香港物理奧林匹克委員會主辦 香港科技大學高等研究院贊助

第 13 屆泛珠三角物理奧林匹克暨中華名校邀請賽力學基礎試賽題

(2017 年 2 月 3 日 9:00-12:00)

1. 在重量W=1,920N及半徑$AO=OB$=4m的均勻等厚度圓板內，挖去一個直徑為2m的圓洞AD。設C為帶洞圓板的重心，則OC=

A. 0.1m B. 0.2m C. 0.3m D. 0.4m E. 0.5m F. 0.6m

2. (續上題)若帶洞圓板在傾角為θ($\sin\theta$=0.8, $\cos\theta$=0.6)的傾斜力 F 作用下處於圖示平衡位置，則 F=

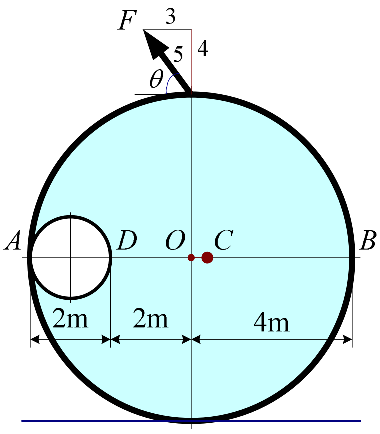
A. 75N B. 80N C. 85N D. 90N E. 95N F. 100N

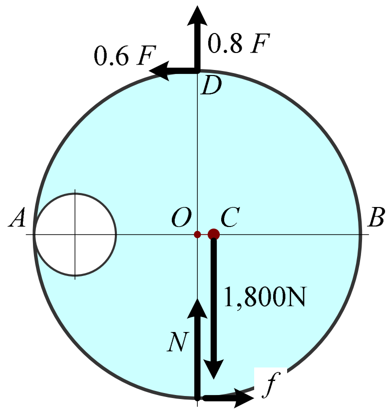
3. (續上題)地面作用於帶洞圓板摩擦力f 的方向和大小為

A. 向左45N B. 向右45N C. 向左48N D. 向右48N E. 向左60N F. 向右60N

4. (續上題)若帶洞圓板不會沿地面滑動，則它與地面之間靜摩擦係數的最小值$\mu_{min}\approx$

A. 0.022 B. 0.023 C. 0.024 D. 0.025 E. 0.026 F. 0.027





Ans. **B A B E** *Sol.*解: $F_x=0.6F$, $F_y=0.8F$,

	面積	x	重量
圓板 AOB	$\pi(4^2)=16\pi$	0	W =1,920N
圓洞 AD	$-\pi(1)^2=-\pi$	–3m	$-W/16$ =–120N
帶洞圓板	15π	x_C	$15W/16$ =1,800N

$$x_C=\frac{\Sigma A_i x_i}{\Sigma A_i}=\frac{(16\pi)0+(-\pi)(-3)}{(16\pi)+(-\pi)}=\underline{0.2\text{m}}.$$

$\Sigma F_x=0, f-0.6F=0 \Rightarrow f=0.6F$; $\Sigma F_y=0, N-1{,}800+0.8F=0 \Rightarrow N=1{,}800-0.8F$.

$\Sigma\tau_D=0, f(8\text{m})-1{,}800(0.2)=0 \Rightarrow f=\underline{45\text{N}}$ (向右) $\Rightarrow F=\underline{75\text{N}} \Rightarrow N=1{,}800-0.8\times75=1{,}740\text{N}$.

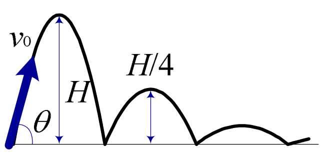
$f\le\mu N$ 即 $45\le1{,}740\mu \Rightarrow \mu\ge45/1{,}740\approx\underline{0.025862}$.

5. 將一個小球從水平地面上一點以傾角θ和初速度 v_0 拋出。小球到達最高點時離地面的距離為 H。小球和地面發生第一次碰撞後，反彈至離地面 H/4 的高度。以後每一次碰撞後反彈的高度都是前一次高度的 1/4。小球在停止彈跳時總飛行時間是

A. $4v_0\sin\theta/g$ B. $4v_0\cos\theta/g$ C. $2v_0\sin2\theta/g$ D. $2v_0\cos2\theta/g$ E. $v_0\sin2\theta/g$ F. $v_0\cos\theta/g$

6. (續上題)小球在停止彈跳時所移動的總水平距離是

A. $v_0^2\sin\theta/g$ B. $v_0^2\cos\theta/g$ C. $v_0^2\sin2\theta/g$ D. $v_0^2\cos2\theta/g$ E. $2v_0^2\sin2\theta/g$ F. $2v_0^2\cos2\theta/g$



Ans. **A E** *Sol.*解:

設$u=v_0\cos\theta$, 和$v=v_0\sin\theta$. 已知$\dfrac{h_{i+1}}{h_i}=\dfrac{1}{4}$, $h_1=H$, 則由$v^2=2gh$, 有 $\dfrac{v_{i+1}}{v_i}=\dfrac{1}{2}$, $v_1=v$, i=1,2,3,….

