放置在圆环的中心。

当圆环静止时, 磁针指向地球磁场的水平分量的方向。然而, 当圆环以每秒 10 转的速度转动时, 磁针从它原先的位置平均偏离了 2° 。

问圆环的电阻 R 是多少?



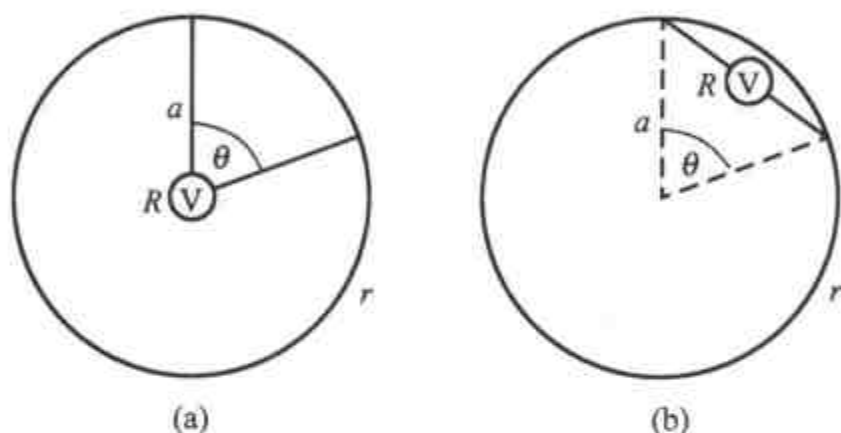


问题 177

把一根长度为 $2\pi a$ ，电阻为 r 的均匀细导线的两端连接起来形成一个圆圈。一个电阻为 R 的小电压表由电阻可以忽略的铅连接到导线圈的圆周上的两点，角间距为 θ ，如图所示。

一垂直于导线圈平面的均匀的磁场流密度，以速率 \dot{B} 变化。问如果电压表放在下面的位置，电压表上的示数将会是多少？

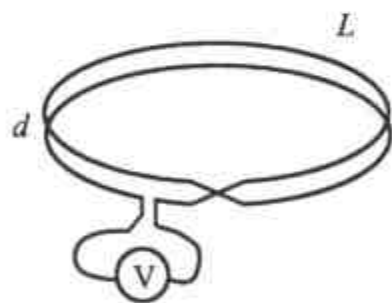
- (a) 在导线圈的中心；
- (b) 在连接两个接点的弦上。



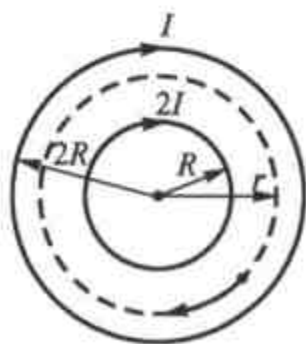
问题 178*

一个“扭转”的环状带子（称为莫比乌斯带）是由长度为 L ，宽度为 d 的纸条制成。一根导线沿纸带的边缘绕了一圈，并连接到一个电压表上，如图所示。

当把纸带放入一个均匀的垂直于纸带所在面的磁场中，且磁场随时间均匀变化，即 $B(t) = kt$ ，电压表记录的数据为多少？



问题 179



一个长的螺线管包括了另一个同轴的螺线管（它的半径 R 是外面螺线管的一半）。它们的线圈单位长度具有相同的圈数，且初始时都没有电流。在同一瞬间，电流开始在两个螺线管中线性增长。在任意时刻，里边的螺线管中的电流为外边螺线管中的两倍，它们的方向相同。由于增长的电流，一个初始静止的处于两个螺线管中间的带电粒子，开始沿着一根圆形的轨道运动（见图）。问圆的半径 r 为多少？

问题 180

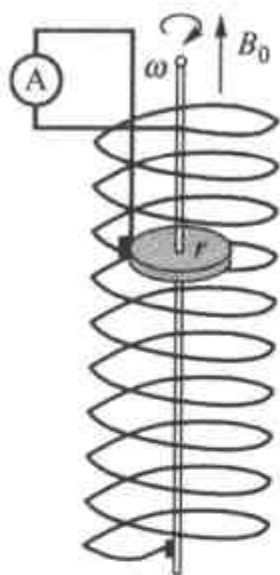
电荷 Q 均匀分布在一个质量为 m 的细绝缘圆环上，圆环初始处于静止状态。当打开一个垂直于圆环平面的磁场 B 时，圆环的角速度会加速到多大？

问题 181*

一个半径为 r 的金属圆盘可以近似无摩擦地在一个长而直的线圈中，绕一根平行于线圈对称轴的杆转动。构成线圈的导线的一端连接到圆盘的边缘，另一端连接到杆上。线圈的电阻为 R ，每单位长度有 n 圈。它被恰当地放置使得它的对称轴和地球磁场矢量 B_0 平行。

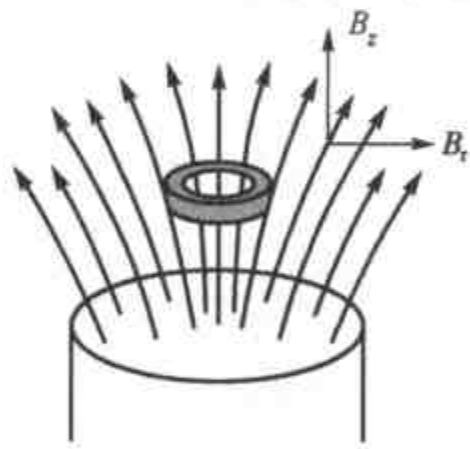
如果圆盘以角速度 ω 转动，那么流过图中电流表的电流为多少？对两个转动方向，画出电流作为 ω 的函数关系。

证明使圆盘转动所需要的功率等于线圈的电阻焦耳热的产生率。



问题 182*

一个细的超导（零电阻）圆环放在竖直的圆柱形磁棒上面，如图所示。圆环的对称轴与棒的对称轴相同。在圆环周围的圆柱形对称的磁场可以近似地用磁场矢量的竖直和径向分量 $B_z = B_0(1 - \alpha z)$ 和 $B_r = B_0 \beta r$ 表示，其中 B_0 、 α 和 β 是常数，而 z 和 r 分别是竖直和径向的位置坐标。



初始时，圆环中没有电流。当它被放开开始向下运动时，保持它的轴仍为竖直。从下面的数据确定，圆环随后如何运动？圆环中的电流是多少？

数据：

圆环的性质：

质量 $m = 50 \text{ mg}$
 半径 $r_0 = 0.5 \text{ cm}$
 电感 $L = 1.3 \times 10^{-8} \text{ H}$

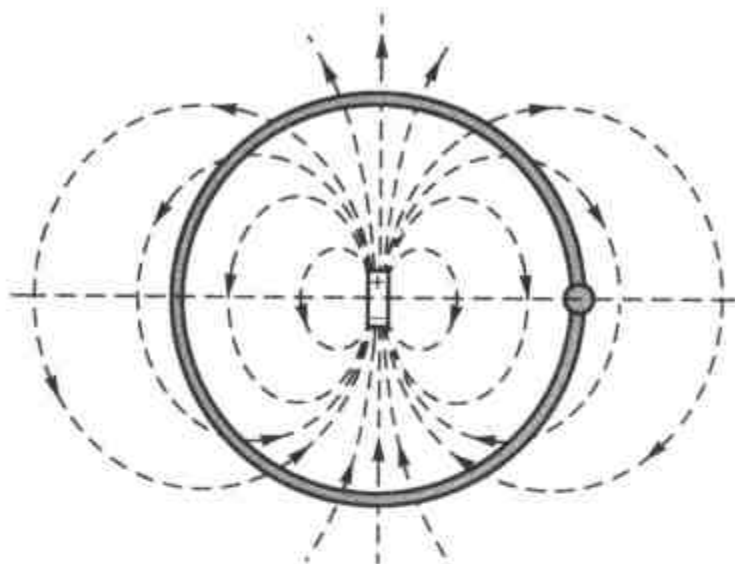
圆环中心的初始坐标：

$z = 0$
 $r = 0$

磁场常数：

$B_0 = 0.01 \text{ T}$
 $\alpha = 2 \text{ m}^{-1}$
 $\beta = 32 \text{ m}^{-1}$

问题 183*



一个带电的小珠子可以在一个无摩擦的绝缘的圆环上滑动。一个近似点的电偶极子固定在圆环的中心，电偶极子的轴处于圆的平面内。初始时，珠子位于电偶极子的对称面上，如图所示。

珠子被释放后会如何运动？找出作用于珠子上的支持力。珠子在释放后的第一次停止会在哪里？如果没有环，珠子会如何运动？忽略重力效应，假定电场力远远大于重力。

问题 184*

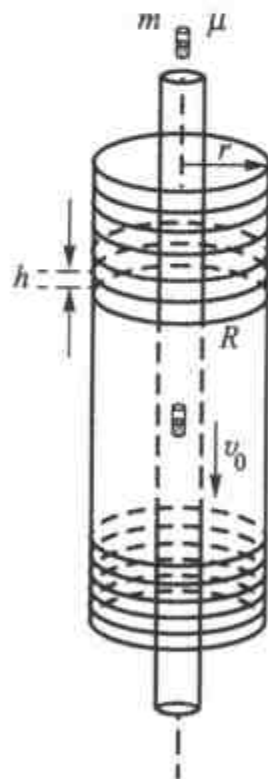
一个质量为 m 电量为 Q 的点状物体，初始静止，在一个均匀的重力场中被释放。如果它同时也被一个均匀的水平磁场所作用，问它会沿什么样的路径运动？

问题 185*

一个细而长的竖直玻璃管被一个远远比它粗的外径为 r 的同轴玻璃管所包围。有许多离散的圆形导体环绕在粗玻璃管的外边，每个圆环电阻为 R ，离散的距离为 h 。

如果一个质量为 m ，磁距为 μ 的小磁棒掉入了细玻璃管，在相对较短的时间后，它到达了一个恒定的最终速度 v_0 后，以这个速度匀速下落。

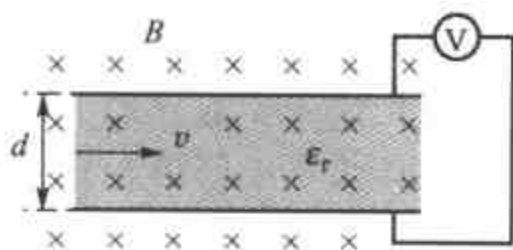
在接下来的研究中，五个提到的量 (m, μ, h, R, r) 中只有一个加倍，而其他四个保持原来的值。在每种情况下，磁棒的最终速度以什么因子改变呢？忽略力学摩擦和空气阻力，以及导体环的自感和互感效应。



问题 186*

在一个真空箱中，10 A 的电流流过一根具有很高电导率的长的直导线。初始速度为 v_0 的电子垂直于导线从距导线的径向距离为 r_0 的一点开始运动。已知电子不能比 $r_0/2$ 更靠近导线，试确定 v_0 。忽略地球磁场的影响。

问题 187*



一个初始时未充电的电容的两个极板之间的距离为 d 。有一个磁感应强度为 B 的磁场，平行于电容的极板，如图所示。

当一电中性的相对介电系数为 ϵ_r 的液体以速度 v 流过两个极板之间时，连接到电容的两个极板间的电压表的读数是多少？

问题 188

如果铀核分裂成三块而不是两块的话，铀核裂变所释放的能量会更高。尽管是这样，铀核的分裂只会分成两个核。为什么会这样呢？

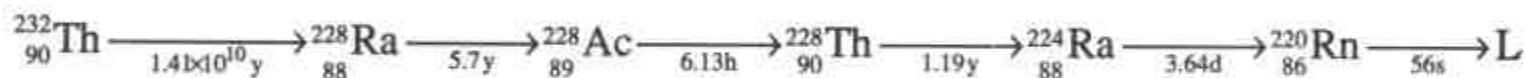
问题 189*

40

${}^7\text{Be}$ 是放射性元素，半衰期为 53.37 天。当铍的同位素 ${}^7\text{Be}$ 加热到几千度的高温时，它的半衰期改变了。如何解释这个现象？

问题 190*

由钍-232 的衰变产生的部分同位素序列，以及相应的半衰期，在下面给出：



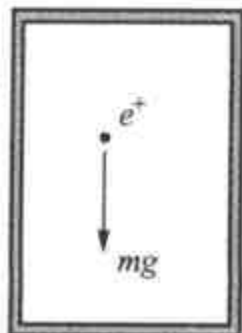
从矿石中提取出平衡态的钍-232 和钍-228，并通过化学过程来提纯。画出在 10^{-3} kg 的这种材料中，氡-220 的原子个数在从 10^{-3} 到 10^3 年的范围（对数的）中，你所预期的变化趋势简图。

问题 191

如果质子撞击静止的质子时能够产生质子-反质子对，那么质子要通过多大的电压来加速？一个质子的静止质量的能量近似为 1 GeV 。

问题 192*

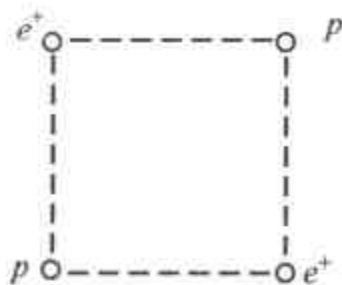
如果一个正电子在法拉第电笼中无初速地“落下”，那么它会如何运动呢？把正电子看做是经典粒子，受到电场力和地球重力，如图所示。



问题 193*

两个正电子放在边长为 $a = 1 \text{ cm}$ 的正方形的相对的角上。正方形的另两个角各放了一个质子，如图所示。

初始时，粒子保持在这些位置，所有四个粒子同时释放。当它们相互分开得非常远时，它们的速度为多少？粒子可以看做是在其他粒子的电场中运动的经典质点。重力可忽略。



问题 194

在开普顿散射实验中，静止的电子被能量等于一个电子静止质量的光子轰击。对于散射的光子和反冲的电子有相同大小的动量情形，找到它们之间的夹角。此时反冲电子的速度是多少？

问题 195

X 射线光子被初始静止的电子以 90° 散射。光子的波长变化了多少？

问题 196

想象一个“经典的电子”为一个小圆球。如果它的静电能不大于总的静止能量 mc^2 ，它的最小半径为多少？如果它的角动量为 $h/(4\pi)$ ，它的角速度为多少？如果总的电子的静止能量由静电场提供，那么对应的它的“赤道速度”要到达多少？

问题 197*

一个电子被装在大的长方形的箱子中。估计由重力效应产生的被电子所占据的层（在箱子的底部）的厚度的数量级。

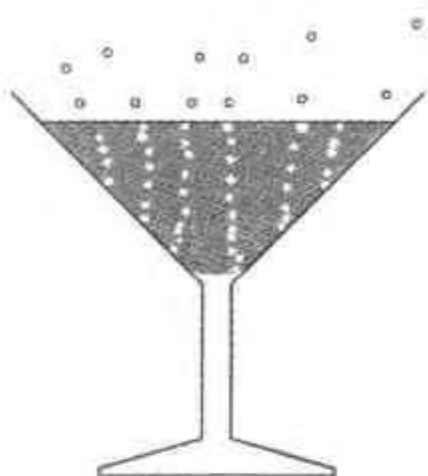
问题 198*

经典地，一个原子核的库仑场可以把一个电子束缚在核周围。然而，海森伯不确定原理预言对一个电子如此高的动能限制在这么小的空间里，以至于它可以在任何情况下逃离原子核。对一种超铀元素，把一个电子限制在核周围并维持相当长的时间，若元素自身足够稳定，需要多大的原子序数？

问题 199*

如何用水的表面（毛细）波的速度和水中声波的速度来估计水分子的大小？波长为 1 cm 的表面波的传播速度近似为水中同样波长的声波速度的 $1/10000$ 。

问题 200



祝贺你，亲爱的读者！你已经到达了本书的最后一个问题，祝贺你们的最佳方法就是为你的健康喝一杯香槟。很遗憾，这种赞赏无法实现——不过我们至少可以在最后选一个关于香槟的问题

香槟中的气泡大家很熟悉。它们几乎都是在香槟杯中的一些特定点形成的，并会从这些点越来越快地上升。为什么香槟中的气泡会加速呢？

200 道物理学难题



提 示



**提示 1**

将蜗牛的速度矢量在适当的坐标系内分解，有多种分解的途径，从而会导致不同的解法，各种解法最终都得到相同的答案。路径的方程可以通过极坐标中速度的表达式得出。

提示 2

计算能让物体不停留在桌面上的最大摩擦系数。

提示 3

情况 (i) 很简单，因为船速大于水流的速度。对情况 (ii)，选择合适的辅助矢量可以帮助决定船夫可以划向哪个方向，但是对应最短路径的方向仍需选择。

提示 4

虽然地毯被拉动的部分具有恒定的速度，但是质心的速度却要小一些。这是因为被拉动部分的质量在不断地增加。

提示 5

画出蜗牛的“时空”界线。利用不同惯性参考系中的等效性也可以得到结果。

提示 6

比较两条虫子质心升高的多少。

提示 7

可在能量守恒和静态平衡条件的基础上求解。

提示 8

先确定，如果冰山下沉一小段距离 x 后，浸没部分增加的体积。使用漂浮条件来联系冰山的质量和整体大小。

提示 9

停在人行道上时，弹簧承受的合力不变，同时相对任意轴的净力矩一定为零。

提示 10

题解中最迷人的地方在于：摩擦力怎样同时平衡冉阿让的重力和墙的反作用力。

提示 11

从粘合球的几何中心到质心的距离不能超过一个固定长度，找出这个长度。

提示 12

将球的运动分解在平行于斜面和垂直于斜面两个方向。

提示 13

因为运动有加速度，仓鼠将作用于平台一个力，这个力的力矩将与仓鼠的体重在中轴上形成的力矩平衡。

46

提示 14

找一辆自行车试一下。

提示 15

根据牛顿万有引力定律，使用太阳的密度来表示它的质量。

提示 16

比较一颗星在另一颗星的位置上产生的场，并与地球在太阳引力场中的情况相比较。

提示 17

空间探测器应该在赤道上向东方发射。

提示 18

考察不同情况下提供的能量。

提示 19

系统（即蜂蜜加钢球）的质心在稳定地下降，系统的总动量可以通过质心下降的速度求得。减去钢球的动量即得到蜂蜜的动量。

**提示 20**

当容器壁的温度与气体的温度不同时，气体分子与容器壁碰撞时，是得到了能量，还是将能量传给了容器壁？

提示 21

两个铁环温度的不同在于铁环质心的移动方向不同。

提示 22

读这本书的人不需要提示。

提示 23

这种情况是可能的——而且只需用到两个电阻！

提示 24

考察当水漏走时，水和水桶共同的重心如何变化。

提示 25

在何种情况下加入一点水就会不可避免地使整体的重心升高？

提示 26

我们断言水不会流进碗里。为了证明这一点，作用在链子上的力以及该力产生的力矩都要考虑在内。

提示 27

题解中惟一不同寻常的地方在于浮力的计算。

提示 28

因为泡泡漂浮在空气中，泡泡的平均密度应该和空气的密度相同。

提示 29

在毛细管的另一端，曲面的压力平衡了液体内部的压力和大气压力之间的差别。

提示 30

整个系统（包括电流分布和电场）是球形对称的，因此磁场也应该是球形对称的。考虑什么样的球形对称磁场与（实验观察到的）并不存在的磁单极子的磁场相同。

提示 31

利用电荷分布的对称性。

提示 32

仅仅比较重力加速度是不够的，因为并不清楚跳高运动员离开地面时是否会有相同的初速度。需要分析在起跳过程中跳高运动员质心的运动。

提示 33

不需要精确求出时间间隔和路径的长度；只需要确定与他们相关联的不等式。

48

提示 34

将绳子的张力分解在半径方向和切线方向，绳子的方向可以通过均匀圆周运动的动力学条件求得。

提示 35

证明在任意瞬间，从同一点同时从无摩擦的金属丝上向不同方向滑下的物体，在一个共同的（想像中的）球面上。

提示 36

本题使用固定在分针臂上的转动参考系，可以用很基本的方法解答。

提示 37

石头远离抛石者，直到平行于位置矢量的速度分量为零。如果这一点不会发生，则题目中给出的条件将得到满足。

提示 38

假设蚱蜢的轨迹（在最小的离地速度下）最高点就是树干的高度是错误的。



提示 39

很明显它们直接跳向对方是不可能没有灾祸发生的，因此考虑其他的方向同时保留该情况下的对称性。注意题目给出了毛发的质量。

提示 40

必须要确定喷射出的水流的共同形状以及他们的包络层。它们从相同的地方以相同的初速度喷出，遵循抛物线的轨迹。考察决定喷出水流是否通过空间给定点的条件。

提示 41

说明

$$R = \frac{v^2}{g} \left[\sin 2\theta + \frac{EQ}{mg} (1 - \cos 2\theta) \right]$$

最大值对应的 θ 。

提示 42

通常两个食指作用在棍子上的支持力是不同的，因而最大静摩擦力一端比另一端要小，滑动就会发生在小的这一端。然而，因为滑动端的支持力在滑动的过程中是不断增加的，动摩擦力也会不断增加，到了大于另一端的静摩擦力的时刻，滑动会在第一个手指处停止而在第二个手指处开始。在全过程中两个手指会交替滑动和固定。做的功可以由各个阶段的长度计算得出。

提示 43

滑动的过程应该从上面开始！正确的策略是将最上面的砖滑动得尽可能远，然后对上面的两块砖作为一个整体做同样的事，并依此向下类推。

提示 44

由作用在板上的力和力矩平衡可以得到摩擦力之间的关系。建议采用图解的方法来处理导出的线性方程。

提示 45

必须作为一系列连续的碰撞过程来考虑。

提示 46

说明在第一次碰撞时，初始动能传递给中间球的份数为 $4\mu M / (\mu + M)^2$ 。

提示 47

在碰撞过程中，系统的动能、动量、角动量均守恒。

提示 48

将运动分解为质心的运动和质心参考系内的运动。说明考虑能量和角动量守恒定律，当绳子第一次被拉紧时，两个粒子质心速度的大小不变，但是方向转动 $\pi/2$ 。按此结果，它们其后沿平行 x 轴的方向运动。

提示 49

50

通常的推理会假设水池 1 min 会注入 $1/3$ 的水，而同时 $1/2$ 的水会从池中流走（因此每分钟 $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ 的水会从池中流走），这是错误的。从水龙头中注入水池的水流是均匀的，但是（按照托里拆利的流体定律）水池中的水位越高时，水流走的也越快。

提示 50

说明自由液面是旋转抛物面 $z = \omega^2 r^2 / 2g$ 的一部分，其中 z 由自由液面的最低点量起， r 是从中轴量起的半径。考虑液面上但仍在容器中的空气体积。

提示 51

在力学中，汽车本身并不构成封闭系统，它与周围环境相关联。在本题中，和它关联的对象是地球。

提示 52

焦距可以由透镜成像公式和给定的放大率计算出来，亮度值之比不但与像的大小有关，而且和到达透镜的光线总量有关。

**提示 53**

题目中的观察者所看到虚像的大小并不是成像本身的大小，而是与此成像对眼睛所成的角度有关。

提示 54

(由折射定律和全反射定律) 我们有 $n_g \sin(\theta + \phi) \geq n_w$ ，其中 ϕ 为光线入射进棱镜处，棱镜内部光线和表面法线之间的夹角 (折射角)。

提示 55

在紧邻棱镜和距离棱镜非常远处都不会出现光斑。光斑的最近位置由棱镜内部的全反射决定；而光斑最远的位置可以通过把棱镜接近桌面的部分看做一个平凸透镜来计算。

提示 56

假设照射在月亮表面的太阳光线被月亮以给定的反射率散射开来，计算在地球表面单位面积接收到的光能量。

提示 57

最自然、最舒适的行走频率与把人的腿看做自由摆动的钟摆的周期相关；而跑步可以视为腿在做受迫振动，其振荡的周期与腿的惯性及肌肉施于其上的拉力有关。

提示 58

选择合适的单摆长度，可以使单摆的角速度在任何位置均与摆动细杆的速度相等，然后再比较这样的单摆和题目中满足给定要求的单摆的周期。相同摆动角度但长度不同的两个单摆周期的比值可以通过量纲分析得到。

提示 59

(解决本题的关键是) 找出盘旋所需要的动力都与哪些物理量有关。

提示 60

使用能量守恒定律来确定木棒的角速度 ω 随其倾斜角度 θ 的变化，再把木棒与桌子之间的相互作用和它们产生的加速度联系起来。对情况 (i)，小槽的光滑水平和竖



直面只能分别产生作用于棒端的水平和竖直作用力。对情况 (ii)，桌子的边缘是一个非常小的圆弧，因此其支持力总是沿棒的轴向。

提示 61

当摩擦系数较小时，笔尖“向后”移动。当摩擦系数大于某个特定的临界值（计算得出约为 0.37）时，笔尖将“向前”移动。考虑到滑动摩擦使机械能减少的事实，可以看到铅笔尖将一直保持与桌面的接触。

提示 62

利用理想气体状态方程来表达空气的质量守恒。同时注意，在相当长的一个时间段内，系统的温度将保持不变。

提示 63

由于存在水的表面张力（曲率张力），玻璃板间水的压强比大气压强低。

52

提示 64

计算丝线上的点在每一给定时刻的速度。

提示 65

考虑固定在丝线上的“弹性”参考系。

提示 66

寻找数学上简单容易处理的运动轨迹，通过这个轨迹，小球可以达到尽可能高的速度，并因此赢得时间以抵消路径的增长。

提示 67

从图中你可以得到题目中没有给出的角度，它们可以作为题目的已知条件。

提示 68

圆规的质心位于悬挂点的正下方。当圆规两臂的张角改变时，虽然每一条圆规臂的质心位置会发生变化，但其总质心的水平相对位置应保持不变。利用这样的分析结果，可以通过简单的计算解决此问题。

**提示 69**

用矢量表示平衡条件。

提示 70

注意到整个系统没有受到任何水平外力的作用，因此质心的水平位置应保持不变，同时可以应用线动量守恒定律。基于以上分析可得，罐车开始时向前运动，但后来会向后运动。令人不解的是罐车竟然可以改变它的运动方向，为了更好地理解这个结果，先分析以下的问题会有所帮助。

质量均为 m 的一个未购票乘客和一个认真的售票员同处于一个质量为 M 的，静止、与轨道无摩擦的火车车厢内。当售票员发现该乘客没票时，售票员以速度 v 追赶着他一并来到车厢尾部。无票乘客在车厢尾部停下来并跳了出去，请分析售票员在跑向尾部敞开的车门，停在那里看着无票乘客逃走的情况下车厢的运动速度。

提示 71

在两个小珠子的质心参考系中考虑它们的运动。

提示 72

在完全非弹性碰撞情况下，经过足够长的一段时间，粘在一起的质量逐渐增长的珠子将达到一个恒定的速度，对这个粘在一起的簇使用牛顿定律。对于完全弹性碰撞，首先研究一下如果外力只在第一次碰撞之前起作用会发生什么情况。

提示 73

请考虑桌子、壶和啤酒共同的质心在整个过程中的变化。

提示 74

水的黏性可以认为很小，同时与其动能相比水柱的势能变化可以忽略。注意到水槽无法改变水流的水平动量，可以考虑利用伯努力方程（多次）。

提示 75

当液体开始以加速度 a 流动时，求出在很短的时间间隔 Δt 内，最初静止的液体其动能和势能变化的表达式。

提示 76

经验告诉我们，沙子流经沙漏中部小孔的速度与其上部沙子的数量无关。这可以解释为，由于沙粒之间的摩擦，沙子流出的平均速度只与其邻近的环境有关，主要取决于孔径，而与沙体较远部分的作用无关（这和液体的规律不同，液体内部的压强可以传递很长的距离，见问题 49）。因而，沙子通过小孔的时间一定与初始时沙体高度的立方成正比。找出其他可能的相关量，然后使用量纲分析的方法解决问题。

提示 77

对于小位移的情况，作用于小球上的合力为 $F(x) \approx -kx^3/l_0^2$ ，其中 k 为弹性系数。利用量纲分析可以推出周期基于弹性系数、小球的质量和运动的幅度的关系。

提示 78

在给定的条件下，球体水平方向和竖直方向的运动均可近似看作简谐振动。

提示 79

在减速运动的火车车厢参考系中描述小球的运动会比较方便。

提示 80

在楔形木块参考系中考虑问题会比较方便。

提示 81

在何种条件下一根长细线可以在赤道上的同步轨道上稳定地运动，即角速度与地球转动的角速度相同。

提示 82

小汽车加速度的法向分量是 $a_n = v^2/\rho$ ，其中 v 为汽车的速度， ρ 为桥梁的曲率半径。后者可以通过分析抛物运动得出，抛物线的轨迹正好与桥梁的表面形状是一致的。

提示 83

在求解过程中，核心问题是求出轨道相应点的曲率半径（见提示 82）。

提示 84

在任何时间段内，船和目标位置之间距离的减少与船被水冲下的距离相等。



提示 85

计算被推小孩的速度和其速度沿斜坡向下的分量在单位时间内的变化，找出这两个量的变化率之间的关系。

提示 86

注意比较一下走私船与警卫队快艇之间距离的减少率和海岸警卫队快艇离开海岸的速度之间的关系。

提示 87

由于这个问题的对称性，所以每一个质点将一直保持位于不断减小的正 n 边形的各个顶点上，它们都好像只受到位于中心位置的物体（其质量为某个合适的 M_n ）的万有引力作用一样。整个系统塌缩进中心位置所需要的时间，可以通过开普勒第三定律来求解。

提示 88

求解过程中需要利用所有的三个描述行星运动规律的开普勒定律。

提示 89

利用磁偶极子产生磁场的大小和方向公式，在极轴（高斯位置 A ）上磁场为 $B_{||} = 2\kappa\mu/L^3$ ，在赤道（高斯位置 B ）上磁场为 $B_{\perp} = \kappa\mu/L^3$ ，其中 κ 表示 $\mu_0/4\pi$ 。

提示 90

点电荷所受到的力可以通过所谓的镜像电荷的办法得到。这个力类似于万有引力，与距离的平方成反比，因此点电荷的运动可以利用开普勒定律把它当成沿退化椭圆轨道的运动来研究。

提示 91

利用镜像电荷法可以求出电场强度，以及塑料球下水面的电荷密度。由于作用在小球下水面上的静电力而产生的“负压”，应该与其由于水面隆起而产生的流体静压力相互平衡。

提示 92

可以利用球形镜像电荷法解决问题。这个方法的基本思想为，两个异号、带电量



不同的点电荷能够产生一个球对称的零等势面。

提示 93

解决这个问题，实验室参考系和质心参考系都需要用到。

提示 94

如果把题中所述的物理过程用慢镜头回放，可以看到在碰撞之后，第一个台球停止下来并在原地转动，而第二个球则运动起来但无转动。因此，在整个碰撞过程中，第一个台球只是把动量传递给第二个球，角动量却保留了下来。碰撞之后，摩擦使得第一个球向前运动，但转动越来越慢。同时，摩擦使得第二球平移运动越来越慢，同时增加了转动。然而，每一个小球相对于其与桌面的接触点的角动量保持不变。

提示 95

56

考虑能量守恒，但是别忘记耗散的能量，如热能。

提示 96

考虑小球相对于桌面上、其运动轨迹上一点的角动量，这个参考点是固定的。

提示 97

说服你自己，这个问题只和东西方向的动量分量有关。

提示 98

解决问题的关键，一是动力学方程，二是直线加速度和角加速度的关系。

提示 99

从能量和动量的角度看，系统不是封闭的，因此这些量不守恒。题中所描述的有趣现象，可以通过角动量守恒来解释。

提示 100

考虑对中心转轴成 $\Delta\theta$ 角度的一小段圆环所受到的力。

提示 101

先计算绳子位于圆柱夹角为 $\Delta\alpha$ 的任意两点之间的受力差 ΔF 。它与作用在圆柱上



的正压力成正比，即正比于 F 。考虑一个等效的现象，一个量的变化正比于它自己（例如辐射衰减，电容放电等）。通过类比就可以求得绳子上的摩擦力。

提示 102

詹妮建议查理考虑一个以固定角速度围绕垂直通过质心的轴转动的圆环。然后确定哪些力作用在圆环上，并且进一步考虑从圆环上切下来的任何一部分的质心是怎样满足牛顿第二定律的。

提示 103

万有引力同时加速运动部分和紧密相连的静止部分，这意味着移动链的质量变化必须要被考虑在内。

提示 104

在随链条质心运动的参考系中，可以不考虑重力，在这个参考系中，链条只有质量而不受重力。考察链条上一个微元的运动与受力情况，微元具有曲率半径 R 和不变的运动速度 v ，就可以发现它的形状将如何改变（参见问题 100，问题 101 和问题 102）。

会发现，弗兰克的猜想是正确的，链条将维持原来的形状。

提示 105

计算链条离开滑轮时的张力。使用能量守恒定律（参见问题 104）。

提示 106

采用环的圆心与环运动速度相同的参考系。在此参考系中，任何一个圆环微元都以速度 v 做匀速圆周运动。这些条件决定了圆周运动的动力学，并由此导出关于 v 的等式。

提示 107

考察在单位时间内落到传送带上的沙子的水平动量的变化。考虑有关的能量也是很有用的。

提示 108

应用能量守恒定律，然后通过计算滚动速度作为卷起的水龙带的位置的函数，求得动量的改变，从而求得作用力。

提示 109

质量均匀分布的薄球壳在其内部产生的重力场为零，而在球壳外部的重力场分布，同把球壳总质量认为集中在球心时的情况相同。

提示 110

均匀球体内部的重力场与球半径成正比（参见问题 109）。本题中内部被挖空的球体的重力场能够通过均匀球体和一个“负质量密度”的小球的重力场的叠加而求出来。

提示 111

将半球分成等厚的半球壳，证明这些球壳的每一个都在所求的位置上产生相同的重力场。

提示 112

58 计算一个“神秘巨人”要将小行星（已切开）等分成距离 1 m 的两半需要的作用力。

提示 113

电场施加了一个力，这个力的大小正比于切割后暴露出来的表面面积，方向与表面垂直。注意这个力与由于液体或气体压强产生的力是相似的。

提示 114

初看起来好像好几个参数都不见了。不用担心这个问题！先找到平衡态然后计算出在这种情况下系统的静电能。

提示 115

先找到初始时容器不会爆炸时所能容纳的最大的氢气的量。容器的制造材料可以在实际材料中自由选取。

提示 116

引力定律和静电场定律是非常相似的，利用这种相似性并应用高斯定理。

提示 117

分析对着 C 点所张角为 $\Delta\alpha$ 的一小段棒上的电荷元所产生的电场。

**提示 118**

考虑两个端对端地连接在一起的非常长的棒。

提示 119

在 θ 接近 π 的情况下你可以辨别出正确和错误的公式。应用著名的长的通有直流电流的直导线所产生的磁场公式来寻找比例系数。

提示 120

设想另一个同样的线圈在 P 点与原始螺线管对称地连接在一起，在第二个线圈中允许流过与原始线圈同样的电流，然后应用叠加定律。

提示 121

如果假想将其中一个板上的正电荷换成相同大小的负电荷，那么很容易找出所求的力。另一方面正正电荷的平行板的电场线结构与正负电荷的装置所对应的电场线结构完全不同。

提示 122

切记单个盘上的总电量是不能改变的。

提示 123

如果认为点电荷 Q 均匀地分布在距下面的平板为 x 的一个平板上，那么每个平板上的总的感应电荷是不会改变的。

提示 124

板外的总电场必定为零。这条人们熟知的电荷分布的事实会产生什么样的结果呢？

提示 125

想象将介质沿着垂直于 y 的方向切成薄层。离散的那些薄层可以被看作折射率不同的平行板，每层折射率和光线入射角之间的关系可以被确定。

提示 126

应用最简单的几何学，你能够测量出一个 CD 的有效表面积。为了得到所需要的

结果，用 650 M 除这个面积，然后再用 8 除这个面积，因为一个字节等于 8 bit 。你可以将一个 CD 看作一个反射光栅，并用一束已知波长的激光来测量它的衍射花样。

提示 127

确定复合谱线的 $n\lambda$ ，并考虑 n 的可能值， n 为衍射谱的序参数。

提示 128

在情况 (i) 中，光程差由两部分组成：一部分光程差在光栅的前面产生，另一部分在光栅的后面产生。

在情况 (ii) 中，研究单缝的衍射图而不是来考虑光栅的衍射，并且单缝“向前”倾斜一个角度 ϕ 。

提示 129

画示意图来显示物体之间的液体高度及空间的压强，并与另一边相比较。

提示 130

找出作用在凹透镜上的水平力。

提示 131

在蒸发的过程中，水滴的表面积收缩，表面能减少。比较这种能的减少和蒸发所需要的能量。

提示 132

较小的液滴表面附近的平衡饱和蒸汽压比较大一些的液滴表面附近的饱和气压稍微高一些。容器底部的气压是均匀的，因此它的值比大液滴的平衡值要高，比小液滴的要低。结果，蒸汽从小液滴蒸发，使它们变得更小，同时聚集到大液滴上，使它们变得更大。将一个毛细管插入容器中的一部分液体，通过考虑此时的压强平衡，就可以推出饱和气的平衡气压和液滴曲率之间的关系。

提示 133

封入容器的气体，内能的增加等于悬挂在活塞上重物的势能的减少。

提示 134

如果山脉很高的话，它的基底就会由于高压而熔化。比较熔化山脉底层所需要的



能量和如果山脉下沉所释放出的重力能。

提示 135

如果在 p - V 图上画出封闭气体的状态，我们可以得到一条直线。当意识到在某些点，这条直线正切于一条等温线或绝热线这个含义时，这个问题隐含的美妙部分就被揭示出来了。

提示 136

你的解释应该基于熔化的岩浆与冰之间的作用。

提示 137

窄的管道中的静水压强增加了空穴中的水压，所以空穴中的水通常在高于 100°C 的温度下沸腾。饱和水蒸气的温度和压强之间的关系可以通过查表或者使用近似的定律

$$p = Ae^{-L_m/(RT)}$$

其中， p 是在沸点 T 的饱和水蒸气压， L_m 是水的气化摩尔热， R 是气体常数， A 是与压强量纲有关的常数。当间歇喷泉喷发的时候，空穴中过热的沸水直到冷却到 100°C 才又一次达到平衡。

提示 138

当形成的冰层的厚度为 x 时，考虑这一层底部的热平衡。

提示 139

对于相似的物体，设消耗的时间随着物体线度的平方变化。

提示 140

在这个问题中，隐藏了一个与水的汽化热有关的“陷阱”。在 100°C 和一个大气压下，水的汽化热（可以查表得到标准值为 $2\,256\text{ kJ/kg}$ ）不但要考虑水蒸气具有更高的内能，而且要考虑膨胀时克服大气压所作的功。

提示 141

当一种液体的饱和蒸汽压达到或超过液体上方的气体压强时，它就开始沸腾了。

**提示 142**

考虑怎样把 T 包含进振幅的公式。

提示 143

比较一个长的水柱的表面能（假设蜘蛛网上均匀地覆盖着水）和周期性水滴的表面能。

提示 144

柱体保持加速直到接受到的由于粒子从柱体左侧和右侧与之碰撞产生的净动量为零。经过一段非常长的时间，柱体将停止运动，这与热力学第二定律相符。

提示 145

既要考虑空间探测器对热的发射和吸收，又要考虑接下来它的防护罩内表面和外表面对热的发射和吸收。

62

提示 146

在过程中系统的熵不能减少。

提示 147

从微观态数目的角度来考虑熵。

提示 148

计算充进容器中的气体熵的变化。

提示 149

太空飞船里面的电场强度是零，正如法拉第笼中的情况一样。检查在旅行过程中太空飞船的电势是否变化。

提示 150

当球形电容器带一组电荷时，检查它的能量变化。

提示 151

比较凹进和没有凹进的箔的静电场能。



提示 152

电容器的两个极板上异性电荷互相吸引，因此把两个极板拉开必需要做功。电容器的电容下降，而且在给定的电压 V_0 下，电容器的静电能正比于它的电容 C ，所以电容器的能量下降了！对于这种佯谬的解释是：不能把一个连接着电源的电容器看做是一个封闭的系统。

提示 153

因为电流方向在每个小圈里都指向同一方向，弹簧会收缩。这种收缩的力是由电流产生的，这可以通过考虑一个超导的螺旋状弹簧（在非常低的温度下可以实现）来得到。电流可以通过这样的一个超导体线圈，即使它的两端被短路。检查这个闭合系统的能量对它长度的依赖关系。

提示 154

找到作用在磁铁 A 上的净作用力（磁力，重力和线的拉力的合力）作为一个函数和两个磁铁间距 x 的关系 $F(x)$ 。运用 $F(x)$ 来确定磁铁平衡和稳定的条件。

提示 155

计算电池所做的总功。

提示 156

记住当油移出时电量并没有改变。

提示 157

电场的能量（每单位体积）是正比于电场强度的平方和介质的介电常数：

$$W_{el} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2$$
 在电容器两极板之间电介质降低了电场（电介质极化的结果），因此系统的能量也减少了。作用在电介质上的力可以通过能量的变化计算出来（运用功能原理）。

提示 158

应用基尔霍夫定律，从链中最后一个电阻入手。并寻找连续流过电阻单元的电流值和斐波那契数列内元（一种整数数列，其中每数等于前面两数之和）之间的关系。

提示 159

考虑两个不同的情形。在第一个中，电流 I 流入某一个格点。另一个中，电流 I 流出它的一个近邻点。在两种情形下，分别利用系统的对称性，然后叠加两个电流和电压分布。

提示 160

应用前一个问题的叠加方法。要注意，对有限大小的格子，电流必须在某处流出电路使得电荷守恒。解决这个难点，并不破坏系统的对称性。

提示 161

解决这一问题的关键词是“并联”。

提示 162

跟前面的三个问题一样，叠加是很有帮助的。

提示 163

电池组连过安培表连接到电阻的两端。你需要用某种方法确保安培表测量的电流全部流过那个特定的电阻，而不是有部分电流经过了其他电学元件。

提示 164

当一电流 I 流入对角线的一端并从另一端流出时，建立立方体上的等势点的集合。通过抽象地连接所有的电势相同的点，电路可以被简化。

提示 165

应用高斯定理。

提示 166

使用夫累铭 (Fleming) 的右手定则。

提示 167

导体棒在重力作用下会沿斜面加速下滑。电磁感应使得棒中出现一个感生电流，并因楞次定律起到阻碍运动的作用。棒的运动方程（以电流表示）在三种情况下都是相同的。产生不同运动的原因是由于流过导体棒的电流和引发的感生电动势关系不同。

**提示 168**

速度的变化直接正比于电容上电荷的变化。导体棒一直加速直到感生电动势与电容上剩余的电压平衡。

提示 169

你可以不用解出电路的微分方程而回答问题 (i)。把磁场能量的增长率表示为电流的函数。

对 (ii)，注意到此电路中的电流对时间的依赖关系是众所周知的，而焦耳热正比于电流的平方。如果你画出电流的平方作为时间的函数，就可以定性找到损耗在什么时候的变化率是最大的。用 (i) 的结果，不用微积分就可以得到定性的答案。

提示 170

首先考虑只包含一个电感和一个电容相串联的电路，并表明它在某个特定频率存在电流共振。

提示 171

根据电磁感应的规律，一个线圈中的电流不能突变。

提示 172

螺线管单位长度上的圈数 n ，正比于 d^{-2} ，并考虑一圈的电阻。

提示 173

考查使得金属中的电荷做圆周运动的力。如果电场强度已知，高斯定律可以用来确定对应的电荷分布。

提示 174

电场可由作用在单位电荷上的力确定，而磁场可由分析作用在一个运动电荷上的洛伦兹力得到。

提示 175

吉尔的结果是正确的，杰克的解是错误的。至关重要的一点是在一根旋转的辐条中的电力线并不平行。

提示 176

地球的磁场在圆环中感生出一个电流，使得在圆环中心的平均磁场改变了。这导致了小磁针的移动。

提示 177

记流过电压表的电流为 I ，而流过导线圈的大弧的电流为 i 。然后对电流和回路的方向使用一致的约定，在两个不同的闭合回路中运用基尔霍夫定律。

提示 178

莫比乌斯带是一个与方向无关的表面，因此必须很小心地应用电磁感应的规律。想象一下标记着纸带边缘的导线没有自交叉地放在同一平面上。确定由导线所围绕的区域并找到与莫比乌斯带的对应。

提示 179

不仅要考虑磁场和作用在带电粒子上的磁场力，还要考虑感生电场的影响。

提示 180

作为电磁感应的结果，带电圆环中产生一个电场，且它的切向分量使圆环受到一个力矩的作用。可以显示圆环的最终角速度只依赖于最终的场，而不依赖于它产生的过程。

提示 181

在转动的圆盘中感生出一个电场，并在线圈中感生出电流。总的磁场由地球产生，并由线圈根据转动方向的不同，使之增加或减少。

提示 182

通过超导圆环的总磁通量（由外场的和它自身的通量组成）在运动中必须保持不变。外场的通量在圆环运动中是变化的，但是这种变化被圆环中感生电流所产生的磁通量平衡了。如果电流已知，那么洛伦兹力可以算出，并可发现作用在圆环上的合力是它的位置的函数。结果的运动方程和大家熟悉的力学中的方程非常相似。

提示 183

电偶极子的静电场可以从它的势能 $\Phi = K (\cos\theta / r^2)$ 计算得到，其中 K 是一个常



数正比于电偶极子的强度， r 是到电偶极子的距离， θ 是在电偶极子的轴处量出的极角。先计算环作用在珠子上的支持力。

提示 184

以速度 v_0 垂直于大小为 B 的磁场运动，等效于在大小为 $v_0 B$ 的电场中运动。如果 v_0 选择得合适，这个电场就可以抵消作用在粒子上的重力场。

提示 185

变化的磁场在圆环中感生出旋涡电流，阻碍了磁棒的下落。很清楚最终电流依赖于导体的电阻。运用量纲分析可以得到对其他参数的依赖关系。不要忘记包含磁现象的公式常常有真空磁导率 μ_0 ，它的量纲为 1。

提示 186

虽然有可能在以真空箱为参照物的参考系中解出这个问题，但解是非常复杂的。而换在平行于导线以 v_0 运动的参考系中，问题会大大简化。在这个参考系，电子的运动同时受电场和磁场的影响。在另一方面，在这个参考系，当电子最接近导线时，它的速度为零，可以方便地使用功能原理来解这个问题。

提示 187

在液体的参考系中描述现象。首先考虑电场和磁场的变换，当它们在两个不同参考系中看的时候，其中一个参考系相对于另一个以速度 v_0 运动。设 v_0 远远小于光速并忽略相对论效应。

提示 188

考虑分裂产物有三个而不是两个时所需要的初始（激活）能量。

提示 189

${}^7\text{Be}$ 通过电子俘获进行放射性衰变。

提示 190

平衡态时，丰度正比于半衰期。用这个结论可推出氦-220 的原子个数的平衡值为 3.3×10^5 。接着考虑这种元素如何从纯净的样品中产生。

提示 191

应用能量动量守恒的相对论公式。

提示 192

考察法拉第电笼中电子的运动。

提示 193

由于质子质量远远大于（约 2 000 倍）正电子质量，所以正电子的加速度要比质子加速度大很多。因此存在这样一段时间，在这段时间里，正电子已经离开正方形很远了，而质子基本上没有动。

提示 194

应用（相对论下的）能量和动量守恒定律。

提示 195

在此过程（康普顿散射）中碰撞粒子（光子+电子）的总能量和动量不变。在计算过程中，用电子的静止质量 $E_0 = m_e c^2 \approx 510 \text{ keV}$ 作为能量单位比较方便。

提示 196

把电子作为一个半径为 r 表面电荷均匀分布的球形电容器。质量为 m 半径为 r 的球体的转动惯量为 $I = Kmr^2$ ，其中 K 为关系到分布的与维度无关的常数。例如，对均匀球体，有 $K = \frac{2}{5}$ 。

提示 197

考虑电子总能量与海森伯不确定原理。

提示 198

把电子放到一个半径为 r 的球体中，通过海森伯不确定原理，可以得到最小的动量为 $p \approx \hbar/r$ 。通过相对论近似公式，计算电子总能量（电场能和机械能的和）关于半径 r 的函数，然后找到此函数的最小值。

**提示 199**

当波长比较小的时候，表面波的传播速度由表面张力决定。通过这个速度与波长的关系，加上表面波与声波的速度关系可以得到一个波长的极限值。实际上这个值就是水分子大小的量级。

提示 200

拿一瓶香槟来试试。只要你不是喝得太少或者太多，你肯定会发现这个加速的原因的。

200 道物理学难题



解 答





题解 1

将蜗牛 2 的速度矢量在指向蜗牛 1 的方向和与之垂直的方向上分解 (见图 S1.1)。则两只蜗牛彼此靠近的相对速度为 $v + \frac{1}{2}v = \frac{3}{2}v = 7.5 \text{ cm/min}$, 因此它们将在 $60 \text{ cm} / (7.5 \text{ cm/min}) = 8 \text{ min}$ 后相遇。事实上, 8 min 后三只蜗牛将相遇在一起, 由于它们的实际速度为 5 cm/min , 因此在相遇前, 它们爬过的路程为 40 cm 。

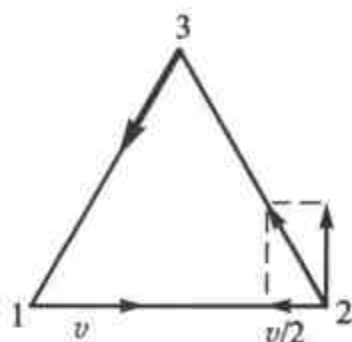


图 S1.1

将速度矢量在其他坐标系中分解可以得到相同的结果, 比如以蜗牛为原点, 指向三角形的中心为一个坐标轴, 其垂直方向为另一个坐标轴, 如图 S1.2 所示。很明显, 最终蜗牛们将在中心点相遇, 而在此坐标系中的速度矢量的分解可以得到蜗牛将以恒定的速度 $(\sqrt{3}/2)v = 5\sqrt{3}/2 \text{ cm/min}$ 爬向中心点。同时, 围绕中心爬行的速度为 $v/2$ 。

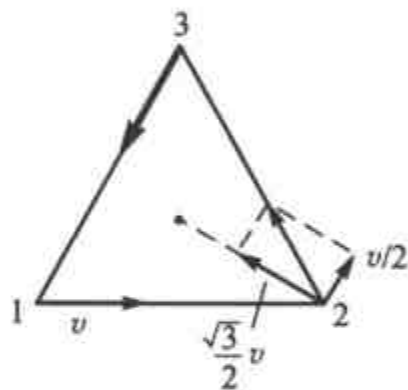


图 S1.2

可以很容易计算出蜗牛在初始状态距离中心点 $60(\sqrt{3}/3) \text{ cm}$, 因此它们将在

$$\frac{60(\sqrt{3}/3) \text{ cm}}{5(\sqrt{3}/2) \text{ cm/min}} = 8 \text{ min}$$

后相遇。

因为图形几何对称, 每一只蜗牛都在运动, 而它运动的方向与其位置和中心点之间的连线总保持 $\pi/6$ 的角度。因此可以将运行轨迹的运算归纳如下: 考虑当一个物体以恒定的速度 v 围绕固定点运动, 其速度和位置矢量之间的夹角为一个定值 α ($0 < \alpha < 90^\circ$)。假设位置矢量的初始值为 r_0 , 当其转过一个小角度 $\Delta\phi$ 后, 其长度变化为 $-\Delta r$ (图 S1.3 所示), 则由于 α 为定值

$$\frac{\Delta r(\phi)}{\Delta\phi} = -r(\phi) \cot\alpha$$

这个公式很像辐射衰减方程 $dm(t)/dt = -m(t)\lambda$, 已经知道此方程的解为 $m(t) = m_0 e^{-\lambda t}$, 与此类似, 在极坐标中蜗牛移动路径的方程为

$$r(\phi) = r_0 e^{-\phi \cot\alpha}$$

这个方程就是所谓的对数螺旋方程, 表明半径 r 会在转过无限的角度后趋向于

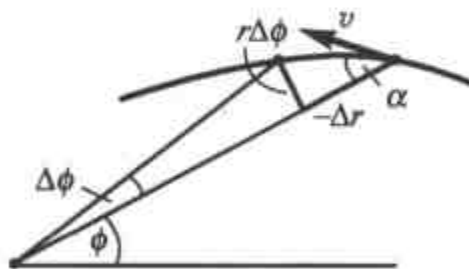


图 S1.3

零。也就是说，一个类似点的物体经过有限长的时间，走过有限的距离后会到达中心，但是却要转无穷多圈。

注：夜间活动的昆虫靠远方的光源（比如月亮）来保持飞行的方向。如果附近有一盏灯误导了它们，则按照上面的解，它们将沿着螺旋的路径飞向毁灭。因为灯和昆虫都有一定大小，迟早昆虫会撞上灯。

题解 2

物体的平均速度为 $\frac{1}{2}$ m/s，因为是匀减速运动， $v_{\text{平均}} = \frac{1}{2}(v_{\text{初}} + v_{\text{末}})$ ，而 $v_{\text{末}} \geq 0$ 。因此物体运动的初速度不大于 1 m/s。也就是说在两秒内速度减少不超过 1 m/s，即加速度的绝对值 $|a|$ 最大为 0.5 m/s，这个加速度是重力加速度的 $\frac{1}{20}$ 。所以桌面与物体之间的摩擦系数不大于 $1/20$ 。这个数字比通常情况下物体之间的滑动摩擦系数要小得多。由此可以判断物体不是滑过桌面，而是“滚”过或者是部分“滚”过桌面的。

题解 3

对情况 (i)，最短路径是船行进的方向垂直于岸的方向，则船夫划船的方向如图 S3.1 所示。

船的速度和水流的速度合速度垂直于河岸，其大小为 $\sqrt{5}$ m/s ≈ 2.24 m/s。船夫划船的方向应该是逆流而上，与河岸间的夹角 α 满足条件 $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ ，因而有 $\alpha \approx 48^\circ$ 。

对情况 (ii)，因为水流太急，即使船夫完全逆流而上划船，船也会向下游飘去。这意味着我们不能像上一种情况那样，选择一个方向，使船和水流的合速度方向垂直于岸的方

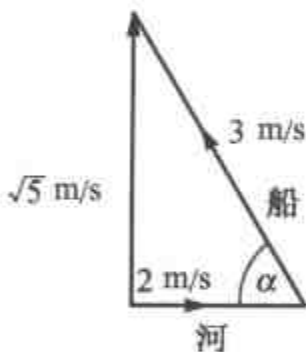


图 S3.1

向，也就是说，不能再使船垂直地划向对岸。

船夫选择的方向可以用水流的速度和船在静水中速度的矢量和得到。首先画出水流速度的矢量，在水流矢量的末端，画出所有方向速度矢量，矢量长度为静水中的船速。这些矢量的末端形成一个圆，如图 S3.2 所示。

两个速度的矢量和可以通过连接水流速度的起始端和船速矢量在圆上的末端得到。因此最短路径

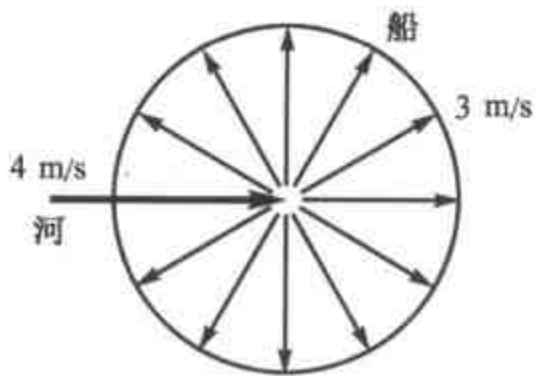


图 S3.2



对应的方向应该是与水流方向成最大夹角的方向，也就是该矢量和静水中船速矢量末端形成的圆相切时的方向。如图 S3.3 所示。

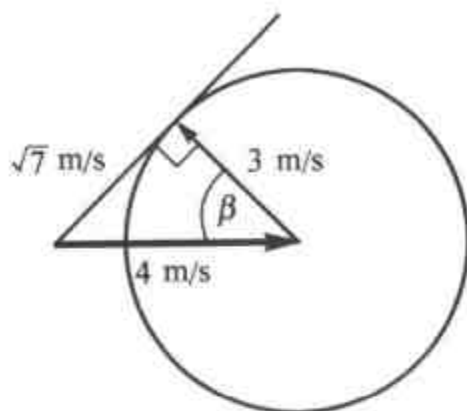


图 S3.3

因此，小船相对于岸的速度为 $\sqrt{7} \text{ m/s} \approx 2.65 \text{ m/s}$ ，同样船夫划船的方向需要逆流向上，与河岸间的夹角 β 满足条件 $\cos \beta = \frac{3}{4}$ ，因而有 $\beta \approx 41^\circ$ 。图中也显示

出在此条件下船走过的距离将是河宽的 $\frac{4}{3}$ 倍。

题解 4

假设地毯拉起端所在位置为 x ，如图所示，则地毯拉起部分的另一端位置为 $x/2$ ，拉起部分重心的位置为 $3x/4$ 。尽管 $dx/dt = 1$ ，拉起部分质心的移动速度仅为 $\frac{3}{4}$ ！



拉起部分的动量为 $p = mv$ ，这里 $v = 1$ ，而 m 均匀增加，作用在拉起部分的净力为

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{dm}{dt}v + \frac{dv}{dt}m = \frac{dm}{dt}1 + 0$$

拉起部分质量的变化率计算如下，地毯的移动端由起始点开始移动，到整张地毯开始移动的时候，移动端 $x = 2$ 。这些发生的时间为 2 倍单位时间，即 $dm/dt = \frac{1}{2}$ ，因此对应的最小力为 $F = \frac{1}{2}$ （不考虑耗散力）。

注：(i) 拉起部分的质心开始时在起始点，2 倍单位时间后在 $x = \frac{3}{2}$ ，同样可以得出拉起部分质心的运动速度为 $\frac{3}{4}$ 。

(ii) 注意拉起部分的动量 ($p = mv$) 不等于拉起部分的质量乘以拉起部分的质心速度。

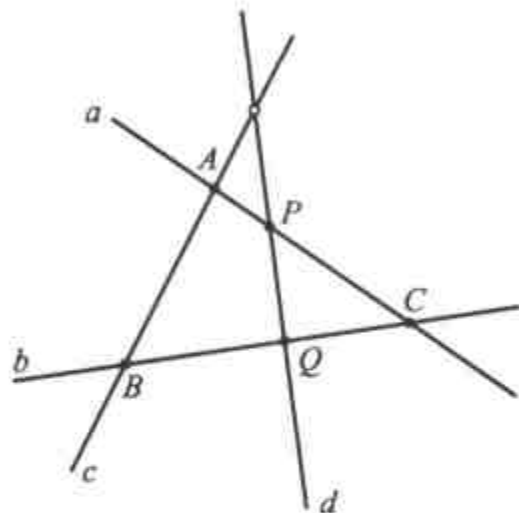
(iii) 似乎尝试求最小作用力需要用到能量守恒定律，即 $F \times 2L = mv^2/2$ ，这里 $L = 1$ 是地毯的长度，则可得到 $F = \frac{1}{4}$ ，这是上面求出的最小值的一半。但这个结果是错误的，因为地毯新被拉起的过程并非弹性碰撞的过程，能量的一半转

化为地毯的动能，而另一部分转化为耗散的能量，如热能。

题解 5

解法 1: 如果空间（这里是平面）和时间坐标建立在正交参考系中，轴分别为 x 、 y 和 t （一个时空图），因为蜗牛做的是匀速直线运动，所以其界线轨迹也是直线。相遇发生在两个蜗牛在相同的时间出现在相同的地方，也就是它们的界线相交，如图所示。

根据题目给出的信息，四条界线（ a 、 b 、 c 和 d ）已经成对相交于 5 个点，假设他们分别为 A 、 B 、 C 、 P 和 Q 。点 A 、 B 、 C 决定一个平面（界线 a 、 b 、 c 所在的平面），因为 P 和 Q 也在这个平面上，因此界线 d 一定也在此平面上。这意味着界线 c 和 d 也会相交，也就是说，第六次相遇一定会发生。

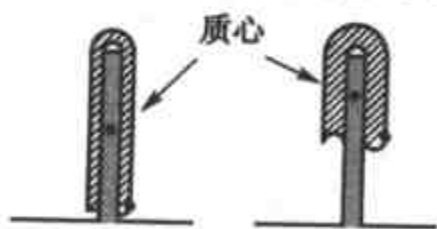


解法 2: 因为已经发生了 5 次相遇，所以一定有一只蜗牛已经与其他 3 个同伴相遇过。让我们假设这只蜗牛为 α 。想像我们坐在这只蜗牛背上，即选择令 α 停在原点的参考系。

其他三只移动的蜗牛（ β, γ, δ ）已经和 α 相遇过，并因此穿过了原点。又因为一共发生了 5 次相遇，三只中一定有一只（假设为 β ）已经遇到过它的两只移动的同伴。这一点只有（ β, γ, δ ）三只蜗牛在同一条直线上运动才有可能发生。因此，迟早 γ 和 δ 也会相遇。

题解 6

克服重力做的功可以由质心的升高求得。当虫对折时，其质心在任意一半的中心处，即在距离一端 $1/4$ 虫长的地方。如图所示。



可以得出，窄的扁虫子的质心升高了 5 cm，而宽的扁虫子的质心升高了 7.5 cm。因此两虫子做功总量的比为 2:3。

注: 虫子的质心并不总在虫身上的固定位置，事实上，有时候质心甚至不在虫的身上。当虫子是直的时候，其质心明显在虫身的中点。当虫子对折的时候，质心在 $1/4$ 虫长的地方。因此对于可变形的物体的质心不在物体的固定点上，其相对位置会发生变化。跳高运动就是这个原理，当跳高运动员的身体弯着越过横



