2017 培尖教育 VIP 集训营物理模拟卷（四）

考试时间：180 分钟

学号：__________ 学校：__________ 姓名：__________

一、普朗克黑体公式：

$$P_{total}=\int dS\int u(\lambda)d\lambda$$

$$u(\lambda)=\frac{8\pi hc\lambda^{-5}}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1}$$

P_{total}表示单位时间各种波长总辐射能量。

1. 试求出 $u(\lambda)$取极大值时满足的方程表达式。
2. 试通过计算器计算出上述方程结果（逼近），并证明其结果意味着$\lambda T=\mathrm{Constant}$，并求出此常数。

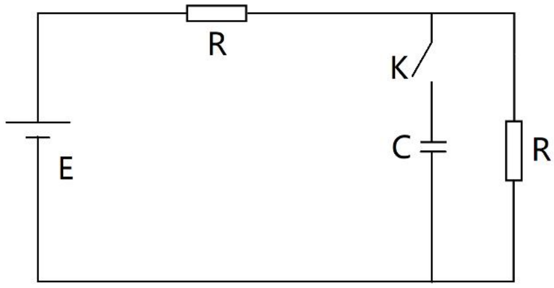
二、真空中存在一匀质球体，质量为 m，半径 R，密度ρ。在其内部球心的位置存在体积可以忽略的热源，功率为 P。初始状态下，球体各点温度相同，为T_1。当热源启动后，球体在经历一段时间达到稳定状态（各点温度不随时间变化）。

1. 假设其表面可看做黑体表面，求稳定状态表面温度。
2. 在第一问的条件下，已知该物质的傅里叶传热系数 k：

$$j=-k\frac{dT}{dx}$$

试求球体各点的温度。

三、计算如图所示电路，初始状态下开关 k 打开。某一时刻（计时零点）将开关 k 合上，试求其后流过电容的电流随时间的变化关系。



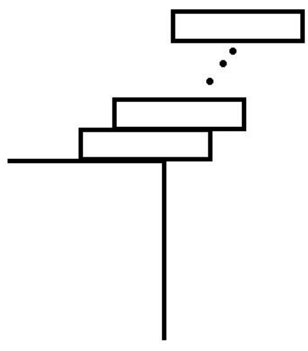
四、一衍射光栅的光栅常数 d=1/300 mm，试求同时出现 400nm 和 500nm 的谱线的位置。

五、在光滑圆锥面内（柱坐标下表达式为：$z = r = \sqrt{x^2 + y^2}$，重力加速度沿着 z 轴反方向），存在一初始状态下沿 y 轴方向运动的小球， 坐标$(x,y,z) = (0,a,a)$，速度$\left(v_x,v_y,v_z\right) = (0,v_0,0)$,试求其在之后的运动中 z 方向的最大位移和最小位移。

六、试求光子与静止电子发生散射之后的动量随散射角的关系，并证明其在动量空间是一个旋转椭球面（请化成标准形式，并指明各部分意义）。结果用入射电子能量E_1，电子质量 m，光速 c 表示出来。

七、存在 N+2 个互异的节点，相互两个节点之间均连接有阻值为 R 的电阻。试计算任意两个节点之间的等效电阻。

八、我们在一个直角边缘累放 N 个长度相同为 l ，质量相同的木板，累加方法如图所示。试计算当我们如何选择各木板伸出长度，可以使最末一级的木板伸出长度最长（相对于直角边缘），并计算此总伸出长度。



物理 VIP 集训营模拟试卷（四）参考答案

一、

1. $\frac{du}{d\lambda} = 0$.

$$\Rightarrow \frac{-5\lambda^{-6}}{e^{a/\lambda}-1} + \lambda^{-5}\frac{(-1)e^{a/\lambda}\left(-\frac{a}{\lambda^2}\right)}{\left(e^{a/\lambda}-1\right)^2} = 0.$$

$$5\lambda = a\left(1-e^{-a/\lambda}\right)^{-1}.\ \text{其中}\ a = \frac{hc}{kT}.$$

2. 设 $\alpha = \frac{\lambda}{a}$.

$$5\alpha\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}}\right) = 1.$$ （须给出此式，否则第2问不给分）

$$\Rightarrow \alpha = 0.2014.$$

$$\alpha = \frac{\lambda}{a} = \frac{\lambda kT}{hc} = 0.2014.$$

$$\lambda T = 2.898\times10^{-3}\ \text{m}\cdot\text{K}.$$

二.