由 $v=gt$, 有小球每次飛行時間$t_i=2\dfrac{v_i}{g}$, i=1,2,3,….

小球總飛行時間$T=2\frac{v_1}{g}+2\frac{v_2}{g}+2\frac{v_3}{g}+\cdots=2\frac{v}{g}\times(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots)=2\frac{v}{g}\times2=\underline{\frac{4v_0\sin\theta}{g}}$,

總水平距離 $S=uT=\frac{4uv}{g}=v_0\cos\theta\cdot\frac{4v_0\sin\theta}{g}=\underline{\frac{2v_0^2\sin2\theta}{g}}$.

7. 把一個質量為M和半徑為R的星體完全打散，把它的質量送至無窮遠處，所需的能量E=

A. $3GM^2/5R$ B. $6GM^2/5R$ C. $9GM^2/5R$ D. $3GM/7R$ E. $6GM/7R$ F. $9GM/7R$

Ans. **A** *Sol.*解:

該星體密度$\rho=\frac{3M}{4\pi R^3}$. $E=-G\frac{M_r m_r}{r}$，其中$M_r=\frac{4}{3}\pi r^3\rho$，$m_r=\rho(-4\pi r^2dr)$.

$dE=-G\frac{(4\pi r^3\rho/3)(-4\pi r^2dr\rho)}{r}=\frac{16}{3}\pi^2\rho^2Gr^4dr$.

$E=\int_0^R dE=\frac{16}{3}\pi^2(\frac{3M}{4\pi R^3})^2G\int_0^R r^4dr=\frac{3GM^2}{R^6}\frac{r^5}{5}\Big|_0^R=\underline{\frac{3GM^2}{5R}}$.

8. 太陽系外行星於上一世纪末被發現。其中一顆行星環繞2.5太陽質量的脈衝星作圓形軌跡運動，週期為100日。以天文單位(AU)來表達的脈衝星與該行星距離為

A. 0.11 B. 0.17 C. 0.36 D. 0.40 E. 0.48 F. 0.57

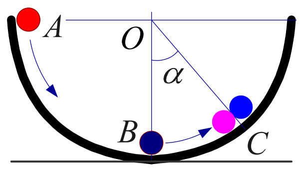
Ans **F** *Sol.*解: $F=G\frac{Mm}{r^2}=mr\omega^2=\frac{4\pi^2mr}{T^2}\Rightarrow\frac{r^3}{MT^2}=\frac{G}{4\pi^2}$.

M_1 = 1太陽質量, M_2 = 2.5太陽質量; T_1 =365day, T_2=100day; r_1=1AU.

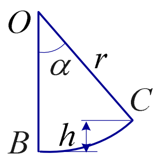
$\frac{r_2^3}{2.5\times100^2}=\frac{1^3}{1\times365^2}\Rightarrow r_2=2.5^{\frac{1}{3}}\times(\frac{100}{365})^{\frac{2}{3}}=\underline{0.5725\text{AU}}$.

9. 光滑圓形軌道固定在豎直面內，小球A和B的質量相同。A球從左邊與圓心O等高處由靜止開始沿軌道下滑，與靜止於軌道最低點的B球相撞，碰撞後連在一起繼續滑行上升，達到的最高點為C。則圓弧BC所對的圓心角α約為

A. 30^0 B. 39^0 C. 41^0 D. 48^0 E. 60^0 F. 71^0



Ans. **C** *Sol.*解:



$mgr=\frac{1}{2}mv^2,\ mv=(2m)V,\ V=\frac{v}{2}$,

$(2m)gh=\frac{1}{2}(2m)V^2=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}mv^2)=\frac{1}{2}(mgr),\quad h=\frac{r}{4}$, $\cos\alpha=\frac{r-h}{r}=\frac{3}{4}$, $\alpha=\underline{41.4^0}$.

10. 在離桌面高 5m 處手持一上一下很接近的兩個小球，下球的質量是上球的質量 3 倍。現將兩球同時釋放，設此後發生的下球與桌面的碰撞以及兩小球之間的碰撞都是完全彈性碰撞，而且碰撞時間極短。兩小球碰撞後，上球和下球能升到離桌面的高度是

A. 10m 和 0 B. 10m 和 5m C. 20m 和 0 D. 20m 和 10m E. 30m 和 10m F. 30m 和 15m

Ans. **C** *Sol.*解: (彈性碰撞、動量守恆定律和機械能守恆定律)

上球回升的高度 $h=\frac{v^2}{2g}=\left(\frac{3M-m}{M+m}\right)^2\frac{v_0^2}{2g}=\left(\frac{3M-m}{M+m}\right)^2h_0=\left(\frac{3\times3m-m}{3m+m}\right)^2\times5=\underline{20\text{m}}$.

