第 12 屆泛珠三角物理奧林匹克暨中華名校邀請賽力學基礎試答案 (2016 年 2 月 18 日)

選擇題 (20×2 分)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	E	D	A	B	F	A	D	D	E	B	F	B	D	F	A	E	C	F	A

14. $F=kx=(M+m)a \Rightarrow a=\dfrac{kx}{M+m} \Rightarrow f=ma=\underline{\dfrac{m}{M+m}}kx$.

15. 點 A: Δr=45m=(4+0.5)λ, 無聲; 點 B: Δr=−45m=−(4+0.5)λ, 無聲.

點 P: $\Delta r=|r-R|$, 最強聲音 $0\le\Delta r=|k|\lambda\le45$m, $|k|=0,1,2,\ldots \Rightarrow 0\le|k|\le4.5 \Rightarrow k=-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4$. $n=\underline{9}$.

16. $\bar{p}=\rho g\dfrac{H}{2},\ A_\perp=\dfrac{BH}{\sin\theta},\quad P=\bar{p}A_\perp=\rho g\dfrac{H}{2}\cdot\dfrac{BH}{\sin\theta}=\underline{\dfrac{\rho gBH^2}{2\sin\theta}}$.

17. $M\times R+(-\frac{1}{4}M)\times\frac{R}{2}=(\frac{3}{4}M)\times PC \Rightarrow PC=\underline{\frac{7}{6}}R$. **18.** $I_P=I_O+Md_P^2=\frac{3}{2}MR^2-\frac{3}{32}MR^2=\underline{\frac{45}{32}}MR^2$.

19. $I_P=I_C+Md_{PC}^2$, $\frac{45}{32}MR^2=I_C+\frac{3}{4}M(\frac{7}{6}R)^2 \Rightarrow I_C=\underline{\frac{37}{96}}MR^2$. **20.** $\omega^2=\dfrac{mgL}{I}=\dfrac{(3M/4)g(7R/6)}{45MR^2/32}=\underline{\dfrac{28}{45}\dfrac{g}{R}}\approx0.6222\dfrac{g}{R}$.

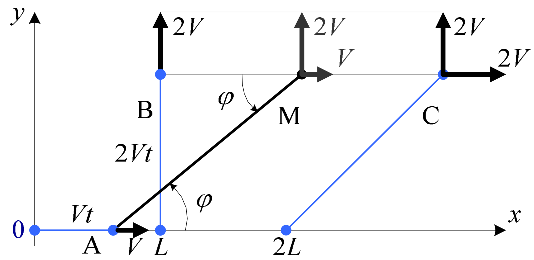
21 (簡答題 8 分) 若有需要,可使用三角恆等式 $\sec^2 x=1+\tan^2 x$ 和微分公式 $d(\sin x)=(\cos x)dx$, $d(\cos x)=(-\sin x)dx$.

(1) 設在時刻 t,MA 連線與正東方向的夾角為φ,

則 $\tan\varphi=\dfrac{y_M-y_A}{x_M-x_A}=\dfrac{2Vt-0}{1.5L+Vt-Vt}=\underline{\dfrac{4V}{3L}}t$. 並且

$\cos^2\varphi=\dfrac{1}{1+\tan^2\varphi}=\dfrac{1}{1+(4Vt/3L)^2}=\dfrac{9L^2}{9L^2+16V^2t^2}$.

$\dfrac{d}{dt}(\tan\varphi)=\dfrac{d}{dt}(\dfrac{4V}{3L}t) \Rightarrow \dfrac{1}{\cos^2\varphi}\cdot\dfrac{d\varphi}{dt}=\dfrac{4V}{3L}\Rightarrow$



$\omega=\dfrac{d\varphi}{dt}=\dfrac{4V}{3L}\cos^2\varphi=\dfrac{12LV}{9L^2+16V^2t^2}=\underline{\dfrac{1}{(3L/4V)+(4V/3V)t^2}}$.

(2) L=80m, V=3m/s 和 t=10s. $\omega=\dfrac{1}{(3\times80/4\times3)+(4\times3/3\times80)\times10^2}=\dfrac{1}{25}=\underline{0.4\text{ rad/s}}$.

22 (簡答題 10 分) 若有需要, 可使用三角恆等式 $\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y$.

由機械能守恆定律, 系統轉過α角時 $v^2=\dfrac{8}{11}gL(4\sin\alpha+3\cos\alpha-3)$.