杆的时候, 身体的质心仍在横杆之下。参见问题 32。

题解 7

(i) 让我们假设绳子的弹性系数为 k , 没有被拉伸时的绳长为 l_0 , 则绳子的最大长度为 $l_1 = h - h_0 = 23 \text{ m}$ 。同时在平衡点处绳长 $l_2 = (23 - 8) \text{ m} = 15 \text{ m}$ 。在初始状态和人处于最低位置的状态, 动能为零。如果忽略绳子的重量并假设人的质心在身高的一半处, 使用能量守恒定律则有

$$mgh = \frac{1}{2}k(l_1 - l_0)^2$$

另外, 在平衡态, 有

$$mg = k(l_2 - l_0)$$

将两式相除, 可以得到关于 l_0 的二次方程

$$l_0^2 + 2(h - l_1)l_0 + (l_1^2 - 2hl_2) = l_0^2 + 4l_0 - 221 = 0$$

由此可以解出 $l_0 = 13 \text{ m}$ 。

(ii) 蹦极者坠落的速度最大时, 其加速度为零, 因此这一定发生在最后平衡时的位置 ($l = l_2$)。

此时再使用能量守恒定律, 有

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(l_2 - l_0)^2 = mg(l_2 + h_0)$$

比率 m/k 同样可以由上面的平衡态方程求得

$$\frac{m}{k} = \frac{l_2 - l_0}{g}$$

将此带入能量方程, 可以得到蹦极者的最大速度为 $v = 18 \text{ m/s} \approx 65 \text{ km/h}$ 。很容易得到, 最大加速度发生在蹦极者达到最低点的时候。因为绳子的最大伸长 (10 m) 是平衡态时绳子伸长 (2 m) 的 5 倍, 所以绳子的最大张力为重力的 5 倍。因此作用在蹦极者身上最大的力为 4 倍重力, 最大加速度为 $4g$ 。

题解 8

如果冰山的底面积为 A , 高度为 H , 则冰山质量 $M = \frac{1}{3}AH\rho_{\text{冰}}$ 。如果冰山露出水面的高度为 h , 则由漂浮条件得到 $(H^3 - h^3)\rho_{\text{水}} = H^3\rho_{\text{冰}}$ 。当冰山多浸入水中一小段距离 x 时, 多浸没的体积为 $xA(h/H^2)$, 向上的推力为体积乘以 $\rho_{\text{水}}g$ 。由此可以得出振动的角频率 ω 为

$$\omega^2 = \frac{3h^2 \rho_{\text{水}} g}{\rho_{\text{冰}} H^3}$$

代入数值，可以得出振动周期约为 11 s。

题解 9

首先我们注意到，作为停在人行道上的结果，右前轮的悬吊弹簧要被压缩得厉害一些。我们可以用厘米单位来度量由于弹簧张力改变而带来的弹簧长度变化以及车体的升高，令弹簧被压缩得更多时，符号为正。净力矩相对任何轴必须为零，包括选四个轮子组成矩形的对角线为轴，因此对角线两端压力的变化一定相等。故车子的右前轮和左后轮被等量压缩，压缩长度为 x ，同时车子的左前轮和右后轮被等量伸长，伸长长度也为 x 。伸长量的大小和压缩量相同是因为弹簧的合力仍然等于汽车的重量这一点并未发生变化。

汽车左前轮和右后轮升高的高度为 x ，左后轮升起的高度为 $-x$ ，右前轮（人行道上的轮）升起的高度为 $8-x$ ，因为车体是刚性的，而左前轮和右后轮都升高了 x ，因此汽车底盘的中点也上升了 x 。与此相同，汽车底盘的另一个对角线也在一条直线上，右前轮的升高与左后轮的降低，相对于汽车底盘的中点应该相同，也就是 $(8-x)-x = x - (-x)$ ，从这个简单的等式可以得到 $x = 2 \text{ cm}$ 。综上所述，停在人行道上的汽车右前轮上的车体升高了 6 cm，左后车轮上的车体下降了 2 cm，而其他两个车轮上的车体上升了 2 cm。

运用相同的计算方法，可以很容易地得出，当汽车右侧两个轮子都停在人行道上的时候，悬吊弹簧的压缩情况并不发生变化。因此右侧的车轮简单地升高 8 cm，也就是人行道的高度。你也可以得出，以上结论并不依赖车上坐的人数和各人坐的位置。因为这里讨论的只是停在人行道上之前和之后，车体的相对变化。

注：在上面的解答中，车体的轻微旋转忽略不计。

题解 10

图 S10.1 显示了主人公在墙角的位置。图 S10.2 是一张简图，显示了他受到的重力 (mg) 墙的支持力 (N) 以及作用在他四肢上的静摩擦力 F_{fr} 。

设静摩擦力和竖直方向的夹角为 θ ，则如图 S10.3 所示，静态平衡条件为

$$mg = 2F_{\text{fr}} \cos\theta \quad \text{和} \quad N = F_{\text{fr}} \sin\theta$$

从这些方程中可以表示出法线分量 N ，也就是逃犯在爬墙时作用在墙上的力为

$$N = \frac{1}{2} mg \tan\theta$$

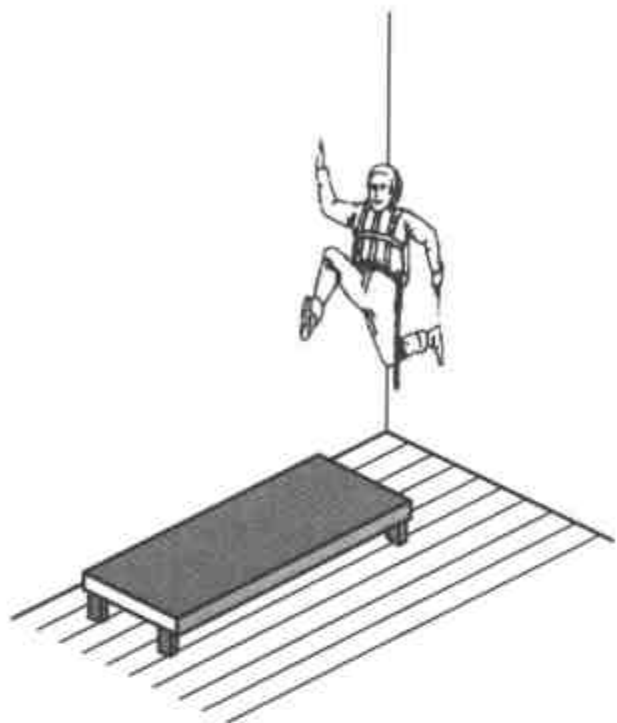


图 S10.1

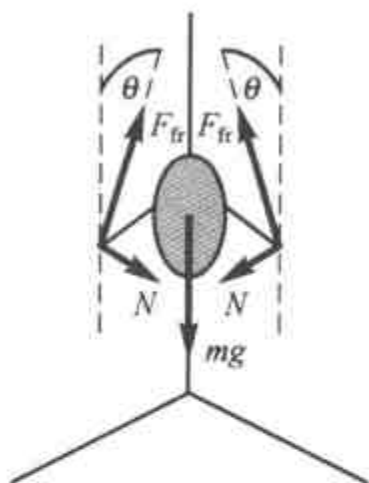
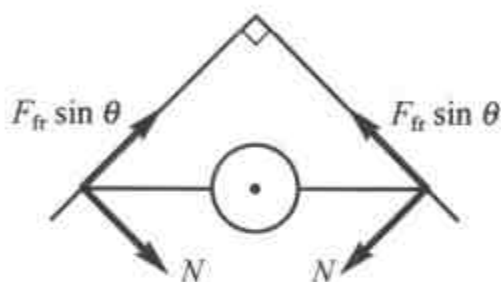


图 S10.2



顶视图

图 S10.3

因此需要的总力 F 可以由下式求得

$$F^2 = N^2 + F_{\text{fr}}^2 = \left(\frac{mg}{2}\right)^2 \frac{1 + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$$

可以利用下面的不等式得到最小的力

$$F_{\text{fr}} \leq \mu_0 N$$

由此可得

$$\sin \theta \geq \frac{1}{\mu_0} \quad \text{或者} \quad \tan \theta \geq \frac{1}{\sqrt{\mu_0^2 - 1}}$$

这里的 μ_0 是静摩擦因数。利用上两式中的任一式，可以得到最小的力为

$$F_{\min} = \frac{mg}{2} \sqrt{\frac{\mu_0^2 + 1}{\mu_0^2 - 1}}$$

此方程表明若要使主人公不从墙上掉下来，则静摩擦系数一定要大于 1。如果静摩擦系数趋于无穷大，则作用在他两只手上的力等于他身体重量的一半，这种情况相当于他被粘在墙上。

题解 11

如果静摩擦力足够大，则球不会从斜面上滑下。但仅是这一点不能完全满足平衡条件，还需要使球不能“滚”下斜面，此球由两个半球组成，这意味着不均匀的质量分布。如果质心和几何中心的距离小于 $\frac{1}{2}r$ (r 是球的半径)，则无论球的取向如何，



它受到的重力都会相对于球和斜面的接触点 P 产生一个使球滚动的力矩。如图 S11.1 所示。

现在将要说明的是此情形适用于任何由两个匀质半球形成的球体，不论两半球的密度各是多大。

考虑图 S11.2 中的阴影区域。由于对称性的原因，此部分的质心显然在点 A ，

也就是距离中心 O 为 $\frac{1}{2}r$ 的地方。

球剩下的部分将使整

个球的质心 S 更靠近点 O ，即 $OS < \frac{1}{2}r$ 。从前面的分析中可以得出，球不能平衡在 30° 的斜面上。在获得上面结论的过程中，我们假设阻止球滚动的力很小，即没有作用在点 P 的力矩。当斜面的表面覆盖着“维可牢”（一种尼龙搭扣）的时候，上面的结论就明显不再成立，甚至球可以粘在竖直的表面上。

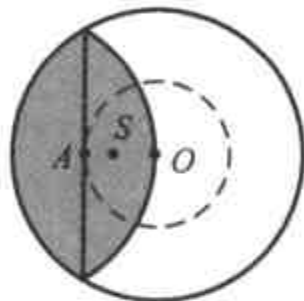


图 S11.2

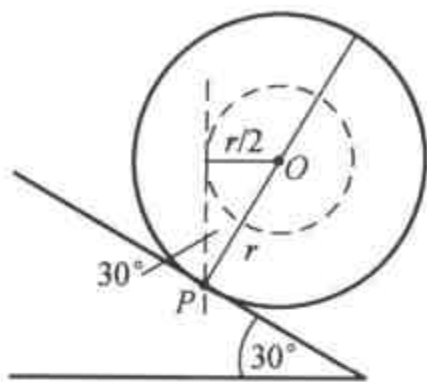


图 S11.1

题解 12

在一根轴平行于倾斜平面的正交坐标系中观察，球可以看作在水平的平面上弹跳，其竖直方向的重力加速度为 $g' = g \cos \alpha$ 。同时球也受到一个额外的恒定水平加速度（大小为 $g \sin \alpha$ ）。竖直运动中每次弹跳起的高度相同，即具有相同的周期。同时由于水平方向的加速度为常数，在两次弹跳之间球的速度均匀地增加。因此两次连续弹跳落地点之间的距离成等差级数增加。

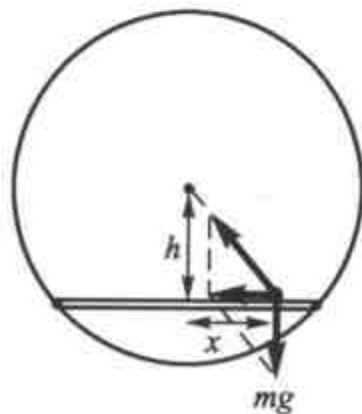
题解 13

假设平台的中点在中轴下，距离中轴为 h ，而仓鼠距离平台中点的距离为 x ，如图所示。

因为仓鼠的重力作用在转轮笼子轴上的力矩为 mgx 。另一方面，仓鼠移动利用平台的摩擦力来加速。当加速度为 a 的时候，则对平台产生一个大小为 ma 的反作用力，指向远离中点的方向。此力的力矩为 mah 。因此转轮笼子（以及平台）保持静态平衡要求上两个力矩相等，即

$$mgx = mah$$

考虑到方向，加速度可以写为 $a = -(g/h)x$ 。这表明仓鼠的运动是简谐振动，其





角频率 $\omega = \sqrt{g/h}$ 。

题解 14

(i) 自行车会向净力（向后作用的力和向前的摩擦力的合力）的方向运动。在一般的挡位，自行车会向后运动，但特别低的挡会使自行车向前运动。因为做的功总是正的，这意味着学生的手相对于地面向后运动。通常自行车的挡 N 是大于 1 的，也就是说，后轮的转动比脚踏板的转动速度快。但是反常的情况下，当 $N < r/R < 1$ 的时候（ R 为车轮的半径， r 是踏板力臂的长度），尽管受到向后的力，自行车也可能会向前运动。

(ii) 飞轮转动的方向和后轮转动的方向相同。

(iii) 较低的踏板相对地面的运动方向通常是向后上方。由 (i) 和 (ii) 的结果叠加得到，但是考虑档位和轮子的大小，通常 (i) 比较大。

注：很有意思的是，在踏板上有一个点，不管用多大的力作用在上面都不能令自行车运动。



题解 15

将太阳和地球之间的万有引力与使地球保持在近似圆形轨道上的向心力视为相等。将角速度 ω 用旋转的周期 T 表示，则有

$$G \frac{mM}{r^2} = mr\omega^2 = mr \frac{4\pi^2}{T^2}$$

这里的 m 和 M 分别为地球和太阳的质量， r 是两者之间的平均距离。将上式两端除以 m ，并将 M 表示为平均密度 ρ 和太阳的半径 R 的表达式如下

$$G \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{r^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} r$$

则可得到旋转的周期为

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho} \left(\frac{r}{R}\right)^3}$$

可以看出地球的旋转周期只与万有引力常数 G 、太阳的平均密度以及比率 r/R 有关。因此只要物质密度不变，任意缩放的太阳系其一年的长度都会保持不变。还可以看到只有太阳的密度和大小才与周期有关；而地球的数据与之无关。任何在大小上比太阳小的物体将按照同样的轨道以同样的周期运行。

注：也可以使用开普勒第三定律 $T^2/a^3 = 4\pi^2/GM$ 得到结果，这里 a 是地球椭圆轨道的半长轴。如果太阳的质量用平均密度表示，可以很清楚地看到，等比例缩小并不改变椭圆轨道上运行行星的周期。

题解 16

在地球位置上太阳造成的万有引力加速度与题目中一颗星在另一颗星位置上产生的万有引力加速度相同。这是因为，按照牛顿万有引力定律， g （单位质量受到的引力）只与引力中心的质量以及与被吸引物体之间的距离有关。而这些量在两个系统中是完全相同的。

因此，双星系统的成员将以与地球相同的加速度运行，但是轨道半径只有地球轨道半径的一半。这意味着，因为 $(a = r\omega^2)$ ，前者角速度的平方将两倍于地球运动的角速度。因此双星系统的周期将等于地球围绕太阳旋转周期除以 $\sqrt{2}$ ，即 $8\frac{1}{2}$ 个月。

题解 17

(i) 当卫星以速度 v 在半径为 R 的圆形轨道上运行时，其加速度 $g = v^2/R$ 。如果 R 为地球的半径（或者更精确一些，比地球半径稍大），那么 g 就必定是地球表面的重力加速度。这时卫星的速度就是我们定义的第一宇宙速度： $v_1 = \sqrt{Rg} = 7.9 \text{ km/s}$ 。如果考虑了地球的自转，发射卫星时并不需要提供全部的速度。而此“帮助”在赤道上最大，接近 0.5 km/s 。这意味着最小需要相对于地球表面 7.4 km/s 的初速度，但是必须在赤道或赤道附近向东方发射卫星才行。

(ii) 考虑到地球自转的轴，卫星在两极轨道（卫星通过两极）上的角动量为零。这个条件必须在发射的时候就得到满足，因为在发射后角动量不会发生变化。上面讨论的“帮助”在这里是无效的。事实上，地球自转的影响反而是一种障碍，因为卫星除了必须满足南北方向上 7.9 km/s 的速度外，还需要抵消由于地球自转带来的速度。如果卫星从极点附近发射，则后者的影响可以不考虑，考虑后者有明显的技术困难！

由此可以得出，将卫星发射到两极轨道上的初始速度至少为赤道轨道的 $7.9/7.4 \approx 1.06$ 倍，即，其动能至少为赤道轨道的 1.13 倍。看上去区别不大，但是事实上初速度每增加一点都需要付出巨大的努力。这是因为运载火箭本身也必须和卫星一样被加速，被发射的质量将随初速度的增加而呈指数增加。

(iii) 要脱离地球的吸引（就是说要远离地球），探测器必须要获得“逃逸速度”，或称为“第二宇宙速度”， $v_2 = \sqrt{2gR} = \sqrt{2}v_1 \approx 11.2 \text{ km/s}$ 。同样考虑地球自转的影响，在赤道附近向东发射，相对于地球 10.7 km/s 的速度就足够了。



(iv) 地球以大约 30 km/s 的速度绕太阳转动。要到达太阳，空间探测器必须以初速度 30 km/s 发射（或者更准确一点，29.5 km/s，考虑到地球自转影响减小的 0.5 km/s）。如果要离开太阳系，则空间探测器需要达到 30 km/s 的 $\sqrt{2}$ 倍，但是如果计算好时间和方向，地球公转的“初速度”可以从这个速度中减去，也就是说，12 km/s 的速度就足够了。

因此，将空间探测器送离太阳系比将它送到太阳上更容易（前者尝试已经成功了，而后者我们仍然在期待中）。如果考虑太阳系更外层的行星（火星、木星、土星），情况则更加有利。空间探测器如果在适当的时间以适当的方向发射，则会很明显地被这些行星“推一把”（即获得能量），这种现象就是所谓的“重力弹弓”。按照这样的设计，空间探测器不需要被发射得太远，它只需要到达火星或者木星，其余的就会“自动”发生。

注：如果火箭可以分两个阶段推动探测器，一个用于导入椭圆轨道，而另一个使火箭在远日点静止，则推动火箭撞击太阳所需的总能量要少于上面计算的结果。

题解 18

火箭必须要达到需要的总能量。假设无限远处重力势能为零，则火箭在地球表面上时其势能为负。火箭引擎释放能量使火箭的总能量增加，当火箭的动能和势能之和为正的时候，火箭会离开地球的重力场。

主引擎和辅助引擎释放的能量使得火箭以及其排出的燃料的总能量增加值为定值，这个值与何时引擎打开没有关系。但是，排出燃料落向地球时的速度却和火箭引擎何时工作有关。事实上，辅助引擎如果在火箭升至已经非常高的高度时工作，排出的燃料会落得更远，当其落地时，其速度和总能量也就更高。这意味着辅助引擎工作越早，火箭最终获得的能量越大。对于主引擎来说也是一样。如果只考虑能量，则推进的最佳方式是在尽量短的时间内以尽量大的排量使用引擎。

题解 19

质量分布，与因之而决定的质心，随着钢球的下沉而时刻不同。在 t 时刻，质心的位移为

$$s = vt \frac{\rho_b V - \rho_h V}{M}$$

其中 M 是系统的总质量， V 是球的体积， ρ_h 和 ρ_b 分别是蜂蜜和钢球的密度。得到这个式子是因为当球下沉一段距离 vt ，可以视作其和一个相同体积的蜂蜜球交换了位

置。由此可以得到系统的总动量为

$$P_{\text{总}} = \frac{Ms}{t} = v\rho_b V - v\rho_h V$$

上式中右边第一项为钢球的动量，第二项为蜂蜜的动量

$$P_{\text{蜂蜜}} = -v\rho_h V = -2 \text{ g} \cdot \text{cm/s}$$

负号表示蜂蜜动量的方向是向上的，其大小等于一个与钢球运动速度相等，方向相反的向上运动的蜂蜜球的动量大小。

题解 20

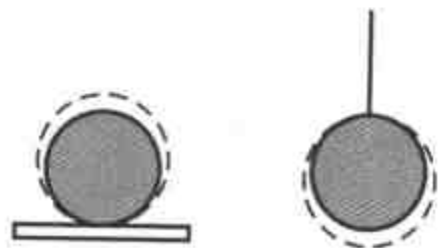
气体分子的平均动能与它们速度的平方成正比，而气体的内能与温度成正比。因此有 $v^2 \propto T$ 。如果容器壁的温度比气体温度高 ($T_1 > T$)，则容器壁弹回的气体分子的平均速度会因为碰撞而增加（容器壁温暖了气体），如果容器壁的温度比气体温度低 ($T_1 < T$)，则情况相反，弹回的分子具有较低的速度（气体冷却了）。

从分子的角度来看，气体对容器壁施加压力是因为气体碰撞墙壁并被弹回而带来的动量变化。对于给定的初始动量和碰撞比率，对分子动量改变的比率而言，从温暖的容器壁上被弹回要大于从较冷的容器壁上被弹回。因此，气体对温暖的容器壁要比对冰冷的容器壁施加更大的压力。

注：这个现象解释了辐射计（光轮）意外的转动。如果装在精密轴承上轮子的每一片都一面是黑，另一面是亮的，则当光照在轮子上的时候，轮子开始转动。第一感觉，我们会认为是光的反射造成的压力推动了轮子。但事实并非如此，实验显示，运动时亮的一面（反射光线而非吸收光线，并因此带来更多的光子动量的变化）是向前的。正确的解释是黑的一面温度升高较多，因而空气分子碰撞在该侧带来的压力要高于亮的一侧。

题解 21

作为热胀冷缩的结果，圆环的大小会增加。立在板子上的圆环的重心会升高，同时悬吊在线上的圆环的重心会降低。因此前者的势能增加而后者的势能减少，如图所示。



根据热力学第一定律，传到圆环上的热的效果不仅造成了内能的增加，也有一小部分的功用于膨胀而对空气做功（这部分对两个圆环是相同的）和改变重力势能。立在绝缘板上的圆环的势能增加了少许，因此其内能的增加要少于剩余的传导热能。相反的，对于悬吊的圆环，其势能的下降使之对内能的贡献为正。综上所述，悬吊



的圆环的温度要稍高一些。

在这里给出数值的估计是有必要的。对于半径为 10 cm 的铁球，温度上升 100 °C，则由于上述影响造成的温差 $\Delta T \approx 5 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}$ ，这在实际中是探测不到的。

题解 22

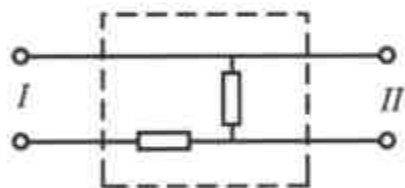
出于定量的考虑，我们假设电阻的大小和其两端的电压无关。这一点本身并不正确，但可以给出正确的定量解。如果供电电压为 V ，则灯泡的电阻 r_i 为 V^2/w_i ，其中 w_i 为灯泡的额定功率。当两个灯泡串联供电时，通过灯泡的电流强度为 $V/(r_A + r_B)$ ，在灯泡 i ($i = A$ 或 B) 上消耗的能量为

$$P_i = \frac{V^2}{w_i} \left[\frac{V}{(V^2/w_A) + (V^2/w_B)} \right]^2$$

按照最初的协议 ($w_A = w_B = 100 \text{ W}$)，则 P_A 和 P_B 都应该是 25 W。但是事实上， $P_A = 8 \text{ W}$ 而 $P_B = 32 \text{ W}$ ，因此 A 会在考试中失利。相比较之下， B 被认为是赢家，他得到了 32 W 的能量，却只付出 $(32 + 8) / 2 = 20 \text{ W}$ 的费用。但是另一方面，32 W 的灯对学习来说亮度仍然不够，因此 B 可能也会在考试中失利。

题解 23

一个简单的由两个电阻组成的回路 (如图所示)，即可得到题目中描述的行为。



题解 24

当桶装满水的时候，水的重心会高于桶的重心，而系统总的重心在其最高点；相对而言，这时摆动的周期最短。当水开始漏出，总重心的位置开始下降，摆动的周期变长。当水半满时，水的重心低于桶的重心，总的重心继续下降，周期也变得更长。当桶内没有水剩下的时候，总的重心与桶的重心的位置一致，这时重心的位置要高于前面所述的情况。即，当总的重心下降到某个确定点后开始上升。概括地说，最长的周期发生在总重心在最低点的时候，如下个题所示，即发生在总质点和水面平齐的时候。

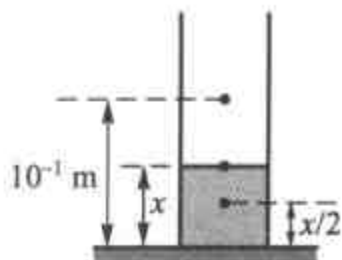
题解 25

很明显，最初加入的水在空烧杯的重心之下，因此会降低整个系统的重心。如果在某个阶段，加入的水在该时刻系统的重心之上，则总重心会上升。故要使系统最稳定，系统的质心要正好在水面上。

因此有

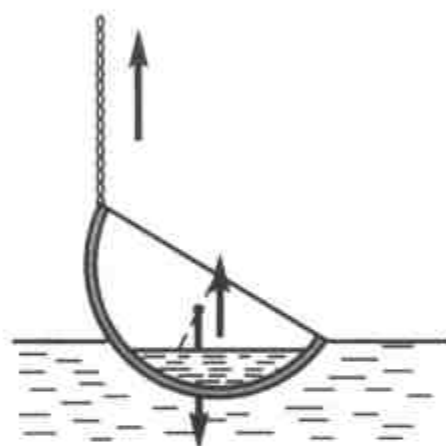
$$10^{-1} \times 10^{-1} + \pi(3 \times 10^{-2})^2 10^3 x \frac{x}{2} = x [10^{-1} + \pi(3 \times 10^{-2})^2 10^3 x]$$

可以得出 $x = 55.9 \text{ mm}$ 。



题解 26

首先假设碗的质心仍然在起始的高度。碗只围绕其质心转动（可能会有平移），但是并不沉入水中更多。在这种情况下，碗边与链子相对的一侧可能会低于水面，水会流入碗中。我们现在证明这其实是不可能发生的。



在上述假设的情况下，作用在碗上的力与初始的情况相同，即等于碗和水的总重量。因此在链子上不会有任何作用于碗上的力。另一方面，当碗的边沿上升的时候，碗的质心并不在力的作用线上，因此只当链子对碗没有任何作用力的时候才能够使力矩平衡。

这两个矛盾的条件证明了我们开始的假设是错误的，碗的几何中心不能够保持在同样的地方，而是必须要升高（因为当链子的作用力向上时，一个很小的力就足够）。这意味着即使碗边最低的点也会高于水面。

必须要考虑汤流入水中的可能性。这种情况会发生在碗中汤的高度高于湖中水的高度时，也就是汤的密度小于水的密度的时候。但实际上这是不可能的。

题解 27

作用在球上的力有重力 mg ，水的浮力以及洞边缘的支持力。当水的浮力等于球的重力的时候，支持力为零，球将离开洞口。

首先计算在水深为 h 的时候作用在球上的浮力。假设球浸没在水中的体积为 V ，这里 $V = V(r, R)$ 。现在想象球在洞中突出的部分被截去，而容器下的空间也充满了水，则浮力应为

$$F_1 = \rho g V(r, R)$$

ρ 是水的密度。事实上洞的下面没有水，力的一部分

$$F_2 = \rho g h \times \pi r^2$$

不存在，因此实际作用在球上的浮力为

$$F = \rho g V(r, R) - \rho g h \times \pi r^2$$

很显然，当 h 足够大的时候， F 是负值，表示“浮力”是向下的。随着 h 的减小，



F 逐渐增大, 在球的顶部仍然浸没在水中的情况下, 当水深为 h_0 的时候, F 增大到 $F = mg$ 。这时有

$$h_0 = \frac{V(r, R)}{\pi r^2} - \frac{m}{\pi r^2 \rho}$$

直接积分或者查几何手册, 可以得到球冠 (被截的球) 的体积为

$$V(r, R) = \frac{\pi}{3} \left[2R^3 + (2R^2 + r^2) \sqrt{R^2 - r^2} \right]$$

使用此公式可以将 h_0 表示为

$$h_0 = \frac{2R^3}{3r^2} + \frac{2R^2 + r^2}{3r^2} \sqrt{R^2 - r^2} - \frac{m}{r^2 \pi \rho}$$

别忘记上面的公式只有在球的顶部仍然被水覆盖的时候才成立, 也就是 $h > R + \sqrt{R^2 - r^2}$ 时, 否则只能修正 $V(r, R)$ 。与前面的球冠不同, 我们将计算直径两侧均截去后, 球的体积, 得到关于 h_0 的三次方程

$$h_0^2 (3\sqrt{R^2 - r^2} - h_0) = \frac{3m}{\pi \rho}$$

注: 当计算浮力 F 时, 代替洞的半径 r , 我们可以使用另一个变量: $l = \sqrt{R^2 - r^2}$, 如图 S27.1 所示。

通过带入上述变量, 或者通过对没入水中球体部分竖直方向分量的积分, 我们可以计算浮力为

$$F(h) = \begin{cases} \frac{3l^2(h-l) + 2l^3 - (h-l)^3}{3} \pi \rho g, & \text{如果 } h \geq R+l \\ \frac{2(R^3 + l^3) - 3(h-l)(R^2 - l^2)}{3} \pi \rho g, & \text{如果 } h \leq R+l \end{cases}$$

浮力 F 关于 h 的函数由两个部分组成, 在区间 $0 \leq h \leq R+l$, 浮力是 h 的三次方函数, 而当 $h \geq R+l$ 时, 浮力线性减少, 如图 S27.2 所示。

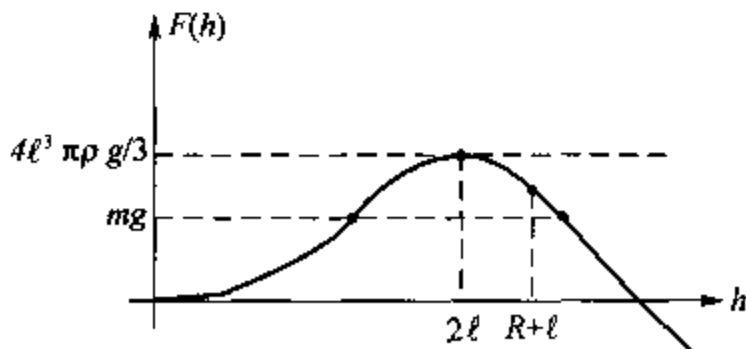


图 S27.2

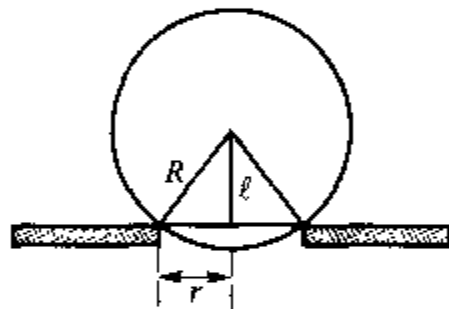


图 S27.1

通过找图上曲线 $F(h)$ 和直线 $F = mg$ 的交点, 可以得到临界的水深 h_0 。对 $F(h)$ 求微分可以得到在 $h = 2l$ 时浮力的最大值 $(4l^3 \pi \rho g / 3)$ 。如果球的重量大于这个数值 (这数值就是半

径为 l 的水球的重量), 则球不会浮离洞口, 不管水有多深。

题解 28

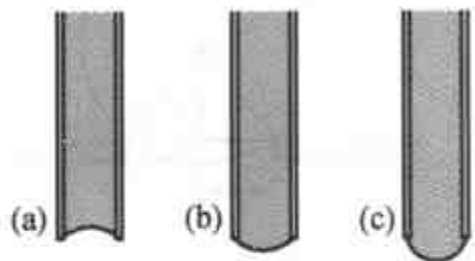
肥皂泡漂浮在空中, 这时肥皂泡壁以及其中的氦气的总质量等于它排开空气的质量。因为氦气的质量小于空气质量的一半, 所以氦气的质量小于它排开空气质量的一半。因此肥皂泡壁要比其中充的氦气重。

题解 29

对情况 (a), 很明显水不会从另一端流出。如果可以流出, 那么利用循环流出的水不断地驱动叶片, 可以建立一个“永动机”。

情况 (b) 和 (c) 就不是那么简单了。管子的另一端低于水面, 因此水的压力也会低于大气压力。在这种情况下, 水涌出造成的曲率半径对应的压力等于水和空气之间的压力差。(a)、(b) 和 (c) 三种情况对应的水面如图所示。

最弯曲的曲面 (曲率半径最小) 的情况为半球形, 对应的压力为高为 H 的水柱压力, 这个高度也就是水在竖直的毛细管中能上升的高度。如果空气和水之间的压力差大于 $\rho g H$, 则表面张力不足以保持管子中的水, 水将流出。这就是情况 (c) (假设图是按比例缩小的, 有 $H' > H$); 另一方面, 情况 (b) 中水不会流出。



题解 30

题目中描述的系统是球对称的, 因此形成的磁场也必须是球对称的。一个球对称的矢量场必然在处处都是辐射状的, 其大小只能和与原点间的距离相关: $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = b(r)\mathbf{r}/r$ 。

另外, 此磁场是无源的 (磁单极子), 磁流在任何时刻穿过任何平面都应为零。特别的, 考虑一个半径为 r 的环绕电容的球面, 则无源的必然结果只能是对任何 r 都有 $B(r) = 0$ 。这意味着题目中描述的电流不能产生任何磁场, 不论在电容器的球面内还是球面外。

注: 值得检验电动力学基本原理在平板电容和球形电容情况下是怎样被满足的? 是否围绕导体中的电流会产生磁场, 而磁场旋量的大小与电流的大小成正比?

题解 31

因为不管是电荷分布还是电荷的运动都是球对称的, 所以辐射必然是球对称的。磁场也是辐射状的, 而在距离球任意给定距离处, 磁场大小相同, 和方向无关。但是



这一点实际上是不可能的，因为这样的磁场（除非大小为零）意味着磁荷（磁单极子）的存在，实验已证明在自然界中并不存在这种东西。相似的原因，电场也是球对称的，其大小只与球表面的电荷总数有关，而与脉动的参数无关。由此，球外只能观察到静态的库仑场，球体并不向外发出辐射！

如果将球体的各部分单独考虑，其行为像偶极天线发出电磁波。但是不同部分发出的电磁波必须要累加。在考虑大小的时候同时考虑相位，则多个偶极天线发出的电磁波相互抵消，其结果可以通过直接（但是很长的）计算得到，而不涉及球对称性。

题解 32

在月球上还没有举行过跳高比赛。然而这里我们试着估计预期的效果。地球上的跳高记录已经超过 240 cm，一个好的男子跳高运动员身高超过 190 cm，质量大约 80 kg，其质心大约高于地面 110 cm。作为成功的一跳，他身体的任何一个部分要升到横杆的高度，但是他的质心却不需要。取得这样的成就，需要特殊的跳高技巧（背越式），我们可以使用慢动作镜头的录像来研究。即使达到跳起的最高点，跳高运动员的质心仍然低于横杆近 20 cm。而对于俯跃式和跨跃式，跳高运动员的质心必须要升高到横杆的高度。

我们的估计中最难的部分是比较跳高运动员离开地面和离开月球表面时的运动——假设其质心从最低点（跳起前的蹲伏状态）到最高点（即将离开地面的瞬间），在地球上和月球上均升高了 $s = 40$ cm，其后他的肌肉做的功使他的质心在地球上从 110 cm 升高到 220 cm，即升高了 110 cm。跑跳的效果在这里忽略不计，或者说在地球和月球上其效果相同。我们估计的基础是假设在两种情况下使用相同的跳高技巧会做相同的功。做的功等于身体的动能和质心的势能的和， $W = \frac{1}{2}mv^2 + mgs$ 。他离开

地面时的速度可以用关系 $v^2 = 2gh$ 得到。因此，总功为

$$W = mg(h + s) = 80 \text{ kg} \times 10 \text{ m/s}^2 \times 1.5 \text{ m} = 1200 \text{ J}$$

假设跳高运动员在月球上做的功是相同的，而其在离开月面之前重心的升高 s 是不变的。月球上的重力加速度仅为地球上重力的六分之一，即在月亮上跳起的能量方程 $1200 \text{ J} = \frac{1}{6}mg(s + h')$ ，由此可以推出 $h' = 8.6 \text{ m}$ 。这是在月球上跳高运动员质心在竖直方向上升高的高度，加上质心的原始高度 110 cm，以及运动的特殊技巧附加的 20 cm，可以得到估计的月球上的记录为 $9.9 \text{ m} \approx 10 \text{ m}$ 。

注：这个问题不像通常回答的那样——只意识到重力加速度的不同——认为

月球上的纪录将是地球上记录的六倍，即大约 14~15 m。按照上面的分析，这是个乐观的结果。而即使是我们上面的结果也有些过分乐观了，因为这要求我们的跳高运动员要在更短的时间内做相同的功，即需要更强的能量输出。可以看到跳高运动员在月球上必须将他的能量输出提升 15%。如果他离开地（月）面的速度相同，则会得到 8 m 的结果。若考虑所有的情况，最可能的高度大约是 9 m。

题解 33

(i) 球 B 在竖直方向上的加速度始终是 g ，这使它下落 1 m 所需要的时间可以被确定（大约是半秒）。而单摆摆锤的运动就相对复杂得多，因为小振幅近似不再成立，它运动的时间不容易被确定。而可以确定的是，因为线作用一个向上的力在摆锤上，所以它竖直方向上的加速度一定小于 g 。因此球 A 在竖直方向上的运动时间比球 B 竖直方向上做自由落体运动的时间要长。也就是球 A 运动的时间较长。

(ii) 单摆摆锤的轨迹是一个四分之一圆（路径大约 1.5 m）。另一个球，轨迹为抛物线，其长度不能用初等的办法得到，然而可以很容易看到它碰到地面的点距离桌子边沿的距离 $v t = \sqrt{2 \times g \times 1} \cdot \sqrt{2 \times 1 / g} = 2 \text{ m}$ ，因此其路径长度不小于运动的起始点和终点之间的最短距离，即 $\sqrt{5} \text{ m} \approx 2.2 \text{ m}$ 。

综上，小球 B 与单摆摆锤 A 相比，运动的路径较长，而运动时间较短。

题解 34

对于匀速圆周运动，其切线方向上的加速度为零，而径向的加速度为 v^2/R ，其中 v 是摆锤的速度， R 是圆周的半径。

重力在径向和切线方向的分量分别为 $mg \sin \theta$ 和 $mg \cos \theta$ ，如图 S34.1 所示。绳子作用在摆锤上的力 \overline{PQ} 必有分量

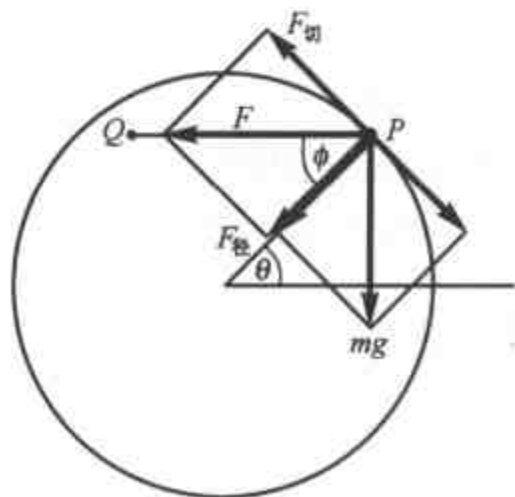


图 S34.1

$$F_{\text{切}} = mg \cos \theta \quad \text{和} \quad F_{\text{径}} = \frac{mv^2}{R} - mg \sin \theta$$

从以上表达式可以导出力 F 的方向，并由此得出绳子的方向，用 ϕ 描述

$$\cot \phi = \frac{F_{\text{径}}}{F_{\text{切}}} = \frac{v^2}{gR \cos \theta} - \tan \theta = \frac{1.83}{\cos \theta} - \tan \theta$$

在图 S34.2 中，可以看到绳子两端相应的位置。相邻数字代表 θ 相差 15° ，绳子的另一端 Q 可以由 P 点的位置求得，其位置在方向角为 ϕ ，距离为绳长的地方。



题解 35

见图 S35.1 所画的两条线，竖直方向的路径上加速度大一些，但是路径的长度也要长一些。垂直于斜面的路径最短，但是相对的加速度较小，可以假设用时最短的路径介于两者之间。

接下来证明下面的辅助定律：从同一时刻 $t=0$ ，从同一点向不同的方向上的无摩擦斜面滑下的物体，在以后的任一时刻，其位置在一个圆上。

如图 S35.2 所示，任意的圆 C ，其最高点为起始点 P ，经过时间 t ，沿竖直金属丝

下滑的物体做自由落体运动，其下滑距离为 $\frac{1}{2}gt^2$ ，这也就是圆 C 的直径。而一个物体沿与竖直方向成 α 角滑下的加速度为 $g \cos \alpha$ ，同样在时间 t 内滑下一段距离，从 P 点量起，为 $\frac{1}{2}g \cos \alpha^2 = d \cos \alpha$ 。这也正是金属线被圆 C 所截的长度。因此与 α 无关，第二个物体也在圆 C 上，辅助定理得证。



图 S35.1

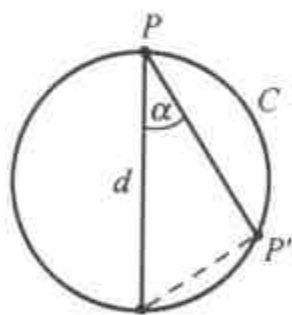


图 S35.2

使用辅助定理很容易求解本题。物体同一时间从同一点 P 出发，向不同的方向运动，其位置始终形成一个圆，圆的大小随时间增长，并以 P 为最高点。经过一段时间，圆接触斜面，在接触点 P' ，圆与斜面相切。物体沿直线 PP' 运动，将以最短的时间到达斜面。事实上，题目中的情况是三维的，从 P 点出发的物体在任一时刻在一个球面上，最短时间的方向可以通过连接 P 和球最早接触斜面的点而求得。然而，对于这个问题，选取过 P 点的平行于斜面最大斜率方向的球的截面就足够了，我们就是这样做的。

图 S35.3 中显示了斜面与水平面成 α 角的情况，对应最短时间的线 PP' 与竖直方

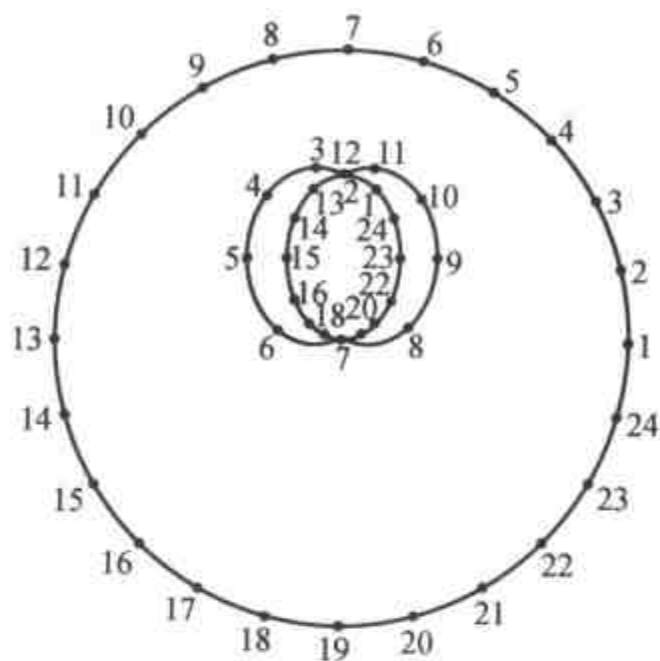


图 S34.2

向夹角为 $\alpha/2$ ，即最优路径是本题解第一段所述两条线的角平分线。

题解 36

使用固定在分针臂上的转动参考系，则题目的解惊人地简单。在此参照系中，分针是静止的，而时针做“逆时针”转动。当时针末端的速度的作用线通过分针的末端时，时针和分针离开的距离增加得最快。在这种情况下，时针臂、分针臂以及连接其末端的线成一个直角三角形，如图所示。

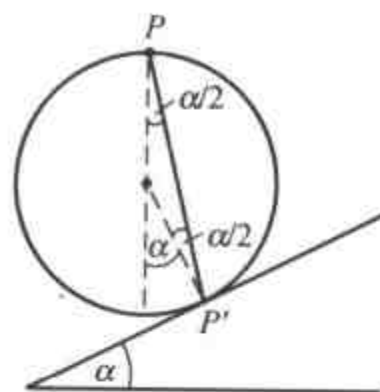
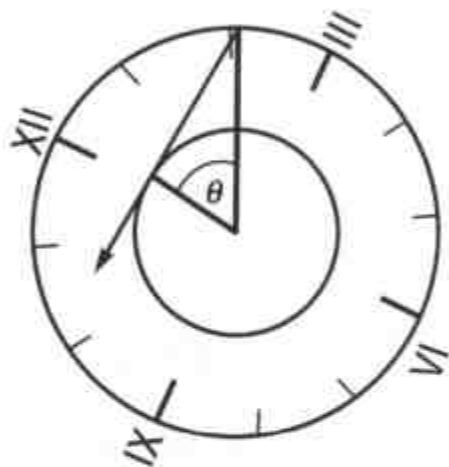


图 S35.3

因为分针的长度是时针长度的两倍，其间的角度可以得到 $\theta = \arccos(1/2) = \pi/3$ 。现在我们可以计算午夜过后的什么时刻时针和分针间的夹角为 θ 。因为分针转动的速度是时针转动速度的 12 倍，故时针与 12 点之间的夹角可以由 $12\phi - \phi = \theta$ 得出，即 $\phi = \frac{1}{11}\theta$ 。

因此，从 12 点算起，分针移动过的角度为 $\frac{12}{11}\theta = \frac{4}{11}\pi$ ，时间恰恰为午夜过后 11 分钟。在一些后续时间时针与分针间的夹角也会与上面相同（每小时两次）。而

第二次两针成此夹角时，分针和时针的末端将以最快的速度靠近。

注：本题硬解也能解出。从时针和分针尖端距离的表达式，可以求出其相对速度，然后由其驻点的位置可以确定钟臂所处的角度。

题解 37

使用如图所示的坐标系，石头的运动可以由下面的关系表示：

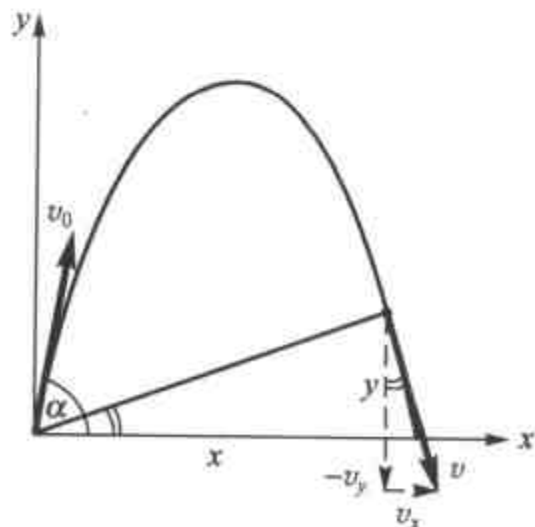
$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{g}{2} t^2$$

$$v_x = v_0 \cos \alpha, \quad v_y = v_0 \sin \alpha - gt$$

当石头的速度垂直于其位置矢量时，石头距离原始位置最远。这种情况发生的条件为

$$\frac{y}{x} = -\frac{v_x}{v_y}$$

由此可以得出时刻 t 的二次方程





$$t^2 - \frac{3v_0 \sin \alpha}{g} t + \frac{2v_0^2}{g^2} = 0$$

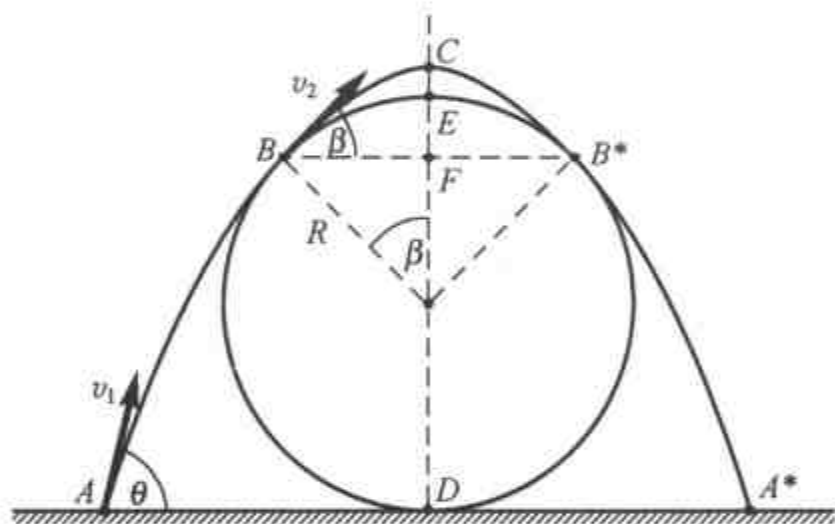
如果这种情况不会发生，则上面方程的判别式必须为负，即

$$\left(\frac{3v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2 < 4 \left(\frac{2v_0^2}{g^2} \right)$$

由此，要使石头始终远离抛石者，必须有 $\sin \alpha < \sqrt{8/9} = 0.94$ ，即 $\alpha < 70.5^\circ$ 。

题解 38

蚱蜢的轨迹是抛物线，并与树干相交于两个对称分布的点， B 和 B^* ，在树干的两端。（目前我们对于这些点的情况还不了解——它们可能是也可能不是汇合于树干的顶点 E ）。蚱蜢从 A 点以速度 v_1 起跳，起跳方向与平面成 θ 角，如图所示。在切点 B 和 B^* ，蚱蜢的速度为 v_2 ，与水平面间的角度为 β 。



为了简化，选择 β 为独立变量，在点 B ，速度的竖直分量为

$$v_2 \sin \beta = gt_2$$

其中 t_2 为轨迹 BC 段的飞行时间（ C 是抛物线的顶点）。相对的水平位移 BF 为

$$v_2 t_2 \cos \beta = R \sin \beta$$

将等式两端相乘，有

$$v_2^2 = \frac{gR}{\cos \beta}$$

在轨迹的 A 点和 B 点间使用能量守恒定律得到

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m v_2^2 + mg(R + R \cos \beta)$$

因此有

$$\begin{aligned} v_1^2 &= v_2^2 + 2gR(1 + \cos\beta) \\ &= \frac{gR}{\cos\beta} + 2gR(1 + \cos\beta) \\ &= 2gR\left(1 + \cos\beta + \frac{1}{2\cos\beta}\right) \end{aligned}$$

使用微分的方法可以得出 v_1 的最小值。然而使用算术表示和几何表示的不等式，可以用不那么复杂的办法来求解

$$\frac{1}{2}\left(\cos\beta + \frac{1}{2\cos\beta}\right) \geq \sqrt{\cos\beta \frac{1}{2\cos\beta}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

因此 $\cos\beta + 1/(2\cos\beta)$ 的最小值为 $\sqrt{2}$ ，并由此得出 $\beta = 45^\circ$ 。因为 $1.5 > \sqrt{2}$ ，故 $\beta = 0$ 的情况需要更大的初速度；这意味着最小初速度对应的轨迹并不到达树干的顶点。在抛物线的顶点蚱蜢的重力势能大于在树干顶点处的重力势能，但是其动能和总能量要小于过树干顶点轨迹对应的动能和总能量。

计算最小初速度的数值得到

$$v_1^{\min} = \sqrt{2gR(1 + \sqrt{2})} \approx 2.2 \text{ m/s}$$

注：(i) 说明抛物线轨迹高于 B 的部分不与树干相交并不很困难。

(ii) 同样可以确定起跳角度 $\theta = 3\pi/8 = 67.5^\circ$ ，起跳距离

$$AD = R(1 + \sqrt{2}/2) \approx 17 \text{ cm}$$

(iii) 需注明的是点 F 为抛物线的焦点。

题解 39

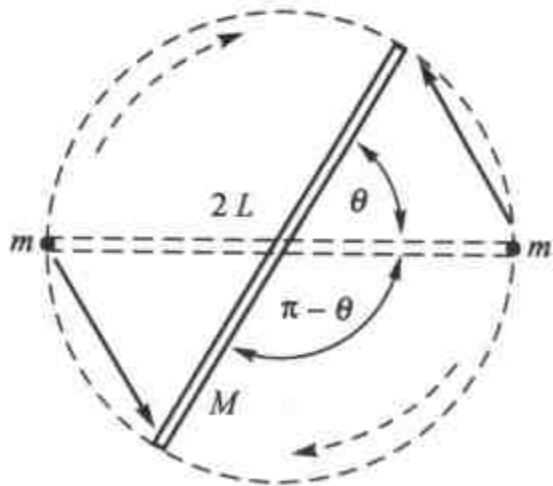


图 S39.1

跳蚤跳起的方向和毛发的原始方向之间的角度为 $\frac{1}{2}(\pi - \theta)$ ，它们在空中的时候，毛发由于受到反作用力力偶的作用，向相反的方向转动角度 $\pi - \theta$ ，则两个跳蚤将落在毛发上和初始位置相反的一端。

令 v 和 α 分别为起跳的速度和角度，毛发的长度为 $2L$ 。飞行时间 t 和通常一样，为 $2v \sin\alpha/g$ ，飞行距离为 $vt \cos\alpha$ 。从几何性质（见图 S39.1）可得，飞行距离也等于 $2L \sin(\theta/2)$ 。现在，毛发的两端均受到一个推



力的作用，但是只有切线方向上的分量对作用在毛发上的力偶有贡献。因此有

$$2mvL\cos\alpha\cos\frac{\theta}{2}=I\omega, \text{ 其中 } I=\frac{1}{3}ML^2$$

同时满足条件 $\omega t = \pi - \theta$ 。

从式中消去 α 、 t 和 ω ，可以得到 θ 必须满足方程

$$\frac{6m}{M}\sin\theta + \theta = \pi$$

无论 n 为何值，函数 $f(\theta) = n\sin\theta + \theta$ 满足 $f(\pi) = \pi$ 。另外， $f'(\theta) = n\cos\theta + 1 = 0$ 在 $0 < \theta < \pi$ 有解，要求 $n > 1$ 。因此若 n 严格大于 1，则 $f(\theta)$ 在确定的 $\theta < \pi$ 的范围内，有最大值。这一点，连同我们对 $f(\pi)$ 的结论，显示当满足 $n > 1$ 时， $f(\theta) = \pi$ 在 $\theta < \pi$ 的范围内有解。从题目中可得，此条件为 $m > M/6$ 。图解见图 S39.2。

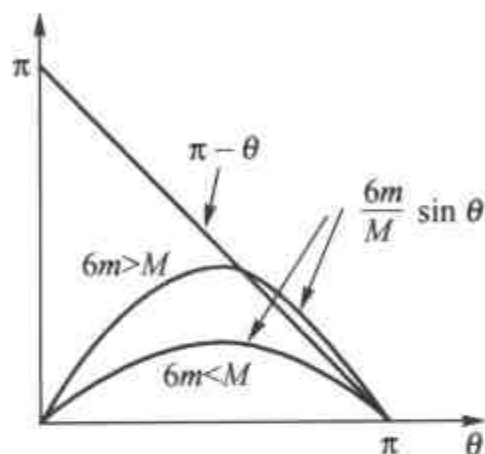


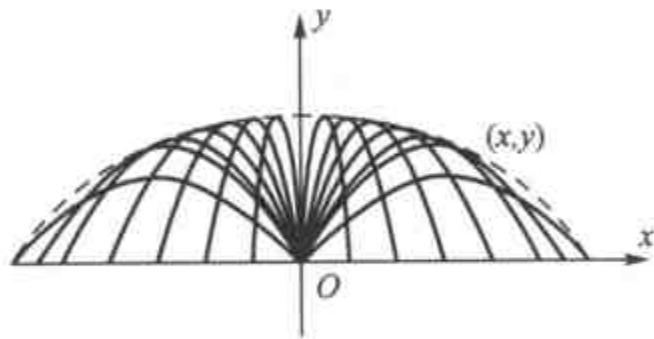
图 S39.2

题解 40

水“钟”在竖直方向是柱对称的。因此考虑一个截面就足以求解此问题。令点状的玫瑰喷嘴在 xy 坐标系的原点，则喷射的水流沿着从原点出发的抛物线的路径。我们数学方面的任务就是要找到这些抛物线集的包络面（图中由点线表示）。

众所周知，一个物体以初速度 v ，与水平面成 α 角度抛出，其路径满足方程

$$y = x \tan \alpha - \frac{g}{2v^2 \cos^2 \alpha} x^2$$



上式可以写成

$$\frac{gx^2}{2v^2}u^2 - xu + \left(y + \frac{gx^2}{2v^2}\right) = 0$$

其中 $u = \tan \alpha$ 。

如果点 (x, y) 固定，则上式为关于 u 的二次方程。方程有实数解，要求判别式非负，即

$$x^2 - 4 \frac{gx^2}{2v^2} \left(y + \frac{gx^2}{2v^2}\right) \geq 0$$

则有

$$y \leq \frac{v^2}{2g} - \frac{g}{2v^2} x^2$$

这个不等式将 xy 平面用一条抛物线分成两个部分。水可以到达在抛物线下的点（在三维空间是一个旋转抛物面），但是不能到达其上的点。这条限制的抛物线就是待求的包络线。

因此，水“钟”是一个旋转抛物面，从限制曲线的方程可以很清楚水“钟”的高为 $v^2/2g$ ，水“钟”在池水的表面形成一个圆，其半径可以由条件 $y=0$ 确定，得出 $r=v^2/g$ 。这意味着水池的直径至少要是水“钟”的高度的四倍，才能保证没有水流失掉。

题解 41

在竖直方向和水平方向粒子均受到均一的加速度，很明显有下式

$$x = vt \cos \theta + \frac{1}{2} \frac{EQ}{m} t^2 \quad \text{和} \quad y = vt \sin \theta - \frac{1}{2} gt^2$$

当 $y=0$ 时，消去 t 将得到提示中显示的范围方程。其最大值为

$$\frac{v^2}{mg^2} \left(EQ + \sqrt{m^2 g^2 + E^2 Q^2} \right), \quad \text{当} \quad \tan 2\theta = -\frac{mg}{EQ}$$

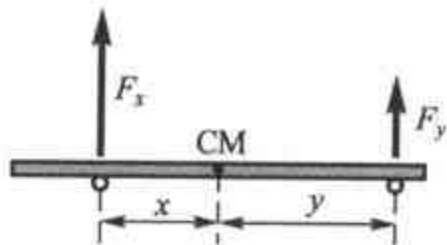
对正电荷 Q ， $\tan 2\theta$ 的符号为负表示 θ 要大于 $\pi/4$ 才能获得电场提供的“顺风”。

注：非常清楚，本题与求斜面上以固定速度投掷物体的最远距离在本质上是

题解 42

要满足棍子的静态平衡条件（竖直方向上的净力和净力矩分别为零），手指在距离棍子的质心距离 x 和 y 处的反作用力分别为

$$F_x = mg \frac{y}{x+y} \quad \text{和} \quad F_y = mg \frac{x}{x+y}$$



假设棍子首先在左手指上滑动。在任意时刻作用在手指上的摩擦力为

$$F_{\text{摩擦}} = \mu_{\text{动}} F_x = \mu_{\text{动}} mg \frac{y}{x+y}$$

对缓慢的移动（水平方向加速度忽略不计），这个力等于作用在右手指上的净摩擦力，静摩擦力的最大值为



$$\mu_{\text{静}} F_y = \mu_{\text{静}} mg \frac{x}{x+y}$$

因而左边的手指滑动, 只要

$$\mu_{\text{动}} y \leq \mu_{\text{静}} x \quad \text{即 } x \geq ky$$

其中 $k = \mu_{\text{动}} / \mu_{\text{静}} \leq 1$ 。

初始状态 $x_0 = y_0 = \frac{1}{2} \ell$, 所以左手指滑动直到 $x = x_1 = k\ell/2$, 同时克服连续变化的摩擦力做功。滑动过程中做的功可以由积分运算求得

$$\begin{aligned} W(x_0 \rightarrow x_1) &= -\int_{x_0}^{x_1} \mu_{\text{动}} F_x dx \\ &= -\mu_{\text{动}} mg \int_{\ell/2}^{k\ell/2} \frac{\ell/2}{x + (\ell/2)} dx = mg\mu_{\text{动}} \frac{\ell}{2} \ln \frac{2}{k+1} \end{aligned}$$

在第二个阶段, 右手指滑动; 这时 $x = x_1$ 为常数, 而 y 将从 $\ell/2$ 变化到 $y_1 = kx_1 = k^2 \ell/2$ 。此过程做的功为

$$W(y_0 \rightarrow y_1) = -\int_{y_0}^{k^2 y_0} \mu_{\text{动}} mg \frac{x_1}{x_1 + y} dy = mg\mu_{\text{动}} \frac{\ell}{2} k \ln \frac{1}{k}$$