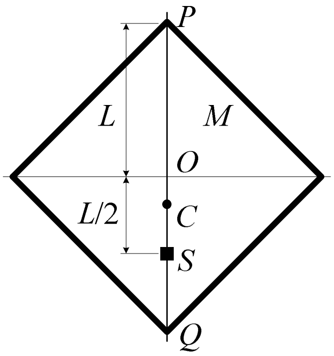
下球回升的高度 $h=\frac{v^2}{2g}=\left(\frac{M-3m}{M+m}\right)^2\frac{v_0^2}{2g}=\left(\frac{M-3m}{M+m}\right)^2h_0=\left(\frac{3m-3m}{3m+m}\right)^2\times5=\underline{0\text{m}}$.

11. 一個質量為M、對角線POQ長度為$2L$的均勻正方形薄板，關於板中心O的轉動慣量為$ML^2/3$。在OQ的中點S貼有一個質量為$M/3$的質點。設C為系統的質量中心，則$d_{PC}=kL$，其中k=
A. 13/12 B. 11/10 C. 9/8 D. 7/6 E. 5/4 F. 3/2

12. (續上題) 系統關於 P 點的轉動慣量 $I_P=k_PML^2$，其中 k_P=
A. 19/12 B. 19/24 C. 25/36 D. 25/24 E. 25/12 F. 19/48

13. (續上題) 系統關於質量中心 C 的轉動慣量 $I_C=k_CML^2$，其中 k_C=
A. 19/12 B. 19/24 C. 25/36 D. 25/24 E. 25/12 F. 19/48

14. (續上題) 將 P 端懸掛於天花板上，構成一個複合擺。系統簡諧振動的頻率$\omega^2=k_\omega(g/L)$，其中 k_ω=
A. 0.36 B. 0.48 C. 0.60 D. 0.72 E. 0.84 F. 0.96



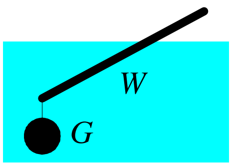
Ans. **C E F D** *Sol.*解:

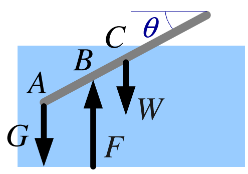
	m	d_P	$I_P=I_O+md_P^2$
正方形薄板 $POCSQ$	M	L	$=\frac{1}{3}ML^2+ML^2=\frac{4}{3}ML^2$
質點 S	$\frac{1}{3}M$	$\frac{3}{2}L$	$=(\frac{1}{3}M)(\frac{3}{2}L)^2=\frac{3}{4}ML^2$
薄板+質點	$\frac{4}{3}M$	d_{PC}	$\frac{4}{3}ML^2+\frac{3}{4}ML^2=\underline{\frac{25}{12}}ML^2$

$$M\times L+\frac{1}{3}M\times\frac{3L}{2}=\frac{4}{3}M\times d_{PC}\quad\Rightarrow d_{PC}=\underline{\frac{9}{8}}L.$$

$$I_P=I_C+md_{PC}^2,\ \frac{25}{12}ML^2=I_C+\frac{4}{3}M(\frac{9}{8}L)^2\Rightarrow I_C=\underline{\frac{19}{48}}ML^2.\quad \omega^2=\frac{mgl}{I}=\frac{(4M/3)g(9L/8)}{25ML^2/12}=\underline{\frac{18}{25}\frac{g}{L}}\approx 0.72\frac{g}{L}.$$

15. 重量為 W 的均勻桿浮在水中，一端懸掛著一個體積可忽略不計的小球。若桿長有 $1/n$ 部分浮出水面，則小球的重量 G=
A. $W(n-1)$ B. Wn C. $W(n+1)$ D. $W/(n-1)$ E. W/n F. $W/(n+1)$





Ans. **D** *Sol.*解:

$$\Sigma\tau_B=G\frac{(1-1/n)L}{2}\cos\theta-W\left(\frac{L}{2}-\frac{(1-1/n)L}{2}\right)\cos\theta=0\ \Rightarrow\ G=\frac{W(1-1/n)}{1-(1-1/n)}=\underline{\frac{W}{n-1}}.$$

16. 一個冰塊浮於杯中的水面，冰塊內有一個石子。當冰塊融解後，石子沉到杯底。與初始的水面高度比較，水面高度在冰塊融解時和石子沉到杯底後，有什麼改變？
A. 開始不變，然後升高 B. 開始不變，然後降低 C. 自始至終都不變
D. 開始降低，然後升高 E. 開始升高，然後降低 F. 自始至終都降低

Ans **B** *Sol.*解:

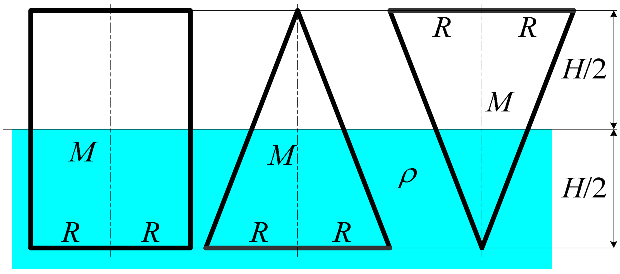
排開水的體積$V_{displaced}=\dfrac{M_{stone}+\rho_{ice}V_{ice}}{\rho_{water}}$.

設融解了的冰塊體積為ΔV_{ice}**,則排開水的體積減少** $\Delta V_{water}=\dfrac{\rho_{ice}\Delta V_{ice}}{\rho_{water}}$.