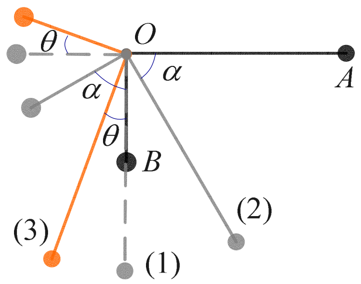
(1) 當 OA 桿到達豎直位置時α=90^0，A 球的速度 $v=\sqrt{\dfrac{8}{11}gL(4\sin90^0+3\cos90^0-3)}=\underline{\sqrt{\dfrac{8gL}{11}}}$.

(2) $v^2=\dfrac{40}{11}gL(\dfrac{4}{5}\sin\alpha+\dfrac{3}{5}\cos\alpha-\dfrac{3}{5})=\dfrac{40}{11}gL\left(\sin(\alpha+36.9^0)-\dfrac{3}{5}\right)$;

當 $\alpha+36.9^0=90^0$,即α=53.1^0 時，A 球達到的最大速度 $v_{max}=\underline{4\sqrt{\dfrac{gL}{11}}}$.

(3) B 小球上升到最大高度 h 時速度為零，此時 $4\sin\alpha+3\cos\alpha-3=0$, 即當 OB 桿轉動了角度α=$\underline{106.3^0}$ 時,

B 球上升到(相對於其初始位置)最大高度 $h=L(1-\cos\alpha)=\underline{1.28}\ L$.



23 (簡答題 8 分) 若有需要, 可使用微分公式 $d(x^n)=nx^{n-1}dx$.

(1) 小車靜止時受電場力 $F=kQ^2(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{(L-x)^2})$. 平衡位置 F=0 $\Rightarrow x_0=(\sqrt{2}-1)L$=0.41$L$.

(2) 在平衡位置 x_0 處受到微小干擾 x 後回復力 $F=\dfrac{kQ^2}{(x_0+x)^2}-\dfrac{2kQ^2}{(L-x_0-x)^2} \Rightarrow$

$$\frac{F}{kQ^2}\approx\frac{1}{x_0^{\ 2}+2x_0x}-\frac{2}{(L-x_0)^2-2(L-x_0)x}=\frac{1}{x_0(x_0+2x)}-\frac{2}{(L-x_0)((L-x_0)-2x)}$$

$$\approx\frac{x_0-2x}{x_0^{\ 3}}-\frac{2((L-x_0)+2x)}{(L-x_0)^3}=\frac{1}{x_0^{\ 2}}-\frac{2x}{x_0^{\ 3}}-\frac{2}{(L-x_0)^2}-\frac{4x}{(L-x_0)^3}=-2\left(\frac{1}{x_0^{\ 3}}+\frac{2}{(L-x_0)^3}\right)x=-2\cdot\frac{24+17\sqrt{2}}{2L^3}x.$$

$F=-(24+17\sqrt{2})\frac{kQ^2}{L^3}x=Ma \Rightarrow a+(24+17\sqrt{2})\frac{kQ^2}{ML^3}x=0 \Rightarrow$ 固有頻率 $\omega^2=\underline{(24+17\sqrt{2})\frac{kQ^2}{ML^3}}$, $\omega\approx\underline{6.93\sqrt{\frac{kQ^2}{ML^3}}}$.

24 (簡答題 14 分)

(1) $k=\frac{\rho}{P}\frac{R}{2t}$，$\xi=\frac{h}{H}$ 和 $\eta=\frac{h_C}{H}$.

(a) $h_C=\frac{MX+mx}{M+m}=\frac{P(2\pi RHt)\frac{H}{2}+\rho(\pi R^2h)\frac{h}{2}}{P(2\pi RHt)+\rho(\pi R^2h)}=\frac{1+(\frac{\rho}{P}\frac{R}{2t})(\frac{h}{H})^2}{1+(\frac{\rho}{P}\frac{R}{2t})(\frac{h}{H})}\cdot\frac{H}{2}=\frac{1+k\xi^2}{1+k\xi}\cdot\frac{H}{2}$, $\quad\therefore\eta=\underline{\frac{1+k\xi^2}{2(1+k\xi)}}$.

(b) 當 η 最小時,系統具有最佳穩度 $\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+k\xi)(1+k\xi^2)'-(1+k\xi^2)(1+k\xi)'}{(1+k\xi)^2}=\frac{k}{2}\cdot\frac{k\xi^2+2\xi-1}{(1+k\xi)^2}$.

