培尖教育 2017 年VIP集训营物理模拟试卷•电学卷

考试时间：180 分钟

注意：所有题目请在答题卷上作答，在试卷上作答成绩无效。

一、设有电流从半径为 a 的导体球的一极流入另一极流出，则导体内的电势分布可以写作

$$\varphi=\frac{I}{2\pi\sigma}\quad\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}+\frac{1}{\ }\int_0^r\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\quad\frac{dr}{r}\right\}$$

其中 R_1 和 R_2 分别为到导体球的两极 1、2 的距离，r 是当前位置到原点的距离，据此公式回答如下问题；

（1）哪一极是输入端，哪一极是输出端？

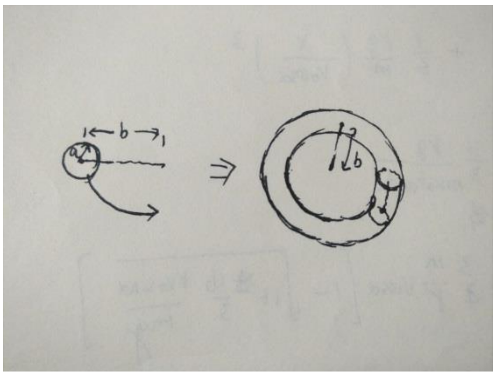
（2）这个公式中，坐标原点取在哪？为什么？

（3）导体球的总电阻为多少？

二、利用与 Y-Δ变换类似的方法，证明 N1 端星形电阻网络中若只有一个内部节点（即一共有 N+1）个节点时，可以的等效于一个内部无节点的电阻网络，且如果记各个节点与内部节点之间相连的电阻为 R_i（i=1,2.....N），等效后第 i 个节点和第 j 个节点之间相连的电阻为 R_{ij}，则有

$$R_{ij}=R_iR_j\sum_k\frac{1}{R_k}\text{。}$$

三、所谓超环面，即二维平面中的一平面电流环环心绕某一环外固定轴做圆周运动，同时环本身做等角速度转动形成的三维图形，如图所示：



（1）超环面螺线管的总匝数为 N，通以电流 I，环半径为 a，环心旋转半径为 b，试求其磁场分布，并与普通螺线管相比较。

（2）求超环面螺线管的自感大小。

四、仿照互感的定义，我们可以定义在静电场中两个导体的互容：若有两个导体 a 和 b，它们的位形固定，当导体 b 具有电势 φ_b 且导体 a 表面有电势 φ_a 时，两个导体表面的电荷可以写作如下形式：

$$Q_a = C_{aa}\varphi_a \quad C_{ab}\varphi_b$$
$$Q_b = C_{ba}\varphi_a \quad C_{bb}\varphi_b$$

其中的各个系数就称为两个导体之间的互容。

（1）系数 C_{aa} 和 C_{bb} 的含义与电容相同吗？互容的单位是什么？

（2）可以证明 $C_{ab} = C_{ba}$。设有电容为 C_1 和 C_2 的两个导体，相隔的距离 r 远大于导体本身的线度，试求二者之间的互容系数。

（3）试通过互容系数计算任意两个导体组成的整个系统的电容 C。

五、负电荷均匀分布在半径为 R 的球形空间内，总电量为-Q，其正中央有一电量为 Q 的正点电荷。

（1）求整个空间的电势分布。

（2）假定正电荷沿某一方向移动了一个极其微小的距离 δ，再求整个空间的电势分布。这个电荷系统的电偶极矩是多少？

六、球截形（即扇形绕其对称轴旋转一周）导体的电容公式为 $C = 4\pi\varepsilon_0 R\dfrac{\theta + \sin\theta}{\pi}$；

（1）据你猜测，θ 与扇形顶角大小应为什么关系?