同時因為質量守恆，水的體積增加 $\Delta V_{water}=\dfrac{\rho_{ice}\Delta V_{ice}}{\rho_{water}}$，水面高度在冰塊融解時沒有變化.

可是當所有冰融解而石子沉到杯底後，排開水的體積是 $\dfrac{M_{stone}}{\rho_{stone}}<\dfrac{M_{stone}}{\rho_{water}}$，因此水面降低.

17. 質量為 M、高度為 H 和底面半徑為 R 的物體，包括(1)圓柱體，(2)正立圓錐體，(3)倒立圓錐體，靜止在密度為ρ的液體中，液體浸到物體的一半高度處。試填寫物體(a)與液體的密度之比P/ρ，(b)質量 M，和(c)受到微小干擾後的振盪頻率ω^2。



***Sol* 解:**

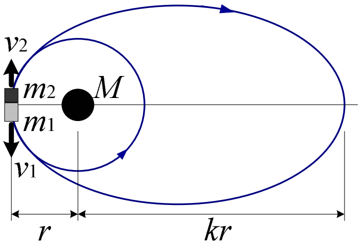
若圓柱/錐體的底面半徑 R，高 H 和質量 M，並設在液體內部分的體積 V' 和密度 P，則 $M=PV$.
已知液體密度ρ，則液體對圓錐體的浮力 $f=\rho V'g$.

由阿基米德定理 $G=f$，即 $Mg=\rho V'g \Rightarrow PV=\rho V' \Rightarrow$ 密度之比 $\dfrac{P}{\rho}=\dfrac{V'}{V}$.

	(1) 圓柱體	**(3) 倒立圓錐體**
體積 V，平衡時物體浸在液體內體積 V'，密度比	$V=\pi R^2H,\ V'=\dfrac{V}{2},\ \dfrac{P}{\rho}=\dfrac{V'}{V}=\dfrac{1}{2}$ **(a)**	$V=\dfrac{\pi R^2H}{3},\quad V'=\dfrac{V}{8},\quad \dfrac{P}{\rho}=\dfrac{V'}{V}=\dfrac{1}{8}$ **(a)**
質量 $M=\rho V'=$	$\rho\dfrac{\pi R^2H}{2}$ **(b)**	$\rho\dfrac{\pi R^2H}{24}$ **(b)**
向下微小位移 x 時物體浸在液體內體積 $V_x'=$	$\pi R^2(\dfrac{H}{2}+x)=\dfrac{M}{\rho}(1+\dfrac{2}{H}x)$	$\dfrac{1}{3}\pi r_x^2h_x=\dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{R}{H}(\dfrac{H}{2}+x)\right)^2(\dfrac{H}{2}+x)=\dfrac{1}{3}\pi(\dfrac{R}{H})^2(\dfrac{H}{2}+x)^3$ $\approx\dfrac{1}{3}\pi\dfrac{R^2}{H^2}\left((\dfrac{H}{2})^3+3(\dfrac{H}{2})^2x\right)=\dfrac{\pi R^2H}{24}(1+\dfrac{6}{H}x)=\dfrac{M}{\rho}(1+\dfrac{6}{H}x)$
合力$\Sigma F=G-f=Mg-\rho V'g=$	$Mg-\rho\left(\dfrac{M}{\rho}(1+\dfrac{2}{H}x)\right)g=-M\dfrac{2g}{H}x$	$Mg-\rho\left(\dfrac{M}{\rho}(1+\dfrac{6}{H}x)\right)g=-M\dfrac{6g}{H}x$
$\Sigma F=Ma\Rightarrow a+\omega^2x=0$	$a+\dfrac{2g}{H}x=0$，其中$\omega^2=\underline{\dfrac{2g}{H}}$ **(c)**	$a+\dfrac{6g}{H}x=0$，其中$\omega^2=\underline{\dfrac{6g}{H}}$ **(c)**

物體	**(2) 正立圓錐體**
體積 V，平衡時物體浸在液體內體積 V',密度比	$V=\dfrac{\pi R^2H}{3},\qquad V'=\dfrac{7V}{8},\qquad \dfrac{P}{\rho}=\dfrac{V'}{V}=\dfrac{7}{8}$ **(a)**
質量 $M=\rho V'=$	$\rho\dfrac{7\pi R^2H}{24}$ **(b)**
向下微小位移 x 時物體浸在液體內體積 $V_x'=$	$V-\dfrac{1}{3}\pi r_x^2h_x=\dfrac{\pi R^2H}{3}-\dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{R}{H}(\dfrac{H}{2}-x)\right)^2(\dfrac{H}{2}-x)=\dfrac{\pi R^2H}{3}-\dfrac{1}{3}\pi(\dfrac{R}{H})^2(\dfrac{H}{2}-x)^3$ $\approx\dfrac{\pi R^2H}{3}-\dfrac{\pi R^2H}{24}(1-\dfrac{6}{H}x)=\dfrac{7\pi R^2H}{24}+\dfrac{\pi R^2H}{24}\dfrac{6}{H}x=\dfrac{M}{\rho}(1+\dfrac{6}{7H}x)$
合力$\Sigma F=G-f=Mg-\rho V'g=$	$Mg-\rho\left(\dfrac{M}{\rho}(1+\dfrac{6}{7H}x)\right)g=-M\dfrac{6g}{7H}x$
$\Sigma F=Ma\Rightarrow a+\omega^2x=0$	$a+\dfrac{6g}{7H}x=0$，其中$\omega^2=\underline{\dfrac{6g}{7H}}$ **(c)**