$k\xi^2+2k\xi-1=0$, $\xi=\frac{-2\pm\sqrt{(2k)^2-4(-1)}}{2k}=\frac{-1\pm\sqrt{1+k}}{k}$. 當 $\xi=\frac{\sqrt{1+k}-1}{k}$,

$\eta_{\min}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+k(\frac{\sqrt{1+k}-1}{k})^2}{1+k(\frac{\sqrt{1+k}-1}{k})}=\underline{\frac{\sqrt{1+k}-1}{k}}$. ∴注入液體的高度 $h=\underline{\frac{\sqrt{1+k}-1}{k}H}$.

(2) P=2.5×10³kg/m³, H=10m, R=5m, t=12.5cm; ρ=1×10³kg/m³. 參數 $k=\frac{\rho}{P}\frac{R}{2t}=\frac{1\times10^3}{2.5\times10^3}\frac{5}{2\times0.125}=\underline{8}$,

系統具有最佳穩度 $\eta_{\min}=\xi=\frac{\sqrt{1+k}-1}{k}=\frac{\sqrt{1+8}-1}{8}=\frac{1}{4}$，注入液體高度 h=系統重心 C 高度 $h_C=\xi H=\underline{2.5}$m.

(3) ρ_{air}=1.5 kg/m³, 面積 $A=2RH$=100m². 總重量 $W=(M+m)g=[P(2\pi RHt)+\rho(\pi R^2h)]g=\pi Rg(2PHt+\rho Rh)$.

$F_{wind}h_C\le WR \Rightarrow$ 風力 $\rho_{air}Av^2=F_{wind}\le\pi R^2g(2PHt+\rho Rh)/h_C$=2.945×10⁶N $\Rightarrow$ 風速 $v\le\sqrt{F_{wind}/\rho_{air}A}=\underline{140}$ m/s.

25 (簡答題 20 分)

(1) $k=\underline{k_C+1}$. (2) 剛體繞溝渠 A 邊滾動至碰到 B 邊

(a) 之前瞬時角速度 $\omega_B^-=\underline{\sqrt{\omega_0^{\ 2}+\frac{2g}{kR}(1-\cos\theta)}}$ 和之後瞬時的角速度 $\omega_B^+=K\omega_B^-$, 其中 $K=\frac{k_C+\cos2\theta}{k}$;

滾過溝渠 B 邊之後在平面 BQ 上作純滾動的角速度 $\omega_{BQ}=\underline{\sqrt{(\omega_B^{\ +})^2-\frac{2g}{kR}(1-\cos\theta)}}$.

(b) 剛體在溝渠 A 邊時一直保持與其無滑動接觸的最大初始角速度 $\omega_{0\max}=\underline{\sqrt{\frac{g}{R}\left(\cos\theta-\frac{2}{k}(1-\cos\theta)\right)}}$

(c) 能使剛體滾過溝渠 B 邊時的最小初始角速度 $\omega_{0\min}=\underline{\sqrt{\frac{2g}{kR}(1-\cos\theta)(\frac{1}{K^2}-1)}}$.

(d) 要使(b)和(c)的條件都成立，角度 θ 必須滿足不等式 $f(\theta)=\underline{(2+kK^2)\cos\theta-2}\ge0$.

(3) 設 $\theta=30^0$, 及薄壁圓柱殼的 $k_C=\underline{1}$ 和 $k=\underline{2}$；$K=\frac{3}{4}$.

(a) 最大初始角速度 $\omega_{0\max}=\sqrt{(\sqrt{3}-1)\frac{g}{R}}=\underline{0.8556}\sqrt{\frac{g}{R}}$ 和最小初始角速度 $\omega_{0\min}=\sqrt{\frac{7}{9}(1-\frac{\sqrt{3}}{2})\frac{g}{R}}=\underline{0.3228}\sqrt{\frac{g}{R}}$.

(b)
- 取 $\omega_0=\omega_{0\min}$ 時: $\omega_B^-=0.4880\sqrt{\frac{g}{R}}$, $\omega_B^+=0.3660\sqrt{\frac{g}{R}}$, $\omega_{BQ}=\underline{0}$.
- 取 $\omega_0=\omega_{0\max}$ 時: $\omega_B^-=0.9306\sqrt{\frac{g}{R}}$, $\omega_B^+=0.6980\sqrt{\frac{g}{R}}$, $\omega_{BQ}=\underline{0.3532}\sqrt{\frac{g}{R}}$.