同样的方法, 可以计算随后的棍子在左右手交替滑动的各阶段。总的功为

$$\begin{aligned} W &= mg\mu_{\text{动}} \frac{\ell}{2} \left[\ln \frac{2}{1+k} + (k+k^2+k^3+\dots) \ln \frac{1}{k} \right] \\ &= mg\mu_{\text{动}} \frac{\ell}{2} \left[\ln \frac{2}{1+k} + \frac{k}{1-k} \ln \frac{1}{k} \right] \end{aligned}$$

如果 $\mu_{\text{动}} \ll \mu_{\text{静}}$ (即 $k \ll 1$), 做功只需一步即可, 其值为

$$W \approx \frac{\mu_{\text{动}} mg}{2} \ell \times \ln 2$$

另一方面, 如果 $\mu_{\text{动}} \approx \mu_{\text{静}}$ (即 $k \approx 1$), 则有

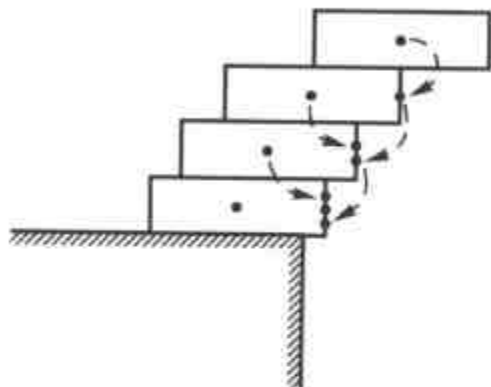
$$\frac{k}{1-k} \ln \frac{1}{k} \approx 1$$

上式可以用计算器得到, 也可以通过令 $k = 1 - \delta$, 由 $\ln(1 - \delta) \approx -\delta$, 再令 $\delta \rightarrow 0$ 得到。因此有

$$W \approx \frac{\mu_{\text{动}} mg}{2} \ell$$

题解 43

令砖的长度为单位长度，并从最顶端开始移动。最上面的砖可以移动到半块砖突出桌面，然后上面的两块相对第三块砖移动，如图所示。上两块砖共同的重心必须不能超出第三块砖的边缘。因此第二块砖只能移动 $\frac{1}{4}$ 。普遍的策略是，移动每一块砖直到它们共同的重心正好在下面的砖的边缘之上。



在第三次移动之前，必须要找出上面三块砖共同的重心。上面两块砖共同的重心在第三块砖的边缘，并有两倍的重量，因此距离 $\frac{1}{2}$ 必须按比

率 2:1 划分；第三块砖只能被移动 $\frac{1}{6}$ 。

对接下来的（第四块）砖，上面三块在第四块边缘之上的砖有三倍的重量，第四块砖的重心与边缘之间的距离 $\frac{1}{2}$ 必须按比率 3:1 划分；即第四块砖只能被移动 $\frac{1}{8}$ 。

将这些位移相加，结果 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{25}{24} > 1$ 。换句话说，最顶部的砖可以突出到悬在桌子之外。

在以上的求解中，每一步都考虑了临界的不稳定平衡位置。实际中移动的量要选择稍稍小于计算的结果。但是最顶部的砖悬在桌子之外仍然是可能的。

上面的解可以推广到无限数量的砖，第 k 块砖的重心与边缘之间的距离 $\frac{1}{2}$ 必须按比率

$(k-1):1$ 划分；因为上面 $(k-1)$ 块砖的重心位于第 k 块砖边缘的上方。因此第 k 块砖只能被移动 $\frac{1}{2k}$ 。如果一共有 n 块砖，则最顶部一块砖的位移可以计算为

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{k} + \cdots + \frac{1}{n} \right)$$

因为自然数的倒数之和趋于无穷大，这可以通过下面说明

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \cdots >$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$$

所以任意的位移可以通过适当数目的砖得到，即不存在极限。



题解 44

令板的质量为 $2m$ ，支持力和摩擦力分别为 N_1 、 N_2 和 F_1 、 F_2 ，如图 S44.1 所示。竖直方向和水平方向的平衡方程为

$$N_1 + F_2 = 2mg, \quad F_1 = N_2$$

由关于板子折角的力矩平衡得到

$$(mg + N_2)R = N_1R$$

控制摩擦力的条件为

$$F_1 \leq \mu N_1 \quad \text{和} \quad F_2 \leq \mu N_2$$

由上面的方程，可以导出下面的三个关系：

$$F_1 + F_2 = mg$$

$$F_2 \leq \mu F_1$$

$$F_1 \leq \mu N_1 = \mu(mg + N_2) = \mu mg + \mu F_1, \quad \text{即} \quad F_1 \leq \frac{\mu mg}{1 - \mu} \text{ ①}$$

在导出最后的关系式时，假设 $\mu < 1$ 。

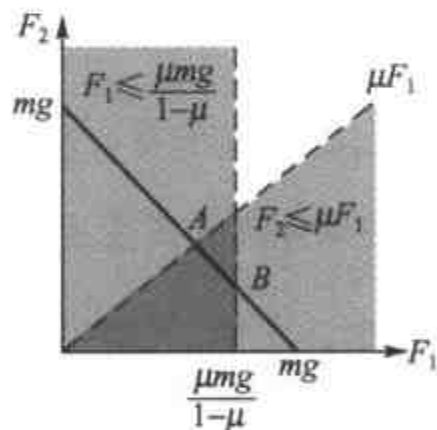


图 S44.2

上面的三个关系可以被画在 $F_1 - F_2$ 坐标系中，如果静摩擦系数相当大，则情况如图 S44.2 所示。

在这种情况下问题没有惟一解；在点 A 和点 B 之间的线段所表示的区域，摩擦力的范围可以满足净平衡条件。

如果静摩擦系数很小，则情况如图 S44.3 所示。此时本题无解。两个不等式的边界线的交点在直线 $F_1 + F_2 = mg$ 上时，如图 S44.4 所示，可以求得静摩擦系数可能达到的最小值。此时，可以用等式来替代上面的不等式，经过计算可以得到静摩擦系数的最小

值为 $\mu = \sqrt{2} - 1 \approx 0.414$ 。

F_2 取负值的情况也需要考虑。当 μ 大于 0.5 时， F_1 的上限大于 mg ，这就使得 F_2 取负值成为可能，如图 S44.5 所示。

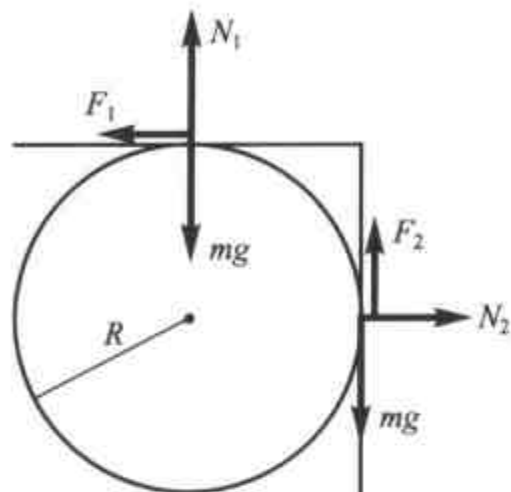


图 S44.1

① 原文上公式为... $\mu mg = \mu F$ 符号有错，已更正。

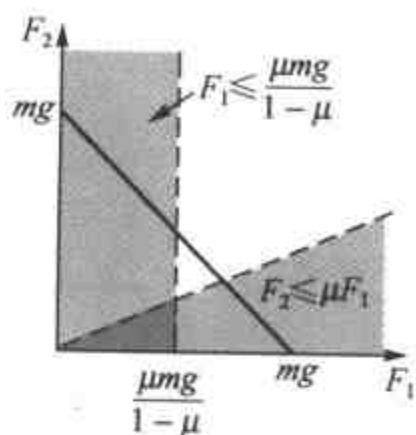


图 S44.3

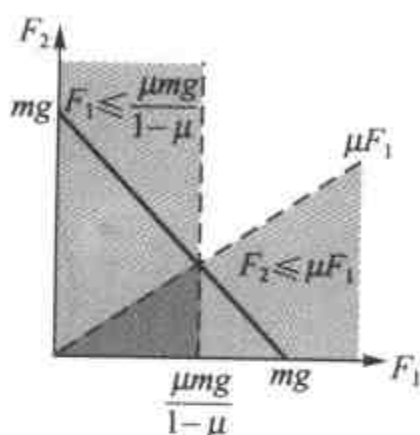


图 S44.4

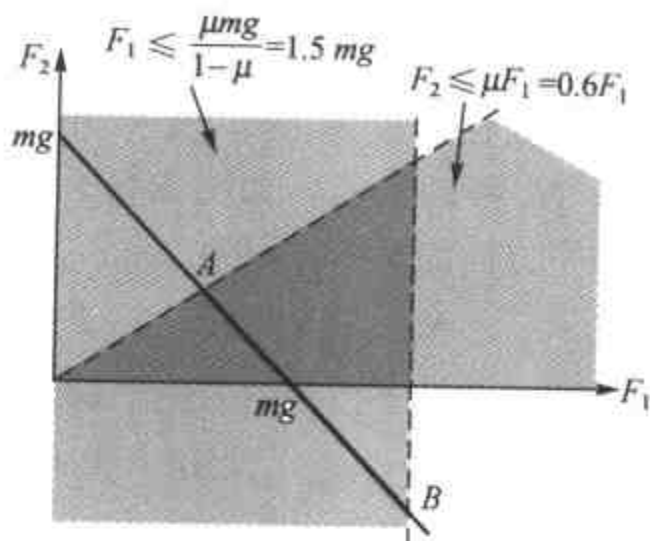


图 S44.5

题解 45

空气阻力忽略不计，球的碰撞也看做完全弹性的。如果球从高度 h 下降，到达地面时的速度为 $v = \sqrt{2gh}$ 。下面的球先撞击地面，接着与上面的球碰撞。当下面的球在两球碰撞后静止时，上面的球得到最大可能的能量。

下面的球以速度 v 弹起，与上面以速度 $-v$ 的速度下降的球发生碰撞。因为质量为 m_2 的球碰撞后的速度为零，能量和动量守恒的方程表示为

$$(m_2 - m_1)v = m_1 u \quad \text{和} \quad (m_1 + m_2) \frac{v^2}{2} = m_1 \frac{u^2}{2}$$

上面的球碰撞后的速度 u 以及两球质量的比率可以通过上述等式求得，结果为 $u = 2v$ 和 $m_1/m_2 = \frac{1}{3}$ 。因为弹回的速度是原速度的 2 倍，上面的球弹起的高度为 $4h$ 。

令人惊奇的是，上面的球还能够弹起得更高。当 $m_2 \gg m_1$ 时，上面的球在碰撞后只获得了总能量中很小的一部分，但是在理想的情况下，上面的球弹起的速度为 $3v$ ，弹起的高度为 $9h$ 。这一点听起来是难以置信的，但是确实是符合能量守恒定律的。

读者若对理论问题感兴趣，可以将问题推广到 n 个球的情况，对实际试验感兴趣的读者可以尝试多组不同大小的球的下落，它们弹跳的方式十分有趣！

题解 46

对第一次碰撞，由动量和动能守恒得到

$$M\sqrt{2gh} = MV + \mu v$$

$$mgh = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\mu v^2$$



消去 V 得到 v 的表达式 $2M\sqrt{2gh}/(M+\mu)$ ，而动能传递给中间球的部分 $4\mu M^2 gh/(\mu+M)^2$ 。作为第一个球初始能量的部分，其分数为 $4\mu M/(\mu+M)^2$ 。传给最终球的能量分数，是上面两个这样表达式的乘积，但是用不同的质量对。因此要令最终球的能量最大化， μ 必须选择令 $\mu^2/(\mu+M)^2(\mu+m)^2$ 最大，即 $\mu = \sqrt{Mm}$ 。由此选择可得总能量传输的分数为 $16Mm/(\sqrt{M} + \sqrt{m})^4$ ，最后的球所达到的高度为 $16M^2 h/(\sqrt{M} + \sqrt{m})^4$ 。

题解 47

因为哑铃以相同的速度彼此靠近，所以在气垫桌的参考系中它们的总动量为零（对它们共同质心的参考系也一样）。因此，动量守恒意味着两个哑铃的质心始终以相同的速度向相反方向运动。

当哑铃碰撞时，因为碰撞是弹性的，也没有外部力矩施加，所以它们的能量和角动量都守恒。碰撞前后的状态如图 S47.1 所示。

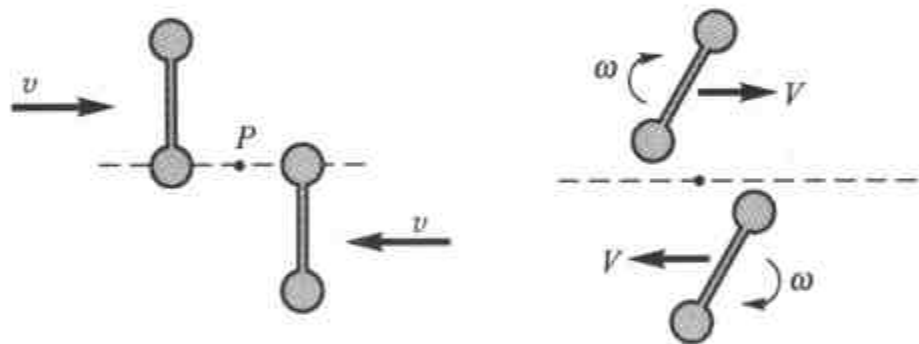


图 S47.1

碰撞前哑铃只有平移的动能，碰撞后出现了转动项。当写下哑铃的能量和角动量守恒的方程时，计算后者关于接触点 P 的值，有

$$2\left(\frac{1}{2}2mv^2\right) = 2\left(\frac{1}{2}2mV^2 + \frac{1}{2}2ml^2\omega^2\right)$$

碰撞前哑铃只有轨道角动量，而碰撞后必须包括一个描述哑铃关于质心自旋的项，即

$$4lmv = 4lmV + 4ml^2\omega$$

上面方程组的惟一解（ $V \neq v$ ， $\omega \neq 0$ ）可以求得，为 $V = 0$ ， $\omega = v/l$ 。这意味着碰撞后哑铃的质心停止运动，同时碰撞端的质点交换彼此的速度而非碰撞端保持它们原来的速度。这一点可以解释如下：通过刚性无重杆连接的质点在碰撞瞬间彼此并不知道对方在碰撞过程中的表现。杆仅在碰撞后，哑铃已经开始围绕其静止的质心转动时，才施加力的作用。

本题中隐藏着有趣的一点，哑铃在各自转过半周之后会再次碰撞，即在时间

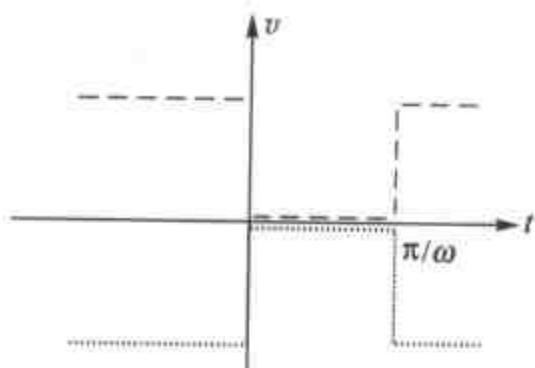


图 S47.2

$t = \pi/\omega$ 之后。使用上面的结果，不用写方程就可以预言其后的运动：哑铃停止旋转，并以与第一次碰撞前相同的速度再次运动。它们的路径仍然是先前的直线，但是它们现在是“头下脚上”地行进。换句话说，在两次碰撞之间，哑铃耗费时间来转了个圈。哑铃的运动速度和时间的关系如图 S47.2 所示。

题解 48

(i) 此时在质心参考系中，两个质点都在沿平行于 x 轴的方向行进，而且正以各自的方向穿过 y 轴。这种情形必须要叠加质心的运动，质心沿 $x = L/2$ 方向移动了距离 L ，并在 y 方向上有速度 $V/2$ 。因此石块 A 在 $(\frac{1}{2}L, \frac{1}{2}L)$ ，速度为 $(\frac{1}{2}V, \frac{1}{2}V)$ ；

石块 B 在 $(\frac{1}{2}L, \frac{3}{2}L)$ ，速度为 $(-\frac{1}{2}V, \frac{1}{2}V)$ 。

(ii) 确定质心的运动是以 $8L/V$ 为周期循环的^①。因此石块 A 在 $(L, 50L)$ ，速度为 $(0, V)$ ；石块 B 静止在 $(0, 50L)$ 。

题解 49

令 x 表示实际水的高度和水池顶部高度的比率；同样它也表示了目前的水量和最大水量之间的比率。

在注水过程中， x 随时间不均匀地增加，当其在时间 T_1 达到值 $x=1$ 时

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\text{入}} = \frac{1}{T_1}$$

当水流出时，流出的速度——也就是 x 下降的速度——和水高度的平方根成正比，即 x 的平方根

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\text{出}} = -K\sqrt{x} \quad (1)$$

比例系数选择令 x 用时间 T 从 1 减少到 0。

因为水流出的方程与在匀加速情况下速度和位移之间的关系 $v = \sqrt{2ax}$ 有同样的形式，可以得出水面以均匀改变的速度下降到零。初始的下降速度为 K ，最终的速度为零；因此 x 平均的下降速度为 $K/2$ 。减速可以用总时间表示： $K/2 = 1/T_2$ 。对微分方

^① 应为质心参照系中运动是以 $8L/V$ 为周期循环的，质心是以 $V/2$ 的速度向 y 方向运动。——译者注



程(1)两端积分,并带入初始和最终条件可以得到相同的结论。

当水龙头和塞子都打开时,水流入和流出带来的净变化是

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{\text{入}} + \left(\frac{dx}{dt}\right)_{\text{出}} = \frac{1}{T_1} - \frac{2}{T_2}\sqrt{x}$$

在平衡状态,水的高度不发生变化。满足平衡的条件为

$$x = x_0 = \left(\frac{T_2}{2T_1}\right)^2$$

例如,如果水池注满和排空的时间相同($T_1 = T_2$),则同时打开水龙头和塞子对应的

静态为 $x = \frac{1}{4}$,不论初始状态为何。按照条件给出的数值,则有比率为 $\frac{1}{9}$ 。也可以看

出溢出的危险只发生在流空的时间超过注满时间的两倍时($T_2 > 2T_1$)。

注:托里拆利流体定律适用的一个条件是出水孔的大小(直径)远小于水深。当水池快空的时候,此条件当然不满足,因此我们的结果只是一种近似。如果出水孔非常小,水的黏性(迄今为止忽略不计)也会起很重要的作用。

题解 50

当容器旋转时,液体的自由表面一定是系统的等势面,如果不是,则通过表面外形的调整可以降低系统总能量。在圆柱的极坐标中任一点(r, z),单位体积的总势能由两个部分组成,重力势能 ρgz 和离心势能。因为离心力为 $\rho\omega^2 r$ 指向离开轴的方向,

在 r 处的势能为上式对 r 积分,即 $-\frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2$ 。两个势能均可以任意选择零点。

像提示中选取的 z ,以及 $r=0$ 处作为离心力势能的零点,则自由液面的方程为

$$\rho gz - \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 = 0。$$

如果 Z 是液面最低点低于容器边沿的竖直距离,当液体即将溢出时,则 a 和 Z 均在自由液面上,液面的抛物面上但仍在容器中的空气的体积仍为容器体积的三分之一。

积分求体积,有 $\int_0^Z \pi r^2 dz$,因 $r^2 = 2gz/\omega^2$,则积分为 $\pi gZ^2/\omega^2$,因此我们有

$$Z = \frac{\omega^2 a^2}{2g} \quad \text{和} \quad \frac{\pi gZ^2}{\omega^2} = \frac{\pi a^2 h}{3}$$

由此得出 $\Omega = (4gh/3a^2)^{1/2}$ 。

题解 51

解答 1: 在加速过程中, 汽车必然反作用于地球, 并且极其微小地改变地球的转动角速度; 这个对于地球来说极其微小的效应必须予以考虑, 才能解释题目中出现的悖论。

为简单起见, 考虑质量为 m 的汽车, 行驶在质量 $M(M \gg m)$ 的物体上。实际情况是, 地球可以在汽车下面自由转动。一个静态观者会得出结论, 当汽车的速度由 0 加速到 v_0 并进而加速到 $2v_0$ 时, 质量为 M 的物体速度将分别为 $u_1 = -mv_0/M$ 和 $u_2 = -2mv_0/M$, 同时其动能将由 0 增加到 $Mu_1^2/2$ 进而到 $Mu_2^2/2$ 。由于 $M \gg m$, 大质量物体的动能及其变化可以忽略不计。因而我们得到, 两段加速过程中所消耗的汽油量为 1:3。

对以速度 v_0 匀速行驶的观者情况则完全不同, 他看到汽车的速度由 v_0 加速到 $2v_0$, 进而到 $3v_0$ 。与此同时, 由动量守恒定律, 大质量物体的速度将由初始的 $-v_0$ 变到 $(1-m/M)v_0$, 进而变到 $(1-2m/M)v_0$ 。在这个过程中整个系统 (汽车+地球) 的动能变化, 第一阶段为

$$\frac{1}{2}m[(2v_0)^2 - v_0^2] + \frac{1}{2}M(1 - \frac{m}{M})^2 v_0^2 - \frac{1}{2}Mv_0^2 \approx \frac{1}{2}mv_0^2$$

而第二阶段为

$$\frac{1}{2}m[(3v_0)^2 - (2v_0)^2] + \frac{1}{2}M(1 - \frac{2m}{M})^2 v_0^2 - \frac{1}{2}M(1 - \frac{m}{M})^2 v_0^2 \approx \frac{3}{2}mv_0^2$$

可见, 两个阶段的能耗 (耗油量) 比对两个观者均为 1:3。

解答 2: 摩擦力在通过汽车轮胎使汽车加速向前的同时, 也在向后推动地球。在地球参考系 (彼得的参考系) 中, 摩擦力只对汽车做功, 而对地球不做功。与此不同的是, 在火车参考系 (保罗的参考系) 中, 静摩擦力对汽车和地球都做功。此时, 因为在时间 t 内汽车的位移分别为 $3v_0 t/2$ 和 $5v_0 t/2$, 故在两个阶段中静摩擦力对汽车做功的比为 3:5; 而对地的做功是 -2 单位, 因为地的位移是 $v_0 t$ 。可见, 总功在第一个加速阶段为 $3-2=1$ 单位, 在第二阶段为 $5-2=3$ 单位; 因而, 由功能原理从火车观者看来其耗油量也应该是 1:3。

题解 52

由于物距 u 和像距 v , 在透镜成像公式中可以交换位置, 而其比率的平方等于图



像大小的比率, 即 $(v/u)^2 = 9$ (或 $\frac{1}{9}$), 此时我们有 $v/u = 3$ (或 $\frac{1}{3}$)。容易计算出, 题中成像的两种情况一个物距为 30 cm, 像距为 90 cm; 另一个则相反, 物距为 90 cm, 像距为 30 cm。透镜的焦距也很容易可以计算出来为 $f = 22.5$ cm。

如果在两种成像情况下通过透镜的光线总量相等, 则将导致小 9 倍的小图像将是图像亮度的 81 倍, 因为小的图像的面积比大图像的面积要小 81 倍 (同样多的光能在大图像中分布在了更大的面积上)。然而另一方面却是, 当透镜被放置在离光源较远的位置上时, 它所接收到的光线总量只是在较近位置时接收到的 $1/9$ 。因此, 综合两方面的因素, 其结果是小图像的亮度是大图像亮度的 9 倍。

事实上, 对于类似题中的一对图像我们可以有一般性的结论, 大图像的线度是小图像的多少倍, 小图像的亮度就是大图像的多少倍。

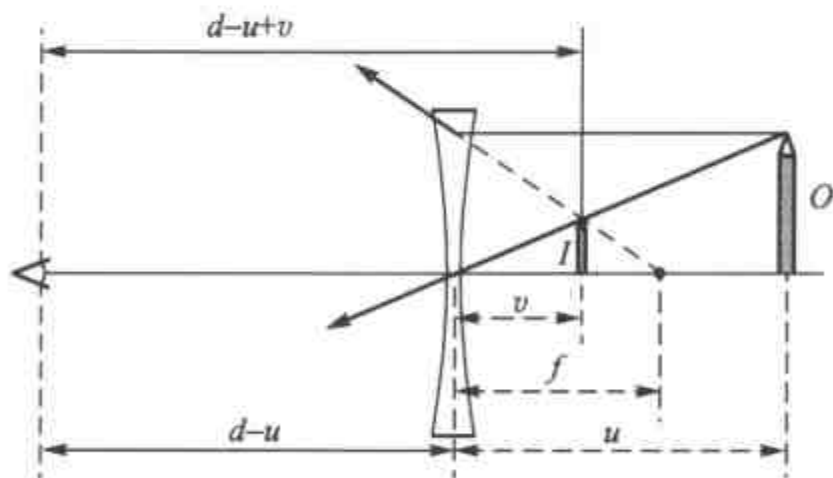
题解 53

近视眼镜的镜片是凹透镜, 用 $-f$ 表示凹透镜的 (负) 焦距, d 表示物体和眼睛之间的距离, 而 O 表示物体的大小 (如图所示)。由透镜成像公式, 虚像的像距应满足如下表达式

$$\frac{1}{-v} + \frac{1}{u} = \frac{1}{-f}, \quad \text{即 } v = \frac{uf}{u+f}$$

此时像的大小为

$$I = \frac{v}{u} O = \frac{f}{u+f} O$$



成像的视觉大小是由图像对眼睛所张的角度 ϕ 决定的, 假设物体的尺度较小, 则有

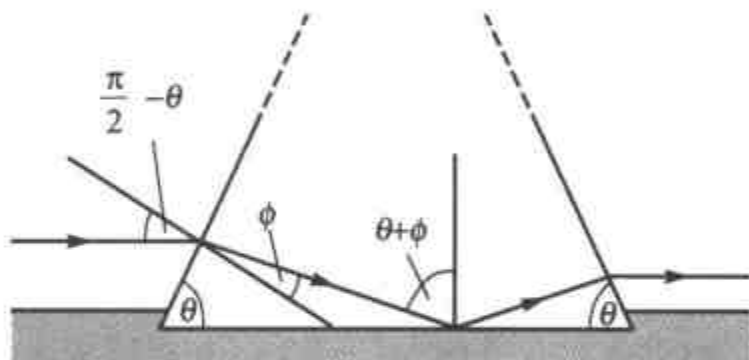
$$\phi = \frac{I}{d-u+v} = \frac{f}{u(d-u)+fd} O$$

当上式右侧的分母 (为 u 的函数) 取最大值时, 角度 ϕ 取最小值, 此时有

$u = d/2$ 。换句话说，视觉上感觉最小的条件是透镜位于眼睛和物体的中间位置。值得一提的是，这个条件与透镜的焦距无关。

题解 54

按照在提示中 ϕ 的定义，由折射定律（Snell 定律）第一次入射进棱镜时应有关系式 $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = n_g \sin \phi$ 。（ n_g 和 n_w 分别为玻璃和水的折射系数。）由简单的几何关系不难得到，在光线与玻璃 - 水表面相交处，入射光线和表面法线方向之间的夹角（玻璃和水的界面上发生反射时的入射角）为 $\theta + \phi$ 。



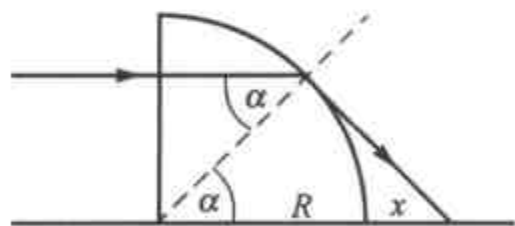
如果要发生全反射，它必须大于 $\arcsin(n_w/n_g)$ 。这两个条件结合起来，并考虑到公式 $\sin(\theta + \phi) = \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi$ ，消去 ϕ 得到

$$n_g^2 - n_w^2 \geq \cos^2 \theta (n_g^2 + 2 - 2n_w)$$

把玻璃和水的折射系数代入上式即可得到题中所给的结果。

题解 55

考虑入射光线由平行光线组成，它们穿过四分之一圆柱形棱镜左侧的竖直平面时，光线的传播方向不变，进而以各种不同的入射角到达棱镜右侧的圆曲面界面。在棱镜右侧界面光线入射点的法线方向就是各点处圆柱体的半径。



入射棱镜时光线位置越高，在到达右侧圆曲面处时的入射角就越大；图中画出的光线为发生全反射的临界位置。因此，只有那些比图中的光线更接近桌面的光线才有可能穿过棱镜（折射向不同的方向）。由

图可得，对于此临界光线有

$$\sin \alpha_n = \frac{1}{n} = \frac{2}{3}, \quad \text{和} \quad \frac{R}{R+x} = \cos \alpha_n$$

由此可得 $x = 1.71 \text{ cm}$ ，这就是光线透过棱镜后所能到达的桌面上的最近位置。



随着光线逐渐接近桌面时在棱镜右侧入射角变得越来越小，经折射后偏离原来的方向越来越小，光线可以到达桌面上更远的位置。人们自然而然地认为，从原理上讲，由于紧邻桌面的光线没有改变传播方向，因此光斑可以达到桌面上的任意远处。然而，这个结论是错误的；形成光斑的所有光线都可以参数化（即，写成入射角的函数形式），经分析可以看到光线实际上是不能到达非常远的位置的。

为了避免繁杂的计算，光斑的最远点可以通过一个小的技巧来得到。考虑题中的透镜其靠近桌面的部分为平凸透镜，镜前的柱体部分的作用可以忽略，由薄透镜公式可以计算得到其焦距为

$$\frac{1}{f} = \frac{n-1}{R}$$

进而得到 $f = 10 \text{ cm}$ ，这就是透镜与光斑最远点之间的距离。

题解 56

如果 R_M 为月亮的半径， R 为地月距离，被月亮散射在 2π 立体角内的光能为 $\alpha\pi R_M^2 E$ ，其中 E 为地球或月亮表面直射的太阳光线的能量密度。在地球表面接收到的来自于月亮反射的光能密度为月亮散射的光能除以 $2\pi R^2$ 。已知月亮直径对地球表面所张开的角度为 0.5° ，或 $9 \times 10^{-3} \text{ rad}$ ，因此月光的密度与太阳直射光能量密度的比值为

$$\frac{\alpha R_M^2}{2R^2} = \frac{0.07}{2} \times \frac{1}{4} \times (9 \times 10^{-3})^2 \approx 10^{-6}$$

由此可见，太阳光大约是月光能量密度的 100 万倍。

注：事实上，月亮表面的反射率就是通过测量和比较太阳光和月光的亮度得到的。另外，地球表面的反射率则可以类似地通过测量新月黑暗部分的亮度（非常低）来得到，因为这个亮度可以认为是由于地球表面散射光线到达月亮后形成的。

题解 57

把自然行走模型化，在近似模型中腿是自由摆动的单摆。摆动物体以其顶端为悬挂点的自由运动周期为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgs}}$$

其中 I 为摆体的转动惯量， m 为质量， s 是转轴到质心的距离。现在我们引入所谓的有效长度 $L_{\text{有效}} = I/ms$ ，进而周期公式可以写成

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L_{\text{有效}}}{g}}$$

假定有效长度正比于人腿的实际长度，对于腿长相同的人，我们会发现其有效长度只有非常细微的差别。以此结果作为自然周期，我们可以估计一个人的自然步态，即需要最少肌肉能效的步态作为近似的第一步，假设行走的步长与腿长成正比，而每走一步所用的时间是上面求得周期的一半，因而行走的速度 v_{\pm} 与腿长的关系为

$$v_{\pm} \propto \frac{L}{T/2} \propto \sqrt{L}$$

上式预言：腿长的人自然行走的速度比较快。这个预言是建立在一个过于简化的模型的基础上的，其中假定了最小能量损耗，也没有考虑各人腿的不同形状和力度。尽管如此，此预言被人们的日常经验所证实。

当分析跑步的情况时，我们的模型需要进行一个重要的改动：在跑步时，腿的运动不再是行走时的自由摆动，而应该看作是由肌肉提供的力对支点形成的力矩下的受迫振动。假定肌肉所提供的强迫力为 F ，它大致与牵涉到的肌肉的横截面积成正比。如果我们假设，不同身高的人，其腿的相对比例是相同的，则腿部肌肉的横截面积，以及与之成正比的力 F ，与腿长 L 的平方成正比。而强迫力提供的力矩正比于 F 和 L 的乘积

$$\tau \propto FL \propto L^2 \times L = L^3$$

物体的转动惯量 I 与质量和长度的平方成正比。我们再次假定所有人的腿都具有相同的比例，其宽度和厚度与腿长度的比例都是一样的。由此，物体的质量与它的线度的立方成正比，故有

$$I \propto mL^2 \propto L^5$$

一般情况下，在周期力矩作用下的绕固定点转动的物体，其周期 T 由最大强迫力矩 τ 和相对于转动点的转动惯量 I 来决定

$$T \propto \sqrt{\frac{I}{\tau}}$$

把上面关于 I 和 τ 的表达式代入，得

$$T \propto \sqrt{\frac{L^5}{L^3}} \propto L$$

跑动时的速度为脚步摆动的频率和每一步长的乘积，即

$$v_{\text{跑}} \propto f \times L \propto \frac{L}{T} \propto \frac{L}{L} = 1$$

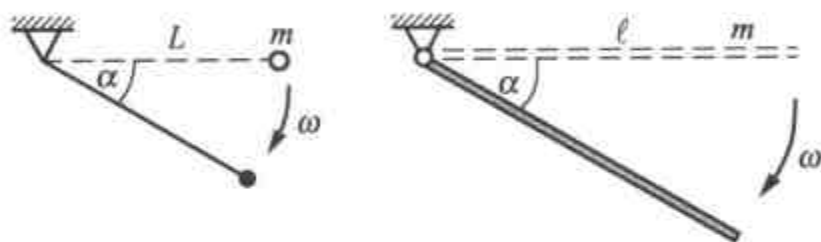
可见，如上所述的模型分析与安妮和安迪的经验是一致的，跑动的速度与腿长无



关。虽然上面关于行走和跑步的预言不是严格精确的结论，但此模型确实给出了题目中给定的经验现象的合理解释，即在日常生活中腿长的人行走时的确往往比腿短的人快，但跑步时却没有明显的不同。

题解 58

考虑一个长度为 L 的单摆和一个一端悬挂的长度为 l 的均匀细杆构成的摆，如果二者都自水平位置释放，那么当摆动过角度 α 后它们的角速度分别是多少？



由能量守恒，对单摆有

$$\frac{1}{2}mL^2\omega^2 = mgL\sin\alpha, \quad \text{即} \quad \omega = \sqrt{\frac{2g}{L}\sin\alpha}$$

而对摆动的细杆有

$$\frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\omega^2 = mg\frac{l}{2}\sin\alpha, \quad \text{即} \quad \omega = \sqrt{\frac{3g}{l}\sin\alpha}$$

如果满足条件 $L = \frac{2}{3}l$ ，则两种运动在 α 取任何值时的角速度均相等。由此可得，两种运动的每时每刻都是相同的，它们的周期也相同。

如何计算等效摆的周期呢？公式 $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ 只对小幅度的振动成立，这里由于摆动很大而不再适用。精确地计算周期 T 需要复杂的数学分析，但这是不必要的，代替计算周期 T ，我们只希望确定周期与长度 L 的依赖关系就可以了。

单摆运动的周期可能与它的摆线的长度 L 、摆球的质量 m 、引力加速度 g 和最大偏转角 α_{\max} 有关。考虑所有这些物理量的量纲，周期的表达式只能是如下形式

$$T(L, m, g, \alpha_{\max}) = f(\alpha_{\max})\sqrt{\frac{L}{g}}$$

为了证明这个命题，我们做了这样几点考虑。质量的单位是“kg”，而“kg”没有出现在任何其他物理量之中，因此周期（单位为“s”）与摆球的质量无关。另外，

“s”只出现在 g 中，因此周期 T 中“s”的单位只能当 T 与 g 的平方根成反比时得到。最后，为了解决“m”的量纲，周期还必须与 L 的平方根成正比。函数 $f(\alpha_{\max})$ 的形式无法通过量纲定出，因为角度没有量纲。我们已知的惟一信息是，对于小角度有 $f(\alpha_{\max}) \approx 2\pi$ 。

基于上述讨论，不难得出在相同初始位移的条件下长度为 $(2/3)l$ 的单摆其周期将是长度为 l 单摆周期的 $\sqrt{2/3}$ 倍。因而，长度为 l 的摆动细杆的振动周期大约为同样长度单摆周期的 82%。这个结论不只适用于从水平位置释放的振动，也适用于任何其它的初始位置。

题解 59

直升机盘旋所需要的动力与重力加速度 g 、直升机的线形尺度 L 、直升机的平均密度 $\rho_{\text{机}}$ 和空气的密度 $\rho_{\text{空气}}$ 有关。

假定直升机所需要的机械动力只与这些量有关，并且均为指数关系是合理的

$$P \propto g^\alpha \times L^\beta \times \rho_{\text{机}}^\gamma \times \rho_{\text{空气}}^\delta$$

上式中左右两侧的量纲必须相等

$$\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^3} = \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)^\alpha \times \text{m}^\beta \times \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)^\gamma \times \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)^\delta$$

因此，有

$$\begin{aligned} \gamma + \delta &= 1 \\ \alpha + \beta - 3(\gamma + \delta) &= 2 \\ -2\alpha &= -3 \end{aligned}$$

这组线性方程的解为

$$\beta = \frac{7}{2}, \alpha = \frac{3}{2}, \gamma = 1 - \delta$$

可见，所需的机械动力与直升机的线性尺度的 $\frac{7}{2}$ 次方成正比。因此，题中第二架直升机应该安装一个能够提供功率为 $(1/2)^{7/2} P = 0.088P$ 的引擎。

注：(i) 机械引擎的效率定义为其所产生的功率与整个机器质量的比值，因此根据上面的结果可得“特别功率”为

$$\frac{P}{m} \propto \frac{P}{L^3} \propto \sqrt{L}$$

也就是说，所需的效率随着线度的增加而增加。这意味着直升机越小，保持



盘旋越容易。自然界中有许多小动物（如蜜蜂、蜻蜓、蜂鸟等）可以像直升机一样盘旋，但大的鸟类却不能这样做就是这个道理。

(ii) 利用简单的量纲分析，我们只能得到指数 γ 和 δ 的和。然而，保持直升机盘旋状态相关的物理量不是惯性质量，而是重量；所以功率 P 可以只与直升机的密度与重力加速度 g 的乘积有关。因而 γ 一定是与 α 相等的，也就是说

$$\gamma = \frac{3}{2}, \quad \delta = -\frac{1}{2}. \text{ 最后, 有}$$

$$P \propto (g\rho_{\text{机}})^{3/2} \times L^{7/2} \times \rho_{\text{空气}}^{-1/2} = (L^3 \rho_{\text{机}} g) \times \sqrt{Lg} \times \sqrt{\frac{\rho_{\text{机}}}{\rho_{\text{空气}}}}$$

在地球的表面，我们能够改变的只有直升机的密度和线度。然而，在太空任务中使用机器人直升机时，了解功率是如何与目标行星的重力加速度和大气密度相关将是大有帮助的。

题解 60

引力势能在木棒下落 θ 角过程中的减少为 $Mg \frac{l}{2}(1 - \cos\theta)$ ，这部分能量转换成了木棒相对桌子边缘的转动动能。不管是直接计算还是使用平行轴定理，可以得到木棒相对于其端点的转动惯量 $\frac{1}{3}Ml^2$ 。结合上面两式，有

$$\omega^2 = \frac{3g}{l}(1 - \cos\theta)$$

加速度 a_c 为 $l/2$ 乘以 ω^2 ，即等于 $\frac{3}{2}g(1 - \cos\theta)$ 。考虑到木棒的转动惯量和瞬时力矩 $Mg \frac{l}{2} \sin\theta$ ，可以得到质心的切向加速度为

$$a_t = \frac{3}{4}g \sin\theta.$$

(i) 光滑（无摩擦）小槽的水平 and 竖直表面只能分别提供给木棒端点正的竖直和水平作用力，分别为 V 和 H （参见图 S60.1）。只要这两个力之一减小为零，而且运动方程要求提供负作用力，如吸引力（这在物理上是不可能的）时，木棒将脱离桌面。

将力和加速度在水平和竖直方向上分解（见图 S60.1），有

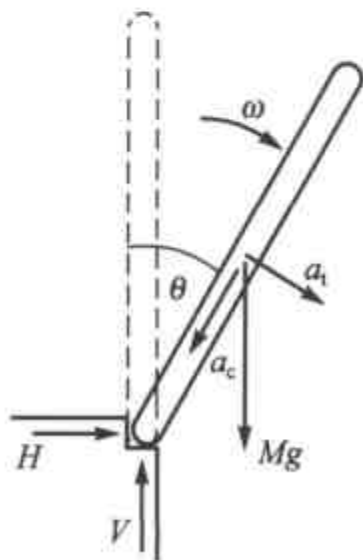


图 S60.1

$$H = M(a_t \cos\theta - a_c \sin\theta)$$

$$Mg - V = M(a_c \cos\theta + a_t \sin\theta)$$

求解这两个关于 H 和 V 的方程, 得到

$$H = \frac{3}{4}Mg \sin\theta(3\cos\theta - 2)$$

$$V = \frac{1}{4}Mg(3\cos\theta - 1)^2$$

在这两个力中首先消失的是水平分量 H , 消失时 $\theta = \arccos\frac{2}{3} \approx 48^\circ$ 。如果角度继续增大, H 将为负值。此时木棒将脱离桌面, 因为小槽无法提供拉回木棒的力。

(ii) 当桌面的边缘为一个十分小的四分之一圆弧时, 它作用于木棒的支持力将始终沿木棒的方向。静摩擦力 F_{fr} 沿桌面的切向, 由于桌面粗糙可以为任何值 (参见图 S60.2)。

重力沿木棒方向的分量与桌面提供的支持力之和提供了向心力:

$$Mg \cos\theta - N = Ma_c = M \frac{l}{2} \omega^2 = \frac{3}{2}Mg(1 - \cos\theta)$$

进而得到桌面的支持力为

$$N = \frac{Mg}{2}(5\cos\theta - 3)$$

当 $N = 0$, 即 $\theta = \arccos\frac{3}{5} \approx 53^\circ$ 时, 桌面和木棒之

间的相互作用为零。如果角度再继续增大, 支持力将变为负值, 这是不可能的, 因而木棒将离开桌面。由于桌面粗糙, 静摩擦力除支持力为零的情况外, 总是足够阻止木棒端点的滑动; 因此, 它在木棒的运动中没有影响。

注: 在这个问题中考虑了两种极端情况 (i) 和 (ii)。一般来说, 支持力应垂直于桌面和木棒底端的公切线, 即法向力几乎可以沿任何方向。这样, 木棒倒下的过程将强烈地依赖于接触面的几何形状, 也和接触面的摩擦系数有关 (参见题目 61)。

题解 61

首先假设桌面非常光滑 (摩擦系数很小), 铅笔释放后其质心将在倾倒的方向上加速并获得竖直和水平方向的速度。加速度的水平分量只能由笔尖和桌面之间的摩擦

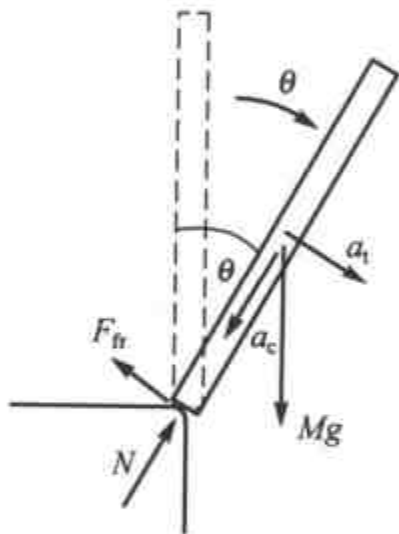


图 S60.2



力来提供，但由于桌面是光滑的，所以笔尖很快会向铅笔倾倒的“反方向”滑动。

如果摩擦很大，铅笔将在相当长的一段时间内不滑动。由于质心作圆周运动，最初其水平速度在倾倒的方向上逐渐增加；但后来却将开始逐渐减小，这样一直到铅笔趋于水平，而质心水平速度趋于零。质心水平加速度的符号，同样也是摩擦力的符号，在运动过程中是变化的。如果在第一阶段铅笔尖是不滑动的，那么在第二阶段只能是“向前”（即铅笔的倾倒方向）滑动。

下面将证明铅笔尖可能向前或向后滑动，但它始终不会离开桌面。为了数学上的简化，取铅笔的长度、质量和重力加速度为单位大小，即 $l = M = g = 1$ 。因此，铅笔的重量为 1，其质心位置 (CM) 为 $\frac{1}{2}$ ，关于质心的转动惯量为 $\frac{1}{12}$ ，关于铅笔一端的

转动惯量为 $\frac{1}{3}$ 。

在第一阶段铅笔尖没有滑动，因此整个铅笔绕其笔尖转动（如图 S61.1 所示）。由能量守恒可以求得铅笔的角速度

$$\frac{1}{2}(1 - \cos\theta) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \omega^2$$

由此得出 $\omega = \sqrt{3(1 - \cos\theta)}$ 。瞬时力矩

$\frac{1}{2} \sin\theta$ 产生的角加速度为

$$\frac{1}{2} \sin\theta = \frac{1}{3} \alpha, \quad \text{即} \quad \alpha = \frac{3}{2} \sin\theta$$

在竖直方向上，作用于铅笔上的有两个力：重力和桌面的支持力 N 。质心向心加速度的竖直分量为 $\frac{1}{2} \omega^2 \cos\theta$ ，切向加速度的竖直分量为 $\frac{1}{2} \alpha \sin\theta$ 。因而运动方程的竖直分量为

$$1 - N = \frac{1}{2} \alpha \sin\theta + \frac{1}{2} \omega^2 \cos\theta$$

由此得出

$$N = \left(\frac{3 \cos\theta - 1}{2} \right)^2$$

从上式可见，需要的支持力永远不会为负，因此铅笔尖在转动过程中永远不会离开桌面。当 $\theta = \arccos \frac{1}{3} \approx 70.5^\circ$ 时，支持力为零；此时摩擦力也将为零，如果在这之

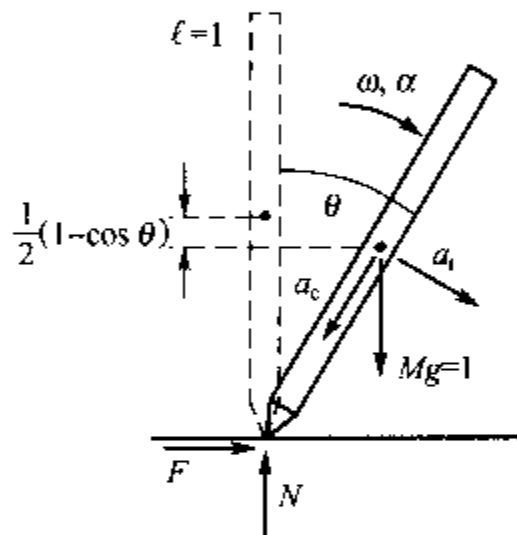


图 S61.1

前未曾滑动，铅笔尖将发生滑动。

运动方程的水平分量为

$$F = \frac{1}{2}\alpha \cos\theta - \frac{1}{2}\omega^2 \sin\theta$$

其中 F 为摩擦力。把角加速度和角速度的表达式代入上式，我们得到

$$F = \frac{3}{4}\sin\theta(3\cos\theta - 2)$$

笔尖滑动的条件是 $|F| > \mu N$ ，其中 μ 为静摩擦系数。使用函数 $f(\theta)$ 可以重新整理笔尖滑动的条件， $f(\theta)$ 定义为力 F/N 比值的绝对值

$$f(\theta) = \left| \frac{F}{N} \right| = \left| \frac{3\sin\theta(3\cos\theta - 2)}{(3\cos\theta - 1)^2} \right| > \mu$$

在图 S61.2 中画出了函数 $f(\theta)$ 随角度 θ 的变化。

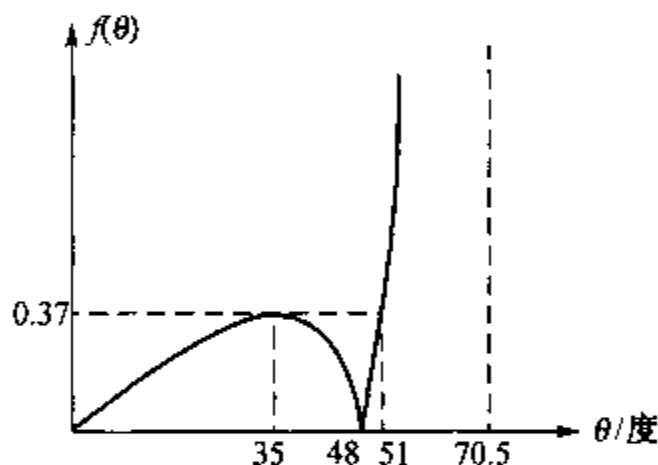


图 S61.2

摩擦力在 $\theta = \arccos \frac{2}{3} \approx 48^\circ$ 时改变

符号，意味着在 $0 < \theta < 48^\circ$ 时将发生“向后”滑动。利用数值方法可以求出在此区域 $f(\theta)$ 有一个最大值，此时 $\theta \approx 35^\circ$ ，而临界摩擦系数为 $\mu_{\text{crit}} \approx 0.37$ 。可见，如果 $\mu < \mu_{\text{crit}}$ ，铅笔将向后滑动。

如果 $\mu > \mu_{\text{crit}}$ ，在铅笔倾倒角度达到

$\theta \approx 70.5^\circ$ （此时 $f(\theta)$ 趋于无穷大）前，铅笔尖将“向前”滑动。（注意这种情

况下铅笔在 $35^\circ < \theta < 51^\circ$ 范围内不能开始滑动。）铅笔尖“向前”和“向后”滑动的情况如图 S61.3 所示，在两种情形下滑动均可以再一次停止下来。

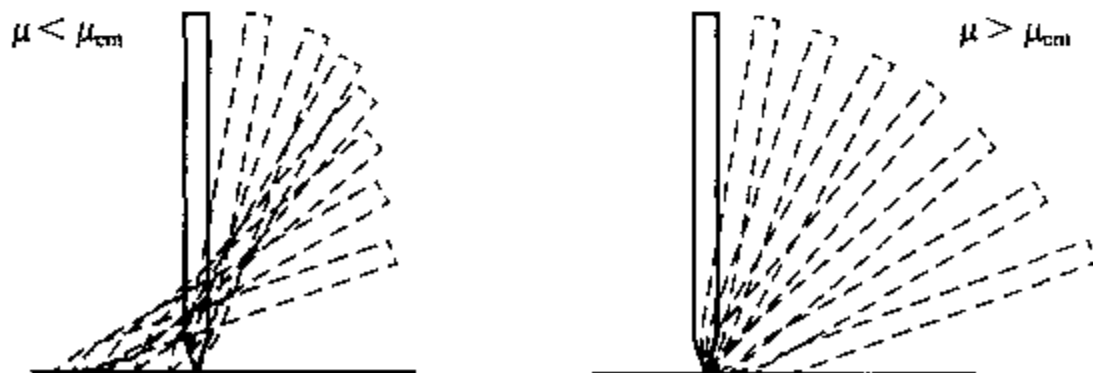


图 S61.3



最后，将会分析得出铅笔尖不会脱离桌面。首先考虑第一种如图 S61.4 向前滑动的情况，根据功能原理和三角函数关系有

$$\frac{1}{2}(1 - \cos\theta) = W_{fr} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{12} \omega^2 + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\omega}{2} \right)^2 + v_{\text{笔尖}}^2 + 2v_{\text{笔尖}} \times \frac{1}{2} \omega \cos\theta \right]$$

如果忽略摩擦力做功和两个包含铅笔尖速度 $v_{\text{笔尖}}$ 的项（这三项均为正值），可得角速度的一个不等式： $\omega^2 < 3(1 - \cos\theta)$ 。由关于质心的瞬时力矩可以给出

$$\frac{1}{2} N(\sin\theta + \mu \cos\theta) = \frac{1}{12} \alpha$$

同时竖直方向的运动方程为

$$1 - N = \frac{1}{2} \alpha \sin\theta + \frac{1}{2} \omega^2 \cos\theta$$

（可见，这个方程与无滑动情形下的方程是一样的，其原因是铅笔尖只有水平方向的加速度，而质心的竖直方向加速度分量没有变化，参见图 S61.5）。

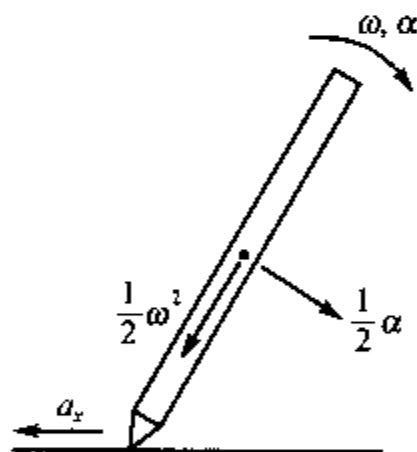


图 S61.5

将一直不脱离桌面。

对于“向后”滑动的情况，其方法是类似的。在图 S61.6 中分别标出了质心水平和竖直方向的速度 v_x 和 v_y 。由于铅笔尖竖直速度为零，可以得到

v_y 和 ω 之间的一个函数关系 $v_y - \frac{1}{2} \omega \sin\theta = 0$ 。再一次使用功能原理，有

$$\frac{1}{2}(1 - \cos\theta) = W_{fr} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} \omega^2 + v_x^2 + v_y^2 \right)$$

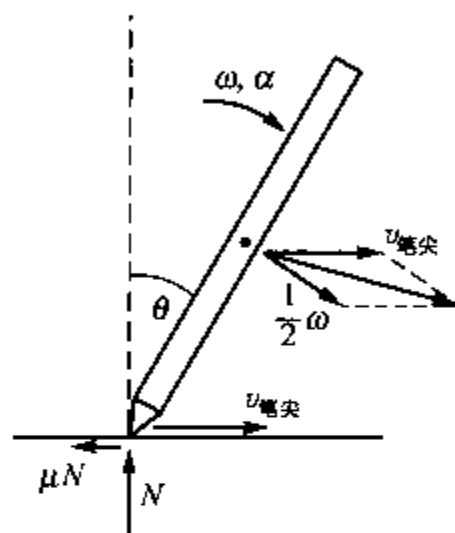


图 S61.4

从以上两个方程可以得到支持力关于 θ 和 ω^2 的函数。考虑上面关于 ω^2 的不等式，有

$$N = \frac{1 - (1/2)\omega^2 \cos\theta}{1 + 3\sin\theta(\sin\theta + \mu \cos\theta)} > 0$$

$$\frac{(3/2)[\cos\theta - (1/2)]^2 + (5/8)}{1 + 3\sin\theta(\sin\theta + \mu \cos\theta)} > 0$$

因此，支持力总是正的，铅笔尖

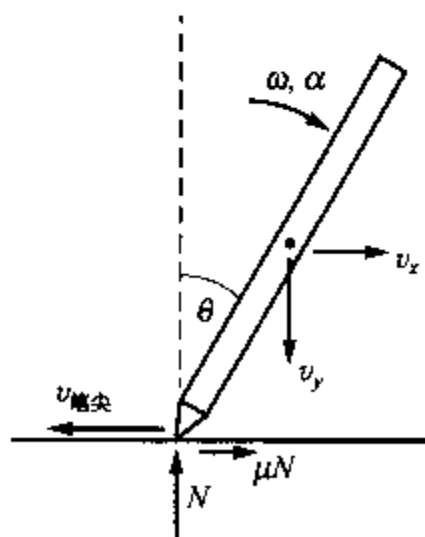


图 S61.6

忽略摩擦力做功和另一个包含 v_x 的正数项, 有

$$\omega^2 < \frac{1 - \cos\theta}{\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\sin^2\theta}$$

再考虑对于质心的净力矩和运动方程的竖直分量, 可以进一步得到支持力应满足的不等式

$$N = \frac{1 - (1/2)\omega^2 \cos\theta}{1 + 3\sin\theta(\sin\theta - \mu \cos\theta)} > \frac{1 + 3(\cos\theta - 1)^2}{[1 + 3\sin\theta(\sin\theta - \mu \cos\theta)](1 + 3\sin^2\theta)}$$

上式中分子总是正值, 分母对于 $0 \leq \theta \leq 90^\circ$, 当 $\mu < 4/3$ 时也是正的。可见, 在笔尖“向后”滑动 ($\mu < 0.37$) 的情况, 它也不会离开桌面。

如果笔尖在某个阶段停止滑动, 它依然不会离开桌面; 因为 $\omega^2 < 3(1 - \cos\theta)$, 故 $N > (3\cos\theta - 1)^2/4 \geq 0$ (参见解的第一部分)。

题解 62

半径为 R 的肥皂泡内气体压强比大气压强 p_0 大 $\Delta p = 4\gamma/R$ 。考虑曲率的方向和肥皂泡膜的两侧, 有上式中的因子 4。显然, 肥皂泡的半径越小, 其内部的压强越大; 因此, 空气将从小肥皂泡流向大肥皂泡, 最终形成一个更大的肥皂泡 R_3 。

肥皂泡内空气的体积正比于 R^3 , 因此由理想气体状态方程和质量守恒定律有

$$(p_0 + \frac{4\gamma}{R_1})R_1^3 + (p_0 + \frac{4\gamma}{R_2})R_2^3 = (p_0 + \frac{4\gamma}{R_3})R_3^3$$

对于通常大小的肥皂泡, 曲率压强比外面的大气压强小很多个数量级。如果忽略曲率压强, 气体流动最后形成的肥皂泡应为

$$R_3 \approx \sqrt[3]{R_1^3 + R_2^3}$$

如果可以准确测量三个肥皂泡的半径, 为了求解表面张力, 可以用下面的式子

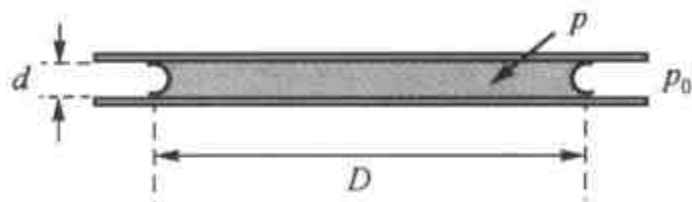
$$\gamma = \frac{p_0}{4} \frac{R_3^3 - R_1^3 - R_2^3}{R_1^2 + R_2^2 - R_3^2}$$

可是实际上, 这种方法是不能被应用的, 因为上式中的分子几乎等于零, 因而测量误差会带来很大比例的不确定。测量的数据, 只能用于给出表面张力的粗略估计。



题解 63

玻璃板内水横截面的边缘为半径 $r = \frac{1}{2}d$ 的半圆 (如图所示)。因此, 水表面的曲率为 $2/d$, 其对应的曲率压强为 $\Delta p = 2\gamma/d$, 其中 γ 为表面张力。(曲率的另一个分量忽略不计, 因为 $D \gg d$ 。)



当大气压强为 p_0 时, 盘内的压强为 $p_0 - 2\gamma/d$ 。这个压强差作用在水和玻璃盘的接触面上 $\pi D^2/4$ 。这意味着一个力

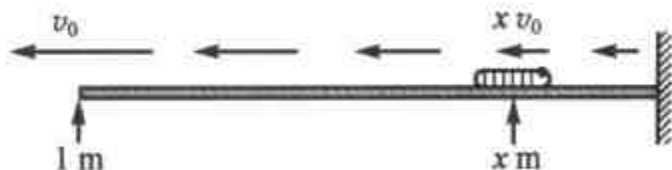
$$F = \frac{\pi D^2}{4} \frac{2\gamma}{d}$$

“拉着”两个玻璃板粘在一起。

注: 如果 $d \ll D$, 这个力是相当可观的。事实上, 当两个玻璃板之间有水时用垂直于它们表面的力企图拉开两个玻璃板是十分困难的 (即使不是不可能的)。为了分开两个玻璃板, 往往需要把玻璃板先沿平行于板面的方向滑动一下。

题解 64

在距离墙 x m 处, 丝线的速度显然比丝线端点的速度成正比地缩小, 即 xv_0 。



如果这个值比小毛虫的速度快, 那么毛虫将逐渐远离墙面。小毛虫的处境将越来越无助, 而永远也达不到墙面。反之, 如果 $v_{\text{毛虫}} > xv_0$, 小毛虫的净速度将指向墙面, 并且随着时间的增加而增加, 毛虫当然可以到达墙面。临界的情况对应 $x = v_{\text{毛虫}}/v_0 = 0.1$ m。如果从这一点开始, 则小毛虫将相对静止于该处。

题解 65

想象丝线上每一点均附以记号, 标明其和墙面的距离与丝线总长度的比值, 这些值就是上题中提到的坐标 x , $x=0$ 表示墙的位置, $x=1$ 表示蜘蛛的位置。在本题中,

所有的这些点都将随着丝线的伸长而伸长。

首先计算一下，当蜘蛛已经运动了时间 t 后，小毛虫要用多长时间从点 x 爬到邻近的点 $x - \Delta x$ 。由于两点之间的实际距离是 $(1 + v_0 t)\Delta x$ ，而小毛虫运动的速度为 c ，因此有关系

$$\Delta x = \frac{c\Delta t}{1 + v_0 t}$$

把上式对毛虫运动的整个过程取和（积分），考虑小毛虫在时间 T 内从 x_0 到达墙面，有

$$x_0 = \sum \frac{c\Delta t}{1 + v_0 t} \approx \int_0^T \frac{c}{1 + v_0 t} dt = \frac{c}{v_0} \ln(1 + v_0 T)$$