18. 一個衛星靜止在距離地球為 r 之處，設地球質量為 M。衛星爆炸成為兩部分質量 m_1 和 m_2，分別以初速度 v_1 和 v_2，沿半徑為 R 的圓形軌道逆時針方向運行和沿橢圓型軌道順時針方向運行，並且 $v_2=cv_1$。
(1) 試求兩部分質量之比 m_1/m_2，以及 m_1 的速度 v_1；
(3) 已知 $c=\sqrt{7}/2$ 並且 m_2 在橢圓軌道中的最遠距離是 kR，試求常數 k；
(4) 試求 m_1 和 m_2 在爆炸地點再次相遇所需時間 t，寫成參量 G, M, R 的表達式。



Sol 解:

(1) 已知速度向量 $v_2=-cv_1$.
動量守恆 $0=m_1v_1-+m_2v_2= m_1v_1+m_2(-cv_1) \Rightarrow m_1/m_2=\underline{c}$.

(2) 考慮 m_1 圓形軌道 $G\dfrac{Mm_1}{r^2}=m\dfrac{v_1^{\,2}}{r} \Rightarrow v_1=\underline{\sqrt{\dfrac{GM}{r}}}$.

(3) 開普勒第二定律 $vr\sin\theta$=常量，其中 θ 是位置向量 r 與速度向量 v 的夾角.

設 v_2' 是 m_2 在橢圓軌道中最遠距離 kr 時的速度 $(v_2)r=(v_2')(kr) \Rightarrow v_2'=\dfrac{v_2}{k}=\dfrac{c}{k}v_1$.

能量守恆 $\dfrac{1}{2}m_2v_2^{\,2}-\dfrac{GMm_2}{r}=\dfrac{1}{2}m_2(v_2')^2-\dfrac{GMm_2}{kr} \Rightarrow v_2^2-\dfrac{2GM}{r}=(\dfrac{cv_2}{k})^2-\dfrac{2GM}{kr} \Rightarrow k=\dfrac{c^2}{2-c^2}=\dfrac{(\sqrt{7}/2)^2}{2-(\sqrt{7}/2)^2}=\underline{7}$.

(4) $a_1=r,\ a_2=\dfrac{r+kr}{2}=4r$. 開普勒第三定律 $a^3\propto T^2$. $(\dfrac{T_1}{T_2})^2=(\dfrac{a_1}{a_2})^3=\dfrac{1}{64} \Rightarrow \dfrac{T_1}{T_2}=\dfrac{1}{8}$ 即 $T_2=8T_1$.

m_1 和 m_2 再次相遇在爆炸地點所需時間 $t=T_2=8T_1=8\dfrac{2\pi r}{v_1}=16\pi r/\sqrt{\dfrac{GM}{r}}=\underline{16\pi\sqrt{\dfrac{r^3}{GM}}}$.

19. 彈道學
(1) 一個小球由原點以固定初速度 v_0，在一個均勻的引力場中被拋出。運動平面為 xOy，x 軸位於水平方向和 y 軸位於豎直向上方向。通過調節小球的發射角，位於範圍 $y\le y_0-kx^2$ 內的目標都能被擊中。試求常數 y_0 和 k 的表達式。(說明: i.可忽略空氣阻力; ii.以上不等式可被直接使用而無需證明.)
(2) 假設可以在水平面 $y=0$ 上任意選擇發射點，發射角也可以任意調整；目的是以最小的初速度 v_0 擊中一座半徑為 R 的球形建築物的最高點 P，並且要求小球在擊打到目標之前不得在建築物表面上反彈。試利用答題紙上特定的方格定性地畫出小球的最優化軌跡。(說明: 此部分僅根據軌跡圖形評分.)
(3) 試求: 小球準確地擊中球形建築的最高點 P，所需最小的發射速度 v_{min}，寫出其運算式。
Sol 解:

(1) 垂直向上拋出的小球可以到達點 $x=0, y=\dfrac{v_0^{\,2}}{2g}$。比較不等式 $y\le y_0-kx^2$，可得 $y_0=\underline{\dfrac{v_0^{\,2}}{2g}}$.

平拋小球 $y_0=0$ 時 $x=v_0t, y=-\dfrac{1}{2}gt^2 \Rightarrow y=-\dfrac{g}{2v_0^{\,2}}x^2\le -kx^2 \Rightarrow k\le\dfrac{g}{2v_0^{\,2}}$. $\therefore y\le\dfrac{v_0^{\,2}}{2g}-\dfrac{g}{2v_0^{\,2}}x^2$.