1.

$$4\pi R^2 \cdot \sigma T_0^4 = P$$

$$T_0 = \left(\frac{P}{4\pi R^2 \sigma}\right)^{1/4}.$$

2.

$$-4\pi r^2 \cdot k \frac{dT}{dr} = P.$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{P}{4\pi r^2 k}$$

$$T = \frac{P}{4\pi r k} + C$$

$$T(r) = \frac{P}{4\pi k}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) + \left(\frac{P}{4\pi R^2 \sigma}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

三、

合上瞬间 $(t=0^+)$. $Q_C=0 \Rightarrow U_C=0$. (电荷不能突变).

$$I_C = E/R.$$

$$\begin{cases} \dfrac{Q_C}{C} + IR = E. \\ \dfrac{Q_C}{C} = (I - I_C)R. \\ Q_C = \displaystyle\int_0^t I_C\,dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2Q_C}{C} = E - R\frac{dQ_C}{dt}.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{RC}dt = -\frac{1}{2}\,\frac{d(-2Q_C)}{CE-2Q_C}$$

$$e^{-\frac{2t}{RC}} = \frac{CE-2Q_C}{CE}.$$

$$Q_C = \frac{CE}{2}\left(1 - e^{-\frac{2t}{RC}}\right).$$

$$I_C = \frac{dQ_C}{dt} = \frac{E}{R}e^{-\frac{2t}{RC}}.$$

四.

$$d\sin\theta = k_1\lambda_1 = k_2\lambda_2.$$

$$\sin\theta = \frac{\lambda_1}{d}k_1 = \frac{\lambda_2}{d}k_2$$

$$\begin{cases}\sin\theta = 0.12k_1 \\ \sin\theta = 0.15k_2\end{cases}$$

由于 $\sin\theta \in [0,1]$.

$$\Rightarrow \quad k_1 \in [0, 8.33]$$

$$k_2 \in [0, 6.67].$$

又 $\frac{k_1}{k_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{5}{4}$.

故 $\begin{cases}k_1 = 5 \\ k_2 = 4.\end{cases}$

$$\sin\theta = 0.6$$

$$\theta = 36.9^\circ.$$

出现在 $\theta = \pm 36.9^\circ$ 两个位置.

五.

角动量守恒（ $L_z = Const$ ）.

~~$mrV_0 = Const$~~

$$mrV_\tau = Const = maV_0 .$$

$$V_\tau = \frac{aV_0}{r} .$$

$$\frac{1}{2}mV_\tau^2 + mgz = \frac{1}{2}mV_0^2 + mga .$$

$$(a-z)\left[\frac{a+z}{z^2} - \frac{2g}{V_0^2}\right] = 0$$

$$(z-a)\left[z^2 - \frac{V_0^2}{2g}(z+a)\right] = 0 .$$

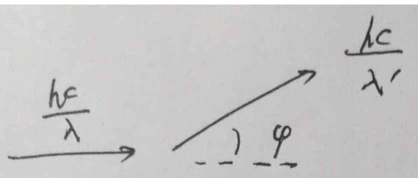
$$z_1 = a \qquad z_{2,3} = \frac{\frac{V_0^2}{2g} \pm \sqrt{\left(\frac{V_0^2}{2g}\right)^2 + 4\cdot\frac{V_0^2}{2g}\cdot a}}{2} .$$

z 的极值：$z=a$ 或 $z = \frac{V_0^2}{4g}\left(1+\sqrt{1+\frac{8ga}{V_0^2}}\right)$.

$$z_{min} = \min\left\{a, \frac{V_0^2}{4g}\left(1+\sqrt{1+\frac{8ga}{V_0^2}}\right)\right\}$$

$$z_{max} = \max\left\{a, \frac{V_0^2}{4g}\left(1+\sqrt{1+\frac{8ga}{V_0^2}}\right)\right\} .$$

六.