由上式可见，适当地选择 T 可以使上面的积分任意大；这样可以得到一个可能是令人惊异的结果，尽管蜘蛛快速地拉动丝线的一端（即，具有任意大的 v_0 ，任意小的 c 和任意的 x_0 ），小毛虫还是可以在有限的时间内到达墙面。

题解 66

(i) 假定钢球首先作自由落体运动 1 m，到达画板底端时经反弹沿一排紧密排列的钉子水平运动最终到达 B 点。竖直运动的时间为 $t_1 = 0.45$ s，到达画板底端的速度为 $v_1 = 4.4$ m/s，然后在时间 $t_2 = 0.45$ s 内经过剩余的 2 m 路程。如果沿着直线 AB （加速度为 $g/\sqrt{5}$ ）无摩擦地滑动到达 B 点，需要的时间为 $t_3 = 1.01$ s。可见，第一个问题的答案是从 A 到 B 最快的方案至少不是沿最短的路径直线 AB 。

注：可以通过复杂的数学方法（变分的计算）严格证明，需要时间最短的路径应该是摆线。

(ii) 从 A 点出发的自由落体运动可以得到最大的竖直速度，其最大动能，即最大速度，只取决于自由落体竖直位移的大小。因此，通过钉子的碰撞无法使得钢球到达画板的底部比自由落体更快，即时间不可能少于 $t_1 = 0.45$ s。所以，第二题的答案绝对是不可能的。

题解 67

这个题目难在给出的条件不够，但是图可以作为题目已知条件的一个补充。用量角器可以十分准确地测量在绳子的固定端端点切线方向与竖直墙面的夹角为 30° ，如图所示。这意味着绳子在固定一端的张力为 $T = 20\text{N} / \sin 30^\circ = 40$ N。因而，考虑绳子在竖直方向上的受力情况，其重量为： $mg = T \cos 30^\circ = 34.6$ N，进而得出绳子的质量为 $m = 3.5$ kg。



注：实际上从图中可得到更多的信息。例如，绳子的重心位置一定位于 P 点的正上方，因为绳子所受三个力的作用线一定交于一点。

题解 68

通过在提示中的分析，容易证明圆规必须张开适当的角度可以使圆规的下臂在悬挂时成水平放置（如图 S68.1 所示）。



图 S68.1

从这种状态出发，让我们想像先把圆规的上臂固定，不论向哪个方向弯曲圆规的下臂，质心的水平位置将接近旋转点。然后释放上臂，旋转点将向下移动，因为只有这样圆规的质心才能再一次回到悬挂点的正下方。因此，不论怎样旋转圆规的下臂旋转点的竖直位置都将降低。可见下臂水平放置的情况正是题中所求的状态。

考虑一个简单的模型，以一个无质量的旋转点连接的两个相同的细木棍替代实际中的圆规，如图 S68.2 所示。令圆规两臂的夹角为 2θ ，每一条臂的长度为 2 单位长度。容易得到如图 S68.2 所示的相等的角度，并可以在阴影三角形中使用正弦定理，图 S68.3 是一个放大的三角形。

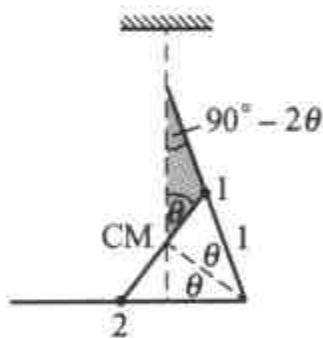


图 S68.2

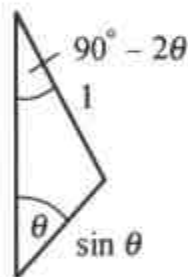


图 S68.3

由正弦定理，有

$$\frac{\sin \theta}{1} = \frac{\sin(90^\circ - 2\theta)}{\sin \theta}$$

通过简单的计算，得到

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

因此有 $\theta \approx 35.3^\circ$ ，也就是说圆规的张角应是 $2\theta \approx 70.5^\circ$ 。

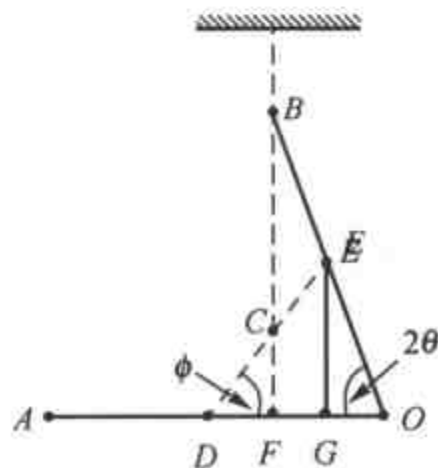


图 S68.4

注：本题的结果 $2\theta = 2 \arcsin(1/\sqrt{3}) = \arccos(1/3)$ 看起来十分简单，是否有一个更好的解法存在？实际上，可以利用平行线定理来求解得到角度 2θ 。

在图 S68.4 中, 画两条垂直线, 一条过圆规的质心 C , 另一条过圆规上臂的质心 E 。由于 $BF \parallel EG$, 考虑张角 2θ 的两条边, 从 $OE = EB$ 容易得到 $FG = GO$ 。类似地考虑角 ϕ , 从 $DC = CE$ 容易得到 $FG = DF$ 。可见点 F 和 G 三分线段 OD , 而 $OD = OE$, 故 $OE = 3GO$ 。至此, 由 $\triangle EGO$ 为直角三角形, 容易算出 $2\theta = \arccos(1/3) \approx 70.5^\circ$ 。

题解 69

显然, 三角形板的质心 S 一定位于悬挂点的下方。令质心 S 指向三个顶点的矢量分别为 r_1 、 r_2 、 r_3 , 指向悬挂点的矢量为 m (如图所示)。由于细绳作用在板上的三个拉力一定是沿着绳子悬挂的方向, 因此可以写成矢量的形式:

$$F_i = \lambda_i(m - r_i), \quad i = 1, 2, 3$$

由于板处于平衡状态, 作用在它上面的力矢量和为零, 即

$$F_1 + F_2 + F_3 + W = 0$$

考虑到指向质心 (矢量参考系的原点) 的矢量是指向各顶点矢量的算术平均, 有

$$r_1 + r_2 + r_3 = 0$$

注意到 W 和 m 是平行的, 因而 $W = -km$ 。

把上式中的 r_3 替换掉有

$$(\lambda_3 - \lambda_1)r_1 + (\lambda_3 - \lambda_2)r_2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - k)m = 0$$

由于 r_1 、 r_2 和 m 不在同一个平面内, 它们的线性组合只有在其各自的系数为零的情况下才会为零。

因此 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, 这意味着绳子内的张力与它们的长度成正比。这个结论在绳子为松弛的状态下是不成立的, 因为此时三角形板成竖直平面, 矢量 m 将位于三角形平面内。

题解 70

初始情况下罐车和其内部的液体均处于静止状态。当位于罐车后面底部出水孔的开关打开后, 液体的质心将向后运动。由于整个系统的质心是静止不动的, 罐车本身势必向前运动。由于出水孔是竖直的, 流出的液体将获得一个向前的水平速度分量。这并不违反动量守恒定律, 因为罐车内的液体是相对于地面向后运动的。然而, 罐车本身的运动一定会由向前变为向后, 否则最后整个系统的质心将向前移动。罐车运动



方向改变的动力学原因是，内部的液体在向后流动并且流出之前总是向后作用在罐车的后部以使其本身相对于罐车静止。

注：(i) 罐车在运动过程中可能多次改变方向，但经仔细分析这种改变实际上是不可能的，因为其运动依赖于太多的参数。

(ii) 最后，给出在本问题提示中给出场景的解。考虑无票者到达车厢尾部停下来时，售票员仍以相对于车厢速度 v 向后运动。根据动量守恒，车厢向前运动的速度为 $u = mv/(M+2m)$ 。当无票者跳出车厢时，带走的方向向前的动量为 $mu = m^2v/(M+2m)$ 。当售票员停下来时，车厢和售票员将改变运动方向向后运动，其总动量为 $-mu$ 。因此，车厢最后的速度 V 为

$$V = -\frac{m^2}{(M+2m)(M+m)}v$$

题解 71

取向右方运动为正，在质心参考系中（参见图 S71.1）珠子的初始速度分别为

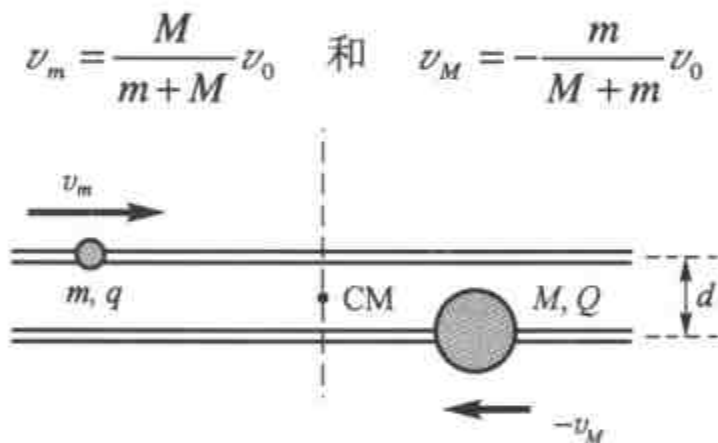


图 S71.1

由于在质心参考系中两个珠子的质心始终静止，因此二者速度的比值在整个运动过程中为常数 (M/m)。

当两个珠子相互接近时，如果二者所带电荷 q 和 Q 同号，则其速度将逐渐减小；如果所带电荷异号，则速度逐渐增加。如果两木棍之间的距离足够远，在两个珠子带异种电荷的情况下，由于能量守恒，珠子的速度将回复到初始大小。在原始参考系中，质量为 m 的小珠子经过一个短暂的加速，然后减速，直到最后变回其初始值 v_0 ；大珠子 M 则最后静止在其原始位置左侧的一个特定位置上。

如果两个珠子（带同种电荷）互相排斥，则需要更加详细的讨论。如果其初始能量足够大，它们会擦肩而过，最后其分离速度恢复到初始速度（无论从实验室参考系还是质心参考系观察）。反之，如果其初始能量太低，无法使它们接近到距离 d 以内，

它们将会背向而去。在质心参考系中，小珠子 m 将以速度 $-v_m$ 向左运动，而大珠子 M 会以速度 $-v_M$ 向右运动（如图 S71.2 所示）。

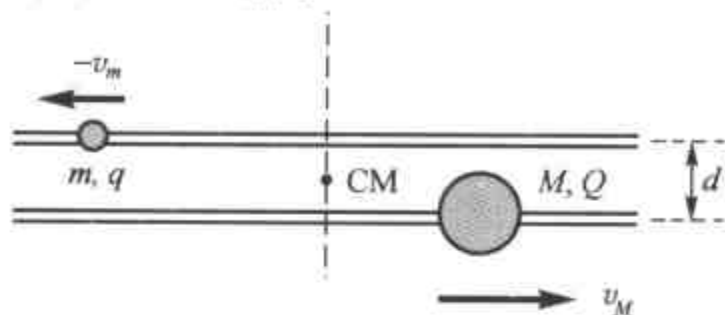


图 S71.2

这两种情况发生的临界条件为

$$\frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}Mv_M^2 < \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{d}$$

即

$$\frac{1}{2} \frac{mM}{m+M} v_0^2 < \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{d}$$

物理量 $mM/(m+M)$ 就是所谓的系统的“约化质量”。珠子在实验室参考系中的速度可以通过其在质心参考系中的速度叠加上两个参考系的相对速度 $|v_M|$ 得到，因此有

$$v_m^* = \frac{m-M}{m+M} v_0 \quad \text{和} \quad v_M^* = \frac{2m}{m+M} v_0$$

在临界情况下，当两个珠子的初始动能刚好足够使其接近到距离 d 时，它们将会达到相对静止的最终结果（如图 S71.3 所示），此时从实验室参考系观察，它们将以同一个速度 $v_m^* = v_M^* = mv_0/(m+M)$ 运动。事实上，理论的最终结果是不稳定的，因为其相对位置的任何轻微扰动，都会因为珠子间的斥力而不断增大。

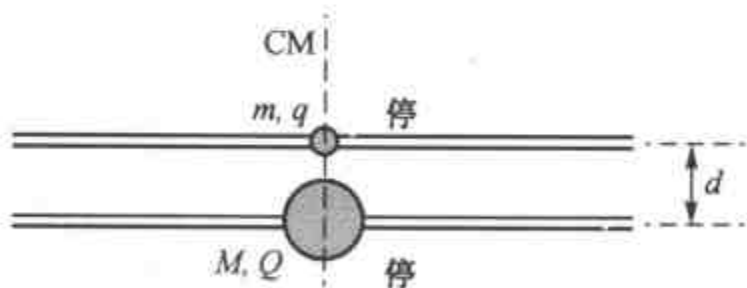


图 S71.3

注：上述讨论的三种情况是一维机械碰撞的模型。临界情况，两个物体共同运动，实际上是一个完全非弹性碰撞的过程。此时，只有动量守恒，机械能减少。对于两个珠子彼此靠近又相互分离的情况，实际上是一个完全弹性碰撞的过程（此



时能量、动量均守恒)。在运动过程中两个珠子擦肩而过或沿原路返回(事实上,它们并没有碰撞,并且保持其原来的速度),显然是满足守恒率的。这种情况在机械碰撞中通常是不存在的,因为机械碰撞中两个物体不可能互相“穿过”。

题解 72

(i) 令 v_0 表示珠子渐近的共同速度, d 为珠子之间的距离, m 为珠子的质量。

在给定时间间隔 Δt 内, 珠子组将与 $v_0 \Delta t / d$ 个更多的珠子碰撞, 从而使其质量增长为 $\Delta m = m v_0 \Delta t / d$, 动量增长为 $\Delta p = v_0 \Delta m = m v_0^2 \Delta t / d$ 。根据牛顿运动定律

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m v_0^2}{d}$$

得出在完全非弹性碰撞下珠子的最终速度为 $v_0 = \sqrt{Fd/m}$ 。

(ii) 在完全弹性碰撞下, 两个质量相同的物体若初始时其中一个静止, 碰撞后它们将交换速度。初始时运动的物体将停止, 而初始时静止的将以同样的速度向前运动。

最左侧的珠子以恒定的加速度加速, 第一次碰撞前将得到速度

$$v_1 = \sqrt{\frac{2Fd}{m}} = \sqrt{2}v_0$$

它把这个速度传递给第二个珠子并静止下来, 然后在外力作用下重新被加速。开始运动的第二个珠子又怎样呢? 它以恒定速度 v_1 (向右运动,) 与第三个珠子碰撞并静止下来。第三个及其以后的珠子进行着同样的过程, “激波”将以速度 v_1 向前传播开去。同时, 最左侧的珠子又重新被加速到速度 v_1 , 与第二个已经静止下来的珠子碰撞, 这个过程反复进行, 从而产生一个新的“激波”。被加速珠子的速度变化总是从 0 变到 v_1 , 其平均速度为 $v_1/2 = v_0/\sqrt{2} = \sqrt{Fd/(2m)}$ 。

注: 讨论一下一般的弹性碰撞(非完全弹性碰撞)也是十分有趣的; 这种情况下(按照计算机模拟结果), 迟早最终相互作用的珠子也会聚集成一个簇, 像完全非弹性碰撞一样, 其速度为 $v_0 = \sqrt{Fd/m}$ 。珠子粘在一起的时间取决于碰撞的非弹性度(恢复系数); 弹性越好, 珠子粘在一起所需要的时间越长。

题解 73

在任意时刻, 称重仪器上无法测到自由下落过程中啤酒的重量, 尽管啤酒落入壶中对壶的冲击以及从桶中流出啤酒时由于方向改变而作用于水龙头的力都会反应到



仪器上, 同时还有一些其他因素要考虑在内。然而, 如果把壶、桶和啤酒当作一个系统来考虑, 这些作用都是内部作用; 整个系统在忽略空气阻力的情况下只受到两个力: 重力和测重仪器的反作用力。这两个作用力的结果导致整个系统的重心下降, 开始是加速 (直到啤酒到达水壶)、其后是匀速下降、最终是减速 (啤酒不再流出) 的历程。对测重仪器的读数变化, 一定是从整个系统的重量开始: 逐渐变小、不变, 再逐渐变大、不变的过程。

题解 74

如果入射水流的横截面积为 A 、速度为 v , 那么单位时间内进入到水槽中密度为 ρ 的水量为 ρAv 。这些水的动能为 $\rho Av^3/2$, 水平方向的动量为 $\rho Av^2 \sin \alpha$ 。如果忽略水的黏性, 这些量不会发生变化, 因此有

$$\frac{1}{2} \rho Av^3 = \frac{1}{2} \rho A_1 v_1^3 + \frac{1}{2} \rho A_2 v_2^3 \quad (1)$$

$$\rho Av^2 \sin \alpha = \rho A_1 v_1^2 - \rho A_2 v_2^2 \quad (2)$$

由物质守恒, 又有

$$\rho Av = \rho A_1 v_1 + \rho A_2 v_2 \quad (3)$$

其中 A_1 、 A_2 分别为水槽中左、右两侧水流的横截面积, v_1 、 v_2 则为对应的流速。

方程 (1)、(2)、(3) 不足以确定 4 个未知量 (两个横截面积和两个速度), 还需要另外一个关系式。根据伯努利定律, 无黏性流体的流线上物理量 $\rho v^2/2 + p + \rho gh$ 守恒。无论水柱进入水槽前后, 其压强均为大气压强, 是常数。如果水流的高度差, 或者更准确地说, 相应的势能变化, 可以忽略不计 (对于高速流动的液体是正确的), 则伯努利方程的结果为 $v = v_1 = v_2$ 。这意味着在水槽的两端, 水流出的速度相等。这个结果可能相当令人惊奇, 但在上述近似的精度下是正确的。

至此, 质量和动量的守恒方程将化成 $A = A_1 + A_2$ 和 $A \sin \alpha = A_1 - A_2$, 进而

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}$$

这个比值可以通过实验来检验, 与上面计算的结果符合得很好, 这也说明上述的近似是合理的。

题解 75

在时间间隔 Δt 内, 以加速度 a 运动的液体表面下降高度为 $\Delta h = a(\Delta t)^2/2$, 相应的流出液体质量为 $\Delta m = (D^2 \pi/4)(\Delta h)\rho$ 。这些流出的液体等价于液体整体势能减少 $(\Delta m)gh$ (如图)。同时, 液体整体的速度增加 $\Delta v = a\Delta t$, 动能增加



$$(D^2\pi/4)h\rho(\Delta v)^2/2$$

实际上，已流出液体的速度还要大些，但是其数量与全部液体相比很少，因此这部分影响可以忽略不计。

根据能量守恒定律，动能和势能的变化应相等：

$$\frac{\pi D^2}{4} \frac{a}{2} (\Delta t)^2 \rho g h = \frac{\pi D^2 h \rho}{4} \frac{(a \Delta t)^2}{2}$$

由此得出 $a = g$ 。

这意味着初始时部分水是作自由落体运动的，由质量守恒可知从底部流出的水的速度应是水面速度的 $(D/d)^2$ 倍，因此出水口处的加速度也应该是重力加速度 g 的同样倍数。例如，如果出水口是管径的 $1/10$ ，则初始时流出液体的加速度可达到 $100g$ ！

液体的自由落体运动会持续多长时间呢？根据托里拆利定律，水流的速度为 $\sqrt{2gh}$ ，因而水面的下降速度为 $(d/D)^2 \sqrt{2gh}$ 。时间间隔 τ 可以有以下关系来进行粗略的估计

$$g\tau \approx \frac{d^2}{D^2} \sqrt{2gh}$$

如果，举个例子的话， $h = 20 \text{ cm}$ ，而直径之比为 $1:10$ ，则有 $\tau \approx 0.002 \text{ s}$ ，这个时间在多数情况下是可以忽略不计的。

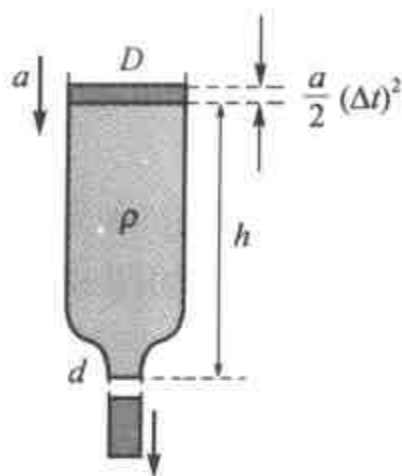
题解 76

沙子几乎匀速地流经小孔，因此沙子全部流完所需要的时间 T 应该与沙子的体积 H^3 成正比。（由于我们的目的只是做一个粗略的估计，锥体和立方体的差别这里不必考虑。）时间 T 还可能与重力加速度 g 、小孔的直径 d 和沙子的密度 ρ 有关，因此有 $T \approx H^3 \times f(g, d, \rho)$ 。

由于只有 g 中包含时间的量纲，因此函数 f 一定正比于 g 平方根的倒数。类似的分析可知， T 与 ρ 无关，但正比于 $d^{-5/2}$ ；综上所述， $T \approx H^3 / \sqrt{d^5 g}$ 。因为比例系数是一个无量纲的数，与任何物理量无关，所以可设为 1。（虽然这种假设对一些物理分支而言是众所周知地危险！）

考虑现实生活中的数据，例如 H 为几个厘米，而 d 大约为 1 毫米左右，此时 T 的计算结果为几分钟，这刚好大约是煮熟鸡蛋所需的时间。因此，沙漏在英文里写成 egg-timer。

注：原则上讲，沙粒的平均直径应出现在公式中。但是，一般情况下它与其他物理量相比很小，所以（正像构成沙粒的原子大小不予考虑一样）在题中分析



时没有考虑。所有量纲分析中最主要的技巧是，在现有的现象中选择相关的参数。

题解 77

令小球的位移为 x ，计算一下作用于小球上的合力 F ，如图 S77.1 所示。

伸长后的弹簧的长度为

$$l = \sqrt{l_0^2 + x^2} \approx l_0 + \frac{x^2}{2l_0}$$

因此弹簧内的张力为

$$F_{\text{弹簧}} = k \frac{x^2}{2l_0}$$

进而，作用在小球上合力（如图 S77.2 所示）为

$$F = -2F_{\text{弹簧}} \sin \theta \approx -2F_{\text{弹簧}} \frac{x}{l_0} = -\frac{k}{l_0^2} x^3$$

小球的运动方程为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{l_0^2} x^3$$

这是一个微分方程，用初等的方法无法求解。

然而要解决题目中设定的问题并不必精确求解这个方程，而只要利用量纲分析就足够了。把方程写成下面的形式

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{ml_0^2} x^3 = -Cx^3$$

可以假定运动周期 T 只与 C 和振动的幅度 A 有关，具体可以写作

$$T \propto C^\alpha \times A^\beta$$

这意味着量纲关系

$$s = [T] = [C]^\alpha \times [A]^\beta = \left(\frac{\text{kg}}{\text{s}^2} \times \frac{1}{\text{kg}} \times \frac{1}{\text{m}^2} \right)^\alpha \times \text{m}^\beta = \text{s}^{-2\alpha} \times \text{m}^{-2\alpha+\beta}$$

可见，如果 $-2\alpha = 1$ ， $-2\alpha + \beta = 0$ ，方程得到满足。因此有 $\alpha = -1/2$ ， $\beta = -1$ ，即 $T \propto 1/A$ 。因此，当振幅增加为原来的 2 倍 (2 cm) 时，其周期将变成原来的一半 (1 s)。

由于量纲分析中变量的选择有一定的随意性，因而为了确认我们上述结论的合理性，给出如下的另外一种解法。

小球的速度随其位置的变化，可以通过能量守恒定律计算出来。当小球处于最大位移处时，其速度为 0，此时两根弹簧中存储的势能一定等于在任意位置时小球的动

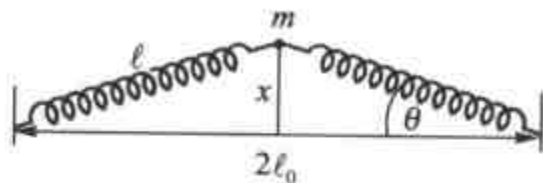


图 S77.1

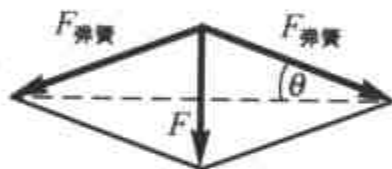


图 S77.2



能和弹簧的势能之和。弹簧的伸长量为

$$\Delta l = \frac{1}{2} \frac{x^2}{l_0}$$

(因此能量守恒的) 等式可写为

$$\frac{kA^4}{4l_0^2} = 0 + 2 \times \frac{1}{2} k \left(\frac{A^2}{2l_0} \right)^2 = 2E_{\text{弹簧}}^{\text{max}} = \frac{1}{2} mv^2 + 2 \times \frac{1}{2} k \left(\frac{x^2}{2l_0} \right)^2$$

其中 A 为小球的最大位移 (振幅)。由这个等式可知小球的速度可以表示为

$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{1}{l_0} \sqrt{\frac{k}{2m}} \sqrt{A^4 - x^4}$$

分离变量后得到

$$l_0 \sqrt{\frac{2m}{k}} \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{A^4 - x^4}} = \int_0^{T/4} dt = \frac{T}{4}$$

使用 $y = x/A$ 作为新变量, 最后结果变为

$$T = l_0 \sqrt{\frac{32m}{k}} \frac{1}{A} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}$$

可见, 振动的周期与振幅成反比; 同样可以得到振幅变为原来的 2 倍 (2 cm), 周期将变为原来的一半 (1 s)。

注: 题解中最后一个周期表达式的定积分利用一个可编程的计算器可以给出近似值

$$\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} \approx 1.31$$

进而得到问题的最终解。

题解 78

由于弹簧很软, 初始时球体实际上作自由落体运动。弹簧的长度很快变为原长度的数倍 (原长度在后续运动中可以忽略不计)。在这样的近似下, 球体在水平和竖直两个方向上均作简谐振动。由于小球刚刚释放时初速度为 0, 它到达悬挂点正下方时水平振动刚好经过 1/4 周期。同时, 竖直方向的运动也相应地完成 1/4 周期, 到达悬挂点正下方的平衡位置, 距离远远大于弹簧的原长度, 为 mg/k 。

小球的运动也可以用方程来定量描述, 在如图所示的坐标系中, 小球在点 (x, y)

处的运动方程为

$$ma_x = -k(\sqrt{x^2 + y^2} - L) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$ma_y = -k(\sqrt{x^2 + y^2} - L) \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + mg$$

在小球运动的初期，弹簧的伸长量与原长度 L 相比很小，弹簧的弹力可以忽略不计。另一方面，当

$$\sqrt{x^2 + y^2} \gg L$$

时，弹簧的原长可以忽略，小球的运动方程可以简化为

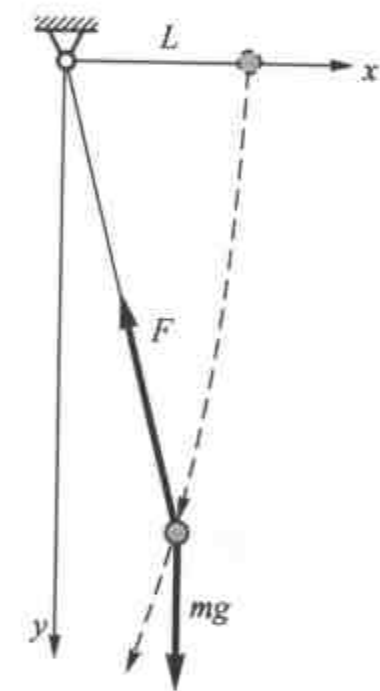
$$ma_x = -kx \quad \text{和} \quad ma_y = -ky + mg$$

这两个方程描述周期相同的简谐振动，平衡位置分别为 x 方向的原点和 y 方向坐标为 $y_0 = mg/k$ 的位置。考虑振动的初始条件，有

$$x(t) = L \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t, \quad y(t) = \frac{mg}{k} \left[1 - \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \right]$$

小球位于悬挂点正下方时， $x(t) = 0$ ， $y = y_0 = mg/k$ ，与前面的结论是一致的。

注：在运动初期 $t \ll \sqrt{m/k}$ （此时假设的运动方程并不严格成立），上述关于 x 和 y 的表达式可以近似写成 $x(t) \approx L$ 和 $y(t) \approx gt^2/2$ ，这与自由落体运动的公式是一致的，对于描述初始期间的运动是合适的。



128

题解 79

如果火车车厢以加速度 a 减速运动，则在火车车厢参考系中，小球将受到一个指向火车运动方向的“虚的惯性力”，大小为 ma 。

如果这个惯性力一直存在，那么小球就不可能到达竖直向上的位置。因为如果能够到达竖直位置，则此过程中惯性力做的总功为 0（位移与惯性力的作用方向垂直），而重力做功为负，进而小球的动能将为负，这是不可能的。

现在考虑火车车厢只是受到刹车力一段时间（到它停止）。如果车厢停止时弹性线绳处于水平位置，则惯性力做功为 $W = maR$ ，其中 R 为线绳的长度。如果单摆接下来可以以速度 v 达到竖直向上的位置，那么根据能量守恒有

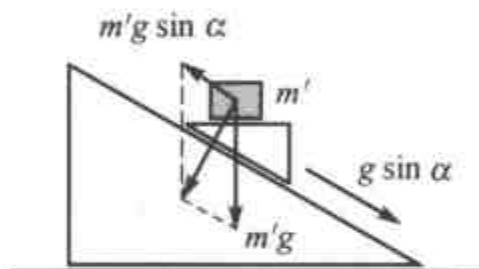


$$maR - 2mgR = \frac{mv^2}{2}$$

要使线绳直到顶点始终保持张紧, 要求 $mv^2/R > mg$, 代入上式得火车车厢的加速度应满足 $a > 2.5g$ 。结论是, 张紧的线绳在车厢的加速度足够大, 同时初速度 v_0 也要足够大以使小球在车厢停止前有足够的时间到达水平位置的情况下, 可以达到竖直向上的位置。

题解 80

作用在楔形木块上的力包括其重力 mg 和垂直于斜面的弹力 K , 后者的大小随着时间而变化。在这两个力的作用下, 楔形木块的加速度 a 只有一个平行于斜面的分量, 大小为 $g \sin \alpha$ (在惯性系中测量)。在楔形木块的加速参考系中只需把惯性力 $-m'a$ 考虑进来, 牛顿运动方程仍然是成立的。这里 m' 为研究对象的质量 (例如一个小体积元的水)。



因为平行于斜面的分量相互抵消, 作用于 m' 上的重力和惯性力之和一定垂直于斜面。位于楔形木块上的物体 (如玻璃杯和杯中的水) 只能感觉到它们好像处于垂直于斜面的引力场中, 因此杯中的水面将平行于斜面。

这个结论不依赖于斜面的运动; 斜面是固定的、自由运动的, 甚至是被外力拉着左右晃动的, 对上述结果均无影响。只要楔形木块和斜面之间的摩擦可以忽略, 而且楔形木块不离开斜面, 玻璃杯中的水面就一直平行于斜面。

对于 $m \gg M$ 的情况需要专门的讨论, 此时楔形木块将推走斜面, 从而几乎自由下落。楔形木块上的所有物体 (包括水) 几乎完全“失重”; 但即使这样, 杯中的水面依然能够保持与斜面平行。

注: 水面只有经过一段时间之后才会变成与斜面平行, 因此需要一个足够长的斜面; 这就是为什么这一有趣的现象在通常的环境下无法通过实验观察到的原因。

题解 81

假定长线具有均匀的横截面积和质量分布, 并且两端无约束。它围绕地球运动, 始终保持与地球的相对位置不变。显然, 如果这根线是竖直的, 则此现象只能发生在赤道上。在地球参考系中, 一个质量为 m 的物体, 在赤道上方与地心距离为 r 、角速度为 ω 的物体受到引力 $-GMm/r^2$ 和离心力 $m r \omega^2$ 两个力的作用, 这里 M 为地球的质量。

量, G 为万有引力常数。线绳平衡要求其上的每一点均满足引力与离心力相等的条件 (两者均随 r 而变化), 整个线绳平衡的条件很容易通过积分的方法求出, 但是不使用复杂的数学, 一样可以得到结果。

想像线绳在外力的作用下被拽下来一点点, 由于初始时绳子 (在旋转的参考系中) 处于平衡状态, 只要很小的力就可以使其移开原来的平衡位置, 因此在一阶近似下这个过程中的功必等于 0。从做功的角度来看, 整个线绳的位移等价于线绳的质量为 Δm 的一小部分缓慢地从顶端移动到底端。这个过程中的功包含两项: 引力势能的改变和平均离心力所做的功 (离心力是线性变化的)。如果线绳的长度为 L 并且其底端刚刚接触地面, 则外力的功为

$$W = GM\Delta m\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{L+R}\right) - \Delta m \frac{R+(R+L)}{2} \omega^2 L = 0$$

其中 R 为地球的半径。这是一个 L 的二次方程, 使用已知数据可以解出

$$L = \frac{R}{2} \left(-3 + \sqrt{1 + \frac{8GM}{R^3 \omega^2}}\right) \approx 140\,000 \text{ km}$$

此长度数倍于人造通讯卫星和地心的距离 $r_s = (GM/\omega^2)^{1/3} \approx 42\,000 \text{ km}$!

绳子上的最大张力是多少? 很容易得出最大张力 σ_{\max} 发生在 $r=r_s$ 位置, 它满足 $\sigma_{\max}/\rho = 4.8 \times 10^7 \text{ N} \cdot \text{m} / \text{kg}$, 其中 ρ 为线绳的密度。这个张力与密度之比的数值远远大于我们所知的材料 (例如钢为 2.6×10^5 , 碳为 1.7×10^6)。因此, 虽然从原理上“天梯”是不违反牛顿定律的, 但在目前不可能找到合适的材料来建造它 (至少在横截面积不变的情况下)。

题解 82

(i) 在桥梁的最高点处小汽车的运动方程为

$$mg - N = m \frac{v^2}{\rho}$$

其中 N 为桥梁对汽车的支持力 (为所求力的负值), $v = 20 \text{ m/s}$, ρ 为桥梁的曲率半径。解决此问题最难的部分是求曲率半径。

如果能够找到一个运动, 其轨迹上每一点的法向加速度都是已知的, 那么曲率半径就很容易求得。对于抛物线形的轨迹, 斜抛运动提供了所需的类似情况。令斜抛运动的初始速度为 v_0 , 初始时与水平方向的夹角为 α 。

抛物线的射程 ($d = 100 \text{ m}$) 和高度 ($h = 5 \text{ m}$) 可以用斜抛的初始数据表示为

$$d = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \quad \text{和} \quad h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$



因此两者的商 h/d 给出 $\tan \alpha = 4h/d$ (即 $\alpha \approx 11.3^\circ$), 而初始速度的水平分量为

$$v_x = v_0 \cos \alpha = d \sqrt{\frac{g}{8h}} = 50 \text{ m/s}$$

至此, 桥梁最高点处的曲率半径可以计算出来 $\rho = v_x^2/g = 250 \text{ m}$ 。

容易得出, 在最高点处的支持力为

$$N = m(g - \frac{v^2}{\rho}) = 8.40 \text{ kN}$$

(ii) 在其他位置处汽车作用在桥梁上的压力也可以用类似的办法求出, 即使用的曲率半径。在通过桥梁 $3/4$ 距离处, 曲率半径大约是 254 m , 此时正压力约为 8.37 kN 。除了桥梁最高点(中心点), 其他位置除正压力外还有一个切向力(摩擦力), 在 $3/4$ 位置处其值为 995 N , 因此作用在桥梁上的合力大约为 8.43 kN 。

题解 83

我们可以证明椭圆长、短轴端点处的曲率半径分别为 b^2/a 和 a^2/b , 其中 $2a$ 和 $2b$ 是长轴和短轴的长度。这个几何结果可以利用微积分方法导出, 也可以通过分析一些具体物理问题得到, 下面给出的只是其中的一种方法。

考虑行星沿椭圆轨道绕太阳运动, 把牛顿第二定律用于行星距太阳 r 时的长轴端点, 有

$$G \frac{M}{r^2} = \frac{v^2}{R}$$

其中 R 为端点处的曲率半径, M 为太阳的质量。根据开普勒第三定律, 轨道周期为 $2\pi\sqrt{a^3/GM}$, 并且径向矢量在相等的时间内扫过相同的面积。整个椭圆面积为 πab , 因此行星经过长轴端点时令两者相等, 我们得到

$$\frac{vr}{2} = \frac{ab}{2} \sqrt{\frac{GM}{a^3}}$$

比较上述两个等式, 有 $R = b^2/a$ 。这里实际上利用了椭圆的焦点位于长轴上, 因此不能用同样的方法于短轴。尽管如此, 对于它们相应的曲率半径, 长轴和短轴应该是对称的。

以恒定速率运动的质点遵循方程 $F = mv^2/R$, 其中 R 为相应的曲率半径。根据给定的数据有: $b^2/a = 1.25 \text{ m}$, $a^2/b = 10 \text{ m}$ 。因此容易算出 $2a = 10 \text{ m}$, $2b = 5 \text{ m}$ 。

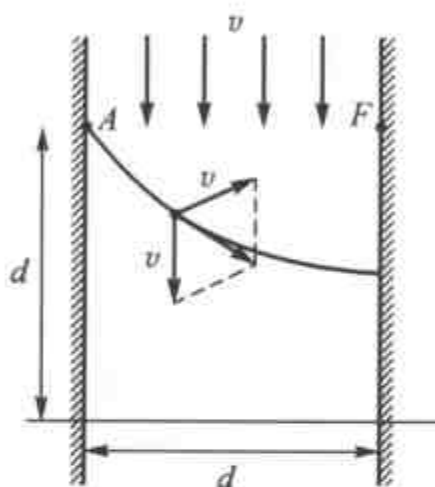
注: 椭圆的曲率半径也可以通过如下的数学方法得出。考虑在平面 xy 内沿半长、短轴分别为 a 、 b 的椭圆轨道运动的质点, 其运动方程为

$$x = a \cos \omega t \quad \text{和} \quad y = b \sin \omega t$$

当 $t=0$ 时, 质点位于长轴端点, 速度为 $v=b\omega$, 加速度为 $A=a\omega^2$ 。另一方面, 加速度应满足 $A=v^2/R$, 因此曲率半径为 $R=b^2/a$ 。类似地, 可以得到短轴端点处曲率半径应为 a^2/b 。

题解 84

假定运河的宽度为 d , 在距离出发点 A 的同一侧河岸下游距离为 d 处画一条与河岸垂直的直线 (如图所示)。



初始时小船距离目标位置 F 和下游处的直线均为 d , 由于水流的速度以及小船相对于水的速度均为 v , 水把小船向下游冲走的距离与小船接近目标位置 F 的距离相等。这意味着, 小船与对岸目标点 F 和下游直线的距离总是保持相等, 因此小船的运动轨迹应该是以 F 为焦点、以下游直线为准线的一条抛物线。经过相当长的一段时间, 小船将到达对岸目标位置 F 下游 $d/2$ 距离处。由于水流速度和小船行驶的速度相等, 所以船员不可能到达比这个位置更近的地方。

题解 85

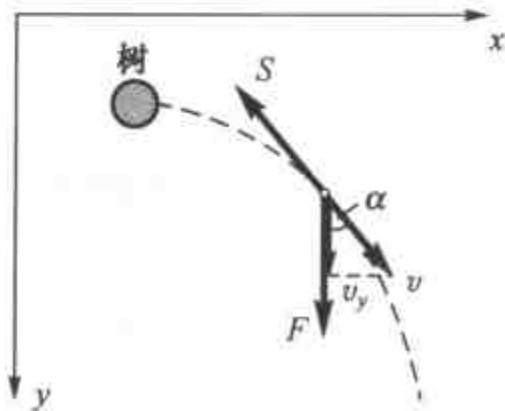
在非常轻的推动之后, 如果被推的小孩以一个恒定的速度直接滑向山脚, 那么其重力平行于斜面的分量 F 一定与所受到的摩擦阻力 S 相等, 即 $F=S$ 。

滑动摩擦力 (方向与即时速度相反) 使得运动物体速度减少, 而力 F 使得沿斜面方向的速度分量增加。这两种效应同时作用的结果, 通常会产生一个相对复杂的运动 (轨迹为曲线、加速度不断变化)。尽管如此, 最终的速度我们可以在不必考虑具体的运动细节的条件下得出。

如图给出一个一般运动情况下的坐标系, 小孩的轨迹不是直线下山的, 设小孩的瞬时滑动速度为 v , 速度的 y 方向分量为 v_y 。首先计算这两个量在短时间间隔 Δt 内的变化, 由牛顿第二定律有

$$m\Delta v = (-S + F \cos\alpha)\Delta t, \quad m\Delta v_y = (F - S \cos\alpha)\Delta t$$

把上面二式相加, 并考虑 $F=S$ 可得





$$\Delta v + \Delta v_y = \Delta(v + v_y) = 0$$

即

$$v + v_y = \text{常数}$$

根据题中给定的初始条件, 这个常数的值为 $v_0 = 1 \text{ m/s}$ 。滑动小孩的最终速度 v_{\max} 将沿斜坡向下, 其大小可以由上面的“速率守恒” $v = v_y = v_{\max}$ 计算出来, 即

$$v_{\max} = \frac{v_0}{2} = 0.5 \text{ m/s}$$

题解 86

设 kv 为快艇的速度, 即 k 为所要求的两船速度的比值。

如图所示, 任意时刻 t 两船的距离 (初始值为 a)

在 Δt 时间内的减少量为

$$\Delta d = kv \Delta t - v \sin \alpha \Delta t, \quad (1)$$

同时, 快艇距离海岸线的增加量为

$$\Delta y = kv \sin \alpha \Delta t, \quad (2)$$

其中 α 为快艇的瞬时速度与海岸线之间的夹角。

现在我们把方程 (1) 和 (2) 中的小位移量

进行累加, 此时注意 $\sum \Delta d$ 、 $\sum \Delta y$ 和 $\sum v \Delta t$ 三

者均为 a 。本来可能会造成很大麻烦的角度 α 在

累加之前就可以消掉了, 进而得到一个惊人简单的关于 k 的二次方程

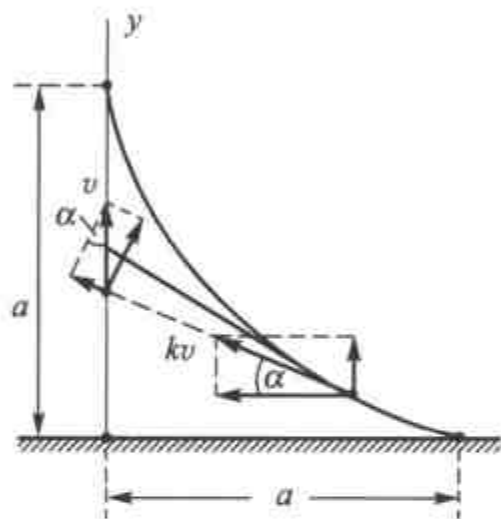
$$k^2 - k - 1 = 0, \quad \text{其正根为} \quad k = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

这个正是与斐波那契数列相关的著名的“黄金分割”, 对本题而言就是要使海岸警卫队的快艇和走私船在以题目描述的方式相遇情况下, 两艘船速度的比值。

题解 87

从质点的对称性分布和初始条件, 我们不难推知所有质点都将以相同的非均匀加速度掉向正 n 边形的中心位置。整个过程中系统的形状保持不变, 但是每一个质点与中心的距离将非匀加速变小。一个质点 (不妨称其为第 n 个) 位于距中心 r 处时所受到的等效力为

$$F(r) = G \frac{m^2}{r^2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4 \sin(\pi k/n)}$$



所有其他质点对其施加的引力作用共同形成了这个等效力，更准确地说，就是这些力指向中心位置的分量等效于位于中心位置的一个物体产生的引力作用，其质量为

$$M_n = \frac{m}{4} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sin(\pi k/n)}$$

对于不同的 n 值，可以计算质量 M_n （以 m 为单位）的值为

$$M_2 = 0.25, \quad M_3 = 0.58, \quad M_4 = 0.96, \quad \dots, \quad M_{10} = 3.86, \quad \dots$$

从初始位置 R 塌缩成一个中心质量 M 所需要的时间，可以看成是半长轴为 $R/2$ 的（退化）椭圆轨道周期 T_c 的一半。半径为 R 的圆形轨道周期 T_c ，可以通过圆周运动的动力学方程直接得到

$$G \frac{Mm}{R^2} = mR \left(\frac{2\pi}{T_c} \right)^2 \quad \text{即} \quad T_c = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

然而，按照开普勒第三定律

$$\left(\frac{T_c}{T_c} \right)^2 = \left(\frac{R/2}{R} \right)^3$$

因此，最后得到塌缩的时间为 $T = \pi \sqrt{R^3 / 8GM_n}$ 。

注：极限情况 $n \gg 1$ 是十分有趣的。随着质点数 n 的增加，即使总质量为常数 M_0 ，即 $m = M_0/n$ ， M_n 也会不断地增加。一定质量的物质越均匀地分布在一个圆周上，在引力作用下塌缩到中心位置所需要的时间越短。尽管如此，我们的上述结论仍不适用于在一个几何圆周上的连续物质分布，物质的径向尺度不可忽略。

题解 88

根据开普勒第一定律，火箭将沿椭圆轨道运动，轨道的一个焦点在行星的中心。只有当发射点和返回点分别位于椭圆短轴两端时，发射和返回速度才会相互平行（尽管方向相反）。但是，对于椭圆，焦点到短轴端点的距离等于其半长轴的长度 a ，由此得出 $a = R$ （见图 S88.1）。

由开普勒第三定律，有不同的偏心率、相同的长轴长度的卫星轨道，应该具有相同的周期，本题中这个轨道的周期应是给定的 T_0 。题目中火箭的运动覆盖了整个椭圆轨道的一半，但是经历的时间并不是整个周期的 $1/2$ 。根据开普勒第二定律，火箭的运行时间与径向矢量扫过的面积成正比。整个椭圆的面积为



$$A_0 = \pi ab = \pi a^2 \sin \frac{\theta}{2}$$

经历半个轨道时扫过的面积为

$$A_1 = \frac{\pi ab}{2} + \frac{1}{2} \times 2bc = \frac{1}{2} a^2 \pi \sin \frac{\theta}{2} + a^2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

因此火箭的飞行时间为

$$T_1 = \frac{A_1}{A_0} T_0 = T_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

火箭离开行星表面的最大距离为

$$2a - a - (a - c) = c = R \cos \frac{\theta}{2} \leq R$$

如果发射点和返回点间的夹角趋于 0 ($\theta \rightarrow 0$), 依据上述结果可以得到火箭运行时间的最大值为

$$T_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \right)$$

到达的最大高度接近行星的半径 ($c \rightarrow R$)。但是, 事实上如果出发点和着陆点在同一位置 ($\theta = 0$), 火箭就可以达到任何或大或小的高度。这意味着, 在 $\theta = 0$ 这一点上, 周期和最大高度不再是 θ 的连续函数。

如果发射的速度足够大 (大于等于第一宇宙速度 $v = \sqrt{Rg}$), 并且初始速度与行星表面相切, 则如图 S88.2 所示的轨道是可能的。这种情况下, 返回速度也和发射速度平行, 但是此时两速度方向也相同。最大高度可以达到任何值, 但周期一定比 T_0 大。这些轨道都对应于 $\theta = 0$ 的特殊情况。

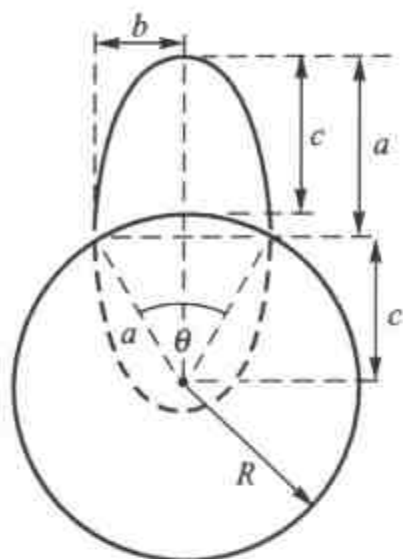


图 S88.1

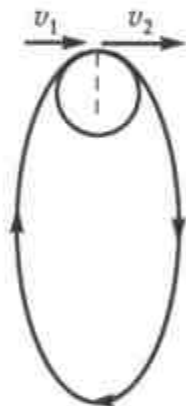


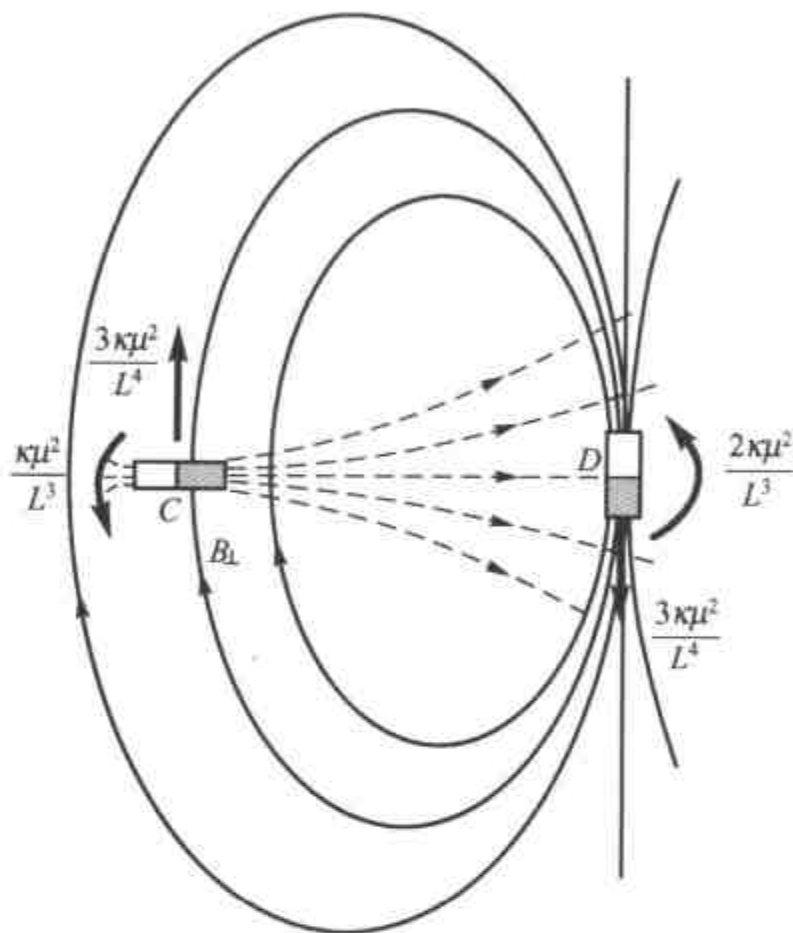
图 S88.2

题解 89

(i) 把 $\mu_0/4\pi$ 写作 κ , 磁偶极子 D 作用于 C 的力偶为 $\kappa\mu^2/L^3$, 方向沿逆时针方向; 偶极子 C 作用于 D 的力偶为 $2\kappa\mu^2/L^3$, 也沿逆时针方向。

(ii) 力偶不仅仅是磁场势能的结果; 如果偶极子放置于非均匀磁场中, 也会受到力的作用。 D 作用于 C 上的力不为 0 , 是由于 B_{\perp} 的磁场强度在 C 两端略有不同。合外力的大小为 $\mu \times \partial B_{\perp} / \partial r$, 其中微分取 $r=L$ 处的值, 因而为 $3\kappa\mu^2/L^4$; 其方向与 B_{\perp} 相同。这个力和其施加于 D 上的反作用力共同作用于木棍上, 产生一个顺时针方向的力偶 $3\kappa\mu^2/L^3$ 。这个力偶刚好抵消另外两个作用于木棍上的力偶, 因此当把木棍

悬挂起来后，什么也不会发生：从整个系统的对称性和永动机的不可能性来看，这个结果是必然的！



注：这是一个关于非中心力及其反作用的例子，此时两个相互作用平行，但并不相同，也不在一条直线上。

题解 90

点电荷 q 所致金属板的电荷分布，（在金属板上方）产生的静电场等价于位于在金属板下方原点电荷镜像位置（如果金属板看做是镜子的话）、电量为 $-q$ 的点电荷产生的电场。因此，由库仑定律可以计算出点电荷 q （在非相对论状况下）所受到的吸引力为

$$F(x) = k \frac{q^2}{4x^2}$$

其中 k 为库仑常数， x 为给定时刻点电荷与金属板之间的距离（初始状态下，点电荷与其镜像电荷距离为 $2d$ ）。上面这个作用力的等式可以看作质量为 $M = kq^2/(4Gm)$ 的物体作用于距离 x 、质量为 m 物体上的万有引力，即 $F = GMm/x^2$ 。在这样的类比下，根据开普勒第三定律关于行星转动周期 T 与其椭圆轨道半长轴 a 之间的关系，有



$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

如果点电荷在距离金属板 d 处被释放, 那么可以认为它将沿一个半长轴为 $a = d/2$ 的退化椭圆轨道运动。点电荷到达金属板所用的时间 T_h , 应为整个退化轨道运动周期的一半, 进而代入相应变量得

$$T_h = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{q} \sqrt{\frac{md^3}{2k}}$$

题解 91

盐水是良导体, 因为正、负离子可以在溶液中很容易地运动。当带电塑料球接近水面时, 与其带相反电荷的离子将移向水面, 而同种电荷将遭排斥。结果水面上方的电场线将垂直于水平面, 而水面下方电场强度为 0。

带电小球吸引其下方的水, 因此相应水面将隆起。作用在隆起水面上的静电力, 主要与水本身的重力相平衡, 此时水的表面张力可以忽略不计。我们不是准确地知道隆起的形状, 但是可以肯定地讲这个隆起高出水平面一定很少, 而且只会轻微偏离平面; 这就是为什么还可以使用镜像电荷法来解决问题的原因。这种方法对于找出最大效应、求解水面最高点 P 的高度是足够的, 如图 S91.1 所示。

电量 Q 在 P 点的电场强度为

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(3r)^2}$$

水面上未知的电荷分布效应可以等效为位于水面下深度为 $3r$ 的镜像电荷 $-Q$ 产生的电场 (如图 S91.2 所示)。镜像电荷在 P 点的电场强度与 E_1 的大小和方向均相同, 因此总电场强度为

$$E = 2E_1 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(3r)^2}$$

根据高斯定理, P 点的表面电荷密度为

$$\sigma = \epsilon_0 E = \frac{1}{2\pi} \frac{Q}{(3r)^2}$$

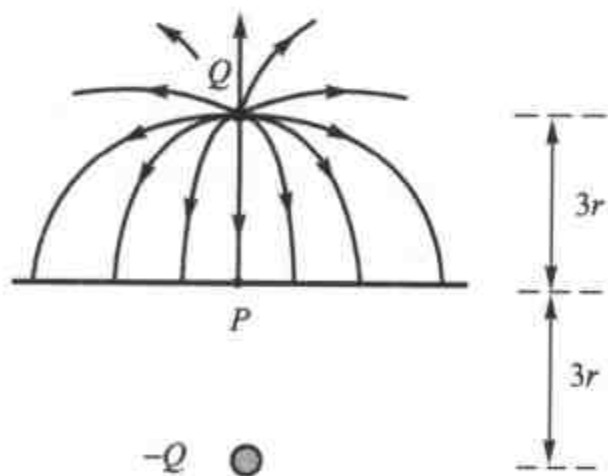


图 S91.2

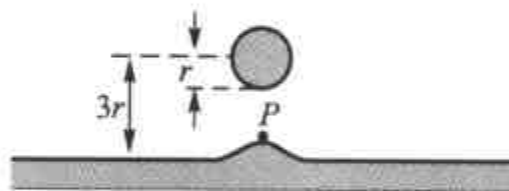


图 S91.1

水面上单位面积受到的力为水面电荷密度与带电小球在该点产生电场强度 E_1 的乘积

$$\frac{F}{A} = \sigma E_1$$

这个力为 P 点单位面积受到的方向向上的力，它应该与水面升高 h 后水面的静压力相平衡

$$\frac{F}{A} = \rho gh$$

把电场强度和表面电荷密度的表达式代入上式，得到高度 h 为

$$h = \frac{1}{\rho g} \frac{1}{2\pi} \frac{Q}{(3r)^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(3r)^2}$$

把各个变量的取值代入上式，得 $h \approx 0.29 \text{ mm}$ ，可见这个值与小球的直径相比是很小的，这说明我们认为水面近似水平的是合理的。

题解 92

138

可以利用球形镜像电荷法解决问题。令两个异号点电荷的带电量分别为 $+Q_1$ 和 $-Q_2$ ，由它们产生的电场的零等势面方程为

$$k \frac{Q_1}{r_1} - k \frac{Q_2}{r_2} = 0$$

其中 r_1 和 r_2 为零等势面上任意一点与两个点电荷之间的距离。把上式变形，得 $Q_1/Q_2 = r_1/r_2$ ，即距离的比值 r_1/r_2 为常数。根据阿波罗尼奥斯定理，满足这个条件的所有点构成一个球面（阿波罗尼奥斯球），因此零等势面是一个球面。

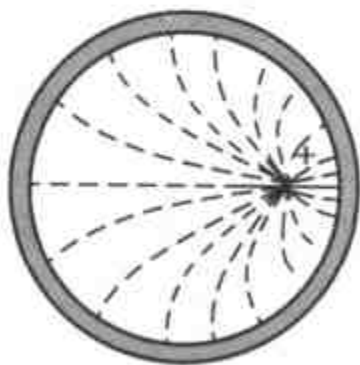


图 S92.1

如果题中的金属球壳是接地的，那么其电势为 0。球壳内部的点电荷 $+Q$ 将在其内表面上诱导出一个不均匀的电荷分布，如图 S92.1 所示。由于点电荷和球壳上诱导电荷的共同作用，导致的球壳内部的电场分布，将会与由点电荷和球壳外的一个异号点电荷产生的电场完全相同。球壳外的点电荷，就是所谓的球形镜像电荷。

金属球壳内表面的电荷分布与球壳的电势无关。

如果球壳没有接地，那么电量 $+Q$ 将均匀分布在其外表面上，并且与内部的电荷分布无关。这是由于金属球壳层内的电场强度处处为零，因此外表面的电荷分布不受球壳内表面的电荷的影响。球壳外部的电场分布，与点电荷位于球壳内部的中心位置时是完全一样的。



作用在球壳内点电荷 Q 上的力，等于镜像电荷与其之间作用的库仑力。使用 S92.2 的标注，点电荷 $+Q$ 距半径为 R 的球壳中心位置为 d ，镜像电荷 $-nQ$ 与球壳的距离为 x 。因此，通过考虑电荷连线与球壳的两个交点 A 和 B ，不难得到两个点电荷电量的比值 n 的表达式

$$n = \frac{x}{R-d} = \frac{x+2R}{R+d}$$

从上式可以得出 $n = R/d$ 和 $x = R(R-d)/d$ 。因此，作用在球壳内部点电荷上的力为

$$F = -k \frac{nQ^2}{(x+R-d)^2} = -kQ^2 \frac{Rd}{(R^2-d^2)^2}$$

可见，当 $d=0$ 和 $d \rightarrow R$ 时这个力为零，而负号表示这个力指向镜像电荷的方向。

注：金属球壳内表面的电荷分布可以利用高斯定理计算出来，面电荷密度的大小正比于原电荷和镜像电荷电场强度的叠加。

题解 93

令硼原子（实际上是硼离子）的质量为 M ，未知的参与对撞粒子的质量为 m 。

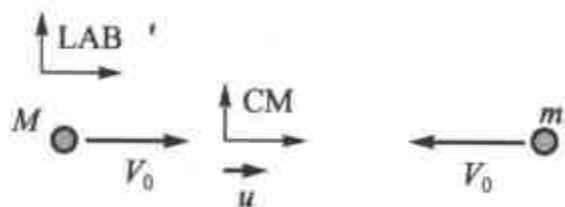


图 S93.1

对撞前，两种粒子具有相对于实验室（LAB）参考系方向相反的大小相同的速度 V_0 。我们很容易把它们转换到质心（CM）参考系中，如图 S93.1 所示。在 LAB 参考系中两个粒子的总动量为 $MV_0 - mV_0$ ，因此质心的速度为

$$u = \frac{M-m}{M+m} V_0$$

在 CM 参考系中，总动量一直为零，两个粒子始终保持大小相等、方向相反的动量。然而，根据能量守恒，碰撞前后两个粒子的动量和速度大小应保持不变，只有方向可以变化。在 CM 参考系中，硼原子在散射之前的速度为

$$V = V_0 - u = V_0 - \frac{M-m}{M+m} V_0 = \frac{2m}{M+m} V_0$$

因此，在散射之后仍应该保持这个值（如图 S93.2 所示）。

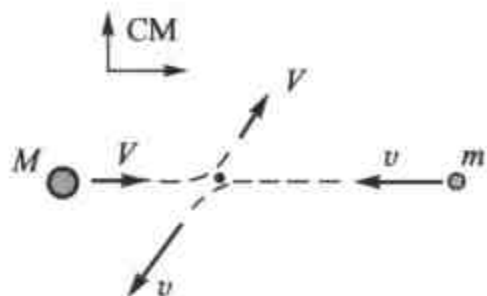


图 S93.2

此时，有

$$|V| = \sin 30^\circ |u|, \quad \text{即} \quad \frac{2m}{M+m} V_0 = \frac{1}{2} \frac{M-m}{M+m} V_0$$