考慮漸近線 $y\to-\infty$：小球的軌跡是拋物線，並且在此限制中，對於給定 y 的水平位移相對於所述拋物線的曲率非常敏感：所述的拋物線越平坦，位移就越大。

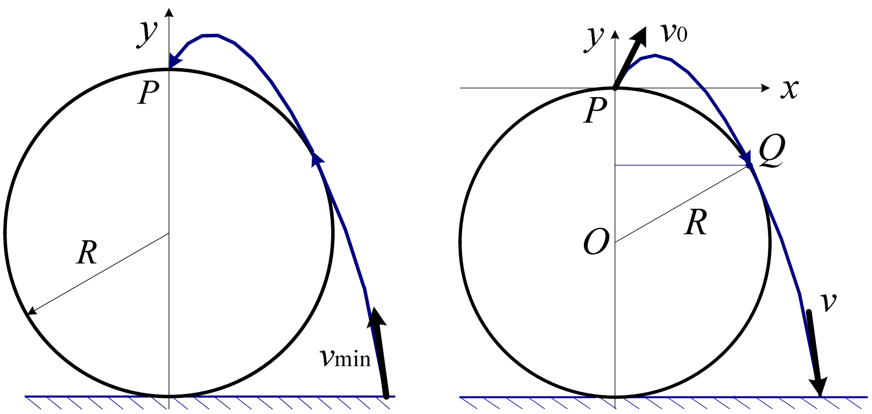
拋物線具有最平坦形狀，當球被水平地拋出 $x=v_0t, y=-\frac{1}{2}gt^2$，即其軌跡由式 $y=-\frac{g}{2v_0^2}x^2$ 給出。

考慮不等式 $y\le y_0-kx^2$，即 $-\frac{g}{2v_0^2}x^2\le -kx^2 \Rightarrow k\le\frac{g}{2v_0^2}$. 注意 $k<\frac{g}{2v_0^2}$ 將意味著，在拋物線區域 $y\le y_0-kx^2$

和給定的軌跡 $y=-\frac{g}{2v_0^2}x^2$ 之間存在的間隙。此軌跡應該是最佳擊中遠低於 $y\to-\infty$ 的目標，所以不應該有

這樣的間隙，故我們可以排除選項 $k<\frac{g}{2v_0^2}$。這給我們留下選項 $k=\frac{g}{2v_0^2}$。

(2) 小球軌跡的可逆性：[軌跡 1]小球以最小的初速度 v_0 被拋出，擊中一座半徑為 R 的球形建築物的最高點 P，並且在此之前不得在建築物表面上反彈；[軌跡 2]小球以最小初始速度 v_0' 從最高 P 點被拋出，落在地面之前沒有在建築物表面上反彈。最優軌跡需要在某處與建築物表面相切，如圖所示。



(3) 以建築物頂部 P 為原點，相切點由方程組 $x^2+(y+R)^2=R^2, y=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{g}{2v_0^2}x^2$ 確定。 (i)

消去 y，這成為關於 x 一元二次方程：$(\frac{g}{2v_0^2})^2x^4+(\frac{1}{2}-\frac{gR}{v_0^2})x^2+(\frac{v_0^2}{4g}+R)\frac{v_0^2}{g}=0$。 (ii)

$$\Delta=(\frac{1}{2}-\frac{gR}{v_0^2})^2-4(\frac{g}{2v_0^2})^2(\frac{v_0^2}{4g}+R)\frac{v_0^2}{g}=(\frac{1}{2}-\frac{gR}{v_0^2})^2-(\frac{g}{v_0^2})(\frac{g}{v_0^2})(\frac{v_0^2}{4g}+R)\frac{v_0^2}{g}$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{gR}{v_0^2}+(\frac{gR}{v_0^2})^2-(\frac{1}{4}+\frac{gR}{v_0^2})=\frac{gR}{v_0^2}(\frac{gR}{v_0^2}-2)=0\Rightarrow \frac{gR}{v_0^2}=0 \text{ 或 } \frac{gR}{v_0^2}-2=0\Rightarrow\frac{gR}{v_0^2}=2\Rightarrow v_0^2=\frac{gR}{2}. \quad \text{(iii)}$$

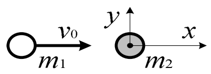
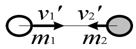
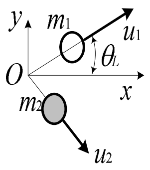
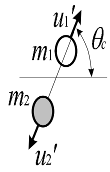
由能量守恆定律 $\frac{1}{2}mv_0^2+mg(2R)=\frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow$ 落地速度 $v^2=v_0^2+4gR=\frac{gR}{2}+4gR$.

由运动軌跡的可逆性，小球準確地擊中球形建築的最高點 P，所需最小的發射速度 $v_{min}=3\sqrt{\frac{gR}{2}}$.

附說明：關於切點 Q 位置 (X,Y)

(iii) → (ii),(i): $X^4-\frac{3}{2}R^2X^2+\frac{9}{16}R^4=(X^2-\frac{3}{4}R^2)^2=0\Rightarrow X=\frac{\sqrt{3}}{2}R\Rightarrow Y=\frac{R}{4}-\frac{X^2}{R}=-\frac{1}{2}R$.