（2）由该公式，球截形导体在什么时候电容达到最大？

（3）由该公式，说明在雨天避免位于针形导体附近的理由。

七、在静电场中曾经学过，双曲线电场线对应的等势面是椭球面，且其为带电导体椭球产生的，对于扁椭球（即椭圆绕短轴旋转形成的椭球），利用这一特性可以求出它的电容为

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{\sqrt{a \quad - c^2}}{\arccos\dfrac{c}{a}} \quad c \quad a。$$

（1）求半径为 R 导体圆盘的电容。

（2）利用题中的讯息，试求带电荷 e 的球形液滴能够稳定存在的必要条件，该液滴的表面张力系数为 α，半径为 R，假设液滴的导电性已经足够好，且不可压缩。

八、真空平面电磁波沿 z 轴正方向传播，其电场表达式为：

$$\vec{E}(z,t)=E_{0x}\cos(\omega t-kz+\varphi_{x0})\vec{i}+E_{0y}\cos(\omega t-kz+\varphi_{y0})\vec{j};$$

（1）试求其磁场表达式；

（2）证明：在一般情况下，在固定一点观察到的电场的矢端曲线（即电矢量的顶端划过的迹线）为一个椭圆，求这个椭圆的方程。

九、一般而言，磁矩在磁场中会同时受到力和力矩的作用，为了证明这一点，我们引用一个“电流环”模型，这个模型中，一个带正电荷 q 被强迫着保持速度 v 做圆周运动，且其运动半径为 r，但该电荷的角速度与空间中磁场将有一个夹角 θ；

（1）假定空间中为匀强磁场，大小为 B，试求该电荷在一个运动周期内感受到的平均磁场力和平均磁场力矩；

（2）假设空间中的磁场可以写作 $\vec{B}(x,y,z)=(B_0+\alpha x+\beta y+\gamma z)\vec{\varepsilon}$，其中 ε 为一方向固定的单位矢量，试求该电荷在一个运动周期内感受到的平均磁场力。

十、静电场的所谓高斯单位制，指的是在库仑定律 $\vec{F}=k\dfrac{q_1 q\,\vec{r}}{r^3}$ 把静电力常数 k 取作无量纲数 1，而不是带有单位的系数 $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ 的一种单位制，此时，任意的静电学物理量的单位都以用动力学量的单位来表达；

（1）在这个单位制下，电荷和电容的单位分别是什么？

（2）一种电容器在高斯单位制下的电容为 C，求它在国际单位制下的电容。

（3）如果电极化强度矢量 P 和电位移 D 的定义仍然保持不变，那么 D、E、P 三者之间现在应该有何种关系？极化率 χ 与绝对介电系数 ε 之间的关系如何？

物理 VIP 集训营模拟试卷•电学卷（六）参考答案

电学六套答案

1. (1) 由φ中有 $\frac{I}{2\pi\sigma R_1}$ 和 $-\frac{I}{2\pi\sigma R_2}$ 知 1 点为交换输入端，2为输出端

(2) 坐标原点在球心；交换输入、输出极，必须有 $\varphi'=-\varphi$，由此得

$$\int_0^{r}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\frac{dr}{r}=\int_0^{r'}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\frac{dr}{r}$$

而由能使 $r=r'$ 的只有在球心

(3) 总电阻 $\to +\infty$

2. 中间节点记为 0，则流向节点的电流满足

$$\sum_i I_{i0}=0$$

且 $I_{i0}=\frac{U_i-U_0}{R_i}$，若将其等效为某无网络节点，且 $I_{ij}=\frac{U_i-U_j}{R_{ij}}$

则等效条件为

$$\sum_{j\neq i} I_{ij}=I_{i0} \quad ①$$

对任意的 i 都成立，由此可得

$$U_0=\frac{\sum_j \frac{U_j}{R_j}}{\sum_j R_j}$$

于是

$$I_{i0}=\frac{U_i}{R_i}-\frac{U_0}{R_i}=\frac{U_i}{R_i}-\frac{\sum_j \frac{U_j}{R_j}}{R_i\sum_j\frac{1}{R_j}}=\frac{U_i}{R_i}-\frac{\sum_{j\neq i}\frac{U_j}{R_j}+\frac{U_i}{R_i}}{R_i\sum_j\frac{1}{R_j}}$$