解得 $m = \frac{1}{5}M$ 。因此未知粒子的质量数为 $A=2$ ，

它不再是未知的粒子，而是确定为氦核。

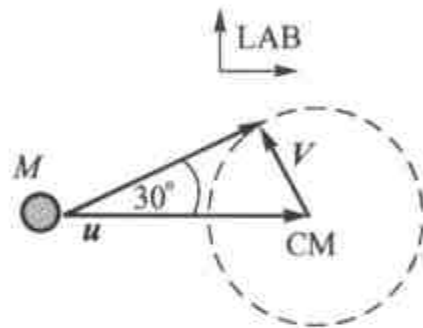


图 S93.3

140

题解 94

两球之间的摩擦可以忽略不计，因此碰撞过程中，它们之间的相互作用与其表面垂直。因而，第一个球碰撞后停下来，同时第二个球得到了第一个球的初速度 v_0 。两个球的转动在碰撞前后没有变化，即第一个球在原地转动，第二个球无转动地以速度 v_0 平移。

台球和桌面之间的摩擦很重要，将影响两球的运动。第一个球在摩擦力 $F_{\text{摩擦}} = \mu mg$ 的作用下加速向前，而第二个球则在同样的力的作用下减速运动，如图 S94.1 所示。第一个球的转动由于摩擦力的作用将变慢，而第二个球的转动将因之增加。

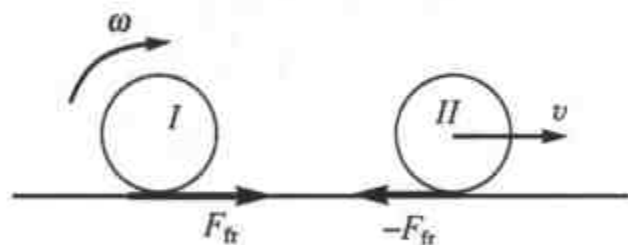


图 S94.1

这部分摩擦力的作用，直到两球达到无摩擦滚动的状态为止，然后将保持那样的运动。

下面证明，两个小球最终的运动状态既不依赖于摩擦系数，也与摩擦系数随位置的可能变化无关。碰撞后，原来运动的小球以

角速度 $\omega = v_0/r$ 转动，其相对于转动轴的角动量为 $I\omega = \frac{2}{5}mr^2(v_0/r)^2 = \frac{2}{5}mv_0r$ 。由于小球的质心静止，即平动带来的角动量变化为零，所以小球相对于其与桌面接触点 P 的角动量也为 $\frac{2}{5}mv_0r$ 。由于摩擦力经过 P 点，因此小球相对于 P 点的角动量不会因摩



擦力的作用而变化。(重力和桌面的支撑力之和为零,因此它们也不会产生净力矩。)

以速度 v 作无滑滚动的小球,其角动量为自身角动量 $\frac{2}{5}mvr$ 和质心运动的角动量

mvr 之和。如图 S94.2 所示,左侧为碰撞后短时间内运动小球和它的受力情况,右侧为最后的无滑滚动状态。根据角动量守恒,我

们有 $\frac{2}{5}mv_0r = \frac{2}{5}mvr + mvr$, 因此 $v = \frac{2}{7}v_0$ 。类

似的道理可以得到,第二个小球的最终速度为 $\frac{5}{7}v_0$, 与摩擦因数的大小无关。

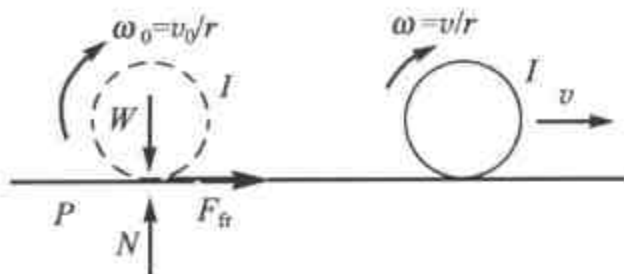


图 S94.2

题解 95

厚木板滑动距离 L 时,有 L/d 个滑轮得到角速度 $\omega_{\max} = v_{\max}/r$ 。厚木板势能的减少为 $MgL \sin \alpha$, 而每个滑轮的动能为 $\frac{1}{2}I\omega_{\max}^2 = \frac{1}{4}mv_{\max}^2$ 。上述结论考虑了滑轮表面最

终的切向速度应该与木板的速度相等,而每个滑轮的转动惯量为 $I = \frac{1}{2}mr^2$ 。

认为木板下降过程中损失的重力势能,全部转化成为滑轮的动能是不正确的,在此情况下由式

$$MgL \sin \alpha = \frac{L}{d} \frac{1}{4} mv_{\max}^2 \quad (1)$$

可以得到木板的最终速度为

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{4dMg \sin \alpha}{m}}$$

然而,这个结果是错误的,因为没有考虑滑轮加速过程中由摩擦作用而导致的热量损失。令单个滑轮与木板之间的摩擦力为 $F(t)$ 。(没有必要假定这个力不随时间变化。)在 Δt 时间间隔内,滑轮角动量的变化为

$$I\Delta\omega = rF(t)\Delta t \quad (2)$$

把上式的变化对时间取和,从而给出滑轮最终速度的一个方程

$$r \sum F(t)\Delta t = I\omega_{\max} = I \frac{v_{\max}}{r} \quad (3)$$

另一方面,在时间 Δt 内,克服摩擦力所做的功(热散失) ΔQ 为摩擦力与滑轮表面相对位移之积

$$\Delta Q = F(t)[v_{\max} - r\omega(t)]\Delta t$$

考虑式 (2)、(3)，总的耗散能量为

$$\begin{aligned} Q &= \sum F(t)[v_{\max} - r\omega(t)]\Delta t \\ &= r\omega_{\max} \sum F(t)\Delta t - I \sum \omega\Delta\omega \\ &= I\omega_{\max}^2 - I\frac{\omega_{\max}^2}{2} = I\frac{\omega_{\max}^2}{2} \end{aligned}$$

在上式的计算中利用了等式 $\omega\Delta\omega = \frac{1}{2}\Delta(\omega^2)$ 。这个结果表明，摩擦生热损失的能量与滑轮得到的动能相等。需要注意的是，这个结果既不依赖于摩擦力的大小，也不依赖于摩擦力随时间的变化。正确的能量守恒方程不是 (1) 式，而应该是

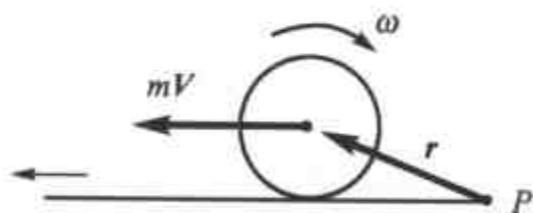
$$mgL\sin\alpha = \frac{L}{d}\frac{1}{4}mv_{\max}^2 + Q = 2\frac{L}{d}\frac{1}{4}mv_{\max}^2$$

可以得到木板的最终速度为

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2dMg\sin\alpha}{m}}$$

题解 96

这个问题实质上是一个二维问题，选择桌面上的一固定点 P ，考虑小球相对于该点的角动量。容易看出，摩擦力的作用线经过 P 点，因此不会产生相对于 P 点的力矩；重力和桌面的支持力始终相互抵消；除此而外没有其他力的作用，所以相对于选定点，角动量守恒。由于小球的初始状态静止，其角动量为零。



当把桌布从小球下面抽出时，小球就开始滑动和滚动。按图中的标注，小球的角动量 J 可以写为如下两项的和：

$$J = I\omega + r \times (m\boldsymbol{v}),$$

其中 I 为小球的转动惯量， m 为小球的质量。上式中的第一项为质心的自旋角动量，第二项为由质心的平移所致的角动量。考虑到表达式中矢量的方向，角动量的大小为 $J = I\omega + mvR$ ，其中 R 为小球的半径。

显然，任何一个作无滑滚动的小球，轨道角动量都与其自旋角动量同号。同时，二者的和一定是任何时刻均为零。这两个条件只有在小球静止时才会同时满足，读者可以通过实验来验证这个结论。

小球的终态，既不依赖于摩擦力的大小，也与如何抽出桌布无关。（可以以恒定外力抽出，加速度为常数；也可以突然抽动几次。）然而，忽略空气阻力和滚动摩擦



力是十分重要的条件，因为它们可以改变小球相对于 P 点的角动量。

题解 97

定义地球自转的方向（自西向东）为正，那么交通规则的改变将使得交通工具相对于转轴的角动量增加。这是因为向东的运动将比以前远离地球转动的轴，因而增加其对总角动量的正贡献；相反，向西方向的运动则减少了它的负贡献。假定两个方向的交通量是相同的，整个系统的转动惯量不变，而总的角动量不变，因此地球的转动速度必然减小。可见，一天的长度将增加，只不过我们很难觉察而已。

注：事实上，可以通过一个完全不同的方法来得到完全相同的结论。在英国，有许多环形道路。在这些道路上，交通规则的改变会使得交通流的角动量发生改变，进而引起地球转动的微小改变。整个交通系统，可以看作是由这样一系列环形道路的整体构成的效应。

题解 98

令小球的角加速度为 $a = \frac{g}{3}$ ，大球的角加速度为 $g/3$ ，两球共同的水平方向线加速度为 $v^2/x = 2f$ ，小车的加速度为 $a = g - 2a$ 。当两个球均作无滑滚动时，我们有

$$R\alpha_2 = a_2 - a_1 \quad \text{和} \quad R\alpha_2 = r\alpha_1$$

由于 $R = 2r$ ，因此

$$\alpha_1 = 2\alpha_2 = \frac{a_2 - a_1}{r}$$

小球的转动惯量为 $\frac{2}{5}mr^2$ ，而同样

密度大球的转动惯量则为

$$\frac{2}{5} \times 8m \times (2r)^2 = \frac{64}{5}mr^2$$

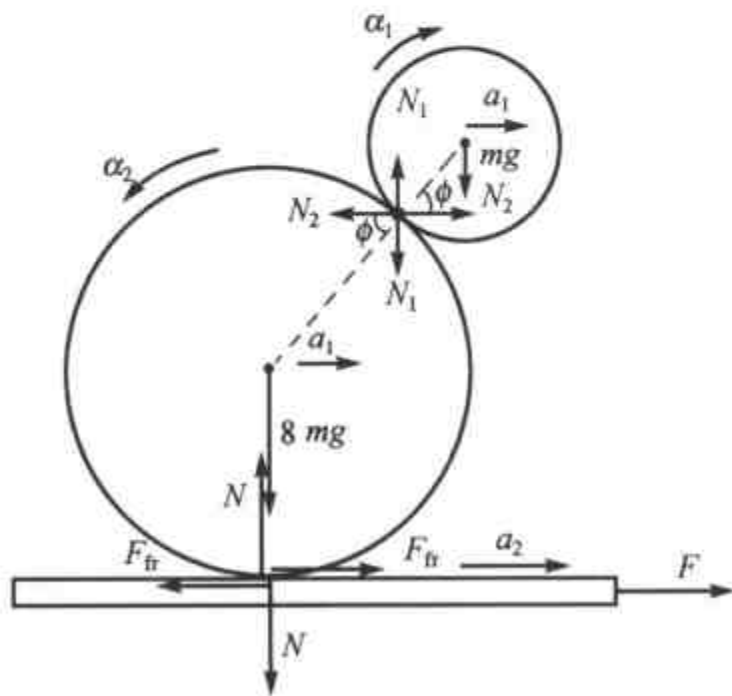
根据图中的标注，我们可以写出如下的动力学方程：

$$F - F_{fr} = Ma_2,$$

$$8mg + N_1 - N = 0, \quad F_{fr} - N_2 = 8ma_1,$$

$$mg - N_1 = 0, \quad N_2 = ma_1,$$

$$N_1 r \cos \varphi - N_2 r \sin \varphi = \frac{2}{5}mr^2\alpha_1,$$



$$2rF_{fr} + 2rN_2 \sin \varphi - 2rN_1 \cos \varphi = \frac{64}{5} mr^2 \alpha_2$$

由这些方程，我们可以将拉力 F 表达为

$$F = (9m + \frac{7}{2}M) \frac{\cos \varphi}{1 + \sin \varphi} g \approx 79 \text{ N}$$

两个小球相对于小车的加速度为

$$\Delta a = a_2 - a_1 = \frac{5 \cos \varphi}{2(1 + \sin \varphi)} g$$

经过时间 t 两个小球将从小车上掉下来，此时它们相对于小车运动的距离为 $L/2$ 。由于它们的初始速度为零，所以

$$t = \sqrt{\frac{L}{\Delta a}} = 0.55 \text{ s}$$

注：非常有趣的是，即使较小的球处于水平位置 $\varphi = 0$ ，这个表演仍可以成功。这种情况下，两球之间的摩擦力与较小球的重力相互平衡。更精彩的是，角度 φ 甚至可以为负，只要两球之间的摩擦系数足够大！

题解 99

以桌面任一点 P 来考察小球的运动。由于作用在球上的重力和桌面的支持力大小相等、方向相反，而摩擦力作用在桌子的平面内，因此其相对于 P 点的力矩没有水平方向的分量。因此，球角动量关于 P 点的水平分量保持不变。

当小球无滑动地滚动时，角速度的水平分量垂直于速度 v ，而其大小正比于 $|v|$ 。（对于半径为 R 的固体球，其角速度的水平分量为 $r \times (m\boldsymbol{v})$ ，见问题 96 及其解答。）在运动结束时，当球再次在桌面上无滑动地滚动，角动量的水平分量一定与起始时相同。由此可以得出，小球速度 v 的大小和方向均不会发生变化。

因此小球离开转盘时的速度和动量矢量均与其初始情况相同，而且其总动能不变。最后的事实尤其奇怪，虽然小球到达和离开圆盘时，摩擦力都对其做了功，进而改变了它的动能，但是二者的代数和为零，因此初始和终了的动能相等。这不是动量或能量守恒的结论，而是角动量守恒的要求。

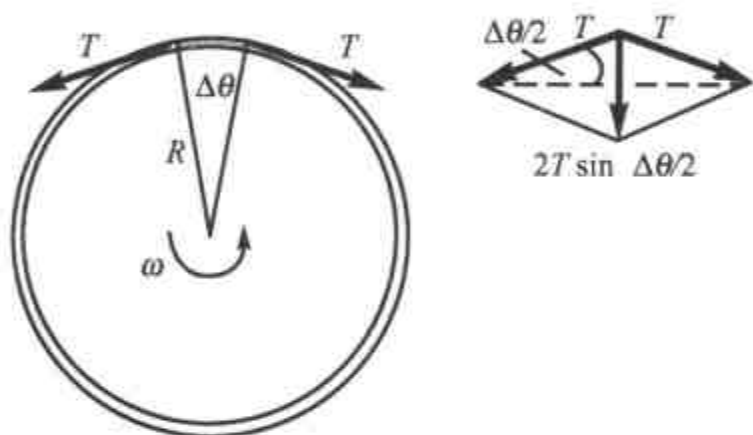
注：更加复杂的计算（利用直线和圆周运动方程）表明，当球在稳定转动的圆盘上时，在桌面的参考系中，经历了一个标准的圆周运动。（获得这个结果，需要假设滑动摩擦系数足够大，使我们能够忽略在圆盘上滑动的阶段。对于博物馆中使用的硬橡皮球，这个假设非常合理。）这个圆周轨迹的圆心并不是圆盘的



中心, 而且其角速度也不同, 前者只是后者的 $\frac{2}{7}$ 倍。如果圆盘稳定转动, 小球最后将沿其初始轨迹的延长线运动。如果圆盘不是匀速转动, 或者滑动的时间段不能被忽略, 则上述结论不成立。在这些情况下, 小球动量的大小不变, 但是方向将偏离原来的轨道。

题解 100

令圆环内的张力为 T , 其作用在一小段圆环上沿半径方向指向转动中心的合力为 $2T \sin(\Delta\theta/2) \approx T\Delta\theta$, 而这个力恰恰充当了作圆周运动的向心力 $R\Delta\theta A\rho R\omega^2$, 如图。



因此, 圆环内沿径向的压强 T/A 为 $\rho R^2\omega^2$; 形变量 ϵ 为 E^{-1} 乘以压强。最后, 周长的增量 $2\pi R\epsilon$ 应为 $2\pi\rho R^3\omega^2/E$ 。

题解 101

当绳子的一端拉力为 F_0 时, 让另一端的拉力为绳子不滑动时的最大拉力 F_{\max} 。用角度 α 标记绳子上与圆柱接触的一般点的位置, α 为该点的半径与某一个固定半径间的夹角。当绕圆柱体的绳子张紧时, 绳子作用于圆柱体的压力, 导致与绳子和圆柱之间运动趋势相反的摩擦力。张力随着 α 的增加而增加, 但是在某段绳子一端超过的部分张力总是被该段上受到的摩擦力平衡掉。

计算对圆柱体中心张角为 $\Delta\alpha$ 的一小段绳子。如图 S101.1 所示, 如果作用在其一端的力为 F , 另一端为 $F+\Delta F$, 那么摩擦力与超出的力平衡, 可以计算为

$$\Delta F = \mu N \quad (1)$$

其中, N 为绳子对圆柱表面的压力, μ 为所需的摩擦系数。

压力可以由力 F 和 $F+\Delta F \approx F$ 的矢量和决定, 如图 S101.2 所示, 为

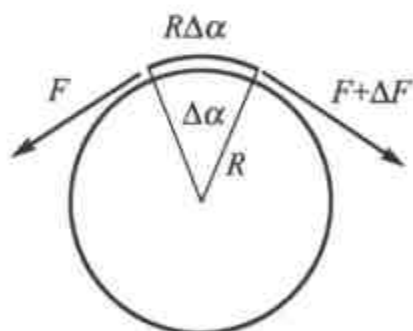


图 S101.1

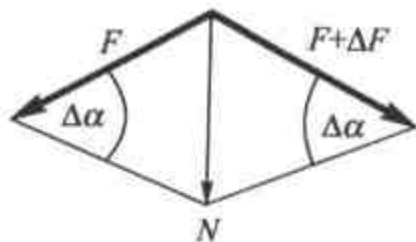


图 S101.2

$$N = 2F \sin\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right) \approx F\Delta\alpha \quad (2)$$

带入式 (1) 得到 F 和 α 之间的关系为

$$\Delta F(\alpha) = \mu F(\alpha) \Delta\alpha$$

这与如下辐射衰减方程类似

$$\Delta m(t) = -\lambda m(t) \Delta t$$

其中, $m(t)$ 为辐射体质量, t 为时间, λ 为衰减系数。众所周知, 辐射材料的质量随时间指数衰减, 即

$$m(t) = m_0 e^{-\lambda t}$$

因此, 使用建立起的对应关系, 将 $-\lambda$ 用 μ 代替, “绳子摩擦力” 的定律可以表达为

$$F(\alpha) = F_0 e^{\mu\alpha} \quad (3)$$

题中所给的不等式等价于

$$2F(0) = F(\pi) = F(0)e^{\mu\pi}, \text{ 由此可得, } \mu = \frac{1}{\pi} \ln 2 \approx 0.22$$

注: 作用在绳子上的力以指数形式随着角度 α 的指数增加。因此, 不用转几圈作用在绳子两端的力就会增加许多。登山者运用这个有趣的事实来通过锚固定绳子以防坠落。海员们也通过同样的技巧, 空手使得大船停下!

题解 102

詹妮考虑一个半径为 R 线密度为 ρ 的均匀环, 以角速度 ω 围绕通过其中心的垂直轴转动。环上任意一点的向心加速度为 $R\omega^2$, 单位长度的线元受到的向心力为 $\rho R\omega^2$ 。如果高度为 1 m 的圆柱状容器被压强为 p 的气体包围, 那么气体在容器壁上产生的压力正好就是此时维持运动所需的向心力 (如图 S102.1 所示)。

实际上, 圆环任意部分的运动不是由假想的气体压力提供的, 而是通过环自身的内部张力, 其大小为

$$F = \rho R^2 \omega^2$$

此公式可以参见问题 100, 或者, 考虑以下问题, 例如, 一个 1 m 高的容器, 底面为半圆环形, 被压强为 p 的介质包围 (见图 S102.2)。大小为 $2Rp$ 的力作用在长为 $2R$ 的直径边上, 必须通过大小为 $2F$ 的与容器直径相切的力来平衡。

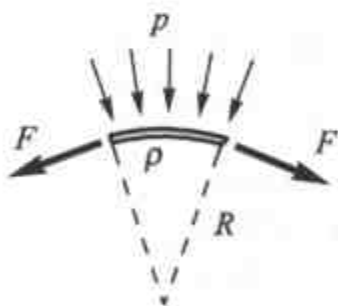


图 S102.1

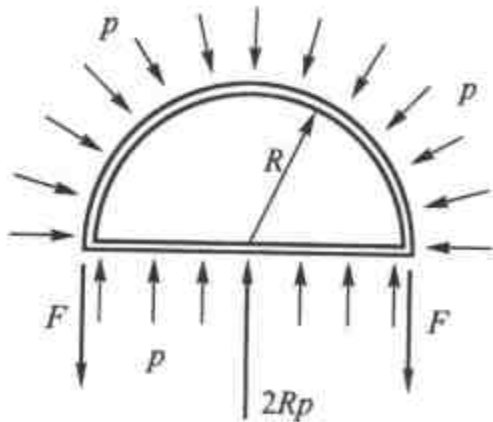


图 S102.2



现在考虑所张圆心角为 2α 的一段弧，看它之上的牛顿方程是怎样被满足的，作用在质量为 $m=2R\rho\alpha$ 的弧上的力为 $2F\sin\alpha$ ，质心加速度为 $a=s\omega^2$ ，其中 s 为质心到圆心的距离，如图 S102.3 所示。

根据牛顿定律，

$$2F \sin \alpha = ma$$

据此和前面的公式，得到 $s = R \sin \alpha / \alpha$ 。对于半圆，也就是查理的问题， $\alpha = \pi/2$ ，于是 $s = 2R/\pi$ 。

如果要确定扇形的质心，把它分成一段一段的窄弧，然后将每一段弧用放置在质心的合适质量的质点替代。同样的方法可以用来确定由窄条组成的三角形的质心。这

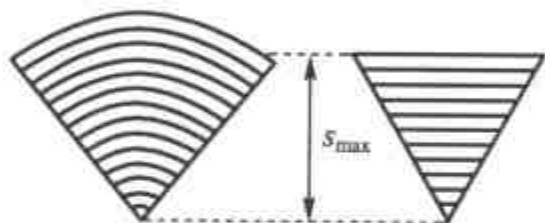


图 S102.4

意味着扇形的质心和高度为 $s_{\max} = R \sin \alpha / \alpha$ 的对称三角形的质心在同一位置，如图 S102.4 所示。即距顶点 $\frac{2}{3}(R \sin \alpha / \alpha)$ 处。通过这番讨论，詹妮展现了她出众的逻辑能力。

题解 103

将桌子的高度和整条链条的长度共同标记为 L ($=1$ m)，链条垂直运动部分的长度和质量标记为 x 和 m 。运动方程（考虑运动部分质量的变化）为

$$mg = \frac{d(mv)}{dt} = m \frac{dv}{dt} + \frac{dm}{dt} v$$

重新整理上式可以得到

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \frac{dm}{dt} v$$

左边一项是瞬时质量和加速度 a 的乘积，同时，应用 $dm = (m/x)dx$ 和 $dx/dt = v$ ，右边的项可以被简化，最后可以得到

$$a = g - \frac{v^2}{x}$$

这个结果显示链条的加速度小于 g 。因为在具有常数加速度 f 和零初速度的直线运动情况下有 $v^2/x = 2f$ ，右边第二项能够被进一步简化。这意味着在当前问题中链条的加速度为常数并且满足

$$a = g - 2a, \text{ 由此得出 } a = \frac{g}{3}$$

由于在时间 t_1 内，因为链条从桌子上向下运动，它的第一个链环以加速度 $g/3$ 下落的距离为 L 。故

$$t_1 = \sqrt{\frac{2L}{a}} = \sqrt{\frac{6l}{a}} = 0.78 \text{ s}$$

当链条较低的一端到达地面时，整个链条是垂直的，其速度为

$$v_1 = at_1 = \frac{g}{3} \sqrt{\frac{6L}{g}} = \sqrt{\frac{2Lg}{3}} = 2.56 \text{ m/s}$$

从这一刻起，链条开始自由落体运动。它的最后一个链环具有初速度 v_1 ，加速度为 g ，在时间 t_2 内经过了距离 L 。这样

$$L = v_1 t_2 + \frac{1}{2} g t_2^2$$

从上面的方程，可以得到

$$t_2 = \sqrt{\frac{2L}{3g}} = \frac{t_1}{3} = 0.26 \text{ s}$$

因此在这个过程开始后，最后一个链环在下面的时刻将会到达地面

$$t_1 + t_2 = \frac{4}{3} t_1 = 1.04 \text{ s}$$

注：(i) 试图应用能量守恒定律会导致错误的结果。例如，设

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = mg \frac{L}{2}$$

在上面的式中， $L/2$ 为链条质心降低的高度，然后将 $v_1 = \sqrt{2Lg/3}$ 代入上式会导致得到矛盾的结果，如下式

$$mg \frac{L}{2} = \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m \left(\sqrt{\frac{2}{3} Lg} \right)^2 = mg \frac{L}{3}$$

结果是三分之一的能量消失了。事实上，当链条突然拉动连续的链环运动时，需要考虑到在一系列的非弹性碰撞发生的过程中能量被消耗掉了。

(ii) 也可以通过另一种方式来解决这个问题。设 M 为链条的总质量。当链条悬挂部分的质量为 $m = (M/L)x$ 时，它带动的下一小部分的质量为 $(M/L)\Delta x = (M/L)v\Delta t$ ，这一小部分被加速，在时间间隔 Δt 内，从静止被加速到速度 v 。加速需要的力为



$$\frac{[(M/L)v \Delta t]v}{\Delta t} = \frac{M}{L}v^2$$

这也就是相应的减速链条悬挂部分的反作用力，因此可以写出

$$ma = mg - \frac{M}{L}v^2$$

将 $m = (M/L)x$ 代入上面的方程，就可以回到与前面相同的解法上来了。

(iii) 假设链条由 n 个链环组成，在链环之间有一个额外的不受约束的分隔 $\varepsilon = L/n$ ，在极限 $n \rightarrow \infty$ 情况下，可以得到正确的答案。

(iv) 可以使用微积分的方法，通过求解（非线性）微分方程来解决这个问题

$$a = g - \frac{v^2}{x}$$

满足初始条件 $v=0$ ， $t=0$ 时 $x=x_0$ ($x_0 \ll L$)。得到下面的解

$$v(x) = \sqrt{\frac{2}{3}gx \left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^3 \right]}, \quad t = \int_{x_0}^x \frac{dx}{v(x)}$$

在极限 $x_0 \rightarrow 0$ 时，可以得到更加具有启发性的结果。

题解 104

下面将说明沿任意形状的闭合曲线以不变速度运动的链条（软绳），其运动情况不变，只要没有任何约束（例如滑轮、圆柱等）作用在其上。

考虑以速度 v 沿着某个闭合、缠绕的曲线稳定运动的链条（如图 S104.1）。因为链条链环的切向加速度是零，所以链条上任意部位的张力 F 大小都是相同的。如果链条单位长度的质量为 ρ ，而且在某一点链条的曲率半径为 R （不同的地方 R 可以不同），那么链条的长为 $R\Delta\alpha$ 的一小部分的质量为 $\Delta m = \rho R\Delta\alpha$ ，同时其加速度为 v^2/R ，如图 S104.2 所示。其运动方程为

$$\rho R\Delta\alpha \frac{v^2}{R} = F\Delta\alpha$$

由上式可以得出关系 $F = \rho v^2$ 。

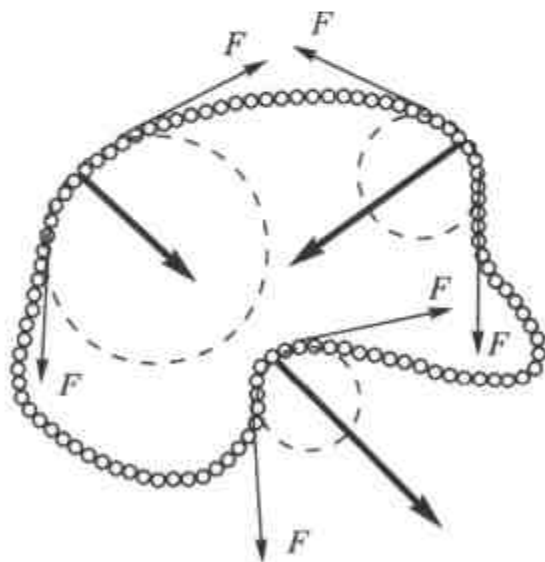


图 S104.1

注意到 R 并不出现在上面的式子中, 也就是说 F 对于曲率半径是无关的。切向力 F 的合力正好是使链条能按照给定区域而弯曲的力。如果链条是直线, 那么作用在链条上某一小部分的合力为零。链条弯曲得越厉害, 作用在链条上每一小部分的合力就越大。合力的方向正好也是使链条弯曲所需的方向。

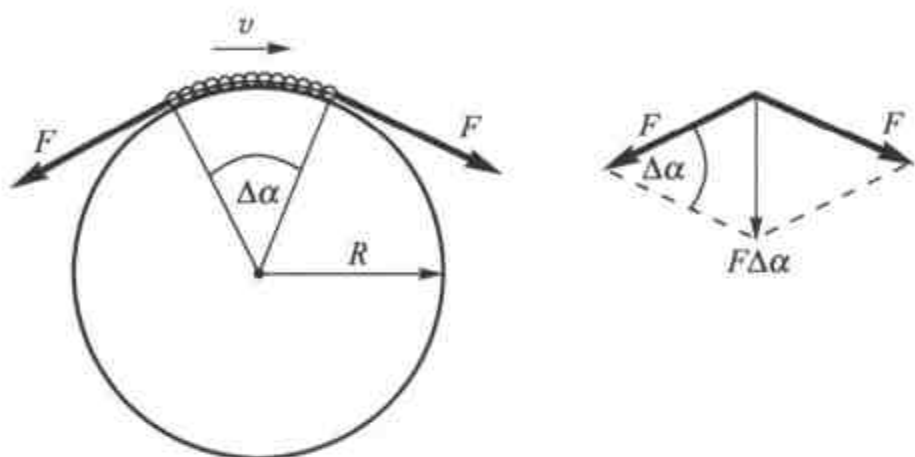


图 S104.2

这意味着链条在下落的过程中, 将保持原有的形状和速度, 正如弗兰克所猜测的那样。

题解 105

如上题解法中所给出的, 单位长度的质量为 ρ , 以速度 v 运动的柔韧的链条或者绳索, 如果不与其他物体接触, 那么其内部张力为

$$F = \rho v^2$$

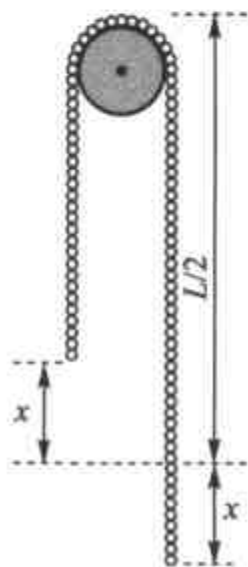
应该注意这个结果相对于形成的弧形的曲率半径 R 是无关的; 这些也可以应用于运动的直线形的链条或者绳索, 其曲率半径 R 形式上可以认为是无穷大。在本题的这种情况下, 作为链条加速运动的结果, 当满足自由条件时, 链条会同滑轮分离。

将链条的位移用 x 表示, 链条右边部分的加速度用 a 表示。两边链条的运动方程为

$$F - \rho \left(\frac{L}{2} - x \right) g = \rho \left(\frac{L}{2} - x \right) a$$

$$\rho \left(\frac{L}{2} + x \right) g - F = \rho \left(\frac{L}{2} + x \right) a$$

通过能量守恒定律, 不使用积分就可以确定任意 x 时链条的速度。链条对于原来位置的相对势能的减少 (假设此时的速度可以忽略) 与一条长度为 x 的链条被降低 x 的距离时的情况是相同的 (见图)。因此有





$$\rho x^2 g = \frac{1}{2} \rho L v^2$$

从上面的方程组中消去 F 和 a ，就可以计算得到链条离开滑轮时的位移和速度：

$$x = \frac{1}{2\sqrt{2}} L \approx 0.35L, \quad v = \frac{\sqrt{Lg}}{2}$$

这样，当链条的 15% 仍然向上运动的时候，链条已经变得与滑轮脱离开来，并且链条的速度小于简单地将 $x = L/2$ 代入能量守恒方程所得到的值。（这个错误的值为 $\sqrt{Lg/2} \approx 0.71\sqrt{Lg}$ 。）

注：值得注意链条后面的运动。在链条开始脱离滑轮时，链子由两段不等长的竖直部分以及连接它们的半圆环组成，左边的部分向上拉，以不断增加的速度变短，同时右边的部分加速向下运动。如果滑轮的半径可以忽略不计，由于质量不断减小，左边部分的速度，理论上会趋于无穷大。但实际上，由于链条的链环尺寸是有限的，而且存在空气阻力，使得速度有一个上限。尽管链条向上运动的这一部分的速度是迅速增加的，但是相应的有关部分的质量是迅速减小的，质量的减小相对于速度的增加更加迅速，因此链条的这一部分动能保持有限值。当鞭子抽打时可以观察到同样的现象，鞭子的一部分（长度减小）以不断增加的速度运动，并且当达到声音的速度时，就会导致尖锐的响声。

题解 106

(i) 考察在与环运动速度 v 相同的参考系下环的运动。在这个系统中，半径为 R 的圆环形的部分匀速旋转。考虑圆心角为 $\Delta\alpha$ 所对圆弧的一小段绳索，其相应的质量为 $\rho R \Delta\alpha$ ，它的加速度为 v^2/R ，同时由于绳子内部的张力而产生的净力为 $F \Delta\alpha$ （见题解 105）。由牛顿运动定律得到

$$F \Delta\alpha = \rho R \Delta\alpha \frac{v^2}{R}$$

即，“环形波”以速度 $v = \sqrt{F/\rho}$ 运动，与横波沿着同样的绳索传播的速度相同。

(ii) 半径为 R 的滚动环的角频率为 $\omega = v/R$ ，环的质量 $m = 2\pi R \rho$ 。绳圈环携带的能量可以用下面的这些量表示为

$$E = E_{\text{平移}} + E_{\text{转动}} = \frac{1}{2} (2\pi R \rho) (v^2 + R^2 \omega^2)$$

上式可以写作下面的形式

$$E(\omega) = 2\pi Fv \frac{1}{\omega} = K \frac{1}{\omega}$$

其中 $K=2\pi Fv$, 是描述绳索及其内部张力特性的常数。当然, 几 (n) 个环也可以同时激发, 它们的总能量为

$$E_n(\omega) = nK \frac{1}{\omega} \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots)$$

圆圈的总动量也可以通过同样的方法计算

$$P_n(\omega) = n(2\pi R\rho)v = nK \frac{1}{v\omega} \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots)$$

总角动量也可以得出

$$J_n(\omega) = \pm n(2\pi R\rho)Rv = \pm nK \frac{1}{\omega^2} \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots)$$

在上面最后一个式子中, 两种符号对应于环在绳索的“上面”和“下面”运动, 也就是两种可能的“极化”。

可以看出, 倘若只允许单一频率的圆环形激发产生, 那么能量、动量和角动量只能取一些离散值, 它们可以被写作一个整数和一个基本的“量子”的乘积。在这些量 (与频率有关) 之间, 下面的关系成立

$$E(\omega) = vP(\omega) = \omega J(\omega)$$

对于声子, 不难认识到同样的关系也是成立的

$$E_{\text{声子}} = \hbar\omega; \quad P_{\text{声子}} = \hbar\omega/v; \quad J_{\text{声子}} = \pm \hbar$$

自然地, 对这个正式的分析不必太当真, 例如认为一个声子是与一个绳索的圆圈等价的。然而, 通过类比可以展示, 即使是在经典物理中, 比易于理解的质点更加复杂的对象, 也可以被激发到许多离散的能量、动量和角动量级别上。

题解 107

质量为 $\Delta m = 50 \text{ kg}$ 的沙子, 在 $\Delta t = 1 \text{ s}$ 的时间内, 其速度达到 $v = 1 \text{ m/s}$ 。因此其水平动量的改变为 $\Delta p = \Delta m v = 50 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ 。这意味着有一个作用力在加速沙子, 力的大小为

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{v\Delta m}{\Delta t} = 50 \text{ N}$$

仅仅考虑沙子的加速度, 发动机所做的功是 50 J/s , 即, 它的输出功率为 50 W 。

当沙子落在传送带上时, 其垂直动量被损耗掉了。(沙子垂直地作用在传送带上的力大于其重力。) 传送带上的沙子在垂直方向上先被减速, 然后在水平方向上被加



速：传送带的动能增加了。在 $\Delta t = 1\text{s}$ 的时间内，沙子的动能增加了 $\Delta mv^2 = 25\text{J}$ 。这意味着发动机功率的一半被转化成了沙子的动能；余下的功是发动机为了克服摩擦力和转化成热能所做的。

注：在加速期间，沙子的平均速度为 $v/2$ 。因此，摩擦力 ($F = 50\text{N}$) 的功率是 $Fv/2 = 25\text{W}$ 。传送带受到一个力 $-F$ 的作用，其功率为 $-Fv = -50\text{W}$ 。因此，正好发动机的功率的一半用来加速沙子。

题解 108

(i) 首先，确定滚动速度作为水龙带覆盖距离的函数。在移动了一段距离 x 后，水龙带运动部分的质量为 $m(x) = M(1 - x/L)$ 。应用能量守恒，可以确定运动速度 $v(x)$ 。

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v_0}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\left(\frac{v}{r}\right)^2$$

势能的改变，以及因为滚动半径的减小而获得的小的垂直速度都已经被忽略。应用已知的随着距离的改变而引起的质量的改变，速度可以由下式给出

$$v(x) = \frac{v_0}{\sqrt{1-x/L}}$$

由于 x 增加，速度也相应增大，也就是说，随着水龙带展开，滚动在加速。水龙带展开所用的总时间能够通过对方程 $v(x) = dx/dt$ 的倒数进行积分来得到

$$T = \int_0^L dt = \int_0^L \frac{dx}{v(x)} = \frac{1}{v_0} \int_0^L \sqrt{1-x/L} dx = \frac{L}{v_0} \int_0^1 \sqrt{1-u} du = \frac{2}{3} \frac{L}{v_0}$$

因为水龙带做的是加速运动，它展开所用的时间明显地少于匀速展开所用的时间。实际上，这种情况下所用的时间是匀速情况下所用时间的三分之二。

(ii) 由质量不断减少和速度不断增加的一卷东西组成的系统，其静止的水平部分长度不断增加，很显然，这个系统不能被看作质点！因此，动力学的基本理论不能以简单的形式 $F = ma$ 应用在这个系统上，而必须使用更加一般的形式

$$\sum F_{\text{外}} = \frac{d}{dt} p_{\text{总}}$$

其中 $p_{\text{总}}$ 是把系统当作一个整体时的动量。

运动的圆圈（即整个系统）的总动量为

$$p(x) = m(x)v(x) = M(1-x/L) \frac{v_0}{\sqrt{1-x/L}} = Mv_0 \sqrt{1-x/L}$$

显然，随着 x 增加， $p(x)$ 减小，反应出运动部分质量减小的速率要比其速度增加的速率快的事实。因此，作用在系统上的合力 $K(x)$ 的方向与运动的方向相反，为



$$K(x) = \frac{dp}{dt} = \frac{dp(x)}{dx} v(x) = -\frac{Mv_0^2}{L} \frac{1}{2(1-x/L)}$$

题解 109

质量均匀分布的薄球壳在其内部产生的重力场为零。而在球壳外部，可以认为球壳总质量集中在球心，此时的重力场即为球壳外部的重力场分布。在地球表面下 100 km 的位置，有两个因素影响其重力场。在一方面，仍然位于地球下面的那一部分的质量是小于地球的总质量的，这意味着重力加速度要被减小。在另一方面，距离地心更近了，这将会使得 g 增加。那么哪一个的影响更强呢？

厚度为 100 km 的球壳对应半径为 6 400 km 的地球总体积的 4.6%，但是其质量只占地球总质量的 2.5%。重力加速度可以用式 $g = GM/r^2$ 来计算，其中 M 是位于半径 r 处内部的质量。在地表下 100 km 的深度，对重力加速度有贡献的地球的那一部分（不包括球壳）的质量为 $M' = 0.975M$ ，半径 $r' = (6300/6400)r = 0.984r$ 。将上面的数据代入前面的方程，可以得到地表下 100 km 处的重力加速度要比地表处的重力加速度大 0.7%！

更一般的情况，可以证明，如果地壳密度不超过地球平均密度的三分之二，那么在地壳内越接近地心，重力加速度 g 越大。

题解 110

首先考虑试验井的情况，认为井的体积相对于整个小行星的体积可以忽略。令小行星的密度为 ρ ，半径为 R 。半径为 r 处的重力加速度同考虑在下面只有半径为 r 的球体时的情况一样：

$$g(r) = G \frac{m(r)}{r^2} = G \frac{(4/3)\pi r^3 \rho}{r^2} = \frac{4\pi G \rho}{3} r$$

因此，重力加速度是与到小行星的中心的距离成比例的，并且总是指向其中心。

这意味着第一个不幸的小绿人接近它的宿命时，类似同时释放一个振幅为 R 的谐振子，并且在经过了第一个四分之一周期后，小绿人到达它不幸的命运终点。在上面的表达式中， r 的系数相应于 ω^2 ，也就是角频率的平方。因此下落持续的时间为

$$T_1 = \frac{T}{4} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

它碰撞井底的速度可以通过振幅与角频率的乘积而得到：

$$v_1 = R\omega = 2R \sqrt{\frac{\pi G \rho}{3}}$$



在第二个事件发生的时候，小绿人已经在小行星内部开采了八分之一的材料。从行星表面到它中心的球腔内部的重力场必须被确定出来。我们可以应用一个巧妙的叠加的方法：想像球形腔内充满了“通常的”和“负密度”的钛金属。

完整的小行星和“负密度的钛金属球”的重力场必须叠加起来。矢量 r 指向腔内任意一点 P ，矢量 c 从球腔的中心指向小行星的中心，那么矢量 $r+c$ 由球腔中心指向点 P ，如图 S110.1 所示。

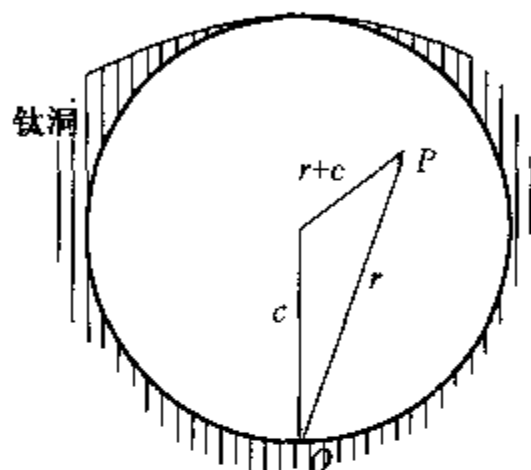


图 S110.1

这个重力加速度是一个常矢量，与腔内点 P 的位置无关。这意味着在球腔内有一个均匀的重力场，其大小为 $-\omega^2 R/2$ ，即试验用的矿井中间（也就是球形腔的中心）的重力加速度。

注：类似地，可以发现在任何球形腔的内部存在一个均匀的重力场；其大小与固体球内部的球形腔的中心位置的重力加速度大小相等。

第二个不幸的小绿人下落持续的时间 T_2 和撞击速度 v_2 可以应用匀加速度的方程计算得到

$$T_2 = \frac{2}{\omega} = \sqrt{\frac{3}{\pi G \rho}} \quad \text{并且} \quad v_2 = 2R \sqrt{\frac{\pi G \rho}{3}}$$

因此，这个专家给出的比值应该为

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\pi}{4} \quad \text{和} \quad \frac{v_1}{v_2} = 1$$

可以看出，第二个不幸的小绿人在下落时用的时间要比第一个小绿人稍微长一

重力加速度（均匀的小行星、球形腔和它们的合成结果）与位置矢量成比例，比例系数是前面已经提到的常数，记为 $-\omega^2$ 。负密度用来表示腔内“缺少物质”。合成加速度（参见图 S110.2）为

$$g = -\omega^2 r + \omega^2(r+c) = \omega^2 c$$

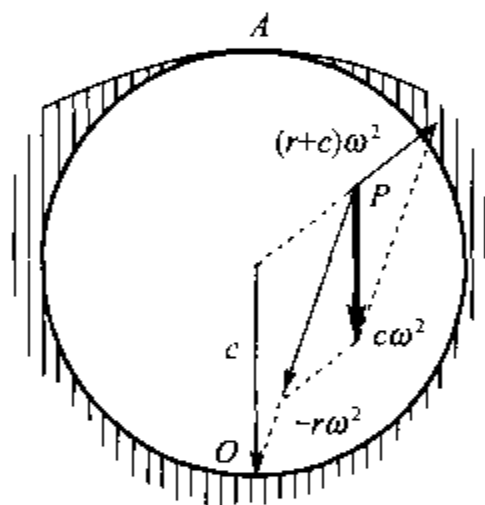


图 S110.2



些，但是它们两个以相同的速度撞在小行星的中心。

相同的速度这个事实——这意味着它们两个有相同的动能——并不是巧合！在第一种情况下，因为小行星中心的重力势能要比其表面的重力势能小，所以第一个不幸的小绿人被加速并且获得了相应大小的动能。第二种情况的不同之处在于“负密度”球形腔的重力势能也必须被考虑进去。然而，这个小绿人从球形腔的一边落到了另一边，因此，它的与球形腔有关的重力势能并未改变。应用重力势能叠加的原理可以给出最终的结果。也就是说，这两种情况下总的重力势能的变化是相同的，并且这两个不幸的人获得的速度也是相同的。

题解 111

设想这个半球被分成许多个同心并且厚度恒定的半球壳。那么这些半球壳作用在位于球心的单位质量的探针上的力是多少？因为一个球壳的质量与其半径的平方成正比，并且给定质量的球壳对探针的作用力与其半径的平方成反比，所以不同的半球壳在中心处产生的重力加速度是相等的（参见图 S111.1）。

156

如果有 n 个半球壳，那么最外层半球壳的质量为 $2\pi R^2(R/n)\rho$ ，其中 R 为小行星的半径， ρ 为小行星的密度。由半球体产生的总的重力场是由最外层的半球壳产生的重力场的 n 倍，也就是说，这与半球的表面有质量 $M = 2\pi R^3\rho$ 时的情况是相同的。这个质量是实际的半球体质量的三倍。

质量为 M 的半球壳作用在探针上的力是什么样的力呢？只考虑它的大小，这个力与单位质量的探针作用在球壳上的力是相等的，也就是在单位表面上作用力为

$$p = G(M/2\pi R^2)(1/R^2) = G\rho/R$$

将这个效果沿着整个半球壳积分，这个情况可以与下面的情况相比较，即当一种液体以压强 p 作用在同样的半球壳上时，求其作用力（参见图 S111.2）。

因为液体作用在完整的半球体上的合力为零，所以液体在半球体曲面上的总的作用力与平面上的总的作用力大小是相等的。这样，

$$g = p\pi R^2 = G\rho R\pi \quad (\text{参见图 S111.3}).$$

现在考虑在小行星表面的初始的重力加速度，

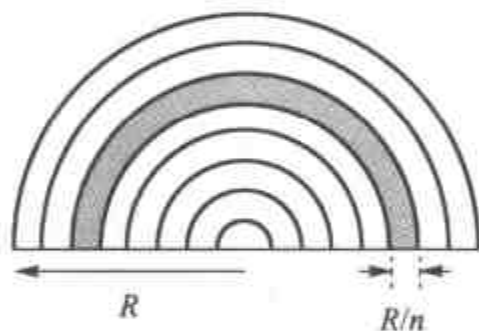


图 S111.1

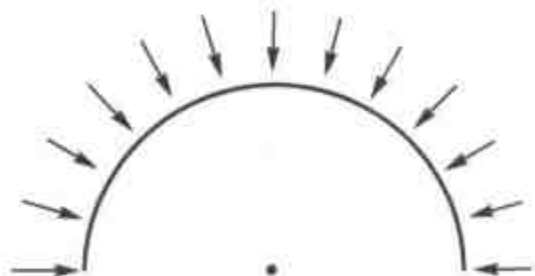


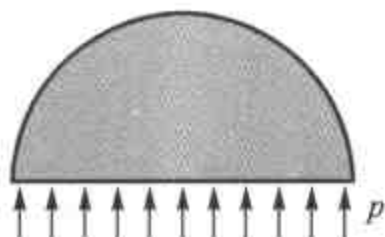
图 S111.2



$$g_0 = G \frac{4\pi R^3}{3} \rho \frac{1}{R^2}$$

从上面的计算可以得到 $g = \frac{3}{4}g_0 = 7.36 \text{ cm/s}^2$ 。已知

钛的密度，可以确定小行星原来的半径为 $R \approx 78 \text{ km}$ 。

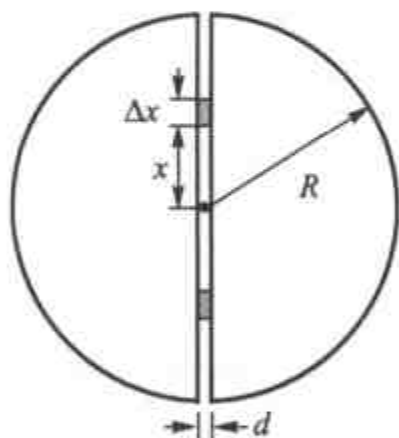


S111.3

题解 112

如果能够计算将小行星分开成距离 $d = 1 \text{ m}$ 的相等的两部分所必须做的功 W ，那么吸引力 F 可以通过式子 $W = Fd$ 求出。但是怎么来确定 W 呢？肯定不能通过力与位移的乘积直接来求，那将使我们回到开始的问题上面。我们必须寻求其他的方法来解决这个问题。

当半球体被分开的时候，系统的重力势能是增加的。由于重力势能的增加 W 有同样的值。当小绿人将原来位于半径为 R 、厚度为 d 的圆盘内的金属钛运到表面上时，通过确定小绿人所做的功就可以计算出重力势能的增量。开采出来的钛金属可以认为是通过无摩擦的设备来运送上去然后均匀地覆盖在小行星的表面上。



如果 g 表示质量为 M 的小行星表面的重力加速度，那么距离中心为 x 处的重力加速度为 $g(x) = xg/R$ 。钛金属小行星的密度可以表示为 $\rho = 3M/(4\pi R^3)$ 。考虑原来位于半径为 x 和 $x + \Delta x$ （如图所示）之间的钛金属，它的体积为 $\Delta V = d2\pi x\Delta x$ ，质量为 $\Delta m = \rho\Delta V$ 。金属全部被从同样的深度运送上去，并且在计算所做的功时它们可以被统一考虑。

在钛金属原来的位置，有一个力 $\Delta mg x/R$ 作用在它们上面，同时在小行星的表面上相应的力为 Δmg 。当从小行星的内部向表面运动时，因为重力场是单调增加的，所以可以应用初始的作用力和最终的作用力的算数平均值。总的位移是 $R - x$ ，因此所做的功为

$$\Delta W = \Delta mg \frac{1+(x/R)}{2} (R-x) = \Delta mg \frac{R^2-x^2}{2R} = \frac{3}{4} \frac{Mgd}{R^4} (R^2-x^2) x\Delta x$$

有关的总功即为将不同深度的钛金属运送到表面所做的功的和，可以明确地写为

$$W = \sum \Delta W = \frac{3Mgd}{4R^4} \sum (R^2-x^2) x\Delta x$$

在每一层的厚度取到小到近乎消失的极限下，上面的求和可以变成一个数值积分

$$\sum (R^2 - x^2)x\Delta x \Rightarrow \int_0^R (R^2 - x^2)x dx = \frac{R^4}{4}$$

因此所做的总功为 $W = \frac{3}{16}Mgd$ 。

注：不使用数值积分也可以得到同样的结果。引入一个新的变量 $u = x^2/R^2$ 来替代变量 x ，($0 \leq u \leq 1$)，用对相应的不同的 u 的值的求和来代替对不同深度处的各个层的求和。应用关系 $u = x^2/R^2$ 和 $u + \Delta u = (x + \Delta x)^2/R^2$ (忽略包含的小量 Δx 的平方项)，则所做的功可以表示为

$$W = \frac{3}{8}Mgd \sum (1-u) \Delta u$$

因为 $1-u$ 从 1 到 0 单调变化，其平均值可以取 $1/2$ ，同时 Δu 项的求和结果为 1，所以上面的求和可以容易地计算出来。最终，我们也可以得到前面的做功表达式。

一个“神秘巨人”在将两个半球体分开距离 d 时所做的功是 $W = \frac{3}{16}Mgd$ ，因此

做功所需的力为 $F = 3Mg/16$ 。这个力是半球体之间的吸引力，并且也是支柱所应该承受的力。已知小行星的半径和钛金属的密度，这个力的数值可以求出来为

$$F = \frac{3}{16}M \frac{GM}{R^2} = \frac{3}{16} \left(\frac{4\pi R^3 \rho}{3} \right)^2 \frac{G}{R^2} = \frac{GR^4 \rho^2 \pi^2}{3} \approx 4.5 \times 10^{13} \text{ N}$$

为了感受一下这个力的大小的数量级，我们计算的施加在单位面积上的压力即压强为 $p = F/(\pi R^2) = 1.4 \times 10^5 \text{ Pa}$ (即球上大气压强的 1.5 倍)。这相当于 14 吨物体受到的重力，足够强的支柱可以承受这个力量。

注：合力也可以使用纯粹的积分近似通过一个双重积分得到，在右边的半球取体积元 $dV = 2\pi r \sin\theta r d\theta dr$ ，以半球的对称轴为极坐标轴，作用在体积元上的力 dF ，指向球心，大小为 $\rho dV G(Mr^3/R^3)/r^2$ 。 dF 指向左方的分量为 $dF \cos\theta$ ，总的向左拉右半球的力为上式的双重积分： dr 从 0 到 R ； $d\theta$ 从 0 到 $\pi/2$ 。然后使用 $GM/R^2 = g$ 和 $\rho = 3M/(4\pi R^3)$ 可以得到与上面相同的结果。

题解 113

在带电球体的表面，不论它是由单个的一部分还是由结合在一起的两部分，电场强度为

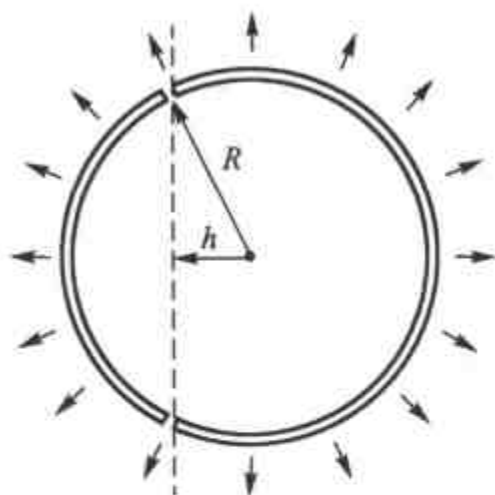


$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2}$$

单位表面积所带的电荷量为

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

如图所示, 对于位于表面上 ΔA 电荷, 其带电量为 $\Delta Q = \sigma \Delta A$, 那么电场对其作用力为 $\Delta F = \frac{1}{2} E \Delta Q$ 。出现因子 $\frac{1}{2}$ 的原因是在球的外表面电场强度为 E , 而在球的内部电场强度为零, 因此其平均值是 $E/2$ 。



所以, 在带电球的两部分上的电荷作用在单位面积上的力为

$$\frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 R^4} = p$$

所需的力可以和这样一个力来进行比较, 压强为 p 的液体用这么大的力可以将球的这两部分推开。因为这个力也是压强 p 与球面与平面交界处的面积的乘积, 即 $p\pi(R^2 - h^2)$, 可以得出使带电球的这两部分合在一起所需的力是

$$F = \frac{Q^2}{32\pi\epsilon_0 R^4} (R^2 - h^2)$$

题解 114

应用图中所给的符号, 第一个小球平衡条件为

$$\frac{mg}{F} = \frac{l}{x}$$

其中

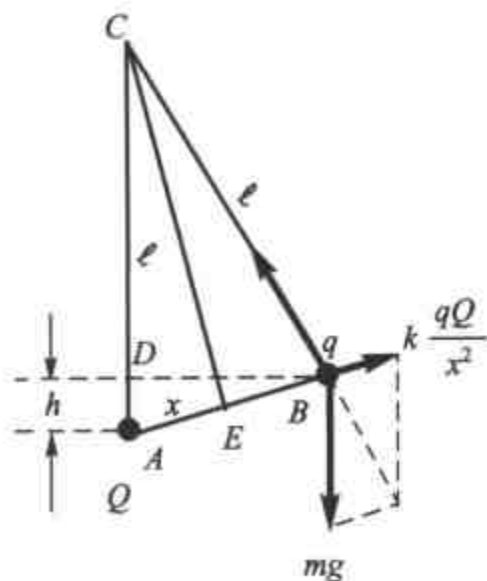
$$F = kqQ/x^2$$

为作用在第一个小球上的库仑力, x 是带电量为 q 和 Q 的两个小球之间的距离。

显然, $\triangle ABD$ 与 $\triangle CAE$ 相似, 因此有

$$\frac{x}{2} : l = h : x$$

由上面给出的三个方程, 能够计算出两个电荷分开的距离以及系统的静电能为



$$x = k \frac{qQ}{2mgh} \quad \text{和} \quad E_{\text{电}} = k \frac{qQ}{x} = 2mgh$$

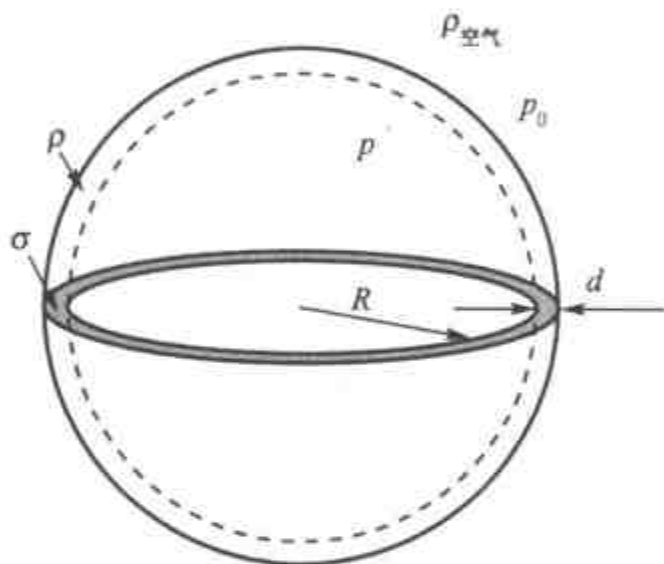
静电能和重力势能的改变的和即为所做的功

$$W = 2mgh + mgh = 3mgh$$

上式中，或许令我们感到奇怪的是所做的功既与电量的大小无关，也与悬挂小球的线的长度无关。

题解 115

在一个半径为 R 、容器壁厚为 d 的球形容器中，封闭压强为 p 的氢气。 ρ 表示容器壁材料的密度， σ 表示容器壁的伸张强度，如图所示。



首先来计算容器不会爆炸时所能承受的最大压强。如果容器被切成两部分，那么容器内的气体会用一个力 $p\pi R^2$ 推开容器的这两部分（相对于压强 p ，外部压强可以忽略不计）。这个力不能超过切割出的表面积 $2\pi R d$ 与容器壁的伸张强度的乘积，也就是

$$p\pi R^2 < 2\pi R \sigma d \quad (1)$$

如果气体被导入一个大的气球，其压强将减小至外部大气压 p_0 。因此气体的

最终体积为

$$V = \frac{4\pi R^3}{3} \frac{p}{p_0}$$

这么大体积的气体必定不能吊起任何重力超过 $V\rho_{\text{空气}}g$ 的重物（其中 $\rho_{\text{空气}}$ 为空气密度），因为气球和氢气的重力必须在向上的拉力中被减去。

容器的重力为 $4\pi R^2 d \rho g$ 。按照上面的推理，这个重力不能超出可能举起它的力，也就是

$$4\pi R^2 d \rho g < \frac{4\pi R^3}{3} \frac{p}{p_0} \rho_{\text{空气}} g \quad (2)$$

不等式 (1) 和 (2) 给出容器材料、气体压强以及外部空气密度之间的关系

$$\frac{\sigma}{\rho} > \frac{3p_0}{2\rho_{\text{空气}}} \quad (3)$$

有意思的是，在不等式 (3) 中，既没有出现容器半径，也没有出现容器壁的厚度！（容器壁较厚的容器能够承受更高的压强，但是也有更大的重力。）尽管翻阅了很



多物理性质的表，我们找不到满足条件(3)的物质。到目前为止，还没有一种人们所了解的物质是足够强硬的，能够强硬到相对于它们的密度而言，可以通过释放存储在它们所制容器内的气体，从而产生一个向上的力来吊起这种物质所制的容器。