20. 一個在研究碰撞問題時比較方便的方法是，把觀察碰撞現象的坐標系，由實驗室坐標系轉化到質心坐標系。如圖所示，在實驗室坐標系中，一個質量為 m_1 的粒子以速度 v_0，與另一個質量為 m_2 的靜止粒子作完全彈性碰撞。

	實驗室坐標系	質心坐標系
碰撞前		
碰撞後		

(1) 試求：(以參量 m_1, m_2 和 v_0 表達)

(i) 質量 m_1 和 m_2 系統質量中心 C 的速度 v_c；(ii) 在質心坐標系中質量 m_1 和 m_2 的速度 v_1'和 v_2'。

(2) 入射粒子 m_1 在實驗室坐標系和質心坐標系的散射速度以及散射角度分別是 $\boldsymbol{u}_1$ 和 $\boldsymbol{u}_1'$ 以及 θ_L 和 θ_C。試繪製一個示意圖，以顯示速度向量 $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_1'$和 $\boldsymbol{v}_c$ 之間的關係，並須在圖中適當的地方標示出角 θ_L 和 θ_C。

(3) 利用(2)或者其他方法，試把角 θ_L 表達為角 θ_C 的函數，即 $\theta_L = f(\theta_C)$。

(4) 考慮彈性碰撞的可能情況 $m_1 \geq m_2$ 和 $m_1 < m_2$，試分別求出散射角 θ_L 的最大值。

(5) 如果粒子 m_1 的最終速度是其初始值的一半，試求在質量 $m_1 = m_2$ 情況時的散射角 θ_L。

***Sol* 解:**

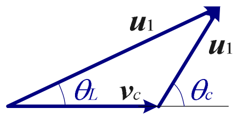
(1)

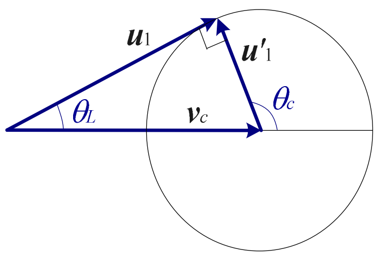
(i) **質心位移** $x_c = \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = -\dfrac{m_1}{m_1 + m_2} x_0 \Rightarrow \dfrac{dx_c}{dt} = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\dfrac{dx_0}{dt} \Rightarrow$ **質心速度** $v_c = \underline{\dfrac{m_1}{m_1 + m_2} v_0}$.

(ii) **在質心 C 坐標系中** $v_0 = v_c + v_1'$

$\Rightarrow$ **質量 m_1 速度** $v_1' = v_0 - v_c = \underline{\dfrac{m_2}{m_1 + m_2} v_0}$ **;** $0 = v_c + v_2' \Rightarrow$ **質量 m_2 速度** $v_2' = -v_c = \underline{-\dfrac{m_1}{m_1 + m_2} v_0}$.

(2) **三個速度向量之間的關係** $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_c + \boldsymbol{u}_1'$.





(3) **動量守恆** $m_1 v_1' + m_2 v_2' = 0 = m_1 u_1' + m_2 u_2' \Rightarrow \quad m_1 v_1' = m_2 v_2', m_1 u_1' = m_2 u_2'$.

動能守恆 $\dfrac{1}{2} m_1 (v_1')^2 + \dfrac{1}{2} m_2 (v_2')^2 = \dfrac{1}{2} m_1 (u_1')^2 + \dfrac{1}{2} m_2 (u_2')^2$

$\Rightarrow$ **完全彈性碰撞** $u_1' = v_1' = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} v_0$, $v_c = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} v_0$. $\tan\theta_L = \dfrac{u_1' \sin\theta_C}{v_c + u_1' \cos\theta_C} = \underline{\dfrac{m_2 \sin\theta_C}{m_1 + m_2 \cos\theta_C}}$.

(4) **當 $m_1 \geq m_2$ 時,考慮所有可能 θ_c 值，當 u_1 與由 u_1' 因 θ_c 變化而產生的圓相切時，散射角度 θ_L 最大，即速度向量 u_1 與垂直於 u_1'. ∴ 散射角 θ_L 的最大值** $\sin\theta_{L\max} = \dfrac{u_1'}{v_c} = \underline{\dfrac{m_2}{m_1}}$.

當 $m_1 < m_2$ 時，由 u_1' 生成的圓包圍由速度向量 u_1,u_1' 和 v_c 形成的三角形。因此，所有散射角都是可能的。
∴ 散射角的最大值 $\theta_{L\max} = \underline{\pi}$.