$$=\frac{\sum_{j\neq i}\frac{U_i-U_j}{R_j}}{R_i\sum_j\frac{1}{R_j}}=\frac{\sum_{j\neq i}\frac{I_{ij}R_{ij}}{R_j}}{\cancel{R_i}\,R_i\sum_j\frac{1}{R_j}}=\sum_{j\neq i}I_{ij}\left(\frac{R_{ij}}{R_iR_j\sum_k\frac{1}{R_k}}\right) \quad ②$$

与式① 比较，得

$$R_{ij}=R_iR_j\sum_k\frac{1}{R_k}$$

3. (1)由安培定理

$$B=\frac{\mu_0 NI}{2\pi r}\quad \text{环内}$$

$$=0\quad \text{环外}$$

(2) 利用积分计算可得

$$L=\mu_0 N^2(b-\sqrt{b^2-a^2})$$

4. (1) 系数含义不同，单位为法拉(F)

(2) 由于方程是线性的，所以其逆式可解

$$\begin{cases}\varphi_a=C_{aa}^{-1}Q_a+C_{ab}^{-1}Q_b\\ \varphi_b=C_{ba}^{-1}Q_a+C_{bb}^{-1}Q_b\end{cases}$$

必然存在，令导体1带电Q_1，导体2不带电，得$C_{aa}^{-1}=\frac{1}{C_1}$ (同理$C_{bb}^{-1}=\frac{1}{C_2}$)

以及$C_{ab}^{-1}=C_{ba}^{-1}=\frac{1}{r}$，即

$$\cancel{\varphi_{ab}}=\varphi_a=\frac{1}{C_1}Q_a+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}Q_b$$

$$\varphi_b=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}Q_a+\frac{1}{C_2}Q_b$$

反解出Q_a, Q_b，即得

$$C_{aa}=C_1\left[1+\frac{C_1C_2}{(4\pi\varepsilon_0 r)^2}\right]\quad C_{ab}=C_{ba}=-\frac{C_1C_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$C_{bb}=C_2\left[1+\frac{C_1C_2}{(4\pi\varepsilon_0 r)^2}\right]$$

5. (1)

$$\varphi_0(r)=\begin{cases}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}-\frac{Qr^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3} & r<R\\ \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R} & r>R\end{cases}$$

(2) ~~利用~~近似可以算出

$$\varphi(r)=\varphi_0(r)+\frac{Q\delta\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\quad (\text{无论球内外})$$

$$p=Q\delta$$

6.

(1) 由于 $\theta=\pi$ 时，恰为球形电容，θ 为半顶角

(2) $\frac{dC}{d\theta} = 4\varepsilon_0 R(1+\cos\theta) \geq 0$. 故 $\theta=\pi$ 时 C 最大

(3) 当 θ 很小时，$C \approx 4\varepsilon_0 R \cdot 2\theta = 8\varepsilon_0\theta R$，则针形导体

~~Q=~~ $U = \frac{Q}{C} \propto \frac{1}{\theta}$ 很小的 θ 会使电势很大.

7. (1) 令 $c \to 0$，$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 \cdot a}{\pi/2} = 8\varepsilon_0 a$

(2) 此球形液滴的能量为

$$E = \frac{e^2}{2C} + \alpha S$$

S 为表面积，C 为电容 为平衡必须有 $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} > 0$，其中 x 为一独立参数，由于对于椭球不可压缩 $ab^2=$ 常数，故取 a 或 b 作 x 都可，为方便可取 $a-b$，而

$$\left.\frac{\partial E}{\partial (a-b)^2}\right|_{a\to 0} > 0$$

解出 $e^2 < 64\pi^2\varepsilon_0\alpha a^3$

8. (1) $\vec{B} = \frac{\vec{k}}{c} \times \vec{E} = -\frac{E_{0y}}{c}\cos(\omega t - kz + \varphi_{y0})\vec{i} + \frac{E_{0x}}{c}\cos(\omega t - kz + \varphi_{x0})\vec{j}$