题解 116

半径为 R 、质量为 M 、密度为 ρ 的球形地球表面的重力加速度可以被写作

$$g = G \frac{M}{R^2} = G \frac{4\pi R^3 \rho}{3R^2} = \frac{4\pi}{3} GR\rho$$

为了解决所给的问题，必须找出在一个非常大的、厚度为 H 、密度为 ρ 的圆盘的表面上远离其边缘一点的重力加速度的大小。通过应用支配静电和重力相互作用的定律之间的相似性，可以比较容易地得出结果。

我们给出它们之间的相似性，在质量为 m (“重力荷”) 和电荷 q 之间，万有引力常数为 G ；静电学中的常数为 $1/(4\pi\epsilon_0)$ ，重力加速度为 $g = F/m$ ，而电场强度为 $E = F/Q$ 。在两种情况中， F 均为经过“检验电荷”所得出的力。下一步，确定一个所带电荷为均匀分布的无限大圆盘的电场强度(圆盘外部)，然后通过替换相似的量来得到一个质量有相似的几何分布情况下的重力加速度。

对于一个面积为 A 的圆盘，电场强度可以应用高斯定理来计算

$$\Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q$$

其中 $\Phi_E = 2AE$ 为电通量(参见右图)。如果电荷密度为 ρ_q ，那么封闭表面所包围的总电荷为

$$\sum q = \rho_q AH$$

所以

$$2EA = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_q AH$$

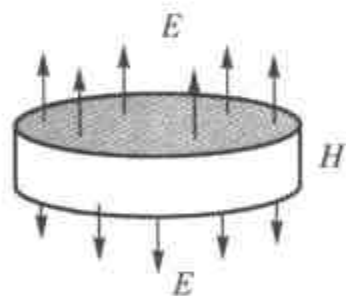
可以得到电场强度为

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\rho_q H}{2}$$

替换有关的相似的量，可以得到重力加速度为 $g = 2\pi G\rho H$ 。这个值应该与地球表面所测的重力加速度相等，也就是

$$G \frac{4\pi R\rho}{3} = g_{\text{球}} = g_{\text{盘}} = 2\pi G\rho H$$

对于一个“扁平的地球”，我们可以得出其厚度为



$$H = \frac{2}{3}R = \frac{2}{3} \times 6370 \text{ km} = 4250 \text{ km}$$

题解 117

在图 S117.1 中, 从三角形 FHC 与三角形 GKH 的相似出发, 确定一个小的角度 $\Delta\alpha$ 所对应的一段棒 KH 的长度, 满足下面的方程

$$\Delta x = GH \frac{r}{h} = r \Delta\alpha \frac{r}{h} = \frac{r^2}{h} \Delta\alpha$$

在 KH 上存在的电量为 $\Delta Q = \sigma \Delta x$, 其中 σ 为单位长度所带的电荷量, 相对于这一部分电荷的电场强度的大小为

$$\Delta E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma}{h} \Delta\alpha$$

这个量与 α 角本身无关。它仅仅依赖于棒上的一小段在 C 点所张的角 $\Delta\alpha$ 。因此对于角 C 的角平分线对称的两边的带电棒上的一段长度所产生的电场矢量大小是相等的, 并且它们的矢量合成结果位于角平分线的方向上 (参见图 S117.2)。

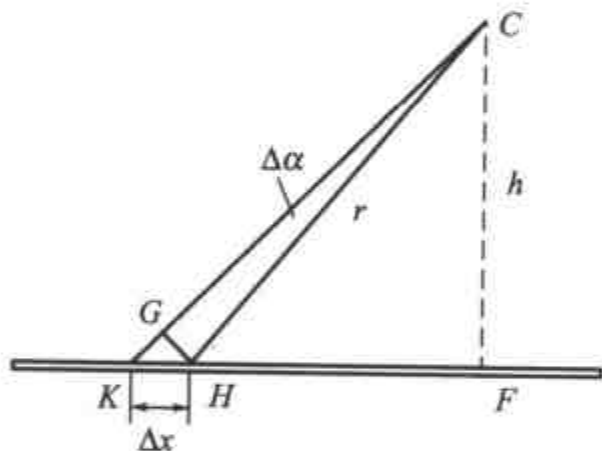


图 S117.1

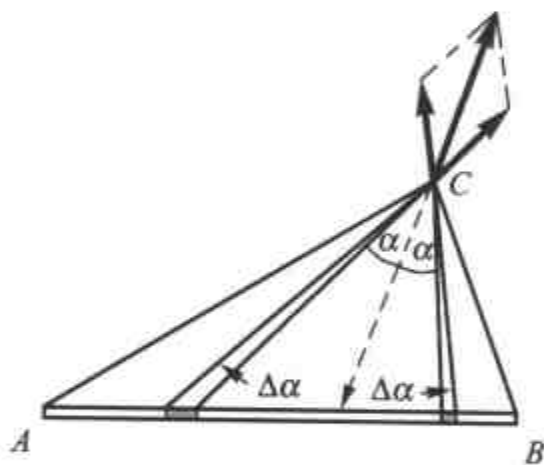


图 S117.2

对于任意给定的一点 C , 都存在一个特定的 α 值使得 $\widehat{ACB} = 2\alpha$, 通过对棒上的那些相互对应的基元长度之间应用叠加的方法, 可以得出上述结果。

题解 118

应用上题的结果, 可以得出平面上一点, 在距离无限长的棒的末端为 h 处的电场方向与棒形成一个 45° 的角。

应用下面的窍门, 可以得到电场强度的大小 E 。设想两个非常长的均匀带电棒终端对终端地连接在一起。那么合成的电场强度将是这两部分“一半长度的带电棒”的电场强度的矢量和 (参见图 S118.1)。

很明显, 由于对称性, 合成的电场强度方向将与带电棒垂直, 并且对电场线应用



高斯定理, 可以得到其大小是单独的带电棒产生的电场 E 的 $\sqrt{2}$ 倍。将无限长的带电棒的长为 l 的一部分封闭在一个假想的半径为 h 的圆柱体内部 (参见图 S118.2)。

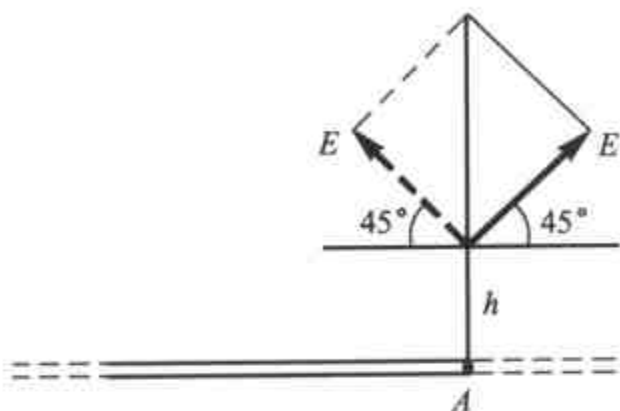


图 S118.1

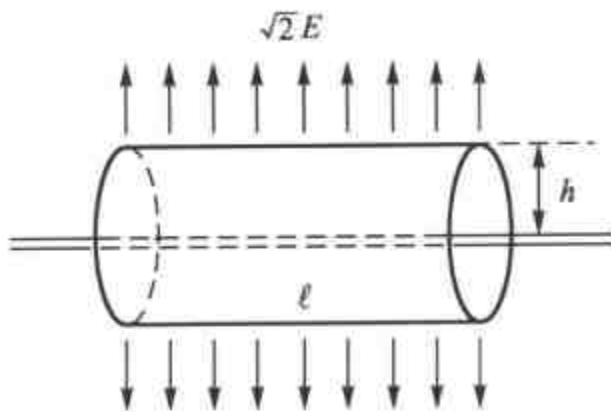


图 S118.2

位于圆柱体内部的电量为 $Q = l\sigma$, 其中 σ 为单位长度所带的电量, 并且穿过圆柱体的电场线的条数 (电场通量) 为

$$\Phi_E = \sqrt{2}E2\pi hl$$

按照高斯定理

$$\epsilon_0 \Phi_E = Q$$

可以给出

$$E = \frac{\sqrt{2}}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma}{h}$$

题解 119

(i) 当张角接近 2π 时, 在电线之间并且非常接近导线的点 P , 通电导线的这两部分在 P 点都会产生非常大的磁场, 并且方向相同。因而, 在这种情况下, 在 P 点净磁场的大小接近无限大。当 θ 接近 π 时, 因为 $\tan(\theta/2)$ 也趋向无穷大, 所以安培的公式可能是正确的。而由比奥和萨瓦尔给出的表达式肯定是错误的, 因为对于 P 点它给出的是一个有限值 $B(P)$ 。事实上, 后来, 安培的结果被收进了麦克斯韦的电磁场理论, 并且现在已经被广泛接受了。

(ii) 当张角为 $2\theta = \pi$ 时, “V” 字型变成了一根无限长的直导线。对于这种情况, 我们知道磁场的大小 $B(P)$ 为 $B = \mu_0 I / (2\pi d)$ 。因为 $\tan(\theta/2) = \tan(\pi/4) = 1$, 所以在安培的公式中比例系数为 $\mu_0 I / (2\pi d)$ 。

比奥和萨瓦尔在选择公式的时候也要符合已经被普遍接受的无限长带电流的直导线所产生磁场的表达式, 因此他们的比例系数为 $\mu_0 I / (\pi^2 d)$ 。

注: 在 $\theta < \pi/2$ 的区域, 在这两种预测之间的差别相对是比较小的。对于磁场 B , 预测值的比值为 $2\theta / \pi \tan(\theta/2)$ 。当 $\theta \rightarrow 0$, 这个比值给出最大的差别, 其

值为 $4/\pi$ 。

题解 120

(i) 如果 P 点的磁场强度用 B_1 来标记, 那么对称放置的第二个螺线管 (参见图 S120.1) 产生的磁场强度也是 B_1 。

因为叠加后的磁场强度大小为 B_0 , 那么可以得出 $B_1 = B_0/2$ 。

(ii) 相似的推理可以给出通过 P 点的磁场强度矢量的水平部分为 $B_0/2$; 这对任意一个与轴的距离小于 R 的 P 点都是正确的 (参见图 S120.2)。

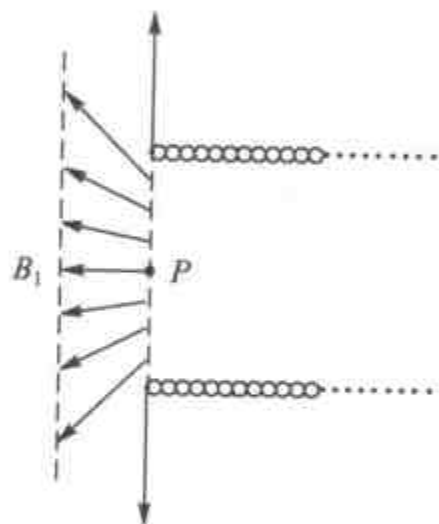


图 S120.2

的一半进入螺线管左边的一部分, 另一部分磁通量在线圈各匝之间离开了螺线管。在两个相同的螺线管相交处, 边界上的磁场线在螺线管的内部深处是位于距离螺线管的轴 $R/\sqrt{2}$ 的距离处。

题解 121

在理论上, 通过将平行板上的电荷分成许多小的点电荷, 并且将所有点电荷对应的库仑力求和, 就可以计算出平行板之间的作用力。如果我们想像将其中一个板上的正电荷变为等量的负电荷, 那么库仑力的大小保持不变, 但是其符号相反。我们会知道在平行板之间是吸引力, 而不是排斥力, 就如同平行板电容器一样。储存在两板距离为 x 的平行板电容器中的能量为 $E = Q^2/2C$, 其中电容 C 由式 $C = \epsilon_0 A/x$ 给出。因

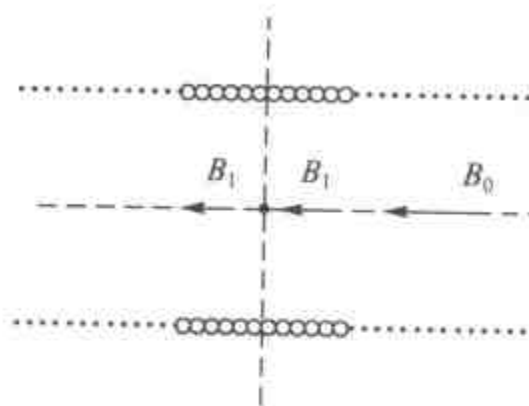


图 S120.1

因此, 通过螺线管末端的总的磁通量为 $\pi R^2(B_0/2)$ 。这正好是在螺线管内部的磁通量的一半; 那么另一半到底怎么样了呢?

(iii) 在图 S120.3 中, 给出磁场线的定性的示意图。

通过螺线管末端一匝 (点 Q) 的磁场线的延续部分与螺线管垂直。磁通量

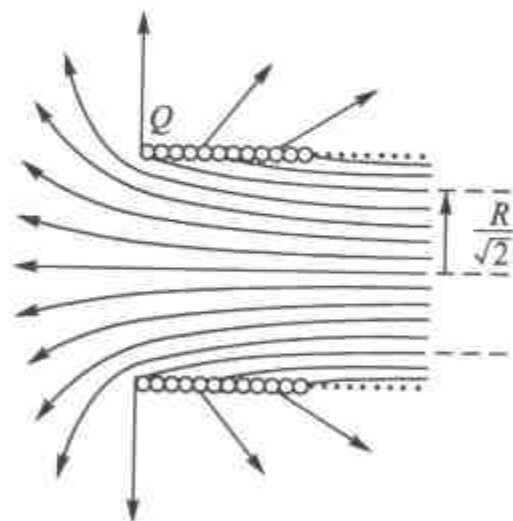


图 S120.3



此 $E = Q^2 x / 2\epsilon_0 A$ ，并且库仑作用力 F 是能量随着 x 变化的比率，也就是 $F = dE/dx$ 。因此，要使两个面积为 A 的平行板结合在一起所需的力为

$$F = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A}$$

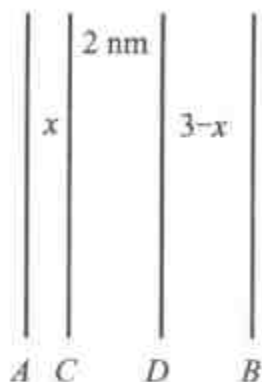
题解 122

在平行板上的净电荷并不改变，但是间隔的平行板的每一面上的电量必须相等，并且符号相反。结果是，平行板 C 和 D 的外表面所带电量分别为 -1 nC 和 $+1 \text{ nC}$ ，而在它们的内表面所带电量分别为 $+2 \text{ nC}$ 和 -2 nC 。其中任意一对平行板的电容反比于它们之间的间距，而 5 mm 的间距对应的电容为 20 pF 。

这样，如果 AC 之间为 $x \text{ mm}$ ，并且 DB 之间为 $(3-x) \text{ mm}$ ，那么依次的三个电容器的电容为 $100/x$ ， 50 和 $100/(3-x) \text{ pF}$ 。因此电压 V_{CD} 为 40 V ，电压 V_{AB} 为

$$10x + 40 + 10(3-x) = 70 \text{ V}$$

与 x 的取值无关。



题解 123

在平行板电容器之间的电荷可以被想像成两部分，然后它们可以在一个与平行板平行的方向上彼此移动。在电容器板上的（感应）电荷也随之移动，但是在每一个板上，它们的总量保持不变（应用叠加原理）。照着同样的方法，电荷 Q 可以进一步细分，最终被分成均匀分布在与电容器板平行，且同样尺度的一个平面上。

现在，可以考虑两个并联的平行板电容器，板之间的距离分别为 x 和 $d-x$ 。因为在每一个电容器中有一个平板是接地的，而另一个是共同的，那么在每一对电容器平行板之间的电压都是相同的。因此，电容器平板之间的电场强度反比于它们之间的距离，也就是 $E_1/E_2 = (d-x)/x$ 。从电荷 Q 发出的电通量按照同样的比例被分开（高斯定理），并且接地平板上的电荷之比也与上面的比例相同。因为积累在平行板上的总电量为 $-Q$ ，那么每一个平板上积累的电荷分别为

$$Q_1 = -Q \frac{d-x}{d} \quad \text{和} \quad Q_2 = -Q \frac{x}{d}$$

题解 124

距离电容器很远的地方的电场是由系统的总电荷决定的。电容器外部的电场为零；因此，总电荷（平板上的电荷之和）也必须是零。这种情况意味着 $Q_1 = Q_2 = Q$ 。

一个电中性系统在长距离上的电场的情况是由其总的电偶极子决定的。在我们所说的这种情况下，取与平板垂直的电偶极矩分量，可以给出

$$p - Qd = 0$$

由上式得出平板上的电荷为

$$Q = \frac{|p|}{d}$$

因而，平板上的电荷与偶极子的位置无关。

注：(i) 在问题 123 中，也可以应用同样的方法。相应的方程为

$$Q_1 + Q_2 + Q = 0$$

$$Q_1 x - Q_2 (d - x) = 0$$

并且，上面方程的解为

$$Q_1 = -Q(d - x)/d, \quad Q_2 = -Qx/d$$

(ii) 换过来说，若将两个反号的电荷放在平行板电容器之间时，也可以应用一个单独电荷情况下的结果，并且应用叠加原理来计算。这是一个求解这种普遍问题的简单的方法，在这种问题中，电偶极矩并不是必须与平板垂直。

题解 125

图 S125.1 给出一束光依次通过不同折射率的平面平行板的示意图。

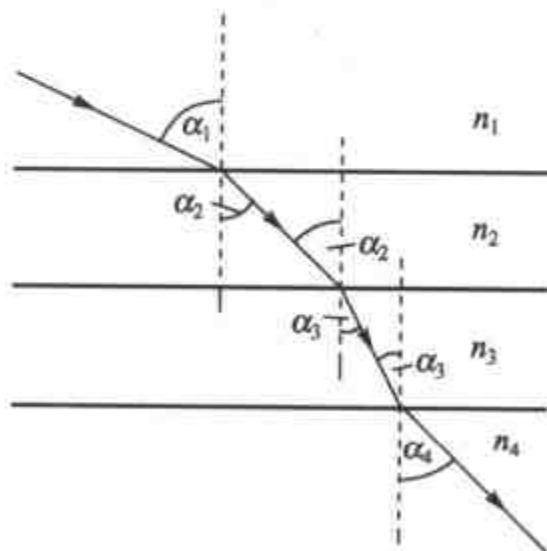


图 S125.1

按照斯涅耳折射定律，有

$$\frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} = \frac{n_1}{n_2}, \quad \frac{\sin \alpha_3}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_3}, \quad \dots$$

可以看出，在所有的交界面上，入射角的正弦与介质绝对折射率的乘积都有相同的值，也就是，沿着光线的轨迹 $n \sin \alpha$ 为常数。

因为介质可以被看作是由很多薄的平行平板组成的，所以对于在某一个方向上折射率连续变化的介质，这个关系也是正确的。让坐标原点位于光线入射到介质上的那一点。在这种情况下，对于开始的第一个“平板”，在 $y=0$ 的那一点，入射角为 90° ，并且折射率为 n_0 ，因此可以给出

上面所说的常数为 $n(y) \sin \alpha = n_0$ 。

光线是沿着一个半径为 R 的圆弧行进的，首先考察它们与坐标 y 之间的关系。从



图 S125.2 中, 可以很明显地看出

$$n_0 = n \sin \alpha = n(y) \frac{R-y}{R}$$

上式给出了折射率的空间变化情况为

$$n(y) = \frac{R}{R-y} n_0$$

已知的具有最大折射率的材料为金刚石, 但是即使是这种材料的折射率仍然没有达到这个值 $n_{\max}=2.5$ 。它是能使光线经过的圆弧对应的圆心角达到最大的折射率极限。如果折射率从 $n_0=1$ 变化到 $n_{\max}=2.5$, 那么 y 的最大值为 $3R/5$, 相应的圆心角大小为 66.4° 。

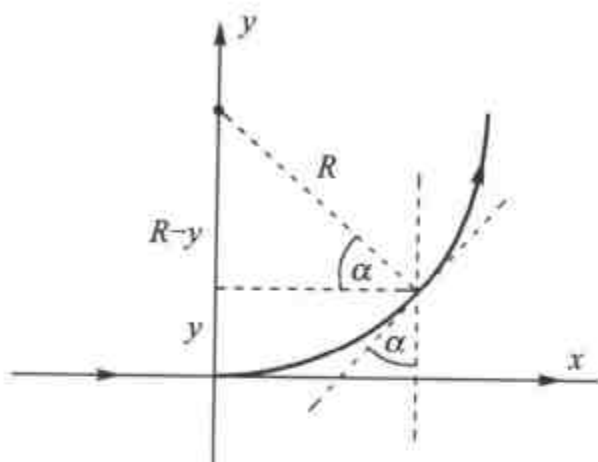


图 S125.2

实际上, 要限制光线沿着圆弧行进, 这是很困难的。然而, 我们可以控制溶质浓度来配制溶液, 从而达到折射率在垂直方向上的连续变化。对这样一种介质, 光线并不是沿着一个圆弧传播, 而是沿着某种其他的连续曲线传播。

注: 为什么原本沿着 x 轴射入的光线开始转折? 原因是没有一束光线是无限细的。一束“光”总是意味着光束具有有限的宽度, 由于折射率的存在使得光的传播速度沿着光束轮廓变化。结果是, 波前变成了非平面的, 而光束出现转折。

题解 126

用一根直尺, 可以测出 CD 上用来储存信息的那部分面积的内直径近似为 4.4 cm, 同时外直径近似为 11 cm。这意味着其有效表面积约为 80 cm^2 。因为信息单位为 1 bit (1 字节=8 bit), 那么每比特的表面积为

$$A = \frac{80 \text{ cm}^2}{650 \times 10^6 \times 8} = 1.54 \times 10^{-8} \text{ cm}^2$$

假设 1 bit 信息的“形状”是一个正方形 ($A=a^2$), 那么 1 bit 的线度是

$$a = 1.24 \times 10^{-4} \text{ cm} = 1.24 \text{ } \mu\text{m}.$$

CD 上的信息是按照由中心附近开始的螺旋形存储的, 并且向外延伸; 这正好与传统的 LPs 上的情况相反。CD 上的一小块可以作为一个反射光栅, 可以使用一个已知波长的激光束来测量它的衍射花样。有效的光栅间距是凹槽的宽度, 很容易计算, 可以通过正入射时测量观察屏上两个一级最大的干涉条纹的距离来计算。激光波长的典型值为 670 nm, 并且选择 CD 与观察屏之间的距离 1 m 计算最简便。

在光栅的干涉花样中, 第一级干涉条纹强度最大的条件为 $d \sin \theta_1 = \lambda$, 其中 d 为

光栅间距。实验上, $\theta_1 \approx 25^\circ$, 将这个数据代入光栅方程可以得到光栅间距为 $d \approx 1570 \text{ nm} = 1.57 \mu\text{m}$ 。虽然这个估算很接近前面的数据, 但是还是有点大。这两个结果之间的差别并非测量误差, 而是相邻凹槽之间分离的间隔层造成的结果。信息的有效宽度仅仅约为 $0.5 \mu\text{m}$ 。这意味着信息的总的有效面积只有约 $(80/3) \text{ cm}^2 \approx 27 \text{ cm}^2$, 一个比特信息的形状为一个长方形, 其边长近似为 $1 \mu\text{m}$ 。

注: CD 上的信息密度是均匀的, 但是转动速率会随光头的位置而改变。

题解 127

由 $n\lambda = d \sin \theta = (10^{-3} \text{ m}/300) \sin 24.46^\circ = 1380 \text{ nm}$, 对于 n 和 λ 来说, 要使红光和蓝/紫色的混和光成分位于光谱的适当的位置, 它们的可能的值为 $n_R = 2$, $\lambda_R = 690 \text{ nm}$ 和 $n_{BV} = 3$, $\lambda_{BV} = 460 \text{ nm}$ 。在所有的可能的物理情况中

$$n\lambda \leq d \sin 90^\circ = 3333 \text{ nm}$$

而且只有惟一的其他整数满足比例关系 $3m:2m$, 其中 m 小于 $(3333/1380) \approx 2.4$, 它们是 6 和 4。这样, 还有惟一的另一个角可以使这两部分光线都可以被观察到, 也就是在下面的角度

$$\arcsin \frac{(6 \times 460)}{3333} = 55.9^\circ$$

题解 128

(i) 当单色激光束正入射到衍射光栅上时, 干涉花样最大值的位置 θ 由下式给出

$$d \sin \theta = m\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

其中 d 是光栅间距, λ 是激光波长。如果光栅绕着平行于光栅刻线的轴旋转的角度为 ϕ , 必须修改上面的光栅方程, 只需要考虑光栅上两个缝的干涉就足够了, 如图 S128.1 所示。

光程差由两部分组成:

$$\Delta_1 + \Delta_2 = d \sin \phi + d \sin(\theta - \phi)$$

由此可得, 改变后的光栅方程其干涉花样为

$$d[\sin \phi + \sin(\theta - \phi)] = m\lambda$$

主要的结果是干涉花样变得不对称了, 只有零级最大条纹的位置保持不变。如果光栅逆时针旋转时 ϕ 是正的 (同样情况下 θ 为正), 那么在正的角度上, 干涉极大

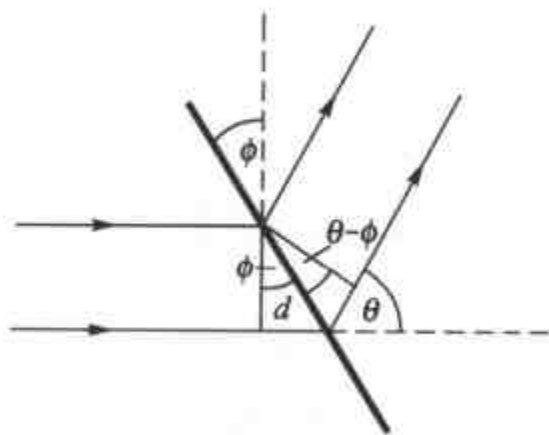


图 S128.1



条纹的密度变大，同时负角度上其密度减小。如果光栅刻线转动到纵向位置，那么所有的干涉极大条纹会沿着一条水平直线分布；这个情况将会同情况 (ii) 中的进行对比。

注：认为旋转的光栅的效果是减小光栅间距的“有效”尺度，这种幼稚的想法是错误的。

(ii) 因为衍射光栅是许多相同的平行单缝的集合，那么第一步考虑一个单缝的衍射就足够了。如果激光束正入射到一个非常窄的缝上，那么衍射花样是一条微弱的直线。如果单缝稍微加宽一点，那么沿着这条直线的干涉极小可以被识别出来。

当这个缝“向前”倾斜时（也就是绕着一个垂直于单缝和准直光束的水平轴旋转一定角度），零级最大保持不变。尽管入射光束以不同的相位接触了单缝的不同部分，在缝的远处，并且在准直光束的方向上，不存在相位差（参见图 S128.2），干涉花样的效果也没有变化。

也许可以把单缝看作一系列距离很近的非常小的洞。现在，我们只需认识到，如果从小洞产生的子波在准直光束的方向上产生了相长干涉，那么在所有的与（被旋转过的）单缝有同样夹角的方向上（在三维的情况下）都会有同样的结果。如果单缝的倾斜角为 ϕ ，那么单缝与准直光束之间的夹角为 $\gamma = 90^\circ - \phi$ 。要单缝与衍射光线之间有相同的夹角 γ ，那么这样的光线只能位于半角为 γ ，并以单缝方向为轴的圆锥上。在观察屏上，我们将会观察到这个圆锥的剖面（参见图 S128.3）。

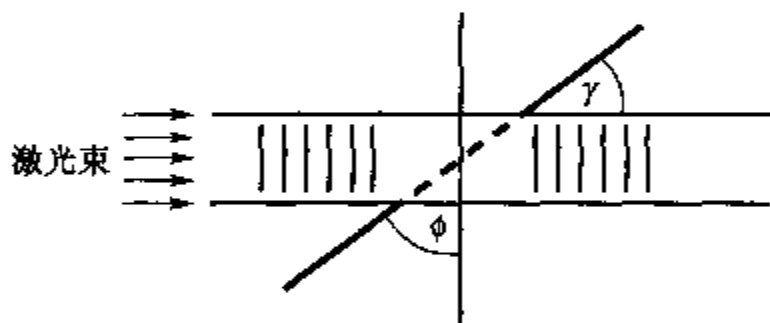


图 S128.2

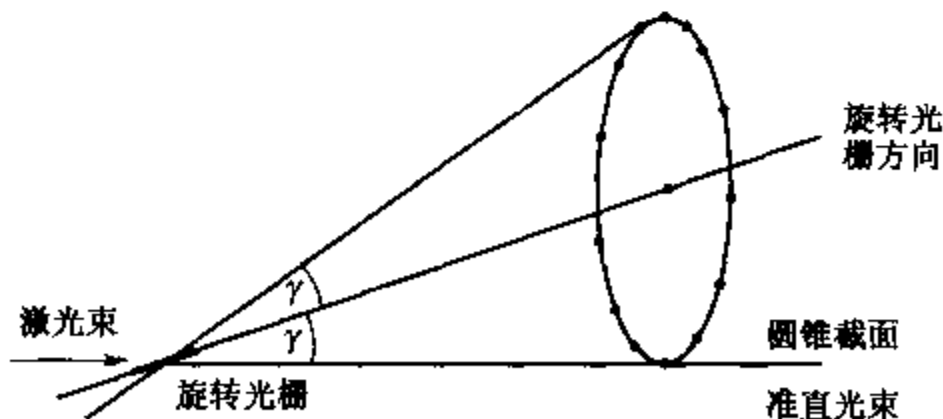


图 S128.3

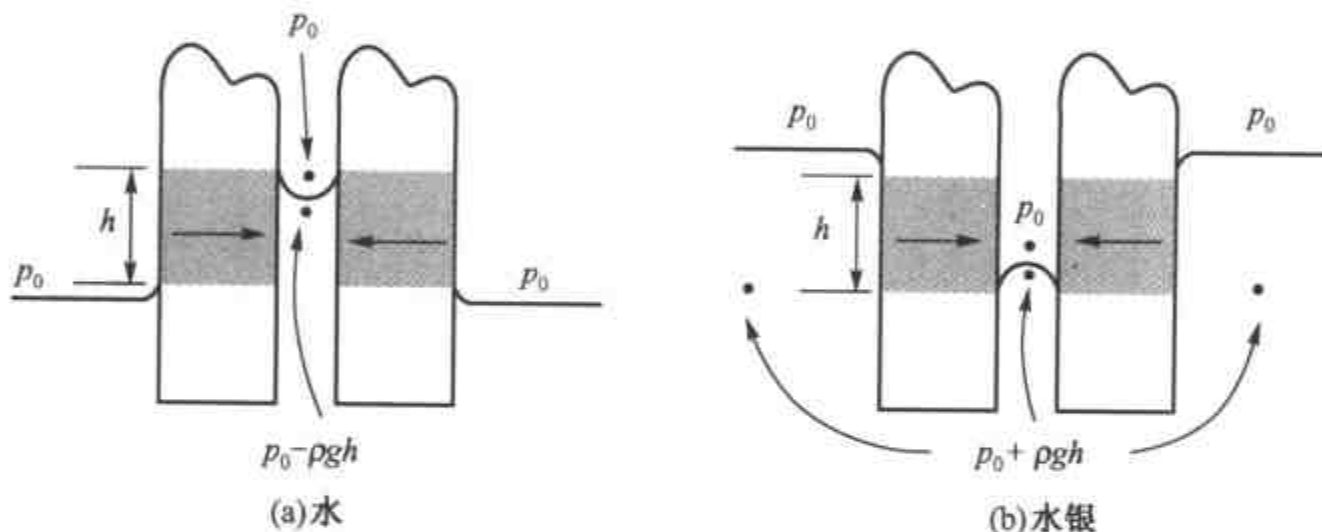
圆锥的顶点是单缝的中点，并且半角为 γ 。圆锥的剖面可以是椭圆形、抛物线或者双曲线。如果 $\gamma = \Phi = 45^\circ$ ，则得到一个抛物线。

回到开始的问题，得出倾斜光栅的干涉花样由位于圆锥剖面上的亮斑组成。

题解 129

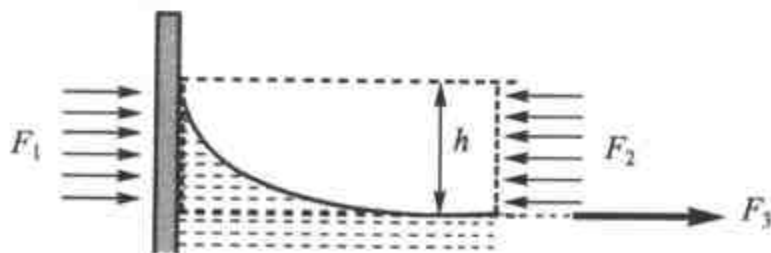
因为液体的表面张力，在这两个物体之间的液面高度与物体之外的液面高度是不同的：在 (a) 所示的情况中，液体是水，那么在物体之间的液面高度比较高，同时，在液体是水银的 (b) 情况中（接触角为负），物体之间的液面高度则比较低。

在两个物体之间，两种情况下液面上的压强都必须为大气压，相应地，在液面下时，若液体为水，其压强低于大气压，若液体为水银，其压强则高于大气压。从上面的图中可以看出，在这两种情况下，都将会产生净的向内的作用力（作用在阴影部分），并且使物体产生向一起运动的趋势。



题解 130

水的压强随着水面高度的增加会线性地改变。在凹透镜的底部，水的压强是与外部大气压强 p_0 相等的，而在其顶部水的压强为 $p_0 - \rho gh$ 。作用在容器壁上的压强的平均值为 $p_{\text{平均}} = p_0 - \rho gh/2$ 。与这个压强值对应的作用在长为 l 的玻璃缸容器壁上的作用力为 $F_1 = lp_{\text{平均}}h$ 。



考虑作用在图中被虚线封闭的那部分水上的水平力。容器壁对它有一个向右的推力 F_1 ，外部空气对它有一个向左的推力 $F_2 = lp_0h$ ，而且余下的水的表面张力对它有一



个向右的拉力为 $F_3 = l\gamma$ 。因为这部分水本身是静止的，所以这些力的合力应该为零。这意味着

$$\left(p_0 - \frac{1}{2}\rho gh\right)lh - p_0lh + l\gamma = 0$$

上式写成

$$h = \sqrt{\frac{2\gamma}{\rho g}} = \sqrt{\frac{2 \times 0.073}{1\,000 \times 10}} = 0.003\,8(\text{m})$$

所以水面沿着玻璃缸的容器壁上升了约 4 mm。

题解 131

若水滴的表面张力为 γ (等于单位表面积的能量), 半径为 R , 当它的半径减小了 ΔR 时, 水滴的表面能会减小。其改变量为

$$\Delta E_{\text{表面}} = 4\pi\gamma[R^2 - (R - \Delta R)^2] \approx -8\pi R\gamma\Delta R$$

同时, 水滴的体积减小了 $4\pi R^2\Delta R$ 。这部分水要蒸发所需的能量为

$$\Delta E_{\text{蒸发}} = 4\pi L\rho R^2\Delta R$$

其中 ρ 为水的密度, L 为水的蒸发潜热。

如果有 $|\Delta E_{\text{表面}}| > \Delta E_{\text{蒸发}}$, 那么表面能的减少能够用来提供蒸发所需的能量, 也就是要

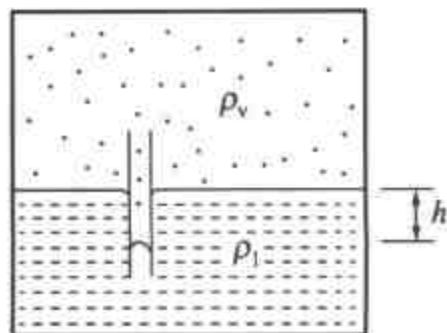
$$R < \frac{2\gamma}{\rho L} \approx 7 \times 10^{-11} \text{ m}$$

因为这个半径值与水分子的尺度是同一个量级的, 所以具有这个半径值的水滴是不存在的。因此, 没有不吸收热量或者损失内能还能够蒸发的水滴。上面的推理可以用来从宏观的性质估计分子的尺度。

题解 132

考虑包含一部分液体的一个密闭的容器, 容器的剩余部分被这种液体的饱和气压所填充。如图所示, 把一个半径为 r 的毛细管插入液体, 液体不浸润毛细管壁。

这种情况下, 毛细管中的液面下降到位于总的液面高度之下 h 处。应用净水力与液体表面张力之



间的平衡关系 $2\pi R\gamma = \rho_1 gh\pi r^2$ ，可以求出 h 的大小，其中 γ 为液体的表面张力系数， ρ_1 为液体密度。由上式可以求出 $h = 2\gamma/(\rho_1 gr)$ 。

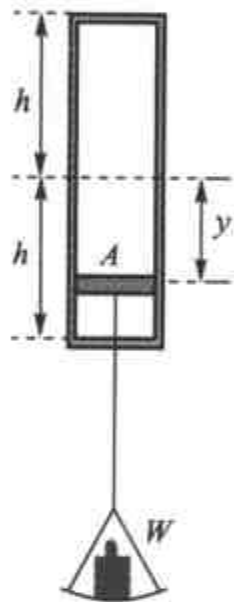
在毛细管中和液体的表面上，液体与其饱和气压处于平衡中。然而，在毛细管中的气压比交界面上的略高。压强差是由高度为 h 、密度为 ρ_v 的气柱产生的压强造成的。满足下式

$$\Delta p_v = \rho_v gh = \frac{2\gamma \rho_v}{r \rho_1}$$

因为 $\rho_v \ll \rho_1$ ，这个压强差要比与半径 r 相对应的曲率的压强小得多，但是，经过足够长的时间，已经足够导致上面所说的现象的发生。

题解 133

令 A 表示活塞的横截面积， y 表示活塞在初始和最终平衡位置之间的垂直位移（如图所示）。



重力为 W 的物体的势能减少使得圆柱体内空气的内能增加。由初态和终态的能量守恒可以得出

$$W_y = \frac{5}{2} [p_1 A(h-y) + p_2 A(h+y) - 2p_0 Ah] \quad (1a)$$

其中， p_1 为圆柱体内下面一部分气体的终态压强， p_2 为上面一部分的终态压强。由双原子分子组成的气体的内能被写作 $\frac{5}{2} pV$ 的形式。如果 W 非常大，那么势能的减少（相应的气体内能的增加）也是非常大的，并且空气的初始时的内能可以被忽略。这样

$$W_y = \frac{5}{2} [p_1 A(h-y) + p_2 A(h+y)] \quad (1b)$$

当重物最终静止的时候有

$$(p_1 - p_2)A = W \quad (2)$$

因为两等份气体的温度和质是相同的，因此它们的内能也必须相等

$$\frac{5}{2} p_1 A(h-y) = \frac{5}{2} p_2 A(h+y) \quad (3)$$

由方程 (1b)、(2) 和 (3) 可以得出活塞的位移为 $y = \sqrt{5/7}h$ ，也就是下面一部分气体被压缩到原来体积的 $1 - \sqrt{5/7} \approx 15\%$ 。

注：令人惊讶的结果是，无论物体有多重，尽管气体被认为是可压缩的，可是下面一部分空气的体积并不趋向零！大的物体增加了封闭气体的内能和温度。这不但导致绝对压强出现很大的增加，而且上下两部分的压强差增加也会很大。



实际上,所用的重物受到结构的机械承载能力和所用材料的熔点的限制。我们也应该考虑在增加的温度下,空气是否仍然可以被看作是理想的双原子分子气体。

如果不忽略空气初始的内能,那么结果是

$$\frac{y}{h} = \frac{\sqrt{35W^2 + 25p_0^2 A^2} - 5p_0 A}{7W}$$

题解 134

考虑一座平均密度为 ρ 的“盒子形状”的山脉,其底部面积为 A ,高度为 h 。要使其底部厚度为 d 、比热为 L 的一层熔化,所需的能量为 $AdpL$ 。山脉的总质量近似为 Ahp ,并且如果山脉下降一定的距离 d 所释放的能量为 $Ahpgd$ 。如果满足下面的条件,那么山脉的基底不会熔化,即如果

$$AdpL > Ahpgd, \text{ 即 } h < \frac{L}{g}$$

用金属的熔化潜热 (200~300 kJ/kg) 近似作为所需的潜热,我们可以估计出地球上山脉可能达到的最大高度为 20~30 km。这个量级的大小是正确的。考虑到山脉的基底实际上不会熔化这个事实,而考虑山脉的大小受到其组成材料应力强度的限制,估计出的地球上最高山脉的高度是惊人准确的。

火星上的重力加速度要比地球上的重力加速度小很多 ($g_{\text{Mars}} \approx 4 \text{ m/s}^2$)。因此,由相似的岩石组成的山脉在火星上的高度要比地球上高的多。实际上,火星上最高的山脉奥林匹斯山的高度为 26 km!

题解 135

为了简化计算,选择一个初始时的体积和外部压强均为一个单位的系统,并且摩尔数与气体常数的乘积也是一个单位值。这将使通常的理想气体方程 $pV = nRT$ 简化为 $pV = T$ 。在这个系统中,摩尔热必须与气体常数的相乘来得到正常的摩尔热容。

初始时封闭空气的压强由大气压强和 76 cm 水银柱产生的压强之和给出,其值为 2 单位大气压。封闭空气柱长度的增加意味着相应的水银柱长度的减小。所以,随着空气柱的长度由 1 单位增加到 2 单位,它的压强也线性地从 2 单位减小到 1 单位,如图 S135.1 所示。

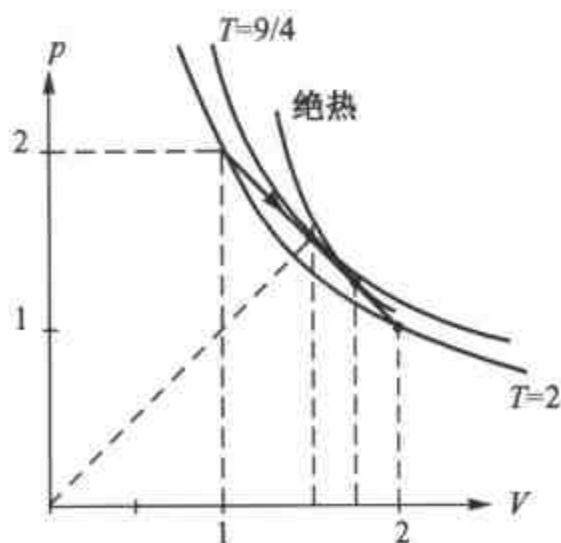


图 S135.1

封闭气体初始的温度为 2 单位，并且在图中所示的直线末端仍然是 2 单位，因为这两点都位于等温线 $pV = 2$ 上。在我们的陈述中，等温线是关于坐标轴的角平分线（也就是直线 $p = V$ ）是对称的。因此气体能够达到的最高温度对应于等温线与直线段相切的情况。如图 S135.1 所示，这种情况出现在这个过程的中点， $p = \frac{3}{2}$ 和 $V = \frac{3}{2}$ 的位置。因此最高温度为 $\frac{9}{4}$ 。

表示这个过程的直线方程为 $p = 3 - V$ 。对这条直线的典型部分应用热力学第一定律，可以得到下式

$$\frac{5}{2}\Delta T = C\Delta T - p\Delta V$$

其中方程的左边为空气内能的改变量（对双原子分子有 $C_v = \frac{5}{2}R$ ），在方程的右边， C 是我们讨论的摩尔热容。将 $p = 3 - V$ 代入方程 $pV = T$ 中可以得到 $(3 - V)V = T$ 。由上式我们可以得到对 V 和 T 的微小变化满足式 $(3 - 2V)\Delta V = \Delta T$ 。那么空体内能的改变量可以写作下式

$$\frac{5}{2}\Delta T = C\Delta T - \frac{3 - V}{3 - 2V}\Delta T$$

简化后可得

$$C = \frac{21 - 12V}{6 - 4V}$$

图 S135.2 中画出摩尔热容随着体积的变化结果。因为在点 $V = \frac{3}{2}$ 处，这条直线很好地逼近最大温度所对应的等温线，所以图中曲线在这一点是奇异的（摩尔热容趋向无穷大）。在等温过程中，传递了热但是温度没有改变，这是摩尔热容趋向无穷大的原因。除这一点之外，摩尔热容变为负的，这种情况意味着尽管空气吸收了热量，但是由于空气在膨胀时所做的功大于它吸收的热量，空气的内能仍然减小了。

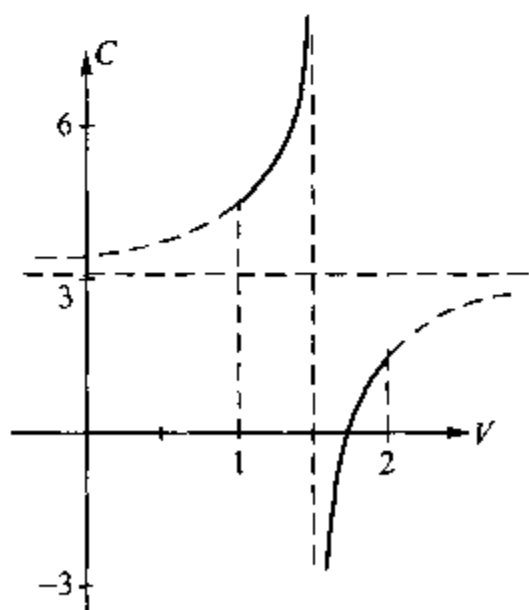


图 S135.2

这个过程中最令人感兴趣的地方是在 $V = \frac{7}{4}$ 处，即只有四分之一的水银还留在玻璃管之中。在这一点上，摩尔热容为零意味着这个过程为绝



热过程，因为没有发生热传递而空气的温度却改变了；在这个位置，描述过程的直线是与一条绝热线相切的。除该点之外，温度进一步降低但是摩尔热容转变为正。这只能说明系统在被冷却。

如果系统吸收更多的热量，这个典型的点不再沿着直线变化，而是继续沿着绝热线变化。空气温度减小，但是温度的下降并没有直线情况下下降得那么多。空气内能的减少等于克服大气压（同时还要推起水银）和加速水银的排出所做的功。

回到开始的问题，为了将水银柱推出玻璃管所必需的热量是多少呢？只是在 $V=1$ 到 $V=\frac{7}{4}$ 的过程中，空气柱需要吸收热量。通过简单的算术运算，封闭空气柱膨胀到这一点所做的功为 $\frac{39}{32}$ （在本题的单位系统中），同时内能增量为 $\frac{15}{32}$ 。所以空气柱需要吸收的热量为 $Q=\frac{27}{16}$ 。在标准单位中，如果原来被水银柱封闭在玻璃管中的

空气为 n mol，那么要使水银柱被推出来，空气柱需要吸收的热量为 $\frac{27}{16}nR$ 。

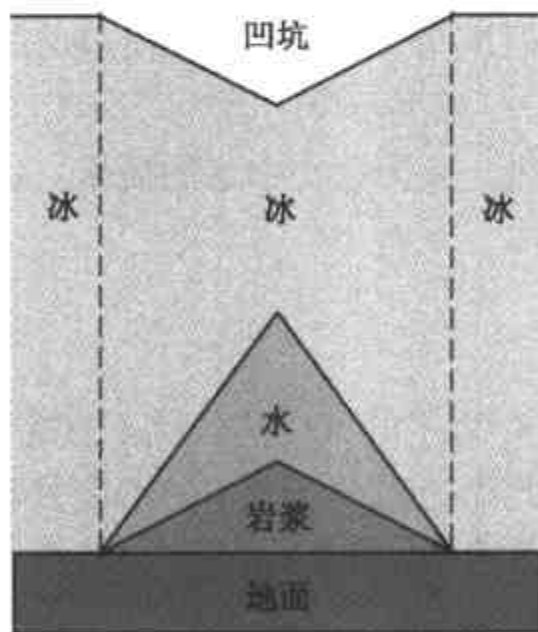
空气为 n mol，那么要使水银柱被推出来，空气柱需要吸收的热量为 $\frac{27}{16}nR$ 。

空气为 n mol，那么要使水银柱被推出来，空气柱需要吸收的热量为 $\frac{27}{16}nR$ 。

题解 136

熔化的岩浆与冰发生接触，并且在 500 m 厚的冰帽底部，大量的冰被熔化。因为水的密度大于冰的密度（也就是熔化的水的体积要比结成的冰的体积小），此外，一部分流走了之后，在冰的下面形成了一个巨大的圆锥形的洞。但是，在洞的上面，非常重的冰会下沉，所以在表面上留下了凹坑。在冰川下面，可以发现最近的凝固的岩浆的侵入，还有位于圆锥形空穴内融解的水，以及冰层（参见下图）。融解水的量与岩浆数量有关，但是冰面上的凹坑形状是由冰和水的静水压强决定的。

在第二天，火山喷发突破了冰帽，并且形成了 500 m 高的又黑又热的火山灰云层。它被冷空气的浮力带到 3000 m 的高空。两周之后，云层变成白色并且到达了 10 km 的高度。火山喷发在两周之内一共融化了 3 km^3 的冰。在冰川下面，融化后的水流入了一个湖里，这个湖位于附近的一个火山坑内，它是格里姆斯渥特火山的喷口。在火山喷发的位置，冰面之中形成了一个长 8 m、宽几百米的深坑。在开始的四天里，融化速度非常快，达到每天 0.5 km^3 。同时，在冰的下面，由于火山喷发，形成了一个新的



长 0.6 km、高 150~300 m 的山脉。

融化的水在消失前，留在冰川下面的格里姆斯渥特火山喷口达五个星期。巨浪冲过东南方较低的部分陆地，破坏了所经过地方的所有的东西（道路、桥梁等等）。

题解 137

假设空穴位于地表下深度为 h 的位置。当细的通道充满水时，空穴内的压强为 $p = p_0 + \rho gh$ ，其中 p_0 为大气压强， ρ 为水的密度。在上面所说的深度处，当温度达到使饱和水蒸气的压强 ($Ae^{-L_m/(RT)}$) 等于 p 时，水会开始沸腾。公式中出现的气化摩尔热 L_m 的数值近似为 40 kJ/mol，气体常数 R 的值为 8.3 J/mol·K。使用这些数据，从大气压下水的沸点 (373 K) 可以确定常数 A ，结果为 $A = 4.1 \times 10^{10}$ Pa。

为了数值计算，地表的温度可以认为是 $T_0 = 290$ K，因为地下深度每增加 1 m 温度升高 1 °C，那么深度 h 处的温度可以由式 $T = T_0 + h$ 给出。现在，利用水沸腾时的压强相等，可以得出下面的公式

$$p_0 + \rho gh = Ae^{\frac{L_m}{R(T_0+h)}}$$

这个超越方程可以通过数值方法来求解，也就是通过仔细思考来猜测！解为 $h = 197$ (≈ 200) m。在这个深度的压强近似为 20 个大气压，温度为 $487\text{K} = 214^\circ\text{C}$ 。

当水开始沸腾时，第一个蒸汽泡上升并且将水推出窄管道，压强减小到一个大气压，温度为 214°C 的超热的水开始猛烈沸腾，产生一定量的水蒸气来使其温度降至 100°C 。温度下降了 $\Delta T = 114^\circ\text{C}$ ，这意味着一定量的过剩内能为 $cm\Delta T$ ，其中 c 为水的比热， m 为空穴中水的质量。这些过剩的能量足够产生 $m_s = 44$ t 的水蒸气，得到下式

$$cm\Delta T = Lm_s$$

其中 L 为水的气化热。代入有关数据后，我们得到空穴中水的质量为 $m = 207$ t。因为在如此高的温度下，水的密度只有约 850 kg/m^3 ，由上面的数值可以得出空穴体积的近似值为 244 m^3 。

题解 138

在一定时间内，传导失去的热量必须等于（小于）同一时间内形成的额外的冰的溶解热。这样，对于面积为 A 的湖来说，有

$$\lambda_i A \frac{\Delta T}{x} = L_i \frac{d}{dt} (\rho_i Ax)$$



简单的积分可以得出 $t = \frac{1}{2}x^2B$ ，其中 $B = (\rho_i L_i)/(\lambda_i \Delta T)$ 。代入相关的数值，可以得出时间约为 90 个小时。

题解 139

按照热传导定律，传递的热量直接与温度梯度（温度差除以距离）、面积和时间成正比。因此有

$$\text{时间} \propto \frac{\text{热容}}{\text{面积} \times \text{温度梯度}} \propto \frac{L^3}{L^2 L^{-1}} = L^2$$

因为 $M \propto L^3$ ，所以时间正比于 $M^{2/3}$ ，假设火鸡和猛犸从同样的温度和相似的环境开始解冻，那么一只猛犸应该需要 $2(8\,000/5)^{2/3}$ 天，也就是约 9 个月。（实际上，西伯利亚的夏天时间太短了，不能使一只猛犸解冻。）

题解 140

首先考虑冰的状态和 100°C 时容器内的压强。因为饱和水蒸气的密度是 0.5977 (≈ 0.6) kg/m^3 ，其压强为 1 个大气压，所以 0.6 kg 的冰在 100°C 被完全转化成水蒸气，确实转化为一个大气压下的饱和水蒸气。

在 -10°C 的冰怎么转化为 100°C 的饱和水蒸气呢？如果温度非常缓慢地上升，那么系统会经过许多的平衡态。首先，冰升华，并且冰相与气相处于平衡状态。这个状态一直持续到达到三相点的温度和压强 (0.01°C , 610 Pa)。在三相点处，液态开始出现在冰和水蒸气旁边。进一步加热使得固相消失，并且只有水和饱和水蒸气留在容器中。有意思的是注意到后来水在 100°C 稳定地沸腾，直到所有的水被转化成水蒸气。

从吸收热量的角度来看，只有初态和终态是重要的。因为随着内能的增加，系统经历了“冰—水—汽”的状态，所以系统吸收的热量 Q 与中间态是无关系的。为了达到计算的目的，对 0.6 kg 的冰块的加热应该分为四个阶段（加热冰块，融化冰块，给水加热，使水沸腾），可以得出下式

$$Q = c_i m \Delta T_1 + L_f m + c_w m \Delta T_2 + L_v m$$

其中 $c_i = 2.1\text{ kJ}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$ 是冰的比热， $\Delta T_1 = 10^\circ\text{C}$ 、 $L_f = 334\text{ kJ}/\text{kg}$ 为冰的溶解热， $c_w = 4.2\text{ kJ}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$ 是水的比热， $\Delta T_2 = 100^\circ\text{C}$ ， L_v 是水的气化热。

冰和水的比热与温度和压强略微有关，并且冰的溶解热也与压强有一点点关系。但是，这些变化是很小的，可以忽略不计。然而，这种情况不同于水的汽化热。虽然汽化热只是随着温度变化只有一点点改变是事实，但是汽化热随压强的变化是非常大的。

一般情况下查表给出的值为 $L_v = 2\,256 \text{ kJ/kg}$ ，这不但包括了蒸汽的较高的内能，而且包括克服大气压所做的功。在这个问题中，当容器被抽空时已经做了这个功，也就是传递给系统的热量减小了这么大的一个量，其值为 $-p\Delta V = -101.3 \text{ kJ}$ 。因为这个数值是对 0.6 kg 的水而言的，所以有

$$L_v = (2\,256 - 101.3/0.6) = 2\,087 \approx 2\,090 \text{ kJ/kg}$$

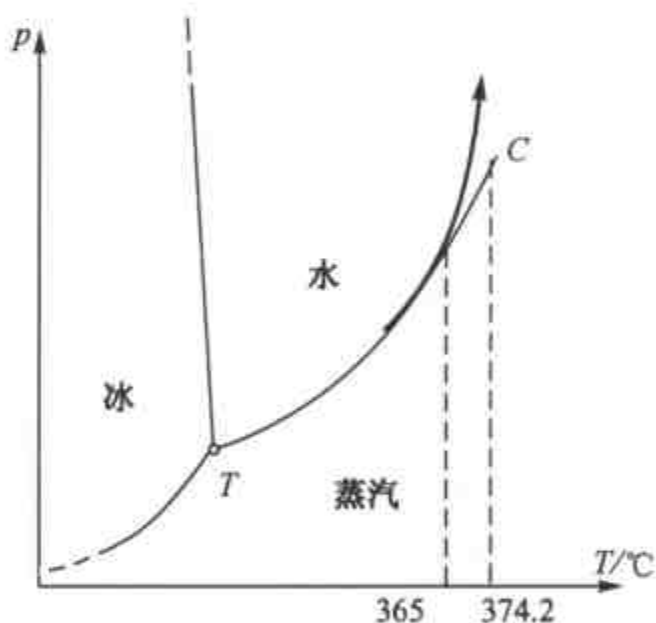
上面的值更加准确，可以被用作进行本题的计算。代入上面的数值，可以求出传递给系统的热量为 $Q = 1\,720 \text{ kJ}$ 。

忽略克服大气压所做的功将会引入接近 6% 的误差，而当忽略其他参数随着温度和压强的微小变化时导致的误差约为 1%。这种情况产生的主要原因是在由水转变为水蒸气的过程中，正常的体积方面的改变是非常重要的（约有 1 600 倍）。与水蒸气的体积相比，水和冰体积的变化小到可以忽略，在本题解的过程中，它们已被默认为忽略不计。

题解 141

178

直到水上方的空间是饱和的，密闭容器中的水才停止气化。因此，液体上方的总压强是饱和水蒸气和容器内密闭空气的压强和，也就是这个压强总是比单独的水蒸气压强要高。这意味着在任何温度下水都不能开始沸腾。



如果容器足够坚硬，可以承受很高的温度。我们可以问一个问题：上升到什么温度容器中仍然有液态水存在？针对饱和水蒸气的的数据表告诉我们水的临界温度是 374.2°C 。水的临界密度为 326.2 kg/m^3 ，这意味着在达到临界点 C 之前，水是不可能蒸发的。如果是这样的，容器中水的密度必须达到约 500 kg/m^3 。实际上，在比较低的温度状态发生了一个奇怪的变化！

在约 365°C ，水的密度为 500 kg/m^3 ，这个温度下的饱和水蒸气密度为 160 kg/m^3 。这意味着在 365°C 液态水充满了整个容器。膨胀的原因是在这个范围内随着温度升高，水密度的减小要比水蒸气密度的增加更迅速。

在 365°C 以上，容器内的水仍然保持液态，但是压强升高了。如图所示，系统偏离了沸腾曲线并且继续上升，在相图的这个区域对应的是液相。在临界温度之上，名词“液体”和“气体”已经失去了它们的意义；若严格使用专有名词的话，应该说水



处于气体状态。

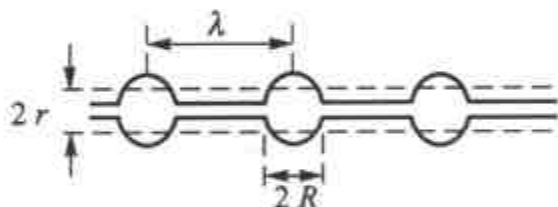
容器中的气体处于何种状态？在相关的温度区间（360~380℃），容器中的压强大约为 200~300 的大气压。在这样的压力下，部分气体溶于水中，其余的部分压缩成很小的泡泡，仅占据容器中大约 0.1%~0.2% 的空间。也就是说，空气对于水的行为没有显著影响。

题解 142

只有空气分子的能量是有关的，而 T 以 kT 组合的形式出现。通过应用 l 、 F 、 m 和 kT 进行量纲分析，可以发现振幅必须与下面形式的变量结合有关，即变量必须以形式 $(kT/F)^q l^{1-q}$ 结合，其中 q 可以取任何数值； m 并未出现在上式中，因此振幅与蜘蛛网的质量没有关系。

题解 143

我们来比较蜘蛛网上一条圆柱形的线状水流的表面能与由线状水流形成的周期性的小水珠的表面能。线状水流的初始半径记为 r ，水珠的“波长”（距离）为 λ ，水珠半径为 R 。如下图所示。与单位面积的表面能 γ 相比，我们可以忽略其他的能量（包括重力的）。



最初的长为 L 的圆柱形的线状水流的表面能为

$$E_1 = 2\pi r L \gamma$$

最终，形成了每个半径为 R ，共 L/λ 个水珠，并且水珠的总表面能由下式给出

$$E_2 = 4\pi R^2 \frac{L}{\lambda} \gamma$$

其中，我们忽略蜘蛛网上网线本身的厚度和表面积。

由物质守恒，半径 R 可以由下式确定得出

$$\pi r^2 L = \frac{4\pi R^2}{3} \frac{L}{\lambda}$$

在水珠形成的过程中，表面能必定减小，有 $E_2 < E_1$ 。从上面那些方程中消去 R ，我们可以得到 $\lambda > \frac{9}{2} r$ 。这个结果表明水珠的“波长”必须大于某一个临界值 $\lambda_{\text{临界}}$ ，这个值是与线状水流的初始半径成正比的。

注：(i) 比利时物理学家，约瑟夫·普拉托 (A. F. Plateau, 1801—1883) 首



先表明临界“波长”比上述的要大。他通过研究由于表面张力产生的线状水流的收缩发现 $\lambda_{\text{临界}} = 2\pi r$ 。他设想线状水流的直径是周期性改变的，并且考虑与液面曲率有关的压强差的作用。

(ii) 诺贝尔奖获得者，英国物理学家，约翰·雷利 (W. S. Rayleigh, 1842—1919) 研究了线状水流的稳定性，并且按照他对水珠形成的非常仔细和详尽的计算，这个“成功的波长”是 $\lambda_{\text{成功}} = 9.02r$ 。

题解 144

在初期，来自右边的粒子，因为是弹性地反弹，与来自左边的那些非弹性碰撞的粒子相比，右边粒子传输给柱体的动量更大一些。因为这个原因，合力的作用使柱体向左加速运动。柱体向左运动得越快，来自右边的粒子碰撞柱体的比率就越低，碰撞时的相对速度也越小。对于那些从左边碰撞柱体的粒子，情况正好相反，作用在柱体上的合力随时间减小。