(5) **當 $m_1 = m_2$ 時, $u_1' = u_1 = v_c = v_0/2$, 由速度向量 u_1,u_1' 和 v_c 形成的三角形是等邊三角形 $\theta_L = 60^0$.**

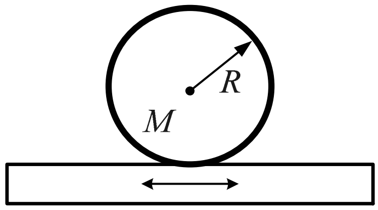
21. 一個質量為 M 和半徑為 R 的均勻剛性球體/圓柱體/薄壁球殼/薄壁圓柱殼，對其質心軸的轉動慣量 $I=kMR^2$。剛體在粗糙的水平桌面上自由滾動。在外力驅動下，桌面以振幅 A 和固有頻率ω作水平簡諧振動。

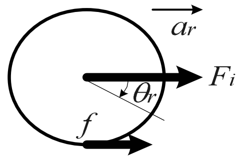
(1) 試求：(a)對振動台上的觀察者來說，剛體在動參考系中的振動幅度 A_r；和 (b)對靜止的觀察者來說，剛體在實驗室參考系中的振動幅度 A_a。

(2) 設剛體和桌面之間的靜摩擦係數為μ，試求當剛體開始在桌面上滑動時刻的振幅 A_0。

(3) 設固有頻率ω=2rad/s, 靜摩擦係數μ=0.2 和取 g=10m/s^2，試求當球體開始在桌面上滑動時的振幅 A_0。

(4) 已知剛體的轉動慣量。試在答題紙上填寫各剛體的振動幅度 A_r, A_a 和 A_0。





***Sol* 解:**

(1) 振動台的水平位移 $x_e=A\sin\omega t$, 則加速度 $a_e=d^2x_e/dt^2=-A\omega^2\sin\omega t$.

振動台是一個非慣性參考系。因此，剛體受到一個虛力 $F_i=-Ma_e=-M(-A\omega^2\sin\omega t)=AM\omega^2\sin\omega t$.

設剛體相對於桌面的位移為 $x_r=A_r\sin\omega t$, 則加速度 $a_r=d^2x_r/dt^2=-A_r\omega_2\sin\omega t$.

設剛體相對於桌面的角位移為θ_r，則角加速度$\alpha_r=d^2\theta_r/dt^2$ 且對於無滑動滾動 $a_r=R\alpha_r$.

由牛頓運動定律 $F_i+f=Ma_r \Rightarrow AM\omega^2\sin\omega t+f=-A_rM\omega_2\sin\omega t \Rightarrow$ 摩擦力 $f=-(A+A_r)M\omega^2\sin\omega t$. (i)

由牛頓轉動定律 $-fR=I\alpha_r \Rightarrow$ 摩擦力 $f=-\dfrac{kMR^2}{R}\dfrac{a_r}{R}=-kMa_r=-kM(-B\omega_2\sin\omega t)=kA_rM\omega^2\sin\omega t$. (ii)

由式(i)和(ii)可得相對振幅(對振動台上的觀察者來說,剛體的振動幅度) $A_r=-\dfrac{1}{k+1}A$ (iii)

$\Rightarrow$ 剛體的相對位移 $x_r=A_r\sin\omega t=-\dfrac{A}{k+1}\sin\omega t$. 絕對位移 $x_a=x_e+x_r=(A+A_r)\sin\omega t=\dfrac{k}{k+1}A\sin\omega t$. (iv)

∴ 剛體在實驗室參考系中的振動幅度 $A_a=\dfrac{k}{k+1}A$ (對靜止的觀察者來說,剛體的振動幅度). (v)

(2) 摩擦力 $f=kA_rM\omega^2\sin\omega t=-\dfrac{k}{k+1}AM\omega^2\sin\omega t$. (vi)

剛體可在粗糙的水平振動台上自由滾動，須靜摩擦力 $f\le\mu Mg$ 時.

最大靜摩擦力 $f_{\max}=\dfrac{k}{k+1}A_0M\omega^2=\mu Mg \Rightarrow$ 當剛體開始在桌面上滑動時振幅 $A_0=(1+\dfrac{1}{k})\dfrac{\mu g}{\omega^2}$.

(3) 已知ω=2rad/s, μ=0.2 和 g=10m/s^2;當球體開始在桌面上滑動時的振幅 $A_0=(1+\dfrac{1}{k})\dfrac{0.2\times10}{2^2}=\dfrac{k+1}{2k}$.

(4)

剛體 $I=kMR^2$, k=	薄壁圓柱殼	薄壁球殼	圓柱體	球體
	2/3	1/2	2/5	2/3
相對振幅（對振動台上觀察到的剛體振動幅度) $A_r=-\dfrac{1}{k+1}A$	$-\dfrac{1}{2}A$	$-\dfrac{3}{5}A$	$-\dfrac{2}{3}A$	$-\dfrac{5}{7}A$
絕對振幅（實驗室中觀察到的剛體振動幅度) $A_a=\dfrac{k}{k+1}A$	$\dfrac{1}{2}A$	$\dfrac{2}{5}A$	$\dfrac{1}{3}A$	$\dfrac{2}{7}A$
開始滑動時振幅 $A_0=(1+\dfrac{1}{k})\dfrac{\mu g}{\omega^2}$	$2\dfrac{\mu g}{\omega^2}$	$2.5\dfrac{\mu g}{\omega^2}$	$3\dfrac{\mu g}{\omega^2}$	$3.5\dfrac{\mu g}{\omega^2}$
ω=2rad/s 和μ=0.2, $A_0=(1+\dfrac{1}{k})\dfrac{1}{2}$m	1m	1.25m	1.5m	1.75m