Compton Effect:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\varphi).$$

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{mc}(1-\cos\varphi).$$

光子: $E = \frac{hc}{\lambda}$. $\Rightarrow$ $\lambda = \frac{hc}{E}$.

$$\frac{hc}{E_2} = \frac{hc}{E_1} + \frac{h}{mc}(1-\cos\varphi).$$

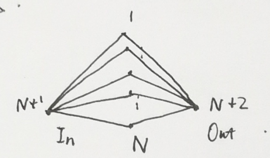
$$\Rightarrow E_2 = \frac{E_1}{1+(E_1/mc^2)(1-\cos\varphi)}.$$

$$p_2 = E_2/c = \frac{E_1/c}{1+(E_1/mc^2)(1-\cos\varphi)}.$$

$$p_2 = \frac{\frac{E_1}{c}/\left(1+\frac{E_1}{mc^2}\right)}{1-\frac{E_1}{E_1+mc^2}\cos\varphi}.$$

偏心率 $e = \frac{E_1}{E_1+mc^2}$.

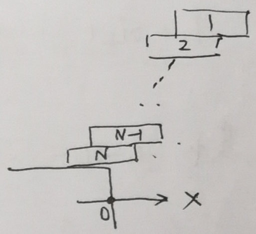
七.



由于 1→N 之间的节点在电路中存在轮换对称性，所以其电势相同，之间的电阻可以去掉。

$$\frac{1}{R_{总}}=\frac{N}{2R}$$

$$R_{总}=\frac{2R}{N}$$



八. 这是一道静力学问题

解题的核心是把握临界条件

$$\sum m_i x_i \le 0$$

x_i 是第 i 个的质心横坐标。由于这个问题中 $m_i=m$ $i\in[1,\cdots,N]$

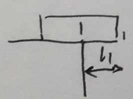
故 $\sum x_i \le 0$.

这个临界条件须应用于各层及其上的木板，各零点应取在边缘（随对象而动） 各伸长量 l_i

结果： $\cancel{l_1=\frac{L}{2}}$

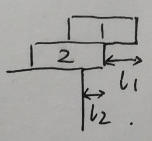
$\cancel{l_1+l_2=}$

①



$x_1=0$. $l_1=\frac{l}{2}$

②



$x_1+x_2=0$. $x_1-x_2=\frac{l}{2}$

$x_2=-\frac{l}{4}$ $x_1=\frac{l}{4}$. $l_1=\frac{l}{2}$. $l_2=\frac{l}{4}$. $l_{总}^{(2)}=\frac{3l}{4}$.

③ $x_1=x_2+\frac{l}{2}$ $x_2=x_3+\frac{l}{4}$.

$x_1+x_2+x_3=0$. $2x_2+\frac{l}{2}+x_3=0$. $3x_3+l=0$.

$x_3=-\frac{l}{3}$、$l_3=\frac{l}{6}$. $l_{总}^{(3)}=\frac{l}{6}+\frac{3l}{4}=\frac{11}{12}l$.

数学归纳法.

设 $l_i = \frac{L}{2i}$ $(i=1,2,\cdots n)$.

$$\begin{cases} 即\ x_i = x_{i+1} + l_i \quad (i=1,2,\cdots n). \\ \sum_{i=1}^{i+1} x_i = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow l_1 + 2l_2 + \cdots + nl_n + (n+1)x_{n+1} = 0.$$

其中 $l_1+2l_2+\cdots+nl_n = \underbrace{\frac{L}{2}+\frac{L}{2}+\cdots+\frac{L}{2}}_{n个} = \frac{n}{2}L$.

$(n+1)x_{n+1} = -\frac{n}{2}L$.

$$x_{n+1} = -\frac{n}{2(n+1)}L.$$

根据定义 $l_{n+1} = x_{n+1} + \frac{L}{2} = \frac{L}{2}\left[-\frac{n}{n+1}+1\right] = \frac{L}{2(n+1)}$,

由 $l_i = \frac{L}{2i}$ $(i=1,\cdots,n)$ 可推得 $l_i = \frac{1}{2i}$ $(i=1,2,\cdots n+1)$

即有 $l_i = \frac{L}{2i}$ $(\forall i)$.

最大伸长量 $L_N = \sum_{i=1}^{N} l_i = \frac{L}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{i}$.