在足够长的时间后，柱体以单位速度 v_1 运动。平衡条件是在单位时间内，从左边和右边给予柱体的动量相等。右边粒子以相对速度 $v_0 - v_1$ 到达柱体并且以同样的相对速度反弹回去。在较短的时间间隔 Δt 内，在距离 $(v_0 - v_1)\Delta t$ 之内的粒子到达圆柱体，并且每一个粒子给予柱体的冲量与 $2(v_0 - v_1)$ 成比例。所以，来自右边的冲力正比于 $2(v_0 - v_1)^2$ 。类似地，左边与柱体发生非弹性碰撞的粒子以相对速度 $(v_0 + v_1)$ 到达柱体，产生的冲力与 $(v_0 + v_1)^2$ 成正比。柱体达到匀速的条件是

$$2(v_0 - v_1)^2 = (v_0 + v_1)^2, \quad v_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} v_0 \approx 0.17v_0$$

(ii) 假设碰撞的粒子是处于某个温度下的气体分子。如果很长时间以后，柱体仍持续地匀速运动，那么这种情况就意味着第二类永动机是可能的，也就是，可以制造一部热机，它可以从一个单一热源不断地提取能量。所有的经验都表明这样的热机是不可能被制造出来的。

上面的推理错在什么地方呢？非弹性碰撞产生的热量仍然没有被考虑进去！那些与柱体左端发生非弹性碰撞的粒子撞击柱体左端，并使其温度上升。如果这样产生的热量被不断地除去（也就是柱体被冷却），那么第一部分中描述的运动是稳定的。结果就是一部工作在两个热源之间的正常的热机，这两个热源分别为撞击粒子组成的气体和冷却介质。然而，如果柱体没有被冷却，那么过不了多久，它的温度就会上升。构成较热的柱体两边的分子会以一个平均速度来振动，这个平均速度是与其温度相对应的，气体粒子会从柱体反弹回来，与一个温度较低的柱体的碰撞相比，这种情况下



反弹的速度有时会较大，有时会较小。最终的结果是柱体的每一端都再也没有从气体吸收热量（否则温度会进一步上升）。那么，对时间取平均后，两边的碰撞都是有效地弹性碰撞，并且两边的冲力是相等的。因此，经过很长时间，达到热平衡以后，柱体必须是停下来的状态。

题解 145

因为空间探测器距离太阳系很远，所以我们可以忽略太阳辐射和宇宙背景辐射。没有防护罩时，按照斯特藩-玻尔兹曼定律，从空间探测器表面辐射的热量产生的热量为

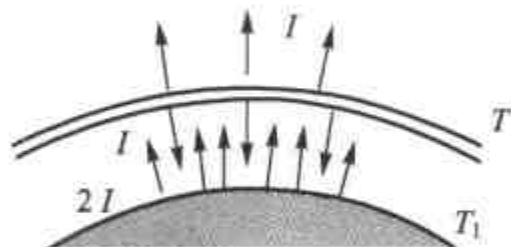
$$I = \sigma AT^4$$

其中， σ 是斯特藩-玻尔兹曼常数， A 是探测器的表面积， T 是其表面温度。当一个薄的防护罩套在探测器表面时，在防护罩的外表面会产生同样的辐射过程，因此防护罩的温度一定为 T 。然而，防护罩也会向内辐射热量，结果是探测器的表面吸收了一定量的辐射热量，其大小等于防护罩辐射到宇宙空间内的热量（参见下图）。这意味着在新的温度 T_1 ，探测器表面必须再辐射总量为 $2I$ 的热量，如下式

$$2I = \sigma AT_1^4$$

可以得出 $T_1 = \sqrt[4]{2} T$ 。

对于 N 个防护罩，通过它们产生的净辐射仍旧为 I 。重复应用前面的论证，可以给出探测器的辐射为 $(N+1)I$ ，那么探测器的表面温度也可以求出为 $T_N = \sqrt[4]{N+1} T$ 。



注：因为忽略了累积的防护罩表面积的增加，所以这个结果不能用于 N 非常大的情况。

题解 146

当一个绝对温度为 T 的物体吸收的热量为 ΔQ 时，它的熵的改变量 $\Delta S \geq \Delta Q/T$ 。等号成立时意味着过程是可逆过程。

ΔT_1 和 ΔT_2 分别表示温度 T_1 和 T_2 处的微小变化，这是可逆过程接收 ΔQ_1 和 ΔQ_2 的热量的结果。整个系统熵的改变是

$$\Delta S_1 + \Delta S_2 = \frac{\Delta Q_1}{T_1} + \frac{\Delta Q_2}{T_2} \geq 0$$

可以将上式写作

$$\Delta Q_1 T_2 + \Delta Q_2 T_1 \geq 0$$

对于温度的变化，因为两个物体质量相等，所以它们热传递的比率是相同的。因此上面的方程可以写作

$$(\Delta T_1)T_2 + (\Delta T_2)T_1 = \Delta(T_1 T_2) \geq 0$$

这意味着在这个过程中，两个物体的温度的几何平均值不会减小（尽管它可以增加）。

在整个过程中，这个关系都是正确的，即对初态和终态都是对的，也就是共同的最终温度至少必须是 $\sqrt{T_1 T_2}$ 。如果系统的能量没有被引出，那么共同的最终温度将会是两个终态温度的算术平均值。这样，可以取出的最大能量为

$$\left(\frac{T_1 + T_2}{2} - \sqrt{T_1 T_2} \right) mc$$

其中 m 是水的总质量， c 是水的比热容。

题解 147

对于限制在体积为 V 的空间内的 N 体系统，对经典力学和量子力学而言，它的微观态的数目都与 V^N 成正比。在当前情况下，最初有 $2N_A$ 个氦气分子占据 $2V_0$ 的体积 ($V_0 \approx 0.0224 \text{ m}^3$)，对氧气也有同样的情况。在移走隔板之后，有 $5N_A$ 个分子占据 $5V_0$ 的体积，那么新的微观态数目与以前的比值为

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{(5V)^{2N_A}}{(2V)^{2N_A}} \times \frac{(5V)^{3N_A}}{(2V)^{3N_A}} = \frac{(5V)^{5N_A}}{(2V)^{2N_A} (3V)^{3N_A}}$$

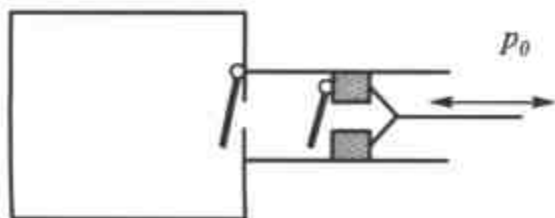
这样，熵的改变为

$$\Delta S = k \ln \frac{W_2}{W_1} = kN_A (5 \ln 5 - 2 \ln 2 - 3 \ln 3) = 27.9 \text{ J/K}$$

注：如果我们已经研究了均处于标准状态下的两部分同种气体（例如两摩尔氦气和三摩尔氦气）的混和，计算出来的熵的变化看起来似乎是相同的。然而，很显然熵并不可能改变，因为在物理上什么也没有发生。这被称作吉布斯悖论。要解决出这个悖论需要依靠全同粒子的不可分辨性。

题解 148

分两个阶段考虑泵的压缩冲程（如图所示）。最初，两个阀门都是关闭的，活塞等温压缩空气。当泵内的压强等于容器内的压强时，里面的阀门打开并且所有的空气被等温压缩。里面阀门打开的时刻有很多次，这使得计算所做的总功非常复杂。幸运的是，有一个更简单的方法！





考虑在这个过程中最后处于容器内的空气量。这个量是最初存在容器内的 10 L 和增进的这个量的九倍，也就是 90 L（最初处于大气压下）。这个空气量占据了 10 L 的体积。

按照热力学第一定律，对空气所做的功和传递给空气的热量之和等于空气内能的增量。在当前的情况下，空气温度没有变化，因此内能不变。这样， $W + Q = 0$ ，也就是对空气所做的功等于它放出的热量 $-Q$ 。

进一步考虑，对恒温下的可逆过程，空气熵的改变为 $\Delta S = \Delta Q / T$ 。如果可以计算空气熵的改变，放出的热量和所做的功都可以确定。

如果 N 个分子被压缩进比它初始占据的体积小十倍的空间内，那么可能的微观态的数目是它原来数目的 $1/10^N$ 倍。按照熵的统计解释，气体熵的改变是这个数目的自然对数再乘以波尔兹曼常数，由下式给出

$$\Delta S = k \ln \frac{1}{10^N} = -Nk \ln 10$$

可以得到气体放出的热量为

$$-\Delta Q = -T\Delta S = NkT \ln 10 = nRT \ln 10 = 10p_0V_0 \ln 10$$

所以所做的功为

$$W = 10 \times 10^5 \text{ Pa} \times 10^{-2} \text{ m}^3 \times \ln 10 \approx 23 \text{ kJ}$$

题解 149

在地球和这个遥远的行星之间必定存在一个电场，因为它们之间存在一个电势差。这个电场导致了宇宙飞船壁上的电荷分离，因此宇宙飞船内的电场为零（法拉第屏蔽效应）。

在航行的过程中，宇宙飞船和行星之间的电势差会改变，这个电势差强烈地正比于到行星的距离；在航行开始时电势差很大，但是逐渐减小直至最后变为零。这样，当宇宙飞船降落到行星上时，它的电势与行星的电势相等，宇航员能够安全地从飞船中出来。

题解 150

带电量为 Q ，电容为 C 的电容器，其电能为 $Q^2/(2C)$ 。如果能够求出电容器能量的改变，那么电容的改变也可以计算得出。

当球形电容器凹进去时，它的能量更高，因为表面上电荷移动向与它们相互排斥方向相反的方向。进一步，单位体积内静电场 E 拥有的能量是 $\epsilon E^2/2$ ，另一种观点是，当电容器凹进去时，之前不存在电场的地方，现在也有电场存在。

如果电容器表面只改变了一点点，表面附近的电场可以认为与开始时的相同。这样，能量的变化只是与体积的变化有关，而与凹陷的实际形状没有关系。

试想一个球形电容器通过改变半径而不是形状使得体积缩小了 3%，那么半径应该减小了 1%（因为球的体积与以其半径为边长的立方体成正比）。由此改变体积的球形电容与原电容的能量比率与凹陷的电容与原电容的能量比率相同，因此电容容量相对的变化也因之相同。

最后，球形电容器的电容与其半径成正比，按比例缩小的电容的电容量减少了 1 个百分点，因此凹陷的电容减少的电容量也减少了 1%。

题解 151

可以证明，如果 F 和 F^* 携带相同的电量，则 F 的电场能要低一些。

考虑从新的表面 F^* 开始，想像其所带的电荷被固定在表面上，然后表面变形，使电荷垂直移动到原来表面的位置。这样电荷沿其受到的力运动。因为最初的表面是等势面，电场的方向与表面垂直。因此，在此过程中系统的能量减少（一个向外的力作用在表面电荷上，不论带正电还是负电，正电荷对应的场方向向外，而负电荷产生的场方向向内）。

新的表面不是等势面，但是，如果将固定的电荷释放，它们会迁移，在迁移的同时使金属的温度上升一点点。系统的静电能也因之降低而达到新的平衡位置。

重复以上过程直到 F^* 变形到 F ，此过程中电场能一直减少，而金属上所带电量 Q 不变，因为静电能与电容 C 的关系为 $Q^2/2C$ ，所以表面 F 的电容大于表面 F^* 的电容。

题解 152

平行板电容器的电容与面积 A 的关系为 $C = \epsilon_0(A/d)$ 。电容器的能量与电压 V 的关系可以表示为

$$W = \frac{1}{2}CV^2 = \epsilon_0 \frac{AV^2}{2d}$$

当两个极板间的距离从 d 变到 $2d$ ，电容器的电容和能量都减小为原来的一半。这也许是个令人惊讶的结果，因为拉开电容器的两个极板需要做正功。然而，当电荷 ΔQ 离开电容器的两个极板时，它给电池增加了 ΔQV 大小的能量（给电池充电）。由于 $\Delta Q = \Delta CV$ ，电池能量的增加恰好是电容器能量减少的两倍。增加的电池能量一半来自于电容能量的减少，一半来自于拉开两个极板所做的正功。

注：上面的叙述可以通过直接计算拉开两个极板所做的功来验证。平行板电容器两个极板间的吸引力可用关系式 $F = Q^2/(2\epsilon_0 A)$ 来计算。电量用电压和电容



代入, 可得到

$$F = \frac{C^2 V^2}{2\epsilon_0 A} = \frac{\epsilon_0 A V^2}{2d^2}$$

如果两个极板的间距记为 x , 所做的功可以通过下式来计算:

$$W = \int_d^{2d} F(x) dx = \frac{\epsilon_0 A V^2}{2} \int_d^{2d} \frac{dx}{x^2} = \frac{\epsilon_0 A V^2}{2} \frac{1}{2d} = \frac{\epsilon_0 A V^2}{4d}$$

因此, 拉开两个极板所做的功正好等于电容器能量的减少, 这两个量同时使电池的能量增加。

题解 153

想像电流 I_0 流过一个超导体、短路的 N 匝线圈, 它的截面积为 $A = \pi R^2$, 长度为 x_0 。线圈中的磁感应强度为 $B = \mu_0 I N / x_0$, 总的磁通量为 $\Phi = BAN = \mu_0 I_0 N^2 A / x_0$ 。即使线圈的长度由于某种原因变化了, 磁通量是不变的, 因为如果变了的话, 就会感应出感生电压, 因而会在零电阻的线圈中得到一个“无穷大”的电流。这样, 电流必须以 $I(x) = I_0 x / x_0$ 的关系随长度 x 变化。长度为 x 的线圈的自感应系数为

$$L(x) = \mu_0 N^2 A / x$$

当电流 I 流过线圈时, 线圈磁场能量为

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \mu_0 \frac{N^2 I_0^2 A}{2x_0^2} x$$

这样线圈的能量正比于长度 x , 即 $W_m(x) \propto x$ 。比例系数 F_0 就是磁场产生的吸引力, 因此拉伸线圈 x 的长度需要 $W = F_0 x$ 的功。

当磁场的吸引力与弹力 $F(x) = k(x_0 - x)$ 平衡时, 即弹簧长度的变化为

$$\Delta x = x_0 - x = \frac{F_0}{k} \approx \mu_0 \frac{\pi I_0^2 N^2 R^2}{2kx_0^2}$$

时, 线圈处于平衡状态。

题解 154

(i) 作用在磁铁 A 上的水平力 (以 x 增加的方向, 即本题中指向图的左边的方向, 为正方向) 为

$$F(x) = -\frac{K}{x^n} + mg \frac{(d+s-x)}{l} \quad (1)$$

其中 $d+s$ 是磁铁 B 和磁铁 A 未被扰动的位置间的距离。平衡的条件是

$$F(x)|_{x=d} = 0 \quad (2)$$



平衡的稳定性依赖于函数 $F(x)$ 在 $x=d$ 附近的行为。此函数会单调地增大或减小(见图 S154.1)。

对于稳定平衡, 它的导数一定要为负。不稳定平衡的情形, 导数为正, 而在极限的随机遇平衡情况下, 导数为零。即

$$F'(x)|_{x=d} = 0 \quad (3)$$

利用公式 (1) 中力 $F(x)$ 的表示, 条件 (3) 可以表示为公式

$$\frac{nK}{d^{n+1}} - \frac{mg}{l} = 0 \quad (4)$$

而条件 (2) 可以写成下面的形式

$$-\frac{K}{d^n} + \frac{mg}{l}s = 0 \quad (5)$$

从这些方程组中, 可以得到

$$n = \frac{d}{s} = 4 \quad \text{和} \quad K = mgd^4 \frac{s}{l} \quad (6)$$

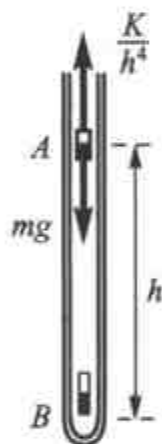


图 S154.2

(ii) 在竖直放置的玻璃管(图 S154.2)中, 作用在 A 上的排斥力为 $F_{\text{vert}}(x) = +K/x^4 - mg$ 。

平衡的悬浮发生在两个磁铁相距为 h 时, 此时

$$F_{\text{vert}}(x)|_{x=h} = 0$$

考虑到结果 (6), 我们得到

$$h = \left(\frac{K}{mg}\right)^{1/4} = d \left(\frac{s}{l}\right)^{1/4} = 4 \text{ cm} \times \left(\frac{1}{100}\right)^{1/4} \approx 1.3 \text{ cm}$$

题解 155

在两种情形下, 最终电容中储存的能量都为 $CN^2\mathcal{E}^2/2$ 。直接连接充电意味着相同大小的能量损失。而分步充电, 电池组所做的总功为

$$\Delta Q \sum (\Delta V) = C\mathcal{E}(\mathcal{E} + 2\mathcal{E} + \dots + N\mathcal{E}) = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2N(N+1)$$

这样能量损耗为

$$\frac{1}{2}C\mathcal{E}^2[N(N+1) - N^2] = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2N$$

即, 只有原损耗的 $1/N$ 。

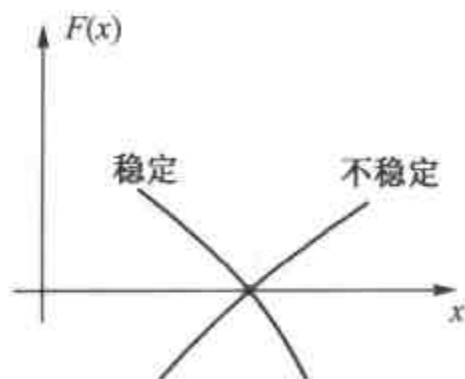
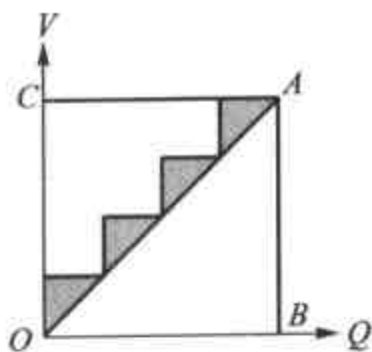


图 S154.1



注意：你可以通过考虑下图得到同样的结论。

三角形 OAB 代表了电容器所储存的能量，三角形 OAC 对应于使用一步充电方式的能量损耗。带阴影的小三角形表示使用多步（例如， $N = 4$ ）充电方式的能量损耗。带阴影三角形的总面积为三角形 OAC 的 $1/N$ 。

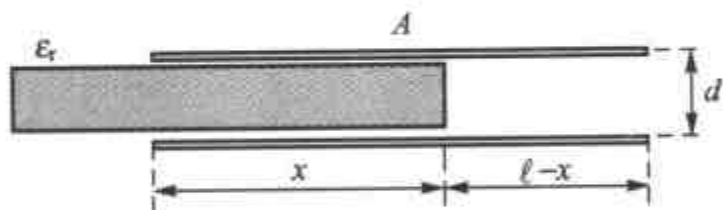


题解 156

在两种情况下，电容器的储存能量都是 $Q^2 / 2C$ ，而 $C_{\text{油}} = \epsilon C_{\text{空气}}$ 。这样当油倒出时，能量就以因子 ϵ 增加了。问题在于，油会被吸引到场最强的地方，把油从场中取出必须要做功，所需要的功至少等于电容存储的电能的增加。

题解 157

(i) 令电容器的两个面积为 A 的极板相距 d ，带电量为 Q 。如图所示，考察已经有长度为 x 的绝缘层进入长度为 l 的两个极板中间的情况。



计算平行板电容器的电容可以通过把它看作是两个电容的并联，一个是充满电介质，一个是空。

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A x}{d l} + \epsilon_0 \frac{A l - x}{d l} = \frac{\epsilon_0 A}{l d} [(\epsilon_r - 1)x + l]$$

总的电容可以看出是随 x 线性增加，从 $\epsilon_0 A / d$ 到初始值的 ϵ_r 倍。在当前情形下带电量是常数，电容的能量 $W_{\text{电容}}$ 可以写成

$$W_{\text{电容}} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 l d}{2\epsilon_0 A [(\epsilon_r - 1)x + l]}$$

可以很清楚地看出，电容器的能量随 x 的增加而降低！这意味着插入绝缘层所需要的功是负的，即是极板把绝缘层吸了进去。

所涉及到的力的大小可以计算出来。令对 x 一个微小的改变所需要做的功和由此引起的电容能量的变化相等 ($F \Delta x = \Delta W_{\text{电容}}$)，并对 W 求导得

$$F = \frac{dW}{dx} = -\frac{(\epsilon_r - 1) Q^2 l d}{2\epsilon_0 A [(\epsilon_r - 1)x + l]^2}$$

因为上式中的分母随 x 而增加, 力的大小在 $x=0$ 时达到最大。很容易看出当 $x=l$ 时, 力的大小以因子 ϵ_r^2 减小。

注: 电场是如何在平行于极板的绝缘层上施加力的呢? 如果两个极板间的电场是均匀的, 且垂直于极板, 而在极板外电场为零 (即为常见的电容器图像), 那么就没有力作用在绝缘层上。这个现象必须要用电场线在极板边缘不可避免的弯曲来解释。

(ii) 作用在电介质上的力不取决于电容器和它周围环境的相互作用。因此如果不是一旦绝缘层放入两个极板中间, 电容器的带电量就以 $Q = CV$ 改变的话, 上面的结论也可用于电压恒定的情况。把电量 (依赖于 x) 代入上式, 可以得到

$$F = -\frac{\epsilon_0 A (\epsilon_r - 1) V^2}{2ld}$$

即, 在电压恒定的情况下, 作用在绝缘层上的力是一常数。

由下面恒定电压情况下的电容能量的表达式, 可以得到一个有意思的结论

$$W_{\text{电容}} = \frac{CV^2}{2} = \frac{\epsilon_0 A [(\epsilon_r - 1)x + l] V^2}{2ld}$$

这表明, 在此情形下, 电容的能量随 x 线性地增加, 对应于绝缘层的一个小位移 Δx 的能量的改变量 $\Delta W_{\text{电容}}$ 为

$$\frac{\Delta W_{\text{电容}}}{\Delta x} = \frac{\epsilon_0 A (\epsilon_r - 1) V^2}{2ld}$$

除了符号, 这个公式恰好就和作用在绝缘层上的力的形式一样。这些结果可以用下面的方法总结一下: 当绝缘层进入两个极板中间时, 系统的确对它做了功 (即把它拉进极板间), 然而电容的能量却增加了相同大小的量。这很可能是由于电池组在这一过程中减少了两倍的能量。电池组能量的减少是由于电容器的电容增加了, 所以电池组必须提供额外的电量。电池组所做的功的计算就留给读者了。

题解 158

从电阻链上最后一个电阻开始, 标记每个电阻。当有 1A 的电流流过第一个电阻时, 同样也有 1A 的电流流过第二个电阻, 这样在每个电阻两端有 1V 的电势差 (电压)。因而, 第三个电阻两端的电势差为 $(1+1) = 2$ (V), 且流过它的电流一定为 2A。流过下一个电阻的电流就是 $(1+2) = 3$ (A)。用分别有 2A 和 3A 的电流流过的电阻的电势差之和 $(2+3) = 5$ (V), 可以得到流过第五个电阻的电流。依此类推, 见图 S158.1。

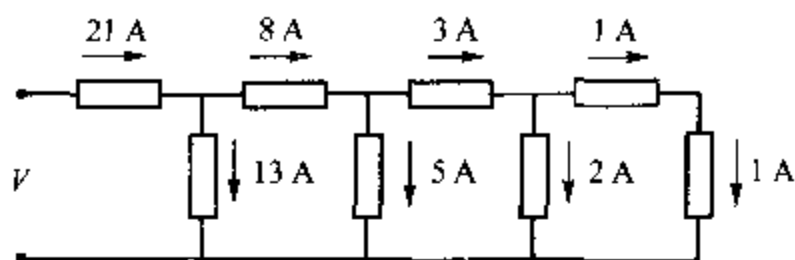


图 S158.1

考虑整个电阻链是从最后一个电阻开始，不断地连接上新的电阻，轮流使用串联和并联，直到形成电阻链。流过开始两个电阻的电流之和流过接下来的串联电阻（基尔霍夫第一定律）。接着的并联电阻又形成了链上的一个新的回路，因此此电阻两端的电势差等于前两个电阻两端电势差之和（基尔霍夫第二定律）。由于对一个 1Ω 的电阻，电势差和电流的数值是一样的，流过前两个电阻的电流和流过新的并联电阻的电流是相同的。这样，在这种所谓“梯状”电路中，基尔霍夫定律是这样被满足的：流过每个电阻的电流（以及电势差）等于前两个电阻的对应量之和。

注意到电流（或电势差）的数值正好是斐波那契数列：1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21。最末的两个电阻两端的电势差为 $(21 + 13) = 34$ (V)，这就是电路输入端的电势差。由于电阻链加上 34 V 电势差得到 21 A 的电流，整个电路的等效电阻为 $34 / 21 = 1.619\ 05$ (Ω)。

如果又有一个电阻连入（并联）电阻链，那么它两端的电势差就是 34 V 不变，但是总电流增加到 $(21 + 34) = 55$ (A)。在这种情况下，电路的等效电阻为 $34 / 55 = 0.618\ 18$ (Ω)。如果再有一个电阻连入电路，55 A 的电流流过它，而输入的电势差变为 $(34 + 55) = 89$ (V)。电阻链总的等效电阻现在为 $89 / 55 = 1.618\ 18$ (Ω)。

如果梯状电路继续地扩展再扩展，一个“无穷大”的链就生成了。计算此时电阻链的等效电阻可以利用多加两个电阻不改变电阻链等效电阻的性质。这样，整个电阻链可以用一个电阻值为 R 的电阻来代替，当有两个 1Ω 的电阻，一个与它并联一个与它串联时，新电路的等效电阻仍为 R 。（见图 S158.2）

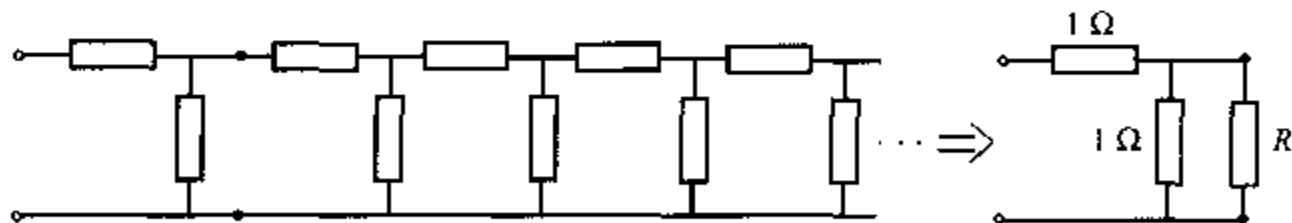


图 S158.2

以上情况的条件是

$$R = 1\Omega + \frac{1}{(1/1\Omega) + (1/R)}$$

由此可以得到下面关于 R 的二次方程组:

$$R^2 - R - 1 = 0$$

此方程的正根给出“无穷大”电阻链的等效电阻为

$$R = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618\ 03\ (\Omega)$$

我们可以看到一个包括 8~10 个电阻元件的电阻链的等效电阻就非常近似于“无穷大”电阻链的等效电阻。因此,一个包括相对数量很少的电阻元件的梯状电路就可以被看作是无穷大的。

注:(i)实际上,高架供电线路的中性线就可以看成是梯状电路;中性线在每一根电线杆都连接到杆和地。这种梯状电路包含有两种电阻,但是“无穷大”链的等效电阻可以同样用上面的方法计算。

(ii)我们很感兴趣地注意到上面的二次方程正好是黄金比例方程,它的解就是黄金分割值, $(1 + \sqrt{5})/2 = 1.618\ 03 \dots$ 。可以看出,它和无穷大电阻链的等效电阻的值相同。此外,还可以看到斐波那契数列中,相邻的两个数的比值以惊人的速度趋向黄金分割值。可以很容易地证明当把一个偶数分解为比它小的两个奇数时,是从下方趋近黄金分割值,而把奇数分解成两个偶数时,是从上方趋近黄金分割值。

最后,出于由多级分数所产生的美感的考虑,值得用 1 来表示由 $1\ \Omega$ 电阻组成的无穷大电阻链的等效考虑。这次,每个元件是按顺序考虑,不是从末尾开始而是从开头开始,即从链的左边一头开始:

$$R = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}}$$

如果在最后的……用 1 来代替,就可以得到初始的 8 个电阻元件的电阻链的等效电阻。

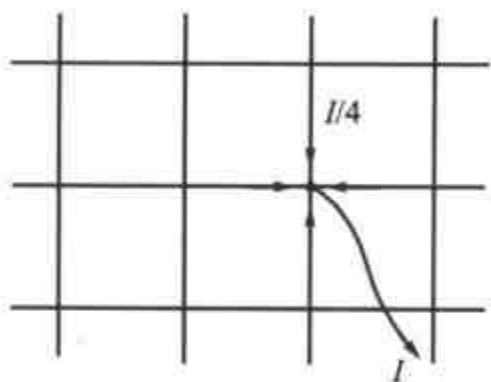
题解 159

我们首先考虑所有元件都是电阻的格子。理由见下面。先考虑某个格点有大小为 I 的电流流入,然后流向“无穷远”。从对称性考虑,有相同的大小为 $I/4$ 的电流从这



个点流向可能的四个方向, 见图 S159.1。

现在再考虑它的近邻点, 并使大小为 I 的电流流出此点 (不依赖于前面的讨论)。再次, 相同的大小为 $I/4$ 的电流从四个相邻的电阻流过来 (见图 S159.2)。



见图 S159.2

现在把两种情形叠加。由于回路方程是线性的, 标量 (即电流和电势) 可以简单地相加。电压 (电势差) V 是在相邻两个格点间出现的, 电流 I 流入其中一个格点, 并且电流 I 流出另一个点。流到格子中其他地方的电流很难确定, 但是流过相邻两个格点的电流可以很容易地知道。上面讨论的两个电流在这个电阻中相加, 即

有总电流 $I/2$ 流过它 (见图 S159.3)。

如果有 $I/2$ 的电流流过电阻 R , 那电阻两端的电势差为 $V = RI/2$ 。因此两个相邻格点之间的等效电阻为 $R_e = V/I = R/2$ 。

对于无穷大格子的电容和电感的等效值也可以用相似的方法计算, 得 $C_e = 2C$ 和 $L_e = \frac{1}{2}L$ 。

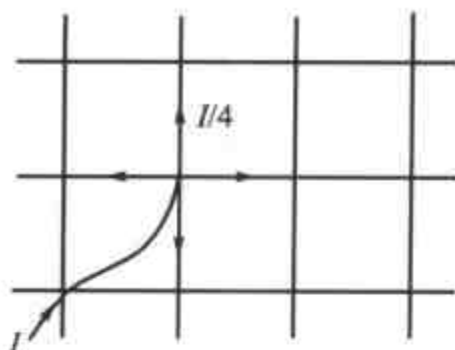
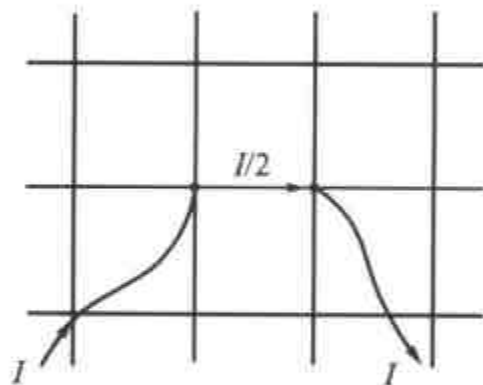


图 S159.1



见图 S159.3

题解 160

记正多面体的格点数为 c , 在一个格点处相遇的线的数为 n (例如, 在正十二面体时, $c=20$, $n=3$)。如果有 1 A 的电流流入某一个格点, 有 $1/(c-1)\text{ A}$ 的电流流出所有其他的格点, 那么, 由对称性, 在电流流入点相遇的每根线中的电流就是 $I=1/n\text{ A}$ 。

把由 1 A 电流流出初始点的相邻点, 而有 $1/(c-1)\text{ A}$ 的电流流入其他所有的点 (包括初始点) 所产生的电流分布叠加到前面的电流分布上去。有 $I=2/n\text{ A}$ 的电流流过“直接”电阻 (即直接连接相邻两个格点的电阻), 得到它两端的电势差为 $I=2/n\text{ V}$ 。因为, 流过整个电路的电流为 $I=1+1/(c-1)=c/(c-1)\text{ A}$, 等效电阻为

$$R_e = 2(c-1)/nc$$

这个数对正十二面体是 $19/30\ \Omega$, 对无穷大正方格子为 $1/2\ \Omega$ 。对任何规则的形状, 都可以类似地计算等效电阻。

题解 161

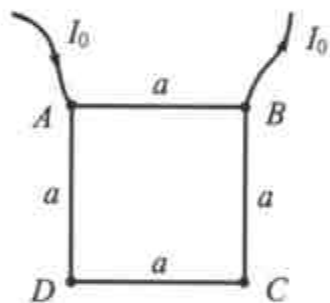
让我们把初始时格子的等效电阻记为 R_c^{orig} , 被挖去电阻后电路的等效电阻为 R_c^{trun} 。我们可以把初始时格子看作是两个电阻并联的电路: 两个电阻一个是 R_c^{trun} 一个是 R , 后一个就是被挖去的电阻。可以很容易地列出含有 R_c^{trun} 的方程, 也就是

$$R_c^{\text{orig}} = \frac{R \times R_c^{\text{trun}}}{R + R_c^{\text{trun}}} \quad \text{或} \quad R_c^{\text{trun}} = \frac{R \times R_c^{\text{orig}}}{R - R_c^{\text{orig}}}$$

例如, 无穷大二维正方格子的相邻两个格点之间的等效电阻为 $R_c^{\text{orig}} = R/2$ 。挖去电阻后的电路的等效电阻为 $R_c^{\text{trun}} = R$ 。

题解 162

叠加的“技巧”再次被使用, 用于结合分别讨论电流流入和流出两种情况。令 A 标记电流 I_0 流入的正方形的角, B 为邻近的电流流出的角。电势差 V 在另外两个角 (C 和 D) 间测量, 如图所示。



如果电流 I_0 在点 A 引入 (流向无穷远处的电势零点), 它会在充满介质的一半空间里以球对称分布 (半球形), 即距 A 点半径为 r 的处, 电流密度 $j(r)$ 为 $j(r) = I_0 / 2\pi r^2$ 。这个关系式对非常小的 r 不适用, 即 r 远远小于 A 处电极的大小。

欧姆定律的局域表示: 电流密度 j 可表示为电场强度 E 和局域的电阻率 ρ 的比, 也就是 $j(r) = E(r) / \rho$ 。

在半空间里的电场强度大小可以用下面的关系确定:

$$E(r) = \frac{I_0 \rho}{2\pi r^2}$$

势函数 (以及电势差) 可以由电场强度的积分来求出。不过, 在现在的情况下, 用一个简单的类比就可以得到。一个点电荷的电场反比于 r^2 , 它的电势反比于 r , 两个比例系数是相同的 (分别为 $E = kQ/r^2$ 和 $V = kQ/r$)。这意味着上面式子确定的电场强度所对应的电势场为 $V = I_0 \rho / (2\pi r)$ 。

越是靠近电流流入电极的点, 它的电势就越高。因此点 D 的电势 $V_D = I_0 \rho / (2\pi a)$ 高于点 C 的电势 $V_C = I_0 \rho / (2\sqrt{2}\pi a)$ 。两点之间的电势差为 $I_0 \rho (2 - \sqrt{2}) / (4\pi a)$ 。

接下来我们讨论电流 I_0 流出点 B 。和前面的情形几乎完全一样, 除了各个量 (电流、电流密度、电场强度和电势) 的符号要反号。在所考查的半空间里, 电势表示为函数 $V = -I_0 \rho / (2\pi r')$, 其中 r' 是离点 B 的距离。点 C 的电势低于点 D 的电势, 即点 D 又比点 C 高。两点之间的电势差与前面相同。



如果把前面两种情形叠加, 我们又回到了开始的问题, 点 C 和点 D 间的电势差正好是前面值的两倍, 即 $V_0 = I_0 \rho (2 - \sqrt{2}) / (2\pi a)$ 。除了所给的数据, 只有电阻率 ρ 出现在式子中。因此, 此问题的解为

$$\rho = (2 + \sqrt{2}) \pi a V_0 / I_0$$

注: 这个方法在实际生活中也有广泛运用, 例如来确定岩石的平均电阻率。测量工作自然不是在无穷大的半空间内进行, 但是的确是在体积和平面的尺度都远远大于正方形的边长 a 的情况下。

题解 163

首先把电池通过安培表连接到电阻两端, 然后把电压表也连接到电阻两端, 如图 S163.1。

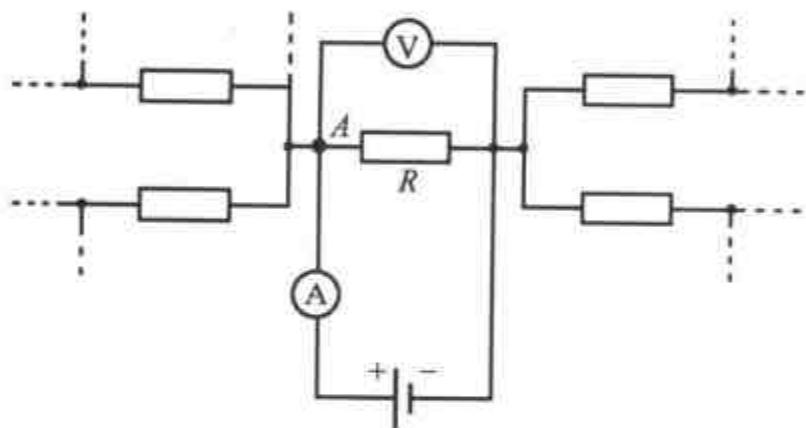


图 S163.1

认为测得电压和电流的比值就给出电阻值的想法太天真了, 因为我们不能确定从安培表在连接点 A 流入的电流全部通过了电阻 R , 而没有流到电路的其他部分。

使用短路的做法, 问题可以很容易地解决。我们可以用一根电阻为零的导线连接与 A 邻近的所有结点, 并连接到同一端, 即安培表与电池相连的一端, 如图 S163.2 所示。

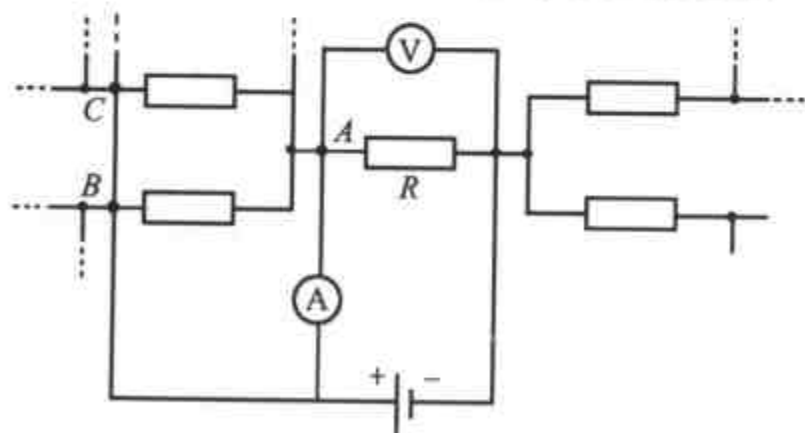


图 S163.2

当安培表的内阻可以忽略, 连接点 ($B, C, D \dots$) 和 A 都是等势点。因此, 没

有电流在它们之间流过，所有从安培表流过来的电流一定都流过电阻 R 。电池可能不得不向连接点 B, C, D, \dots 提供额外的电流，但这不会影响我们的测量。

注：如果电阻 R 是和其他电阻并联的，那么就没有办法来分别地测量这些电阻的阻值，除非能够找到它们的等效电阻。

题解 164

使电流 I 从立方体的一个端点流入，并从与它对角的另一个端点流出（见图 S164.1）。

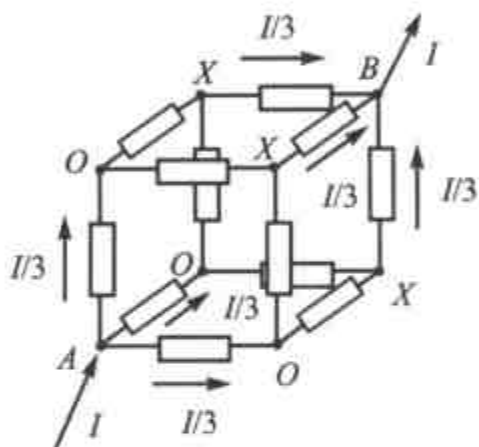


图 S164.1

一段直线，它的总电阻就是它本身，即 $1\ \Omega$ 。二维“立方体”是正方形。两个电阻在对角线的一端分开，在它的另一端又有两个电阻汇合。如果电流流过这个正方形，另一条对角线的两个端点是等势的。因此两组由两个电阻并联组成的单元是串联的关系。对正方形，等效电阻又是 $1\ \Omega$ 。就像我们已经看到的那样，对于一个三维立方体，从对角线的每一个端点分出

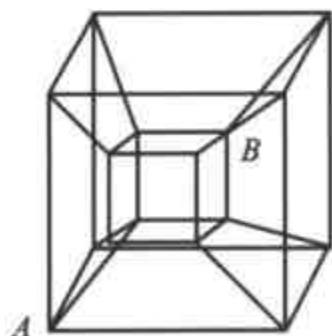


图 S164.3

三个电阻，把剩下的 6 个电阻连接就构成等势面。

一个四维的“立方体”由在第四维方向上用三维立方体并联取代，并连接上对应点得到。四维的“立方体”因此有 $12 + 12 + 8 = 32$ 条边（12 条是每个通常的立方体的，加上 8 是连接对应的各个角）。为了观察的方便，我们可以做一个四维“立方体”的变形的投影，如图 S164.2 所示，图中用放大替换了取代。图 S164.3 从 8 条对角线中，选了一条用 AB

由对称性可以预言，流过连接到对角线端点的三个电阻的电流都为 $I/3$ ，因此这些电阻两端的电压是相同的。这样，在图中标记为 O 和 X 的点集各自都是等势点的点集，即每个集合中的点可以连接起来而不会扰乱原来的系统。

当等势点被连接起来后，电路可以重画成如图 S164.2 所示的样子，用心算就可以得出等效电阻。如果每个电阻的阻值为 $1\ \Omega$ ，那么等效电阻为 $5/6\ \Omega$ 。

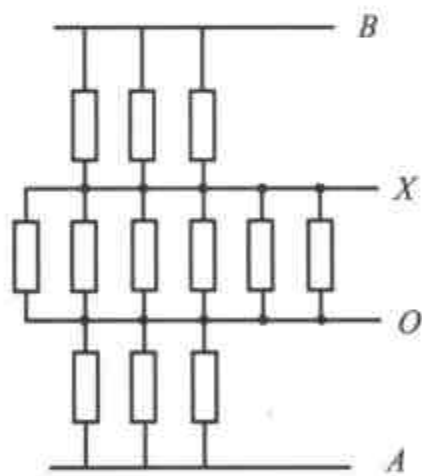


图 S164.2



表示在图中。

对一个四维的“立方体”，有四条线从任意一个顶点分出，且它们的端点是等势点。对角线的另一端也是一样。从一个等势面到另一个等势面的最短路径为通过剩下的 14 个电阻中的任意两个电阻。这表明 24 个电阻的内点也是等势点，即两组 12 个电阻内部是并联连接的，两个组是串联连接的。重画的电路见图 S164.4；等效电阻为 $2/3 \Omega$ 。

注：如果在连接等势点之后，电路可以分解为几组相同电阻的并联，而组与组之间的连接是串联，问题可以推广到 n 维的“立方体”。一般而言，由 1Ω 电阻组成的 n 维“立方体”的对角线的等效电阻为 $R_n \Omega$ ，其中 R_n 由下式给出：

$$R_n = \frac{1}{1 \binom{n}{1}} + \frac{1}{2 \binom{n}{2}} + \frac{1}{3 \binom{n}{3}} + \dots + \frac{1}{n \binom{n}{n}}$$

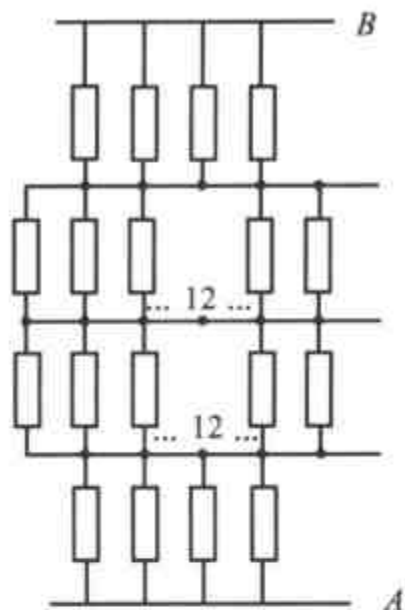
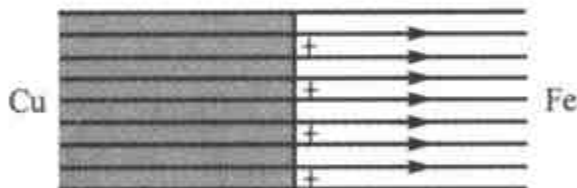


图 S164.4

题解 165

令流入导线的电流为 I ，导线的截面积为 A ，金属的电阻率分别为 ρ_1 和 ρ_2 。用导线长度 l 表示欧姆定律得到 $V = I\rho l/A$ ，由此得到导线中的电场强度 $E = V/l = \rho I/A$ 。



铜的电阻率比铁的电阻率低，因此电场强度一定在铜中较小，在铁中较大。根据高斯定理，电场强度的不同意味着在两种金属的边界上有一个电荷的积累（见图）。净的累积电荷为

$$Q = \epsilon_0 A (E_{\text{Fe}} - E_{\text{Cu}}) = \epsilon_0 I (\rho_{\text{Fe}} - \rho_{\text{Cu}})$$

很有意思的是，这个量只依赖于电流和材料的常数，而与导线的截面积无关。

把所知的量代入，可得到电量为 $Q \approx 5 \times 10^{-21} \text{ C}$ ，只有基本电荷的 $1/30$ ！尽管有宏观可测的电流流过导线，但累积电荷却只占微观基本电荷的一个很小的比例。这个奇怪的结果表明经典的电动力学（想像由许多小球携带着电荷）不能总是正确地描述电学现象。只有运用更为精细复杂的量子理论的规律和统计物理，才能给出准确的描述。

题解 166

在国际单位制中, 飞机的速度为 200 m/s。

(i) 磁场方向竖直向下, 感生电压为 $80 \times 6 \times 10^{-5} \times 200 = 960$ (mV), 右翼的翼尖为较高电势。

(ii) 飞机的运动方向与磁场的方向平行, 因此没有电势差产生。

(iii) 因为场是个磁偶极子, 它在赤道的强度是在极点的一半。磁场方向是水平的, 感生电压为, $8 \times 3 \times 10^{-5} \times 200 = 48$ (mV), 飞机的底部为较高电势。

(iv) 竖直的磁感应强度为 $5 \times 10^{-5} \sin 66^\circ \text{T}$, 速度的向北的分量为 $200/\sqrt{2}$ m/s, 引起机翼两端 520 mV 的电势差, 以右翼的翼尖为较高电势。同样, 一个大小为 23 mV 的电势差在机身的上部 (较高电势) 和底部之间产生。

题解 167

196

令导体棒以速度 v 和加速度 a 沿斜面运动, 此时电流 I 流过导体棒。由楞次定律, 磁场阻碍棒的运动, 棒的运动方程为

$$ma = mg \sin \alpha - BlI$$

这个方程在三种情况下都是相同的。感生电压和流过导体棒中的电流的关系不同导致了不同的结果。

(i) 如果电路由一个欧姆电阻 R 来闭合, 电流 I 和感生电压 $V = Blv$ 由式 $I = V/R = Blv/R$ 联系起来。这说明阻力以正比于速度的方式增加, 导致棒的加速度逐渐减小, 最终棒会以一个恒定的速度运动。这个最终的最大速度 v_{\max} 可以由运动方程中的 $a = 0$ 的情况求出,

$$v_{\max} = \frac{mgR \sin \alpha}{B^2 l^2}$$

(ii) 如果电路以一个电容为 C 的电容来闭合, 感生电压和电流的关系就不同了。电容上的电荷由感生电压决定, 由下式给出,

$$Q = CV = CBlv$$

注意流过导体棒的电流就等于上式的时间导数, 即

$$I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt} = CBl \frac{dv}{dt} = CBla$$

换句话说, 流过棒的电流直接正比于棒的加速度。如果把上面的电流的表示代入运动方程, 可以发现棒是以恒定加速度在导轨上运动的

$$a = \frac{mg \sin \alpha}{m + B^2 l^2 C}$$



电磁感应减小了由重力产生的加速度，实际上，是增加了导体棒的惯性质量。棒的速度和电容上的电荷都正比于经过的时间。

(iii) 如果电路以一个电感为 L 的线圈来闭合，感生电压和电流的关系为

$$L \frac{dI}{dt} = B\ell v = B\ell \frac{dx}{dt}$$

我们注意到，因为在运动开始时，有 $I = 0$ 和 $x = 0$ ，上面的公式表示电流正比于 x 轴坐标， $LI = B\ell x$ 。在运动方程中代入此电流关系，得

$$ma = mg \sin \alpha - \frac{B^2 \ell^2}{L} x$$

因此作用在棒上的力为一个常数项和一个负的正比于位移的项之和。这和一个物体悬挂在弹簧上然后释放的运动方程相同。这样，棒在一平衡位置附近做简谐振动。

$$x_0 = \frac{mgL \sin \alpha}{B^2 \ell^2}$$

振动的振幅为 $A = x_0$ ，棒的位移和时间的函数为

$$x(t) = A(1 - \cos \omega t)$$

其中 $\omega^2 = \frac{B^2 \ell^2}{mL}$ 。

题解 168

(i) 在电容被连接上的瞬间，有 $I = V_0 / R$ 的电流开始流过导体棒，棒受到的力为 $F = B\ell I$ ，初始的加速度为 $a = B\ell V_0 / mR$ 。根据楞次定律，运动导体棒产生的感生电压导致感生电流流过导体棒来阻碍运动。电容上的电荷 Q 减少，因此电容两端的电压也减小。同时，棒上的感生电压增大，直到两个电压彼此抵消。此时，导体棒以下式给出的它的最大速度继续运动

$$B\ell v_{\max} = \frac{Q_{\min}}{C} \quad (1)$$

棒的运动方程为

$$m \frac{dv}{dt} = ma = B\ell I = -B\ell \frac{dQ}{dt}, \quad (2)$$

其中，加速度和电流分别被表示成速度和电荷的变化率。两个变化率之间的比例一直不变。棒的速度从零一直增加到 v_{\max} ，同时电容上的电荷从 $Q_0 = CV_0$ 减少到 Q_{\min} 。因此方程 (2) 可以写成

$$mv_{\max} = B\ell(Q_0 - Q_{\min})$$

最终速度和电容上的剩余电荷可以用方程 (1) 和 (2) 求出，

$$v_{\max} = \frac{BlCV_0}{m + B^2\ell^2C} \quad \text{和} \quad Q_{\min} = \frac{B^2\ell^2C^2V_0}{m + B^2\ell^2C}$$

(ii) 上面的关系式表明棒的最大速度是正比于电容上的初始电压 V_0 。这样，棒的最终动能就正比于 V_0^2 (对已给定值的 C 和 m)，即正比于系统的初始能量。比例系数可以看成是装置的效率 η (看成是电磁枪)，可以写成以下形式：

$$\eta = \frac{\frac{1}{2}mv_{\max}^2}{\frac{1}{2}CV_0^2} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{m}}{Bl\sqrt{C}} + \frac{Bl\sqrt{C}}{\sqrt{m}}\right)^2}$$

括号中两项的乘积为 1，且由算术平均和几何平均的不等式，可得到它们的和不小于 2。这意味着电磁枪的效率不能大于 25%。

注：如果把得到最大效率的条件 $m = CB^2\ell^2$ 被代入电容上剩余电荷的表达式，我们得到 $Q_{\min} = V_0C/2$ ，即电容上初始电荷的一半被留下来。这样，只有四分之一电容的初始能量留下来；还有四分之一的能量转化为导体棒的动能，而其他的二分之一被导体棒以焦耳热的形式损耗掉了。

题解 169

(i) 磁场能量 ($E_{\text{magn}} = LI^2/2$) 的增长率为电池的输出功率和电阻的耗散功率之差，

$$\frac{dE_{\text{magn}}}{dt} = VI - RI^2 = -R\left(I - \frac{V}{2R}\right)^2 + \frac{V^2}{4R} \leq \frac{V^2}{4R}$$

很清楚，当 $I = V/(2R)$ 时，增长率最大。

(ii) 当开关闭合后，可以写出电路的基尔霍夫定律如下

$$V = IR + L\frac{dI}{dt},$$

这给出了电流—时间的关系 (见图 S169.1)

$$I = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right),$$

由于焦耳热电阻所损耗的功率为

$$P = RI^2 = \frac{V^2}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)^2$$

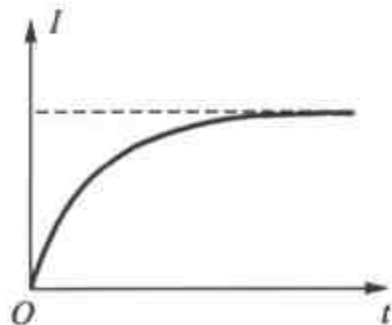


图 S169.1

图 S169.2 是一个功率—时间的简图，表明功率单调地增加。同时功率的变化率开始时增加，然后达到一个最大值，在这点之后单调地减小到零，如图 S169.3 所示。

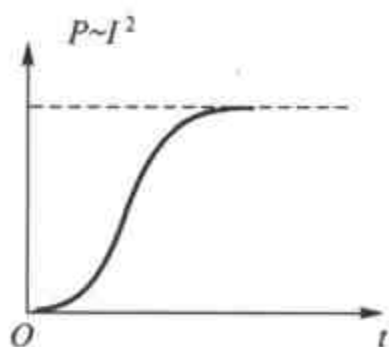


图 S169.2

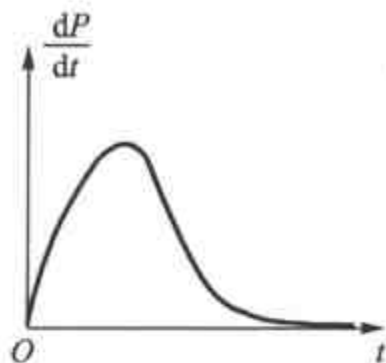


图 S169.3

对电感和电阻两者而言，最快的能量变化率均发生在 I^2 变化最快的地方。在 (i) 的分析中，我们发现这是发生在 $I = V/2R$ 时。把 I 的这个值代入上面功率的表达式，得到其发生在 $e^{-Rt/L} = 1/2$ 时，因此 $t = (L/R) \ln 2 \approx 0.69(L/R)$ 。

注：(i) 电池的能量损耗率是 VI ，正比于电流，是单调增长。

(ii) 电流的最快增长发生在 $t=0$ 的时候，但是对 I^2 （正比于线圈中的磁场）要晚一些。

(iii) 有兴趣的话，你还可以解一下这道题目的孪生兄弟：把电路中的电感用电容替代。

题解 170

(i) 这些电路若用微分方程来分析的话很难处理，但用复阻抗表示就变得简单了。一个电感为 L 的电感在某个角频率 ω 的复阻抗为 $i\omega L$ ，同时一个电容为 C 的电容的复阻抗为 $1/i\omega C$ 。这里 i 是 -1 的平方根，即 $i^2 = -1$ ；合成复阻抗是和用 R_1 和 R_2 串联 [$R = R_1 + R_2$] 以及 R_1 和 R_2 并联 [$R = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$] 相同的法则。

电路 (a) 有总的复阻抗

$$Z = \frac{i\omega L \times i\omega L}{i\omega L + i\omega L} + \frac{(1/i\omega C) \times (1/i\omega C)}{(1/i\omega C) + (1/i\omega C)} = \frac{i\omega L}{2} + \frac{1}{2i\omega C} = \frac{1 - \omega^2 LC}{2i\omega C}$$

因此，当 LC 表示为 ω_0^{-2} ， ω/ω_0 表示为 x ，从电源汲取的电流的大小为

$$|I| = \frac{|V_0|}{|Z|} = \frac{V_0 |2i\omega C|}{|1 - \omega^2 LC|} = CV_0 \omega_0 \frac{2x}{|1 - x^2|}$$

这已经在图 S170.1 (a) 中画出。可以看到，理论上，电流可以在接近时无限增长；实际上，电源无法提供这样的电流。在任何情况下，真实的电感和电容总不为零的电阻，因此图 S170.1 (a) 中所计算的峰为有限的振幅。

同样的，电路 (b) 的复阻抗为

$$Z = \frac{i\omega L \times (1/i\omega C)}{i\omega L + (1/i\omega C)} + \frac{i\omega L \times (1/i\omega C)}{i\omega L + (1/i\omega C)}$$

导致

$$|Z| = \frac{2\omega L}{|1 - \omega^2 LC|} \quad \text{和} \quad |I| = \frac{CV_0\omega_0|1 - x^2|}{2x}$$

这个在图 S170.1 (b) 中画出。可以注意到在 $\omega = \omega_0$ 时电路有一个无限的复阻抗，没有电流流出。同样很有趣的是，在图 S170.1 (a) 和 (b) 中对 x 的依赖关系互为倒数函数。

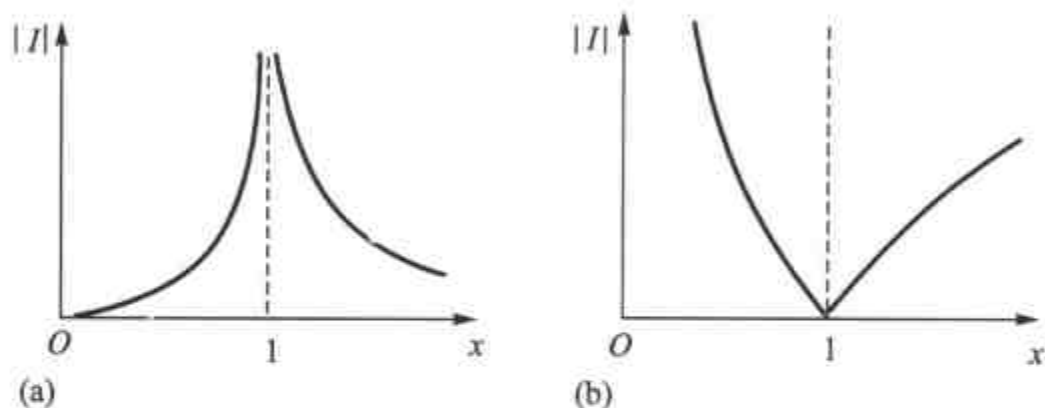


图 S170.1

(ii) 用电感为 L 、 $2L$ 、 $L/2$ 的电感，电容为 C 、 $2C$ 、 $C/2$ 的电容，按需要把相同元件串联或并联组成电路，使电路在 ω/ω_0 、 $\omega_0/2$ 、 ω/ω_0 、 $\omega_0/\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{2}\omega_0$ 产生共振。如图 S170.2 所示，其中的两种情况有两个备选方案。