(2) 利用和差化积公式，有

$$\frac{E_x}{E_{0x}} + \frac{E_y}{E_{0y}} = 2\cos\left(\omega t - kz + \frac{\varphi_{x0}+\varphi_{y0}}{2}\right)\cos\frac{\varphi_{x0}-\varphi_{y0}}{2}$$

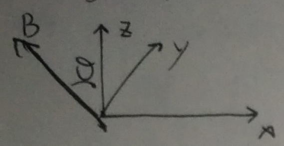
$$\frac{E_x}{E_{0x}} - \frac{E_y}{E_{0y}} = -2\sin\left(\omega t - kz + \frac{\varphi_{x0}+\varphi_{y0}}{2}\right)\sin\frac{\varphi_{x0}-\varphi_{y0}}{2}$$

再由 $\cos^2\left(\omega t - kz + \frac{\varphi_{x0}+\varphi_{y0}}{2}\right) + \sin^2\left(\omega t - kz + \frac{\varphi_{x0}+\varphi_{y0}}{2}\right) = 1$，得

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} - 2\cos(\varphi_{x0}-\varphi_{y0})\frac{E_xE_y}{E_{x0}E_{y0}} = \sin^2(\varphi_{x0}-\varphi_{y0})$$

为一椭圆

9. (1) 建系如图



$$\vec{B}=(B\sin\theta,\ 0,\ B\cos\theta)$$

$$\vec{v}=(v\sin\varphi,\ -v\cos\varphi,\ 0)$$

$$\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}=(-qvB\cos\varphi\cos\theta,\ -qvB\sin\varphi\cos\theta,\ qvB\cos\varphi\sin\theta)$$

若B为常数，$\overline{\cos\varphi}=\overline{\sin\varphi}=0$，故

$$\overline{\vec{F}}=0$$

而

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F},\quad \vec{r}=(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ 0)$$

故

$$\vec{M}=(qvBr\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta,\ -qvBr\cos^2\varphi\sin\theta,\ 0)$$

又 $\overline{\sin\varphi\cos\varphi}=0$，$\overline{\cos^2\varphi}=\frac{1}{2}$，则

$$\overline{\vec{M}}=(0,\ -\frac{1}{2}qvBr\sin\theta,\ 0)$$

综合到 $\vec{m}$(磁矩) $\cancel{=\theta\frac{1}{2}}$ $(0,0,\frac{1}{2}qvBr)$，则

$$\overline{\vec{M}}=\vec{m}\times\vec{B}$$

(2) 此时B不为常数时，有

$$\vec{F}=(-qv\frac{B}{r}\alpha\cos^2\varphi\cos\theta-qv\frac{B}{r}\beta\cos\varphi\sin\varphi\cos\theta,\ -qv\frac{B}{r}\alpha\cos\varphi\sin\varphi\cos\theta-qv\frac{B}{r}\beta\sin^2\varphi\cos\theta,\ qv\frac{B}{r}\alpha\cos^2\varphi\sin\theta+qv\beta r\cos\varphi\sin\varphi\sin\theta)$$

故

$$\overline{\vec{F}}=(-\frac{1}{2}qvr\alpha\cos\theta,\ -\frac{1}{2}qvr\beta\cos\theta,\ \frac{1}{2}qvr\alpha\sin\theta)$$

$$=(-m\alpha\cos\theta,\ -m\beta\cos\theta,\ -m\alpha\sin\theta)$$

10. (1) 电荷的单位是 $kg^{\frac{1}{2}}\cdot m^{\frac{3}{2}}\cdot s^{-1}$，电容为 m.

(2) $C'=4\pi\varepsilon_0 C$

(3) $\vec{D}=\vec{E}+4\pi\vec{P}$ (利用高斯定理)

$$\chi=\frac{\varepsilon-1}{4\pi}$$