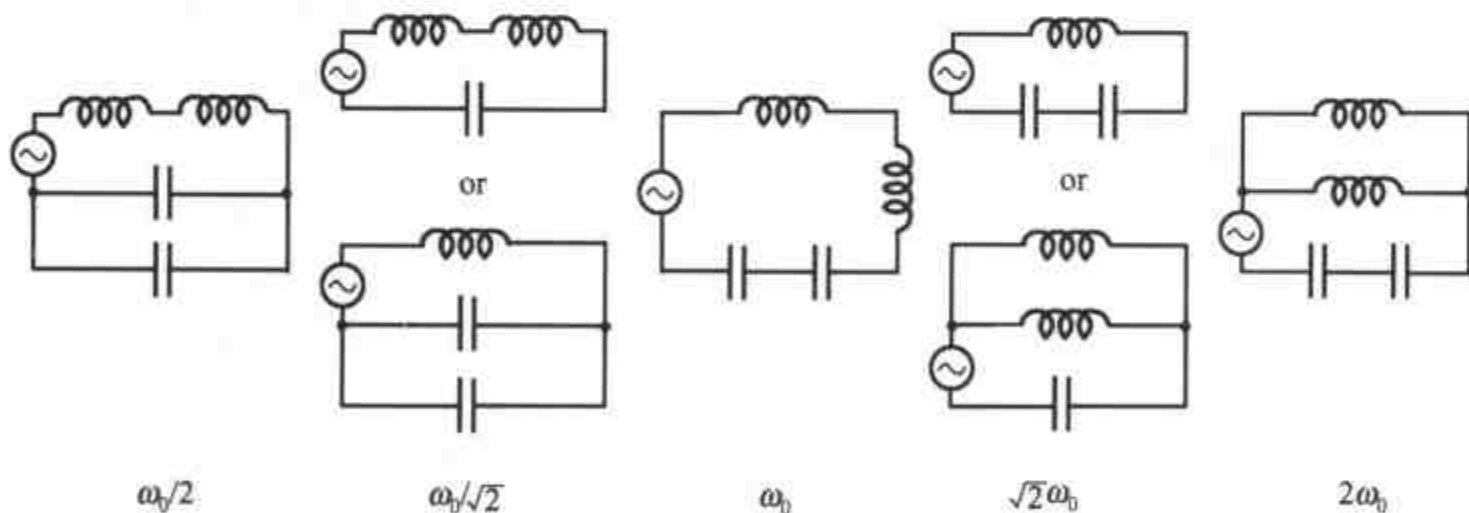


图 S170.2

题解 171

当电键闭合时，流过电路的电流如图 S171.1 所示。

在电键打开后的瞬间，流过每个线圈的电流实际上没有改变；如果不是这样，就



会有一个磁通量的快速变化，从而在线圈中感应出一个非常高的电压。因此电流 I 和 $2I$ 继续流经线圈，这决定了流过灯的电流（见图 S171.2）。

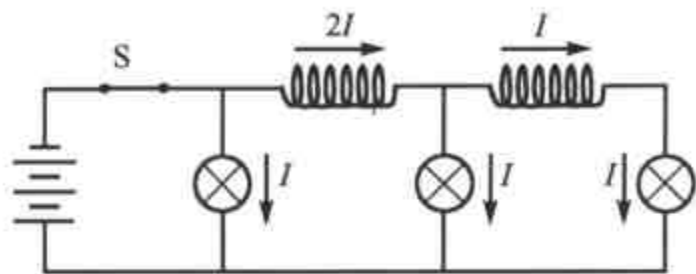


图 S171.1

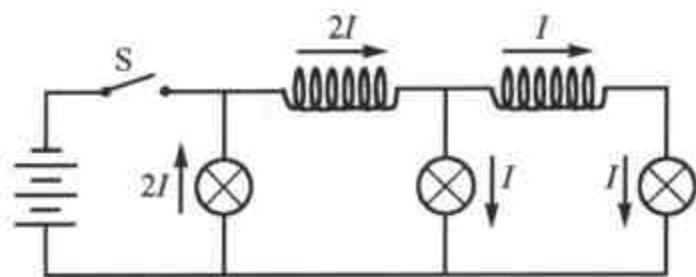


图 S171.2

这意味着靠近电键的灯突然闪亮了一下，但是其他两个灯的亮度没有改变。这都发生在极短的时间里，之后三个灯都暗淡然后熄灭。

题解 172

被充满的空间的截面积是确定的，同时导线的截面积随 d^2 变化。这样 $n \propto d^{-2}$ 。一圈的电阻正比于导线的截面积，即随 d^{-2} 变化，因此螺线管上单位长度的电阻为 $R \propto nd^{-2} \propto d^{-4}$ 。磁感应强度 B 则正比于 nI ，因此所需电流为 $I \propto n^{-1} \propto d^2$ 。单位长度的热损耗为 RI^2 ，正比于 $d^{-4}(d^2)^2$ ，即不依赖于 d 。这样，考虑到热损耗，（在限度之内）不管怎样选择导线直径都没有关系。

题解 173

描述使得自由电子在圆轨道（在圆柱体内部）上运动的力的方程为

$$eE \pm er\omega B = mr\omega^2$$

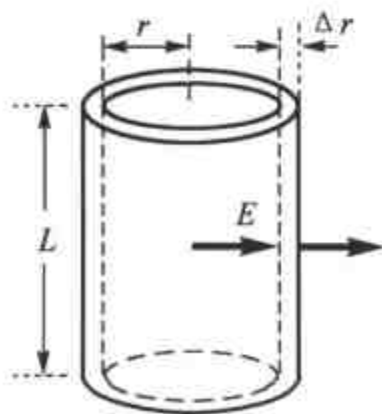
其中 e 为电子的电量， m 是它的质量， r 是它离旋转轴的距离， E 是由电荷分布在圆柱体中所产生电场的电场强度。±符号表示洛伦兹力可以指向外或指向里，依赖于圆柱体的旋转。重新整理运动方程，得

$$E = \left(\frac{m\omega^2}{e} \pm \omega B \right) r \equiv Kr$$

表明电场强度直接正比于半径。

使用高斯定律，可以求出圆柱体中的电荷密度。考虑薄的圆柱体外壳，并记离轴 r 处的电荷密度为 $\rho(r)$ 。大小为 $2\pi rLE(r)$ 的电场通量进入外壳， $2\pi(r+\Delta r)LE(r+\Delta r)$ 的电场通量从外壳出来。

根据高斯定律



$$K(r+\Delta r)2\pi(r+\Delta r)L - Kr2\pi rL = (1/\epsilon_0)\rho 2\pi r\Delta rL$$

由此可以得到

$$\rho = \frac{2\epsilon_0\omega m}{e} \left(\omega \pm \frac{eB}{m} \right)$$

对圆柱体中的电荷密度，注意它依赖于 r 。

电荷密度可以是正的、负的或零，这依赖于磁场和角速度的大小和方向。如果 $\omega = |e|B/m$ ，电荷密度为零。对于这种情况，由于洛伦兹力提供的向心力刚好就是维持圆周运动所需的力，圆柱体中的正电荷和负电荷并没有分开。

注：为了得到题中所涉及各物理量大小的数量级的概念，假设磁场在赤道附近可以与地球的磁场相比，即 $B=3\times 10^{-5}\text{ T}$ 。零电荷密度对应于角速度 $\omega = eB/m = 5.3\times 10^6\text{ s}^{-1}$ ，这相当于每分超过 5 千万转！这样快速的旋转实际上无法实现，因为没有物质可以经受这样的运动。

题解 174

202

在转动参考系 κ' 中任意点的电荷分布，是和实验室（惯性）参考系 κ 中的相同，因为电荷密度正比于单位体积中的电子数目，而很清楚无论数目还是体积都是不变的。这样就得到在转动参考系中电荷的分布是均匀的，且等于

$$\rho' = \rho = 2\epsilon_0 \left(\pm B\omega + \frac{m\omega^2}{e} \right) \approx \pm 2\epsilon_0 B\omega$$

作用在一个带电粒子上的力 F 在两个参考系中一定是相同的（正如用弹簧的伸长来测量力的大小不依赖于参考系的事实所证明的那样）。因此 $F' = F$ 。

在随圆柱体旋转的参考系中，金属中的自由电子是静止的，这样作用在它们上的合力一定为零（除非它们可以运动）；如果离心力可以忽略，那么电场一定也为零（ $E' = 0$ ）。此外，

$$Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = F = F' = Q[\mathbf{E}' + (\mathbf{v} + \mathbf{v}_{\text{相对}}) \times \mathbf{B}']$$

其中 $\mathbf{v}_{\text{相对}}$ 是两个参考系的相对速度，它在圆柱体上的各点不同。回想到 $E = \omega Br$ ，并注意到 $\mathbf{v}_{\text{相对}} \times \mathbf{B}'$ 指向径向，大小为 $\omega Br'$ ，我们可以推出磁场是（矢量的）在两个参考系中相同的，即 $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$ 。由此推出在转动参考系中，电荷可以单独存在而没有与之相联系电场，如图 S174.1 所示。

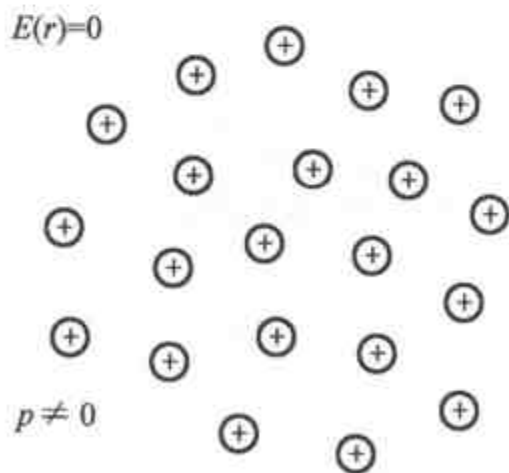


图 S174.1



类似地，可以证明在均匀磁场中旋转的观察者的参考系中，尽管没有电荷存在，但存在一个非均匀的电场（如图 S174.2）。

这将意味着高斯定律（电通量和产生电场的电荷之间的联系）在转动参考系中不再被遵守。这个令人惊讶的结果即使在低速（非相对论）运动下也不得不考虑。

题解 175

把这个问题考虑成一个一维问题是个错误。杰克所计算的感生电场的大小是正确的 [$E(r) = rB\omega$]，但是在旋转的辐条中的电场矢量并不平行于辐条；矢量方向是沿

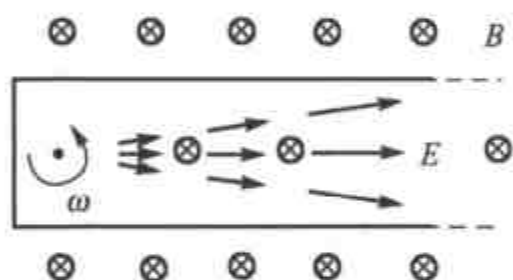


图 S175.1

径向的，如图 S175.1 所示。这意味着在圆柱形棒的弯曲表面上，电通量不为零。此外，如下面所显示的，对于一个基本的圆柱体，通过它表面的总的电通量在大小上等于通过它朝外一端的电通量。竟然有一半的电通量从圆柱体的弯曲表面逃出，这也许是很令人奇怪的。

正确的结果可以用高斯定律来求出。适当的

高斯面如图 S175.2 所示。总电通量为

$$\begin{aligned}\Psi &= E(r + \Delta r)h(r + \Delta r)\theta - E(r)hr\theta \\ &= B\omega h\theta[(r + \Delta r)^2 - r^2] \approx 2Bh\omega\theta r\Delta r\end{aligned}$$

我们可以把它和电荷密度用关系

$$\Psi = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \Delta V = \frac{\rho hr\theta\Delta r}{\epsilon_0}$$

联系起来，此关系给出一个和吉尔结论相同的 ρ 值。

注：电荷密度的符号既可正可负，依赖于转动和磁场的方向。在辐条中的电荷分布是均匀的，但是辐条上的净电荷是零，因为辐条表面上有等量的反号的电荷。表面上的分布十分复杂，不能用基本的方法来得到。

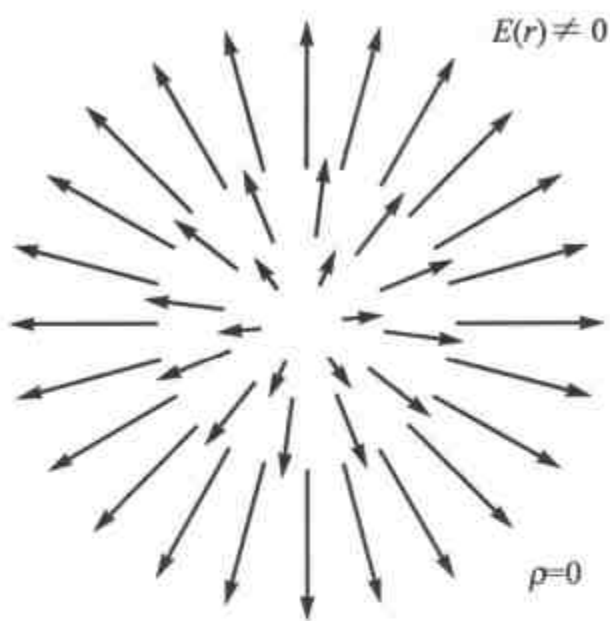


图 S174.2

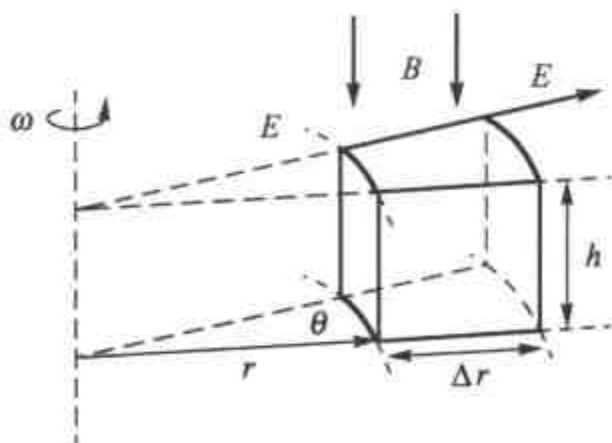


图 S175.2

题解 176

把地球的磁场分解为水平和竖直两个分量。竖直分量没有在圆环中感应出电流，因为它通过圆环的通量总是为零。记磁场的水平分量为 B ，圆环的角速度为 ω 。穿过圆环的磁通量为

$$\Phi = \pi r^2 B \cos \omega t$$

感生电压为 $V = -(\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t) = \pi r^2 B \omega \sin \omega t$ 。在圆环中流动的电流

$$I = \frac{V}{R} = \frac{r^2 \pi B \omega}{R} \sin \omega t$$

在圆环的中心感应出一个磁场，大小为

$$B_1 = \mu_0 \frac{1}{2r} = \mu_0 \frac{\pi r B \omega}{2R} \sin \omega t$$

磁场 B_1 的方向垂直于圆环所在平面，并跟随圆环转动。分解矢量 B_1 ，得到一个平行于 B 的分量和一个垂直于它的分量。平行分量正比于 $\cos \omega t \times \sin \omega t = \frac{1}{2} \sin 2\omega t$ ，其对时间的平均为零。垂直分量可以写成

$$B_{\perp} = \mu_0 \frac{\pi r B \omega}{2R} \sin^2 \omega t = \mu_0 \frac{\pi r B \omega}{4R} (1 - \cos 2\omega t)$$

这个表达式包括一个随时间（相对较快）变化的、平均值为零的项，和一个常数项导致小磁针从初始位置（南北指向）产生 $\alpha = 2^\circ$ 的偏离。因为磁针的指向和（平均的）总磁场的方向相同，

$$\tan \alpha = \frac{B_{\perp}}{B} = \mu_0 \frac{\pi r \omega}{4R}$$

磁针会在上面的位置附近做小振动，振幅大小由磁针的力学和磁学性质和阻尼力所决定。

注意一个有趣的现象，磁针的偏离不依赖于地球磁场的大小。惟一重要的是地球磁场的水平分量不为零。圆环的电阻可以从上面的公式计算得到，结果为 $1.78 \times 10^4 \Omega$ 。

题解 177

用提示中定义的电流 I 和 i ，所求的电压表示数由 RI 给出。在两种情况下，运用基尔霍夫定律得到方程：

$$RI + \frac{\theta}{2\pi} r(I+i) = \frac{1}{2} a^2 \dot{B} \lambda$$



$$ri + \frac{\theta}{2\pi} rI = \pi a^2 \dot{B}$$

在情形(a)中, 联立方程组的解显示 I 为零, 并以此得到电压表的示数为零。

在情形(b)中, $\lambda = \theta - \sin \theta$, 通过简单的但有点冗长的代数计算可得电压表示数为

$$|V| = \frac{2\pi^2 R a^2 \dot{B} \sin \theta}{4\pi^2 R + r\theta(2\pi - \theta)}$$

题解 178

考虑两个半径为 $R = L / 2\pi$ 的相互接触的圆盘, 如图 S178.1 所示。

如果圆盘的平面垂直于均匀的强度随时间均匀变化的磁场, 在围绕圆盘边缘的导线中的感生电压为

$$V = 2\pi R^2 \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

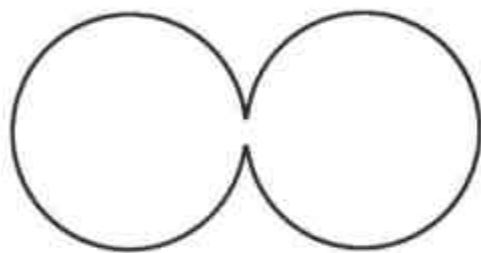


图 S178.1

现在把右边的圆盘绕它的对称轴 e 扭转 (图 S178.2 (a))。并使它的朝上的一面 (黑的) 变成朝下 (图 S178.2 (b))。再把这个圆盘扭转 180° , 这次是绕轴 t (图 S178.2 (c))。这一切完成之后, 两个圆盘的黑的一面都在上面, 它们的周长正好是题中的莫比乌斯带的周长。

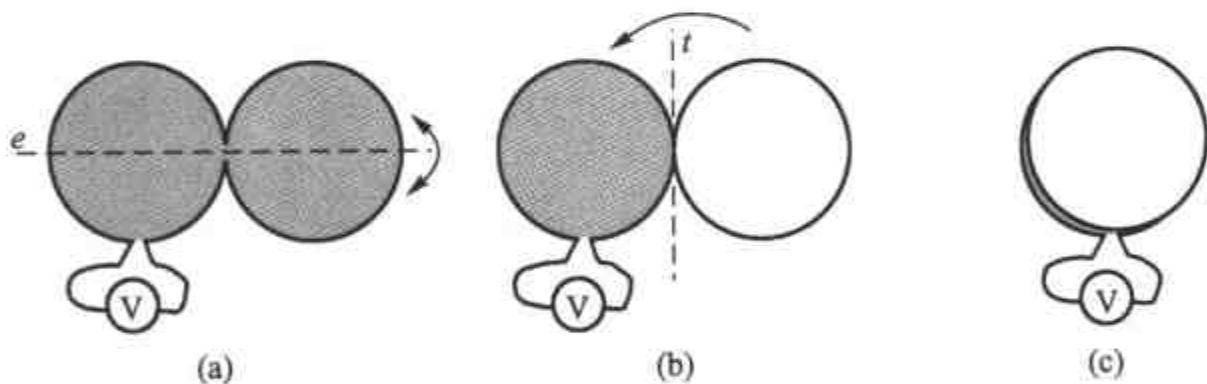


图 S178.2

这样, 当把纸带放入一个均匀变化的磁场时, 电压表读数为

$$V = 2\pi R^2 \frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{kL^2}{2\pi}$$

这个值远远大于人们简单地以纸带的面积来考虑所得到的预想值。覆盖莫比乌斯带表面 (单面的) 的面积并不等同于纸带的面积, 实际上, 相对于狭窄的纸带, 这个面积要远远超出!

感生电压也可以由下面的方法计算出来, 把导线在“扭转点”切开使之成为两个单圈的“螺线管”, 并把每个圈中产生的感生电压 (考虑它们的方向) 代数值做相加。

在现在的情形下，两个圈的方向是相同的，因此把一个圈中的电压 $V_0 = k\pi R^2$ 加倍就给出总电压 $V = 2V_0$ 。

题解 179

在 t 时刻外边螺线管中的电流为 $I = kt$ ，在里边的螺线管中的电流为 $2I = 2kt$ ，其中 k 是一个常数。由这些电流产生的磁场在外边螺线管中为 $B = \mu_0 nkt$ ，而在里边螺线管中为 $3B$ ，其中 n 为单位长度上螺线管的圈数。由半径为 r 的粒子轨道所包围的磁通量为

$$\Phi = \pi R^2 \times 2B + \pi r^2 \times B = (2R^2 + r^2) \pi \mu_0 nkt$$

感生电场的大小可以从磁场随时间的变化率计算得出

$$E \times 2\pi r = \frac{d\Phi}{dt} = (2R^2 + r^2) \pi \mu_0 nk$$

因此

$$E = \frac{(2R^2 + r^2) \mu_0 nk}{r} \frac{1}{2}$$

带电粒子由磁场限制在它的圆形轨道上，因此，从作用在它上面的力的总的径向分量为零，我们可以得到

$$\frac{mv^2}{r} = qvB \quad (1)$$

根据公式 $ma_t = qE$ ，粒子由合力的切向分量沿着它的圆形轨道加速，其中 m 是质量， q 是粒子的电荷。

当电场的大小恒定时，粒子的速度随时间均匀地增加，

$$v = a_t t = \frac{qE}{m} t = \frac{(2R^2 + r^2) \mu_0 nk}{r} \frac{q}{2m} t$$

把上式和 B 的值代入方程 (1)，我们得到

$$\frac{m}{r} \frac{(2R^2 + r^2) \mu_0 nk}{r} \frac{q}{2m} t = q \mu_0 nkt$$

满足上式的条件为

$$\frac{(2R^2 + r^2)}{r^2} = 1 \quad \text{即} \quad r = \sqrt{2}R$$

题解 180

变化的磁场在圆环中感生出一个电场。让我们想像把圆环分成每段长度为 Δs 的



小段, 并记感生电场的切向分量为 E_t (在一般情况下 E_t 可以点点不同)。圆环的每一小段的电量为

$$\Delta Q = Q \frac{\Delta s}{2\pi r}$$

其中 r 是圆环的半径。作用在它上面的力为

$$\Delta F_t = \Delta Q E_t$$

所产生的力矩为

$$\Delta \tau = r \Delta F_t$$

这样圆环受到的总力矩为

$$\tau = \sum \Delta \tau = \sum r Q \frac{\Delta s}{2\pi r} E_t = \frac{Q}{2\pi} \sum E_t \Delta s$$

定义表示式 $\sum E_t \Delta s$ 为沿圆环的感生电动势, 它正比于磁感应强度的变化率, 我们得到

$$\sum E_t \Delta s = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -\pi r^2 \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

圆环的转动惯量为 $I = mr^2$, 由于力矩的作用, 圆环开始以角加速度 α 旋转。在时间间隔 Δt 内, 它的角速度变化了

$$\Delta \omega = \alpha \Delta t = \frac{\tau}{I} \Delta t = \frac{Q}{2\pi} \left(-\pi r^2 \frac{\Delta B}{\Delta t} \right) \frac{1}{mr^2} \Delta t = -\frac{Q}{2m} \Delta B$$

因为磁感应强度从零变到 B , 圆环最终的角速度将为

$$\omega = -\frac{QB}{2m}$$

注: (i) 负号表示 Q 若是正的, 角速度矢量的方向与磁感应强度的方向相反。

(ii) 可以注意到有趣的一点是, 最终的角速度不依赖于圆环的半径、磁感应强度变化的时间, 甚至磁感应强度随时间增加的方式。

(iii) 计算中忽略了转动的圆环所产生的磁场。

(iv) 除了在圆柱形对称均匀磁场的情况之外, 找到真实的在圆环中感生电场的值是不可能的, 因为磁场的几何结构是未知的, 而且我们不知道圆环在磁场中的位置。我们可以确定总的感生电动势, 但不是电场本身。

题解 181

总磁场是地球磁场和线圈磁场的和, 分别记为 B_0 和 B , 即

$$B' = B_0 \pm B \quad (1)$$

流过线圈的电流由感生电压 V_i 和电阻 R 决定,

$$I = \frac{V_i}{R} = B' \frac{r^2 \omega}{2R} \quad (2)$$

其中感生电压是从圆盘半径切割磁力线的速度计算出来的。由线圈产生的磁场为

$$B = \mu_0 n I \quad (3)$$

从上面的三个方程, B 、 B' 和 I 可以很容易确定。在方程 (1) 中的两个符号是考虑了角频率的正负值。如果线圈的磁场与地球的作用在同一方向上, 就取 ω 的值为正。下面的结果是总磁场和电流

$$B' = \frac{2RB_0}{2R - \mu_0 n r^2 \omega} \quad \text{和} \quad I = \frac{B_0 r^2 \omega}{2R - \mu_0 n r^2 \omega}$$

如预计的那样, 当圆盘静止时, 电流为零, 线圈中的总磁场简单地就是地球的磁场 B_0 。

当转动方向使线圈的磁场和外磁场相反时 ($\omega < 0$), 总磁场随着圆盘的 (负的) 角频率增加而减小并渐趋于零。在这种高转速下, 线圈中的电流趋向 $-B_0/\mu_0 n$ (抵消地球磁场所需要的值)。

反向转动的圆盘 ($\omega > 0$), 导致了总磁场的增加。这使得更高的电压被感应出来以及更大的电流流过, 这又反过来导致磁场更多的增加。在这些正反馈的条件下, 磁场和电流都会在接近某个特定的“临界”角频率 $\omega_{\text{crit}} = 2R/(\mu_0 n r^2)$ 时, 趋向于无穷大, 如图 S181.1 所示。这样的状态显然实际上是不能实现的。如果角频率增加得太多, 电流和线圈产生的热会不断增加直到导线被烧掉!

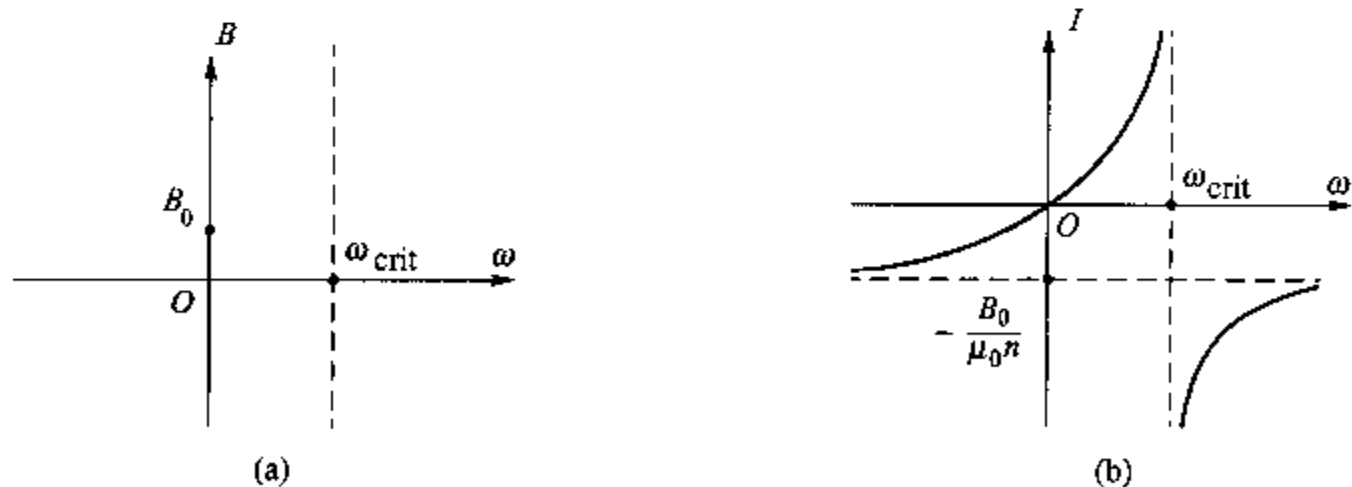


图 S181.1

如果考虑到线圈中的电流和总磁场的关系, 如图 S181.2 所示, 系统的奇怪行为就可以比较容易地被理解了。根据方程 (2), I 正比于 B' , 其比例系数就依赖于 ω 。



这可以用从原点出发的一条直线表示, 直线的斜率正比于 ω 。方程(1)和(3)表明 $B' = B_0 + \mu_0 n I$; 这也是一个线性关系, 但是它的图像并没有通过原点。

后者得斜率为 $1/(\mu_0 n)$, 不依赖于 ω 。两条直线的交叉点决定了真实的电流和总磁场。如果 $\omega = \omega_{\text{crit}}$, 那么两条直线的斜率是相同, 方程无解。实际上, 临界角频率如此之高, 以至于在实际中即使接近也是不可能的。

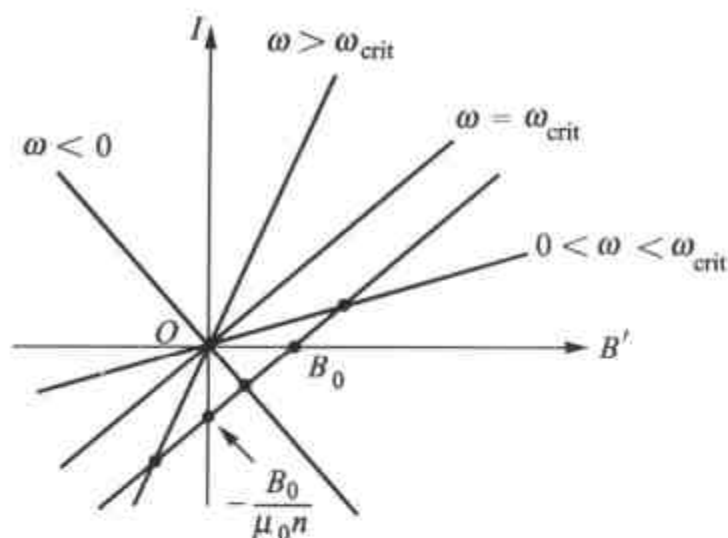


图 S181.2

线圈所放出的焦耳热必须等于转动圆盘所做的机械功。电功为 $P_{\text{电}} = I^2 R$, 然而每秒所做机械功为力矩和角频率的乘积, $P_{\text{机械}} = M\omega = B' I r^2 \omega / 2$ 。(力矩 M 由作为力 $B' I r$ 和从轴到力的作用线的平均的垂直距离 $r/2$ 的乘积求得。)运用 B' 和 I 的关系, 就可以直接证明 $P_{\text{电}} = P_{\text{机械}}$ 。

本问题中所描述的这个奇怪的装置称为单极电机。

题解 182

在圆环的位置的总磁通量由外磁场的磁通量和自感效应的磁通量组成,

$$\Phi = B_z \pi r_0^2 + LI$$

磁场的任何变化都会按下式在圆环中感应出电流:

$$RI = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

然而, 因为超导圆环的电阻为零, 这项必须为零。因此, 通过圆环的磁通量必须为常数, 即

$$\Phi = B_0(1 - \alpha z) \pi r_0^2 + LI = \text{常数}$$

从初始条件($z = 0, I = 0$), 可得常数的值为 $\Phi = B_0 \pi r_0^2$ 。

在圆环中的电流可以用上面的方程确定, 得

$$I = \frac{1}{L} B_0 \alpha \pi r_0^2 z$$

作用在圆环上的洛伦兹力(由于系统的对称性而只能是竖直的)可以表示为

$$F_z = -B_r I(z) 2\pi r_0 = -B_0 \beta r_0 \frac{1}{L} B_0 \alpha \pi r_0^2 2\pi r_0 z = -kz$$

这样洛伦兹力直接正比于圆环的竖直位移, 比例系数可以从所给的数据算出。(这

个结果只对小位移有效，因为对大位移由所给公式来表示磁感应强度是不够的。) 圆环的运动方程为

$$ma_z = F_z - mg = -kz - mg$$

这意味着圆环围绕平衡位置 $z_0 = -mg/k$ 做简谐运动，方程为

$$z(t) - z_0 = A \cos \omega t$$

其中 $\omega = \sqrt{k/m}$ 。由初始条件得， $A = -z_0$ ，因此

$$z(t) = \frac{g}{\omega^2} (\cos \omega t - 1)$$

竖直的 z 坐标总不会为正，这推出洛伦兹力总是指向上方，在振动的最高点为零。电流总是沿同一方向在圆环中流动。

把数值数据代入，可以得出 $\omega = 31.2 \text{ s}^{-1}$ 和 $A = 1 \text{ cm}$ 。圆环中的电流对时间的依赖关系可以用含 $z(t)$ 的项表示为

$$I = \frac{1}{L} B_0 \alpha \pi r_0^2 z(t) = \frac{1}{L} B_0 \alpha \pi r_0^2 A (\cos \omega t - 1)$$

电流的最大值，对应振动最低点时的情况，为 $I_{\max} = 39 \text{ A}$ 。

题解 183

对一个质量为 m 、电量为 Q 的粒子，应用能量守恒定律，

$$\frac{1}{2}mv^2 + QK \frac{\cos \theta}{r^2} = \frac{1}{2}mv_0^2 + QK \frac{\cos(\pi/2)}{r^2} = 0$$

那么可以把珠子在角 θ 时的速度表示为

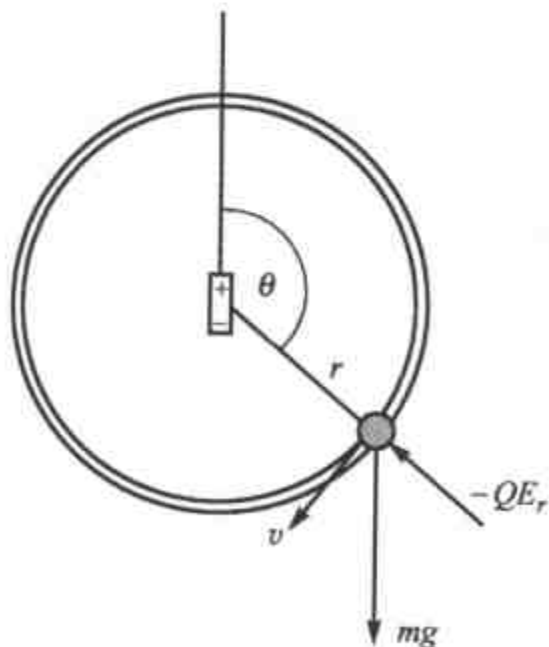
$$v = \sqrt{-2 \frac{QK}{mr^2} \cos \theta} \quad (\pi/2 \leq \theta \leq \pi)$$

圆周运动需要一个径向力分量 mv^2/r 。作用于单位电荷的径向力来源于电偶极子（即电场的径向分量的效果），可以由负的电势能对 r 的偏导数求得，

$$E_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 2 \frac{K \cos \theta}{r^3}$$

用先前的速度的表达式，我们注意到 QE_r 恰好等于 $-mv^2/r$ ，所需要的向心力。这样，环不需要作用任何力在珠子上来维持圆周运动。

如果环不在那里，珠子将会沿圆形轨道运动直到它到达与它出发点相对的点。珠子会





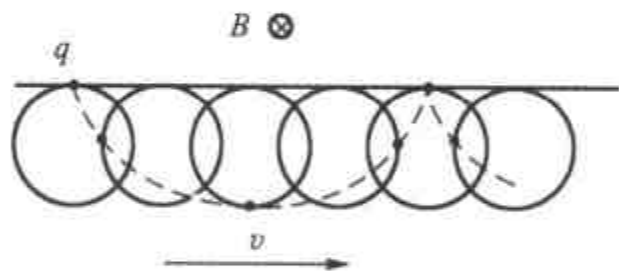
在那里停止，接着再次重复它原来的路径做一种周期运动。

注：这种运动对时间的关系正好与一个单摆从 90° 位移处释放并在重力作用下的运动相同。

题解 184

想像你坐在一个以恒定速度 v 垂直于磁场线水平运动的参考系上，且你携带一个电量 q 。在地面参考系中，以速度 v 运动的电荷被观察到受到大小为 qvB 的力（方向向上或向下，取决于运动的方向）。

在运动参考系中，电荷是静止的，并没有受到洛伦兹力，尽管它仍然“感受”到力。（由于某种相互作用产生的力的存在不依赖于描述它的参考系）这看起来很矛盾，但可以从静止坐标系变到运动坐标系时，电场和磁场的相互转化来理解。在本题中，在静止参考系中只有磁场没有电场。而在运动的（运动速度远远小于光速）参考系中，同一个磁场可以被观察到，但是另一个强度为 $E = vB$ 的电场也出现了。它提供了力 $F = qE = qvB$ ，否则这个力在运动参考系中不会出现。



选择运动参考系的速度，使得上面所描述的电场力和问题中提到的重力相同，即

$$qvB = qE = F = mg$$

我们现在在这个坐标系统中描述所观察物体的运动。因为电场和重力场的效果被互相抵消了，且在此系统中物体以 $-v$ 速度运动，一个 $-qvB$ 的力（磁场中的洛伦兹力）作用在物体上。这使得它在向下盘旋的圆形轨道上按方程 $qvB = mv^2/r$ 运动，其中 r 是圆的半径，可以得出 $r = mv/qB$ 。用速度和半径的值，得到物体运动一个轨道的时间为 $T = 2\pi m/qB$ ，与速度 v 无关。

在地面参考系中，一个匀速直线运动叠加到匀速圆周运动上。因此粒子沿摆线路径运动，如图所示，在时间 T 中落到 $2r = 2mv/qB$ 然后又上升到初始高度，对应的水平位移为 $Tv = 2\pi m$ 。在这一点粒子停止一会儿，接着开始一个新的摆线曲线。

题解 185

当磁棒以恒定速度下落时，它经过了距离 L ($L \gg h$)，所损失的重力势能 mgL 转

化为 L/h 个圆环中感生电流的焦耳热。记一个特定圆环产生的热为 Q ，可以写出，

$$mgL = \frac{L}{h}Q \quad \text{即 } Q = mgh$$

Q 依赖于什么量呢？因为给定电压下在电阻中损耗的功率反比于它的电阻， $Q \propto R^{-1}$ ，当磁棒以速度 v_0 运动时我们可以用下面形式表示热函数：

$$Q = \frac{1}{R} f(v_0, \mu, r)$$

因此，它是一个关于最终速度 v_0 ，磁距 m 和圆环半径 r 的一般函数；此外公式还可能包括真空磁导率 μ_0 。

现在考虑各个量的单位。 RQ 的单位是

$$[RQ] = \text{kg}^2 \text{m}^4 \text{s}^{-5} \text{A}^{-2}$$

而

$$[v_0] = \text{m s}^{-1}, \quad [\mu] = \text{A m}^2, \quad [r] = \text{m}, \quad [\mu_0] = \text{kg m s}^{-2} \text{A}^{-2}$$

这样它一定是

$$RQ(v_0, \mu, r, \mu_0) \propto v_0 (\mu \mu_0)^2 r^{-3}$$

但是我们知道 $Q = mgh$ ，因此，

$$v_0 \propto \frac{mghRr^3}{\mu^2}$$

由此可得问题中最终速度改变对应的因子分别为：2, 1/4, 2, 2, 2 和 8。

题解 186

在真空箱的参考系 (S) 中电子的速率保持恒定，因为磁场只能改变运动电荷速度的方向。考虑另一个平行于导线以相对于第一个参考系的恒定速度 v_0 运动的参考系 (S')。我们可以写出每个参考系中带电量为 Q 的粒子所受的洛伦兹力

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = Q(\mathbf{v}' + \mathbf{v}_0) \times \mathbf{B} = Q(\mathbf{v}' \times \mathbf{B}) + Q\mathbf{E}'$$

首先注意到在两个参考系中的电流必须是相同的。在参考系 S ，有运动电子和静止的正离子，同时导线本身是中性的。在参考系 S' ，电子的速度和电子引起的电流是不同的，但是运动的正离子的电流正好补偿了这种变化。这个导致在两个参考系中具有相同磁场 ($\mathbf{B}' = \mathbf{B}$) 的结果。上面的方程表明在参考系 S' ，除了不变的磁场，还得到由 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 给出的电场。(注意如果系统的运动速度远远小于光速，把一个单一的磁场从 S 变换到 S' ，一般并不改变磁场。)

让我们现在在参考系 S' 描述一个电子的运动。在这个参考系有强度为



$$E(r) = v_0 B(r) = \frac{\mu_0 v_0 I}{2\pi r}$$

的电场（垂直于导线）。其中 r 是离导线的距离。使用与圆柱形电容的类比，我们得到这个电场的近似的电势能函数（即场由对 r 的偏导数的负值给出），也就是

$$U(r) = -\frac{\mu_0 v_0 I}{2\pi} \ln r$$

在参考系 S' ，电子的初始（离导线为 r 时）速度为 $\sqrt{2}v_0$ ，且当它到达离导线 $r_0/2$ 时正好停止。可以对电子的运动应用功能原理如下：

$$\frac{1}{2} m (\sqrt{2}v_0)^2 = -\frac{\mu_0 v_0 I Q}{2\pi} \left(\ln \frac{r_0}{2} - \ln r_0 \right) = \frac{\mu_0 v_0 I Q}{2\pi} \ln 2$$

代入各个量的数值到方程，给出电子的初始速度为

$$v_0 = \frac{\mu_0 Q}{2m\pi} I \times \ln 2 \approx 2.46 \times 10^5 \text{ m/s} \approx 250 \text{ km/s}$$

注：(i) 电子的初始速度在宏观尺度上是非常大的，但是对电子来说却很小。电子通过仅仅为 0.2 V 的电势差加速，就可以达到这个速度。因为 250 km/s 远远小于光速，我们有理由在本问题中忽略电子质量的相对论性增加。

(ii) 有一个很有趣的现象，如果电子不能到达比 $r_0/2$ 更近的距离，那么电子的最大距离也同样受限制——它不能比 $2r_0$ 离得更远。更一般地，如果最小距离为 r_0/n ，那么最大距离一定为 nr_0 。这可以用另一个以速度 v_0 运动的参考系来证明。

题解 187

洛伦兹力

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

作用于带电量为 Q 、速度为 \mathbf{v} ，在电场强度为 \mathbf{E} 、磁感应强度为 \mathbf{B} 的场中运动的小物体上。在相对于原参考系以速度 \mathbf{v}_0 运动的参考系中，粒子的速度为 $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0$ 。如果在这个新的参考系中所有物理量用带撇做标记，它的洛伦兹力的表示为

$$\mathbf{F}' = Q'(\mathbf{E}' + \mathbf{v}' \times \mathbf{B}')$$

现在对比两个参考系。作用于粒子上的任何可以观测（例如从力导致的加速度）的力都不能变，即 $\mathbf{F}' = \mathbf{F}$ 。对电荷也同样适用： $Q = Q'$ 。（如果粒子的带电量依赖于它们的速度，那么一个初始为电中性的物体被加热时就会显示净电荷——在自然界中没有发现任何这样的迹象。）

变换速度得到

$$Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = Q(\mathbf{E}' - \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}' + \mathbf{v} \times \mathbf{B}')$$

这个关系必须对任何的 \mathbf{v} 都适用，尤其对静止的粒子。因此

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} \quad \text{从而有} \quad \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}$$

可以看到电场和磁场并不是独立的物理量，它们的值依赖于描述现象（也可参见问题 184）所用的参考系（的速度）。我们现在运用这些一般关系（两次）到本问题中。考虑液体的参考系。从电容的参考系变到这个参考系需要一个变换 $\mathbf{v}_0 = -\mathbf{v}$ 。在这个新的参考系中磁场没有变化， $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$ ，但是一个强度为 $-\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 的电场也出现了。静止的液体被这个电场极化了，因此电场强度以因子 $1/\epsilon_r$ 减小到 $\mathbf{E}' = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}(1/\epsilon_r)$ 。回到原来的（电容）参考系要求更多的变换，但是这次令 \mathbf{v}_0 等于 $+\mathbf{v}$ 。磁场再一次不变， $\mathbf{B}'' = \mathbf{B}' = \mathbf{B}$ ，但是电场由

$$\mathbf{E}'' = \mathbf{E}' + \mathbf{v} \times \mathbf{B}' = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}(1/\epsilon_r) + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

给出。因此，一个大小为

$$V = vBd \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right)$$

的电势差出现在两个极板之间。

对非极化的材料 ($\epsilon_r = 1$)。这个电压明显为零，同时，在“容易”极化的材料（金属），有 $V = vBd$ 。后面这个方程，描述了霍尔效应，可以用下面的方法解释。洛伦兹力使得导体中的电荷在磁场中运动。这种横向的电荷迁移会继续，直到建立起来的静电场足够强能够平衡洛伦兹力（它正比于磁场）。从平衡条件， $QE = QvB$ ，上面的关系式， $V = Ed = vBd$ ，可以再次被得到。

题解 188

在量子力学中，用不同部分以特定顺序发生方式来描述过程，或用“借用”的办法来描述经典的守恒量，都是不正确的。对量子效应的“经典”描述常常能给出定性正确的图像，然而，如果“借用”的量在含义上解释得更像它所借用的，那么所描述的过程更加不可能发生。

铀核的体积等于它的各个分裂产物的体积之和，但是分裂产物总的表面积大于初始的铀核。这意味着当过程开始时有暂时的（束缚）能量的损失（这是启动分裂过程所必需“贷款”的能量），这个能量后来由于核各自分离导致的系统库仑能量的减少



来偿还。如果铀核分裂成三个产物，在过程的开始所需要的能量远远大于分裂成两个产物的时候，无论在理论上还是实际中，它所对应的概率都是可忽略的。

题解 189

即使原子加热到几千度的高温，它们的内能仍然远远小于每个核的束缚能。由于这个原因，核反应率通常与温度无关。

然而，同位素 ${}^7\text{Be}$ 通过 K 俘获（从最里面的 K 电子层俘获一个电子）变到 ${}^7\text{Li}$ 。在几千度的温度时热量子 kT 已经和 Be 原子最里层的两个电子的电离能可比了（考虑麦克斯韦速度分布的尾部）。如果部分铍原子被电离，原子核的电子俘获概率就会降低近似的百分比。这样，在这种温度下，铍的放射性，以及半衰期都被影响了。

题解 190

平衡时，丰度正比于半衰期。在 10^{-3} kg 的钍中，几乎全部是 ${}^{232}\text{Th}$ ，有

$$\frac{6.02 \times 10^{23}}{232} = 2.595 \times 10^{21}$$

个钍原子。因此，有

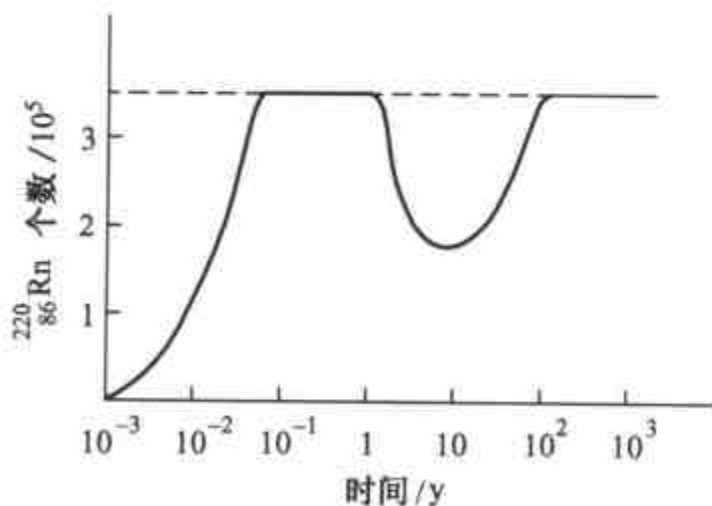
$$2.595 \times 10^{21} \times \frac{56\text{ s}}{1.41 \times 10^{10}\text{ y}} \approx 3.3 \times 10^5$$

个氦原子。

在所给的时间范围内两种钍的同位素都对氦原子的个数有贡献。每种同位素提供的量先增加，增加率由相关的中间衰变链上最慢的衰变率决定，接着在平衡值保持稳定，最后又以母核决定的衰变率衰变。

这样，由 ${}^{228}\text{Th}$ 来的贡献以 3.64 天的半衰期增长，又以 1.91 年的半衰期衰减。类似地，由 ${}^{232}\text{Th}$ 来的贡献以 5.7 年的半衰期增长，又以实质上为无穷大的半衰期衰减。存在的总的 ${}^{220}_{86}\text{Rn}$ 是两者之和，如图所示。

曲线中最初的增加是由于初始样品中的 ${}^{228}\text{Th}$ 产生的氦。其中的大部分在由初始的 ${}^{232}\text{Th}$ 产生的氦变得重要之前，已经衰变掉了。大约 8 年以后，从两种不同祖先而来的氦的原子个数变得相等，大约每种为 0.9×10^5 。在那之后，个数又一次上升到平衡值 3.3×10^5 ，此时所有存在的原子事实上都是由 ${}^{232}\text{Th}$ 产生的；它



会保持在这个值大约 10^{10} 年。

题解 191

一个（静止）质量为 m 速度为 v 的粒子的相对论能量和动量为

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad \text{和} \quad p = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

其中 c 是光速。这两个方程也可以合成为 $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$ 。

作为粒子—粒子碰撞的结果，新的（额外的）粒子，例如质子—反质子对，可以产生出来。反质子有和质子相同的静止质量。最终粒子的总能量是最低的，如果它们呆在一起，以可忽略的速度运动（在其质心参考系）。对这种情况，四个粒子（三个质子和一个反质子）可以看成是一个质量为 $4m$ 的粒子，它的动量等于被加速的质子的初始动量。由能量守恒定律得到

$$\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} + mc^2 = \sqrt{(4m)^2c^4 + p^2c^2}$$

方程两边同时平方得到 $p = \sqrt{48}mc$ 和 $E_p = 7mc^2$ 。这样质子必须在加速过程中得到动能为 $E_p - mc^2 = 6mc^2 \approx 6 \text{ GeV}$ ，这要求有 $6 \times 10^9 \text{ V}$ 的加速电压。

题解 192

质量为 m 、带电量为 e 的电子可以在法拉第笼的壁上自由移动，并达到作用在它们上的电场力和重力的合力为零的状态。这需要在金属壁的底部有电子的小凝结，这会导致在顶部有剩余的正电荷（缺少电子）。这种电荷的位移会继续到总的竖直电场的大小为 $E_0 = mg / |e|$ 。

当一个均匀电场在法拉第笼的壁上形成时，这个场也必须在法拉第笼内部出现。如果不是这样，带电粒子在法拉第笼的壁上做竖直向上或向下的运动，接着通过法拉第笼内部回到它的初始位置，这就形成一种永动机的基础——这显然是不可能的。

这样，在壁上的电荷移动导致了一个静电场的形成，这个静电场使放入法拉第笼里的一个自由电子受到和重力相同大小的力。换句话说，法拉第笼也屏蔽了重力场！然而，这种屏蔽只对电子起作用；对于不同的荷质比 (e/m)，零合力的条件并不满足。例如，在正电子的情况下，合力为 $E_0 |e| + mg = 2mg$ ，即这些粒子开始以 $2g$ 的加速度竖直向下运动。

数值上， $E_0 = 5.6 \times 10^{-11} \text{ V/m}$ ，为一个非常小的值，因此在通常的环境下，不能看到上面所描述的现象。电子不能无初始速度地放入法拉第笼，因为即使是光电效应时，



电子仅仅以 0.1 电子伏的能量逸出金属，它们仍然以 200 km/s 的速度运动。自由下落 1 m 导致的相对速度变化只有大约 10^{10} 分之一，这变化小到无法测量。

注：目前为止，我们没有考虑壁上的电荷移动的效应是由罩中正电子的存在导致的。这种效应的大小可以用镜像电荷的方法求得。电荷 e 位于距壁很近的 d 处，受到由金属中极化电荷产生的力，这个力和由电量为 $-e$ 距离第一个电荷 $2d$ 的电荷（镜像电荷）产生的力 $F_{\text{镜像}}$ 相同，即

$$F_{\text{镜像}} = k \frac{(-e)e}{(2d)^2}$$

在电子或正电子的情况下，若 $d \approx 2\text{m}$ ，这个力和它们的重力可比。因此如果某个人想用实验的数据来证明上面的推理的结论，实验者需要做一个足够大能使粒子离开壁若干米的法拉第笼。如果比这小，测量的就不是法拉第笼的屏蔽效应，而是壁上的极化电荷的效应。

题解 193

记正电子和质子的质量分别为 m 和 M ($M \approx 2000m$)，记基本电荷为 e 。因为大的质量比，当正电子跑到很远时质子几乎还没有动。我们把初始状态的能量和正电子移动到比 1 cm 更远并以速度 v_1 运动的状态的能量相等：

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{4}{a} + \frac{2}{\sqrt{2}a} \right) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{2}a} + 2 \frac{1}{2} m v_1^2$$

代入数值得到 $v_1 = 350 \text{ m/s}$ 。在那之后，正电子的速度没有显著变化。

在另一方面，质子尽管几乎没有动，但是质子间距离非常近，它们互相排斥并被加速到 v_2 。再次用能量守恒，现在得到

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{2}a} = 2 \frac{1}{2} M v_2^2$$

由此得到 $v_2 \approx 2.7 \text{ m/s}$ 。

题解 194

康普顿散射的能量守恒和动量守恒的一般方程为

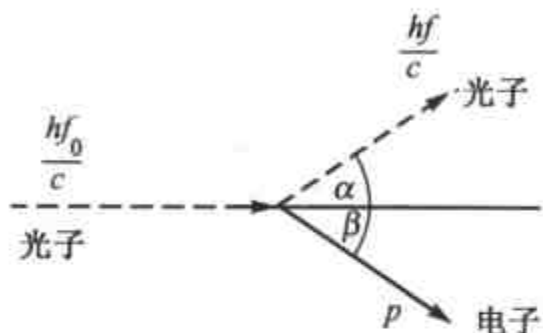
$$hf_0 + m_0 c^2 = hf + mc^2$$

$$\frac{hf_0}{c} = \frac{hf}{c} \cos \alpha + p \cos \beta$$

$$\frac{hf}{c} \sin \alpha = p \sin \beta$$

$$(mc^2)^2 = (m_0c^2)^2 + p^2c^2$$

其中 f_0 和 f 分别为入射和散射光子的频率, α 和 β 是光子和电子的散射角 (见图), m_0 是电子的静止质量。



对所考虑的特殊情形,

$$hf_0 = m_0c^2 \quad \text{和} \quad \frac{hf}{c} = p$$

解方程组, 我们得到

$$\alpha = \beta = \arccos \frac{2}{3} \approx 48.2^\circ$$

因此散射光子和反冲电子之间的夹角为 $\alpha + \beta \approx 96.4^\circ$ 。散射电子的动量为

$$p = \frac{3}{4}m_0c = \frac{m_0v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

得到电子的速度为 $v = \frac{3}{5}c$ 。这和光速 c 是同一数量级, 因此用相对论公式比较合适。

题解 195

频率为 f 的光子的能量为 hf , 同时它的动量为 hf/c , 其中 h 为普朗克常数, c 为光速。光子的能量在碰撞后减小到 hf' , 且它的动量大小为 hf'/c , 垂直于初始的动量。

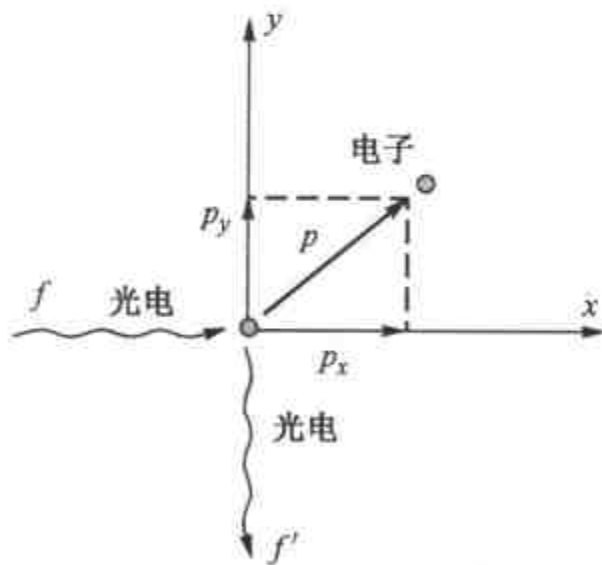
由动量守恒, 如图所示, 电子的最终动量的分量为 $p_x = hf/c$ 和 $p_y = hf'/c$ 。用相对论形式的能量守恒定律, $E^2 = E_0^2 + p^2c^2$, 其中 E_0 是静止质量能量, 我们得到

$$hf + E_0 = hf' + \sqrt{E_0^2 + (p_x^2 + p_y^2)c^2}$$

从上面的关系得到光子的波长变化为

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{c}{f'} - \frac{c}{f} = \frac{hc}{E_0} = \frac{h}{mc} \approx 2.4 \times 10^{-12} \text{ m}$$

注: 这个量纲为长度的有趣的量——依赖于电子质量、光速和普朗克常数, 即自然常数——被称为电子的康普顿波长。





题解 196

对“经典电子”运用球形电容的能量公式，得

$$\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} < mc^2$$

这我们可以写成

$$r > \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2mc^2} = 1.4 \times 10^{-15} \text{ m}$$

这个值称为经典电子半径。

经典电子被认为是质量分布均匀的、以角速度 ω 和一个对应于转动刚体的角动量，以上述半径旋转的小球，因此我们得到 $\frac{2}{3} mr^2 \omega = h/(4\pi)$ 。这给出“赤道速度”为 $v_{\text{eq}} = r\omega \approx 350c$ 。因为这个速度比相对论物理的极限速度，也就是光速，还要大许多倍，所以经典电子模型的最初版本——由洛伦兹和亚伯拉罕于 20 世纪早期在量子理论诞生之前提出的——必须被抛弃。

一个修改版本提出电子可以是一个半径为 r 的小球，表面带电，不旋转但是带有磁偶极距，来解释电子有磁距的实验事实。在球外，由电场和磁场产生 $E \times B$ 的倍数，描述了电磁动量的电流。这个电流带有角动量，选取一个恰当的参数可以使其和测量的结果相等。

题解 197

假设电子在箱子的底部占据了厚度为 H 的水平层。那么它的竖直坐标可以以精确度 H 得到。因此它的竖直动量的不确定度必须至少为 $\Delta p = \hbar / \Delta x = \hbar / H$ ，其中 \hbar 是 $1/(2\pi)$ 倍的普朗克常数。在这样的环境下，电子有势能为

$$E_{\text{势}} = mgx_{\text{平均}} \approx mg \frac{H}{2}$$

和动能为

$$E_{\text{动}} = \frac{\Delta p^2}{2m} \approx \frac{\hbar^2}{2mH^2}$$

这样它的总能量为

$$E(H) = E_{\text{势}}(H) + E_{\text{动}}(H) = AH + B \frac{1}{H^2}$$

其中 A 和 B 是由上面的方程所确定的常数。如果 H 很小，势能就很低但是动能很高。另一方面，如果 H 很大，那么动能很低但是势能很高。如果 $E_{\text{势}}$ 和 $E_{\text{动}}$ 是相同数量级

的话,总能量会达到最小值。用微分运算可得出能量比例的最优值是 2:1,势能较大。由于我们只需要一个大概的估计,能量的比值可以定为 1。这给出

$$H \approx \left(\frac{\hbar^2}{m^2 g}\right)^{1/3} \approx 1 \text{ mm}$$

这和通常的微观尺寸相比是一个很大的值。其原因是重力相对于决定束缚能和分子大小的电磁相互作用来说非常之弱。

题解 198

如果一个原子序数为 Z 的原子核把一个电子限制在半径为 r 的球形内,那么电子的静电能为 $E_{\text{el}} = -kZe^2/r$, 它的动量可以估计约为 \hbar/r 。如果 $Z \gg 1$ (即原子核是一个重核), 强束缚的电子的动能可以用相对论公式算出

$$E_{\text{动}} = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2 \approx pc$$

其中 c 是光速, \hbar 是普朗克常数除以 2π 。电子的总能量为

$$E(r) = E_{\text{电}}(r) + E_{\text{动}}(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} + \frac{\hbar c}{r}$$

因为精细结构常数 $e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c)$ 近似为 $1/137$, 对很小的 r 值, 电子的总能量为

$$E(r) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} (137 - Z) \frac{1}{r}$$

(上面的表达式对大的 r 值不成立, 因为一个小的非相对论的动量必须考虑进去。)

根据上面的公式, 如果 $Z > 137$, 电子会掉入原子核; 或它会限制在原子核大小的小体积内。数字 137 只是对临界原子序数的一个估计; 更准确的计算, 考虑了原子核的有限大小, 得到的 $Z_{\text{临界}}$ 值大约在 150~160。

这些计算表明一个电子可以被原子序数大于 150 的元素限制在原子核附近, 如果这么高原子序数的超铀元素可以被制造出来的话。

题解 199

表面波的传播速度依赖于表面张力 γ 和水的密度 ρ , 以及它们的波长 λ 。这些量的单位为

$$[\gamma] = \frac{\text{N}}{\text{m}} = \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}, \quad [\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad [\lambda] = \text{m}$$

如果 γ 和 ρ 以 γ/ρ 形式出现 (否则速度包括了长度和时间, 就会依赖于质量的单位), 速度的表达式只能由这些量推出。然而, 因为



$$\left[\frac{\gamma}{\rho} \right] = \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2}$$

这个表示必须进一步被波长分开，接着求平方根，使得结果有速度的量纲。总之，量纲分析指出表面波的传播速度正比于波长平方根的倒数，

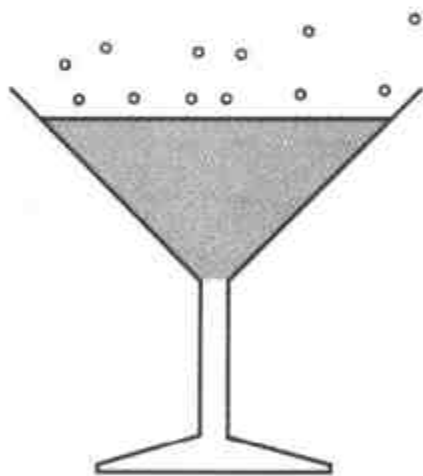
$$v \sim \sqrt{\frac{\gamma}{\rho \lambda}} \sim \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

从这个依赖函数（以及所给数据），我们可以得出结论：表面波的波长为 10^{-8}cm 的数量级时，其传播速度会赶上水中声波速度。

因为表面波的传播速度不能比声速的速度大（分子不能在物质表面上比在物质内部中更快地相互传递一个扰动），波长要小于 10^{-8}cm 没有什么意义。这个值，实际上，就是水分子大小的数量级！

题解 200

你不仅会注意到气泡的加速，还有香槟气泡的大小也变大了。当起泡的香槟含有过饱和的二氧化碳时，气泡上升的同时，气体会不断地逸出。这就是气泡变大的原因，同时变大的还有液体产生的浮力。这种上推力正比于气泡的体积，与此同时，黏性阻力也增大了，但其只正比于气泡的表面积。因此，净的向上的力随气泡的变大而增大。然而，增大的速度也导致了更大的黏性阻力，最终气泡在一系列平衡力作用下运动。



[G e n e r a l I n f o r m a t i o n]

书名 = 200道物理学难题

作者 =

页数 = 221

SS号 = 0

出版日期 =

封面
书名
版权
前言
目录

如何使用本书.....	(i) 主题
词与相应的问题.....	(i i) 物理常数.....
.....	(i i i) 习题
提示	
解答	